Grupo Modular Parametrizado

Margarita M. Toro y Christian Pommerenke

Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín,
Technische Universität Berlin

Altencoa 6-2014
Universidad de Nariño
San Juan de Pasto, Nariño
Agosto 14 de 2014

Resumen y Motivación

Consideramos el subgrupo Π de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}[\xi])$ generado por las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

con $\mathbb{Z}[\xi]$ el anillo de polinomios en la variable ξ.

Para un número $\zeta \in \mathbb{C}$ y una palabra $W \in \Pi$, $W(\zeta)$ significa la matriz en $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ obtenida cuando se evalúa el parametro ξ en ζ.

Para cada número complejo ζ obtenemos el grupo $\Pi(\zeta)$ al reemplazar la indeterminada ξ en Π por ζ.

Por ejemplo el grupo modular Γ es precisamente $\Pi(1)$.
Este grupo Π es una generalización de los grupos de Hecke.

Los grupos $\Pi(2\cos(\pi/q))$ $(q \geq 3)$ se convierten en los grupos clásicos de Hecke al ser proyectados en $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

$\Pi(\zeta)$ para $\zeta \in \mathbb{R}$ se convierte en el grupo generalizado de Hecke.

Hay mucha literatura respecto a estos grupos.

Nuestro interés inicial fue estudiando representaciones, en $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, de grupos de nudos. En particular obtuvimos familias de grupos generados por las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para un parametro $t \in \mathbb{C}$. Estos grupos son isomorfos a subgrupos de nuestro grupo Π.

Describimos explícitamente los elementos de Π, y estudiamos una familia especial de subgrupos, que son libres de índice 4.
Encontramos que hay exactamente 8 de estos subgrupos, de los cuales 4 son normales.
El comportamiento de estos subgrupos normales se resume en el siguiente diagrama, donde Π_0 es un grupo libre de índice 16, libre de rango 5.

$$\begin{array}{ccccc} \Pi_1 & & & & \Pi_2 \\ & \diagdown & & \diagup & \\ & & \Pi_0 & & \\ & \diagup & & \diagdown & \\ \Pi_4 & & & & \Pi_3 \end{array}$$

Descripción de los elementos.

Para $W \in \Pi$ escribimos

$$W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ a, b, c, d \in \mathbb{Z}[\xi], \ ad - bc = 1 .$$

Si $\zeta \in \mathbb{C}$ entonces $W(\zeta)$ denota la matriz con elementos $a(\zeta), b(\zeta), c(\zeta), d(\zeta)$ tal que $W(\zeta) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.
El grupo Π está formado por las matrices $\pm I$, $\pm B$ y

$$W = B^{l_0} A^{j_n} B^{l_1} A^{j_{n-1}} \cdots A^{j_1} B^{l_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

con $l_0, \ l_n \in \{0, 1, 2, 3\}$, $l_\nu \in \{1, 2, 3\}$ para $0 < \nu < n$ y con $j_\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ para $1 \leq \nu \leq n$.

Se tiene que $B^2 = -I$, $B^3 = -B$ y

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k\xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A^k B = \begin{pmatrix} k\xi & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

para $k \in \mathbb{Z}$.

Definición

Sea $\mathcal{K}$ la colección de todas las sucesiones $v = (k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $k_n \in Z \setminus \{0\}$. Definimos $V_0 = I$ y

$$V_n = V_n(v) = V_n = A^{k_n} B \cdots A^{k_1} B$$

Veamos que todas las matrices V_n son diferentes.

Proposición

Sea $v = (k_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{K}$ y sean $\alpha_n = \alpha_n(v)$ y $\beta_n = \beta_n(v)$ definidos en forma recursiva mediante

$$\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = k_1\xi,\ \alpha_{n+1} = k_{n+1}\xi\alpha_n - \alpha_{n-1},$$

$$\beta_0 = 0,\ \beta_1 = -1,\ \beta_{n+1} = k_{n+1}\xi\beta_n - \beta_{n-1}$$

para $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$V_n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Lema

Sean $v, u \in \mathcal{K}$, $v = (k_n)_{n\in\mathbb{N}}, u = (l_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $V_n = V_n(v)$ y $U_m = V_m(u)$. Entonces $V_n = U_m$ para $n, m \in \mathbb{Z}$ si y solo si $n = m$ y $k_i = l_i$ para todo $1 \leq i \leq m$.

