Algunos resultados derivados del estudio de la Sucesión de Fibonacci módulo n

Carlos Arturo Rodriguez Palma, Yzel Wlly Alay Gómez Espíndola
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
Email: crodriguez@matematicas.uis.edu.co, ywage03@gmail.com

Resumen. Una de las sucesiones sucesiones numéricas más conocidas e importantes es la sucesión de Fibonacci que puede ser construida recursivamente a partir de dos elementos iniciales, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, mediante la ecuación de recurrencia $F_n =_{n-1} +F_{n-2}$ para todo $n > 1$. Se puede observar que la sucesión de Fibonacci cumple con fascinantes propiedades, una de ellas es que al considerar la sucesión de sus residuos módulo un entero positivo n, estos residuos aparecen de forma periódica. Un problema de interés es contar el número de ceros que aparece en un periodo simple módulo n, como consecuencia del estudio de este problema surgen fórmulas que permiten encontrar el periodo de repetición de los residuos, en función del número de ceros en un periodo simple. En nuestra ponencia mostraremos como obtener estas fórmulas.

Iniciamos mostrando algunos conceptos básicos de la perspectiva modular de la sucesión de Fibonacci.

Definición. *Para $n > 1$, $k(n)$ es el menor índice positivo m tal que $n \mid F_{k(n)}$, es decir el menor entero m tal que $F_m \equiv 0(mod n)$.*

Ejemplo.

$k(2) = 3$, *pues* $F_3 = 2$ *es el menor número de Fibonacci tal que* $2 \mid F_i$

$k(13) = 7$, *pues* $F_7 = 13$ *es el menor número de Fibonacci tal que* $13 \mid F_i$

Teorema 3. *La sucesión de Fibonacci módulo n es periódica.*

El origen de estos estudios se basan en este resultado, es fácil probarlo notando que los residuos siguen la misma ecuación de recurrencia de la sucesión.

Definición. *El periodo de repetición de la sucesión de Fibonacci módulo un entero positivo n, es el menor entero positivo $l(n)$ tal que*

$$F_{l(n)} \equiv 0(mod n) \text{ y } F_{l(n)+1} \equiv 1(mod n).$$

Directamente de esta definición se sigue que para cualquier $k \in \mathbb{Z}$,

$$F_k \equiv 0(mod n) \text{ y } F_{k+1} \equiv 1(mod n) \Leftrightarrow l(n) \mid k.$$

Del teorema 3 y dado que que el residuo del primer término $F_0 = 0$ es 0 para cualquier módulo (entero positivo) se sigue que.

Corolario. *Cada entero positivo divide a un número infinito de numeros de Fibonacci.*

Proposición. *Sea n un entero,* $n \mid F_m \Leftrightarrow k(n) \mid m$

Teorema 4. $k(n) \mid k(nm)$

A continuación definiremos algunos objetos que dependen de n y serán necesarios para el análisis que se presenta adelante.

Definición. *Si n es un entero positivo, entonces:*

1. *Denotaremos por* $s(n)$ *al residuo de* $F_{k(n)+1}$ *módulo n y lo llamaremos el multiplicador de F módulo n.*

2. *Denotaremos por* $\beta(n)$ *al orden de* $s(n)$ *módulo n, es decir* $s(n)^{\beta(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ *y si* $n < \beta(n)$ *entonces* $s(n)^{\beta(n)} \not\equiv 1 \pmod{n}$.

Teorema 5. $l(n) = k(n)\beta(n)$

En el desarrollo de la prueba del siguiente teorema surge un método para encontrar el número de ceros que tiene un periodo simple la sucesión de Fibonacci módulo n.

Teorema 6. $l(n) = \gcd(2, \beta(n)) \cdot lcm[k(n), \gamma(n)]$ *donde* $\gamma(2) = 1$ *y* $\gamma(n) = 2$ *para todo* $n > 2$.

Finalmente presentaremos algunos resultados que son onsecuencia directa del teorema anterior, con los cuales podremos calcular el periodo de la sucesión para algunos módulos con formas especiales.

Teorema 7. $l(2^t) = 3 \times 2^{t-1}$

Teorema 8. $l(5^t) = 4 \times 5^t$

PALABRAS CLAVES. Fibonacci modulo n-Periodicidad-Residuos-Sucesión.

REFERENCIAS

[1] Luca, Florian. *Fibonacci and Lucas numbers with only one ditinct digit. Portugaliae Mathematica*, vol. 57 fasiculo 2, 2000.

[2] Renault, Marc. *The Fibonacci secuence under varius moduli.* 1996

[3] Riasat, Samin. $\mathbb{Z}[(\varphi)]$ *and the Fibonacci seceunce modulo n. Mathematical Reflections 1, 2011*

[4] Campbell II, Charles W. *The period of the Fibonacci secuence modulo j.* Math 399 Spring 2007.