# Una visión general de las series lineales limites sobre curvas.

PEDRO HERNANDEZ RIZZO
Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia
Email: pedro.hernandez@udea.edu.co

**RESUMEN.** En esta charla presentaremos una breve introducción a la teoría de series lineales limites (abreviadamente, sll) sobre curvas de tipo compacto, desde su introducción por Eisenbud y Harris en los años 80 ([2]), pasando a la teoría de Osserman ([6]) y culminando con los recientes trabajos de Rizzo-Esteves-Nigro sobre sll de niveles $\delta$ ([4]).

Las series lineales sobre curvas suaves son una poderosa herramienta para la comprensión de propiedades geométricas asociadas a la curva (por ejemplo, morfismos al espacio proyectivo, puntos de Weiertrass, etc.).

La técnica de sll fue introducida por Eisenbud y Harris ([2]), la cuál, a grosso modo, consiste en el estudio de propiedades geométricas via degeneraciones a una curva (típicamente) nodal. Ellos construyeron una variedad $G_d^{r,\mathrm{E-H}}(X)$ sobre una curva nodal $X$ de tipo compacto parametrizando tuplas de series lineales de "grados extremos". En esta variedad las sll refinadas son las que mejor se comportan y útiles en las aplicaciones, además de formar un subconjunto abierto. Sin embargo, es posible encontrar limites de series lineales que no convergen a sll refinadas sobre $X$, sino, a las llamadas sll crudas.

Esta deficiencia motiva a Osserman ([6]) a la construcción de $G_d^{r,\mathrm{Oss}}(X)$ de sll de "todos los grados" sobre la curva nodal $X$ de dos componentes suaves que se intersectan transversalmente en un único nodo. Esta variedad se comporta mejor functorialmente que la variedad de Eisenbud–Harris y el abierto de sll exactas, que contiene a las sll refinadas, es bien comportado. En efecto, Osserman y Esteves ([5]) prueban que las sll exactas corresponden a esquemas bien comportados en las fibras del mapa de Abel.

Es sabido que, para una curva suave $C$, las series lineales son completamente determinadas por los subesquemas lineales de las fibras del mapa de Abel. Precisamente, tenemos un isomorfismo

$$\mathbb{P} : G_d^r(C) \longrightarrow \mathrm{Hilb}_{A_d}^{\binom{r+t}{r},H}.$$

Esteves y Osserman producen un morfismo racional

$$\mathbb{P} : G_d^{r,\mathrm{Oss}}(X) \dashrightarrow \mathrm{Hilb}_{A_d}^{\binom{r+t+s}{r},H}$$

el cuál es definido sobre el abierto $G_d^{r,\mathrm{Exact}}(X)$ de sll exactas de la variedad de Osserman.

El principal motivo de la construcción de los sll de niveles $\delta$ en [4] es generalizar la relación encontrada por Esteves y Osserman entre sll y las fibras del mapa de Abel. Dicha motivación es originada por el estudio de degeneraciones a la curva $X$ donde el espacio total no es regular, iniciada con los trabajos en [3]. La construcción de la nueva variedad, $G^r_{d,\delta}(X)$, de las sll de nivel $\delta$ es a partir de la combinación de las técnicas de "torsión" en [1] y de "ligación" en [6].

**Palabras claves.** Degeneraciones a curvas de tipo compacto. Series lineales limites. Variedades de series lineales limites. Mapas de Abel.

**Referencias**

[1] Cumino, C., Esteves, E., Gatto, L. Limits of special Weiertrass points. Int. Math. Res. Papers, **2008**:1–65, (2008).

[2] Eisenbud, D., Harris, J. Limit linear series: Basic theory. Invent. Math., **85**:337–371, (1986).

[3] Esteves, E. Compactifying the relative Jacobian over families of reduced curves. Trnas. of the Amer. Math. Soc., **353(8)**:3045–3095, (2001).

[4] Esteves, E., Nigro, A., Rizzo, P. Level-$\delta$ limit linear series on singular curves. Preprint.

[5] Esteves, E., Osserman, B. Abel maps and limit linear series. Rend. Circ. Mat. Palermo, **62(1)**:79–95, (2013).

[6] Osserman, B. A limit linear series moduli scheme. Annales de l'Institut Fourier. **56(4)**:1165–1205, (2006).