Tenemos las siguientes igualdades

$$V_n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \end{pmatrix}, \quad BV_nB = \begin{pmatrix} -\beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \\ \beta_n & -\alpha_n \end{pmatrix},$$
$$V_nB = \begin{pmatrix} \beta_n & -\alpha_n \\ \beta_{n-1} & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, BV_n = \begin{pmatrix} -\alpha_{n-1} & -\beta_{n-1} \\ \alpha_n & \beta_n \end{pmatrix}.$$

Puesto que $-I$ conmuta con todas las matrices vemos que Π está formado por $\pm I$, $\pm B$ y

$$\pm V_n, \ \pm BV_n, \ \pm V_nB, \ \pm BV_nB$$

con $V_n = V_n(v)$, $v \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}$.

Subgrupos de Indice 4

Para $W = B^{l_0} A^{j_n} B^{l_1} A^{j_{n-1}} \cdots A^{j_1} B^{l_n} \in \Pi$ definamos las suma de los exponentes con respecto a los generadores así:

$$\begin{aligned} \sigma(W) &= j_n + \cdots + j_1, \text{ suma de los exponentes de } A \text{ en } W. \\ \tau(W) &= l_0 + l_1 \cdots + l_n, \pmod 4 \text{ suma de los exponentes de } B \text{ en } W \end{aligned}$$

Esta suma de exponentes satisface las propiedades, para $W, U \in \Pi$

$$\begin{aligned} \sigma(I) &= 0, \quad \sigma\left(W^{-1}\right) = -\,\sigma(W), \quad \sigma(WU) = \sigma(W) + \sigma(U), \\ \tau(I) &\equiv 0, \quad \tau\left(W^{-1}\right) \equiv -\,\tau(W), \quad \tau(WU) \equiv \tau(W) + \tau(U), \end{aligned}$$

por lo que se tienen los homomorfismos

$$\begin{array}{rcl} \sigma : \Pi & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ W & \mapsto & \sigma(W) \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} \tau : \Pi & \rightarrow & \mathbb{Z}_4 \\ W & \mapsto & \tau(W) \end{array}$$

Definición

Para $k = 1, 2, 3, 4$ consideremos los siguientes subgrupos de Π

$$\Pi_k = \{W \in \Pi \mid \tau(W) \equiv (k-1)\,\sigma(W) \bmod 4\}.$$

Es decir

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= \{W \in \Pi \mid \tau(W) \equiv 0 \mod 4\}, \\
\Pi_2 &= \{W \in \Pi \mid \tau(W) \equiv \sigma(W) \mod 4\}, \\
\Pi_3 &= \{W \in \Pi \mid \tau(W) \equiv 2\sigma(W) \mod 4\}, \\
\Pi_4 &= \{W \in \Pi \mid \tau(W) \equiv -\sigma(W) \mod 4\}.
\end{aligned}$$

Teorema

Para $k = 1, 2, 3, 4$, el grupos Π_k es un subgrupo normal de índice 4 en Π. Es un grupo libre con presentación libre dada por

$$\Pi_k = \left\langle AB^{k-1}, [A, B] \right\rangle .$$

Además, se tienen también las presentaciones

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \left\langle A, BAB^{-1} \right\rangle, \quad \Pi_2 = \langle AB, BA \rangle , \\ \Pi_3 &= \left\langle -A, -BAB^{-1} \right\rangle, \Pi_4 = \langle -AB, -BA \rangle . \end{aligned}$$

Bosquejo de la prueba: Por la definición, claramente son subgrupos normales.
Para cada k se tiene que las clases laterales

$$\Pi_k B^j = \{W \in \Pi \mid \tau(W) \equiv (k-1)\,\sigma(W) + j \bmod 4\}, j = 0,1,2,3$$

son distintas y

$$\Pi = \bigcup_{j=0}^{3} \Pi_k B^j,$$

por lo que Π_k tiene índice 4 en Π.

