

USO COMPLEMENTARIO DE MATERIALES MANIPULATIVOS Y DEL
AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA CABRI 3D EN LA COMPRESIÓN DE
LAS PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DEL CUBO

BERTHA MIREYA HERNÁNDEZ CÁRDENAS
ROSA ELENA BASTIDAS BASTIDAS

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO

2014

USO COMPLEMENTARIO DE MATERIALES MANIPULATIVOS Y DEL
AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA CABRI 3D EN LA COMPRESIÓN DE
LAS PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DEL CUBO

Por
BERTHA MIREYA HERNANDEZ CARDENAS
ROSA ELENA BASTIDAS BASTIDAS

Trabajo de Grado presentado como
Requisito parcial para optar al título de
Licenciado en Matemáticas

Director
EDINSSON FERNÁNDEZ MOSQUERA
Magister en Educación Matemática

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO

2014

Nota de Responsabilidad:

Las ideas y conclusiones aportadas en el siguiente trabajo de grado son responsabilidad exclusiva de las autoras.

Artículo 1ro del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966 emanado del Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

NOTA DE ACEPTACIÓN:

Edinsson Fernández M

Director

.

Jurado

Fernando Soto Agreda

Jurado

Libardo Jácome

San Juan de Pasto, Abril 2014.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradecemos a Dios por darnos la salud, el ánimo y la paciencia necesaria para desarrollar este trabajo de grado.

A nuestro director y profesor Edinsson Fernández M., por su colaboración, paciencia y tiempo invertido, gracias a su perseverancia y exigencias guió de manera correcta cada una de nuestras ideas.

Damos gracias a nuestras familias por su amor, comprensión y apoyo durante nuestra formación profesional; pues ellos nos apoyaron de manera incondicional durante el transcurso de este trabajo.

A la Institución Educativa, lugar en donde se desarrollo la implementación de nuestro trabajo, a la docente y a sus estudiantes, por brindarnos el espacio y el tiempo que se necesitaba para llevar a cabalidad este trabajo.

A Lucy Aguilera por brindarnos su amistad y su tiempo para guiarnos en la escritura de este informe final.

A nuestros amigos por estar presente en los buenos y en los malos momentos, haciendo de la vida universitaria una etapa inolvidable.

.

A todos, gracias.

Rosa y Bertha

Le agradezco a Dios por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme amor, salud, una hermosa familia y una vida llena de aprendizajes.

A mis padres: Alba Cárdenas y Manuel Hernández, de manera especial a mi mamá quien hoy mira el fruto de su esfuerzo y sacrificio, persona de quién me siento orgullosa, y a la que le agradezco por su amor, sabiduría, paciencia, generosidad, comprensión y consejo ante cualquier dificultad.

A mi hijo Pablo Gabriel mi pequeño angelito quien con su ternura y afecto me motiva a seguir cada día de pie y continuar luchando por su bienestar, a su papá Gabriel Zambrano por su paciencia y comprensión demostrándonos así su amor y cariño.

A mis hermanos: Alex Manuel, Mario Antonio, y a mis sobrinos: Manuel Alejandro y Mario Francisco, pequeños traviesos que junto con mi hijo llenan de alegría mi familia y con su sonrisa mantienen la unión familiar.

A mis abuelos Pablo Antonio y Bertha quienes desde el cielo son mi guía y mi fortaleza para no desfallecer.

A mi compañera y amiga Rosa, porque a pesar de todos los momentos difíciles que tuvimos, pudimos salir adelante con nuestro trabajo, por su paciencia, comprensión y ayuda.

A todos ellos dedico este trabajo que es fruto de largas noches de traspaso, perseverancia y amor por mi profesión.

Mil Gracias

Bertha Mireya Hernández Cárdenas

Doy gracias a Dios por darme la vida, por la vida de mis padres y por ser mi guía y mi fortaleza, en los duros momentos de mi vida.

A mi madre Melba, de quién estoy orgullosa y a quien le agradezco su apoyo incondicional, sus sacrificios y sobre todo su amor. A mi padre Luis por su amor, comprensión y amistad incondicional.

A mi tío Silvio, a quien le doy gracias por sus consejos y por su apoyo; y quien ahora desde el cielo seguirá siendo mi guía.

A mi primo Mario, que es mi hermano y mi amigo, quien ha estado a mi lado, en todos los momentos de mi vida.

A mi compañera y amiga Bertha Mireya, ya que con ella luchamos hasta el final para lograr éste trabajo.

A todas las personas que de una u otra forma me animaron a salir adelante.

A ellos, personas importantes de mi vida les dedico éste trabajo.

Muchas Gracias.

Rosa Elena Bastidas

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN.....	13
INTRODUCCIÓN	15
1. ASPECTOS GENERALES	18
1.1. Antecedentes	18
1.2. Justificación y Planteamiento del Problema	34
1.3. Objetivos	42
1.3.1. Objetivo General.....	42
1.3.2. Objetivos Específicos	42
2. ANÁLISIS PRELIMINARES	43
2.1. Dimensión Histórico – Epistemológica	44
2.2. Dimensión Cognitiva	53
2.2.1. Enfoque Instrumental: Cabri 3D y Materiales Manipulativos.	53
2.2.2. Uso Complementario de Materiales Manipulativos y Virtuales.....	59
2.3. Dimensión Didáctica.....	62
2.3.1. La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD).....	62
2.3.1.1. El Medio	65
2.3.1.2. Materiales Manipulativos Físicos como Medio	66
2.3.1.3. El AGD Cabri 3D como Medio	66
2.3.2. Análisis Curricular	68
2.3.2.1. Estándares Básicos de Competencias para el área de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional de Colombia	68
3. DISEÑO DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS Y ANÁLISIS A PRIORI	78
3.1. Análisis de la Secuencia Didáctica	79
3.1.1. Situación Didáctica No. 1: Cubo con palillos	82
3.1.2. Situación Didáctica No. 2: Cubo con Cabri 3D	83
3.1.3. Situación Didáctica No. 3: Los Hexaminós	92
3.1.4. Situación Didáctica No. 4: Desdoblando el Cubo.....	95
4. ANÁLISIS A POSTERIORI Y RESULTADOS.....	98
4.1. Marco contextual.....	98
4.2. Análisis a posteriori	99
4.2.1. Situación Didáctica No. 1: Cubo con palillos	100
4.2.2. Situación Didáctica No. 2: Cubo con Cabri 3D	102
4.2.3. Situación Didáctica No. 3: Los Hexaminos	110

4.2.4 .Situación Didáctica No. 4: Desdoblado el Cubo.....	114
4.3 Resultados	118
CONCLUSIONES	121
BIBLIOGRAFÍA	127
ANEXOS	135

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Tetraedro truncado o cubocaedro	24
Figura 2. Dibujos de Leonardo Da Vinci para el Icosaedro y el Rombicuboctaedro	25
Figura 3. Desarrollo Plano de la superficie del cubo	25
Figura 4. Modelo poliédrico del sistema solar según Kepler.....	26
Figura 5. Desarrollo Plano del cubo o Hexamino	37
Figura 6. Cálculo del Volumen del cubo y su Descomposición	38
Figura 7. Figuras de barro de aproximadamente 2000 a.C.	44
Figura 8. Elementos y cuerpos platónicos	45
Figura 9. Ilustración de la definición 1 del libro XI de la obra Euclidiana	47
Figura 10. Ilustración de la definición 2 del libro XI de la obra Euclidiana.....	47
Figura 11. Ilustración de la definición 8 del libro XI de la obra Euclidiana.....	48
Figura 12. Ilustración de la definición 25 del libro XI de la obra Euclidiana.....	48
Figura 13. Ilustración de la proposición 3 del libro XI de la obra Euclidiana	49
Figura 14. Ilustración de la .proposición 6 del libro XI de la obra Euclidiana	50
Figura 15. Ilustración de la proposición 14 del libro XI de la obra Euclidiana.	50
Figura 16. Ilustración de la proposición 16 del libro XI de la obra Euclidiana.	51
Figura 17. Ilustración de la proposición 38 del libro XI de la obra Euclidiana	52
Figura 18. Modelo SAI Situaciones de Actividades Instrumentadas	55
Figura 19. Génesis Instrumental	57
Figura 20. Estructura del Análisis a Priori	79
Figura 21. Materiales Manipulativos empleados	80
Figura 22. Poliedros Platónicos	86
Figura 23. Cajita.....	88
Figura 24. Cuadrado de longitud 3 cm.....	90
Figura 25. Centro del cubo.....	91
Figura 26. Hexaminos que forman cubo.....	93
Figura 27. Hexaminos que no forman cubo	93
Figura 28. Trece (13) Hexaminos restantes	94
Figura 29. Hexamino.....	95

Figura 30. Cubo formado a partir del hexamino	95
Figura 31. Cubos realizados por los estudiantes	101
Figura 32. Respuestas a la Situación No. 1	102
Figura 33. Respuesta a la Situación No. 2_ítem 1	104
Figura 34. Estudiante resolviendo la Situación No. 2_ítem 2 en Cabri 3D	105
Figura 35. Respuesta a la Situación No. 2_ítem 2	106
Figura 36. Ayuda de Cabri 3D con sus diferentes formas de construir cubos.....	107
Figura 37. Respuesta a la Situación No. 2_ítem 3.1, 3.2	107
Figura 38. Respuesta a la Situación No. 2_ítem 3.3	108
Figura 39. Estudiante resolviendo la Situación No. 2_ítem 3.4.en Cabri 3D	108
Figura 40. Respuesta a la Situación No. 2_ítem 3.4	108
Figura 41. Estudiante resolviendo la Situación No. 2_ítem 3.5. en Cabri 3D	109
Figura 42. Respuesta a la Situación No.2_ítem 4	110
Figura 43. Estudiante en el proceso de dibujar los hexaminós	111
Figura 44. Estudiante en el proceso de pegar los hexaminos.....	111
Figura 45. Respuesta a la Situación No. 3_ítem 3_ ítem 5	112
Figura 46. Respuesta a la Situación No. 3_ítem 1.3	112
Figura 47. Estudiantes dibujando hexaminos en el tablero.....	113
Figura 48. Respuesta a la Situación No. 3_ítem 6_ítem 7	113
Figura 49. Paso 1 del desarrollo de la Situación No.4	115
Figura 50. Paso 2 del desarrollo de la Situación No.4	115
Figura 51. Paso 3 del desarrollo de la Situación No.4	116
Figura 52. Paso 4 del desarrollo de la Situación No.4.....	116
Figura 53. Paso 5 del desarrollo de la Situación No.4	117
Figura 54. Paso 6 del desarrollo de la Situación No.4	117
Figura 55. Desarrollo de la Situación No.4 terminada.....	118

LISTA DE TABLAS

Tabla No. 1. Clasificación de Tareas de Interpretación de Objetos Tridimensionales.....	22
Tabla No. 2. Clasificación de Tareas de Orientación de Objetos Tridimensionales.....	23
Tabla No. 3. Promedio de Pruebas saber Grado 5°	39
Tabla No. 4. Estructura de la Secuencia Didáctica	81
Tabla No. 5. Respuestas Situacion Didactica No.2. ítem 1.....	87
Tabla No. 6. Ejecución de la Secuencia Didáctica.....	100

LISTA DE ANEXOS

Anexo A. Situación Didáctica No. 1: Registro fotográfico empleando materiales manipulativos: Plastilina, palillos.	135
Anexo B. Situación Didáctica No. 2: Registro fotográfico empleando el material virtual: Cabri 3D.....	136
Anexo C. Situación Didáctica No. 3: Registro fotográfico empleando materiales manipulativos: Cartón- cartulina, pegante.	137
Anexo D. Situación Didáctica No. 4: Registro fotográfico empleando el material virtual: Cabri 3D.....	136
Anexo E. Producciones de los estudiantes _ Situación No. 1.....	139
Anexo F. Producciones de los estudiantes _ Situación No. 2.....	142
Anexo G. Producciones de los estudiantes – Situación No. 3.....	151
Anexo H. Herramientas de Cabri empleadas en la Situación No. 2.....	159
Anexo I. Generación dinámica del cubo Situación didáctica No. 4.....	162

RESUMEN

Esta investigación se basó en la enseñanza de la geometría espacial, en particular sobre las propiedades geométricas del cubo. En consecuencia se planteó la siguiente pregunta: ¿De qué manera el uso de materiales manipulativos y Cabri 3D se complementan en la actividad matemática¹ de los estudiantes de grado quinto de educación básica primaria, de tal manera que les permita comprender las propiedades geométricas del cubo?

Para dar respuesta a este interrogante se estableció como objetivo general determinar el uso complementario entre materiales manipulativos y Cabri 3D en la comprensión de las propiedades geométricas del cubo en niños de quinto grado de educación básica primaria. De la misma forma, se tuvo como hipótesis principal que el uso complementario de materiales manipulativos y un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD), permitirá la comprensión de las propiedades del cubo.

En concordancia con lo anterior, se diseñó y ejecutó una secuencia de situaciones didácticas de acuerdo con la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (2007), las cuales se desarrollaron por medio de la metodología que plantea Artigue (1995) denominada micro-ingeniería didáctica.

Palabras Claves: geometría espacial, cubo, artefactos, instrumento, Cabri 3D, materiales manipulativos, situaciones didácticas, uso complementario, enfoque instrumental, micro-ingeniería didáctica.

¹Según Peltier (2003, p.7, citado en Fernández, 2011), la actividad matemática en el estudiante consiste en la elaboración de una estrategia, de un procedimiento que permita anticipar el resultado de una acción aun no realizada-o actual- sobre la cual se dispone de información. El rol de la anticipación es fundamental.

ABSTRACT

This research was based on the teaching of spatial geometry , in particular on the geometrical properties of nature . Consequently, the following question was posed: How does the use of manipulatives and Cabri 3D complement in mathematical activity of students in fifth grade basic primary education in a way that allows them to understand the geometric properties of the cube?

In response to this question was established as a general objective to determine the complementary use between manipulatives and Cabri 3D in understanding the geometric properties of nature in children fifth grade basic primary education. Likewise , it had as its main hypothesis that the complementary use of manipulatives and a Dynamic Geometry Environment (AGD) , will allow the understanding of the properties of the cube.

Consistent with this, we designed and implemented a sequence of didactic situations according to the theory of didactic situations (TDS) of Brousseau (2007) , which were developed through the methodology posed Artigue (1995) called micro didactic - engineering.

Keywords : spatial geometry , nature , artifacts , instrument, Cabri 3D , manipulatives , teaching situations , complementary use , instrumental approach , micro - engineering teaching .

INTRODUCCIÓN

El uso de materiales didácticos juegan un papel fundamental en el aprendizaje de las Matemáticas, su correcta utilización constituye la base de adquisición de conceptos, relaciones y métodos matemáticos proporcionando así el aprendizaje y enseñanza por parte de alumnos como de profesores.

Este trabajo de investigación giró en torno a una propuesta didáctica para el aprendizaje de las propiedades del cubo, en la cual se integra materiales manipulables como lo son el papel, la plastilina, palillos, entre otros y un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) como lo es Cabri 3D. Estos recursos didácticos cumplieron un uso complementario², en la creación y en el desarrollo de situaciones didácticas. A partir de esto, el presente trabajo contiene la siguiente organización:

En ASPECTOS GENERALES se abordan los Antecedentes, la Justificación, Planteamiento del problema y los Objetivos. En el primer aspecto se hace un breve recuento frente a las investigaciones relacionadas al uso de materiales didácticos que conllevan a mejorar la representación espacial, por tanto se clasifican en tres partes: investigaciones que hacen uso de un material manipulativo, investigaciones que hace uso de un material virtual (AGD) e investigaciones que hacen uso de un material manipulativo y un AGD.

En cuanto a la Justificación, se da a conocer el valor de este trabajo puesto que la geometría del espacio es muy poco estudiada en la educación básica. Al indagar los diferentes trabajos de grado y de investigación, no se encontró ninguna investigación previa que haga referencia a la geometría espacial, en particular, de las propiedades del cubo y su enseñanza en educación básica, razones importantes para las cuales es necesario adelantar dicho estudio en el ámbito de la geometría escolar.

²Una postura de lo que se va a entender por uso complementario de materiales manipulativos y virtuales, se encontrará en la sección 2.2.2. de este documento, específicamente en la Dimensión Cognitiva del Marco Teórico tomado en consideración.

Por otro lado, en el Planteamiento del Problema, se presentan diferentes investigaciones, con respecto a la dificultad al representar objetos tridimensionales, pues usualmente se hace de forma bidimensional lo que implica que el paso del espacio al plano genera una distorsión de las propiedades y características de los objetos, lo que conlleva al estudiante a no diferenciar entre área y superficie. Esto dio origen a la pregunta de ésta investigación, en la que se buscó la forma de que los diferentes materiales ayuden a la comprensión de las propiedades del cubo. Por esto, se partió del uso complementario de materiales manipulativos y un AGD, los que permitirían la comprensión de las propiedades del cubo en niños de quinto grado de educación básica primaria.

En cuanto a los Objetivos, se planteó un objetivo general el cual responde la pregunta de esta investigación y los objetivos específicos que ayudaron a cumplir con el objetivo general.

En el ANALISIS PRELIMINARES se abordan tres dimensiones usuales en Didáctica de las Matemáticas, de acuerdo con la metodología de micro-ingeniería didáctica: Dimensión Histórica - Epistemológica, Dimensión Cognitiva y Dimensión Didáctica.

En la Dimensión Histórica - Epistemológica, se presenta los aportes de Euclides a la Geometría Espacial, en especial, lo relacionado a las propiedades geométricas del cubo.

En la Dimensión Cognitiva, se estudia el enfoque instrumental de Verillón & Rabardel (1995, citado en Maschietto & Trouche, 2010), para entenderla utilización de artefactos en el campo de la investigación de las TIC.

La Dimensión Didáctica, se fundamentó en la TSD desarrollada por Brousseau (2007). Aquí, el estudiante es el propio gestor de su conocimiento³ y mediante la interacción con un determinado medio (Cabri 3D y materiales manipulables), el profesor

³En la TSD, se hace la diferencia entre el conocimiento y el saber, ya que el conocimiento es una experiencia personal, y el saber es institucional, es decir que recibe la sanción de una comunidad de “sabios”, quienes deciden lo que es ese saber.

es un orientador que permite la adquisición de conocimiento en los estudiantes. Además, se presenta una clasificación de materiales didácticos divididos en dos categorías: manipulativos y virtuales, esto con el fin de establecer la complementariedad entre los mismos.

Por último, se muestra un análisis curricular cuya referencia serán los Estándares Básicos de Competencias para el área de Matemáticas, planteados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en el año 2006, con referencia a los objetivos de esta investigación.

En el DISEÑO DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS Y ANÁLISIS A PRIORI, se muestra el diseño y el análisis de una secuencia didáctica donde se plantean las posibles soluciones de cada situación.

Por su parte en el ANÁLISIS A POSTERIORI Y RESULTADOS, se analizaron las producciones que realizaron los estudiantes, demostrando y confrontando los planteamientos propuestos en el análisis a priori. De igual manera, se exponen los resultados obtenidos.

Para finalizar, en CONCLUSIONES, se validan o refutan los objetivos, la hipótesis y pregunta de investigación que se mencionan al inicio de la investigación, examinando los resultados y logros alcanzados presentados en esta investigación.

1. ASPECTOS GENERALES

1.1. Antecedentes

Para alcanzar el aprendizaje y desarrollar el pensamiento espacial de los estudiantes es necesario representar, describir y comprender las características en las cuales ellos interactúan, es decir, desarrollar la habilidad para visualizar objetos tridimensionales.

Los poliedros son objetos tridimensionales y su representación bidimensional implica la distorsión de algunas de sus propiedades (Guillén, 1997), es por eso que los estudiantes presentan dificultades en el paso de lo tridimensional a lo bidimensional, una de las causas, es que tanto el pensamiento métrico como el geométrico ha sido descuidado o relegado por parte de los profesores, puesto que suele ser una temática que se la deja al final del año escolar y algunas veces, por falta de tiempo no se la estudia (Caicedo & Gómez, 2006).

Las siguientes investigaciones en Educación Matemática permiten observar, cómo mediante secuencias didácticas, el uso de materiales conllevan a los estudiantes a mejorar la capacidad de representación espacial, por medio de las propiedades de los objetos. Para ello se realizó la siguiente clasificación:

- Investigaciones que hacen uso de un material manipulativo.
- Investigaciones que hace uso de un material virtual: AGD.
- Investigaciones que hacen uso de un material manipulativo y un AGD.

Dentro de las primeras (uso de material manipulativo) se encuentra a Burgos, Fica, Navarro, Paredes, Paredes & Rebolledo (2005), quienes en su tesis abordan los juegos educativos y materiales manipulativos, como estrategias de enseñanza que el profesor debe emplear para promover el conocimiento en los estudiantes. Esta investigación se realizó durante un período de cinco (5) meses en un establecimiento particular

subvencionado⁴ de la ciudad de Temuco Chile llamado: Colegio Santacruz, donde se efectuaron actividades con el fin de implementar una metodología basada en juegos educativos y materiales manipulativos. Al respecto Caneo (1987), planteó que la utilización de estas técnicas dentro del aula de clases, desarrolla ciertas ventajas en los niños y niñas, no solo concernientes a su proceso de cognición, sino en más aspectos que pueden ser expresados de la siguiente forma:

- Permite romper con la rutina, dejando de lado la enseñanza tradicional, la cual es monótona.
- Desarrollan capacidades en los niños y niñas ya que mediante los juegos se puede aumentar la disposición al aprendizaje.
- Permiten la socialización; uno de los procesos que los niños y niñas deben trabajar desde el inicio de su educación.
- En lo intelectual-cognitivo se fomenta la observación, la atención, las capacidades lógicas, la fantasía, la imaginación, la iniciativa, la investigación científica, los conocimientos, las habilidades, los hábitos y el potencial creador.

Teniendo en cuenta estas ventajas, es posible enriquecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Las actividades y juegos con materiales manipulativos que se emplearon para el desarrollo de esta investigación fueron:

- Tangram chino con el cual se trabajó formas y espacio.
- Caja Rompecabezas: con este material se trabajó lectura y escritura de fracciones (medios, tercios, cuartos, octavos, décimos y centésimos), usando como referente un objeto, un conjunto de objetos fraccionables o una unidad de medida.
- Cubos Valor posicional: con este material se trabajó los números, valor representado por cada cifra de acuerdo a su posición en un número expresado en

⁴Se denomina Subvención Escolar a los recursos económicos que el Estado chileno, a través del Ministerio de Educación de Chile, otorga a la educación municipal y particular subvencionada, con el objeto de apoyar su financiamiento. La finalidad esencial de estos recursos, es que los establecimientos puedan cumplir con sus objetivos educativos.

unidades y transformación de un número de más de tres cifras por cambio de posición de sus dígitos.

- Súper producto: (Juego para tres jugadores) en este juego se pone en práctica la multiplicación así como establecer productos en situaciones correspondientes a diferentes significados.
- Álbum de Origamia y Kirigamia: este material consiste en utilizar papeles que permiten doblarse para la elaboración de distintas formas cotidianas, utilizando figuras geométricas, esto con el fin de trabajar la representación plana de objetos y cuerpos geométricos.
- Tarjetas problemas: se tiene en cuenta la resolución de problemas, aplicando estrategias o procedimientos de cálculo de sumas, restas, productos y cocientes de hasta cuatro cifras.
- La torre de Hanói, se moviliza la resolución de problemas no convencionales utilizando razonamientos basados en la lógica.

La implementación de esta nueva estrategia empleando juegos educativos y materiales manipulativos en clase de matemáticas por parte de las autoras logró captar la atención de los estudiantes siendo estos participes de las actividades, con el fin de que ellos no olviden la temática tratada en las diferentes actividades aumentando el interés y desarrollando procesos de pensamiento, siendo el profesor un agente que rompe con la rutina y monotonía de las clases.

También se revisó el artículo de Gonzato, Fernández & Godino (2011), denominado: Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial, donde se realizó una distinción entre tres tipos de tareas de visualización y orientación, el artículo está organizado en cinco partes así:

En la primera parte se abordó la importancia de la visualización y orientación espacial en primaria y secundaria, con el fin de justificar los procesos para la enseñanza, considerándolos como objetos de investigación en Didáctica de las Matemáticas.

En la segunda parte se trató la visualización⁵ y la orientación espacial, como parte de la geometría espacial, de tal manera que se identificaron los tipos de tareas o situaciones problema, que jugaron un papel importante en la representación del espacio, así mismo se muestran diferentes investigaciones de los autores: Berthelot & Salín (1992, citados en Gonzato et al., 2011) quienes identificaron tres categorías, en las cuales, el sujeto tiene el control con el espacio, como describir, fabricar o transformar objetos; desplazar, encontrar, comunicar la posición de objetos; reconocer, describir, construir o transformar un espacio de la vida cotidiana o de desplazamiento.

De acuerdo con esta categorización de acciones y tomando como base el contexto tridimensional distinguieron tres familias de actividades como:

- Orientación estática del sujeto y de los objetos.
- Interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales.
- Orientación del sujeto en espacios reales.

En la tercera parte se presentan las tareas de orientación estática del sujeto y de los objetos, donde el estudiante debe tener claro los conceptos como: arriba-abajo, izquierda-derecha, delante-detrás, con el fin de describir las posiciones de objetos y de personas en relación con otras.

