Coincidencias en sucesiones generalizadas de Lucas

Eric F. Bravo

Universidad del Cauca

Trabajo conjunto con Jhon J. Bravo y Florian Luca

Álgebra, Teoría de Números, Combinatoria y Aplicaciones (ALTENCOA 6)

San Juan de Pasto, Agosto 2014

Definición de $G^{(k)}$

Sea $k \geq 2$ un entero. Se define la sucesión lineal recurrente de orden k denotada por $G^{(k)} := (G_n^{(k)})_{n \geq 2-k}$ como

$$G_n^{(k)} = G_{n-1}^{(k)} + G_{n-2}^{(k)} + \cdots + G_{n-k}^{(k)} \quad \forall n \geq 2,$$

con las condiciones iniciales $G_{-(k-2)}^{(k)} = G_{-(k-3)}^{(k)} = \cdots = G_{-1}^{(k)} = 0$, $G_0^{(k)} = a$ y $G_1^{(k)} = b$.

Observaciones

- Si $a = 0$ y $b = 1$, entonces $G^{(k)}$ es la **sucesión k-generalizada de Fibonacci** $F^{(k)} := (F_n^{(k)})_{n \geq 2-k}$.

Observaciones

- Si $a = 0$ y $b = 1$, entonces $G^{(k)}$ es la **sucesión k-generalizada de Fibonacci** $F^{(k)} := (F_n^{(k)})_{n \geq 2-k}$.
- En este caso, si escogemos $k = 2$, obtenemos la clásica sucesión de Fibonacci

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ y } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{para } n \geq 2.$$

$$(F_n)_{n \geq 0} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots\}.$$

Observaciones

- Si $a = 0$ y $b = 1$, entonces $G^{(k)}$ es la **sucesión k-generalizada de Fibonacci** $F^{(k)} := (F_n^{(k)})_{n \geq 2-k}$.

- En este caso, si escogemos $k = 2$, obtenemos la clásica sucesión de Fibonacci

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ y } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{para } n \geq 2.$$

$$(F_n)_{n \geq 0} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots\}.$$

- Si $k = 3$, aparece la sucesión Tribonacci

$$(F_n^{(3)})_{n \geq -1} = \{0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, \ldots\}.$$

- Por otro lado, si $a = 2$ y $b = 1$, entonces $G^{(k)}$ se conoce como la **sucesión k-generalizada de Lucas** $L^{(k)} := (L_n^{(k)})_{n \geq 2-k}$.

- Por otro lado, si $a = 2$ y $b = 1$, entonces $G^{(k)}$ se conoce como la **sucesión k-generalizada de Lucas** $L^{(k)} := (L_n^{(k)})_{n \geq 2-k}$.

- En el caso de $k = 2$, obtenemos la habitual sucesión de Lucas

$$L_0 = 2,\ L_1 = 1 \text{ y } L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad \text{para } n \geq 2.$$

$$(L_n)_{n \geq 0} = \{2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, \ldots\}.$$

- Por otro lado, si $a = 2$ y $b = 1$, entonces $G^{(k)}$ se conoce como la **sucesión k-generalizada de Lucas** $L^{(k)} := (L_n^{(k)})_{n \geq 2-k}$.

- En el caso de $k = 2$, obtenemos la habitual sucesión de Lucas

$$L_0 = 2,\ L_1 = 1 \text{ y } L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad \text{para } n \geq 2.$$

$$(L_n)_{n \geq 0} = \{2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, \ldots\}.$$

- Si $k = 3$, entonces la sucesión 3-Lucas es

$$(L_n^{(3)})_{n \geq -1} = \{0, 2, 1, 3, 6, 10, 19, 35, 64, 118, 217, 399 \ldots\}.$$

Propiedades de $F^{(k)}$

- El polinomio característico de la sucesión $G^{(k)}$, a saber
$$\Psi_k(x) = x^k - x^{k-1} - \cdots - x - 1,$$
es irreducible sobre $\mathbb{Q}[x]$ y tiene solamente una raíz $\alpha(k)$ fuera del circulo unitario. En efecto,
$$2(1-2^{-k}) < \alpha(k) < 2 \text{ (Wolfram, 1998)}$$

