

ESTUDIO SOBRE CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS EN TEXTOS
ESCOLARES, EN CUADERNOS DE TRABAJO Y LAS CONCEPCIONES
ACERCA DE LA NOCIÓN DE CUADRILÁTEROS EN ESTUDIANTES DE
EDUCACIÓN BÁSICA

OSCAR HERNÁN ARCINIEGAS TORO
GERMÁN ARTURO MARCILLO HERNÁNDEZ

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO
2009

ESTUDIO SOBRE CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS EN TEXTOS
ESCOLARES, EN CUADERNOS DE TRABAJO Y LAS CONCEPCIONES
ACERCA DE LA NOCIÓN DE CUADRILÁTEROS EN ESTUDIANTES DE
EDUCACIÓN BÁSICA

OSCAR HERNÁN ARCINIEGAS TORO
GERMÁN ARTURO MARCILLO HERNÁNDEZ

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de
Licenciado en Matemáticas

Mg. LUÍS FELIPE MARTÍNEZ PATIÑO
Asesor

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO
2009

Nota de Aceptación

Director

Jurado

Jurado

San Juan de Pasto, Junio del 2009

NOTA DE RESPONSABILIDAD

Las ideas y conclusiones aportadas en el trabajo de grado son responsabilidad exclusiva de sus autores, Artículo 1, Acuerdo No. 324 del 11 de octubre de 1996 del honorable consejo directivo de la Universidad de Nariño.

A nuestro Dios...
A nuestros padres y hermanos.

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Luís Felipe Martínez, por su grande y valiosa orientación en la dirección del presente trabajo. Además por sus acertadas recomendaciones y apoyo necesario que nos permitió llevar adelante y finalizar esta investigación.

A los estudiantes del grado 9-1 de la institución educativa INEM, que participaron en la investigación realizada , así como a los directivos y profesores de la institución que nos dieron todas las facilidades para poder hacer la experimentación.

A todos los profesores que pertenecen y pertenecieron al departamento de Matemáticas y Estadística, que contribuyeron en nuestra formación como docentes.

GERMÁN ARTURO MARCILLO HERNÁN
OSCAR HERNÁN ARCINIEGAS TORO

TABLA DE CONTENIDO

	Página
INTRODUCCIÓN	15
1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	18
1.1. DESCRIPCIÓN Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	18
1.2. JUSTIFICACIÓN	24
1.3. ANTECEDENTES	28
1.4. OBJETIVOS	29
2. MARCO TEÓRICO	30
2.1. LOS CUADRILÁTEROS	30
2.1.1. Clasificación de los cuadriláteros	32
2.1.2. Presentación visual de los cuadriláteros	36
2.1.3. Relación y organización de los cuadriláteros	39
2.2. EL MODELO DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE	40
2.2.1. Los niveles de razonamiento	41
2.2.2. Principales características de los niveles de razonamiento	43
2.3. LA TEORÍA SOBRE FORMACIÓN DE CONCEPTOS DE VINNER	44
3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN	48
3.1. ENFOQUE INVESTIGATIVO	48
3.2. POBLACIÓN Y MUESTRA	49

3.3.	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS PARA LA RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN	51
3.4.	ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN	52
4.	ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LA INFORMACIÓN	54
4.1.	LOS ARCHIVOS	54
4.1.1.	Los textos escolares	54
4.1.2.	Los cuadernos de trabajo	68
4.2.	EL CUESTIONARIO	74
4.2.1.	Análisis de los resultados del cuestionario	75
5.	CONCLUSIONES	85
6.	SUGERENCIAS	87
	BIBLIOGRAFÍA	90
	ANEXOS	92

LISTA DE FIGURAS

	Página
Figura 1. Los cuadriláteros en un texto escolar de grado 3º de E.B.	19
Figura 2. Definición de romboide en un texto escolar de E.B.	20
Figura 3. Clasificación de los cuadriláteros en un texto escolar de E.B.	20
Figura 4. Definición de paralelogramo en un cuaderno de un estudiante de grado 6º	21
Figura 5. Respuesta de un estudiante de grado 9º de E.B a un problema alusivo a los cuadriláteros	22
Figura 6. Respuesta de un estudiante de grado 9º de E.B a un problema alusivo a los cuadriláteros	22
Figura 7. Respuesta de un estudiante de grado 9º de E.B a un problema alusivo a los cuadriláteros	23
Figura 8. Texto de grado 4º de E.B donde los temas de geometría se dejan para el final de cada unidad	25
Figura 9. Los cuadriláteros en el Examen de Estado (2006-2)	27
Figura 10. Cuadrilátero convexo	30
Figura 11. Cuadrilátero cóncavo	31
Figura 12. Elementos básicos de los cuadriláteros	32
Figura 13. Características determinadas por los elementos del cuadrilátero	32
Figura 14. Primera clasificación de cuadriláteros	34
Figura 15. Esquema general de organización y clasificación de los cuadriláteros	40
Figura 16. Interacción entre la definición y la imagen conceptual	46
Figura 17. Etapas de desarrollo de la investigación	47
Figura 18. Etapas de desarrollo de la investigación	53
Figura 19. Esquema general del proceso de análisis de archivos	54
Figura 20. Clasificación de los cuadriláteros en un texto escolar de grado 3º de E.B.	55
Figura 21. Esquema de organización y clasificación de cuadriláteros en un texto de grado 3º	56
Figura 22. Clasificación de los cuadriláteros en un texto escolar de grado de E.B.	57
Figura 23. Organización y clasificación de cuadriláteros en un texto de grado 4º	58

