Incluyendo domínios en anillos de división

JAVIER SÁNCHEZ SERDÀ
Departamento de Matemática - IME
Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil
e-mail: jsanchez@ime.usp.br

ALTENCOA6-2014
San Juan de Pasto, Colombia
11 al 15 de agosto de 2014

Resumen

En este resumen los anillos son asociativos y con elemento unidad. Homomorfismos entre anillos envían elemento unidad en elemento unidad.

Una *inclusión* de un anillo R en un anillo D es homomorfismo inyectivo $R \hookrightarrow D$ en el que identificamos R con su imagen.

Un *anillo de división* D es un anillo diferente de cero tal que todo elemento no nulo es invertible o en otras palabras, para todo $x \in D \setminus \{0\}$ existe $y \in D$ tal que $xy = yx = 1$.

Un *anillo de división de fracciones* de un anillo R es un inclusión $R \hookrightarrow D$ donde D es un anillo de división tal que no existe un anillo de división E tal que $R \subseteq E \subsetneq D$. Por ejemplo, dado el anillo $\mathbb{Z}$ tenemos las inclusiones $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$, pero solo $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ es un anillo de división de fracciones de $\mathbb{Z}$.

Una pregunta clásica en teoria de anillos es ?uando un anillo tiene un anillo de división de fracciones? Cuando R es un anillo conmutative la respuesta es bien conocida

(a) *Existencia*: R se incluye en un anilllo de división si y sólo si R es un *dominio*, esto es, R es un anillo diferente de cero tal que $xy = 0$ implica que $x = 0$ o $y = 0$.

(b) *Unicidad*: existe el *cuerpo de fracciones* $Q(R)$ de R y una inclusión $\lambda\colon \lambda\colon R \hookrightarrow Q(R)$ que verifica la siguiente propriedad. Dada cualquier inclusión $\psi\colon R \hookrightarrow E$ de R en un anillo de división E, existe un homomorfismo de anillos $\bar{\psi}\colon Q(R) \hookrightarrow E$ tal que $\bar{\psi}\lambda = \psi$.

(c) *Forma de los elementos*: El anillo de división de fracciones $Q(R)$ se construye de manera análoga a como se forman los números racionales a partir de los enteros. Cada elemento de $Q(R)$ es de la forma $s^{-1}r$ para ciertos $r \in R$ y $s \in R \setminus \{0\}$.

Más aún, tenemos un método para determinar cuando dos fracciones $s_1^{-1}r_1$, $s_2^{-1}r_2$ representan el mismo elemento (si y sólo si $s_1r_2 = s_2r_1$).

Para una clase de dominios no conmutativos la pregunta de si pueden ser incluidos en anillos de división tiene una respuesta similar. Esta clase es la de los dominios de Ore (i.e. que satisfacen la condición de Ore). Pero en general la situación no es esa.

Ciertamente, ser un dominio es una condición necesaria para que un anillo se pueda incluir en un anillo de división. Pero existen dominios que no se pueden incluir en un anillo de división.

Existen también dominios (que no son de Ore) que tienen varios anillos de división de fracciones diferentes. Es decir, existen anillos de división de fracciones $\lambda_1 R \hookrightarrow D_1$, $\lambda_2 R \hookrightarrow D_2$ tales que no existe un homomorfismo $\bar{\psi}\colon D_1 \to D_2$ tal que $\bar{\psi}\lambda_1 = \lambda_2$. El álgebra libre $k\langle X\rangle$, donde X es un conjunto con al menos dos elementos, es un ejemplo de un dominio que tiene infintos anillos de división de fracciones.

Además, en el caso de domínioes que no son de Ore y con un anillo de división de fracciones $R \hookrightarrow D$, los elementos de D no son todos de la forma $s^{-1}r$.

Consideremos ahora los posibles homomorfismos $f\colon R \to D$ de un anillo R en anillos de división D tales que D está generado, como anillo de división, por la imagen de f. Decimos que $f\colon R \to D$ es un anillo de división R-épico.

En el caso conmutativo, se puede probar que, módulo isomorfismo, todos los anillos de división épicos estám determinados por los ideales primos de R, que son el núcleo del homomorfismo. Más precisamente, si R es un anillo conmutativo y consideramos el conjunto de los ideales primos $\mathfrak{p}$ de R, entonces los anilllos de división R-épicos son, salvo isomorfismo,

$$R \to R/\mathfrak{p} \hookrightarrow Q(R/\mathfrak{p}),$$

los homomorfismos naturales a los cuerpos de fracciones de los dominios $R/\mathfrak{p}$ donde $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de R. En el caso no conmutativo, el núcleo no determina los anillos de división R-épicos. Por ejemplo, un dominio con dos anillos de división de fracciones diferentes $R \hookrightarrow D_1$, $R \hookrightarrow D_2$ tiene dos homomorfismos con núcleo $\{0\}$.

P. M. Cohn demostró que lo que caracteriza a dos anillos de división R-épicos $R \to D_1$ y $R \to D_2$ es el conjunto de matrices cuadradas con entradas en R cuya imagen son matrices invertibles en D_1 y D_2.

Durante las cuatro sesiones de este cursillo, queremos ilustrar esta situación y dar una breve introducción a la teoria de anillos de división desarrollada por P. M. Cohn.

Programa

Sesión 1. Localización conmutativa: Conceptos básicos. Localización sobre un conjunto multiplicativo. Cuerpo de fracciones. Localización sobre un ideal primo.

Sesión 2. Localización de Ore: Conceptos básicos. Construcción de la localización. Propriedad universal de la localización.

Sesión 3. Ejemplos: Anillos de polinomios torcidos. Ejemplo de un dominio con infinitos anillos de división de fracciones.

Sesión 4. Introducción a la teoría de los anillos de división de P. M. Cohn: Conceptos básicos. Localización universal en un conjunto de matrices.

Bibliografía

1. M. F. Atiyah and I. G. Macdonald *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969.

2. P. M. Cohn, *Skew Fields. Theory of general division rings*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 57, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

3. P. M. Cohn, *Free Ideal Rings and Localization in General Rings*, New Mathematical Monographs, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

4. T. Y. Lam, *Lectures on Modules and Rings*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 189, Springer-Verlag, New York, 1999.