Propiedades de $F^{(k)}$

- El polinomio característico de la sucesión $G^{(k)}$, a saber
$$\Psi_k(x) = x^k - x^{k-1} - \cdots - x - 1,$$
es irreducible sobre $\mathbb{Q}[x]$ y tiene solamente una raíz $\alpha(k)$ fuera del circulo unitario. En efecto,
$$2(1-2^{-k}) < \alpha(k) < 2 \text{ (Wolfram, 1998)}$$
Considere para un entero $s \geq 2$, la función
$$f_s(x) = \frac{x-1}{2+(s+1)(x-2)} \text{ para } x > 2(1-2^{-s})$$

- Con esta notación, $F^{(k)}$ satisface la siguiente fórmula "al estilo Binet"

$$F_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} f_k(\alpha_i)\alpha_i^{n-1} \text{ (Dresden, 2011)},$$

donde $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ son las raíces de $\Psi_k(x)$.

- Con esta notación, $F^{(k)}$ satisface la siguiente fórmula "al estilo Binet"
$$F_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} f_k(\alpha_i)\alpha_i^{n-1} \text{ (Dresden, 2011)},$$
donde $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ son las raíces de $\Psi_k(x)$.

- $\left|F_n^{(k)} - f_k(\alpha)\alpha^{n-1}\right| < \frac{1}{2} \ \forall \ n \geq 2-k$ (Dresden, 2011).

- Con esta notación, $F^{(k)}$ satisface la siguiente fórmula "al estilo Binet"

$$F_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} f_k(\alpha_i)\alpha_i^{n-1} \text{ (Dresden, 2011)},$$

donde $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ son las raíces de $\Psi_k(x)$.

- $\left| F_n^{(k)} - f_k(\alpha)\alpha^{n-1} \right| < \frac{1}{2}\ \forall\ n \geq 2-k$ (Dresden, 2011).

- $\alpha^{n-2} \leq F_n^{(k)} \leq \alpha^{n-1}\ \forall\ n \geq 1$ y $k \geq 2$ (Bravo - Luca, 2013).

Potencias de 2 en sucesiones generalizadas de Fibonacci

(Bravo - Luca, 2012) determinaron todas las soluciones de la ecuación diofántica

$$F_n^{(k)} = 2^m, \tag{1}$$

en enteros positivos n, k, m con $k \geq 2$.

Potencias de 2 en sucesiones generalizadas de Fibonacci

(Bravo - Luca, 2012) determinaron todas las soluciones de la ecuación diofántica

$$F_n^{(k)} = 2^m, \tag{1}$$

en enteros positivos n, k, m con $k \geq 2$.

Esto es

$$F_1^{(k)} = 1, F_2^{(k)} = 1, F_3^{(k)} = 2, F_4^{(k)} = 4, \ldots, F_{k+1}^{(k)} = 2^{k-1},$$

mientras que el siguiente término en la sucesión anterior es

$$F_{k+2}^{(k)} = 2^k - 1.$$

De aquí, las triplas

$$(n,k,m) = (1,k,0) \text{ y } (n,k,m) = (t,k,t-2), \tag{2}$$

son soluciones de la ecuación (1) $\forall\ 2 \leq t \leq k+1$. Las soluciones dadas por (2) las llamaron *soluciones triviales*.

De aquí, las triplas

$$(n,k,m)=(1,k,0) \text{ y } (n,k,m)=(t,k,t-2), \qquad (2)$$

son soluciones de la ecuación (1) $\forall\, 2 \leq t \leq k+1$. Las soluciones dadas por (2) las llamaron *soluciones triviales*.

Teorema (Bravo - Luca, 2012)

La única solución no trivial de la ecuación (1) en enteros positivos n,k,m *con* $k \geq 2$*, es* $(n,k,m)=(6,2,3)$*, a saber* $F_6^{(2)}=8$*.*

Coincidencias en sucesiones generalizadas de Fibonacci

(Bravo - Luca, 2013) hallaron todas las soluciones de la ecuación diofántica

$$F_n^{(k)} = F_m^{(\ell)}, \tag{3}$$

en enteros positivos n, k, m, ℓ con $k, \ell \geq 2$.