Figura 24. Clasificación de los cuadriláteros en un texto escolar de grado 4º de E.B.	58
Figura 25. Organización y clasificación de cuadriláteros en un texto de grado 4º	59
Figura 26. Clasificación de los cuadriláteros en un texto escolar de grado 5º de E.B.	60
Figura 27. Organización y clasificación de cuadriláteros en un texto de grado 5º	62
Figura 28. Clasificación de los cuadriláteros en un texto escolar de grado 6º de E.B.	63
Figura 29. Organización y clasificación de cuadriláteros en un texto de grado 6º	64
Figura 30. Clasificación de los cuadriláteros en un texto escolar de grado 7º de E.B.	65
Figura 31. Organización y clasificación de cuadriláteros en un texto de grado 7º	67
Figura 32. Clasificación de los cuadriláteros en un cuaderno de trabajo de grado 6º	68
Figura 33. Organización y clasificación de cuadriláteros en un cuaderno de trabajo de grado 6º	71
Figura 34. Clasificación de los cuadriláteros en un cuaderno de trabajo de grado 7º	72
Figura 35. Organización y clasificación de cuadriláteros en un cuaderno de trabajo de grado 7º	74
Figura 36. Esquema de actividad mental deseado en la resolución de problemas geométricos por parte de los estudiantes	87

LISTA DE CUADROS

	Página
Cuadro 1. Definiciones para las familias o clases de cuadriláteros	33
Cuadro 2. Clases y subclases de cuadriláteros	34
Cuadro 3. Definiciones para las diferentes subclases de cuadriláteros	35
Cuadro 4. Representaciones visuales de los cuadriláteros	37
Cuadro 5. Elementos explícitos e implícitos en los niveles	44
Cuadro 6. Características de los estudiantes del grupo 9-1	50
Cuadro 7. Características de los estudiantes de la muestra	51
Cuadro 8. Categorías y ejemplo de respuestas para la definición de paralelogramo	76
Cuadro 9. Categorías y ejemplo de respuestas para la definición de rectángulo	76
Cuadro 10. Categorías y ejemplo de respuestas para la definición de rombo	77
Cuadro 11. Categorías y ejemplo de respuestas para la definición de cuadrado	78
Cuadro 12. Clasificación de las figuras 1, 3 y 4 de las preguntas 1B y 2	79
Cuadro 13. Respuestas de los estudiantes a la pregunta B1	82
Cuadro 14. Respuestas de los estudiantes a la pregunta B2	83

LISTA DE ANEXOS

	Página
Anexo A. Cuestionario Aplicado a la Muestra de Estudiantes	92
Anexo B. Respuestas de los Estudiantes a la Pregunta 1A	93
Anexo C. Clasificaciones y Respuestas de los Estudiantes a las preguntas B, B1, B2 y 2	100

RESUMEN

Esta investigación consiste en un estudio sobre clasificación de cuadriláteros, a partir de las definiciones que se presentan en textos escolares y en cuadernos de trabajo de estudiantes, así como también un estudio sobre concepciones acerca de la noción de cuadriláteros en estudiantes de grado 9º de Educación Básica (E.B), pertenecientes a la Institución Educativa Municipal INEM ubicada en la ciudad de Pasto, en el período febrero-mayo. El estudio se realiza en base a una exhaustiva revisión y clasificación de los cuadriláteros y en los trabajos realizados por los investigadores Sholmo Vinner con su Teoría sobre formación de conceptos y Van Hiele con su modelo de razonamiento. La investigación está dirigida a docentes que laboran en los niveles de E.B., por considerar que los cimientos de una educación de calidad para los estudiantes se encuentran en estos niveles de estudio. Para lograr estos propósitos, por un lado, se realizó un análisis detallado de textos escolares y cuadernos de trabajo de estudiantes de E.B., sobre la clasificación de los cuadriláteros. Por otro lado, se elaboró un cuestionario con preguntas de respuesta libre (cuestionarios abiertos) y de acuerdo con la Teoría sobre formación de conceptos de S. Vinner y el modelo de razonamiento de Van Hiele, donde se presentan actividades referentes a los conceptos de cuadriláteros (el caso particular de los paralelogramos, excepto el romboide), aplicándose a la muestra. Con los resultados obtenidos se realizó un análisis cualitativo por medio de la organización de las respuestas en categorías. Los resultados obtenidos indican que la mayoría de los estudiantes de la muestra exhiben características del nivel de visualización o de reconocimiento. Por otro lado, los estudiantes al momento de resolver las actividades propuestas en el cuestionario, recurrieron (evocaron) a utilizar la imagen conceptual y no la definición conceptual. Por los resultados, se sugieren algunas conclusiones y sugerencias para mejorar la calidad de la enseñanza de los cuadriláteros.

