ACERCA DE UNA CONJETURA DE BRIAN HARTLEY

Adriana María Alzate Patiño

Maestría en Matemáticas

Orientador:

Prof. Alexander Holguín Villa

Universidad Industrial de Santander

Escuela de Matemáticas

Agosto de 2014

Bucaramanga

Definición

Sean R un anillo y G un grupo,

$$RG =: \left\{ \sum_{g\in G} \alpha_g g : \alpha_g \in R,\ \alpha_g = 0 \text{ c.s.} \right\}$$

Definición

Sean R un anillo y G un grupo,

$$RG =: \left\{ \sum_{g\in G} \alpha_g g : \alpha_g \in R,\ \alpha_g = 0 \text{ c.s.} \right\}$$

dotado de las siguientes operaciones:

$$(+)\quad (\sum_{g\in G} \alpha_g g) + (\sum_{g\in G} \beta_g g) = \sum(\alpha_g + \beta_g)g,$$

$$(\cdot)\quad \sum_{g\in G} \alpha_g g \sum_{h\in G} \beta_h h = \sum_{g,h\in G} (\alpha_g \beta_h) gh = \sum_{u\in G} c_u u,$$

$$\text{donde } c_u = \sum_{gh=u} \alpha_g \beta_h.$$

tiene estructura de anillo con los elementos de G como base.

Definición

Sean R un anillo y G un grupo,

$$RG =: \left\{ \sum_{g\in G} \alpha_g g : \alpha_g \in R,\ \alpha_g = 0 \text{ c.s.} \right\}$$

dotado de las siguientes operaciones:

$$(+)\quad \Big(\sum_{g\in G} \alpha_g g\Big) + \Big(\sum_{g\in G} \beta_g g\Big) = \sum (\alpha_g + \beta_g) g,$$

$$(\cdot)\quad \sum_{g\in G} \alpha_g g \sum_{h\in G} \beta_h h = \sum_{g,h\in G} (\alpha_g \beta_h) gh = \sum_{u\in G} c_u u,$$
$$\text{donde } c_u = \sum_{gh=u} \alpha_g \beta_h.$$

tiene estructura de anillo con los elementos de G como base. Además es un R-álgebra con la siguiente operación:

$$(\cdot)\quad (\lambda, \textstyle\sum_{g\in G} \alpha_g g) \overset{\mu}{\mapsto} \textstyle\sum_{g\in G} (\lambda \alpha_g) g.$$

Definición

1. *Sea F un cuerpo. Un anillo R satisface una identidad polinomial, si existe un polinomio $0 \neq f(x_1, \ldots, x_n)$ en la $F-$álgebra libre $F < x_1, \ldots, x_n, \ldots >$ sobre un número infinito enumerable de variables no conmutativas $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ tales que $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ para todos los $a_i \in R$.*

Definición

1. *Sea* F *un cuerpo. Un anillo* R *satisface una identidad polinomial, si existe un polinomio* $0 \neq f(x_1, \ldots, x_n)$ *en la* $F-$*álgebra libre* $F < x_1, \ldots, x_n, \ldots >$ *sobre un número infinito enumerable de variables no conmutativas* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ *tales que* $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ *para todos los* $a_i \in R$.

2. *Sea* $\mathcal{U}(R)$ *el grupo de unidades de* R, $H \subseteq \mathcal{U}(R)$ *verifica una identidad de grupo, si existe una palabra no-trivial* w *en el grupo libre* $< x_1, \ldots, x_n, \ldots >$, *sobre un conjunto enumerable de variables tal que* $w(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 1$, *para todos los* $u_i \in H$.

Conjetura (B. Hartley, FG Vs $U(FG)$)

Sean G un grupo de torsión y F un cuerpo infinito. Si el grupo de las unidades $\mathcal{U}(FG)$ de FG satisface una identidad de grupo, entonces FG satisface una identidad polinomial.

Conjetura (B. Hartley, FG Vs $U(FG)$)

Sean G un grupo de torsión y F un cuerpo infinito. Si el grupo de las unidades $\mathcal{U}(FG)$ de FG satisface una identidad de grupo, entonces FG satisface una identidad polinomial.

$$\mathcal{U}(FG) \in IG \Rightarrow FG \in IP$$

Lema (Passman [18])

Si $car(F) = p \geq 0$, *entonces* FG *satisface una* IP *si y sólo si* G *contiene un subgrupo* p*-abeliano de índice finito.*

Lema (Passman [18])

Si $car(F) = p \geq 0$, entonces FG satisface una IP si y sólo si G contiene un subgrupo p-abeliano de índice finito.