Como $\sigma\left(B^j\right) = 0$ y $\tau\left(B^j\right) = j \neq 0$, se tiene que $B^j \notin \Pi_k$, $j = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3, 4$.
Si $W \in \Pi_k$, $W \neq I$, entonces W se puede escribir como una de las palabras

$$\pm V_n,\ \pm BV_n,\ \pm V_n B,\ \pm BV_n B$$

y ya habíamos probado que todas las posibles $V_n = V_n\left(v\right),\ v = \left(k_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, son distintas, por tanto todas estas expresiones son distintas y los grupos son libres.

Para ver que en efecto se tienen las presentaciones alternativas, es claro que

$$\begin{aligned}
\langle A, [A,B]\rangle &= \left\langle A, BAB^{-1}\right\rangle, \text{ ya que } [A,B] = A\cdot\left(BAB^{-1}\right)^{-1}.\\
\langle AB, [A,B]\rangle &= \langle AB, BA\rangle, \text{ ya que } [A,B] = AB\cdot(BA)^{-1}.\\
\left\langle AB^2, [A,B]\right\rangle &= \left\langle -A, -BAB^{-1}\right\rangle,\\
\text{ya que } B^2 &= -I \text{ y } [A,B] = -A\cdot\left(-BAB^{-1}\right)^{-1}.\\
\left\langle AB^3, [A,B]\right\rangle &= \langle -AB, -BA\rangle, \text{ ya que } [A,B] = -AB\cdot(-BA)^{-1}.
\end{aligned}$$

Se tiene que para cada k,
$\sigma\left(AB^{k-1}\right) = 1$ y $\tau\left(AB^{k-1}\right) = k-1$, por tanto

$$\tau\left(AB^{k-1}\right) \equiv (k-1)\,\sigma\left(AB^{k-1}\right) \mod 4$$

$\sigma\left([A,B]\right) = 0 = \tau\left([A,B]\right)$, luego

$$W \in \left\langle AB^{k-1}, [A,B]\right\rangle \text{ entonces } W \in \Pi_k.$$

Para el recíproco usamos las presentaciones alternativas y probamos por inducción sobre n, el número de ocurrencias de A en la palabra W, que si $W \in \Pi_k$ entonces $W \in \left\langle AB^{k-1}, [A,B]\right\rangle$.

Veamos como se hace esta inducción para $k = 1$ y se tienen procesos análogos en los otros casos.
Veamos que

$$\Pi_1 = \{W \in \Pi \mid \tau(W) \equiv 0 \mod 4\} \subseteq \langle A, [A, B] \rangle .$$

Las palabras de la forma $A^{j_1} \in \Pi_1$ y $A^{j_1} \in \langle A, [A, B] \rangle$.
Supongamos que todas las palabras con menos de n ocurrencias de A que están en Π_1 están en $\langle A, [A, B] \rangle$.

Sea $W \in \Pi_1$ una palabra con n ocurrencias de A.
Si

$$W = A^{j_n} B A^{j_{n-1}} \cdots A^{j_1} B^{l_n}$$

tomemos $U = A^{j_n} \in \Pi_1$ y $U \in \langle A, [A, B] \rangle$, entonces

$$U^{-1} W = B A^{j_{n-1}} \cdots A^{j_1} B^{l_n} \in \Pi_1$$

y como tiene $n - 1$ ocurrencias de A, tenemos que

$$U^{-1} W \in \langle A, [A, B] \rangle$$

por lo que

$$W \in \langle A, [A, B] \rangle .$$

Si

$$W = BA^{j_n}BA^{j_{n-1}}\cdots A^{j_1}B^{l_n}$$

tomemos $U = BA^{j_n}B^{-1} = \left(BAB^{-1}\right)^{j_n} \in \Pi_1$ y
$U = \left(A^{-1}\cdot [A,B]\right)^{j_n} \in \langle A, [A,B]\rangle$.
Tenemos de nuevo

$$U^{-1}W = BA^{j_{n-1}}\cdots A^{j_1}B^{l_n} \in \Pi_1 U^{-1}W \in \langle A, [A,B]\rangle$$

y de nuevo por inducción se tiene que

$$W \in \langle A, [A,B]\rangle .$$

Tenemos otros cuatro subgrupos de Π libres de índice 4 que no son normales.