ABSTRACT

This investigation consists of a study on classification of quadrilaterals, starting from the definitions that are presented in school texts and in notebooks of students work, as well as a study on conceptions about the notion of quadrilaterals in students of 9th grade of Basic Education (E.B), belonging to the Municipality Educational Institution INEM located in the city of Pasto, in the period february - may. The study is carried out based on an exhaustive revision and classification of the quadrilaterals and in the works carried out by the investigating Sholmo Vinner with its Theory it has more than enough formation of concepts and Van Freezes with her reasoning model. The investigation is directed to educational that work in the levels of E.B., to consider that the foundations of an education of quality for the students are in these study levels. To achieve these purposes, on one hand, he/she was carried out a detailed analysis of school texts and notebooks of students' of E.B work., on the classification of the quadrilaterals. On the other hand, a questionnaire was elaborated with questions of free answer (open questionnaires) and in accordance with the Theory has more than enough formation of concepts of S. Vinner and the pattern of reasoning of Van Freezes, where relating activities are presented to the concepts of quadrilaterals (the case peculiar of the parallelograms, except the romboide), being applied to the sample. With the obtained results he/she was carried out a qualitative analysis by means of the organization of the answers in categories. The obtained results indicate that most of the students of the sample exhibit characteristic of the visualization level or of recognition. On the other hand, the students to the moment to solve the activities proposed in the questionnaire, appealed (they evoked) to use the conceptual image and not the conceptual definition. For the results, some conclusions and suggestions are suggested to improve the quality of the teaching of the quadrilaterals.

INTRODUCCIÓN

La Geometría, aparte de ser entendida como la ciencia del espacio, también se considera como un método que puede visualizar formas y figuras, visualizar conceptos o procesos sistemáticos. El proceso de visualización se lo puede entender como el de dar “forma” mental o física a ciertos conceptos y procesos matemáticos no necesariamente figurados, por ejemplo, el visualizar el procedimiento de resolución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, con la intersección gráfica de las rectas¹.

Desde el punto de vista conceptual, una figura geométrica (por ejemplo, una circunferencia) constituye un concepto genuino, una entidad ideal abstracta, que se define formalmente (la circunferencia es el conjunto de puntos de un plano que equidistan de un punto fijo denominado centro). Desde el punto de vista figural, una figura geométrica “refleja propiedades espaciales (forma, posición y magnitud)”².

Los cuadriláteros (los cuales son objeto de estudio en esta investigación), son uno de los conceptos geométricos que aparte de poseer una gran variabilidad de representaciones visuales, también poseen una amplia red de relaciones de inclusión, establecidas a partir de su componente conceptual (definiciones). Así por ejemplo, a partir de las definiciones:

- Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos.
- Un rectángulo es un paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos rectos.
- Un rombo es un paralelogramo que tiene sus cuatro lados congruentes.
- Un cuadrado es un paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos rectos y sus cuatro lados congruentes.

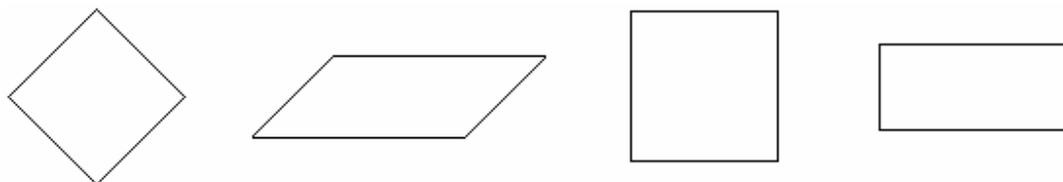
Se pueden establecer las siguientes relaciones de inclusión:

- Un cuadrado, un rombo y un rectángulo son clases especiales de paralelogramos.
- Un cuadrado es una clase especial de rombo y de rectángulo.

¹ ALSINA, C., FORTUNY, J. y PÉREZ, R. ¿Por qué Geometría?. Propuestas Didácticas para la ESO. Madrid: Ed. Síntesis, S.A., 1997. pp. 24-25.

² MORIENA, S. y SCAGLIA, S. Efectos de las Representaciones Gráficas Estereotipadas en la Enseñanza de la Geometría. México D.F.: Ed. Santillana, 2003. p. 5.

Por lo tanto, si se tratase de representar visualmente a un paralelogramo, lo podríamos hacer en cualquiera de las siguientes formas:



De esta manera, cuando se trata de abordar el estudio de conceptos geométricos, cabe tener en cuenta dos aspectos inherentes a estos conceptos: la componente conceptual y la componente figural.