Consideremos el FC-grupo asociado a G

$$\phi(G) = \{g \in G : [G : C_G(g)] < \infty\}.$$

Lema (Passman [18])

Si $car(F) = p \geq 0$, entonces FG satisface una IP si y sólo si G contiene un subgrupo p-abeliano de índice finito.

Consideremos el FC-grupo asociado a G

$$\phi(G) = \{g \in G : [G : C_G(g)] < \infty\}.$$

Lema (Passman [18])

Supongamos que $car(F) = p > 0$. Entonces

1. *FG es semiprimo si y sólo si $\phi(G)$ es un p'-grupo.*

Lema (Passman [18])

Si $car(F) = p \geq 0$*, entonces* FG *satisface una* IP *si y sólo si* G *contiene un subgrupo* p*-abeliano de índice finito.*

Consideremos el FC-grupo asociado a G

$$\phi(G) = \{g \in G : [G : C_G(g)] < \infty\}.$$

Lema (Passman [18])

Supongamos que $car(F) = p > 0$*. Entonces*

1. FG *es semiprimo si y sólo si* $\phi(G)$ *es un* p'*-grupo.*
2. *La suma de todos los ideales nilpontentes* $N(FG)$ *de* FG *es nilponente si y sólo si* $|\phi_p(G)| < \infty$*.*

Lema (Lema de Linealización [18, Lema 5.1.1])

Si R es un F-álgebra que satisface una IP de grado n, entonces R satisface una IP lineal en cada variable, es decir, R satisface una IP de la forma:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\rho \in S_n} \alpha_\rho x_{\rho(1)} x_{\rho(2)} \ldots x_{\rho(n)}.$$

Giambruno, Sehgal y Valenti en [8] dividen la prueba de su resultado en los siguientes tres casos excluyentes:

1. FG es semiprima, es decir, $N(FG) = \{\mathcal{O}\}$,
2. $N(FG)$ es (no cero) nilpotente, y
3. $N(FG)$ es nil pero no nilpotente.

Giambruno, Sehgal y Valenti en [8] dividen la prueba de su resultado en los siguientes tres casos excluyentes:

1. FG es semiprima, es decir, $N(FG) = \{\mathcal{O}\}$,
2. $N(FG)$ es (no cero) nilpotente, y
3. $N(FG)$ es nil pero no nilpotente.

En adelante para $car(F) = p \neq 0$...

- $P = \{g \in G : \sigma(g) = p^k$ para algún k$\}$, p-elementos,
- $Q = \{g \in G : p \nmid \sigma(g)\}$, p'-elementos.

Giambruno, Sehgal y Valenti en [8] dividen la prueba de su resultado en los siguientes tres casos excluyentes:

1. FG es semiprima, es decir, $N(FG) = \{\mathcal{O}\}$,
2. $N(FG)$ es (no cero) nilpotente, y
3. $N(FG)$ es nil pero no nilpotente.

En adelante para $car(F) = p \neq 0$...

- $P = \{g \in G : \sigma(g) = p^k$ para algún k$\}$, p-elementos,
- $Q = \{g \in G : p \nmid \sigma(g)\}$, p'-elementos.

Si $p = 0$, $P = \{1\}$ y $Q = G$.

Demostración.

1. FG es semiprima, $(N(FG) = \{\mathcal{O}\})$

Demostración.

1. FG es semiprima, $(N(FG) = \{\mathcal{O}\})$
   - Si $y \in Q$ y $p \nmid m = \sigma(y)$ entonces $< y > \trianglelefteq G$.

Demostración.

1. FG es semiprima, $(N(FG) = \{\mathcal{O}\})$
    - Si $y \in Q$ y $p \nmid m = \sigma(y)$ entonces $< y > \trianglelefteq G$.
    - Luego Q es abeliano ó Q es Hamiltoniano.

Demostración.

1. FG es semiprima, $(N(FG) = \{\mathcal{O}\})$
   - Si $y \in Q$ y $p \nmid m = \sigma(y)$ entonces $< y > \trianglelefteq G$.
   - Luego Q es abeliano ó Q es Hamiltoniano.
   - Así, $P = \{1\}$ y $G = Q$ es abeliano.

Demostración.

