Invariantes antisimétricos de un álgebra

Nayeli del Carmen González Novelo

Centro de Investigación en Matemáticas A.C., Guanajuato, México

Email: nayeli@cimat.mx

Resumen. Un hecho bien conocido en teoría de matrices es que dada matriz antisimétrica $\widetilde{\mathbf{C}}$ sobre $\mathbb{Z}$ se cumple que $\mathbf{det}(\widetilde{\mathbf{C}})$ es el cuadrado de un número entero $\mathbf{p}$. Más aún, el teorema de la forma normal antisimétrica establece que $\widetilde{\mathbf{C}}$ es $\mathbb{Z}$-congruente a una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{g}_1 \\ -\mathfrak{g}_1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{g}_2 \\ -\mathfrak{g}_2 & 0 \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{g}_r \\ -\mathfrak{g}_r & 0 \end{pmatrix} \oplus O_{n-2r},$$

donde $\mathfrak{g}_i | \mathfrak{g}_{i+1}$ para $k = 1, \ldots, r$ y r es el rango de $\widetilde{\mathbf{C}}$.

En otro orden de ideas, sean k un campo algebraicamente cerrado, $\mathbf{B}$ un k- álgebra de dimensión finita, $P_1, \ldots, P_n$ un sistema completo de $\mathbf{B}$-módulos proyectivos inescindibles y $C_{\mathbf{B}} = (c_{ij})$, donde $c_{ij} = dim_k Hom(P_i, P_j)$. Consideremos la transormación de coxeter de $\mathbf{B}$ dada por $\Phi_{\mathbf{B}} = -C_{\mathbf{B}}^{-1} C_{\mathbf{B}}^{t}$ y su polinomio característico $\chi_{\mathbf{B}}$, entonces, si $\mathbf{B}$ tiene dimensión global finita $\chi_{\mathbf{B}}(-1)$ resulta ser el cuadrado de un número entero.

El objetivo de esta charla es conectar esta última propiedad del álgebra con los hechos de teoría de matrices antes mencionados. Comenzaremos asociando una sucesión de enteros $\mathfrak{g}_1^{\mathbf{B}} | \ldots | \mathfrak{g}_s^{\mathbf{B}}$ al álgebra $\mathbf{B}$ -

los factores invariantes antisimétricos- y veremos que

$$|\mathbf{det}(\Phi_{\mathbf{B}}(-1))| = [\mathfrak{g}_s^{\mathbf{B}}]^2,$$

también veremos que los los factores invarientes antisimétricos de un álgebra poseen ciertas propiedades de interés en la teoría de representaciones de álgebras asociativas, a saber:

1: Sean **A** y **B** $k-$álgebras básicas de dimensión finita para las cuales existe una equivalencia triangular $F : D^b(A) \to D^b(B)$. Entonces $\mathfrak{g}_k^A = \mathfrak{g}_k^B$.

2:Consideremos la extensión por un punto $\mathbf{A} = \mathbf{B}[M]$ de un álgebra **A** definida como el álgebra $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{B} & M \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right)$, entonces $\mathfrak{g}_k^A \mid \mathfrak{g}_k^B \mid \mathfrak{g}_{k+1}^A$.

PALABRAS CLAVES. Factores invariantes. Pfaffiano. Extensión por un punto. Invariante derivado.

REFERENCIAS

[1] I. Assem, D. Simson, A. Skowrońsky, elments of Representation Theory of Associative Algebras, 1 y 3. Cambridge University Press. Cambridge 2006.

[2] D.M. Cvetković and M. Doob, H. Sachs, Spectra of Graphs, Theory and Application, Academic Press, 1979.

[3] D. Happel, Triangulated Categories en the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras. Cambridge University Press, Cambride 1988.

[4] M. Newman, Integral Matrices. Academic Press, New York, 1972.

[5] J.A. de la Peña. Spectral analysis of finite dimensional algebra and singularities, Trends in Representations Theory of Algebras and Related Topics, ed. A. Skowrónski, EMS Publishing House, (2008) 541-588.

[6] Queiró, J.F. Invariant factors as appproximation numbers, Linear Algebra and its applications, 49 (1983), 131-136