Por otra parte, el texto escolar es, aunque no el único, el recurso más utilizado en la enseñanza, que tiene una gran influencia a la hora de decidir qué y cómo enseñar los conceptos, convirtiéndose en un recurso didáctico utilizado por el estudiante (y profesor) como un medio de comunicación matemática, a través de situaciones motivadoras, explicaciones o informaciones sobre los diferentes conceptos y junto a éstas además, un conjunto de actividades que por lo general buscan la apropiación conceptual de los temas, la ejercitación operacional de los mismos y su aplicación en la formulación y resolución de problemas, por lo que su implicación en las concepciones que los estudiantes puedan formarse de los conceptos, pueden estar fuertemente influenciadas. Por otro lado, el cuaderno como documento personal, constituye otro recurso de trabajo escolar, donde la intención del docente, manifiesta en sus explicaciones verbales o escritas sobre un determinado tema, son consignadas por cada estudiante en el cuaderno. Cabe anotar en este punto, que tales intenciones, pueden ser interpretadas por cada estudiante bajo otra mirada, es decir, cada estudiante puede reinterpretar lo que el docente desea que interpreten. De esta manera, el texto escolar como el cuaderno de trabajo, se convierten en agentes que pueden influir de manera significativa en las concepciones que los estudiantes puedan formarse de los conceptos.

Por estos motivos, decidimos indagar sobre el tratamiento que reciben los cuadriláteros en los textos escolares y en los cuadernos de trabajo de los estudiantes, así como también tratar de averiguar las concepciones que los estudiantes de grado 9º de E.B., se han formado sobre los cuadriláteros, especialmente sobre el paralelogramo, el rectángulo, el rombo y el cuadrado.

El estudio se basó en textos escolares de los grados 3º a 7º de E.B., puesto que son en estos niveles de escolaridad (así lo recomienda el MEN) donde se trata en “detalle” el estudio de los cuadriláteros; tales textos fueron denominados como: Texto A, Texto B, Texto C, Texto D, Texto E, Texto F y fueron consultados en una biblioteca pública de la ciudad de Pasto. Por otra parte, los cuadernos de trabajo

analizados corresponden a los grados 6º y 7º de E.B., los cuales fueron solicitados a estudiantes que actualmente se encuentran en grado 9º y que hicieron parte de la muestra de estudiantes que respondieron al cuestionario, con el fin de estudiar sus concepciones.

1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La investigación en Didáctica de las Matemáticas que se desarrolla, se genera como un intento por estudiar los problemas relativos a la clasificación de los cuadriláteros, a partir de las definiciones que se presentan en textos escolares y en cuadernos de trabajo de estudiantes, así como también el intento por estudiar los problemas relativos a las concepciones de los estudiantes de E.B., con respecto a este tema que ha sido y sigue siendo parte de los contenidos geométricos enseñados en las Instituciones Educativas y en los niveles básicos. El problema de investigación toma como puntos de referencia, por un lado, la investigación referida a “Definiciones de triángulos y cuadriláteros: Errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B.”³, y por otro, la aplicación de algunas preguntas referidas a los cuadriláteros a estudiantes de grado 9º con carácter diagnóstico.

1.1. DESCRIPCIÓN Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

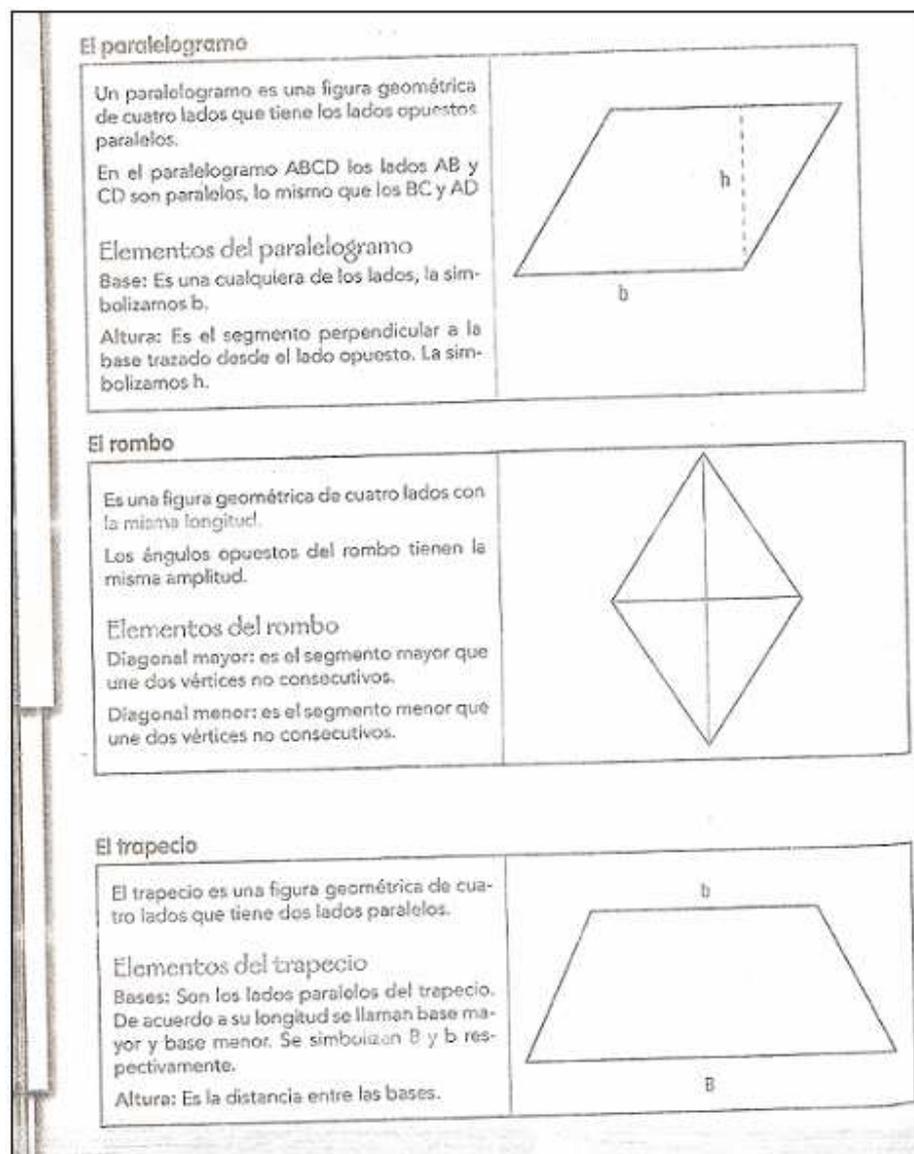
El texto escolar y el cuaderno de trabajo han constituido a lo largo de la historia, herramientas claves en el proceso de enseñanza-aprendizaje, convirtiéndose en vehículos de transmisión curricular que permite a los estudiantes, con apoyo del profesor, acceder de manera progresiva a los conceptos de las diferentes disciplinas.

