Factoriales y la función τ de Ramanujan

Jhon Jairo Bravo G.

Universidad del Cauca

(Trabajo conjunto con Florian Luca)

Altencoa6–2014

San Juan de Pasto, agosto 14 de 2014

La función τ de Ramanujan

Sea $\tau(n)$ la función de Ramanujan dada por

$$q\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)^{24}=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n \qquad (|q|<1).$$

Ramanujan observó pero no pudo probar las siguientes tres propiedades de $\tau(n)$:

(i) $\tau(mn)=\tau(m)\tau(n)$ si $\gcd(m,n)=1$;
(ii) $\tau(p^{r+2})=\tau(p^{r+1})\tau(p)-p^{11}\tau(p^r)$ para p primo y $r\geq 0$;
(iii) $|\tau(p)|\leq 2p^{11/2}$ para todos los primos p.

Estas fueron demostradas por Mordell y Deligne.

Cero valores de $\tau(n)$

Lehmer conjecturó que $\tau(n) \neq 0$ para todo n. Esto todavía no se conoce. Se sabe que

$$\tau(n) \neq 0 \qquad \text{si} \qquad n \leq 22798241520242687999.$$

Serre probó que

$$\#\{p \leq x \ : \ \tau(p) = 0\} = O\left(\frac{x}{(\log x)^{3/2}}\right).$$

Comportamiento local de τ

F. Luca y Y. Bilu probaron el siguiente resultado:

Teorema

Si k es un entero positivo tal que $\tau(m) \neq 0$ para todo $m \leq k$, entonces para todo $\sigma \in S_k$, existen infinitos enteros positivos n tales que

$$|\tau(n+\sigma(1))| < |\tau(n+\sigma(2))| < \cdots < |\tau(n+\sigma(k))|.$$

S_k denota el grupo simétrico en k letras.

En 2000, F. Luca probó el siguiente resultado:

Teorema

Sea $f(n)$ cualquiera de las siguientes funciones aritméticas:

- $\phi(n)$ *(la función de Euler de n);*
- $\sigma(n)$ *(la suma de divisores de n);*
- $d(n)$ *(el número de divisores de n).*

Entonces para cualquier número racional r, la ecuación

$$\frac{f(m!)}{n!} = r$$

tiene a lo sumo un número finito de soluciones enteras (m, n).

Ecuaciones diofánticas con factoriales y funciones aritméticas

Varios resultados similares aparecen en la tesis de doctorado de D. Baczkowski (2009). Por ejemplo:

Teorema

Solamente hay un número finito de enteros positivos a, b, n y m tal que

$$\frac{\phi(n!)}{m!} = \frac{a}{b}, \quad \gcd(a, b) = 1 \quad y \quad \max\{\omega(a), \omega(b)\} \leq \frac{n}{7 \log n},$$

donde $\omega(n)$ representa el número de factores primos distintos de n.

En 2006, F. Luca e I. Shparlinski probaron el siguiente resultado.

Teorema

Solamente hay un número finito de soluciones enteras positivas (n, m) de la la ecuación

$$|\tau(n!)| = m!.$$

Teorema (B., Luca, 2013)

Si $|\tau(n!)| = m!$, *entonces* $n = 1, 2$.

Para la prueba hemos seguido las siguientes ideas:

- Formas lineales en dos logaritmos (Laurent, Mignotte y Nesterenko);
- Cotas sobre $d(n)$;
- Cotas inferiores sobre $\phi(n)/n$;
- Plan para reducir cotas.

Idea de la prueba...

Sean n y m enteros positivos tales que

$$|\tau(n!)| = m!.$$

Sabemos que

- $|\tau(t)| \leq d(t)t^{11/2}$ (Deligne);
- $d(t) \leq 2\sqrt{t}$ para todo $t \geq 1$.

