

Acerca de una Conjetura de Brian Hartley

ADRIANA MARÍA ALZATE PATIÑO, ALEXANDER HOLGUÍN VILLA

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia

Email: aalzatep@uis.edu.co, holguin@uis.edu.co

RESUMEN. Sean FG el álgebra de grupo del grupo de torsión G sobre el cuerpo infinito F , y $U(FG)$ su grupo de unidades. Estableceremos en detalle la confirmación de la Conjetura de Brian Hartley, debida a Giambruno, Sehgal y Valenti, en [2], es decir, probaremos que si $U(FG)$ satisface una identidad de grupo, entonces FG satisface una identidad polinomial. **PALABRAS CLAVES.** Álgebras de grupo, grupo de unidades, identidades de grupo, identidades polinomiales.

Sea F un cuerpo. Dado un anillo R con unidad, decimos que R satisface una identidad polinomial que abreviaremos por R es IP o $R \in IP$, si existe un polinomio $0 \neq f(x_1, \dots, x_n)$ en la F -álgebra libre $F \langle x_1, \dots, x_n, \dots \rangle$ en el conjunto infinito enumerable $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ de variables no conmutativas tal que $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ para todos los $a_i \in R$. Si denotamos por $\mathcal{U}(R)$ al grupo de unidades de R , diremos que $H \subseteq \mathcal{U}(R)$ verifica una identidad de grupo que abreviaremos por H es IG o $H \in IG$, si existe una palabra no-trivial w (es decir, en la representación de w , no existen dos símbolos consecutivos de la forma $x_i^{\epsilon_i} x_i^{-\epsilon_i}$, donde $\epsilon_i = \pm 1$) en el grupo libre $\langle x_1, \dots, x_n, \dots \rangle$, sobre un conjunto enumerable de variables tal que $w(u_1, u_2, \dots, u_n) = 1$, para todos los $u_i \in H$.

El álgebra de grupo FG del grupo G sobre el cuerpo infinito F , es una gran fuente de unidades. En este espacio vectorial Brian Hartley conjeturó alrededor de 1980 lo siguiente:

Conjetura. Sean G un grupo de torsión y F un cuerpo infinito. Si el grupo de las unidades $\mathcal{U}(FG)$ de FG satisface una identidad de grupo, entonces FG satisface una identidad polinomial.

Los estudios para intentar resolver positivamente la Conjetura no se hicieron esperar. En 1981, Warhurst en su tesis doctoral, [8], trabajó con un tipo especial de IG que satisfacen las unidades $\mathcal{U}(FG)$. En ese mismo año, en carta privada dirigida a B. Hartley, Pere Menal sugirió una solución para algunos p -grupos [5].

Posteriormente, Giambruno, Jespers y Valenti [1] manejaron tanto el caso en característica cero como el de característica $p > 0$, cuando G no tiene p -elementos. Usando la construcción de P. Menal, Giambruno, Sehgal y Valenti muestran en [2], que si $U(FG)$ satisface una IG , entonces FG satisface una IP , es decir, confirman la Conjetura.

Sea $N = N(FG)$ la suma de todos los ideales nilpotentes de FG . Usando algunos resultados (clásicos) técnicos Giambruno, Sehgal y Valenti en [2], dividen la prueba de la confirmación de la Conjetura en los siguientes tres casos:

1. FG es semiprima, es decir, $N = 0$,

2. N es (no cero) nilpotente, y
3. N es nil pero no nilpotente.

Una vez la Conjetura fue solucionada, se hizo natural establecer condiciones necesarias y suficientes para que $\mathcal{U}(FG)$ verifique una IG . Tales condiciones fueron dadas por Passman en [6]. Todos los trabajos anteriores están bajo la hipótesis que F es un cuerpo infinito, condición que permite aplicar el argumento tipo determinante de Vandermonde, ver por ejemplo [2, Teorema Caso (iii)].

Como parte de su tesis doctoral, en [3] Liu modifica la prueba original de [2] y resuelve la Conjetura para cuerpos de cualquier tamaño. Sus argumentos fueron decisivos y permitieron generalizar los resultados de [7] a cuerpos no necesariamente infinitos. Tales resultados fueron obtenidos por Liu y Passman en [4].

REFERENCIAS

- [1] A. Giambruno, E. Jespers and A. Valenti. Group identities on units of rings. Arch. Math. (Basel) 63 (1994): 291-296.
- [2] A. Giambruno, S. K. Sehgal, A. Valenti: Group algebras whose units satisfy a group identity, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997): 629-634.
- [3] C. H. Liu: Group algebras with units satisfying a group identity, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999): 327-336.
- [4] C. H. Liu, D. S. Passman: Group algebras with units satisfying a group identity II, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999): 337-341.
- [5] P. Menal. Private letter to B. Hartley, April 6, (1981).
- [6] D. S. Passman. The algebraic structure of group rings. Wiley, New York (1977).
- [7] D. S. Passman: Group algebras whose units satisfy a group identity II, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997): 657-662.
- [8] D. S. Warhurst. Topics in group rings, Ph. D. Thesis, Manchester, (1981).