1. FG es semiprima, $(N(FG) = \{\mathcal{O}\})$
   - Si $y \in Q$ y $p \nmid m = \sigma(y)$ entonces $< y > \trianglelefteq G$.
   - Luego Q es abeliano ó Q es Hamiltoniano.
   - Así, $P = \{1\}$ y $G = Q$ es abeliano.
2. $N(FG)$ es (no cero) nilpotente.

Demostración.

1. FG es semiprima, $(N(FG) = \{\mathcal{O}\})$
   - Si $y \in Q$ y $p \nmid m = \sigma(y)$ entonces $< y > \trianglelefteq G$.
   - Luego Q es abeliano ó Q es Hamiltoniano.
   - Así, $P = \{1\}$ y $G = Q$ es abeliano.
2. $N(FG)$ es (no cero) nilpotente.
   - $\phi_p(G) = < \phi \cap P >$ es finito y $\phi(G/\phi_p(G))$ es un p'−grupo.

Demostración.

1. FG es semiprima, $(N(FG) = \{\mathcal{O}\})$
   - Si $y \in Q$ y $p \nmid m = \sigma(y)$ entonces $< y > \trianglelefteq G$.
   - Luego Q es abeliano ó Q es Hamiltoniano.
   - Así, $P = \{1\}$ y $G = Q$ es abeliano.
2. $N(FG)$ es (no cero) nilpotente.
   - $\phi_p(G) =< \phi \cap P >$ es finito y $\phi(G/\phi_p(G))$ es un $p'-$grupo.
   - Por un Lema de Passman, $\phi_p'(G)$ es p-grupo finito y $F(G/\phi_p(G))$ es semiprima.

Demostración.

1. FG es semiprima, $(N(FG) = \{\mathcal{O}\})$
   - Si $y \in Q$ y $p \nmid m = \sigma(y)$ entonces $< y > \trianglelefteq G$.
   - Luego Q es abeliano ó Q es Hamiltoniano.
   - Así, $P = \{1\}$ y $G = Q$ es abeliano.
2. $N(FG)$ es (no cero) nilpotente.
   - $\phi_p(G) = < \phi \cap P >$ es finito y $\phi(G/\phi_p(G))$ es un $p'-$grupo.
   - Por un Lema de Passman, $\phi_p'(G)$ es p-grupo finito y $F(G/\phi_p(G))$ es semiprima.
   - Los $p-$elementos de $\phi_p(G)$ forman un grupo, $\phi_p(G)$ es $p-$grupo.

Demostración.

1. FG es semiprima, $(N(FG) = \{\mathcal{O}\})$
   - Si $y \in Q$ y $p \nmid m = \sigma(y)$ entonces $< y > \trianglelefteq G$.
   - Luego Q es abeliano ó Q es Hamiltoniano.
   - Así, $P = \{1\}$ y $G = Q$ es abeliano.
2. $N(FG)$ es (no cero) nilpotente.
   - $\phi_p(G) =< \phi \cap P >$ es finito y $\phi(G/\phi_p(G))$ es un $p'-$grupo.
   - Por un Lema de Passman, $\phi_p'(G)$ es p-grupo finito y $F(G/\phi_p(G))$ es semiprima.
   - Los $p-$elementos de $\phi_p(G)$ forman un grupo, $\phi_p(G)$ es $p-$grupo.
   - Del Caso 1. $G/\phi_p(G)$ es abeliano: $G' \subseteq \phi_p(G)$.

Demostración.

1. FG es semiprima, $(N(FG) = \{\mathcal{O}\})$
   - Si $y \in Q$ y $p \nmid m = \sigma(y)$ entonces $< y > \trianglelefteq G$.
   - Luego Q es abeliano ó Q es Hamiltoniano.
   - Así, $P = \{1\}$ y $G = Q$ es abeliano.
2. $N(FG)$ es (no cero) nilpotente.
   - $\phi_p(G) =< \phi \cap P >$ es finito y $\phi(G/\phi_p(G))$ es un $p'-$grupo.
   - Por un Lema de Passman, $\phi_p^{'}(G)$ es p-grupo finito y $F(G/\phi_p(G))$ es semiprima.
   - Los $p-$elementos de $\phi_p(G)$ forman un grupo, $\phi_p(G)$ es $p-$grupo.
   - Del Caso 1. $G/\phi_p(G)$ es abeliano: $G' \subseteq \phi_p(G)$.

$$\boxed{FG \in IP, \quad [x,y]^{p^m} = 0}$$

Demostración.

$N(FG)$ es nil pero no nilpotente.

$R = F\{X\}$: Álgebra libre sobre $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, $R[[t]]$ anillo de serie de potencias.

Demostración.