En la cuarta parte se tienen las tareas de interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales, en éste tipo de tareas están aquellas que incluyan reconocer y cambiar puntos de vista, interpretar y rotar mentalmente objetos, la construcción de objetos a partir del desarrollo plano de las figuras sólidas. Para la clasificación de este tipo de tareas se presentan varias investigaciones de autores como:

⁵La visualización y la orientación espacial son un conjunto de habilidades relacionadas con el razonamiento espacial. Visualizar y orientar un objeto, un sujeto o un espacio, no incluye únicamente la habilidad de “ver” los objetos y los espacios, sino también la habilidad de reflexionar sobre ellos y sus posibles representaciones, sobre las relaciones entre sus partes, su estructura, y de examinar sus posibles transformaciones (rotación, sección, desarrollos).

Gutiérrez (1996, citado en Gonzato et al., 2011), emplea multicubos para analizar las representaciones planas, en las que el estudiante debe construir un módulo físico partiendo de la representación plana y viceversa.

En Pittalis, Mousoulides & Christou (2009, citados en Gonzato et al., 2011), se describen dos actividades relacionadas con la interpretación de una representación plana de un objeto tridimensional.

Gorgorió (1998, citado en Gonzato et al., 2011), se centra en el estudio de las estrategias utilizadas por alumnos entre 12 y 16 años al resolver tareas que involucran rotaciones espaciales.

Fischbein (1993, citado en Gonzato et al., 2011), analiza el caso del desarrollo de un cubo, como ejemplo de una práctica con estudiantes de actividades mentales en las cuales la cooperación entre el aspecto conceptual y el figural requiere un esfuerzo especial.

Estos autores hacen una clasificación acerca de la interpretación de objetos tridimensionales, cuyo resumen se presenta en la siguiente tabla. (Ver Tabla No. 1).

Tabla No.1.

Clasificación de Tareas de Interpretación de Objetos Tridimensionales (Gonzato et al., 2011).

Estimulo inicial		Acción (ejecutar/imaginar)	Tipo de respuesta
Presencia del objeto físico	Objeto (y/o sujeto) móvil	Convertir entre representaciones(plana o 3D)	Construcción Dibujo Identificación Verbal Otras
	Objeto(y sujeto) fijo	Rotar	
Ausencia del objeto físico	Objeto observado previamente	Plegar o desplegar	
	Objeto presentado en el plano	Composición y descomposición en partes Conteo de partes	

En la quinta parte se tienen las tareas de orientación del sujeto en espacios reales, el sujeto debe comprender el espacio en donde se sitúa, su ubicación y orientación en el

mismo, esto significa leer un mapa, dibujar un plano, construir una maqueta de un determinado espacio.

Autores como Parzysz & Van Dormolen (1996, citados en Gonzato et al., 2011) afirman que la geometría euclidiana empieza con la orientación en el espacio real, esto es, el entorno del cual los estudiantes forman parte. Weill-Fassina & Rachedi (1993, citados en Gonzato et al., 2011), analizan cómo adultos de bajo nivel escolar localizan en un plano de un edificio el punto donde se sitúan, Sbaragli (2003, citado en Gonzato et al., 2011), analizando algunas experiencias que tuvieron profesores de diferentes niveles escolares, propone actividades relacionadas con el espacio y las figuras. Berthelot & Salín (1992, citados en Gonzato et al., 2011) diferencian tres tipos de situaciones que requieren el uso de planos y mapas: la exploración de lugares desconocidos, el desplazamiento en un espacio y la comunicación de una localización precisa, entre otros permiten hacer una clasificación de las tareas de orientación del sujeto en espacio reales como se puede observar en la siguiente tabla. (Ver Tabla No. 2)

Tabla No. 2.

Clasificación de Tareas de Orientación de Objetos Tridimensionales (Gonzato et al., 2011).

Estimulo inicial	Acción inicial	Tipo de respuesta
Espacio real	Explorar el espacio (con movimiento) Observar espacios, trayectos,...(sin movimiento)	De representación: Del espacio: construir maquetas, dibujar mapas/planos - De trayectos
Representación Espacial	Interpretar información gráfica (localizar elementos, leer trayectos, interpretar sistemas de coordenadas,...)	De localización de objetos y personas: - En un mapa/plano/maquetas - Con coordenadas De descripción(verbalmente): - Trayectos

Espacio real + representación del espacio	Relacionar el espacio con su representación espacial	<p style="text-align: center;">- Posiciones</p> <p style="text-align: center;">Física:</p> <p>Orientar la representación del espacio (de acuerdo a los puntos cardinales, de acuerdo a los objetos fijos en la realidad).</p> <ul style="list-style-type: none"> - Ejecutar trayectos <p>Ubicar objetos o personas en el espacio.</p>
---	--	--

Sobre las Investigaciones que hacen uso de un material virtual: AGD, se analizaron:

La tesis de maestría de Silva (2010), denominada: Sólidos Arquimedianos E Cabri 3D: Um Estudo De Truncaturas Baseadas No Renascimento, muestra el empleo de la transposición didáctica⁶ para realizar un estudio acerca de la construcción de poliedros Arquimedianos⁷ en el renacimiento, para luego representarlos empleando Cabri 3D y aplicarlos a la escuela básica. En este trabajo se desarrolla la visualización e interpretación de las propiedades de cada sólido, con el fin de observar el manejo del espacio por parte de los estudiantes. Para la ejecución de dicha tesis se analizó las figuras y las construcciones geométricas hechas en el renacimiento con el fin de realizar las construcciones en Cabri 3D, es así como Cabri 3D se convierte en un instrumento para la enseñanza de la geometría, en particular el aprendizaje de la Geometría Espacial.

Silva (2010), realizó un estudio acerca de la historia de los poliedros, en este se trabajó el origen y construcción de los poliedros regulares, para luego truncarlos y convertirlos en Sólidos Arquimedianos, además, da a conocer a diversos autores del renacimiento que emplearon los sólidos de Arquímedes en sus obras, así entre ellos se tiene a:

Piero della Francesca (1412-1492), en uno de sus libros, "Libellus de quinque corpibus regularibus" (1480), contiene la figura más antigua que se conoce de un poliedro, cuyas sesenta caras son pentágonos y hexágonos.

⁶Se denomina Transposición Didáctica, según Chevallard (1997), al conjunto de transformaciones que sufre un saber científico a efectos de ser enseñados. Es decir el paso del saber-sabio al saber enseñado.

⁷Los poliedros Arquimedianos, como su nombre lo indica, se le debe Arquímedes, quien los describió por primera vez, como sólidos que tienen todas las caras regulares y todos los vértices iguales.

Figura 1. Tetraedro truncado o Cubocaedro (Silva, 2010).

Lucca Pacioli (1445-1517), presenta un estudio acerca de sólidos regulares y otros sólidos que se pueden derivar de ellos. Él proporciona poca información sobre cómo se obtienen los sólidos de Arquímedes, así como su dificultad al construirlos esto se relaciona con los diagramas o sus desarrollos los cuales ilustran los sólidos que han sido diseñados por Leonardo da Vinci (1452-1519), esto se puede ver en la Figura 2, destacando la estructura de los poliedros.

Figura 2. Dibujos de Leonardo Da Vinci para el Icosaedro y el Rombicuboctaedro (Silva, 2010).

Albert Durer (1471-1528), su método consiste en mirar al sólido en su desarrollo plano, siendo esta la representación más simple de la superficie de los sólidos de Arquímedes. La planificación de la superficie sólida, como se ilustra en la Figura3, destacando una simetría diferente a la de Arquímedes, sugiere por tanto que no se puede obtener por un simple proceso de truncamiento, según lo descrito por Piero della Francesca.

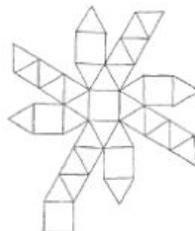


Figura 3. Desarrollo Plano de la superficie del Cubo (Silva, 2010).

Kepler (1571 - 1630), quien se dedicó a la construcción de un sistema cósmico del universo a “imagen y semejanza” de los sólidos perfectos, llegando con ello a la formulación de las leyes del movimiento planetario. El modelo poliédrico de Kepler, se ilustra en la Figura 4, fue motivada por el deseo de tratar de explicar la estructura del universo y exponerlas relaciones geométricas armoniosas.

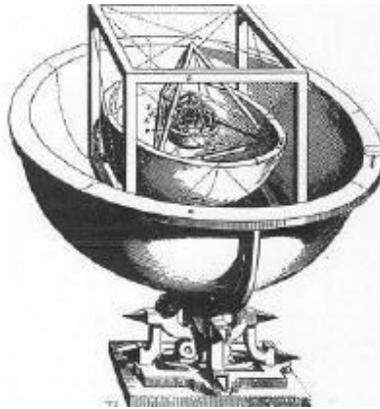


Figura 4. Modelo poliédrico del sistema solar según Kepler (Silva, 2010).

Al analizar la historia Silva (2010), identificó el proceso de truncamiento matemático empleado por los diferentes autores en el Renacimiento para obtener once de los trece sólidos de Arquímedes. Este proceso es la base para obtener el truncamiento de siete sólidos de Arquímedes, por medio truncamiento directo de los sólidos platónicos.

Así Silva (2010), contribuye con la enseñanza de nuevas tecnologías ya que estas permiten nuevas formas de aprendizaje, permitiendo a los estudiantes visualizar el espacio de una forma más lúdica, de tal manera que puedan aprender las propiedades matemáticas que rodean a cada construcción por medio del estudio de la historia.

Por otra parte, Álvarez & Fernández (2009) en su trabajo de pregrado: La Transformación de Rotación en el Espacio: Una propuesta de aula que integra el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D, realizaron un diseño didáctico cuyo objetivo era el de identificar los procesos de visualización de la transformación de rotación en el espacio al integrar el AGD Cabri 3D; además de llevar a los estudiantes a identificar fenómenos visuales relacionados con las propiedades de la rotación en el espacio, así, el

uso del Cabri 3D, permitió a los estudiantes una exploración activa del espacio, logrando así, interactuar con los objetos, manipularlos e identificar sus propiedades geométricas.

El trabajo en el aula lo realizaron en la Institución Educativa Normal Superior Farallones de Cali, en la que participaron 36 estudiantes de noveno grado divididos en grupos de 4 estudiantes; a quienes aplicaron tres actividades durante dos secciones de trabajo de dos horas clase.

La actividad 1 denominada Jugando Tetris 3D, cuyos objetivos eran que los estudiantes verbalicen la percepción visual de los movimientos que realizan los sólidos vinculados en el juego; reconozcan algunas características particulares del movimiento de rotación, implícitas en el juego tales como el ángulo de rotación y el sentido y activen conocimientos matemáticos previos y los apliquen en la solución de las situaciones que se les plantean.

Mediante ésta actividad los estudiantes movilizaron los conocimientos previos aplicándolos en la formulación de hipótesis, generando argumentos los cuales fueron validados en las siguientes dos actividades.

La actividad 2 denominada Jugando Tetris en Cabri 3D, cuyos objetivos eran que los estudiantes verbalicen la percepción visual de los movimientos que realiza el sólido en el juego y la relacionen con el sistemas de referencia x, y, z ; e identifiquen y diferencien los tipos de giros que puede realizar un sólido en el espacio

La actividad 3 denominada La Escalera los objetivos planteados para ésta actividad eran que los estudiantes describan los movimientos que realiza el sólido, relacionándolos con el sistemas de referencia x, y, z ; identifiquen elementos de la rotación en el espacio, tales como el eje, sentido y ángulo de giro y determinen algunas propiedades de la transformación de rotación en el espacio.

Con el uso del AGD Cabri 3D, por medio del arrastre, los estudiantes efectuaron la manipulación de los objetos que hacían parte de la construcción y a través de las

restricciones que se les hicieron a las actividades, se privilegiaron procesos cognitivos como la visualización; así los estudiantes lograron interpretar, analizar y verbalizar los fenómenos visuales, identificando el movimiento de rotación en el espacio y sus elementos.

Con el desarrollo de estas actividades por medio de la interacción con Cabri 3D se llegó a la conclusión de que éste es un medio que reacciona a las acciones de los estudiantes y sus retroacciones tienen un sentido para los mismos, mediante esto los estudiantes pueden validar sus hipótesis para así excluir a aquellas que estén erradas; además se observó que por medio del uso de Cabri 3D en el momento de manipular e interpretar los cuerpos en el espacio las propiedades geométricas de estos se mantienen invariantes durante la interacción del estudiante con Cabri 3D además permitió realizar una exploración activa del espacio por parte de los estudiantes.

De las investigaciones que hacen uso de un material manipulativo físico y un AGD se encontraron a:

Hoyos (2006), en su trabajo denominado: Funciones complementarias de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la escuela secundaria, el cual colocó en interacción dos clases de materiales didácticos distintos: Cabri Géomètre II Plus⁸ y los pantógrafos⁹ para la representación de figuras geométricas, con esto agrupo la utilización de tecnologías digitales conjuntamente con contextos históricos en la búsqueda de los cuales sean significativos para el aprendizaje de las matemáticas, en este trabajo se evidenció como el uso de materiales manipulables

⁸El Cabri Géomètre II Pluses un Ambiente de Geometría Dinámica que puede ser clasificado como un material didáctico virtual. Para López & Alvarado (2003, p.210, citado en Moncayo & Pantoja, 2010), el programa Cabri permite trabajar la geometría de un modo experimental. Nos facilita la construcción de figuras planas: puntos, segmentos, rectas, polígonos, circunferencia etc. y nos permite definir relaciones entre ellas. Pero, sin duda, la característica más importante y la aportación más novedosa del Cabri es que nos permite modificar la construcción inicial manteniendo las propiedades o relaciones que se ha definido.

⁹Un pantógrafo es un material manipulativo físico, según el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española (2012), es instrumento que sirve para copiar, ampliar o reducir un plano o dibujo. Consiste en un paralelogramo articulado, con dos de sus lados adyacentes prolongados; uno de estos se fija por un solo punto en la mesa, en otro se coloca un estilo con el cual se siguen las líneas del dibujo, y un lápiz sujeto a un tercer lado traza la copia, ampliación o reducción que se desea. Sirve para estudiar la geometría de transformaciones geométricas; en particular, para el estudio de las homotecias.

ejerce un orden inverso al realizado por el AGD y esto dio origen a una función complementaria en el desarrollo del aprendizaje y la comprensión de las propiedades de las transformaciones geométricas. Para esto realiza un estudio con 18 estudiantes de noveno grado de una escuela pública de México, a quienes se les aplicó una secuencia de actividades, basadas en el estudio de la homotecia y las isometrías, se realizaron durante 10 sesiones de 50 minutos desarrolladas así:

Las dos primeras sesiones se desarrollaron mediante una exploración general de los comandos básicos del software tomando el “arrastre” como una opción para la manipulación de distintos objetos.

En las sesiones tercera y cuarta se estudió la homotecia empleando el software Cabri Géomètre II Plus.

En las sesiones quinta y sexta se trabajó la simetría la reflexión y la traslación, por las posibilidades de explorar matemáticamente las propiedades que comparten ya que son isometrías.

En las sesiones 7ª y 8ª se trabajó con los pantógrafos o máquinas articuladas. La actividad consistió en explorar y manipular estas máquinas, las que permiten a los alumnos trazar dibujos guiados por configuraciones geométricas específicas, inmersos en la construcción de cada pantógrafo.

Finalmente, en las sesiones 9ª y 10ª se planteó una serie de problemas tomadas de Alarcón, Bonilla, Nava & Quintero (1994). Estos problemas son difíciles de resolver sin conocimientos previos.

Con el desarrollo de estas actividades se observó que los estudiantes desarrollaron procesos como el de la intuición en torno de las transformaciones geométricas por medio de la exploración del AGD Cabri II y el uso de máquinas articuladas o pantógrafos luego se concluyó que es posible que los instrumentos mencionados hayan satisfecho

funciones complementarias en el desarrollo del aprendizaje y la comprensión de las propiedades de las transformaciones geométricas.

De igual manera, Salazar (2011), en el trabajo denominado Situaciones didácticas: Teorema de Thales, aplicó una situación didáctica donde los materiales didácticos empleados fueron: el geoplano¹⁰ y el GeoGebra¹¹, donde se comprobó la existencia de una función complementaria puesto que los dos materiales mantuvieron una relación importante permitiendo a los estudiantes trabajar con el teorema de Thales y sus propiedades.

Se trabajó con 39 estudiantes de grado noveno, del Colegio Filipense “Nuestra Señora De La Esperanza” de la ciudad de San Juan de Pasto, esta institución es de carácter privado, acoge a estudiantes de estratos 3, 4 y 5. La institución cuenta con espacios físicos y lúdicos, uno de ellos es el laboratorio de matemáticas, espacio que cuenta con material didáctico para cada uno de los pensamientos matemáticos.

A los estudiantes se les aplicó una situación didáctica la cual se divide en dos actividades, el tiempo destinado fue de 90 minutos cada una.

La primera actividad denominada “el teorema de Thales y su recíproco en un entorno de geometría dinámica” se realizó empleando el software geometría dinámica GeoGebra, ésta herramienta tiene la ventaja de que los objetos de una construcción pueden moverse o ser modificados, siendo esta una característica relevante para llegar a generalidades y validación de las conjeturas. Cuando se aplicó esta actividad se pretendió que los estudiantes se familiaricen con el Teorema de Thales.

¹⁰Un geoplano es un recurso didáctico para la inducción de gran parte de los conceptos geométricos; el carácter manipulativo de este permite a los niños una mayor comprensión de toda una serie de términos abstractos, que muchas veces o no entienden o generan ideas erróneas entorno a ellos.

¹¹El GeoGebra es un software interactivo de matemáticas que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo, para la enseñanza de la matemática escolar. Es un ambiente informático que incorpora un AGD y un CAS (por sus siglas en inglés, un Software de Álgebra Computacional).

La segunda actividad denominada “Aplicaciones del teorema de Thales con material manipulativo (*geoplano*)” se llevó a cabo en el laboratorio de matemáticas de la institución educativa nombrada anteriormente. Cuando se desarrolló esta actividad las estudiantes por medio del uso del material manipulativo conjeturaron e identificaron las distintas características que deben presentar los triángulos, con el fin de establecer de manera intuitiva las condiciones necesarias que estos deben cumplir para que dos triángulos sean semejantes.

Con el desarrollo de estas actividades los estudiantes por medio de la interacción con el medio didáctico, tuvieron la posibilidad de actuar directamente sobre el problema, llevando a que los resultados obtenidos fueran satisfactorios, además los enfrentó a construir sus conocimientos de una manera que les permite conjeturar comprendiendo así el tema tratado en este caso el teorema de Thales.

En cuanto a la metodología empleada se concluyó que a pesar de ser una situación didáctica la profesora tuvo que intervenir, puesto que en el momento de usar GeoGebra los estudiantes presentaron dificultades, cabe resaltar que éstas prácticas en el aula generan en las estudiantes una participación activa y a los docentes les permiten generar controversias las cuales ayudan a realizar “devoluciones del problema” generando así un espacio para la discusión de los resultados obtenidos en el desarrollo de cada actividad.

Para finalizar, en la tesis de pregrado de Ibarquén y Realpe (2012) titulada: la enseñanza de la Simetría Axial a partir de la Complementariedad de Artefactos, se desarrolló una secuencia didáctica empleando el simetrizador¹² y el AGD Cabri II, que al complementarse conllevan a la conceptualización de las propiedades de la simetría axial.

Este trabajo de grado se realizó en una Institución Educativa de carácter público de la ciudad Santiago de Cali, con una población compuesta por treinta y cuatro (34)

¹²Un simetrizador es una máquina articulada que permite realizar transformaciones geométricas, en particular, permite realizar simetría axial de figuras geométricas.

estudiantes de grado tercero, cuyas edades oscilaron entre siete (7) y nueve (9) años, durante el año lectivo 2012. La secuencia didáctica presentada a los estudiantes constó de las siguientes situaciones:

- Dibujando con un mecano: ésta actividad tenía como fin primordial el de determinar las relaciones entre una figura dada y otra obtenida con el simetrizador. Después de presentada ésta actividad a los estudiantes, se pudo afirmar que el objetivo propuesto se vio desarrollado en los conocimientos nuevos que adquirieron los estudiantes, llevándolos a identificar la relación entre la figura dada y la obtenida con el simetrizador.
- Uniendo mitades: su finalidad fue identificar la congruencia como una propiedad de las figuras simétricas, para su desarrollo se empleó Cabri II como medio. Al desarrollar ésta actividad por parte de los estudiantes se pudo afirmar que el propósito de esta situación se vio reflejado en las justificaciones que dieron los estudiantes, cuando argumentaron que sólo era posible formar un corazón y cuatro mariposas al apoyarse en la forma y el tamaño que estas poseen.
- El automóvil: la importancia de esta situación didáctica radicó en que los estudiantes descubrieron que en las figuras simétricas se invierte su orientación, utilizando objetos de la vida cotidiana. Se utiliza Cabri II como medio; además, se cumplió con el propósito planteado.
- Distintos lugares: lo primordial de esta situación didáctica es el de reconocer las diferentes direcciones de los ejes de simetría: vertical, horizontal y oblicuo; después de aplicar ésta situación el propósito planteado, se vio reflejado en las representaciones gráficas que realizaron los estudiantes para cada uno de los ejes de simetría: el vertical, el horizontal y el oblicuo.

Después de aplicadas las actividades, se hizo un análisis de la complementariedad que se da entre el simetrizador y Cabri Geometry II Plus, manifestándose en los procesos de instrumentalización diferentes que se dan en cada artefacto, ya que con el

simetrizador los estudiantes construyen la figura final teniendo en cuenta su manejo técnico, lo que los llevó a concluir que las figuras obtenidas por éste eran iguales; mientras que con Cabri Geometry II Plus como la figura final ya estaba dada, el proceso de instrumentalización se basó en saber cómo se podía arrastrar cada figura, obteniendo como conocimiento que sólo se podía arrastrar la figura inicial.

Ibarguen & Realpe (2012), concluyeron lo siguiente:

“Se pudo observar que el simetrizador permitió reconocer que la figura dibujada por él era la misma que la dada pero en dirección opuesta, mientras que al trabajar con Cabri Geometry II Plus los estudiantes percibieron que la figura inicial y la final no sólo eran iguales en su forma sino también en su tamaño, lo cual manifiesta la complementariedad entre el simetrizador y el software Cabri Geometry II Plus” (p.138).

Es decir que existió una función complementaria entre el simetrizador y el software Cabri Géomètre II Plus dentro de un ambiente de aprendizaje la cual permitió la conceptualización de las propiedades de la simetría axial.

En la reseña de estas últimas investigaciones se abordó el uso de materiales manipulativos, y de materiales virtuales (AGD). Particularmente se distinguió la función complementaria existente entre estas dos clases de materiales, esto da a conocer una nueva estrategia de enseñanza, la cual permite la comprensión de las propiedades geométricas como lo son: la traslación, la simetría axial, y el Teorema de Thales, cabe resaltar que esta función complementaria, ayudó a mejorar la interacción entre sujeto, objeto y medio de aprendizaje.

1.2. Justificación y Planteamiento del Problema

Este trabajo de grado está enmarcado en la línea de investigación Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC's) en Educación Matemática, del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño, además se tomó como referencia la investigación realizada por Hoyos (2006), Iburguen & Realpe (2012) y Salazar (2011), en donde se evidencia el uso complementario de instrumentos.

De acuerdo con esto y teniendo en consideración los planteamientos de Cruz y Guerrero (2009), Silva (2010), Subroto (2011) y Villarroel, Méndez & Lavaque (2010), se puede aseverar que la enseñanza de las propiedades geométricas del cubo está inmersa dentro del estudio de otros sólidos. A partir de esto y aclarando además, que ésta y otras temáticas relacionadas presentan dificultades en su comprensión y apropiación por parte de los estudiantes, se decidió abordar la enseñanza de la geometría espacial, por medio de distintas clases de materiales didácticos.

La falta de comprensión de la geometría espacial se debe a una escasa percepción espacial, estas dificultades son consecuencia de tener que representar sobre el plano, lo que se ve en el espacio. Las representaciones no solo sirven para evidenciar conceptos e imágenes visuales internas, sino que son medios de estudio de propiedades, sirviendo de base a la intuición y a procesos inductivos y deductivos de razonamiento, según lo expresa Villarroel, Méndez & Lavaque (2010) en su artículo Cubos: Una propuesta didáctica basada en la visualización, en el que se hace mención a los desarrollos planos del Cubo, como una actividad, la cual permite a los estudiantes analizar las características de los cuerpos geométricos de un determinado sólido, esto con el propósito de que los estudiantes puedan reconstruir el sólido observando las figuras, así como también, imaginar la transformación en otras figuras sólidas, un ejemplo de esto es el mostrado en Silva (2011), ya que por medio del truncamiento pasa de sólidos platónicos a los sólidos Arquimedianos.

Por otra parte, según los Estándares Básicos de Competencias para el área de Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 2006), los sólidos se empiezan a trabajar mediante la comparación y clasificación de objetos tridimensionales de acuerdo a sus componentes y propiedades, sus elementos y características. Al considerar los sólidos como objetos tridimensionales se debe tener en cuenta su representación en el espacio, la cual se realiza de forma bidimensional, es por ello que la pérdida de algunas de sus propiedades geométricas es evidente, lo que conlleva al estudiante a no diferenciar entre área y superficie, es decir, a no saber distinguir todas sus propiedades y características.

Al respecto Guillén (1997), afirma que:

Los niños utilizan varios tipos de representación cuando se les incita a ello, que existen factores culturales que afectan en la representación de objetos tridimensionales y en la interpretación de sus representaciones bidimensionales y que el trasvase de información de geometría plana a espacial y viceversa presenta dificultades, puesto que los niños tienen problemas para interpretar dibujos que representan formas tridimensionales, para representar en el dibujo las líneas paralelas y perpendiculares del modelo, para reflejar en el dibujo la profundidad de un edificio y para orientar correctamente las vistas laterales (p. 178).