Teorema

Los grupos

$$\Pi_{4+j} = \left\langle AB^{j-1}, -[A, B] \right\rangle, \qquad (j = 1, 2, 3, 4)$$

son libres y subgrupos de Π de índice 4 que no son normales.

Estos grupos son imagen de los homomorfismos

$$\begin{array}{rcl} \varphi_j : \Pi_j & \rightarrow & \Pi \\ AB^{j-1} & \longmapsto & AB^{j-1} \\ [AB] & \longmapsto & -[AB] \end{array}$$

Teorema

Los grupos Π_j, $j = 1, \cdots, 8$, son los únicos grupos libres de Π con índice 4.

Idea de la prueba

Si Γ es libre $[\Pi, \Gamma] = 4$, se prueba que las clases laterales $\left\{\Gamma, \Gamma B, \Gamma B^2, \Gamma B^3\right\}$ son distintas y por tanto forman un conjunto completo de clases laterales.

Haciendo un estudio detallado de la clase a la que pertenecen las palabras $A, -A, BAB$ y $-BAB$, podemos probar que el grupo Γ es uno de los grupos Π_j, $j = 1, \cdots, 8$.

Intersección de los subgrupos

Consideremos el subgrupo

$$\Pi_0 = \{W \in \Pi \mid \tau(W) \equiv \sigma(W) \equiv 0 \mod 4\}.$$

Teorema

El grupo Π_0 es un subgrupo normal de índice 16 en Π, libre con presentación libre dada por

$$\Pi_0 = \left\langle A^4, [A, B], \left[A^{-1}, B\right], \left[A^2, B\right], \left[A^{-2}, B\right] \right\rangle.$$

Teorema

El grupo Π_0 satisface

$$\Pi_0 = \Pi_1 \cap \Pi_2 = \Pi_2 \cap \Pi_3 = \Pi_3 \cap \Pi_4 = \Pi_4 \cap \Pi_1$$

y es un subgrupo normal de índice 4 en cada uno de los grupos Π_k, $k = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{tikzcd}
\Pi_1 \arrow[dr, dash] & & \Pi_2 \arrow[dl, dash] \\
& \Pi_0 & \\
\Pi_4 \arrow[ur, dash] & & \Pi_3 \arrow[ul, dash]
\end{tikzcd}$$

Las intersecciones de los otros grupos nos dan lugar a nuevos subgrupos interesantes.
Tenemos las siguientes presentaciones libres

$$\begin{aligned} \Pi_1 \cap \Pi_3 &= \left\langle A^2, [A, B], \left[A^2, B\right] \right\rangle, \\ \Pi_2 \cap \Pi_4 &= \left\langle -A^2, [A, B], \left[A^2, B\right] \right\rangle \end{aligned}$$

y Π_0 tiene índice 2 en estos 2 grupos.

Preguntas

Un resultado adicional que tenemos es

Lema

El subgrupo conmutador Π' tiene índice infinito en Π.

Se sabe que Π_0' es finitamente generado. ¿Es Π' finitamente generado?

Se sabe que Π_0^4 es finitamente generado si y solo si $\left[\Pi_0, \Pi_0^4\right] < \infty$.

¿Es el grupo Π_0^4 finitamente generado?

Referencias

- B. Fine and M. Newman, The normal subgroup structure of a Picard group, Trans. Amer. Math. Soc. 302 (1987), 769-786.
- M.L.Lang, The structure of the normalisers of the congruence subgroups of the Hecke group G_5, Bull.London Math.Soc. 39 (2007),53-62.
- D. Mejía, Ch. Pommerenke and M. Toro, On the parametrized modular group, aceptado para publicación en Journal d'Analyse Mathematique.
- Ch. Pommerenke and M.M.Toro, On the two-parabolic subgroups of SL(2,$\mathbb{C}$), Rev.Col.Mat. 45 (2011),37-50.
- N.Yelmaz, On subgroups of the Picard group, Cont. to Algebra and Geometry, 44 (2003), 383-387.

Gracias