Coincidencias en sucesiones generalizadas de Fibonacci

(Bravo - Luca, 2013) hallaron todas las soluciones de la ecuación diofántica

$$F_n^{(k)} = F_m^{(\ell)}, \tag{3}$$

en enteros positivos n, k, m, ℓ con $k, \ell \geq 2$.

Notaron que si $k = \ell$, la única solución interesante de la ecuación (3) es

$$(n, k, m, \ell) = (1, k, 2, k), \tag{4}$$

a saber, $F_1^{(k)} = F_2^{(k)} = 1$. Luego, asumieron SPG que $k > \ell$.

En segundo lugar, es claro que $F_t^{(k)} = F_t^{(\ell)}$ $\forall\ 1 \leq t \leq \ell + 1$, es decir, la cuadrupla

$$(n, k, m, \ell) = (t, k, t, \ell), \tag{5}$$

es una solución de la ecuación (3) $\forall\ 1 \leq t \leq \ell + 1$. Las soluciones dadas por (4) y (5) les llamaron *soluciones triviales*.

En segundo lugar, es claro que $F_t^{(k)} = F_t^{(\ell)}\ \forall\ 1 \leq t \leq \ell + 1$, es decir, la cuadrupla

$$(n, k, m, \ell) = (t, k, t, \ell), \tag{5}$$

es una solución de la ecuación (3) $\forall\ 1 \leq t \leq \ell + 1$. Las soluciones dadas por (4) y (5) les llamaron *soluciones triviales*.

Teorema (Bravo - Luca, 2013)

Las unicas soluciones no triviales de la ecuación (3) en enteros positivos n, k, m, ℓ *con* $k > \ell \geq 2$*, son:*

$$(n, k, m, \ell) \in \{(6, 3, 7, 2), (11, 7, 12, 3), (6, 2, 5, t)\},$$

$\forall\ t \geq 4$. *A saber,* $F_6^{(3)} = F_7^{(2)} = 13, F_{11}^{(7)} = F_{12}^{(3)} = 504$ *y* $F_5^{(t)} = F_6^{(2)} = 8\ \forall\ t \geq 4$.

k-Fibonacci $\Rightarrow$ k-Lucas

Lema

La siguiente relación siempre se cumple

$$G_n^{(k)} = aF_{n+1}^{(k)} + (b-a)F_n^{(k)}$$

En particular,

$$L_n^{(k)} = 2F_{n+1}^{(k)} - F_n^{(k)}.$$

Propiedades de $L^{(k)}$

Lema (Bravo - Luca, 2014)

Sea $k \geq 2$ *un entero. Entonces*

(a) $\alpha^{n-1} \leq L_n^{(k)} \leq 2\alpha^n \; \forall n \geq 1.$

Propiedades de $L^{(k)}$

Lema (Bravo - Luca, 2014)

Sea $k \geq 2$ un entero. Entonces

(a) $\alpha^{n-1} \leq L_n^{(k)} \leq 2\alpha^n \ \forall n \geq 1$.

(b) $L^{(k)}$ *satisface la siguiente fórmula "al estilo Binet"*

$$L_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} (2\alpha_i - 1) f_k(\alpha_i) \alpha_i^{n-1},$$

donde $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ son los ceros de $\Psi_k(x)$.

Propiedades de $L^{(k)}$

Lema (Bravo - Luca, 2014)

Sea $k \geq 2$ *un entero. Entonces*

(a) $\alpha^{n-1} \leq L_n^{(k)} \leq 2\alpha^n \ \forall n \geq 1$.

(b) $L^{(k)}$ *satisface la siguiente fórmula "al estilo Binet"*

$$L_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} (2\alpha_i - 1) f_k(\alpha_i) \alpha_i^{n-1},$$

donde $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *son los ceros de* $\Psi_k(x)$.

(c) $\left| L_n^{(k)} - (2\alpha - 1) f_k(\alpha) \alpha^{n-1} \right| < \frac{3}{2} \ \forall \ n \geq 2 - k$.

Propiedades de $L^{(k)}$

Lema (Bravo - Luca, 2014)

Sea $k \geq 2$ *un entero. Entonces*

(a) $\alpha^{n-1} \leq L_n^{(k)} \leq 2\alpha^n \ \forall n \geq 1$.