Asimismo, Vasco (1992), sugiere la Geometría Activa¹³ en los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional (1998) como una alternativa para la exploración activa y representación del espacio, por lo que el trabajo de esta temática, se podría complementar con distintos programas de computación que permitan representaciones y manipulaciones que son imposibles con el dibujo tradicional.

¹³La Geometría Activa, según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (1998) y según Vasco (1992), se dice que es “un enfoque a la geometría escolar que parte de la actividad del alumno y su confrontación con el mundo. Se trata pues de “hacer cosas”, de moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna. Es decir la exploración y representación del espacio” p. 57.

Otra de las razones por la cual es importante esta investigación son los resultados de la Pruebas Saber¹⁴ 2009¹⁵, según las características de la evaluación presentadas por el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior¹⁶ (ICFES, 2012), el componente geométrico asume el 40% del total de los ítems establecidos para la prueba de quinto grado y el 35% para la prueba de noveno grado.

En quinto grado se evalúa con respecto a Geometría Espacial, que el estudiante esté en capacidad de comparar y clasificar objetos tridimensionales y figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes, esto con el fin de evaluar la comprensión del espacio, así como también construir y descomponer figuras planas y sólidos a partir de condiciones dadas, así como el de utilizar diferentes procedimientos de cálculo para hallar medida de superficies y volúmenes.

En noveno grado los indicadores permiten dar cuenta que el estudiante esté en capacidad de reconocer y aplicar transformaciones de figuras planas, y que pueda predecir y comparar los resultados de aplicar transformaciones rígidas (rotación, traslación y reflexión) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte; además, que tenga la capacidad de hacer conjeturas y verificar propiedades de congruencias y semejanza entre figuras bidimensionales.

Al observar los cuadernillos de la Prueba Saber del área de matemáticas aplicadas en el mes de octubre del año 2009, se evidencia que en el grado quinto se evalúa la construcción de figuras tridimensionales a partir de figuras planas, para este caso en particular se tiene la construcción de un cubo a partir de un hexamino, cabe resaltar que para responder esta pregunta el estudiante de conocer el significado de desarrollo plano

¹⁴Las Pruebas Saber son unas pruebas de evaluación que se realiza cada tres años en Colombia para estudiantes de quinto y noveno grado de la Educación Básica en Colombia, en ella se tiene en cuenta las áreas de Lenguaje, Matemáticas y Ciencias. Los resultados de estas pruebas censales se pueden encontrar en la Web oficial del Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación de Colombia, ICFES. Para ver más: http://www.icfes.gov.co/saber59/index.php?option=com_content&view=article&id=11.

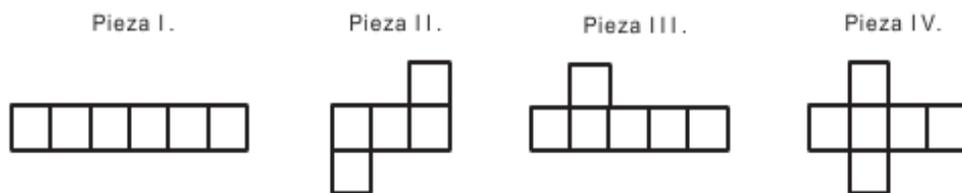
¹⁵Se toman las pruebas saber del año 2009 puesto que son las más actuales, las próximas pruebas a realizar son el 23 de octubre 2013.

¹⁶Es necesario resaltar que los resultados presentados por el ICFES no especifican en cada componente, sino que presenta resultados generales para el área de matemáticas.

o hexamino así como las propiedades que se conservan con respecto al objeto geométrico, una de ellas es la forma y el tamaño de las caras.

Para Gonzato et al. (2011), “Una de las dificultades para resolver tareas de desarrollo proviene del hecho que, a diferencia de las proyecciones, en estas representaciones se produce una duplicidad de algunos elementos del cuerpo tridimensional. Por ejemplo, una arista del cubo puede ser representada por dos aristas en el desarrollo (a un punto del cubo le puede corresponder puntos del plano). Estas aristas corresponden a aquellas que se unen al plegar el desarrollo.” (p. 11). (Ver Figura 5)

19. A Juana le dieron 4 piezas de cartulina como las que se muestran a continuación.



Ella quiere construir un cubo haciéndole dobleces a alguna de estas piezas; ¿cuál de las piezas debe seleccionar Juana?

- A. La pieza I.
- B. La pieza II.
- C. La pieza III.
- D. La pieza IV.

Figura 5. Desarrollo Plano del cubo o Hexamino (Ministerio de Educación Nacional. Cuadernillo Calendario A (2009)).

En la prueba realizada en mayo de 2009, dentro de los criterios a evaluar, se utilizaron los objetos tridimensionales con el fin de que el estudiante aplique el concepto de volumen empleando distintos procedimientos, esto con el fin de descomponer la figura dada en partes más pequeñas. Esto se constituye lo que para, Gonzato et al. (2011) denominan: Tareas de interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales¹⁷.

¹⁷Dentro de este tipo de tareas se encuentra: la composición y descomposición en partes.

Una de las dificultades en el momento de “tratar” de armar la figura inicial para dar respuesta a la pregunta número 23, es que algunas de sus partes no se pueden visualizar ya que permanecen ocultas. (Ver Figura 6)

Figura 6. Cálculo del volumen del cubo y su descomposición (Ministerio de Educación Nacional. Cuadernillo Calendario B (2009).

En pruebas SABER, Nariño obtuvo resultados por encima del promedio nacional en el área de Matemáticas. (Ver Tabla No. 3)

Tabla No. 3.

Promedio de Pruebas saber Grado 5° (Plan Departamental De Formación De Docentes 2009-2013, 2010).

2009	Grado 5°		
	Entidad	Promedio	Desviación Estándar
LENGUAJE	NACIONAL	300	67
	NARIÑO	292	61
MATEMATICAS	NACIONAL	299	65
	NARIÑO	315	63
CIENCIAS NARUTALES	NACIONAL	299	67
	NARIÑO	296	62

Para el grado quinto en el área de matemáticas el 88% de las instituciones educativas de Nariño se ubicaron en el nivel Básico y el 12% se encontraron en el nivel Satisfactorio; según el ICFES en Saber 3°, 5° y 9°: Resultados de las encuestas curriculares¹⁸ (2011), “las encuestas para el área de matemáticas se aplicaron a 241 docentes de grado quinto y a 105 de grado noveno, las preguntas fueron diseñadas para los profesores y que se concentran en el desarrollo del Proyecto Educativo Institucional (PEI) y del Plan de Mejoramiento Institucional (PMI), las condiciones para el desempeño de sus funciones, el conocimiento y los usos de los estándares básicos de competencias, la utilización de textos escolares, las prácticas de evaluación, además del manejo de las tareas y del tiempo escolar.”

Las preguntas que se plantearon a los profesores tenían como opción de respuesta las opciones: Siempre, Frecuentemente, Algunas Veces, Nunca, con respecto a la comprensión del espacio se encuentran las siguientes¹⁹:

“...17. Comparar y clasificar objetos tridimensionales y figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes.

¹⁸Como parte de las pruebas SABER 5° y 9°, se aplican cuestionarios a muestras representativas de rectores, docentes y estudiantes, con el fin de identificar cuáles son los factores asociados que explican los resultados de estos últimos.

¹⁹Se presentan las preguntas en su respectivo orden por tal razón comienzan desde el número 17.

18. Reconocer nociones de paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos.

19. Conjeturar y verificar los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano.

20. Describir y argumentar relaciones entre el perímetro y el área de diferentes figuras cuando se fija una de estas medidas.

21. Representar objetos tridimensionales a partir de formas bidimensionales.

22. Construir y descomponer figuras planas y sólidos a partir de condiciones dadas.”

De acuerdo con los resultados, tomando como referencia a la pregunta 17, se obtiene que el 15,7% de los maestros de quinto grado siempre llevan a cabo comparaciones de objetos tridimensionales y bidimensionales, el 30,7% lo hace frecuentemente, el 44% algunas veces y el 9,1% nunca. Cuando se indagó acerca del desarrollo de actividades para representar objetos tridimensionales a partir de las formas bidimensionales de estos (pregunta 21), el 23,2% lo hace frecuentemente. Se debe tener en cuenta que el 10,7% de los maestros de quinto grado siempre desarrolla ejercicios para construir y descomponer formas planas y sólidos (pregunta 22), el 27,4% lo hace frecuentemente, el 46% algunas veces, el 11,2% nunca y el 4,5% no sabe o no responde.

Lo anterior revela la necesidad de buscar nuevas estrategias de enseñanza que permita a los alumnos, disminuir el temor a las matemáticas y en los docentes a romper el modelo pedagógico tradicionalista ya que estos “reconocen que no dedican mucho tiempo a desarrollar actividades de tipo geométrico y que son desarrolladas con poca frecuencia en el aula” (ICFES, 2011, p.56). Según Guillén (2010) “La mayoría de los profesores no se sienten preparados para dirigir experiencias de descubrimiento, para animar a explorar las ideas geométricas utilizando construcciones, el laboratorio de materiales, para trabajar ideas prácticas, pues ellos mismos no tuvieron experiencias similares en su papel de estudiantes” (p.59).

Por tanto, el abordar esta temática no solo contribuirá en el aprendizaje de los estudiantes, sino que aportará significativamente en la didáctica que emplea el docente, dando a conocer nuevas herramientas pedagógicas, para que la población estudiantil pueda comprender la geometría del espacio. De igual forma, el desarrollo del presente trabajo contribuye en el crecimiento de la disciplina de la Educación Matemática, por sus desarrollos investigativos y por los resultados que vislumbra el mismo.

De acuerdo a esto se propuso el diseño de una secuencia didáctica que permita conceptualizar las propiedades geométricas del cubo, a partir del uso complementario de materiales manipulativos físicos y Cabri 3D. Por ello, se plantea la siguiente hipótesis:

El uso complementario de materiales manipulativos y el Cabri 3D, permitirían la comprensión de las propiedades del cubo en niños de quinto grado de educación básica primaria.

En consecuencia, se buscará dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación:

¿De qué manera la utilización de materiales manipulativos y Cabri 3D, puedan cumplir el uso complementario en la actividad matemática de los estudiantes de grado quinto de la educación básica primaria, de tal manera que les permita comprender las propiedades geométricas del cubo?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

- Determinar el uso complementario entre materiales manipulativos y Cabri 3D en la comprensión de las propiedades geométricas del cubo, en estudiantes de quinto grado de la educación básica primaria.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Diseñar una secuencia didáctica para la enseñanza de las propiedades geométricas del cubo, como uso complementario entre materiales manipulativos y Cabri 3D, empleando la metodología de micro-ingeniería didáctica.
- Analizar la actividad matemática²⁰ de los niños de quinto grado cuando se aborda el uso complementario de materiales manipulativos físicos y Cabri 3D en el aprendizaje de las propiedades geométricas del cubo.

²⁰En la página 12 se definió qué se entiende por “actividad matemática”.

2. ANÁLISIS PRELIMINARES

Este capítulo aborda tres análisis preliminares de acuerdo con la metodología de micro-ingeniería didáctica de Artigue (1995), los cuales se presentan en las tres dimensiones usuales en Didáctica de las Matemáticas: Dimensión Histórica - Epistemológica, Dimensión Cognitiva y Dimensión Didáctica, que según Chamorro (2003), sirven como herramientas profesionales para producir y controlar secuencias de aprendizaje con ciertas garantías de éxito. A continuación, se describen las tres dimensiones.

En la Dimensión histórica-epistemológica se da a conocer el aporte de Euclides a la geometría espacial en sus tres últimos libros de su obra geométrica, en particular, aquellos apartes que tratan acerca del cubo y sus propiedades, puesto que su origen está asociado al origen de los poliedros platónicos²¹ en general.

En la Dimensión cognitiva se presenta el enfoque instrumental de Verillón & Rabardel (1995, citados en Maschietto & Trouche, 2010), donde se le da importancia al uso de artefactos para el aprendizaje y el desarrollo cognitivo de los estudiantes dejando de ser herramientas para convertirse en instrumentos de mediación.

La Dimensión Didáctica se centra en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) planteada por Brousseau (2007), en ella se presenta una serie de actividades donde los artefactos actúan como elementos que hacen parte del medio, y que generan conocimiento en su interacción con el sujeto.

²¹Los poliedros platónicos son los cinco poliedros regulares y son: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Este nombre se debe a Platón (427-347 a.C.).

2.1. Dimensión Histórico – Epistemológica

La primera aparición que se conoce de los poliedros platónicos, proviene de un yacimiento neolítico en Escocia, en cual se encontraron figuras de barro de aproximadamente 2000 a.C.; aparentemente se trataba de elementos decorativos o de algún tipo de juego. (Ver Figura7)

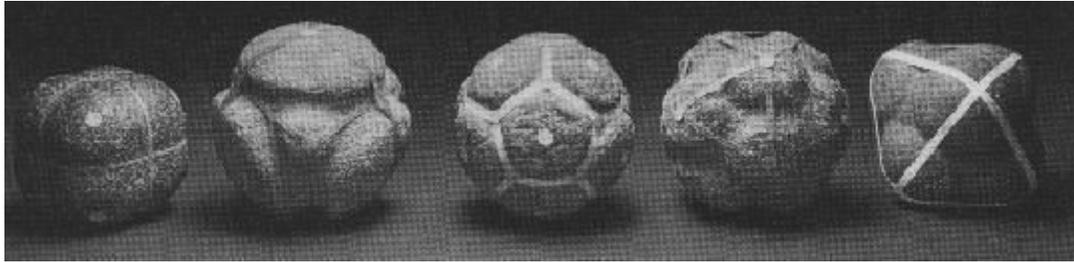


Figura 7. Figuras de barro de aproximadamente 2000 a.C (Quesada, 2006)

Con esto se evidencia que en ese momento no había ninguna comprensión matemática de estos objetos, sin embargo, ya tenían identificados exactamente a los cinco sólidos.

La primera cultura que se fijó en estos poliedros como algo para ser estudiado matemáticamente, fue la antigua Grecia.; ya que es allí donde surgen personas interesadas en cultivar un saber verdadero. Así, nace en el 530 a.C., la primera escuela matemática de la historia, denominada la escuela pitagórica que fue fundada por Pitágoras (569 a.C.- 475 a.C.); los pitagóricos veían a los resultados matemáticos como una especie de verdad trascendental, y por ello se dedicaron a su estudio. Por primera vez llamaron a estos cinco objetos con un nombre distintivo, los sólidos pitagóricos

Empédocles (480a.C. – 430 a.C.) asoció el cubo, el tetraedro, el icosaedro y el octaedro como elementos tierra, fuego, agua y aire respectivamente. (Ver Figura 8)²²

²²La figura 8 denominada elementos y cuerpos platónicos fue tomada de http://www.iessandoval.net/sandoval/aplica/activi_mate/actividades/poliedros/marco_poliedros.htm

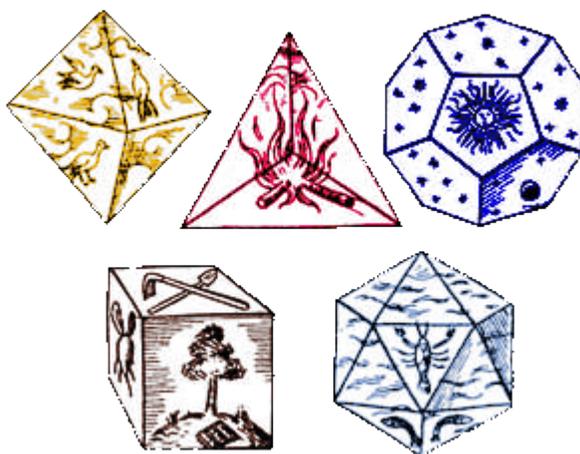


Figura 8. Elementos y cuerpos platónicos.

Posteriormente Platón (447 – 347 a.C.), relacionó el dodecaedro con la sustancia de la que estaban compuestas las estrellas; además, al igual que Empédocles relacionó los sólidos con los elementos tierra, agua, fuego y aire; ya que decía que el fuego estaba formado por tetraedros; el aire, de octaedros; el agua, de icosaedros; la tierra de cubos; y que la quinta forma el dodecaedro Dios la había colocado como límite del mundo Desde entonces los sólidos pitagóricos pasaron a llamarse sólidos platónicos, nombre que conservan en la actualidad.

Sin embargo, quién verdaderamente formaliza, y consagra los sólidos platónicos como elementos matemáticos es Euclides (330 a.C. - 275 a.C.), quien realiza la construcción geométrica de los cinco sólidos y demuestra que no pueden existir otros.

Los aportes de Euclides a la historia de las matemáticas conllevaron a que en la actualidad se pueda comprender los temas de la geometría, su obra fue significativa, ya que a partir de ella se creó una nueva visión de esta rama, permitiendo por medio del estudio de los postulados y el uso de la lógica aristotélica, encontrar su significado en la matemática, así como también dar paso al desarrollo de geometrías no euclidianas tales como las de Lobashevsky - Bolyai y Riemann.

Con el aporte de Euclides a la geometría espacial, en sus tres últimos libros de su obra Elementos, se logró caracterizar el espacio geométrico, puesto que su origen está asociado al estudio de los poliedros platónicos, en particular al estudio del cubo y sus

propiedades. Por ejemplo, el Libro XI de Elementos, trata todo lo relacionado a la Geometría de los sólidos, dando importantes definiciones y proposiciones acerca de rectas y planos; paralelismo y perpendicularidad; ángulos diedros y poliedros; pirámides, prismas, esferas, cono, dodecaedro, octaedro, cubo, icosaedro y cilindro.

Asimismo, el libro XI de la obra Euclidiana, trata áreas y volúmenes de sólidos, planteando bases para las proposiciones venideras en el libro XIII. Por ejemplo, se define el área de una figura, como el número que indica la porción de plano que ocupa y se expresa en unidades de superficie; además, el volumen está definido como el espacio ocupado por un objeto y al contorno de una superficie lo define como perímetro.

En el libro XIII, Euclides trabajó los sólidos regulares o también llamados sólidos platónicos. En este libro hay 18 proposiciones, de las cuales las 11 primeras aclaran las propiedades básicas de la razón media y extrema; las 7 proposiciones restantes tratan los sólidos regulares, cuyo propósito es el de inscribir cada uno de los poliedros regulares en una esfera, encontrando la razón de la arista del sólido al diámetro de la esfera circunscrita.

A continuación se enunciarán las definiciones y proposiciones relacionadas con el cubo, así como también los conceptos matemáticos que se emplean para su representación.

Definiciones utilizadas de la obra Euclidiana

Euclides XI. 1²³. Un sólido es aquello que tiene longitud, anchura y profundidad. (Ver Figura 9²⁴)

²³La nomenclatura utilizada en las definiciones y proposiciones nombradas, fue tomada de Martin (1998).

²⁴ Las ilustraciones de definiciones y proposiciones que se encuentran en la Dimensión Histórica-Epistemológico fueron creadas por las autoras de ésta investigación mediante el AGD Cabri 3D.

Figura 9. Ilustración de la definición 1 del libro XI de la obra Euclidiana.

Euclides con esta definición establece la característica principal que tiene los sólidos, la de poseer tres dimensiones, sin embargo, Euclides ni definió que se entendía por dimensión ni tampoco que se entendía por anchura, profundidad, ni superficie. Martin (1998) se refiere a esta definición como una definición evidentemente tradicional “longitud, amplitud y profundidad” y de “el arte de la medida de la longitud superficie y profundidad” y alude a la profundidad, solo como una descripción de "cuerpo". Mientras que para Aristóteles " la longitud es una línea, la amplitud una superficie, y el cuerpo la profundidad", y por ello relaciona lo siguiente "la longitud es continua en una dirección, la anchura en dos dimensiones y la profundidad tres dimensiones”.

Euclides XI. 2. El extremo de un sólido es una superficie. (Ver Figura 10)

Figura 10. Ilustración de la definición 2 del libro XI de la obra Euclidiana.

Euclides llega a generalizar la definición 5 del libro I que trata de que una superficie es aquello que sólo tiene longitud y anchura, trasladando su aplicación en el espacio. Martin (1998) menciona que Aristóteles da la noción de cuerpo como lo que es limitado por superficies, y que las superficies son divisiones de los cuerpos

Euclides XI. 8. Planos paralelos son los que no concurren. (Ver Figura 11)

Figura 11: Ilustración de la definición 8 del libro XI de la obra Euclidiana.

Euclides generaliza la definición 23 del libro I que trata de que Rectas paralelas son aquellas que, estando en un mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos; en esta definición hace lo mismo mediante la prolongación de planos. Martin (1998), nombra a Herón quien tiene la misma definición de planos paralelos.

Euclides XI. 25. Cubo es un sólido limitado por seis cuadrados. (Ver Figura 12)

Figura 12: Ilustración de la definición 25 del libro XI de la obra Euclidiana.

En esta definición Euclides da la noción de cubo, teniendo en cuenta el concepto de “cuadrado”; además es de gran importancia para este trabajo ya que las situaciones didácticas planteadas están fundamentadas en el cubo y sus propiedades.

Proposiciones utilizadas de la obra Euclidiana

Euclides XI. 3. Si dos planos se cortan uno a otro su intersección común es una línea recta. (Ver Figura 13)

La proposición No.3 está inmersa en el desarrollo del ítem 3.5 de la Situación Didáctica No.2, donde se les pide a los estudiantes construir un cubo partiendo de un cuadrado, pero sin usar la herramienta cubo, en la construcción se van a interceptar planos dando como resultado de su intersección una línea recta.

Figura 13. Ilustración de la proposición 3 del libro XI de la obra Euclidiana.

Euclides XI. 6. Si dos rectas son perpendiculares a un mismo plano, las dos rectas son paralelas. (Ver Figura 14)

Figura 14. Ilustración de la .proposición 6 del libro XI de la obra Euclidiana.

Esta proposición es utilizada en el desarrollo del ítem 3.5 de la Situación Didáctica No. 2, ya que realizar el cubo se pueden levantar las cuatro rectas paralelas que salen de los extremos del cuadrado y continuar con la construcción, también se la utiliza en todo el desarrollo de la Situación Didáctica No.4.

Euclides XI. 14. Los planos perpendiculares a una misma recta son paralelos. (Ver Figura 15)

Figura 15. Ilustración de la proposición 14 del libro XI de la obra Euclidiana.

Esta proposición se utiliza en el desarrollo del ítem 3.5 de la Situación Didáctica No.2, ya que en la construcción de un cubo se deben levantar planos para ir formando las caras del cubo.

Euclides XI. 16. Las intersecciones de un plano con dos planos paralelos son paralelos. (Ver Figura 16)

Figura 16. Ilustración de la proposición 16 del libro XI de la obra Euclidiana.

Esta proposición está inmersa en la Situación Didáctica No. 2, ítem 3, ya que en las diferentes formas de construir un cubo a partir del cuadrado, se utilizan planos paralelos y perpendiculares de donde se destacan las características que describe la proposición.

Euclides XI.38. Si por los puntos medios de los lados de dos caras opuestas de un cubo se trazan planos quedan bisecadas la intersección de los planos y la diagonal del cubo. (Ver Figura 17)

Figura 17. Ilustración de la proposición 38 del libro XI de la obra Euclidiana.

Ésta proposición se desarrolla en el ítem 4 de la Situación Didáctica No.2, en la que se encuentra el punto de intersección entre el plano y la diagonal estableciendo que el punto encontrado es el centro del cubo.

Lo anterior ha permitido determinar las propiedades del espacio euclidiano, dando inicio a los primeros pasos del planteamiento y solución del problema de la representación del espacio geométrico en 3D al espacio geométrico en el plano 2D con el fin de mostrar la importancia que ha tenido la representación de los sólidos, en particular, la del cubo, desde que se empezó a formalizar la geometría tridimensional.

Así mismo, las definiciones y proposiciones tomadas de la obra Euclidiana, ayudaron en el diseño de las situaciones didácticas; ya que se buscaba que las actividades planteadas tengan relación con el cubo y sus propiedades; con el fin de que en su desarrollo, se tengan en cuenta cada una de ellas.

2.2. Dimensión Cognitiva

Se estudia el enfoque instrumental de Verillón & Rabardel (1995, citados en Maschietto & Trouche, 2010), con el fin de observar cuando un artefacto se convierte en instrumento y como se da el uso complementario entre los materiales manipulativos y Cabri 3D.

2.2.1. Enfoque Instrumental: Cabri 3D y Materiales Manipulativos

El uso de artefactos es inseparable a la evolución del hombre, su origen se debe, en cierta parte, a la necesidad de representar objetos mentales a la realidad, para lograr esto los seres humanos convierten artefactos de uso diario en instrumentos que les permiten representar gráficamente los objetos matemáticos.

En la actualidad, los artefactos hacen parte en el aula de clase con propósitos pedagógicos en un laboratorio de matemáticas²⁵; de esta manera al emplear materiales didácticos como: Cabri 3D, papel, plastilina, palillos; permite la creación y la puesta en práctica de Situaciones Didácticas en las cuales los estudiantes se apropian de los artefactos presentados con el fin de aprovecharlos al máximo, asignándoles un papel dentro de la secuencia para que se reconozcan como un instrumento el cual aporta a su aprendizaje, pues como lo plantea Vigotsky & Luria, (1929, citados en Fortuny, Iranzo & Morera, 2010) *“Ni la mano desarmada ni el intelecto abandonado a sí mismo son de mucho valor: las cosas se llevan a cabo con medios e instrumentos”* (p. 82), es decir, que es gracias a la mediación de instrumentos que los estudiantes pueden construir su propio conocimiento.