Uno de los temas matemáticos que ha sido y sigue siendo presentado en los textos escolares, como parte importante de los contenidos geométricos, son los cuadriláteros. Su presentación como clases de figuras geométricas que se incluyen unas dentro de otras, comienza, por lo general en 3º de Enseñanza Primaria⁴. Así, en este nivel, los textos escolares presentan la clasificación de los cuadriláteros a través de sus definiciones, y junto a ellas aparecen asociadas sus presentaciones visuales (ver Figura 1, pág. siguiente). ¿Existirá la posibilidad de encontrar en textos escolares de Matemáticas de E.B., posibles errores o inconsistencias en cuanto a la clasificación de los cuadriláteros?.

³ JAIME, A., CHAPA, F. y GUTIÉRREZ, A. Definiciones de triángulos y cuadriláteros: Errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B.. En: Epsilon nº 23. Valencia. 1992, pp. 53-54.

⁴ HUERTA, P. Los cuadriláteros a comienzos del siglo XIX, a comienzos del siglo XX, ¿qué ha cambiado?. En: Suma, Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Madrid. (Febrero, 1996); p. 58.

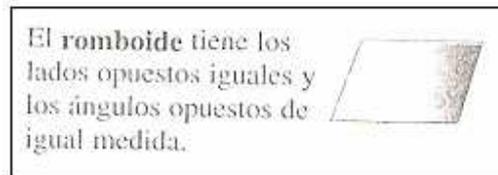
Figura 1. Los cuadriláteros en un texto escolar de grado 3º de E.B.



En un texto escolar de Matemáticas de E.B., se encontró la siguiente definición de romboide (ver Figura 2):

El romboide tiene los lados opuestos iguales y los ángulos opuestos de igual medida.

Figura 2. Definición de romboide en un texto escolar de E.B.



Si interpretamos tal definición, se puede afirmar con toda seguridad que, el rectángulo, el rombo y el cuadrado son romboides, puesto que todos ellos, tienen la propiedad de tener sus lados opuestos y sus ángulos opuestos de igual medida (propiedad de los paralelogramos). Ahora, si evocamos la definición acertada de romboide:

El romboide es un paralelogramo que NO cumple con las propiedades del rectángulo ni del cuadrado.

En Jaime⁵ se plantea una recopilación de los principales tipos de errores o inconsistencias encontrados en libros de texto de E.G.B., con respecto a definiciones de triángulos y cuadriláteros. Uno de los errores o inconsistencias mencionados afirma: “Tipo I. Errores encontrados por la presentación visual”, seguidamente afirma: “Con frecuencia no hay, o hay muy pocos, ejemplos de figuras no estándar o en posición no estándar. En este caso, no se trata de un error matemático, pero sí de un serio error didáctico.”. Haciendo referencia a este tipo de error, en otro texto de Matemáticas de E.B., se encontró la siguiente presentación (a modo de clasificación) de los cuadriláteros (ver Figura 3):

Figura 3. Clasificación de los cuadriláteros en un texto escolar de E.B.

Cuadriláteros: tienen cuatro lados y cuatro ángulos. Por las longitudes de sus lados y por la medida de sus ángulos, se clasifican así:

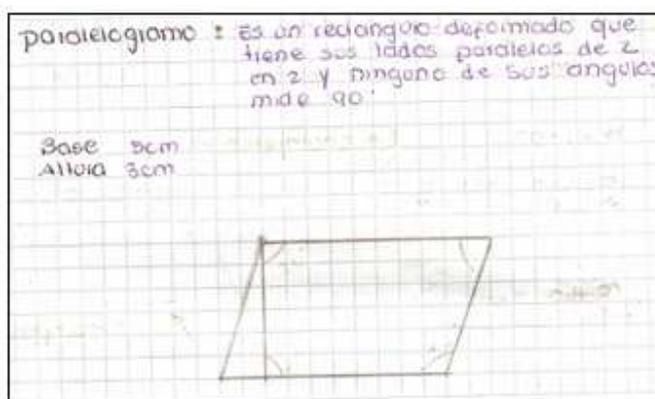
Nombre del cuadrilátero	Características	Forma
Cuadrado	Rectángulo con sus lados de igual medida.	
Rectángulo	Tiene sus cuatro ángulos rectos.	
Trapezio	Tiene dos lados paralelos y los otros dos no paralelos.	
Paralelogramo	Tiene sus lados opuestos paralelos dos a dos.	
Rombo	Paralelogramo con dos lados consecutivos de igual longitud.	