(b) $L^{(k)}$ *satisface la siguiente fórmula "al estilo Binet"*

$$L_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} (2\alpha_i - 1) f_k(\alpha_i) \alpha_i^{n-1},$$

donde $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *son los ceros de* $\Psi_k(x)$.

(c) $\left| L_n^{(k)} - (2\alpha - 1) f_k(\alpha) \alpha^{n-1} \right| < \frac{3}{2} \ \forall \ n \geq 2 - k$.

(d) *Si* $2 \leq n \leq k$, *entonces* $L_n^{(k)} = 3 \cdot 2^{n-2}$.

Coincidencias en sucesiones generalizadas de Lucas

Determinar todas las soluciones de la ecuación diofántica

$$L_n^{(k)} = L_m^{(\ell)}, \tag{6}$$

en enteros no negativos n, k, m, ℓ con $k > \ell \geq 2$.

Coincidencias en sucesiones generalizadas de Lucas

Determinar todas las soluciones de la ecuación diofántica

$$L_n^{(k)} = L_m^{(\ell)}, \tag{6}$$

en enteros no negativos n, k, m, ℓ con $k > \ell \geq 2$.

Ante todo, note que si $k > \ell$, entonces $L_t^{(k)} = L_t^{(\ell)}\ \forall\ 0 \leq t \leq \ell$, es decir, la cuadrupla

$$(n, k, m, \ell) = (t, k, t, \ell), \tag{7}$$

es una solución de la ecuación (6) $\forall\ 0 \leq t \leq \ell$. Las soluciones dadas por (7) les llamaremos *soluciones triviales*.

Resultados

Teorema (B., Bravo, Luca, 2014)

La ecuación (6) tiene solamente soluciones triviales.

Resultados

Teorema (B., Bravo, Luca, 2014)

La ecuación (6) tiene solamente soluciones triviales.

Corolario

Sean k, ℓ *enteros con* $k > \ell \geq 2$. *Entonces*

$$\left| L^{(k)} \cap L^{(\ell)} \right| = \ell + 1.$$

Resultados

Teorema (B., Bravo, Luca, 2014)

La ecuación (6) tiene solamente soluciones triviales.

Corolario

Sean k, ℓ *enteros con* $k > \ell \geq 2$. *Entonces*

$$\left| L^{(k)} \cap L^{(\ell)} \right| = \ell + 1.$$

Corolario

Si (n, k, a) *es una solución de la ecuación diofántica* $L_n^{(k)} = 3 \cdot 2^a$ *en enteros no negativos* n, k, a *con* $k \geq 2$, *entonces* $0 \leq n \leq k$ *y* $a = n - 2$.

La prueba

$$\left|(2\alpha-1)f_k(\alpha)\alpha^{n-1}-(2\beta-1)f_\ell(\beta)\beta^{m-1}\right| =$$

$$\left|((2\alpha-1)f_k(\alpha)\alpha^{n-1}-L_n^{(k)})+(L_m^{(\ell)}-(2\beta-1)f_\ell(\beta)\beta^{m-1})\right| < 3 \tag{8}$$

$$\vdots$$

$$\left|\alpha^{n-1}\cdot\beta^{-(m-1)}\cdot(2\alpha-1)f_k(\alpha)((2\beta-1)f_\ell(\beta))^{-1}-1\right| < \frac{6}{\beta^{m-1}} \tag{9}$$

Definición (Altura logarítmica)

Sea η un número algebraico de grado d con polinomio minimal sobre los enteros

$$a_0x^d + a_1x^{d-1} + \cdots + a_d = a_0\prod_{i=1}^{d}(X - \eta^{(i)})$$

donde las a_is son enteros primos relativos con $a_0 > 0$ y los $\eta^{(i)s}s$ son conjugados de η.

Definición (Altura logarítmica)

Sea η un número algebraico de grado d con polinomio minimal sobre los enteros

$$a_0x^d + a_1x^{d-1} + \cdots + a_d = a_0\prod_{i=1}^{d}(X - \eta^{(i)})$$

donde las $a_i s$ son enteros primos relativos con $a_0 > 0$ y los $\eta^{(i)s}s$ son conjugados de η. Entonces

$$h(\eta) = \tfrac{1}{d}\left(\log a_0 + \sum_{i=1}^{d}\log\left(\max\left\{\left|\eta^{(i)}\right|, 1\right\}\right)\right)$$

se llama la altura logarítmica de η.