²⁵Según Maschietto & Trouche (2010), la noción de laboratorio de matemáticas no sólo se desarrolla a partir del trabajo de los investigadores en pedagogía, también está presente en las reflexiones de los matemáticos y está estrechamente relacionado con el uso de artefactos.

Además, Verillón & Rabardel (1995, citados en Maschietto & Trouche, 2010), proponen un enfoque teórico el cual permite hacer una distinción entre: Artefacto e Instrumento donde el Artefacto es una “cosa que ha sufrido una transformación de origen humano” (Rabardel, 2011, p. 91), la intencionalidad con la cual se construye determinan sus efectos y su uso. Los artefactos se pueden estudiar desde varios puntos de vista, como son:

El artefacto como sistema técnico: en este caso el artefacto tiene restricciones de uso así como también debe obedecer reglas, es decir, el artefacto constituye para el sujeto un objeto que debe conocer para poder obtener los resultados que se esperan de él.

El artefacto desde el punto de vista de sus funciones: el artefacto es considerado como un productor de transformaciones de un determinado producto, así las actividades a realizar desde este punto de vista son aquellas donde el proceso de transformación de las cosas es la que organiza el análisis de la relación del hombre con la máquina.

El artefacto como medio de acción: el artefacto cumple con la relación instrumental, es decir toma su lugar de acuerdo con el punto de vista del sujeto que lo utiliza, de su actividad y de su acción, así las actividades a realizar están inmersas en la relación instrumental del hombre con el artefacto.

Por su parte, el Instrumento, es una entidad mixta, compuesta de una parte de artefacto y de esquemas de utilización²⁶.

Dentro de las situaciones de utilización de un instrumento se encuentran implicados:

- El sujeto: que es la persona a quien va dirigida la actividad.
- El instrumento: que es la herramienta empleada para desarrollar la actividad.
- El objeto: al que se dirige la acción con ayuda del instrumento.

²⁶Los esquemas de utilización son considerados como las invariantes representativas y las operaciones correspondientes a las distintas situaciones de actividad con instrumentos.

Estos componentes al interactuar entre sí establecen las Situaciones de Actividades Instrumentadas (SAI) (Verillón & Rabardel 1985, citados en Rabardel, 2011) (Ver Figura 18), éste modelo constituye una herramienta para el análisis de tareas ya que como se pueden observar las distintas relaciones e interacciones entre el sujeto el instrumento y el objeto.

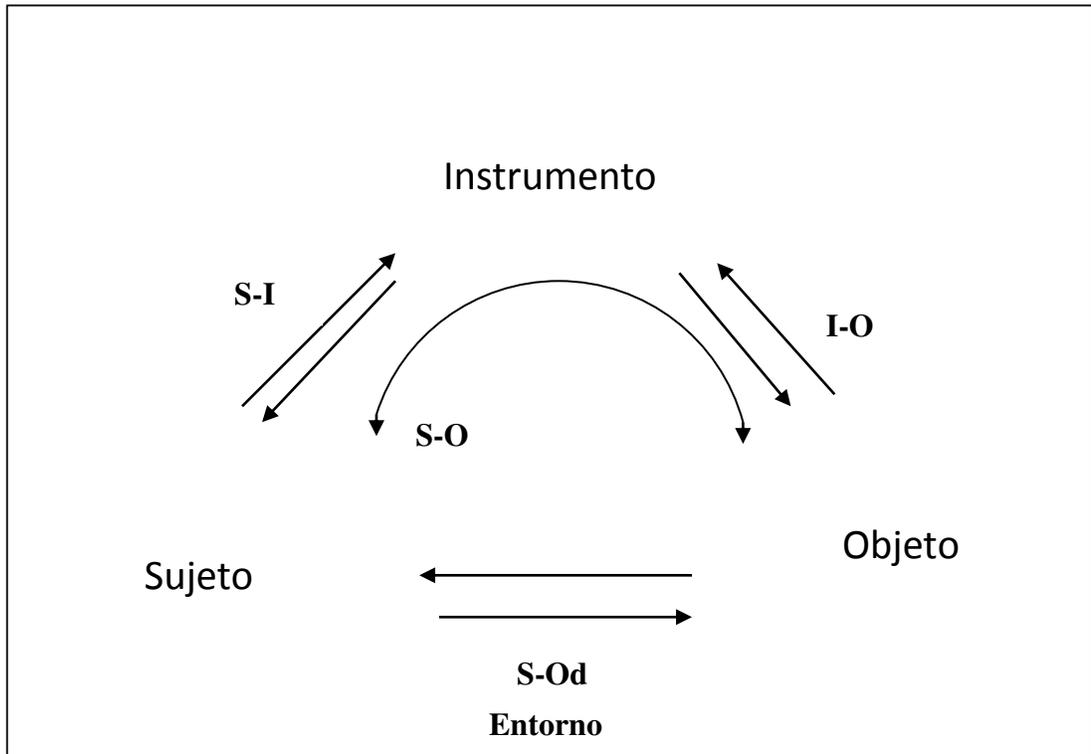


Figura 18: Modelo SAI Situaciones de Actividades Instrumentadas (Verillón & Rabardel, 1985).

Este modelo presenta las relaciones e interacciones entre: Sujeto, objeto e instrumento las cuales son:

- Interacciones Sujeto- Objeto (S-Od).
- Interacciones Sujeto- Instrumento (S-I).
- Interacciones Instrumento- Objeto (I-Od).
- Interacciones Sujeto- Objeto mediadas por el instrumento (S-Om).

Estas se presentan dentro de un entorno el cual está constituido por las condiciones que el sujeto debe tener presente en su actividad.

De esta manera el Instrumento actúa como mediador entre Sujeto y Objeto, adaptándose en término de propiedades materiales, cognitivas y semióticas en función de la actividad para la cual está destinado.

Dentro de la mediación realizada por los instrumentos se tiene:

- Mediación Epistémica: donde el instrumento es un medio que permite el conocimiento del objeto.
- Mediación Pragmática: el instrumento es un medio de una acción transformadora dirigida hacia el objeto.

El sujeto adapta al instrumento de acuerdo con sus necesidades, incluso para actividades futuras, lo reutiliza, esto con el fin de profundizar en el conocimiento anteriormente ya creados, es decir “Todo instrumento es conocimiento” (Rabardel, 2011, p.137).

Por tanto, el aprendizaje de la geometría espacial mediante el uso complementario de materiales manipulativos y virtuales se realiza por medio de la mediación instrumental donde la acción mediada del sujeto requiere previamente la construcción o desarrollo de instrumentos por parte del sujeto, el cual no le están dados desde el principio y es éste el que los elabora en un proceso que es conocido como Génesis Instrumental, esta se construye a partir de los procesos: de instrumentación y el de instrumentalización. (Ver Figura 19)

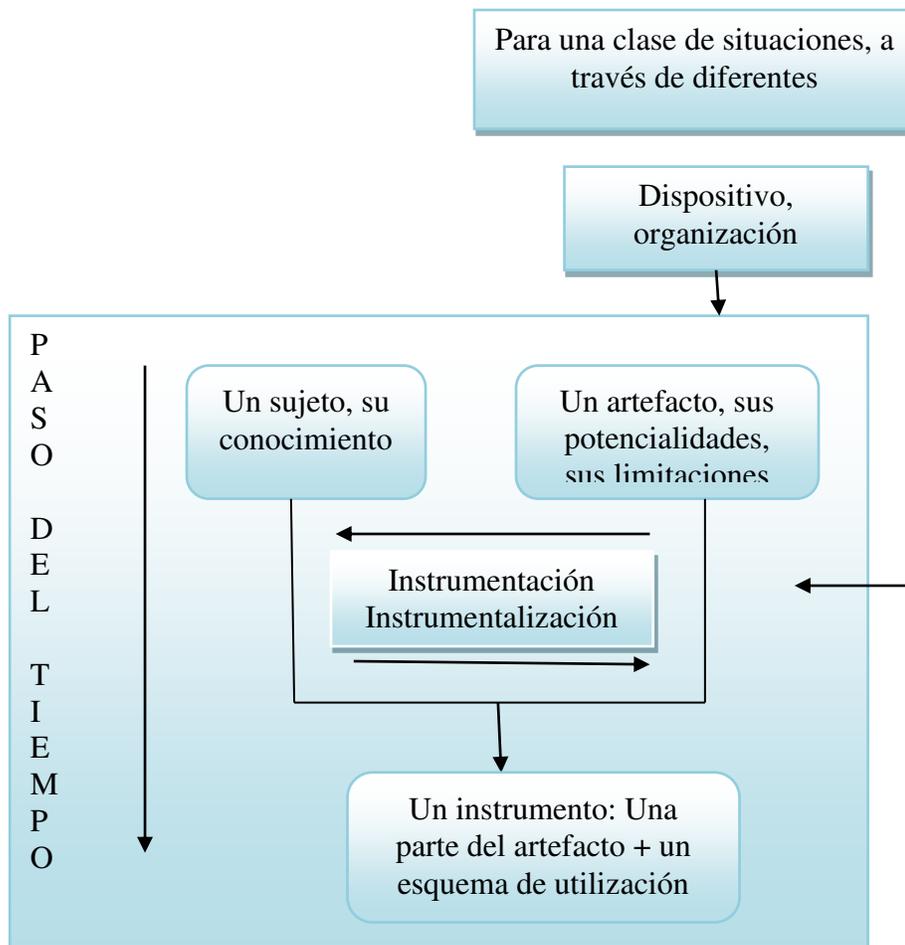


Figura 19. Génesis Instrumental (Guin & Trouche, 2002).

Los procesos de instrumentación son relativos al surgimiento y a la evolución de los esquemas²⁷ y de acción instrumentada: constitución, funcionamiento, evolución coordinación, para Trouche (2005) el proceso de instrumentación del aprendizaje matemático se da cuando: “Un artefacto instrumenta al sujeto, pre-estructura, relativamente su actividad, influye en los esquemas que va a construir”.

En cuanto a los procesos de instrumentalización se refieren al surgimiento y la evolución de los componentes del artefacto al instrumento: selección, reagrupación, producción e institución de funciones, transformación del artefacto. Los procesos de

²⁷Según Vergnaud (1996; citado por Trouche, 2005) un esquema es una organización invariante del comportamiento para una determinada clase de situaciones.

instrumentalización son entendidos según Trouche (2005) como: “La instrumentalización es un proceso de diferenciación de los artefactos. Ejemplo de calculadoras: almacenamiento de juegos, de teoremas, dibujos, modificación de la barra de menús...”.

En el proceso de instrumentación, la actividad está dirigida hacia el sujeto mismo, mientras que en el proceso de instrumentalización la actividad está orientada hacia la componente artefacto del instrumento. Estos dos procesos contribuyen al surgimiento y evolución de los instrumentos, puesto que se lo mira como producto de la construcción del sujeto, puesto que le concede analizar el diseño de situaciones del aula en donde el sujeto se convierte en el gestor de su propio conocimiento.

Durante los procesos de instrumentación e instrumentalización el estudiante o sujeto puede mejorar el artefacto o subutilizarlo, es decir cuando se emplea un artefacto para amplificar y no para generar conocimiento se está subutilizando.

El sujeto es el encargado de organizar la manera de resolver y emplear el artefacto este es el momento en el cual el artefacto se convierte en un instrumento dependiendo de los esquemas mentales que se formen. Para entender este proceso es necesario estudiar las potencialidades y limitaciones del artefacto, además, del propio conocimiento del sujeto, por ello, Rabardel (2011), argumenta que los instrumentos presentan una fuerte influencia en la construcción del saber y en sus modos de construcción, pero al mismo tiempo, es evidente la complejidad del instrumento como variable importante en una situación didáctica, haciendo viable la posibilidad que tiene el profesor de anticipar las acciones de los estudiantes en los desarrollos instrumentales, lo cual hace que la génesis instrumental y la mediación del instrumento sean dimensiones susceptibles a un análisis a priori.

2.2.2. Uso Complementario de Materiales Manipulativos y Virtuales

El ser humano tiene la facultad de interpretar la información tomando como referencia los conocimientos previos para generar los nuevos, por medio de las experiencias, de manera particular el uso de diferentes tipos de materiales hace que los estudiantes desarrollen procesos de razonamiento, atención, memoria, entre otros procesos cognitivos, estos permitieron solucionar las situaciones planteadas generando e interpretando el conocimiento adquirido, por tanto, se entiende por uso complementario a aquella situación que permite interpretarse desde dos puntos de vista, en este caso el uso de materiales manipulativos y Cabri 3D, ya sea con el fin de perfeccionar o enriquecer la adquisición de conceptos matemáticos en los estudiantes.

Durante el paso del tiempo la manera que el ser humano transmite sus conocimientos ha evolucionado iniciando por tallar en piedras, luego apareció la escritura en papel, y ahora el uso de tecnologías digitales como el computador, cada uno de estos sirve como base para crear al otro e incluso se entrelazan con el fin de que las experiencias por medio del uso de distintos instrumentos sirvan para que él hombre pueda adquirir nuevos conocimientos sin desmeritar los que ya tenía de manera similar ocurre con la manera de enseñar; es por esto que según Assude & Gelis (2002, citados en Ibarguen & Realpe, 2012) el entrelazamiento de trabajar con artefactos viejos (lápiz y papel) y nuevos (Cabri Geometry II Plus), evidencia que hay vínculos que se establecen entre ellos: lo viejo alimenta a lo nuevo, permitiendo coexistir y formar una nueva red de relaciones. De este modo, artefactos como el papel, la plastilina y los palillos, y el AGD Cabri 3D pueden complementarse, pues las características que posee él uno le permiten mejorar las del otro, logrando así enriquecer el conocimiento generado por el estudiante.

A continuación, se presenta algunas de las características que poseen tanto los materiales manipulativos físicos como virtuales, esto con el fin de dar a conocer la manera como estos se complementan para lograr la comprensión del espacio.

Para Guillén, Gutiérrez, Pastor & Cáceres (1992), al hablar de los materiales utilizables en las clases de Matemáticas, se distinguen: los materiales físicos, el software informático y los materiales impresos, los cuales ofrecen la posibilidad de manipular objetos geométricos para que tanto alumno como profesor tengan la oportunidad de explorar el espacio. En cuanto a los materiales físicos, en Geometría tridimensional se usan los conjuntos de sólidos (formados generalmente por poliedros y cuerpos de revolución), a los que se añaden algunos otros materiales como los polígonos troquelados, los Polydron (que han sido descritos anteriormente) y los cubos Multilink (cubos encajables de 1 cm de arista), los cuales permiten construir diversos sólidos y en lo concerniente a el uso de computadores o software para el estudio de la Geometría tridimensional, se dispone de una variedad de programas de computación que proporcionan representaciones dinámicas de cuerpos sólidos (pp.26-28).

Estos materiales se convierten en instrumentos, los cuales, en el momento de emplearlos cumplen cada uno con el objetivo propuesto, lo cual conlleva a perfeccionar a cada artefacto de tal manera que permite tanto a estudiantes como profesores tener como resultado “buenas preguntas con buenas respuestas” ya que tal como se plantea en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (2004), “Hacer matemáticas implica que uno se ocupe de problemas, pero a veces se olvida que resolver un problema no es más que parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrarles soluciones” (p. 14).

El uso de materiales didácticos ya sean físicos o virtuales, está generando una estrategia de enseñanza, como lo expresa Guillén et al. (1992), en su proyecto de investigación: La enseñanza de la geometría de sólidos: han puesto al alcance de profesores y alumnos, objetos y experiencias que antes era imposible tener; al respecto Burgos et al., (2005) afirman que:

Los materiales manipulables son un recurso sumamente eficaz para el aprendizaje de las matemáticas. El uso de materiales adecuados por parte de los alumnos constituye una actividad de primer orden que fomenta la

observación, la experimentación y a reflexión necesarias para construir sus propias ideas matemáticas (p. 24).

Según Galdames & Cols. (1999, citados en Burgos et al., 2005) los materiales manipulativos favorecen el aprendizaje de los alumnos en aspectos tales como:

- Aprender a relacionarse adecuadamente con los demás (ser gentiles, respetuosos, trabajar en equipo).
- Desarrollar procesos de pensamiento (anticipar, combinar elementos, clasificar, relacionar, solucionar problemas).
- Ejercitar ciertos procesos científicos (observar, interpretar modelos, experimentar).
- Aprender a ocupar el tiempo libre.

De manera similar, el proyecto del Ministerio de Educación Nacional (2004) denominado: Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia planteó, que en el uso de los AGD para la enseñanza de las matemáticas, se evidencia cómo estos instrumentos modifican la naturaleza de los saberes matemáticos, la manera de hacer matemáticas y la forma de enseñarlas, proporcionando contextos de aprendizaje con nuevas y potentes posibilidades de representación. Un ejemplo de ello, es la posibilidad de arrastre propia de estos medios, que permiten que al arrastrar ciertos diagramas o figuras en la pantalla, se identifiquen relaciones geométricas que se conservan intactas (por ser producidas así en la construcción) y se observen propiedades geométricas implícitas.

Teniendo en consideración lo anterior se puede aseverar que la naturaleza de las figuras que se hacen en un AGD es diferente a la de los dibujos que se hacen en lápiz y papel (Ministerio de Educación Nacional, 2004).

Para finalizar, en los trabajos realizados por Hoyos (2006), Salazar (2011) e Iburguen & Realpe (2012) se verifica la existencia de un uso complementario, es decir, las

diferentes características del artefacto o de un grupo de artefactos, permiten mejorar las de otro logrando construir un conocimiento diferente tomando como punto de partida el ya existente.

Al emplear distintos artefactos se habla de un uso complementario, es decir, cada artefacto cumple con su objetivo pero el otro lo ayuda a cumplirlo de tal manera que los estudiantes alcancen el objetivo propuesto para cada situación. Cabe resaltar que esta es una forma de enriquecer la práctica docente, ya el profesor, tiene la responsabilidad de diseñar y aplicar situaciones didácticas en las cuales exista la interacción de instrumentos tradicionales como el lápiz y el papel con los instrumentos nuevos como lo es el AGD, como lo afirma Douady (1992, citado por Assude & Gelis, 2002), las situaciones elegidas deben permitir a los estudiantes movilizar conocimientos antiguos, pero estos pueden no ser suficientes para la solución, así que el nuevo conocimiento puede ser necesario para la resolución.

2.3. Dimensión Didáctica

En esta dimensión se muestra la manera en que la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), contribuye en la construcción de conocimiento del estudiante. Su aporte se ve reflejado en la adaptación de las situaciones didácticas que se presentan para su análisis.

2.3.1. La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD)

A menudo la enseñanza es percibida como una relación sistémica entre el Alumno, Profesor y Saber, interpretando la relación didáctica establecida como una comunicación de informaciones; esto asociado al pensamiento de que en la enseñanza el profesor organiza un saber a instruir en un orden de mensajes de los cuales el alumno toma lo que debe y quiere obtener.

Es necesario que la educación vaya a la par con los cambios que se producen en el mundo y se involucre en la enseñanza las nuevas ideas que se crean, con el fin de

superar los obstáculos que no permiten progresar en el aprendizaje de las matemáticas; en estas nuevas ideas está implicada la tecnología con el uso de las TIC, los materiales físicos y las TSD.

Es por este motivo que el Ministerio de Educación Nacional (1998), sugiere la integración de la tecnología al currículo de matemáticas, donde la geometría puede ser enseñada a través de un AGD; ya que éste favorece el desarrollo de las habilidades en los estudiantes a través de la resolución de problemas, mediante los cuales los estudiantes pueden explorar, descubrir, conjeturar, validar o refutar y sacar sus propias conclusiones.

De acuerdo con esto, Cabri 3D y los materiales manipulativos utilizados en esta investigación son considerados un medio que no tienen una intención didáctica predeterminada, sino que el profesor como responsable de la enseñanza, debe elegir las situaciones que considere oportunas para la adquisición del conocimiento que se va a enseñar.

Asimismo, la TSD planteada por Brousseau (2007), presenta la necesidad de utilizar un modelo propio de la actividad matemática, cuyo fin es la producción de conocimientos matemáticos en el ámbito escolar.

Brousseau (2007), define la situación didáctica como “un conjunto de relaciones establecidas explícita e implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio y un sistema educativo con el fin de que los alumnos se apropien de un saber constituido o en vía de constituirse”; es decir, que el sujeto entra en interacción con un problema matemático, donde coloca en juego sus propios conocimientos, pero también los modifica, los rechaza o produce otros nuevos, a partir de las interpretaciones que hace sobre los resultados de sus acciones.

En la situación a-didáctica el profesor elabora un problema para los estudiantes en el que se promueve el aprendizaje por adaptación²⁸, así como las condiciones dadas a través de un medio.

Chavarría (2006) define la Situación a- didáctica como el proceso en el que el docente le plantea al estudiante un problema que asemeje situaciones de la vida real que podrá abordar a través de sus conocimientos previos, y que le permitirán generar además, hipótesis y conjeturas que asemejan el trabajo que se realiza en una comunidad de matemáticos.

La situación a-didáctica no tiene una intencionalidad didáctica, de hecho es el estudiante quien construye el conocimiento, siempre y cuando este motivado por solucionar el problema propuesto por el profesor.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, se puede decir que, las situaciones programadas en este trabajo de investigación son situaciones a-didácticas, ya que las situaciones están diseñadas para desarrollarse con un medio (los materiales manipulativos y un AGD) con el fin de que los estudiantes se vean motivados en resolver los problemas planteados en las situaciones y construyan el conocimiento.

Además la TSD ha clasificado las situaciones didácticas en situaciones de acción, situaciones de formulación y situaciones de validación, sin embargo, será la situación de acción la que se empleará en el desarrollo de las actividades presentadas en las situaciones. Esta consiste básicamente en que el estudiante trabaje individualmente con un problema, aplique sus conocimientos previos y desarrolle un determinado saber. Es decir, el estudiante individualmente interactúa con el medio didáctico, para llegar a la resolución de problemas y a la adquisición de conocimientos por su propia cuenta.

Así mismo, Brousseau considera a las Situaciones Didácticas como un modo de “modelar” los procesos de enseñanza-aprendizaje, de tal forma que éstos se visualizan

²⁸El aprendizaje por adaptación es aquel aprendizaje producto de la interacción del sujeto con el medio en que vive, sin la mediación de un ‘profesor’ (Acosta 2010, p.132).

como un juego, donde el docente y el estudiante han establecido algunas reglas y acciones que están implícitas.

Cabe resaltar que dentro de la interrelación establecida entre profesor-estudiante-medio didáctico, nace un concepto fundamental dentro de la TSD; el contrato didáctico, que según Acosta (2010), se refiere a la consigna establecida entre profesor y alumno, de esta forma, comprende el conjunto de comportamientos que el profesor espera del alumno y el conjunto de comportamientos que el alumno espera del docente; es decir; las interrelaciones entre el alumno y el profesor a la hora de enseñar y de aprender un saber.

“El concepto de contrato didáctico nos permite tomar conciencia de que una parte de las ideas matemáticas de los alumnos son producto de inferencias que, por provenir de lo que el docente expresa pero no necesariamente dice, escapan generalmente a su control” (Sadovsky 2005, p.3).

2.3.1.1. El Medio

El medio es parte fundamental para el aprendizaje del alumno de un saber determinado. Brousseau (2007) señala que la necesidad teórica de un “medio” está dada por el hecho de que la relación didáctica va a extinguirse y el alumno, en el futuro, deberá hacer frente a situaciones desprovistas de intenciones didácticas.

Para Sadovsky (2005), el concepto de medio incluye tanto la problemática matemática inicial a la que el sujeto se enfrenta, como a un conjunto de relaciones, esencialmente también matemáticas, que se van modificando a medida que el sujeto produce conocimientos en el transcurso de la situación, transformando en consecuencia la realidad con la que interactúa.

Además Acosta (2010) señala que, el medio con el que el alumno va a interactuar debe ser elegido cuidadosamente para que los conocimientos adquiridos mediante el aprendizaje por adaptación sean lo más parecidos al saber que se quiere enseñar.

En éste sentido, los materiales manipulativos y virtuales sirven como medio para la enseñanza de las matemáticas; de la forma como el docente plantee las situaciones que llevará al alumno a la motivación y a la curiosidad de interactuar con el medio, de interpretar y descubrir las potencialidades que se encuentran inmersas en él, lo que conducirá a que se produzca aprendizaje.

2.3.1.2. Materiales Manipulativos como Medio

Los materiales manipulativos contribuyen en la enseñanza de las matemáticas, ya que son mediadores de conocimiento, éstos materiales por si solos no tienen una intencionalidad didáctica, ya que deben estar bajo un contexto de enseñanza; por ejemplo los medios utilizados en esta investigación, la plastilina, los palillos y el papel, por si solos no generan un aprendizaje, pero en este caso se han diseñado actividades en las que estos materiales ayudan al aprendizaje de las propiedades geométricas del cubo. De acuerdo con Moreira (2002), argumenta que éstos medios se caracterizarían por ofrecer a los sujetos un modo de representación del conocimiento de naturaleza inactiva, es decir, la modalidad de experiencia de aprendizaje que posibilitan estos medios es contingente, sólo que la misma debe venir regulada intencionalmente bajo un contexto de enseñanza.

2.3.1.3. El AGD Cabri 3D como Medio

En la TSD se ha considerado que el proceso que desarrolla el estudiante para elaborar una solución, se da debido a la interacción que hay entre las acciones del estudiante y un medio, quien es el que le permite efectuar algunas clases de acciones para resolver el problema, y así mismo el medio ofrece una retroacciones a sus acciones que le permitan validar o refutar sus acciones.