⁵ JAIME, A., CHAPA, Op. Cit., pp. 53-54.

Si ahora nos centramos en los cuadernos de trabajo de los estudiantes, los errores son aún más evidentes. En un cuaderno de grado 6º se encontró por ejemplo, que el paralelogramo se definía y presentaba de la siguiente manera (ver Figura 4):

“Paralelogramo: Es un rectángulo deformado que tiene sus lados paralelos de 2 en 2 y ninguno de sus ángulos mide 90º”.

Figura 4. Definición de paralelogramo en un cuaderno de un estudiante de grado 6º.

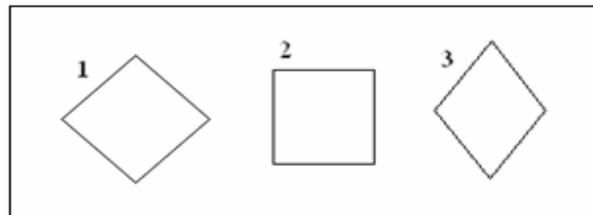


Aquí se pueden distinguir dos aspectos: el primero tiene que ver con la definición verbal del concepto de paralelogramo y el segundo con su presentación visual. En cuanto al primero, podemos notar que se hace más relevancia a la descripción de su aspecto físico, cuando en ella se menciona que “es un rectángulo deformado” (los lados más cortos del rectángulo se han inclinado) y “ninguno de sus ángulos mide 90º”. En cuanto al segundo aspecto, al igual que en el texto escolar de la figura 1.3, la predominancia de figuras estereotipadas⁶ hacen que la forma o disposición del concepto en el plano, se imponga sobre la definición del concepto. Con respecto a este tipo de situaciones, hoy en día ya existe un creciente cuerpo de investigaciones que ha ligado la mente de los estudiantes con las matemáticas. Por ejemplo, la teoría sobre formación de conceptos propuesta por S. Vinner, hace referencia a los términos Imagen del concepto y Definición del concepto. La Imagen del concepto, es entendida como todo el conjunto de imágenes mentales asociadas en la mente del estudiante con el nombre del concepto, pudiendo tratarse de una representación visual o bien de una serie de impresiones o experiencias. La Definición del concepto, hace referencia a todas las propiedades o atributos relevantes que definen y caracterizan al concepto.

⁶ Referencia a representaciones gráficas de figuras geométricas utilizadas con mucha frecuencia en textos escolares y en cuadernos de trabajo de estudiantes.

Por otro lado, a tres estudiantes de grado 9º, se les presentó las siguientes situaciones:

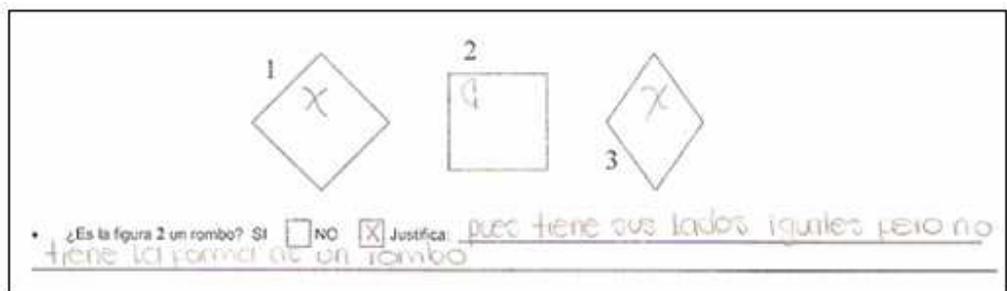
A un estudiante A se le planteó: en las siguientes figuras; pon una C dentro de los que son cuadrados y pon una R dentro de los que son rombos.



¿Es la figura 2 un rombo?

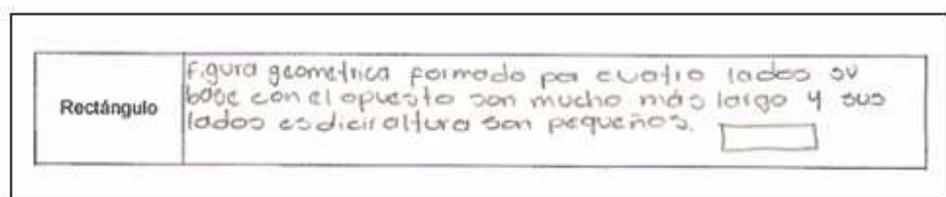
Su respuesta fue: “No, pues tiene sus lados iguales pero no tiene la forma de un rombo”. Además, realizó la clasificación mostrada en la figura 5.

Figura 5. Respuesta de un estudiante de grado 9º de E.B. a un problema alusivo a los cuadriláteros.