Teorema (Matveev, 2000)

Sean $\mathbb{K}$ *un campo de números algebraicos de grado* D *sobre* $\mathbb{Q}$*,* $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ *reales positivos de* $\mathbb{K}$ *y* $b_1, \ldots, b_t$ *enteros racionales tales que*

$$\Lambda := \gamma_1^{b_1} \cdots \gamma_t^{b_t} - 1 \neq 0.$$

Teorema (Matveev, 2000)

Sean $\mathbb{K}$ *un campo de números algebraicos de grado* D *sobre* $\mathbb{Q}$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ *reales positivos de* $\mathbb{K}$ *y* $b_1, \ldots, b_t$ *enteros racionales tales que*

$$\Lambda := \gamma_1^{b_1} \cdots \gamma_t^{b_t} - 1 \neq 0.$$

Entonces

$$|\Lambda| > \mathit{exp}(-1.4 \times 30^{t+3} \times t^{4.5} \times D^2 (1 + \log D)(1 + \log B) A_1 \cdots A_t),$$

donde $B \geq \mathit{max}\{|b_1|, \ldots, |b_t|\}$, *y*

$$A_i \geq \mathit{max}\{Dh(\gamma_i), |\log \gamma_i|, 0.16\}, \textit{ para todo } i = 1, \ldots, t.$$

En una primera aplicación del Teorema de Matveev, obtenemos:

En una primera aplicación del Teorema de Matveev, obtenemos:

Lema (1)

Si (n, k, m, ℓ) *es una solución no trivial en enteros positivos de la ecuación (6) con* $k > \ell \geq 2$*, entonces* $\ell \leq m - 1$ *y las desigualdades*

$$6 \leq n < m < 5.4 \times 10^{14} k^8 \log^3 k$$

se cumplen.

En una primera aplicación del Teorema de Matveev, obtenemos:

Lema (1)

Si (n, k, m, ℓ) *es una solución no trivial en enteros positivos de la ecuación (6) con* $k > \ell \geq 2$*, entonces* $\ell \leq m - 1$ *y las desigualdades*

$$6 \leq n < m < 5.4 \times 10^{14} k^8 \log^3 k$$

se cumplen.

Ahora, consideramos dos casos...

El caso de k pequeño

A continuación, tratamos los casos cuando $k \in [3, 800]$.

El caso de k pequeño

A continuación, tratamos los casos cuando $k \in [3, 800]$. Sea

$$z_1 := (n-1)\log\alpha - (m-1)\log\beta + \log\mu, \tag{10}$$

donde $\mu := (2\alpha - 1)f_k(\alpha)((2\beta - 1)f_\ell(\beta))^{-1}$. Por lo tanto, (9) puede ser reescrito como

$$|e^{z_1} - 1| < \frac{6}{\beta^{m-1}}.$$

El caso de k pequeño

A continuación, tratamos los casos cuando $k \in [3, 800]$. Sea

$$z_1 := (n-1)\log\alpha - (m-1)\log\beta + \log\mu, \tag{10}$$

donde $\mu := (2\alpha - 1)f_k(\alpha)((2\beta-1)f_\ell(\beta))^{-1}$. Por lo tanto, (9) puede ser reescrito como

$$|e^{z_1} - 1| < \frac{6}{\beta^{m-1}}.$$

Si $z_1 > 0$, entonces

$$0 < (n-1)\left(\frac{\log\alpha}{\log\beta}\right) - m + \left(1 + \frac{\log\mu}{\log\beta}\right) < 13 \cdot \beta^{-(m-1)}$$

Ahora, queremos reducir nuestras cotas.

Lema (Dujella-Petho, 1998)

Sea M un entero positivo, sea p/q un convergente de la fracción continua del irracional γ tal que $q > 6M$, y sean A, B, μ números reales con $A > 0$ y $B > 1$. Sea $\epsilon := \|\mu q\| - M\|\gamma q\|$, donde $\|\cdot\|$ denota la distancia al entero más cercano.