$N(FG)$ es nil pero no nilpotente.

$R = F\{X\}$: Álgebra libre sobre $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, $R[[t]]$ anillo de serie de potencias.

- Por el argumento de Magnus: $\{1 + x_i t\}_{i=1}^{n}$ son $\mathcal{U}(R[|t|])$ que generan un grupo libre.

Demostración.

$N(FG)$ es nil pero no nilpotente.

$R = F\{X\}$: Álgebra libre sobre $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, $R[[t]]$ anillo de serie de potencias.

- Por el argumento de Magnus: $\{1 + x_i t\}_{i=1}^{n}$ son $\mathcal{U}(R[|t|])$ que generan un grupo libre.
- $1 \neq w(y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n)|_{y_i = 1 + x_i t} \in R[|t|]$, es decir,
  $$\sum_{i \geq 1} \rho_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) t^i \neq 0$$

Demostración.

$N(FG)$ es nil pero no nilpotente.

$R = F\{X\}$: Álgebra libre sobre $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, $R[[t]]$ anillo de serie de potencias.

- Por el argumento de Magnus: $\{1 + x_i t\}_{i=1}^{n}$ son $\mathcal{U}(R[|t|])$ que generan un grupo libre.
- $1 \neq w(y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n)|_{y_i = 1 + x_i t} \in R[|t|]$, es decir, $\sum_{i \geq 1} \rho_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) t^i \neq 0$

$$\rho_l(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0, \quad \exists l \geq 1$$

Demostración.

$N(FG)$ es nil pero no nilpotente.

$R = F\{X\}$: Álgebra libre sobre $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, $R[[t]]$ anillo de serie de potencias.

- Por el argumento de Magnus: $\{1 + x_i t\}_{i=1}^{n}$ son $\mathcal{U}(R[|t|])$ que generan un grupo libre.
- $1 \neq w(y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n)|_{y_i = 1 + x_i t} \in R[|t|]$, es decir,
$$\sum_{i \geq 1} \rho_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) t^i \neq 0$$
$$\rho_l(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0, \quad \exists l \geq 1$$
- $\{r_i\}_{i=1}^{m} \subseteq N(FG)$

Demostración.

$N(FG)$ es nil pero no nilpotente.

$R = F\{X\}$: Álgebra libre sobre $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, $R[[t]]$ anillo de serie de potencias.

- Por el argumento de Magnus: $\{1 + x_i t\}_{i=1}^{n}$ son $\mathcal{U}(R[|t|])$ que generan un grupo libre.
- $1 \neq w(y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n)|_{y_i = 1 + x_i t} \in R[|t|]$, es decir, $\sum_{i \geq 1} \rho_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) t^i \neq 0$

$$\rho_l(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0, \quad \exists l \geq 1$$

- $\{r_i\}_{i=1}^{m} \subseteq N(FG)$

$$(1 + r_i\lambda)^{-1} = (1 - r_i\lambda + r_i^2\lambda^2 - \cdots)$$

Demostración.

- $$w(y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n)|_{y_i = 1 + r_i\lambda} = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(r_1, \ldots, r_m)\lambda^i = 0$$
  $\exists k \in \mathbb{N}$.

Demostración.

- $w(y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n)|_{y_i=1+r_i\lambda} = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(r_1, \ldots, r_m)\lambda^i = 0$ $\exists k \in \mathbb{N}$.
- Con F infinito, $\exists \lambda_j \in F$ tal que $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(r_1, \ldots, r_m)\lambda_j^i = 0$

Demostración.

- $w(y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n)|_{y_i = 1 + r_i\lambda} = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(r_1, \ldots, r_m)\lambda^i = 0$
  $\exists k \in \mathbb{N}$.
- Con F infinito, $\exists \lambda_j \in F$ tal que $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(r_1, \ldots, r_m)\lambda_j^i = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^k \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_{k+1} & \cdots & \lambda_{k+1}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_1(r_1, \ldots, r_m) \\ \vdots \\ \rho_k(r_1, \ldots, r_m) \end{pmatrix} = 0$$

Demostración.

- $w(y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n)|_{y_i=1+r_i\lambda} = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(r_1, \ldots, r_m)\lambda^i = 0$

  $\exists k \in \mathbb{N}$.
- Con F infinito, $\exists \lambda_j \in F$ tal que $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(r_1, \ldots, r_m)\lambda_j^i = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^k \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_{k+1} & \cdots & \lambda_{k+1}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_1(r_1, \ldots, r_m) \\ \vdots \\ \rho_k(r_1, \ldots, r_m) \end{pmatrix} = 0$$

Como el determinante de la matriz de Vandermonde es no cero, entonces

$$\rho_1(r_1, \ldots, r_m) = \cdots = \rho_k(r_1, \ldots, r_m) = 0$$

Demostración.