A otro estudiante B se le pidió que escribiera una definición de rectángulo. Su respuesta fue (ver Figura 6): “Figura geométrica formada por cuatro lados su base con el opuesto son mucho más largos y sus lados es decir altura son pequeños”. Acompañada a la definición el estudiante dibujo un rectángulo en posición estándar.

Figura 6. Respuesta de un estudiante de grado 9º de E.B. a un problema alusivo a los cuadriláteros.



Por último, a un estudiante C se le planteó la siguiente situación:

¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros son rombos?

1


2


3


4


1) Sí No Por qué: _____

2) Sí No Por qué: _____

3) Sí No Por qué: _____

4) Sí No Por qué: _____

Sus respuestas (ver Figura 7) se basan en descripciones, especialmente referidas a su aspecto físico. Por ejemplo, para el caso de la figura 3, el estudiante argumenta: “Sí, porque sus vértices y ángulos y lados son muy parecidos (hace referencia a la figura 2) sino que el 2 es un poco más estirado”.

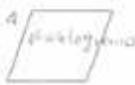
Figura 7. Respuesta de un estudiante de grado 9º de E.B. a un problema alusivo a los cuadriláteros.

¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros son rombos?

1


2


3


4


1) Si No Por qué: tome sus cuatro lados iguales.

2) Si No Por qué: es diferente en forma y no se que es cuadrado y sus lados son de otra manera

3) Si No Por qué: porque sus vertices y angulos y lados son muy parecidos sino que el 2 es un poco muy estirado

4) Si No Por qué: es muy diferente en forma en angulos y vertices y sus lados son diferentes a otros otros

Una teoría que explica la manera de razonar (argumentar) de un estudiante cuando se enfrenta a un problema geométrico, es el modelo de razonamiento propuesto por Van Hiele. Los niveles de razonamiento⁷ propuestos por el modelo son: Nivel 1 (Visualización o de Reconocimiento), Nivel 2 (Análisis), Nivel 3

⁷ Ver detalles en el Maco Teórico.

(Clasificación), Nivel 4 (Deducción formal) y Nivel 5 (Rigor). Dos descriptores o características asociadas al nivel 1, afirman⁸:

- Descripción de las figuras basadas principalmente en su aspecto físico y su posición en el espacio. Los reconocimientos, distinciones o clasificaciones se basan en semejanzas físicas globales.
- Frecuentemente hay descripciones por semejanza con otros objetos, no necesariamente matemáticos: “Se parece a...”, “Tiene forma de...”.

Considerando los argumentos utilizados por los estudiantes para responder a las preguntas planteadas, y analizando los descriptores o características del nivel 1, podemos notar claramente que los estudiantes manifiestan o se encuentran en este nivel de razonamiento.

Tomando en cuenta que el objetivo último de la Investigación en Didáctica de las Matemáticas, es el de mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje y, retomando por otro lado, todas las ideas expuestas anteriormente, el problema de investigación se sintetiza en la siguiente pregunta: ¿Cómo es la clasificación de los cuadriláteros, a partir de las definiciones que se presentan en textos escolares y en cuadernos de trabajo de estudiantes de E.B., y cuáles son las concepciones de ellos con respecto a los cuadriláteros?

1.2. JUSTIFICACIÓN

La geometría, como área fundamental de la matemática, ha sido “incluida” en todos los planes de estudio y en todos los niveles educativos de la educación en Colombia. Sin embargo, desde hace un buen tiempo, el tratamiento que se le venía dando, se asimilaba mucho al de “cenicienta” de las matemáticas. En la mayoría de los casos, su enseñanza se dejaba para el final de los cursos (ver Figura 8), o en muchas ocasiones no se la trataba; estaba incluida en los planes de estudio (y por ende en los textos), pero excluida de las aulas.

⁸ JAIME, A. Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La Enseñanza de las Isometrías del Plano. La evaluación del nivel de razonamiento. Valencia, 1993. p. 6.

Figura 8. Texto de grado 4º de E.B donde los temas de geometría se dejan para el final de cada unidad.

Contenido	
unidad 1	
Para comenzar...	5
unidad 2	
Conjuntos	25
unidad 3	
Representaciones de los números	49
unidad 4	
Adición, orden, sustracción	73
unidad 5	
Multiplicación	97
unidad 6	
División	121
unidad 7	
Introducción a los números fraccionarios	145
unidad 8	
Repaso	169

Nota: Las páginas finales de cada unidad están dedicadas a temas de estadística y a temas de geometría.

Con referencia a esta situación, en los Lineamientos Curriculares para Matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN)⁹ señala:

“El estudio de la geometría intuitiva en los currículos de las matemáticas escolares se había abandonado como una consecuencia de la adopción de la “matemática moderna”. Desde un punto de vista didáctico, científico e histórico, actualmente se considera una necesidad ineludible volver a recuperar el sentido espacial intuitivo en toda la matemática, no sólo en lo que se refiere a la geometría”.

Posteriormente a la Revolución Educativa propuesta por el MEN, la geometría volvió a “resurgir”, y actualmente su tratamiento ya no es tan despectivo debido a que dentro de los Estándares Básicos de Calidad para las matemáticas¹⁰

⁹ MEN. Lineamientos curriculares. Matemáticas. Bogotá, 1998. p. 37.