Para Acosta (2010), el AGD se utiliza como un medio adecuado para el aprendizaje por adaptación de la geometría, ya que su programación garantiza que todos los fenómenos asociados con la construcción y la manipulación de figuras geométricas correspondan a la teoría de la geometría euclidiana. De esta forma, el AGD Cabri 3D permite visualizar, manipular, y construir en tres dimensiones rectas, planos, conos, esferas, poliedros entre otros; además de visualizar propiedades geométricas del espacio, observando y comprobando las propiedades matemáticas que se desarrollan en construcciones tridimensionales.

De acuerdo con Acosta (2010), mediante Cabri 3D se pueden realizar dos tipos de acciones con sus respectivas retroacciones que son las características de un AGD.

- Acción de construir: Con las herramientas que ofrece Cabri 3D se puede seleccionar cualquiera de ellas para obtener un dibujo. Su retroacción un fenómeno estático: un dibujo estático correspondiente a las herramientas utilizadas.
- Acción de arrastrar: Con la ayuda del ratón del computador, se puede agarrar un objeto y desplazarlo; cuya retroacción es un fenómeno dinámico: ya que los objetos que están en la pantalla se desplazan de manera que todas sus propiedades declaradas explícitamente se conservan.

Cabri 3D se puede considerar una herramienta de gran importancia tanto para la enseñanza como el aprendizaje de la geometría del espacio, ya que constituye un medio que asegura que sus retroacciones corresponden al saber teórico que se quiere enseñar, teniendo en cuenta que es necesario diseñar un problema, y considerar las acciones y decisiones que toma el alumno a la hora de resolverlo.

2.3.2. Análisis Curricular

Para observar el desarrollo del pensamiento espacial, en particular, a la conceptualización de las propiedades geométricas del cubo dentro del ambiente escolar se tomó como referencia los Estándares Básicos de Competencia para el área de matemáticas planteados del Ministerio de Educación Nacional (2006), del cual se determina que las situaciones didácticas propuestas permiten observar algunas de las características que el estudiante debe alcanzar en su proceso de aprendizaje y como el uso de diferentes medios en este caso los palillos, la plastilina, el papel, y el AGD Cabri 3D pueden contribuir en cuanto a la adquisición de conceptos y valores que permitan al estudiante no sólo mejorar destrezas, establecer modelos sino también lo conlleven al desarrollo e interpretación de situaciones. Es por ello que la importancia de este análisis curricular radica en enfatizar la relación que tiene un estándar con los demás del mismo tipo de pensamiento (coherencia vertical), e igualmente la relación con otros estándares de los demás tipos de pensamiento (coherencia horizontal).

2.3.2.1. Estándares Básicos de Competencias para el área de Matemáticas del Ministerio de Educación de Colombia

En los Estándares Básicos se seleccionan algunos niveles en los cuales se desarrollan las competencias relacionadas con los cinco tipos de pensamiento matemático: espacial, numérico, métrico, aleatorio y variacional. En cada columna de cada estándar, se hace énfasis en uno o más de uno de los cinco procesos generales de la actividad matemática²⁹. Están distribuidos en grupos de la siguiente manera: primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a once. Esta organización brinda la posibilidad, de que las situaciones de didácticas que se diseñan sirvan de estímulo a los estudiantes para que estos alcancen los niveles de competencias del grado al que pertenecen, esto con el fin no solo de alcanzar lo que se pretende en cada estándar sino de ir más allá.

²⁹Procesos generales: formular, resolver problemas, comparar, ejercitar procedimientos y algoritmos.

Los estándares deben tener coherencia tanto vertical como horizontal. La coherencia vertical hace referencia a la relación existente entre un estándar con los demás estándares del mismo pensamiento, pero de acuerdo con los otros conjuntos de grados. Mientras que la coherencia horizontal está dada por la relación que tiene un determinado estándar con los estándares de los demás pensamientos dentro del mismo conjunto de grados.

A continuación se presenta el listado que se consideró pertinente para el diseño de las situaciones didácticas así como también su respectiva relación entre los estándares del pensamiento espacial y los estándares del pensamiento métrico de los grados 4° a 7°. Con el fin de comprender la organización, procedimientos y procesos que se presentan en el tratamiento de la representación de figuras tridimensionales en particular la conceptualización de las propiedades del cubo.

Coherencia Vertical

Estándares Básicos de competencias Pensamiento espacial y Sistemas geométricos de los grados 4° y 5°:

1. Comparar y clasificar objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades.
2. Comparar y clasificar figuras bidimensionales de acuerdo con sus elementos (ángulos, vértices) y características.
3. Identifico, represento y utilizo el ángulo en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas.
4. Utilizar sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales.
5. Identificar y justificar relaciones de congruencia y semejanza entre figuras.
6. Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.
7. Conjeturar y verificar los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños.

8. Construir objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y realizar el proceso contrario (con distintos materiales) en contextos de arte, diseño y arquitectura.

De acuerdo a esto, se puede comprender que la clasificación de los sólidos, así como su construcción y descomposición en figuras bidimensionales están enunciadas en el primer, el sexto y el octavo estándar, en los cuales se plantea clasificar objetos tridimensionales, que para este caso son los cinco poliedros platónicos de acuerdo con sus propiedades, sus caras, sus lados, sus vértices, así como sus descomposición en el plano.

Es así como para el primer, sexto y octavo estándar, se encontraron en el conjunto de grados de 6° y 7° los siguientes estándares, los cuales se encuentran relacionados verticalmente:

1. Representar objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.
2. Identificar y describir figuras y cuerpos generados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales.

Estos estándares se relacionan con el pensamiento geométrico ya que en las situaciones planteadas se trata de representar un Cubo partiendo desde el desarrollo plano, además empleando un plano se busca que el estudiante descubra la importancia de la diagonal del cubo y su relación con las aristas (Situación Didáctica No. 1_ ítem 4).

Estándares Básicos de competencias Pensamiento espacial y Sistemas geométricos de los grados 6° y 7°:

1. Representar objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.
2. Identificar y describir figuras y cuerpos generados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales.
3. Clasificar polígonos en relación con sus propiedades.

4. Predecir y comparar los resultados de aplicar transformaciones (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.
5. Resolver y formular problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.
6. Resolver y formular problemas usando modelos geométricos.
7. Identificar características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.

De manera similar al conjunto de grados anteriores, se debe tener en cuenta que la representación de figuras sólidas ahora está dada de acuerdo a las vistas y posiciones que esta toma, además se puede observar la importancia de visualizar dichos sólidos a partir de cortes rectos y transversales empleando planos y diferentes perspectivas para realizar una mejor representación en el espacio. En los cinco estándares restantes no se hace alusión a la descomposición de sólidos al plano y viceversa.

Los siguientes estándares están en relación vertical con el grupo de grado 4° y 5°, puesto que en las situaciones didácticas se busca que el estudiante observe las características de los sólidos platónicos desde varios puntos de vista por medio del arrastre, además se presentan condiciones las cuales permiten construir objetos tridimensionales como lo es la construcción del cubo sin emplear la herramienta cubo del AGD y el uso de las representaciones planas de dicho sólido.

Estos dos estándares estarían en relación vertical con los estándares del grupo de grado 4° y 5°:

1. Comparar y clasificar objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades.
2. Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.

3. Construir objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y realizar el proceso contrario (con distintos materiales) en contextos de arte, diseño y arquitectura.

Estándares Básicos de competencias del Pensamiento métrico y Sistemas de medidas del grado 4 ° y 5°:

1. Diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficies, volúmenes de cuerpos sólidos, volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes; pesos y masa de cuerpos sólidos; duración de eventos o procesos; amplitud de ángulos).
2. Seleccione unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones.
3. Utilizo y justifico el uso de la estimación para resolver problemas relativos a la vida social, económica y de las ciencias, utilizando rangos de variación.
4. Utilizo diferentes procedimientos de cálculo para hallar el área de la superficie exterior y el volumen de algunos cuerpos sólidos.
5. Justifico relaciones de dependencia del área y volumen, respecto a las dimensiones de figuras y sólidos.
6. Reconozco el uso de algunas magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa, duración, rapidez, temperatura) y de algunas de las unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud respectiva en situaciones aditivas y multiplicativas.
7. Describo y argumento relaciones entre el perímetro y el área de figuras diferentes, cuando se fija una de estas medidas.

Por tanto se puede observar que la descomposición de los sólidos se presenta de manera implícita en el cuarto estándar ya que este habla acerca del área de la superficie exterior, para lograr esto, los cuerpos sólidos deben representarse en el plano con el fin de realizar cálculos exactos. En cuanto al primer estándar, al clasificar los sólidos

platónicos de acuerdo con sus propiedades se trata de establecer la relación existente entre el plano y el espacio.

En las situaciones didácticas los estudiantes deben emplear distintas formas para construir un cubo, empleando materiales como plastilina, palillos, papel, de manera similar con respecto al volumen del cuerpo sólido los estudiantes harán uso de papel y de la herramienta Volumen del AGD , es por ello que los estándares que continuación se mencionan se relacionan verticalmente:

1. Utilizar técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.
2. Calcular áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.

De acuerdo con los anteriores estándares de grado 6° y 7°, los estudiantes deben realizar cálculos ya sea empleando papel y lápiz o el AGD Cabri 3D, esto con el fin de obtener el área y el volumen de un determinado sólido; en cuanto a la construcción y descomposición de figuras sólidas los estudiantes plantean condiciones necesarias que permitan establecer cuáles de los hexaminos entregados para el desarrollo de la Situación Didáctica No.3 forman un cubo y cuáles no.

Estándares Básicos de competencias del Pensamiento métrico y Sistemas de medidas del grado 6 ° y 7°:

1. Utilizar técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.
2. Resolver y formular problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas).
3. Calcular áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.
4. Establecer relaciones entre unidades para medir diferentes magnitudes.

5. Resolver y formular problemas que requieren técnicas de estimación.

Se observa que la descomposición y construcción de figuras sólidas se encuentran de manera explícita en el primer y tercer estándar, luego las situaciones didácticas propuestas permiten a los estudiantes dar razones las cuales sirvan para clasificar los 22 hexaminos entregados de igual manera tienen la oportunidad de generar otros a partir de dichas condiciones, debido a esta razón los estándares del conjunto de grados 4° y 5° con los que se relacionan verticalmente son:

1. Diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficies, volúmenes de cuerpos sólidos, volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes; pesos y masa de cuerpos sólidos; duración de eventos o procesos; amplitud de ángulos).
2. Utilizo diferentes procedimientos de cálculo para hallar el área de la superficie exterior y el volumen de algunos cuerpos sólidos.

Coherencia Horizontal

Pensamiento Numérico y Sistemas numéricos (Estándares del conjunto de grados 4° y 5°)

1. Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.

Para el estudio de las áreas exteriores del cubo y de su volumen, es necesario que el estudiante aplique las operaciones necesarias en el momento de aplicar fórmulas, esto le permitirá indagar sobre el manejo del conjunto de números naturales.

Pensamiento Numérico y Sistemas numéricos (Estándares del conjunto de grados 6° y 7°)

1. Establezco conjeturas sobre propiedades y relaciones de los números, utilizando calculadoras y computadores.

De igual manera que en el estándar anterior, es importante que el estudiante aplique distintas operaciones de los números, empleando para este caso la herramienta volumen y área, del AGD Cabri 3D con el fin, de verificar las operaciones realizadas con lápiz y papel. Por medio de la observación del sólido, el estudiante experimenta sus ideas con el fin de verificarlas y así llegar a comprender el concepto de volumen de manera formal.

Después de realizar el anterior análisis se concluye que:

1. De acuerdo a cada grado escolar, el Ministerio de Educación Nacional (1998) plantea ciertos criterios los cuales deben ser cumplidos a cabalidad, para ello los profesores deben construir y validar situaciones problema las cuales en interacción con los estudiantes, los confronte con el contexto que lo rodea con el fin de que ellos reflexionen y construyan estrategias de solución. Esto se debe a que “hacer matemáticas implica que uno se ocupe de problemas, pero a veces se olvida que resolver un problema no es más que parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrarles soluciones”. Esto obliga a los profesores a generar nuevas estrategias de enseñanza, que permitan a los estudiantes validar los conocimientos previos con el fin de lograr la construcción de nuevos conocimientos. Para este caso en particular al diseñar situaciones didácticas empleando distintos materiales permite tanto al estudiante como al profesor plantear estrategias de solución las cuales conlleven a una mejor comprensión y conceptualización del tema, teniendo en cuenta el estándar a alcanzar.

2. En cuanto a la enseñanza de la geometría espacial en la escuela, en los lineamientos curriculares existe el enfoque de la Geometría Activa³⁰ propuesta por Vasco (1992). Esta parte de la actividad del alumno y su confrontación con el mundo, aunque es un recurso con el cual se beneficia al estudiante, no existe una proposición que sea coherente con ella debido a que no se encuentra una coherencia vertical entre los estándares planteados dentro del pensamiento espacial y los sistemas geométricos a través de todos los grados de la educación básica primaria y básica secundaria. Además no existe un orden en relación con la enseñanza del espacio entre los distintos pensamientos, lo que permite la coherencia horizontal entre los mismos.
3. Los poliedros son tratados de manera que el estudiante los clasifique de acuerdo a sus propiedades. Sin embargo, no permite observar sus distintos desarrollos en el plano con el fin de visualizar diferentes formas de generarlas en el espacio.
4. En lo concerniente al área y al volumen de los sólidos, éstos conceptos están propuestos para ser trabajados mediante el manejo de algoritmos, lo que conlleva a los estudiantes a realizar cálculos más no entender el concepto en sí, esto da a entender que las propiedades del espacio y su caracterización es escasa y por ello la dificultad de plasmar objetos tridimensionales en el plano; de acuerdo con esto Lappan & Winter (s.f, citados en Ministerio de Educación Nacional,1998) afirman que a pesar de que se vive en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias matemáticas que se proporcionan a los niños, son bidimensionales. Se utilizan libros bidimensionales para presentar las matemáticas a los niños, libros que contienen figuras bidimensionales de objetos tridimensionales. El uso de esos “dibujos” de objetos tridimensionales adiciona al niño una

³⁰ La propuesta de Geometría Activa, está enfocada en la exploración activa del espacio, no sin antes hacer un reconocimiento de los problemas a los que se enfrenta el estudiante en la exploración con el cuerpo y el dibujo.

dificultad más en el proceso de comprensión del espacio. Sin embargo, es necesario que los niños aprendan a tratar las representaciones bidimensionales del mundo que los rodea. En éste mundo moderno, la información estará presentada por libros y figuras, incluso figuras en movimiento, como en la televisión, las cuales seguirán siendo representaciones bidimensionales del mundo real.

3. DISEÑO DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS Y ANÁLISIS A PRIORI

En este capítulo se muestra el diseño de la adaptación a una secuencia didáctica con su respectivo análisis a priori. Sus unidades de análisis, están centradas en la dimensión Histórico – Epistemológica, la dimensión Cognitiva, Dimensión Didáctica y el Análisis Curricular, que cuales fueron estudiadas en el capítulo anterior.

Para el diseño de la secuencia didáctica se tuvieron en cuenta algunas variables didácticas³¹, que pueden generar un cambio de estrategia en los estudiantes. Las variables que se tuvieron en cuenta para obtener la conceptualización de las propiedades geométricas del cubo fueron:

- 1 Los artefactos que son utilizados para realizar las adaptaciones a las situaciones, como: los palillos, la plastilina, el cartón cartulina y el AGD Cabri 3D.
- 2 Las construcciones blandas y robustas³² cuando se construye un cubo, partiendo del plano hacia el espacio.
- 3 El área y el perímetro de los desarrollos planos del cubo.
- 4 La visualización de las caras vértices y lados de los sólidos platónicos empleando Cabri 3D.
- 5 La construcción de un cubo a partiendo de un cuadrado o no, ya que con los palillos se construye el cubo de una sola forma mientras que con Cabri 3D se presentan varias formas de construcción.
- 6 Diferentes maneras de doblar los Hexaminós con el fin de conseguir un cubo.

³¹Las variables didácticas son aquellas que el profesor modifica para provocar un cambio de estrategia en el alumno y que llegue al conocimiento matemático deseado. (Fernández, 2011, pag.169).

³²Según Fernández (2011), las construcciones robustas son construcciones geométricas hechas en un AGD de una figura que satisface unas condiciones geométricas para las cuales el modo de arrastre preserva sus propiedades y en las construcciones blandas la variación es parte de la construcción en sí misma y una propiedad se hace visible sólo cuando otra se satisface (o se cumple).

3.1. Análisis de la Secuencia Didáctica

Para realizar este análisis se exploraron los elementos de una situación a-didáctica que intervienen en la secuencia didáctica: las acciones que realizaron los estudiantes sobre el medio, las retroacciones que recibe de éste y cómo validaron. Aquí, se analiza el papel del profesor durante el desarrollo de la secuencia didáctica, en el momento de establecer el contrato didáctico con los estudiantes, los actos de devolución así como también en qué instante se presentan las fases de validación e institucionalización, además se tuvo en cuenta los estándares empleados para la creación de la secuencia didáctica y la manera como un artefacto se convierte en un instrumento de manera tal que permita la creación de conceptos matemáticos formales. (Ver Figura 20)

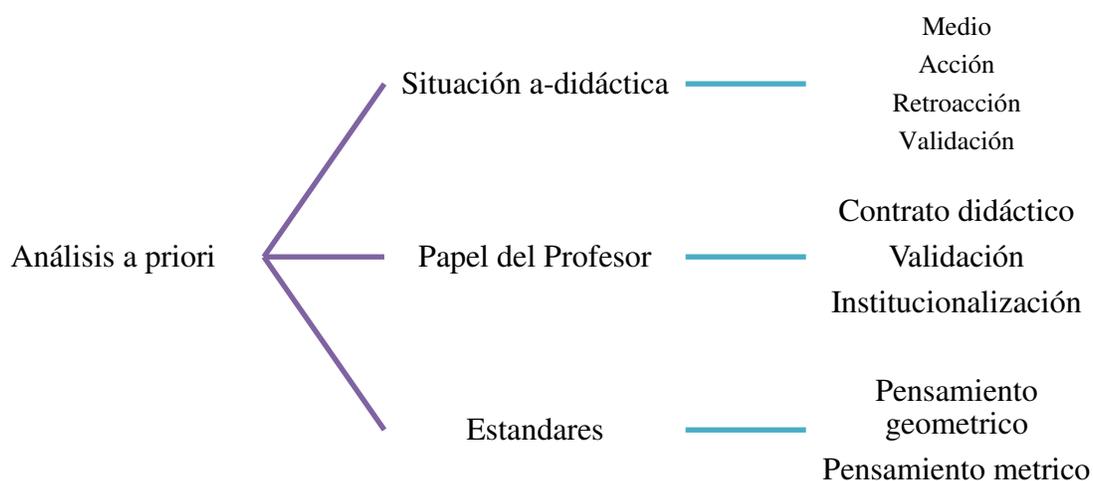


Figura 20. Estructura del análisis a priori.

La secuencia didáctica estuvo compuesta de cuatro (4) situaciones, que se trabajaron de manera individual en un tiempo aproximado de seis (6) horas. Estas situaciones se caracterizaron por ser situaciones de acción, ya que el estudiante trabajaba individualmente con un problema, aplicaba sus conocimientos previos y desarrollaba un determinado saber.

Al inicio de cada situación el profesor³³ entregó a cada estudiante la respectiva guía de trabajo; ésta consistía en dos hojas de papel, en una de ellas los estudiantes encontraron la actividad propuesta, en la otra debían escribir las respuestas para posteriormente entregarla al profesor. Al finalizar cada sesión se recogió la hoja de trabajo, la cual se retornaría en la siguiente sesión en caso de que el tiempo previsto no fuese suficiente; en caso contrario se daría continuación a la siguiente actividad. El profesor estableció dentro del contrato didáctico el tiempo requerido para resolver la situación.

Tanto en la primera como en la tercera situación, se les brindó a los estudiantes los materiales manipulativos a emplear como son: los palillos, la plastilina, y los hexaminos en papel (Ver Figura 21)³⁴, esto con el fin motivarlos y de no darles a conocer que las actividades que van a realizar tienen que ver con las propiedades del cubo. De la misma manera, antes de realizar las situaciones en las cuales se empleó el AGD Cabri 3D, el profesor indicó a los estudiantes que carpeta abrir y a partir de allí cual era el archivo correspondiente a la tarea a realizar.

Figura 21. Materiales manipulativos empleados.

El objetivo de cada situación y el tiempo requerido para su desarrollo se muestra en la Tabla No. 4.

³³Las profesoras encargadas durante el desarrollo de las situaciones didácticas fueron las autoras de esta investigación, debido a su conocimiento de la TSD.

³⁴Las fotografías que aparecen de aquí en adelante son uso exclusivo para ésta investigación, ya que son propiedad de las autoras.

Tabla No.4
Estructura de la Secuencia Didáctica

ACTIVIDAD	OBJETIVO	TIEMPO
No. 1. Cubo con palillos	Realizar cubos con materiales manipulativos. Construir un cubo a partir de condiciones dadas.	1 hora
No. 2. Cubo con Cabri 3D	Comparar y clasificar objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades. Utilizar diferentes procedimientos de cálculo para hallar el área y el volumen de algunos cuerpos sólidos.	1 hora y 30 minutos
No. 3. Los Hexaminós	Construir objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales Manipular objetos tridimensionales a partir de objetos bidimensionales.	1 hora y 30 minutos
No. 4. Desdoblado el Cubo.	Observar el uso complementario entre materiales manipulativos y Cabri 3D mediante la manipulación. Construir objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y realizar el proceso contrario (con distintos materiales) en contextos de arte, diseño y arquitectura.	2 Horas

3.1.1. Situación Didáctica No. 1: Cubo con palillos

1. Utilizando palillos y la plastilina realiza un cubo. Luego responde:

- 1.1.** ¿Cuántos palillos empleaste?
- 1.2.** ¿Qué concepto matemático representan los palillos?
- 1.3.** ¿Cuántas bolas de plastilina utilizaste?
- 1.4.** ¿Cómo nombrarías matemáticamente a las bolas de plastilina?
- 1.5.** ¿Cuántos cuadrados observas?
- 1.6.** ¿Qué nombre les darías a los cuadrados?
- 1.7.** ¿Qué conceptos matemáticos empleaste para realizar el cubo?

Para el desarrollo de esta actividad el profesor facilita a cada uno de los estudiantes los medios con los cuales van a interactuar, que en este caso son: los palillos y la plastilina. Los estudiantes deben tener a su disposición un lapicero para contestar la guía correspondiente.

Para dar solución a esta actividad es necesario que los estudiantes construyan y descompongan figuras planas y sólidos teniendo en cuenta ciertas condiciones o reglas que les permitan aplicar los siguientes conceptos: segmento, cuadrado, puntos de intersección, caras y aristas, esto con el fin de que cada estudiante realice una construcción de un cubo. Durante el desarrollo de esta actividad, la profesora pregunta al estudiante el procedimiento usado para realizar el cubo.

Como primer paso los estudiantes deben realizar la acción de modelar bolitas de plastilina que luego servirán como puntos de intersección (vértices) de los palillos (aristas) que permitirán formar un cuadrado (cara del cubo). Este es el proceso de instrumentalización ya que el estudiante obtiene como resultado la construcción del poliedro cubo. Al realizar la acción de crear un cubo se espera como retroacción que el estudiante relacione los materiales con los que está trabajando con algunas propiedades del poliedro cubo; para ello se espera que los estudiantes respondan de la siguiente manera:

Utilizando palillos y la plastilina realiza un cubo. Luego responde:

P³⁵: ¿Cuántos palillos empleaste?

E: Se emplearon 12 palillos.

P: ¿Qué concepto matemático representan los palillos?

E: Los palillos representan los lados del cubo.

P: ¿Cuántas bolas de plastilina utilizaste?

E: Se emplearon 8 bolas de plastilina.

P: ¿Cómo nombrarías matemáticamente a las bolas de plastilina?

E: A las bolas de plastilina se las llama vértices.

P: ¿Cuántos cuadrados observas?

E: Se observan seis cuadrados.

P: ¿Qué nombre les darías a los cuadrados?

E: Los cuadrados se llaman lados.

P: ¿Qué conceptos matemáticos empleaste para realizar el cubo?

E: Los conceptos matemáticos empleados son: caras, lados, vértices, rectas paralelas, rectas perpendiculares, planos paralelos, planos perpendiculares, cuadrados.

Al finalizar esta actividad se espera que los estudiantes determinen que las bolitas de plastilina que formaron representan los vértices, que los palillos que utilizaron representan las aristas del cubo; que determinen cuantas caras tiene el cubo, de esta manera el estudiante va a visualizar que puede realizar cubos de diferentes tamaños siempre y cuando se tengan en cuenta las características, es decir, que todos los lados midan lo mismo; y que a pesar de que se cambie el tamaño del cubo, dichas propiedades son invariantes.

3.1.2. Situación Didáctica No. 2: Cubo con Cabri 3D

1. Abre el archivo denominado poliedros platonicos.cg3 que aparece en el Escritorio del computador que estás trabajando, luego observa cuantos poliedros

³⁵ P: es el profesor; E: es el estudiante.

aparecen en el plano base del Cabri 3D y responde las siguientes preguntas para cada uno de ellos.