Por tanto

$$m! = |\tau(n!)| \leq d(n!)(n!)^{11/2} < 2(n!)^6.$$

Así concluimos

$$\boxed{m < 6n}$$

Consideremos la sucesión $\mathbf{u} := (u_r)_{r=0}^{\infty}$ definida por $u_r = \tau(2^r)$.

$$\begin{cases} u_r = -24u_{r-1} - 2048u_{r-2} \quad \forall r \geq 2; \\ \\ u_0 = 1, \quad u_1 = -24. \end{cases}$$

$$\therefore \quad u_r = \frac{\alpha^{r+1} - \beta^{r+1}}{\alpha - \beta} \quad \text{para} \quad r \geq 0,$$

donde

$$(\alpha, \beta) = (-12 + 4i\sqrt{119}, -12 - 4i\sqrt{119}).$$

son los ceros del polinomio característico

$$\lambda^2 + 24\lambda + 2048.$$

$$¿\ \log|\alpha^s - \beta^s|\ ?; \quad s \in \mathbb{Z}^+$$

Observe que

$$|\alpha^s - \beta^s| = |\alpha|^s |\Lambda|$$

donde

$$\Lambda := (\beta/\alpha)^s - 1.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\log(1+\Lambda) &= s\log(\beta/\alpha) - 2\pi k i \\ &= s\log(\beta/\alpha) - 2k\log(-1).\end{aligned}$$

Altura logarítmica

Sea η un número algebraico de grado d sobre $\mathbb{Q}$.

$$f(X) := a_0 \prod_{i=1}^{d} (X - \eta^{(i)}) \in \mathbb{Z}[X] \qquad \text{(P. M. P.)}$$

Altura logarítmica

$$h(\eta) := \frac{1}{d} \left(\log a_0 + \sum_{i=1}^{d} \log \left(\max\{|\eta^{(i)}|, 1\} \right) \right).$$

Teorema (Laurent, Mignotte y Nesterenko)

Sean γ_1, γ_2 *números algebraicos no nulos y defina* $D = [\mathbb{Q}(\gamma_1, \gamma_2) : \mathbb{Q}]/[\mathbb{R}(\gamma_1, \gamma_2) : \mathbb{R}]$*. Sea*

$$\Gamma = b_2 \log \gamma_2 - b_1 \log \gamma_1,$$

donde $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}^+$*. Sean* A_1, A_2 *reales* > 1 *tales que*

$$\log A_i \geq \max \left\{ h(\gamma_i), \frac{|\log \gamma_i|}{D}, \frac{1}{D} \right\}, \quad i = 1, 2.$$

Si γ_1 *y* γ_2 *son multiplicativamente independientes, entonces*

$$\log |\Gamma| > -30.9 D^4 \left(\max \left\{ \log b', \frac{21}{D}, \frac{1}{2} \right\} \right)^2 \log A_1 \log A_2,$$

donde

$$b' = \frac{b_1}{D \log A_2} + \frac{b_2}{D \log A_1}.$$

Después de aplicar formas lineales en dos logaritmos llegamos a que:

Lema

Para todo $s \geq 1$,

$$|\log|\alpha^s - \beta^s| - s\log|\alpha|| < 24852\log^2(s+1)\log|\alpha|.$$

Polinomios ciclotómicos

Para $t \geq 1$, denotamos el t^{th} polinomio ciclotómico en α y β por $\Phi_t(\alpha, \beta)$, así

$$\Phi_t(\alpha, \beta) = \prod_{\substack{k=1 \\ \gcd(k,t)=1}}^{t} (\alpha - \zeta_t^k \beta),$$

donde $\zeta_t = \exp(2\pi i/t)$. Se sabe que

$$\alpha^t - \beta^t = \prod_{d|t} \Phi_d(\alpha, \beta).$$

También

$$\Phi_t(\alpha, \beta) = \prod_{d|t} (\alpha^{t/d} - \beta^{t/d})^{\mu(d)}.$$

μ denota la función de Möbius

Lema

Si $t > 2 \times 10^{11}$, *entonces*

$$\left(\frac{2t\log\log t}{2c'(\log\log t)^2+5} - ct^{1/3}\log^2(1+t)\right)\log|\alpha| < \log|\Phi_t(\alpha,\beta)|,$$

donde $c = 24852$ *y* $c' = 1.781072417990198$.