$\rho_l(x_1, \ldots, x_m) \in IP$ para $N(FG)$

Demostración.

$$\rho_l(x_1,\ldots,x_m) \in IP \text{ para } N(FG)$$

- Por el proceso de linealización estandar $N(FG)$ satisface

$$f(x_1,\ldots,x_d) = \sum_{\sigma\in S_d} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(d)}$$

Demostración.

$\boxed{\rho_l(x_1, \ldots, x_m) \in IP \text{ para } N(FG)}$

- Por el proceso de linealización estandar $N(FG)$ satisface

  $f(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{\sigma \in S_d} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(d)}$

- Como $N(FG)$ no es nilpotente existen $\{a_i\}_{i=1}^{d} \subset N(FG)$ tal que

  $a_1 a_2 \cdots a_d \neq 0$

Demostración.

$$\boxed{\rho_l(x_1,\ldots,x_m) \in IP \text{ para } N(FG)}$$

- Por el proceso de linealización estandar $N(FG)$ satisface

  $$f(x_1,\ldots,x_d) = \sum_{\sigma\in S_d} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(d)}$$

- Como $N(FG)$ no es nilpotente existen $\{a_i\}_{i=1}^d \subset N(FG)$ tal que

  $a_1a_2\cdots a_d \neq 0$

$$\boxed{a_1FGa_2FG\cdots a_dFG \neq 0}$$

Demostración.

$$\boxed{\rho_l(x_1,\ldots,x_m) \in IP \text{ para } N(FG)}$$

- Por el proceso de linealización estandar $N(FG)$ satisface

  $$f(x_1,\ldots,x_d) = \sum_{\sigma\in S_d} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(d)}$$

- Como $N(FG)$ no es nilpotente existen $\{a_i\}_{i=1}^d \subset N(FG)$ tal que

  $a_1a_2\cdots a_d \neq 0$

  $$\boxed{a_1FGa_2FG\cdots a_dFG \neq 0}$$

- $\sum_{\sigma\in S_d} \alpha_\sigma a_{\sigma(1)}x_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}x_{\sigma(2)}\cdots a_{\sigma(d)}x_{\sigma(d)}$ es una identidad polinomial multilineal generalizada no degenerada.

Demostración.

- Por un resultado conocido de Passman podemos concluir que $(G : \phi) < \infty$ y $(\phi' : 1) < \infty$.

Demostración.

- Por un resultado conocido de Passman podemos concluir que $(G : \phi) < \infty$ y $(\phi' : 1) < \infty$.
- ϕ' es un $p-$grupo pues G es localmente finito y $FG \in IP$.

$\square$

Demostración.

- Por un resultado conocido de Passman podemos concluir que $(G:\phi) < \infty$ y $(\phi' : 1) < \infty$.
- ϕ' es un $p-$grupo pues G es localmente finito y $FG \in IP$.

$\square$

¿Qué siguió?

Demostración.

- Por un resultado conocido de Passman podemos concluir que $(G:\phi)<\infty$ y $(\phi':1)<\infty$.
- ϕ' es un $p-$grupo pues G es localmente finito y $FG \in IP$.

□

¿Qué siguió?

(1997) Passman caracteriza los grupos G tales que $\mathcal{U}(FG) \in IG$.

Demostración.

- Por un resultado conocido de Passman podemos concluir que $(G:\phi) < \infty$ y $(\phi' : 1) < \infty$.
- ϕ' es un $p-$grupo pues G es localmente finito y $FG \in IP$.

$\square$

¿Qué siguió?

(1997) Passman caracteriza los grupos G tales que $\mathcal{U}(FG) \in IG$.

(1999) Liu resuelve la conjetura para cuerpos de cualquier tamaño.

Demostración.

- Por un resultado conocido de Passman podemos concluir que $(G:\phi) < \infty$ y $(\phi':1) < \infty$.
- ϕ' es un $p-$grupo pues G es localmente finito y $FG \in IP$.

$\square$

¿Qué siguió?

(1997) Passman caracteriza los grupos G tales que $\mathcal{U}(FG) \in IG$.

(1999) Liu resuelve la conjetura para cuerpos de cualquier tamaño.