Lema (Dujella-Petho, 1998)

Sea M un entero positivo, sea p/q un convergente de la fracción continua del irracional γ tal que $q > 6M$, y sean A, B, μ números reales con $A > 0$ y $B > 1$. Sea $\epsilon := \|\mu q\| - M \|\gamma q\|$, donde $\|\cdot\|$ denota la distancia al entero más cercano. Si $\epsilon > 0$, entonces no hay solución de la desigualdad

$$0 < u\gamma - v + \mu < AB^{-w},$$

en enteros positivos u, v y w con

$$u \leq M \quad y \quad w \geq \frac{\log(Aq/\epsilon)}{\log B}.$$

$n - 1 \leq \lfloor 5.4 \times 10^{14} k^8 \log^3 k \rfloor$ (Del Lema 1 anterior)

Aplicamos el Lema de Dujella-Petho $\forall\ k \in [3, 800]$. En todos los casos obtenemos que $m < 1600$.

$n - 1 \leq \left\lfloor 5.4 \times 10^{14} k^8 \log^3 k \right\rfloor$ (Del Lema 1 anterior)

Aplicamos el Lema de Dujella-Petho $\forall\ k \in [3, 800]$. En todos los casos obtenemos que $m < 1600$.

Finalmente, usamos *Mathematica* para comparar $L_n^{(k)}$ y $L_m^{(\ell)}$ para el rango

$$6 \leq n, m \leq 1600,\ 2 \leq k, \ell \leq 800, \text{ con } n < m,\ \ell < k.$$

Esto completa el análisis en el caso $k \in [3, 800]$.

Lema (Bravo - Luca, 2013)

Si $r > 1$ *es un entero que satisface* $r - 1 < 2^{k/2}$, *entonces*

$$(2\alpha - 1) f_k(\alpha)\alpha^{r-1} = 3 \cdot 2^{r-2} + 3 \cdot 2^{r-1}\eta + \frac{\delta}{2} + \eta\delta,$$

donde δ *y* η *son números reales tales que*

$$|\delta| < \frac{2^{r+2}}{2^{k/2}} \quad y \quad |\eta| < \frac{2k}{2^k}.$$

El caso de k grande

Ahora, asumamos que $k > 800$. Para tal k tenemos

$$n < m < 5.4 \times 10^{14} k^8 \log^3 k < 2^{k/2}.$$

Se sigue entonces del Lema anterior que

$$\left|(2\alpha - 1) f_k(\alpha)\alpha^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-2}\right| < 15 \cdot \frac{2^{n-2}}{2^{k/2}} \tag{11}$$

El caso de k grande

Ahora, asumamos que $k > 800$. Para tal k tenemos

$$n < m < 5.4 \times 10^{14} k^8 \log^3 k < 2^{k/2}.$$

Se sigue entonces del Lema anterior que

$$\left|(2\alpha - 1) f_k(\alpha)\alpha^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-2}\right| < 15 \cdot \frac{2^{n-2}}{2^{k/2}} \tag{11}$$

Distinguimos dos subcasos...

$k > 800$ y el caso $m \leq 2^{\ell/2}$

Subcaso 1 $m \leq 2^{\ell/2}$

Usando el Lema anterior una vez más, tenemos que

$$\left|(2\beta - 1)f_\ell(\beta)\beta^{m-1} - 3 \cdot 2^{m-2}\right| < 45 \cdot \frac{2^{m-2}}{2^{\ell/2}}$$

Por lo tanto, usando (**??**) y la desigualdad anterior, obtenemos

$$\left|2^{m-2} - 2^{n-2}\right| < 19 \cdot \frac{2^{m-2}}{2^{\ell/2}}$$

$k > 800$ y el caso $m \leq 2^{\ell/2}$

Subcaso 1 $m \leq 2^{\ell/2}$

Usando el Lema anterior una vez más, tenemos que

$$\left|(2\beta - 1)f_\ell(\beta)\beta^{m-1} - 3 \cdot 2^{m-2}\right| < 45 \cdot \frac{2^{m-2}}{2^{\ell/2}}$$

Por lo tanto, usando (**??**) y la desigualdad anterior, obtenemos

$$\left|2^{m-2} - 2^{n-2}\right| < 19 \cdot \frac{2^{m-2}}{2^{\ell/2}}$$

Luego, $2^{\ell/2} < 38$ y por lo tanto $\ell \leq 10$. En este caso se sigue que $n < m \leq 37$. Esto completa el análisis cuando $m \leq 2^{\ell/2}$.