Prueba lema anterior

Dado que $\varphi(t) = \sum_{d|t}(t/d)\mu(d)$, tenemos

$$\begin{aligned}
|\log|\Phi_t(\alpha,\beta)| - \varphi(t)\log|\alpha|| &\leq \sum_{d|t} |\mu(d)| \left| \log|\alpha^{t/d} - \beta^{t/d}| - \frac{t}{d}\log|\alpha| \right| \\
&< \sum_{\substack{d|t \\ \mu(d)\neq 0}} c\log^2\left(1+\frac{t}{d}\right)\log|\alpha| \\
&< 2^{\omega(t)} c\log^2(1+t)\log|\alpha|.
\end{aligned}$$

En particular

$$\left(\varphi(t) - 2^{\omega(t)} c\log^2(1+t)\right)\log|\alpha| < \log|\Phi_t(\alpha,\beta)|.$$

Una nueva sucesión

Consideremos ahora la sucesión $\mathbf{v} := (v_r)_{r=1}^{\infty}$ definida por

$$\boxed{v_r = \Phi_{r+1}(\alpha, \beta)}$$

Aquí se tiene que $v_r \mid u_r$ para todo $r \geq 1$. Además

$$v_r = A_r B_r \quad \text{donde} \quad |A_r| \leq 6(r+1)$$

y cada factor primo de B_r es congruente con $\pm 1 \pmod{r+1}$.

De otro lado, escribamos $n! = 2^{a(n)} s$ (s impar). Se puede ver que si $n \geq 4$, entonces

$$n/2 < a(n) < n.$$

Como τ es multiplicativa se deduce que $u_{a(n)} \mid m!$. Por tanto $B_{a(n)} \mid m!$.

Como

$$B_{a(n)} \mid m! \quad \text{y} \quad m < 6n,$$

todos los factores primos ℓ de $B_{a(n)}$ cumplen que $\ell < 6n$.

Como $a(n) > n/2$, hay a lo sumo 26 primos $\ell < 6n$ con

$$\ell \equiv \pm 1 \pmod{a(n)+1}.$$

Además, como $B_{a(n)}|m!$, $m < 6n$, y todos los factores primos $\ell \equiv \pm 1 \pmod{a(n)+1}$, se sigue que $\ell^{14} \nmid B_{a(n)}$. Por lo tanto,

$$B_{a(n)} < (6n)^{26\cdot 13} = (6n)^{338}.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \log|\Phi_{a(n)+1}(\alpha,\beta)| = \log|v_{a(n)}| &= \log|A_{a(n)}| + \log B_{a(n)} \\ &< \log(6(a(n)+1)) + 338\log(6n) \\ &< 339\log(6n). \end{aligned}$$

Para la cota inferior, note que si $n \geq 5 \times 10^{12}$, entonces $a(n) + 1 > n/2 + 1 > 2 \times 10^{11}$. Así podemos aplicar Lema (ver lema) con $t = a(n) + 1$, obteniendo

$$\left(\frac{(n+2)\log\log(n/2+1)}{2c'(\log\log n)^2 + 5} - cn^{1/3}\log^2(n+1) \right) \log|\alpha| < \log|\Phi_{a(n)+1}(\alpha, \beta)|.$$

Lema

Si (n, m) es una solución en enteros positivos n y m de la ecuación $|\tau(n!)| = m!$, entonces

$$n < 5 \times 10^{12} \quad y \quad m < 3 \times 10^{13}.$$

Sea $P(t)$ el máximo factor primo de t.

