Álgebras y variedades Bethe

Wilson Fernando Mutis Cantero
Universidade de São Paulo, Brasil
Email: wfmutis@gmail.com

Resumen. Poder determinar cuando una álgebra es libre como módulo (a izquierda o derecha) sobre una subalgebra (conmutativa), tiene importantes aplicaciones en la Teoría de Representaciones de algebras en general. Particularmente, en teoría de representaciones de álgebras de lie, el famoso teorema de B. Kostant (1963)[2] afirma que si g es una $\mathbb{C}$-álgebra de Lie semisimple entonces su álgebra envolvente universal $U(g)$ es un módulo libre sobre su centro, en esta linea de estudio, S. Ovsienko (2003) [3] prueba que $U(gl_N)$ es un módulo a izquierda (derecha) libre sobre su subálgebra de Gelfand-Tsetlin. En particular, los caracteres de la subálgebra de Gelfand-Tsetlin de $U(gl_N)$ parametrizan los módulos de Gelfand-Tsetlin irreducibles. Igualmente, un análogo del teorema de Kostant para la clase de álgebras filtradas especiales fue probado por V. Futorny y S. Ovsienko (2005)[4], ellos establecen el siguiente resultado clave para estas álgebras:

Teorema 1. *Sea U una k-álgebra filtrada especial. Si $g_1, \cdots, g_t \in U$ son elementos que conmutam entre si cuyas imagenes graduadas forman una intersección completa para la álgebra graduada asociada de U, entonces U é libre como $k[g_1, \cdots, g_t]$-modulo a izquierda (derecha).*

El anterior teorema da un método para estudiar cuando una álgebra (filtrada especial) es libre como modulo sobre una cierta subálgebra conmutativa, estudiando las componentes irreducibles de la variedad asociada a la subalgebra, de hecho la razon por la cual la álgebra envolvente universal sea libre sobre su centro es que la correspondiente variedad de matrices nilpotentes es intersección completa y es irreducible. En el caso de la subálgebra de Gelfand-Tsetlin de $U(gl_N)$ la correspondiente variedad no es irreducible, pero es intersección completa de dimensión pura $\frac{1}{2}N(N-1)$. Para el álgebra envolvente universal de una álgebra de lie semisimple (aun reductiva) g se sabe que contiene una familia de subalgebras conmutativas B^{μ} parametrizadas por elementos $\mu \in g^*$, llamadas **Álgebras Bethe**. En el caso particular de la álgebra envolvente universal de la álgebra truncada $g_r(N) = (gl_N \otimes \mathbb{C}[t])$, V. Futorny e A. Molev [5] muestran que la varidad Bethe en $U(g_m(2))$ es intersección completa de dimensión pura m y por lo tanto $U(gl_m(2))$ es libre sobre la subálgebra Bethe, además ellos prueban que $U(gl_3)$ é livre sobre a subálgebra Bethe $B(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ para todos los valores genéricos λ_i, $i = 1, 2, 3$. De hecho, el caso general es verdadero devido a argumentos de deformación [7]. Casos mas generales de álgebras Bethe $B^{\mu} \subset U(gl_N)$ donde $\mu \in gl_N$ es una matriz em bloques de Jordan aun no han sido estudiados, o sea, no se conoce si la álgebra envolvente universal $U(gl_N)$ es libre como B^{μ}-modulo. En la ponencia presentaré mi proyecto de cualificación de doctorado donde junto con mi orientador y coorientador nos proponemos determinar las condiciones bajo las cuales la variedad Bethe $V(B^{\mu})$ es equidimensional, esto permite aplicar el teorema 1 en la álgebra $U(gl_N)$ vista como B^{μ}-modulo. Sería un resultado muy positivo si la álgebra $U(gl_N)$ resultase libre como B^{μ}-modulo para toda $\mu \in gl_N$. Nosotros conjeturamos que eso debe suceder

Referencias

[1] V. Futorny, S. Ovsienko. *Fibers of characters of Gelfand-Tsetlin modules*, Trans. AMS to appear.

[2] B. Kostant. *Lie groups representations on polynomial rings* Amer. J. Math, 85, (1963),321-404.

[3] S. Ovsienko. *Strongly nilpotent matrices and Gelfand-Tsetlin modules* J. Linear Algebra and Appl,365, (2003), 349-367.

[4] V. Futorny, S. Ovsienko. *Kostant's theorem for special filtered algebras* Bull. London Math. Soc, 37, (2005), 187-199.

[5] V. Futorny, A. Molev. *Gelfand-Tsetlin and Bethe jet schemes for gl_N* [6] A. Molev. *Casimir elements for certain polynimial current lie algebras* Centre for Math. and its App. Australian National University, (1996).

[7] D. Panyushev, O. Yakimova. *The argument shift method and maximal commutative subalgebras of poisson algebras* arXiv:math/0702583v1. (2007)