<p>a. Para poliedro Tetraedro, responde:</p> <p>a.1. ¿Cuántas aristas tiene?</p> <p>a.2. ¿Cuántos vértices tiene?</p> <p>a.3. ¿Cuántas caras tiene?</p> <p>a.4. ¿de qué forma son sus caras?</p>	<p>b. Para poliedro Cubo, responde:</p> <p>b.1. ¿Cuántas aristas tiene?</p> <p>b.2. ¿Cuántos vértices tiene?</p> <p>b.3. ¿Cuántas caras tiene?</p> <p>b.4. ¿de qué forma son sus caras?</p>
<p>c. Para poliedro Octaedro, responde:</p> <p>c.1. ¿Cuántas aristas tiene?</p> <p>c.2. ¿Cuántos vértices tiene?</p> <p>c.3. ¿Cuántas caras tiene?</p> <p>c.4. ¿de qué forma son sus caras?</p>	<p>d. Para poliedro Dodecaedro, responde:</p> <p>d.1. ¿Cuántas aristas tiene?</p> <p>d.2. ¿Cuántos vértices tiene?</p> <p>d.3. ¿Cuántas caras tiene?</p> <p>d.4. ¿de qué forma son sus caras?</p>
<p>e. Para poliedro Icosaedro, responde:</p> <p>e.1. ¿Cuántas aristas tiene?</p> <p>e.2. ¿Cuántos vértices tiene?</p> <p>e.3. ¿Cuántas caras tiene?</p> <p>e.4. ¿de qué forma son sus caras?</p>	

1. Abre el archivo que se encuentra en el Escritorio del computador llamado cajita.cg3, obsérvalo y explora en él lo que aparece; ahora responde a las siguientes preguntas:

1.1. ¿Cuántas aristas tiene?

1.2. ¿Cuántos vértices tiene?

1.3. ¿Es un cubo? Justifica tu respuesta.

1.4. Arrastra el punto A o el punto B para que formes el cubo.

1.5. ¿Tú cómo sabes que el poliedro que aparece en la pantalla de Cabri 3D es un cubo?

Responde por escrito.

1.6. Mide cada uno de las aristas del cubo y comprueba si es ó no es un cubo.

1.7. Al segmento AB se le denomina también la diagonal. ¿la diagonal del cubo mide lo mismo que cada una de las aristas?

2. Dado un cuadrado de longitud 3 cm, en el plano base, construye un cubo.

2.1. ¿Cuáles son las diferentes maneras de construir un cubo?

2.2. ¿Qué herramientas³⁶ de Cabri 3D empleaste?

2.3. Mide el volumen del cubo usando la fórmula que tu profesora te dio. Luego, mide el volumen del cubo usando la herramienta Volumen del Cabri 3D. Comprueba con el Cabri 3D, el resultado que arroja este software con el que calculaste anteriormente.

2.4. Con la herramienta, Abrir poliedro, de Cabri 3D, abre el cubo hasta que sus caras queden sobre el plano base. Luego, mide el área superficial del cubo. Observa la diferencia entre las áreas superficiales de cada cara del cubo y el volumen. ¿es el mismo valor?

2.5. ¿Cómo construirías un cubo partiendo del cuadrado pero sin usar la herramienta cubo? Existen varias formas, usando planos, rectas perpendiculares, rectas paralelas, circunferencias, etc. Por favor, intenta construirlo.

2.6. Finalmente, arrastra un vértice del cuadrado base, y observa que siga siendo cubo. Si el cubo se te desbarata, entonces vuelve a comenzar o ensaya otra construcción. La idea que es que siga siendo cubo cuando arrastres cualquiera de sus vértices de la base.

3. Abre el archivo que se encuentra en el Escritorio del computador llamado cubo.cg3, obsérvalo y explora en él, lo que aparece. Ahora responde a las siguientes preguntas.

3.1. Encuentra el punto de intersección entre el plano y la diagonal.

3.2. ¿Qué representa este punto?

Para realizar esta tarea los estudiantes se ubicarán en un computador el cual debe tener instalado el AGD Cabri 3D. En el Escritorio del computador encontrarán una carpeta llamada “SITUACIÓN 2”, en esta se encuentran los archivos correspondientes para el desarrollo de la guía de trabajo.

³⁶ Ver Anexo H.

Esta situación didáctica se divide en cuatro partes, a continuación se describe cada una de ellas:

En la primera parte los estudiantes van a trabajar con el archivo poliedros platónicos.cg3; para solucionarlo es necesario que exista un conocimiento previo acerca de los poliedros platónicos, ya que se hace referencia a caras, lados, vértices de dichos sólidos, brindando a los estudiantes la oportunidad de observar dichas características desde varios puntos de vista.

Los estudiantes deben realizar la acción de girar el plano para obtener como retroacción el número de caras, vértices y lados de cada uno de los poliedros platónicos, el medio producirá una retroacción que le indicará el número exacto de las caras, vértices y lados del poliedro, en este caso el estudiante al validar sus acciones deberá crear en un nuevo documento uno a uno los poliedros platónicos con el fin de contar las caras, vértices y lados correctamente sin confundirse.

Se espera que los estudiantes contesten de la siguiente manera:

Abre el archivo denominado poliedros platonicos.cg3 (Ver Figura 22)³⁷, que aparece en el Escritorio del computador que estás trabajando, luego observa cuantos poliedros aparecen en el plano base del Cabri 3D y responde las siguientes preguntas para cada uno de ellos.

Figura 22. Poliedros Platónicos.

³⁷ Las Figuras 22 a la 25, 29-30 y las que aparecen en los anexos H e I, fueron creadas por las autoras de ésta investigación mediante el AGD Cabri 3D.

En esta actividad el estudiante pasa por un proceso de instrumentalización donde desarrolla esquemas de uso los que le permiten descubrir la manera de cómo girar un objeto en el AGD Cabri 3D, para este caso, las figuras se pueden mover haciendo clic derecho sobre cualquier punto del plano hasta que aparece una mano la cual permite observar la figura desde varios puntos de vista permitiendo a los estudiantes contestar de la siguiente manera:

Tabla No.5

Respuestas Situación Didáctica No. 2. Ítem 1

Poliedro	Número de Aristas	Número de Vértices	Número de Caras	Forma de las Caras
Tetraedro	6	4	4	Triángulos
Cubo	12	8	6	Cuadrados
Octaedro	12	6	8	Triángulos
Dodecaedro	30	20	20	Pentágonos
Icosaedro	30	12	12	Triángulos

Lo que podría ocurrir en ésta actividad es que los estudiantes se confundan al momento de contar el número de aristas, vértices y caras de cada uno de los poliedros, sin embargo, ellos deben encontrar los caminos para determinar el número exacto de aristas, caras y vértices. Uno de ellos puede ser el realizar el poliedro en un nuevo archivo con el fin de visualizar de manera más clara los datos que se requieren; cabe resaltar que con el poliedro cubo no debería existir alguna dificultad, ya que los estudiantes trabajaron estas características en la situación inmediatamente anterior.

La segunda parte de la situación se trabajara con el archivo llamado cajita.cg3, para el desarrollo de esta situación los estudiantes ya ha pasado por el proceso de instrumentalización, por lo tanto el nivel de complejidad de la actividad aumenta, es decir, se encuentran en un proceso en donde se desarrollan esquemas de acción instrumentada, que les permitan manejar de forma más espontánea la manera de ver objetos tridimensionales en el plano, así como el arrastre de puntos en el computador;

además se movilizan conceptos previos como: caras, vértices y el concepto de cubo, esto con el fin de que los estudiantes razonen de forma lógica y adecuada acerca del concepto de cubo. Es por tanto que, las respuestas, por parte de los estudiantes podrían ser así:

2. Abre el archivo que se encuentra en el Escritorio del computador llamado cajita.cg3 (Ver Figura 23), obsérvalo y explora en él lo que aparece; ahora responde a las siguientes preguntas:

Figura 23. Cajita.

P: ¿Cuántas aristas tiene?

E: la cajita tiene 12 aristas

P: ¿Cuántos vértices tiene?

E: la cajita tiene 8 vértices

P: ¿Es un cubo? Justifica tu respuesta.

E: tiene las mismas propiedades de un cubo, es decir ocho vértices, 12 aristas y seis caras aunque no se puede observar con exactitud si las caras de la cajita son cuadrados.

Con el fin de que los estudiantes validen las respuestas en los siguientes puntos de la situación didáctica deben realizar lo siguiente:

P: arrastra el punto A o el punto B para que formes el cubo.

Por medio del arrastre de cualquiera de los dos puntos, el estudiante puede además de visualizar, transformar objetos con el fin de alcanzar la meta propuesta para este caso obtener un cubo.

E: cuando se mueve el punto A o B de la figura, esta se transforma en una caja rectangular de diferente tamaño.

P: ¿Tú cómo sabes que el poliedro que aparece en la pantalla de Cabri 3D es un cubo? Responde por escrito.

E: el poliedro que aparece en la pantalla puede ser un cubo ya que se observan sus caras, vértices y aristas pero no se puede saber con exactitud si sus caras son cuadradas.

P: mide cada uno de las aristas del cubo y comprueba si es ó no es un cubo.

Los estudiantes en el momento de realizar la acción de medir empleando la herramienta distancia de Cabri 3D, están comprobando que la cajita no tiene todos sus lados iguales por lo tanto el medio produce una retroacción la cual indica el instante cuando la cajita se convierte en cubo, es decir, cuando todos los lados de esta son iguales.

Después de esto, los estudiantes deben determinar lo siguiente:

P: al segmento AB se le denomina también la diagonal. ¿La diagonal del cubo mide lo mismo que cada una de las aristas?

Para responder esto los estudiantes deben realizar la acción de medir la diagonal, luego el medio producirá la retroacción la cual indica que la diagonal no mide lo mismo que cada una de las aristas del cubo.

La tercera parte de esta situación se trabajará con el archivo llamado cuadrado3cm.cg3 (Ver Figura 24); aquí el estudiante moviliza los saberes adquiridos en los anteriores puntos. Además, adquiere nuevos conceptos como el de planos paralelos, planos perpendiculares, puntos de intersección.

Figura 24. Cuadrado de longitud 3 cm.

Para dar solución a esta parte de la guía se espera que los estudiantes contesten de la siguiente manera:

P: dado un cuadrado de longitud 3 cm, en el plano base, construye un cubo.

¿Cuáles son las diferentes maneras de construir un cubo?

E: las formas de elaborar un cubo son: empleando la opción cubo de Cabri 3D, partiendo de un cuadrado, trazando rectas perpendiculares, paralelas para luego emplear planos o cuadrados para formar las caras del cubo.

P: ¿Qué herramientas³⁸ de Cabri 3D empleaste?

E: se emplea la herramienta cubo.

P: mide el volumen del cubo usando la fórmula que tu profesora te dio. Luego, mide el volumen del cubo usando la herramienta Volumen del Cabri 3D. Comprueba con el Cabri 3D, el resultado que arroja este software con el que calculaste anteriormente.

E: la fórmula para calcular el volumen del cubo es: $V = l \times l \times l$ donde l es el lado del cubo, en este caso al emplear la fórmula del cubo y la respuesta que brinda Cabri 3D es la misma.

P: con la herramienta, Abrir poliedro, de Cabri 3D, abre el cubo hasta que sus caras queden sobre el plano base. Luego, mide el área superficial del cubo. Observa la diferencia entre las áreas superficiales de cada cara del cubo y el volumen. ¿Es el mismo valor?

E: el área de cada cara del Cubo mide 9cm^2 y el área total es de 54cm^2 mientras que el volumen es 27cm^3 por lo tanto se concluye que el valor es distinto luego estos conceptos no poseen el mismo significado.

³⁸ Ver Anexo H.

Para la solución de ¿Cómo construirías un cubo partiendo del cuadrado pero sin usar la herramienta cubo? Existen varias formas, usando planos, rectas perpendiculares, rectas paralelas, circunferencias, etc. Por favor, intenta construirlo y finalmente, arrastra un vértice del cuadrado base, y observa que siga siendo cubo. Si el cubo se te desbarata, entonces vuelve a comenzar o ensaya otra construcción. La idea que es que siga siendo cubo cuando arrastres cualquiera de sus vértices de la base.

El estudiante ya debe estar familiarizado con él con el AGD, ya que el nivel de complejidad de la situación va avanzando, el estudiante debe realizar la acción de construir un cubo empleando planos paralelos y perpendiculares así como rectas perpendiculares y circunferencias esto con el fin de validar sus conocimientos, cuando el cubo este construido se podrá observar si el estudiante hizo una construcción robusta, es decir, que al arrastrar un punto de la figura realizada, ésta conserve sus propiedades en otras palabras debe seguir siendo un cubo; en el caso de que esto no ocurra el estudiante debe buscar la manera la cual le permita realizar la construcción ya sea repitiendo el proceso o retornar a las actividades anteriores esto con el fin de que los estudiantes formen una idea de una construcción que no se deforme por medio del arrastre de un determinado punto y así visualizar las propiedades de una determinada figura en el espacio.

Para finalizar esta situación el estudiante debe abrir el archivo llamado cubo.cg3 (Ver Figura 25).

Figura 25. Centro del cubo.

Para contestar los siguientes interrogantes: encuentra el punto de intersección entre el plano y la diagonal. Y ¿Qué representa este punto? se espera que los estudiantes realicen la acción de encontrar el punto de intersección entre el plano y la diagonal mediante la herramienta punto de intersección de Cabri 3D, el medio producirá una retroacción que le indicará que el punto de intersección obtenido es el centro del cubo, así el estudiante al validar sus acciones deberá tener en claro el concepto de diagonal así como también los conceptos aprendidos en clases anteriores.

3.1.3. Situación Didáctica No. 3: Los Hexaminos

En el papel que se te entrega, están representados los hexaminos³⁹. Un hexamino es una figura geométrica compuesta por seis cuadrados unidos uno con otro adyacente por sus lados. Existen 35 hexaminos diferentes de los cuales algunos se pueden cerrar doblándolos por las líneas de división de los cuadrados para formar un cubo o hexaedro.

1. Utiliza el pegante de papel para armar los 22 hexaminos que se te entregó y descubre cuáles de ellos pueden formar un cubo.
2. ¿Cuántos hexaminos forman un cubo?
3. En el papel cuadriculado dibuja los 13 hexaminos que hacen falta.
4. Intenta encontrar razones que te permitan descartar grupos de hexaminos con los cuales no es posible "armar" un cubo.
5. ¿Qué pasa con el área de los hexaminos?
6. ¿Qué cambios observas con respecto al perímetro?

Para solucionar esta situación el profesor facilita a los estudiantes el medio con el cual van a interactuar; en este caso, brinda algunos mecanismos del medio, que son los 22 hexaminos. Los estudiantes deben tener a su disposición lapicero y pegante para papel.

Esta tarea moviliza nuevos saberes como el de reconocer que las maneras de representar el cubo en el plano son diferentes, pueden tener la misma área pero el perímetro puede cambiar, además se observa el paso del plano al espacio.

³⁹ Ver Anexo G.

Se espera de los estudiantes las siguientes respuestas:

Utiliza el pegante de papel para armar los 22 hexaminos que se te entregó y descubre cuáles de ellos pueden formar un cubo.

P: ¿Cuántos hexaminos forman un cubo? Los estudiantes realizan la acción de doblar y pegar los diferentes desarrollos del cubo, con el fin de observar y determinar los hexaminos que forman cubo esto produce como retroacción el de establecer las condiciones necesarias para “armar” un cubo a partir del plano es decir otra forma de representar objetos geométricos en el espacio.

E: De los 22 hexaminos entregados por las profesoras 11 de ellos forman un cubo (Ver Figura 26)⁴⁰, y los otros 11 no forman el cubo. (Ver Figura 27)

Figura 26. Hexaminos que forman cubo.

Figura 27. Hexaminos que no forman cubo.

P: En el papel cuadriculado dibuja los 13 hexaminos que hacen falta.

E: Los estudiantes establecen relaciones y ubican de forma adecuada los seis cuadrados que conforman los hexaminos con el fin de hacer encontrar y dibujar los 13 hexaminos que hacen falta. (Ver Figura 28)

⁴⁰ Las Figuras 26, 27 y 28 fueron creadas por las autoras de ésta investigación mediante Microsoft Word.

Figura 28. Trece (13) Hexaminos restantes.

P: Intenta encontrar razones que te permitan descartar grupos de hexaminos con los cuales no es posible "armar" un cubo.

E: Los hexaminos que no forman cubos son aquellos que:

Tengan un vértice en el que concurran cuatro cuadrados.

Tengan cinco o seis cuadrados en línea.

Tengan cuatro cuadrados en línea y los otros dos en el mismo lado.

Para dar respuesta a las siguientes preguntas los estudiantes deben conocer el valor del lado de un cuadrado en este caso será de 5 cm, esto con el fin de hacer un análisis minucioso con respecto al área y al perímetro de un hexamino ya que como se dio a conocer algunos forman un cubo y otros no.

P: ¿Qué pasa con el área de los hexaminos?

E: Dado que el valor de cada lado del cuadrado es de 5cm se tiene que para los hexaminos que forman un cubo y los que no el área total es la misma.

P: ¿Qué cambios observas con respecto al perímetro?

E: El valor del perímetro para los hexaminos que no forman el cubo es de: 60 cm y para los hexaminos que lo forman es de: 70 cm

Lo que puede ocurrir en esta situación es que los estudiantes contesten que el área al igual que el perímetro son los mismos en todos los hexaminos. Si esto sucede, el

profesor mediante un acto de devolución, debe buscar que el estudiante analice de forma más detallada el área y el perímetro de los hexaminos con el fin de que el estudiante valide y comprenda que el perímetro depende de acuerdo con la manera cómo van ubicados los cuadrados de los hexaminos.

3.1.4. Situación Didáctica No. 4: Desdoblado el Cubo.

Generación dinámica del cubo

Observa procedimiento⁴¹ para crear un hexamino en Cabri 3D y formar con él, un cubo. (Ver Figura 29)

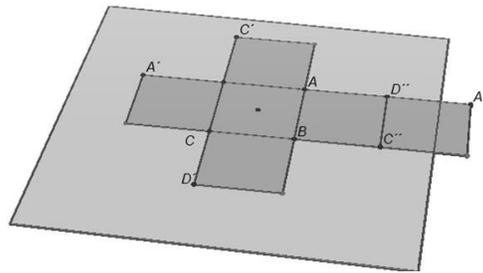


Figura 29. Hexamino.

Ahora moviendo los puntos A', C', D', D'' y A'', formemos el cubo. (Ver Figura 30)

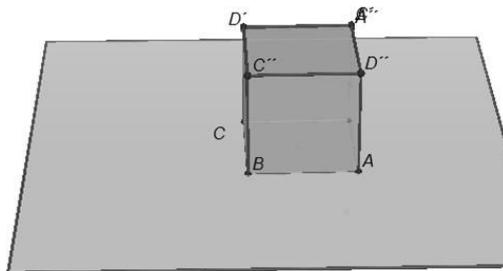


Figura 30. Cubo formado a partir del hexamino.

⁴¹ Ver Anexo I.

Hemos pasado del hexamino que es una figura plana, al cubo que es una figura en el espacio.

2. Después de la explicación hecha por tu profesora de la transformación de uno de los hexaminos, del plano al espacio, en Cabri 3D, escoge uno de los desarrollos planos del cubo.
3. Ahora realiza el hexamino que seleccionaste en Cabri 3D, para luego formar el cubo.
4. Socializa con tus compañeros la actividad que desarrollaste.

Para dar solución a esta situación es necesario que los estudiantes movilicen los saberes adquiridos en las tareas anteriores. Por otra parte, esta situación moviliza nuevos saberes como el de construir objetos tridimensionales a partir de objetos bidimensionales.

El desarrollo de ésta situación debe ser efectuada en la casa, proporcionándole a de cada estudiante la versión gratuita de Cabri 3D, si las estudiantes no tienes a su disposición un computador el docente les facilitará uno en un tiempo determinado; en la siguiente sesión de clases, cada una deberá exponer el trabajo realizado.

Los estudiantes realizan la acción de observar a una de las profesoras para así tener idea de la forma de construir un cubo partiendo de un hexamino cualquiera que se construirá con Cabri 3D, para cada una de las acciones el medio proporcionará una retroacción, la cual le permitirá crear una construcción robusta que no se deforme. El estudiante debe validar si estas acciones corresponden a las expectativas planteadas durante el desarrollo de la situación, es decir, si al momento de escoger uno de los hexaminos este se puede representar en el espacio.

Si el estudiante logra construir un cubo a partir de un hexamino cualquiera, se puede inferir que este puede hacer representaciones bidimensionales, así como manipular objetos tridimensionales.

Lo que puede ocurrir en esta tarea es que los estudiantes en el momento de validar sus acciones no recuerden algunos de los pasos a seguir en la construcción, de igual manera la elección del hexamino es libre, por lo que esta situación depende primordialmente de los estudiantes y del interés por recordar los conceptos que se aprendieron durante el desarrollo de las sesiones anteriores.

Para dar solución a esta situación se hace necesario que los estudiantes movilicen los saberes adquiridos en las tareas anteriores. Por otra parte, esta situación contribuye en la formación de nuevos saberes como el de construir objetos tridimensionales a partir de objetos bidimensionales. Para la realización de esta tarea los estudiantes se ubicarán en un computador que tenga instalado Cabri 3D.

Los estudiantes deben realizar la acción de observar al profesor para tener idea de la forma de realizar un cubo partiendo de un hexamino, así para cada una de sus acciones el medio le proporcionará una retroacción, la cual le permitirá crear una construcción robusta que no se deforme partiendo de uno de los once hexaminos que se estudiaron en la situación anterior. El estudiante debe validar si estas acciones corresponden a las expectativas planteadas durante el desarrollo de la situación, es decir, si al momento de escoger uno de los hexaminos este se puede representar en el espacio.

Si el estudiante logra construir un cubo a partir de un hexamino cualquiera, se infiere que este puede hacer representaciones bidimensionales, así como manipular objetos tridimensionales.

4. ANÁLISIS A POSTERIORI Y RESULTADOS

En este capítulo se estudian los datos recogidos durante el proceso de aplicación de la adaptación de la secuencia didáctica realizada al grado quinto, indagando si ocurrió lo planteado en el análisis a priori y los posibles sucesos que no fueron previstos, a fin de confrontar si son ciertas las hipótesis planteadas al inicio de esta investigación .

4.1. Marco contextual

Este trabajo de grado se llevó a cabo en una Institución Educativa⁴² del municipio de Pupiales, Departamento de Nariño, esta institución educativa es de carácter público, la secuencia didáctica fue aplicada a cinco (5) estudiantes⁴³ de grado quinto, cuyas edades están entre diez (10) y once (11) años durante el año lectivo 2013, la jornada de estudio es en la mañana de 7:00 a.m. a 12:00 p.m. de lunes a viernes.

Se eligió esta institución debido al interés de la profesora por conocer nuevas formas de enseñar matemáticas; para este caso el uso de materiales didácticos, además se eligió a los estudiantes por su rendimiento académico, su buen desempeño en el área de matemáticas y por su espíritu de colaboración.

La secuencia didáctica fue llevada a cabo del 18 al 27 de junio de 2013; los días 18, 21, 25 y 27. En la primera semana: dos (2) días en el salón de clase, en horas de la tarde y en la segunda semana: dos (2) días en horas de la mañana, el salón de profesores de la institución la cual cuenta con tres (3) computadores portátiles con Cabri 3D instalado.

Es necesario especificar que se pensaba emplear el aula de informática la cual cuenta con veinte (20) computadores de mesa correspondiente a la sección de primaria de la institución, para que el trabajo pudiera ser desarrollado de manera individual y de forma simultánea por los cinco (5) niños, sin embargo, dicho salón no estaba disponible, pues

⁴² Se decidió eliminar los datos de la Institución Educativa para proteger el anonimato de las estudiantes participantes.

⁴³ Los nombres de las estudiantes que participaron en este trabajo, fueron cambiados por nombres ficticios, siguiendo los procedimientos éticos normales de una investigación educativa.

otro grado lo estaba utilizando. Durante el trabajo con los materiales manipulables físicos no se presentó ningún inconveniente, puesto que la directora de grupo colaboró sin ningún problema, así las niñas trabajaron de manera individual, aflorando su creatividad.

Para la recolección de datos para los análisis, en cada sesión se obtuvieron producciones de los estudiantes mediante hojas de trabajo; se realizaron registros fotográficos, y de video. De estos datos, se tomaron los más distinguidos para justificar las secuencias, esto con el fin de observar y determinar el uso complementario existente entre las dos clases de materiales didácticos.

En cuanto a los estudiantes, es importante mencionar que las niñas ya habían tenido experiencia usando Cabri 3D, esto permitió que se familiarizan instrumentalmente con el AGD y con las situaciones presentadas. El único percance que se presentó fue que en el momento de socializar la Situación Didáctica No. 4 una de las niñas, decidió no hablar.

4.2. Análisis a posteriori

En este análisis se muestran los sucesos ocurridos durante la experimentación, comprobando si se cumplió con lo propuesto en el análisis a priori y dando a conocer aquellos hechos que no se tuvieron previstos.

Por otra parte, el tiempo que se estimó en el análisis a priori para la ejecución de la secuencia didáctica fue el apropiado, ya que no hubo necesidad de ampliarlo, puesto que se utilizaron seis (6) horas distribuidas en cuatro sesiones. (Ver Tabla No. 6)

Tabla No.6

Ejecución de la Secuencia Didáctica

FECHA	ACTIVIDAD	No. ESTUDIANTES	TIEMPO
18 Junio	Situación No. 1: Cubo con palillos	5	30 minutos
21 de Junio	Situación No. 2: Cubo con Cabri 3D	5	2 horas
25 de Junio	Situación No. 3: Los Hexaminos	5	1 hora y 30 minutos
27 de Junio	Situación No. 4: Desdoblado el Cubo	5	2 horas

4.2.1. Situación No. 1. “Cubo con palillos”

De acuerdo con el tiempo propuesto en el análisis a priori para el desarrollo de la Situación No. 1: Cubo con palillos (Ver Tabla No.4) y el tiempo que realmente se utilizó para la ejecución de esta situación (Ver Tabla No.6), se puede deducir que el trabajo con los materiales manipulativos, no presento mayor dificultad, lo que ocasionó que el tiempo utilizado durante la experimentación fuese menor que el propuesto en el análisis a priori.