Lema (Reductor)

Sean n_0, m_0 y $n_\star$ enteros positivos, y p un primo tal que $P(\tau(p)) \geq m_0$. Entonces

(a) *Si $\sqrt{n_0} < n_\star < n_0 < p^2$ y $a = \lfloor n_\star/p \rfloor$ es impar, entonces no hay solución a la ecuación $|\tau(n!)| = m!$ con*

$$n \in \{ap, ap+1, \ldots, ap+p-1\} \quad y \quad m < m_0.$$

(b) *Si $p < n_0 < 2p$, entonces no hay solución con $p \leq n < n_0$ y $m < m_0$.*

Reduciendo cotas

Ponemos

$$n_0 = 5 \times 10^{12}, \quad m_0 = 3 \times 10^{13}, \quad n_\star = n_0/10.$$

Con *Mathematica* buscamos un conjunto $\mathcal{P}_1$ de 50 primos, todos excediendo $\sqrt{n_0}$ y espaciados a una distancia al menos 10000, tal que $P(\tau(p)) \geq m_0$ para todo $p \in \mathcal{P}_1$. Algunos elementos de $\mathcal{P}_1$ son:

$$\mathcal{P}_1 = \{2246099, 2266129, 2276137, 2286139, \ldots, 2796751\}.$$

Reduciendo cotas

Después encontramos $p_1 \in \mathcal{P}_1$ tal que $a_1 = \lfloor n_\star / p_1 \rfloor$ sea impar. Por el Lema reductor concluimos que no hay soluciones con

$$n \in \{a_1 p_1, a_1 p_1 + 1, \ldots, a_1 p_1 + p_1 - 1\} \quad \text{y} \quad m < m_0.$$

Ahora ponemos $n_\star = a_1 p_1 + p_1$ y encontramos $p_2 \in \mathcal{P}_1$ con $a_2 = \lfloor n_\star / p_2 \rfloor$ impar.

Usando nuevamente el Lema reductor concluimos que no hay solución con

$$n \in \{a_2 p_2, a_2 p_2 + 1, \ldots, a_2 p_2 + p_2 - 1\} \quad \text{y} \quad m < m_0.$$

Nuevamente, ponemos $n_\star = a_2 p_2 + p_2$ y repetimos el proceso tantas veces para eliminar intervalos posicionados a la derecha de $n_\star$. Finalmente llegamos a n_0; es decir, logramos reducir la cota de n en un factor de 10. Esto es, $n < n_0/10 = 5 \times 10^{11}$ y $m < 3 \times 10^{12}$.

Reduciendo cotas

Ahora actualizamos las cotas de n_0 y m_0 y repetimos el proceso. En efecto, tomando $n_0 = 5 \times 10^{11}$, $m_0 = 3 \times 10^{12}$, y el mismo conjunto de primos $\mathcal{P}_1$, reducimos las cotas sobre n y m por otro factor de 10.

Este proceso se repitió 3 veces llegando a que $n < n_0 = 5 \times 10^7$ y $m < m_0 = 3 \times 10^8$.

En este momento no logramos encontrar primos $p \in \mathcal{P}_1$ tal que $\lfloor n_\star/p \rfloor$ sea impar. Así buscamos un nuevo conjunto $\mathcal{P}_2$ de 30 primos todos mayores que $\sqrt{n_0}$ y espaciados a una distancia al menos 1000, tal que $P(\tau(p)) \geq m_0$ para todo $p \in \mathcal{P}_2$. Algunos elementos de $\mathcal{P}_2$ son:

$$\mathcal{P}_2 = \{7079, 9091, 10093, 11113, \ldots, 39451, 40459, 41467, 42473\}.$$

Reduciendo cotas

Con este nuevo conjunto de primos, repetidas aplicaciones del Lema reductor conducen a que $n < n_0 = 5 \times 10^4$ y $m < n_0 = 3 \times 10^5$. Después generamos otro conjunto de primos para llegar a que $n < n_0 = 5 \times 10^2$ y $m < m_0 = 3 \times 10^3$.

Finalmente, como ahora tenemos cotas superiores más cómodas para n y m, usamos la parte (b) del Lema reductor para reducir las cotas. Es decir, tomando $p < n_0 < 2p$ con $P(\tau(p)) \geq m_0$, reducimos n_0 por casi la mitad. Después de varias aplicaciones obtenemos que $1 \leq n \leq 12$ y $1 \leq m \leq 72$.

Gracias por su atención...

Factoriales y la función τ de Ramanujan

Jhon Jairo Bravo G.

Universidad del Cauca

(Trabajo conjunto con Florian Luca)

Altencoa6–2014

San Juan de Pasto, agosto 14 de 2014