$k > 800$ y el caso $2^{\ell/2} < m$

Subcaso 2. $2^{\ell/2} < m$. Aquí, tenemos la siguiente cadena de desigualdades

$$2^{\ell/2} < m < 5.4 \times 10^{14} k^8 \log^3 k < k^{14}.$$

De (8), (**??**) y dividiendo ambos lados de la desigualdad resultante por $3 \cdot 2^{n-2}$, llegamos a

$$\left| 2^{-(n-2)} \cdot \beta^{m-1} \cdot 3^{-1} (2\beta - 1) f_\ell(\beta) - 1 \right| < \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{5}{2^{k/2}}$$

Si denotamos a $\Gamma = \min\{k/2, n-2\}$, entonces

$$\left| 2^{-(n-2)} \cdot \beta^{m-1} \cdot 3^{-1} (2\beta - 1) f_\ell(\beta) - 1 \right| < \frac{6}{2^{\Gamma}}$$

Teorema de Matveev $\Rightarrow \Gamma < 4.46 \times 10^{12} \ell^4 \log^2 \ell \log m$.

$$0 < (n-2)\left(\frac{\log 2}{\log \beta}\right) - m + \left(1 - \frac{\log \mu}{\log \beta}\right) < 26 \cdot 2^{-\Gamma}$$

$$0 < (n-2)\left(\frac{\log 2}{\log \beta}\right) - m + \left(1 - \frac{\log \mu}{\log \beta}\right) < 26 \cdot 2^{-\Gamma}$$

Caso 1. $\Gamma = \frac{k}{2}$

Lema

Si (n, k, m, ℓ) *es una solución no trivial en enteros positivos de la ecuación (6) con* $n \geq 6$*,* $k > 800$*,* $2^{\ell/2} < m$ *y* $k/2 \leq n-2$*, entonces las desigualdades*

$$n < m < 7.75 \times 10^{271}, k < 2.8 \times 10^{31} \ \ y \ \ \ell \leq 2970$$

se cumplen.

En este caso obtenemos que $k < 740$, lo cual es una contradicción.

Caso 2. $\Gamma = n - 2$

Lema

Si (n, k, m, ℓ) es una solución no trivial en enteros positivos de la ecuación (6) con $n \geq 6$, $k > 800$, $2^{\ell/2} < m$ y $n - 2 < k/2$, entonces las desigualdades

$$n < m < 9.1 \times 10^{24} \quad y \quad \ell \leq 180$$

se cumplen.

Con ayuda de *Mathematica*, reducimos el problema a encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$L_m^{(\ell)} = 3 \cdot 2^{n-2} \text{ con } 2 \leq \ell \leq 17,\ \ell + 1 < m \leq 290 \text{ y } 6 \leq n \leq 190.$$

Así, el Teorema queda demostrado.

- J.J. Bravo y F. Luca, Powers of two in generalized Fibonacci sequences, Rev. Colombiana Mat., **46** (2012), 67-79.
- J.J. Bravo y F. Luca, Coincidences in generalized Fibonacci sequences, J. Number Theory, **133** (2013), no. 6, 2121-2137.
- E. F. Bravo, J.J. Bravo y F. Luca, Coincidences in generalized Lucas sequences, Por aparecer en Fibonacci Quaterly.
- J.J. Bravo y F. Luca, Repdigits in k-Lucas sequences, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci., **124** (2014), no. 2, 141-154.
- A. Dujella y A. Petho, A generalization of a theorem of Baker and Davenport, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **49** (1998), no. 195, 291-306.
- E.M. Matveev, An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in the logarithms of algebraic numbers, II, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **64** (2000), no. 6, 125-180; translation in Izv. Math. **64** (2000), no. 6, 1217-1269.

ALTENUA
Grupo de Álgebra, Teoría de Números y Aplicaciones
ERM

15 Años

Gracias por su atención