Los palillos y la plastilina hacen parte del medio que es utilizado para desarrollar ésta situación.

Como fue planeado en el análisis a priori, el docente facilitó a los estudiantes el medio con el cual van a interactuar para que comiencen a resolver la actividad.

Para desarrollar esta actividad, lo primero que hicieron los estudiantes fue tomar la plastilina y formar bolitas e incrustar en cada extremo del palillo una bolita de plastilina para ir formando el cubo que se pide en la actividad; cuando ya tenían realizado el cubo se unieron y crearon un cubo de mayor tamaño (Ver Figura31), cuando terminaron de realizar el cubo comenzaron a contestar las respectivas preguntas.

Figura 31. Cubos realizados por los estudiantes.

En la Situación No.1 se esperaba que los estudiantes relacionen los materiales utilizados con las propiedades geométricas del cubo, es decir, que los palillos corresponden a las aristas, que las bolitas de plastilina representan los vértices, que los cuadrados realizados simbolizan las caras del cubo, además de determinar el número de vértices, caras y aristas basándose en el número de palillos y de bolitas de plastilina utilizados; al examinar las hojas de respuestas de los estudiantes se observó que la mayoría de las estudiantes relacionaron los materiales utilizados con las propiedades del cubo.(Ver Figura 32)

Figura 32. Respuestas a la Situación No. 1.

A manera de conclusión, se puede afirmar que el objetivo propuesto para la situación No.1 se observó los conocimientos previos de las estudiantes, llevándolas a identificar la relación entre los materiales utilizados y las propiedades geométricas del cubo.

4.2.2. Situación No. 2. “Cubo con Cabri 3D”

De acuerdo con el tiempo propuesto en el análisis a priori para el desarrollo de la Situación No. 2: “Cubo con Cabri 3D” (Ver Tabla No. 4) y el tiempo que realmente se utilizó para la ejecución de esta situación (Ver Tabla No.6), se puede deducir que el trabajo con Cabri 3D, tuvo mayor dificultad debido al número de preguntas y acciones que presenta esta situación, lo que ocasionó que el tiempo utilizado durante la experimentación fuese mayor que el propuesto en el análisis a priori.

El AGD Cabri 3D hace parte del medio utilizado durante esta situación.

En la primera parte de ésta situación se trabajó con el archivo poliedro platónicos.cg3. Como se propuso en el análisis a priori, las estudiantes realizaron la acción de girar el plano con el fin de contar y determinar el número de aristas, vértices y caras de cada uno de los poliedros presentados. Con el poliedro cubo no tuvieron ninguna dificultad ya que en la situación anterior, las estudiantes ya habían determinado cada una sus propiedades, entonces lo que hicieron fue comprobar que lo que trabajaron con los palillos y la plastilina, estaba bien.

Como se había previsto en el análisis a priori por la forma como se presentaron los poliedros, al momento de ir contando se confundían, entonces tenían que volver a empezar, sin embargo, algunas tomaron la opción de crear en un nuevo documento y hacer cada uno de los otros cuatro poliedros restantes y comenzar a contar y no confundirse; otras estudiantes por su parte lo que hicieron fue cambiar los colores de las caras dándoles distinto color a cada una; otras comenzaron a etiquetar con números y letras para así llegar a determinar el número exacto de caras, vértices y aristas.

Esta actividad presentó dificultades al momento de contar, ya que algunas estudiantes tomaron solo la acción de girar el plano y al momento de hacerlo se confundían por lo que no pudieron determinar correctamente el número de caras, vértices y aristas.

Lo que se esperaba en esta primera actividad es que las estudiantes obtuvieran el número de vértices, caras y aristas. Sin embargo, a pesar de todos los procedimientos utilizados por ellas para obtener el número correcto de cada uno, no determinaron el número correcto de estas propiedades. (Ver Figura 33)

En cuanto a la forma de las caras de cada uno de los poliedros, no tuvieron dificultad ya que las estudiantes tenían como conocimientos previos los polígonos.

Tetraedro:
 Cuantas aristas tiene: 7
 Cuantas vertices tiene: 4
 Cuantas caras tiene: 4
 Sus formas de caras son: Triangulares

Cubo
 Cuantas aristas tiene: 12
 Cuantas vertices tiene: 8
 Cuantas caras tiene: 6
 Sus formas de cara son: Cuadradas

Octaedro
 Cuantas aristas tiene: 12
 Cuantos vertices tiene: 7
 Cuantas caras tiene: 8
 Las formas de sus caras son: Triangulares

Dodecaedro
 Cuantas aristas tiene: 30
 Cuantos vertices tiene: 20
 Cuantas caras tiene: 12
 De que formas son sus caras: Pentagono-

Icosaedro
 Cuantas aristas tiene: 30
 Cuantos vertices tiene: 12
 Cuantas caras tiene: 20
 Sus caras son triangulos

Figura 33. Respuesta a la Situación No. 2_ítem 1.

La segunda parte de la situación se trabajó con el archivo cajita.cg3 en donde las estudiantes desarrollaron esquemas de acción instrumentada, lo que les permitió manejar de forma más espontánea objetos tridimensionales en el plano, así como el arrastre de puntos en el computador.

Como se había previsto en el análisis a priori, las estudiantes determinaron fácilmente el número de caras y vértices de la figura presentada, debido a que ya habían trabajado en las situaciones anteriores con el cubo; además algunas establecieron que la figura presentada era un cubo, ya que se guiaron por lo que visualizaban en la pantalla;

sin embargo, una estudiante utilizó la herramienta distancia, midió cada uno de los lados de la figura e inmediatamente estableció que no era un cubo, debido a que cada uno de sus lados no medían lo mismo.

Las estudiantes que determinaron que el sólido presentado no era un cubo, cuando pasaron al siguiente ítem donde se les pide arrastrar el punto A o el punto B para formar un cubo, se dieron cuenta que estaban erradas y que la figura presentada no era un cubo; entonces en ese momento comenzaron a medir los lados de la figura y movieron los puntos de tal manera que los lados de la figura midieran lo mismo para que se represente el cubo.

Como se había previsto en el análisis a priori, las estudiantes establecieron que al mover los puntos A o B, debían moverlos de tal manera que la medida de los lados midieran lo mismo, en ese momento la figura representaría un cubo. (Ver Figura 34)

Figura 34. Estudiante resolviendo la Situación No. 2_ítem 2 en Cabri 3D.

Cuando los estudiantes establecieron que la figura ya representaba un cubo, determinaron si la diagonal del cubo medía lo mismo que cada uno de sus aristas y así los estudiantes realizaron la acción de medir la diagonal mediante la herramienta

distancia de Cabri 3D, por lo que llegaron a la conclusión que la diagonal de un cubo no media lo mismo que sus aristas. (Ver Figura 35)

Figura 35. Respuesta a la Situación No. 2_ítem 2.

En la tercera parte de esta situación se trabajó con el archivo de Cabri 3D denominado cuadrado3cm.cg3; como se había previsto en el análisis a priori, las estudiantes construyeron un cubo utilizando la herramienta cubo de Cabri 3D, obteniendo un cubo, de medida 3cm de lado; algunas estudiantes establecieron otras formas de realizar un cubo, una de ellas utilizó la herramienta Ayuda de Cabri 3D (Ver Figura 36), con la cual determinó que las formas de construir un cubo son variadas: crear un cubo con una cara en un plano; sobre un cuadrado; en este, una de ellas determinó que se lo podía representar mediante rectas y lo relacionó con lo que había trabajado con los palillos y la plastilina; encontró la relación al decir que los palillos los representaban las rectas. (Ver Figura 37)

Figura 36. Ayuda de Cabri 3D con sus diferentes formas de construir cubos.

Figura 37. Respuesta a la Situación No.2_ítem 3.1, 3.2.

Como se había previsto en el análisis a priori, el profesor recordó a los estudiantes la fórmula para determinar el volumen del cubo, ya planteado esto, los estudiantes pasaron a calcular fácilmente el resultado del volumen del cubo que tenían en la pantalla, además las estudiantes realizaron la acción de medir el volumen del cubo con la herramienta volumen del Cabri3D y todas determinaron que los volúmenes arrojados en sus dos procedimientos eran los mismos. (Ver Figura 38)

Figura 38. Respuesta a la Situación No.2_ítem 3.3.

Las estudiantes utilizaron la herramienta abrir poliedro del Cabri 3D y realizaron la acción de abrir el cubo que tenían en pantalla, hasta llevarlo a su representación en el plano, mediante la herramienta área de Cabri 3D encontraron el área superficial de la representación plana del cubo (Ver Figura 39) y como se había previsto en el análisis a priori determinaron que el área y el volumen eran resultados diferentes. (Ver Figura 40)

Figura 39. Estudiante resolviendo la Situación No. 2_ítem 3.4. en Cabri 3D.

Figura 40. Respuesta a la Situación No. 2_ítem 3.4.

Tal como se había planteado en el análisis a priori y de acuerdo con la actividad, las estudiantes debían plasmar un cubo sin usar la herramienta cubo de Cabri 3D, como estaban familiarizadas con el AGD Cabri 3D, pusieron en práctica sus conocimientos, tanto matemáticos como instrumentales del AGD y desarrollaron favorablemente la actividad, puesto que la mayoría logro realizar el cubo teniendo en cuenta conceptos que se movilizan para realizarlo como rectas perpendiculares o rectas paralelas, utilizando además, planos, circunferencias y manejando adecuadamente las herramientas que ofrece Cabri 3D.

En esta actividad, las estudiantes lograron hacer del cubo (Ver Figura 41) una construcción robusta, ya que cuando se les pedía arrastrar un punto de la figura no se les deformó; es decir el cubo con el arrastre solo cambió su forma y no perdió sus propiedades es decir que siguió siendo cubo.

Figura 41. Estudiante resolviendo la Situación No. 2_ítem 3.5. en Cabri 3D.

Aquí las estudiantes hicieron la comparación del cubo que realizaron en la primera situación con plastilina y palillos y determinaron que en Cabri 3D lo que hicieron fue realizar el mismo procedimiento con las herramientas que éste les ofrece, y que el cubo realizado con plastilina se deformaba fácilmente al mover cualquiera de sus componentes, mientras que en el trabajo que realizaron con Cabri 3D, el cubo no se deformaba.

Finalmente se trabaja con el archivo cubo.cg3 donde los estudiantes realizaron la acción de encontrar el punto de intersección entre la diagonal y el plano, para lo cual utilizaron la herramienta puntos de intersección del Cabri 3D. Sin embargo, solo una de ellas responde de forma adecuada diciendo que el punto de intersección representa el centro del cubo. (Ver Figura 42)

Figura 42. Respuesta a la Situación No.2_ítem 4.

4.2.3. Situación No. 3. “Los Hexaminos”

De acuerdo con el tiempo propuesto en el análisis a priori para el desarrollo de la Situación 3 “Los Hexaminos” (Ver Tabla No. 4) y el tiempo que se utilizó para la ejecución de la misma (Ver Tabla No. 6), se deduce que el trabajo con los materiales manipulativos, en éste caso los hexaminos, no tuvieron mayor dificultad, generando una concordancia entre el tiempo utilizado durante la experimentación y el propuesto en el análisis a priori.

Papel y pegante hacen parte del medio que es utilizado para desarrollar ésta situación.

Como fue planeado en el análisis a priori, el docente facilitó a los estudiantes el medio con el que van a interactuar para que comiencen a desarrollar la actividad, tal es el caso que se les entregó 22 hexaminos hechos en cartón cartulina y el pegante para papel.

Para el desarrollo de ésta actividad los estudiantes comenzaron a doblar cada uno de los hexaminos que se les entregó, cada vez que el hexamino doblado formaba un cubo, los estudiantes realizaban el proceso de dibujarlos en el papel cuadriculado que se les entregó (Ver Figura 43), así como también debían pegarlos (Ver Figura 44). Además, como se propuso en el análisis a priori, los estudiantes determinaron que 11 hexaminos eran los desarrollos de planos del cubo y esto les ayudo para establecer las condiciones necesarias que deben tener los hexaminos que formarán el cubo. (Ver Figura 45)

Figura 43. Estudiante en el proceso de dibujar los hexaminos.

Figura 44. Estudiante en el proceso de pegar los hexaminos.

Figura 45. Respuesta a la Situación No. 3_ítem 3_ ítem 5.

Además se esperaba que las estudiantes dibujaran en el papel cuadriculado los 13 hexaminos que hacían falta, estableciendo condiciones y relacionando los lugares en los que debían estar ubicados los seis cuadrados que conforman los hexaminos. Las estudiantes lograron encontrar los 13 hexaminos que hacían falta. (Ver Figura 46)

Figura 46. Respuesta a la Situación No. 3_ítem 1.3.

Por otra parte un aspecto que no estuvo previsto en el análisis a priori fue que cuando las estudiantes terminaron de dibujar en el papel cuadriculado los 13 hexaminos, el

docente les pidió que cada una salga al tablero a dibujar uno de los 13 hexaminos encontrados; esto permitió que mientras una estudiante realizaba el hexamino, las otras estuvieran atentas y opinaran acerca del hexamino presentado por sus compañeras. (Ver Figura 47)

Figura 47. Estudiantes dibujando hexaminos en el tablero.

Se esperaba que los estudiantes a momento de hacer el análisis del área y el perímetro de los hexaminos determinaran que el área iba a ser la misma para todos los hexaminos y que el perímetro iba a ser diferente y que la diferencia estaba entre los hexaminos que si formaban cubo y los que no. Al examinar las hojas de trabajo de los estudiantes se evidencia que la mayoría llegaron a esta conclusión. (Ver Figura 48)

Figura 48. Respuesta a la Situación No. 3_ítem 6_ítem 7.

A modo de conclusión, se puede afirmar que el objetivo propuesto para esta situación se vio desarrollado en los nuevos conocimientos que adquirieron los estudiantes, llevándolos a identificar las diferencias entre el área y el perímetro de figuras y tener conocimiento de los desarrollos planos del cubo.

4.2.4. Situación Didáctica No. 4. “Desdoblado el Cubo”

Como se había previsto en el análisis a priori, las estudiantes estuvieron atentas a la intervención hecha por el docente, cada una de las estudiantes escogió uno de los 11 hexaminos.

Dos de las estudiantes no tenían a su disposición un computador, por lo que se les proporcionó a cada una un computador portátil para que pudieran desarrollar la situación sin ningún problema.

En la sesión llevada a cabo en el aula, las estudiantes expusieron el desarrollo de la actividad, cada una llevo el archivo que contenía el desarrollo de la situación y para presentarla utilizaron la herramienta que ofrece Cabri 3D, Revisar la construcción, y a medida que iban mostrando en Cabri 3D, explicaban las herramientas que habían utilizado. Sin embargo, el inconveniente que se presentó fue que una de las estudiantes realizó la actividad pero al momento de exponerla no quiso hacerlo, por lo cual se decidió que mostrara lo que había hecho sin que hablara.

La mayoría lograron desarrollar satisfactoriamente la situación; es decir consiguieron pasar una figura del plano, al espacio, mediante Cabri 3D y hacer una construcción robusta, ya que si se movía cualquier punto de la figura, ésta no se deformaba. A continuación se expone textualmente el desarrollo que efectuó una de las estudiantes.

P: ¿Cómo realizaste la construcción?

E: hice el primer cuadrado en el plano base, es el que va a quedar fijo y lo pinte azul.

P: ¿Por qué lo pintaste azul?

E: porque es un color muy bonito.

Numeré cada uno de los vértices con 1, 2, 3,4

P: ¿Por qué numeraste los vértices?

E: para no equivocarme

Figura 49. Paso 1 del desarrollo de la Situación No.4.

E: hice una circunferencia de centro en 3 y radio 4

Figura 50. Paso 2 del desarrollo de la Situación No.4.

-Tracé una recta perpendicular al plano y que pasa por 3

Hice los puntos de intersección entre la circunferencia y la recta; la circunferencia y el plano.

-Hice un punto en la circunferencia, ahora con la herramienta arco de circunferencia hice un arco, ahora hice un nuevo punto sobre el arco y lo nombre 5.

Figura 51. Paso 3 del desarrollo de la Situación No.4.

-Con rotación, rote el cuadrado 1, 2, 3, 4; alrededor de 2,3; desplazando el vértice 4 en 5 y pinte el cuadrado

P: ¿Por qué lo pintaste rosado?

E: porque es mi color preferido.

-Para realizar los otros cuadrados realice el mismo procedimiento

-Hice el otro cuadrado rojo.

Figura 52. Paso 4 del desarrollo de la Situación No.4.

-Hice otro cuadrado morado.

Figura 53. Paso 5 del desarrollo de la Situación No.4.

-hice otro cuadrado negro.

Figura 54. Paso 6 del desarrollo de la Situación No.4.

-Y por último hice el cuadrado verde

P: ahora intenta doblarlo

P: ¿Segura que te va a quedar un cubo?

E: y aquí ya tengo el cubo

P: ¿Cuánto te demoraste tratando de armarlo?

E: Entre 10 y 15 minutos.

Figura 55. Desarrollo de la Situación No. 4 terminada.

Lo que se esperaba en esta situación es que los estudiantes realizaran una construcción en donde se tiene en cuenta el plano y el espacio, con el fin de que puedan entender las representaciones bidimensionales y las representaciones tridimensionales teniendo en consideración sus características.

A manera de conclusión, la actividad planteada en ésta situación les sirvió a las estudiantes a aprender a visualizar y a representar objetos bidimensionales y tridimensionales mediante el AGD Cabri 3D, permitiéndoles comprender propiedades del cubo, presentes tanto en el espacio como en el plano.

4.3. Resultados

De los planteamientos realizados en el análisis a priori y en el análisis a posteriori se hace su confrontación y se determina que cada situación planteada cumplió con el objetivo que se planteó en el diseño de la adaptación de la secuencia didáctica. Esto se manifiesta en las producciones escritas y verbales que se tomaron de los estudiantes al poner en acto las situaciones.

En primer lugar, las actividades en las cuales se utilizaron materiales manipulativos como la plastilina, los palillos, el papel en el que representaba los hexaminos, evidencian que estos materiales utilizados dentro de una secuencia didáctica pueden favorecer la conceptualización de las propiedades geométricas del cubo, ya que los estudiantes

lograron identificar los componentes del cubo como lo son: caras, vértices y aristas; además entendieron las representaciones planas de cubo ó hexaminos; identificando las características de este en el plano y en el espacio, y así lograron comprender que el hecho de cambiar su forma no afecta ninguna de sus propiedades.

Se debe resaltar que el uso de materiales como lo son los palillos, la plastilina y el papel, permitió a los estudiantes manipular una construcción en el espacio, así como también realizar construcciones robustas y blandas las cuales evidencian la capacidad del estudiante para realizar conjeturas las cuales fueron probadas conforme se realizaba la situación didáctica.

En cuanto a el trabajo realizado con Cabri 3D, permitió a los estudiantes explorar el espacio empleando varias herramientas para la construcción del cubo, al realizar este sólido por medio de la opción el poliedro cubo, así como también empleando rectas paralelas, circunferencias y planos tanto paralelos como perpendiculares; los estudiantes trabajaron las propiedades del sólido, con respecto a el paso del plano al espacio, los estudiantes después de clasificar los hexaminos en la secuencia anterior con materiales manipulativos colocaron en juego su creatividad en el momento de crear un desarrollo plano del cubo cualquiera, ya que además de emplear las herramientas del AGD debieron emplear conocimientos previos los cuales les permitieron generar la manera de crear un cubo partiendo de su desarrollo o hexamino. Con Cabri 3D, el proceso de instrumentación se dio de manera directa, a pesar de la poca experiencia con el manejo del software, los estudiantes aplicaron y utilizaron de manera eficaz las herramientas ofrecidas por el AGD llevándolos a utilizar sus conocimientos previos para la solución de las actividades.

Con respecto a las actividades presentadas en las situaciones no demostraron mayor dificultad al momento de dar su solución, sino que por el contrario llevaron a las estudiantes a que se motiven trabajando de manera adecuada, esto se evidencia en cada una de las producciones realizadas por ellas.

Cabe destacar que cada una de las variables didácticas⁴⁴ que se encuentran inmersas en el diseño de la adaptación de la secuencia didáctica, permitió construir un conocimiento diferente y que al tomarlos en conjunto produjeron las propiedades geométricas del cubo.

Por ejemplo la variable “el área y el perímetro de los desarrollos planos del cubo” que se encuentran descritos en la Situación Didáctica No.3 ítem 5 y 6, suele ocurrir que los estudiantes determinen que el área y el perímetro de una figura plana sea la misma; sin embargo con esta actividad las estudiantes determinaron que el valor del área y del perímetro de los hexaminos eran diferentes y que además, el área iba a ser la misma para todos los hexaminos; mientras que el perímetro iba a ser diferente. Lo descrito anteriormente se ve reflejado en las respuestas dadas por una estudiante y se enuncia a continuación.

P: ¿Qué pasa con el área de los hexaminos?

E: El área de los hexaminos es la misma ya que como cada cuadrado tiene 5 cm de lado, entonces el área de cada cuadrado es de 25 cm^2 y como son 5 cuadrados $25 \text{ cm}^2 * 6 = 150 \text{ cm}^2$ y todos los hexaminos tienen 6 cuadrados.

P: ¿Qué cambios observas respecto al perímetro?

E: El perímetro es igual para todos los hexaminos que forman cubo en este caso como los lados miden 5 cm el perímetro es 70 cm y los que no forma cubo todos tienen 1 perímetro igual a 60 cm.

⁴⁴Las variables didácticas utilizadas, están descritas en la página 76 de éste documento.

CONCLUSIONES

El uso de materiales didácticos como lo son: los materiales manipulativos y Cabri 3D en clases de matemáticas, permitió atraer la atención de los estudiantes, generando en ellos el deseo de participar de manera activa de las situaciones didácticas que con éstos se desarrollan, de tal forma que el nuevo aprendizaje sea significativo y perdure en el tiempo. A continuación se presenta las conclusiones que surgieron del trabajo realizado en la investigación.

En cuanto a los aspectos generales se refiere, el objetivo general se puede verificar, puesto que, el uso complementario entre materiales manipulativos físicos y Cabri 3D, se dio, al emplear distintos artefactos en un ambiente de aprendizaje como lo es un laboratorio de Matemáticas, para este caso en particular se utilizó el salón de clases; cada artefacto utilizado para el desarrollo de la secuencia didáctica generó en cada una de las cinco estudiantes un conocimiento distinto pero al entrelazarse se perfeccionaron con el fin de proporcionar la comprensión de las propiedades del cubo.

De lo anterior, se puede afirmar que la hipótesis planteada en esta investigación se cumplió, ya que el uso complementario entre materiales manipulativos físicos y virtuales permitió desarrollar la comprensión de las propiedades del cubo.

Con relación a la pregunta de investigación, la secuencia didáctica basada en una adaptación a la TSD permitió dar respuesta, ya que al realizar el diseño de dicha secuencia se tuvo en cuenta las características de cada material, con el fin de que éste brinde al estudiante un conocimiento distinto; de tal manera que al conjugarse, permitieran comprender las propiedades geométricas del cubo, esto es lo que se denomina en este trabajo de grado como uso complementario.

Con respecto al Análisis Preliminares, se empleó la metodología de la micro-ingeniería didáctica, ésta permitió estudiar algunos aspectos del desarrollo histórico-epistemológico, entre ellos los aportes de Euclides a la geometría del espacio,

estableciendo las propiedades de los poliedros, en particular, del cubo y los artefactos, donde fue posible conocer la manera como éstos han jugado un papel importante en el estudio del espacio en tres dimensiones; artefactos como la regla, el compás, el papel, entre otros, han sido utilizados para representar tanto figuras geométricas, como sólidos en el plano y en el espacio, de manera similar para dar solución a algunos problemas matemáticos. De ahí que, se diseñó una secuencia didáctica la cuál es una adaptación de la TSD desarrollada por Brousseau, la cual integró el AGD Cabri 3D en complementariedad con otros artefactos como: plastilina, palillos, y papel.

Por otro lado, además de indagar acerca de los aportes de Euclides, se debe tener en cuenta el uso de diferentes materiales didácticos con el fin de proporcionar a los estudiantes una herramienta de aprendizaje. Esta perspectiva didáctica tomó en consideración el Enfoque Instrumental de Verillón & Rabardel (1995, citados en Maschietto & Trouche, 2010), éste enfoque trata primordialmente de cómo los estudiantes por medio del uso de instrumentos realizan una Génesis Instrumental, durante ésta etapa, el estudiante puede mejorar el artefacto o subutilizarlo. Cabe resaltar que el propósito de las situaciones didácticas diseñadas, era el de amplificar el conocimiento, por lo tanto, las estudiantes generaron hipótesis, un ejemplo de esto es la relación entre el área y el perímetro de los hexaminos puesto que al medir el perímetro del hexamino y al calcular el área del mismo, las estudiantes llegaron a la conclusión de que el perímetro de una figura es diferente pero su área permaneció siendo igual, de ésta manera empleando la regla como instrumento de medida, las estudiantes adquirieron el “nuevo” conocimiento o amplificaron el conocimiento ya adquirido en clases. Con esto se puede resaltar la importancia del Enfoque Instrumental en esta investigación, ya que brindó los elementos necesarios para transformar un conocimiento previo en uno nuevo, además, permitió a los docentes innovar en el momento de llevar los conocimientos al aula.