(1999) Liu y Passman establecen condiciones necesarias y suficientes sobre G tal que $\mathcal{U}(FG) \in IG$.

- Giambruno, Sehgal y Valenti caracterizan álgebras de grupo de grupos de torsión tales que $\mathcal{U}^{+}(FG) \in IG$, sobre cuerpos infinitos con $carF \neq 2$.

- Giambruno, Sehgal y Valenti caracterizan álgebras de grupo de grupos de torsión tales que $\mathcal{U}^{+}(FG) \in IG$, sobre cuerpos infinitos con $carF \neq 2$.
- A. Dooms y M. Ruiz, establecen el caso de involuciones sobre FG inducidas por una involución arbitraria en grupos localmente finitos.

- Giambruno, Sehgal y Valenti caracterizan álgebras de grupo de grupos de torsión tales que $\mathcal{U}^+(FG) \in IG$, sobre cuerpos infinitos con $carF \neq 2$.
- A. Dooms y M. Ruiz, establecen el caso de involuciones sobre FG inducidas por una involución arbitraria en grupos localmente finitos.
- Giambruno, Polcino Milies y Sehgal [7], clasifican completamente las álgebras de grupo FG de grupos de torsión cuyas $\mathcal{U}^+(FG) \in IG$.

- Giambruno, Sehgal y Valenti caracterizan álgebras de grupo de grupos de torsión tales que $\mathcal{U}^+(FG) \in IG$, sobre cuerpos infinitos con $carF \neq 2$.
- A. Dooms y M. Ruiz, establecen el caso de involuciones sobre FG inducidas por una involución arbitraria en grupos localmente finitos.
- Giambruno, Polcino Milies y Sehgal [7], clasifican completamente las álgebras de grupo FG de grupos de torsión cuyas $\mathcal{U}^+(FG) \in IG$.
- Broche Cristo, Jespers, Polcino Milies y Ruiz Marin muestran cuando FG^+ y FG^- son conjuntos conmutativos para extensiones arbitrarias diferentes de la clásica [3], [12].

BIBLIOGRAFÍA I

- S. A. Amitsur: Identities in rings with involution, Israel J. Math. 7 (1968): 63-68.
- O. Broche Cristo. Commutativity of symmetric elements in group rings. J. Group Theory 9 (2006): 673-683.
- O. Broche Cristo, E. Jespers, C. Polcino Milies and M. Ruiz Marín. Antisymmetric elements in group rings II. J. Algebra Appl. 8 (2009): 115-127.
- O. Broche Cristo and C. Polcino Milies. Symmetric elements under oriented involutions in group rings. Comm. Algebra 34 (2006): 3347-3356.
- A. Dooms and M. Ruiz. Symmetric units satisfying a group identity. J. Algebra 308 (2007): 742-750.

BIBLIOGRAFÍA II

- A. Giambruno, E. Jespers and A. Valenti. Group identities on units of rings. Arch. Math. (Basel) 63 (1994): 291-296.
- A. Giambruno, C. Polcino Milies and S. K. Sehgal. Group identities on symmetric units. J. Algebra 322 (2009): 2801-2815.
- A. Giambruno, S. K. Sehgal, A. Valenti: Group algebras whose units satisfy a group identity, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997): 629-634.
- A. Giambruno, S. K. Sehgal and A. Valenti. Symmetric units and group identities. Manuscripta Math. 96 (1998): 443-461.
- I. N. Herstein. Rings with involution. University of Chicago Press, Chicago (1976).

BIBLIOGRAFÍA III

- A. Holguín Villa. Involuções de grupo orientadas em algebras de grupo, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo (2013). São Paulo, Brasil.
- E. Jespers and M. Ruiz Marín. On symmetric elements and symmetric units in group rings. Comm. Algebra 34 (2006): 727-736.
- G. T. Lee. Group Identities on Units and Symmetric Units of Group Rings. Springer-Verlag, London (2010).
- C. H. Liu, D. S. Passman: Group algebras with units satisfying a group identity II, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999): 337-341.
- P. Menal. Private letter to B. Hartley, April 6, (1981).
- D. S. Passman: Group algebras whose units satisfy a group identity II, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997): 657-662.

BIBLIOGRAFÍA IV

- C. Polcino Milies and S. K. Sehgal. A Course in Group Rings. Kluwer, Dordrecht (2002).
- D. S. Passman. The algebraic structure of group rings. Wiley, New York (1977).
- D. S. Warhurst. Topics in group rings, Ph. D. Thesis, Manchester, (1981).