Teniendo en cuenta el enfoque anteriormente mencionado y los materiales empleados como plastilina, palillos, papel y el AGD Cabri 3D, se observó el uso complementario entre los materiales manipulativos y el material virtual. De la misma manera, se presentó

en el proceso de instrumentalización que se dio en el momento de utilizar cada artefacto, pues con los palillos y la plastilina los estudiantes construyeron el sólido teniendo en cuenta las dimensiones del material entregado sin poder modificar dicha medida, de igual manera con los hexaminos, los estudiantes formaron los cubos teniendo en cuenta ciertas reglas que permiten su construcción; mientras que con Cabri 3D los estudiantes pudieron modificar sus construcciones de tal manera que les permitieron verificar los cálculos hechos con el lápiz y el papel, además les ofreció la oportunidad de arrastrar el segmento con el fin de construir un cubo de diferente longitud.

En cuanto a los materiales manipulativos empleados como medio, cabe resaltar que estos sirvieron de medio didáctico, puesto que las estudiantes no se preocuparon por practicar algoritmos si no por el contrario desarrollaron el pensamiento lógico puesto que en el transcurso de cada situación didáctica, la dificultad era mayor, además el empleo de materiales como: la plastilina, los palillos, el papel y el AGD Cabri 3D, motivó a los estudiantes a observar , a crear modelos de manera similar y les ayudó a llevar una mejor relación con sus compañeras.

Con respecto a los estándares de competencias del Ministerio de Educación Nacional (2006), las estudiantes estuvieron en la capacidad de construir figuras planas, clasificándolas de acuerdo con sus componentes o características, también pasaron del plano al espacio y viceversa, en el momento de componer y descomponer figuras y cuerpos sólidos, con esto se pudo comprobar que las estudiantes por medio del uso complementario de materiales manipulativos, cumplieron las competencias propuestas en cada estándar analizado.

En relación con el diseño de las situaciones y el análisis a priori de la secuencia didáctica, cada situación fue oportuna, ya que se empleó conceptos con los cuales los estudiantes están familiarizados, entre ellos se tuvieron en cuenta: volumen, recta paralela, perpendicular, circunferencia, lados, aristas, entre otros; además, le permitió a los estudiantes organizarse en el lugar que ellos preferían con el fin de salir a flote su creatividad. Asimismo, se tuvo en cuenta los materiales a utilizar, con el fin de

amplificar el conocimiento, la secuencia de las situaciones didácticas fue de manera gradual, de menor a mayor grado de dificultad esto con el fin de observar la manera de razonar e interpretar la información por parte de los estudiantes, para el diseño de cada situación se empleó un estándar con el fin de observar si este se cumplió o no.

Con respecto al análisis a posteriori y los resultados, se debe destacar la fase de experimentación de la secuencia didáctica, ya que se observó que el uso de la plastilina, palillos y el papel, permitieron realizar distintas construcciones del cubo, de igual manera se identificaron las reglas para realizar un cubo, teniendo en cuenta, el desarrollo del plano o hexamino, y al emplear Cabri 3D, se pudo constatar que, los estudiantes descubrieron que para realizar la construcción de un cubo, además de los pasos empleados con los palillos y la plastilina, debían tener en cuenta conceptos, como por ejemplo, la manera de generar una recta dentro del plano en el cual estaba “viviendo” el sólido, y esto permitió realizar construcciones robustas en las cuales se podía vislumbrar conceptos matemáticos más abstractos.

En el momento de pasar de formas bidimensionales (desarrollos planos del cubo), a formas tridimensionales (el sólido cubo), los estudiantes aprendieron el concepto de hexamino. De manera similar, al trabajar y construir el cubo con los treinta y cinco (35) hexaminos (los cuales estaban hechos en cartón cartulina), las estudiantes realizaron conjeturas acerca de las reglas que deben cumplir estos, para formar un cubo, además sirvió como referencia en el momento de modelarlos en Cabri 3D, con esto se puede concluir que el uso complementario entre materiales manipulativos y el AGD Cabri 3D existe de manera espontánea.

Siguiendo en esta línea, al emplear la TSD, con respecto a la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes, se observó cómo ellos por sí solos buscaban estrategias, las cuales les permitieron realizar las construcciones pedidas, dependiendo del artefacto que estaban empleando. Cuando los estudiantes exploraron el espacio mediante la manipulación de materiales didácticos, construyeron, dibujaron y reconocieron por sí solos figuras sólidas como el cubo, así como su desarrollo en el

plano, esto hace parte de una Geometría Activa, según Vasco (1992). Durante esta fase, los estudiantes estuvieron motivados, ya que realizaron las distintas construcciones, desarrollando su creatividad. Esto les permitió reconocer y ejecutar con mayor facilidad el diseño de la situación didáctica presentada. Como se mencionó anteriormente, los docentes juegan un papel importante en la comprensión de un determinado tema, aun cuando este sea abstracto, es por ello que se debe considerar implementar en las clases, distintas actividades que impliquen el uso de diversos materiales didácticos que conlleven a los estudiantes a alcanzar el aprendizaje deseado.

Al hablar de uso complementario entre dos clases de materiales didácticos dentro del aprendizaje de los estudiantes, es posible construir conocimientos aun cuando los temas a tratar sean de mayor dificultad para estos, por tanto en esta investigación quedan estos tres interrogantes:

1. Como en esta investigación se estudió el uso complementario de materiales didácticos para la enseñanza de las propiedades geométricas del cubo podría pensarse: ¿De qué manera el uso complementario de materiales didácticos puede ayudar a la comprensión del espacio?
2. Dado que este trabajo se centró en las producciones de los estudiantes y no en la labor del docente, ¿Cómo el docente puede trabajar el uso complementario empleando distintas clases de materiales, como medio para alcanzar un aprendizaje significativo?
3. En esta investigación se empleó distintos materiales didácticos como los son los materiales manipulativos y el AGD Cabri 3D, por tanto se puede deducir que: ¿De qué manera los materiales didácticos influyen en el desarrollo de destrezas espaciales y visuales dentro de la enseñanza- aprendizaje de la geometría espacial?

Para finalizar, esta investigación favoreció las prácticas pedagógicas, puesto que permite innovar en el momento de desarrollar una clase, empleando distintos materiales didácticos como lo son: los palillos, la plastilina y el papel y el AGD Cabri 3D, los cuales, al usarlos de manera complementaria sirvieron como medio para lograr la adquisición de conceptos matemáticos aunque estos sean demasiado abstractos para los estudiantes, luego al mostrar la relación entre materiales manipulativos y el AGD Cabri 3D, se provocó una mayor disposición hacia la comprensión del espacio, en particular las propiedades del cubo; esto se debió a que las actividades planteadas fueron diseñadas de manera gradual, es decir, de menor a mayor dificultad, de acuerdo con los interés que se pretendían de tal manera que las estudiantes fueron las gestoras de sus propios conocimientos, por su forma de interactuar con el medio didáctico y el de enfrentarse ante una situación, demostrando así el uso complementario existente entre distintos materiales didácticos.

BIBLIOGRAFÍA

- Acosta, M. (2010). Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica. Memorias del 11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa (pp. 61-68). Bogotá, Colombia: ASOCOLME. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1169/1/132_ENSEANDO_TRANSFORMACIONES_GEOMETRICAS_CON_SOFTWARE_DE_GEOMETRIA_DINAMICA_Asocolme2010.pdf.
- Alarcón, J., Bonilla, E., Nava, R., Rojano, T. & Quintero, R. (1994). Libro para el maestro: educación secundaria. Matemáticas. Méjico: SEP.
- Alsina, C., Burgués, C. & Fortuny, J. (1997). Invitación a la Didáctica de la Geometría. (4ta. Ed.). Madrid, España: Síntesis.
- Álvarez, Z. y Fernández, D. (2009). La transformación de rotación en el espacio: una propuesta de aula que integra el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D. (Tesis de pregrado no publicada). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática (pp. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Assude, T. & Gelis, J. (2002). La dialectique ancien-nouveaudans l'intégration de Cabri-Géomètre à l'école primaire. Educational Studies in Mathematics.50, 259-287.
- Blanco, H. & Crespo, C. (2007, Febrero). Representaciones geométricas y argumentaciones en el aula de matemática. Revista Premisa. Sociedad Argentina de Educación Matemática. Año 9, (32), 15-23. Recuperado de: <http://www.soarem.org.ar/Documentos/32%20Blanco.pdf>.

- Boakes, N. (2009). Origami instruction in the middle school mathematics classroom: Its impact on spatial visualization and geometry knowledge of students. *Research in Middle Level Education Online*, 32(7), (pp.1-12). Recuperado de: http://www.amle.org/portals/0/pdf/publications/RMLE/rmle_vol32_no7.pdf.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas* (Primera Ed.). (D. Fregona, Trad.). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.
- Burgos, V.; Fica, D.; Navarro, L.; Paredes, D.; Paredes, M. & Rebolledo, D. (2005). *Juegos educativos y materiales manipulativos: Un aporte a la disposición para el aprendizaje de las Matemáticas. Un estudio cualitativo con fines descriptivos, sobre la base de la teoría fundamentada.* (Tesis de pregrado no publicada). Universidad Católica de Temuco, Temuco, Chile.
- Caicedo, N. & Gómez, A. (2006). *Propuesta didáctica centrada en la lúdica para la enseñanza y el aprendizaje de la temática del pensamiento métrico y sistemas de medida en el grado quinto de educación básica primaria.* (Trabajo de pregrado no publicada). Universidad de Nariño, Pasto, Colombia.
- Caneo, M. (1987). *El juego y la enseñanza de la Matemáticas.* (Tesis para obtener un título de profesor). Universidad Católica de Temuco, Chile.
- Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.
- Chamorro, M. del C. (2003). *Herramientas de análisis en Didáctica de las Matemáticas.* En M. del C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Primaria* (pp. 69 – 94). Madrid, España: Pearson – Prentice Hall.

- Chavarría, J. (2006). Teoría de las Situaciones Didácticas. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. (pp. 1-10). Año 1, Número 2. Recuperado de: <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/download/10/15>.
- Coriat, M. (1997). Materiales, recursos y actividades: un panorama. En L. Rico (Coord.), La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 155-178). Barcelona, España: Horsori.
- Cruz, D. & Guerrero, A. (2009). Construcción de los sólidos platónicos y arquimedianos haciendo uso del software Cabri 3D. Taller realizado En 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (8 a 10 de octubre 2009). Pasto, Colombia. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/771/1/construccion3.pdf>.
- Douady, R. (1995). La Ingeniería Didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.). Ingeniería didáctica en educación matemática. (pp. 61-96). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Fernández, E. & Mejía, M. (2010). Análisis de textos escolares para el diseño de situaciones de enseñanza. Memorias del 11º Encuentro Colombiano Matemática Educativa (pp. 61-68). Bogotá, Colombia: Colegio Champagnat Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1162/1/61_Analisis_de_textos_escolares_para_el_diseo_de_situaciones_de_Asocolme2010.pdf.
- Fernández, E. (2011). Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global integrando Cabri-Géomètre II Plus. (Tesis de Maestría no publicada). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Fortuny, J., Iranzo, N., Morera, L. (2010). Geometría y tecnología. Universidad Autónoma de Barcelona

- Gonzato, M., Fernández, T & Godino, J. (2011, Julio). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas.* (pp. 99-117) Vol. 77. Recuperado de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/77/Articulos_05.pdf.
- Guin, D. & Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in mathematics environments: necessity of instrumental orchestrations. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 34(5), 204-211.
- Guillén, G; Gutiérrez; Pastor, J; Cáceres, M. (1992). La enseñanza de la geometría de sólidos en la E.G.B. Proyecto de investigación.
- Guillén, G. (1997). *Poliedros*. Madrid, España: Síntesis.
- Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿y en la investigación? Universidad de Valencia, España.
- Hoyos, V. (2006). Funciones complementarias de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la escuela secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*. 24 (1), 31-42.
- Ibarguen, Y. & Realpe, J. (2012). La enseñanza de la simetría axial a partir de la complementariedad de artefactos. (Tesis de pregrado no publicada). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- ICFES. (2010). Saber 5° y 9° 2009. Resultados Nacionales. Resumen ejecutivo. Recuperado el 10 de septiembre de 2011, de http://www.icfes.gov.co/saber59/images/pdf/INFORME_SABER.pdf

- ICFES. (2011). Saber 5° y 9° 2009. Resultados de las encuestas curriculares. Recuperado el 10 de septiembre de 2011, http://www.icfes.gov.co/saber59/images/pdf/encuesta_curricular_saber5y9_2009.pdf
- Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions: two sides of the use of the use of dynamic geometry environments. En 10th Asian Technology Conference in Mathematics. Cheong-Ju: Korea National University of Education.
- Laborde, C. (2008). Multiple dimension involved in the design of tasks taking full advantage of dynamic interactive geometry. En Memórias XVII Encontro de Investigação em Educação Matemática. Viera de Leiria, Portugal.
- Martin, G. (1998). Euclidean Constructions. En G. Martin (Ed.), Geometric constructions. (pp. 1-10). Nueva York, E.U.: Springer – Verlag.
- Maschietto, M. & Trouche, L. (2010). Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories. En The International Journal on Mathematical Education, ZDM, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik: The role of resources and technology in mathematics education, 42 (1), 33-47.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). Matemáticas: Lineamientos Curriculares. Bogotá, Colombia: Panamericana Formas e Impresos.
- Ministerio de Educación Nacional. (1999). Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas. Serie Lineamientos curriculares. Bogotá, Colombia: Creamos Alternativas Soc. Ltda.
- Ministerio de Educación Nacional (2004). Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales. Bogotá, Colombia: Enlace Editores Ltda.

- Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas: Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar! Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.
- Moncayo, C & Pantoja, J. (2010). Enfoque Didáctico para la Conceptualización de la parábola como lugar geométrico integrando Cabri Géomètre II Plus. (Tesis de pregrado no publicada). Universidad de Nariño, Pasto, Colombia.
- Moreira, M. (2002). Los medios materiales de enseñanza. Fundamentos conceptuales. Recuperado el 14 de Junio de 2013, del sitio Web de Tecnología Educativa de la Universidad la Laguna: <http://tecnologiaedu.us.es/nweb/htm/pdf/tema3.pdf>.
- Olmo, del M.; Moreno, M. F. & Gil, F. (1993). Superficie y Volumen ¿Algo más que el trabajo con fórmulas? Madrid, España: Síntesis.
- Quesada, C. (2006). Los sólidos platónicos. Recuperado el 15 de julio de 2013 del sitio Web de la Universidad Autónoma de Madrid: http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Los%20solidos%20platonicos.pdf.
- Rabardel, P. (2011). Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos. Acosta, M. (Trad.). Bucaramanga, Colombia: Universidad Industrial de Santander, Colombia.
- Sadovsky, P. (2005). La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática. Recuperado el 15 de octubre de 2013 de http://s3.amazonaws.com/lcp/didactica24/myfiles/teoria_situaciones-1-.pdf
- Salazar, L. (2011). Situaciones Didácticas: Teorema de Tales. (Trabajo escrito presentado como Trabajo Final en una asignatura de la Maestría en Educación: Énfasis Educación Matemática. Trabajo no publicado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Secretaría de Educación Departamental de Nariño (2010). Plan Departamental de Formación de Docentes 2009-2013. Recuperado el 15 de Junio de 2013, de <http://www.sednarino.gov.co/sednarino/SEDNARINO12/index.php/es/>

Silva, T. (2010). Sólidos Arquimedianos e Cabri 3D: Um estudo de Truncaturas baseadas no renascimento. (Tesis de Maestría no publicada). Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Sao Paulo, Brasil.

Subroto, T. (2011). The use of Cabri 3D software as virtual manipulation tooling 3-dimension geometry learning to improve junior high school students' spatial ability. En International Seminar and the Fourth National Conference on Mathematics Education. Department of Mathematics Education, Yogyakarta State University, 21-23 July 2011. Recuperado de: http://independent.academia.edu/totosubroto/Papers/1185225/THE_USE_OF_CABRI_3D_SOFTWARE_AS_VIRTUAL_MANIPULATION_TOOL_IN_3-DIMENSION_GEOMETRY_LEARNING_TO_IMPROVE_JUNIOR_HIGH_SCHOOL_STUDENTS_SPATIAL_ABILITY.

Trouche, L. (2005). Desde los artefactos hasta los instrumentos del trabajo matemático. Un cuadro teórico para comprender mejor los procesos de aprendizaje de las matemáticas. Primer seminario internacional de tecnologías en educación matemática. 20 a 23 de julio de 2005, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Vasco, C. (1992). Geometría Activa y Geometría de las Transformaciones. Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología. No. 2. (pp. 21-26). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Villarroel, Y.; Méndez, N. & Lavaque, J. (2010). Cubos: Una propuesta didáctica basada en la visualización. Revista de Educación Matemática. Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Córdoba, Argentina: Universidad Nacional de Córdoba. Vol.

25.

Recuperado

de:

http://www.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_25/prop_14.pdf

Yábar, J. (1996). Una aproximación a la geometría en tres dimensiones. Seminario Logo VI. Barcelona, España.

ANEXOS

Anexo A

Situación Didáctica No.1: Registro fotográfico empleando materiales físicos: plastilina,
palillos

Anexo B

Situación Didáctica No.2: Registro fotográfico empleando el material virtual: Cabri 3D.

Anexo C

Situación Didáctica No.3: Registro fotográfico empleando materiales físicos: Cartón-
cartulina, pegante

Anexo D

Situación Didáctica No.4: Registro fotográfico empleando el material virtual: Cabri3D

Anexo E

Producciones de los estudiantes Situación No.1.

Anexo F

Producciones de los estudiantes – Situación No. 2.

- 2.5. ¿Tú cómo sabes que el poliedro que aparece en la pantalla de Cabri 3D es un *cubo*?. Responde por escrito.
- 2.6. Mide cada uno de las aristas del *cubo* y comprueba si es ó no es un *cubo*.
- 2.7. Al segmento AB se le denomina también la diagonal. ¿la diagonal del *cubo* mide lo mismo que cada una de las aristas?

3. Dado un cuadrado de longitud 3 cm, en el plano base, construye un *cubo*.

- 3.1. ¿Cuáles son las diferentes maneras de construir un *cubo*?
- 3.2. ¿Qué herramientas de Cabri 3D empleaste?
- 3.3. Mide el volumen del *cubo* usando la fórmula que tu profesora te dio. Luego, mide el volumen del *cubo* usando la herramienta *Volumen* del Cabri 3D. Comprueba con el Cabri 3D, el resultado que arroja este software con el que calculaste anteriormente.
- 3.4. Con la herramienta, *Abrir poliedro*, de Cabri 3D, abre el *cubo* hasta que sus caras queden sobre el plano base. Luego, mide el área superficial del *cubo*. Observa la diferencia entre las áreas superficiales de cada cara del *cubo* y el volumen. ¿es el mismo valor?
- 3.5. ¿Cómo construirías un *cubo* partiendo del cuadrado pero sin usar la herramienta *cubo*?. Existen varias formas, usando planos, rectas perpendiculares, rectas paralelas, circunferencias, etc. Por favor, intenta construirlo.
- 3.6. Finalmente, arrastra un vértice del cuadrado base, y observa que siga siendo *cubo*. Si el *cubo* se te desbarata, entonces vuelve a comenzar o ensaya otra construcción. La idea que es que siga siendo *cubo* cuando arrastres cualquiera de sus vértices de la base.

4. Abre el archivo que se encuentra en el Escritorio del computador llamado *cubo.cg3*, obsérvalo y explora en él, lo que aparece. Ahora responde a las siguientes preguntas.

- 4.1. Encuentra el punto de intersección entre el plano y la diagonal.
- 4.2. ¿Qué representa este punto?

1.

2.

3.

4.

5.

Anexo G

Producciones de los estudiantes – Situación No.3.

1.

2.

3.

4.

5.

Anexo H

Herramientas de Cabri empleadas en la Situación didáctica No.2

1. Herramienta: Distancia

Se selecciona con el apuntador  la opción Distancia, luego se señala en la figura el punto B en el cual aparece el siguiente rótulo “Entre este punto y esta arista”

2. Herramienta: Volumen

Se selecciona con el apuntador  la opción Volumen, luego se señala el cubo que construiste hasta que aparezca: “Volumen de este cubo”

3. Herramienta: Abrir poliedro

Se selecciona con el apuntador  la opción Abrir poliedro, luego se señala el cubo construido hasta que aparezca: “Patrón de este cubo”, luego se da clic derecho hasta llevar el hexamino al plano base.

4. Herramienta: Área

Se selecciona con el apuntador  la opción área, luego se señala una de las caras del cubo hasta que aparezca: “Área de esta cara”

Figura 7: Utilizamos la herramienta Arco de circunferencia, y creamos un arco de circunferencia que pasa por los tres puntos.

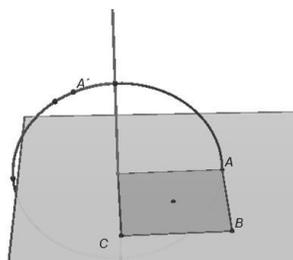


Figura 8: Crear el punto A' , sobre el arco de circunferencia

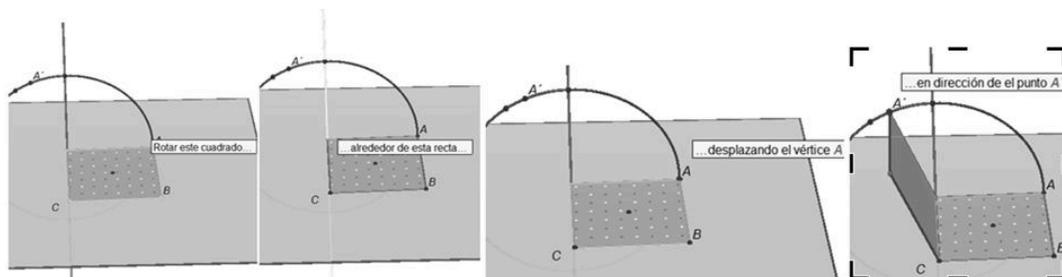


Figura 9: Con la herramienta Rotación, construir la imagen del cuadrado ABCD, por la rotación con eje CD, que transforma a A en A' .

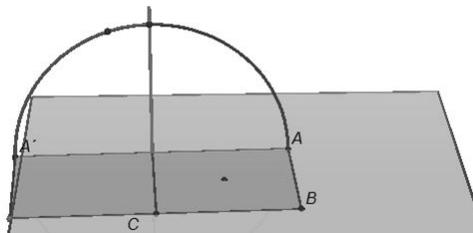


Figura 10: Obtenemos la segunda cara del hexamino.

De igual manera vamos a construir imágenes de la cara precedente por una rotación alrededor del cuadrado ABCD entonces:

- Crear una circunferencia con eje DA y que pasa por el vértice C.
- La recta perpendicular creada anteriormente nos sirve para la construcción de ésta cara.
- Encontramos los puntos de intersección entre el Plano de base y la circunferencia.
- Creamos un nuevo punto sobre la circunferencia.
- Utilizamos la herramienta Arco de circunferencia, y creamos un arco de circunferencia que pasa por los tres puntos.
- Crear el punto C', sobre el arco de circunferencia
- Con la herramienta Rotación, construir la imagen del cuadrado ABCD, por la rotación con eje AD, que transforma a C en C'. Ver Figura 11.

- Crear una circunferencia con eje BC y que pasa por el vértice D.
- Crear una recta perpendicular al plano de base, que pase por el vértice C.
- Encontramos los puntos de intersección entre el Plano de base y la circunferencia.

- Creamos un nuevo punto sobre la circunferencia.
- Utilizamos la herramienta Arco de circunferencia, y creamos un arco de circunferencia que pasa por los tres puntos.
- Crear el punto D' , sobre el arco de circunferencia
- Con la herramienta Rotación, construir la imagen del cuadrado ABCD, por la rotación con eje BC, que transforma a D en D' . Ver Figura 12.

- Crear una circunferencia con eje AB y que pasa por el vértice D.
- Encontramos los puntos de intersección entre el Plano de base y la circunferencia.
- Creamos un nuevo punto sobre la circunferencia.
- Utilizamos la herramienta Arco de circunferencia, y creamos un arco de circunferencia que pasa por los tres puntos.
- Crear el punto D'' , sobre el arco de circunferencia
- Con la herramienta Rotación, construir la imagen del cuadrado ABCD, por la rotación con eje AB, que transforma a D en D'' . y nombrar el otro vértice con C'' . Ver Figura 13.

- Crear una circunferencia con eje $C''B''$ y que pasa por el vértice A.
- Encontramos los puntos de intersección entre el Plano de base y la circunferencia.
- Creamos un nuevo punto sobre la circunferencia.
- Utilizamos la herramienta Arco de circunferencia, y creamos un arco de circunferencia que pasa por los tres puntos.
- Crear el punto C'' , sobre el arco de circunferencia
- Con la herramienta Rotación, construir la imagen del cuadrado $ABC''D''$, por la rotación con eje $C''D''$, que transforma a A' en A'' . Con esto terminamos el hexamino. Ahora ocultamos construcciones auxiliares Ver Figura 14.

Ahora moviendo los puntos A' , C' , D' , D'' y A'' , formemos el cubo.

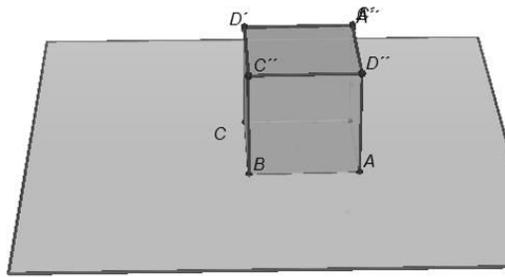


Figura 15: Cubo formado a partir del **hexamino**.

Hemos pasado del hexamino que es una figura plana, al cubo que es una figura en el espacio.