¹⁰ Los cuales están organizados en cinco tipos de pensamiento matemático: Pensamiento numérico y sistemas numéricos, Pensamiento espacial y sistemas geométricos, Pensamiento métrico y sistemas de medidas, Pensamiento aleatorio y sistemas de datos y Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

(propuestos en la revolución educativa), se considera el desarrollo del pensamiento geométrico como uno de los componentes fundamentales para la formación matemática que debe desarrollar un estudiante. Pero a pesar de esto, los inconvenientes en cuanto al tratamiento de la Geometría en los niveles básicos de educación, todavía persisten. Para el caso específico de este trabajo de investigación, el análisis de la clasificación de los cuadriláteros, a partir de las definiciones que se presentan, en textos escolares y en cuadernos de trabajo de estudiantes y de igual manera las concepciones que los estudiantes se han formado sobre éstos, constituye un punto de referencia muy importante dentro del campo de la didáctica de las matemáticas, porque:

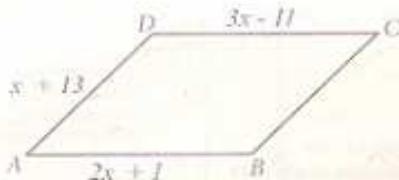
- Rescata mucho más, la importancia de la geometría como parte fundamental de la formación matemática de nuestros estudiantes.
- La vida profesional en la actualidad no solo exige el manejo adecuado del pensamiento numérico (manejo de las cuatro operaciones básicas), por el contrario, es necesario estar formado en los cinco pensamientos matemáticos (entre ellos el geométrico).
- Los Estándares Básicos de Calidad propuestos por el MEN, exigen que los estudiantes durante su vida escolar deben desarrollar el pensamiento espacial y los sistemas geométricos; esto se evidencia en el Examen de Estado (ver Figura 9).

Figura 9. Los cuadriláteros en el Examen de Estado (2006-2).

Cuadriláteros

Un paralelogramo es un cuadrilátero en el cual ambos pares de lados opuestos son paralelos.
Un rombo es un paralelogramo cuyos lados son todos congruentes entre sí.
Un rectángulo es un paralelogramo cuyos ángulos son todos rectos.
Un cuadrado es un rectángulo cuyos lados son congruentes entre sí.

42. En la figura que se muestra, $ABCD$ es un paralelogramo cuyos lados tienen longitudes $AB = 2x + 1$, $DC = 3x - 11$ y $AD = x + 13$.



Es posible concluir que $ABCD$ es

- A. un rombo.
- B. un cuadrado.
- C. un cuadrilátero pero no un rombo.
- D. un rectángulo pero no un cuadrado.

43. Si se afirma que $DEFG$ es un cuadrilátero que tiene 3 ángulos rectos se puede demostrar que $DEFG$ es un

- A. rombo.
- B. trapecio.
- C. cuadrado.
- D. rectángulo.

CONTINÚE EN EL SIGUIENTE PLIEGUE (arriba) ➔

- Invita a reflexionar (sobre todo a los docentes), sobre una mejor preparación en cuanto al manejo de los conceptos que se enseñan en la E.B (caso particular de los cuadriláteros).

- Se convierte en un referente diagnóstico para el diseño de actividades didácticas encaminadas a mejorar la enseñanza de la geometría, en particular para los cuadriláteros.

1.3. ANTECEDENTES

Los antecedentes en cuanto al estudio sobre clasificación de cuadriláteros en textos escolares y sobre las concepciones de los estudiantes sobre éstos, se encuentran en trabajos realizados por investigadores que se han dedicado a la investigación en el campo de la Educación Matemática. En estos trabajos de investigación, se identificaron algunos problemas de tipo didáctico que han influido significativamente en las concepciones de los estudiantes, lo que ha conllevado a un obstáculo epistemológico, impidiendo una construcción adecuada de toda la red conceptual de los cuadriláteros y su clasificación.

Así, en el artículo de Huerta¹¹, se muestra cómo la tradición ha influido en la enseñanza de la geometría elemental. Particularmente para el caso de los cuadriláteros, el artículo señala que su organización presentada en libros de texto de Enseñanza Primaria, los cuadriláteros son presentados de forma exclusiva, sujetos a definiciones (en algunos casos) o ejemplos (en otros casos), que hacen imposible que puedan establecerse relaciones de inclusión: los cuadrados no son una clase especial de rectángulos pues éstos tienen dos lados más largos que los otros dos y el cuadrado los tienen los cuatro iguales.

En Moriena¹², se realiza un estudio experimental con un grupo de alumnos de 8º año de EGB denominado: “Efecto de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría”, en donde a partir de una tarea geométrica referida a los rombos, se estudia la dificultad de los alumnos para identificar una figura geométrica (caso particular del rombo) cuando su representación gráfica difiere (la posición en plano) de la que se presenta comúnmente en los libros de texto.

Asimismo en Moriena¹³, se realiza un estudio teórico denominado: “prototipos y estereotipos en geometría”, en donde se analiza la pertinencia del uso de dos expresiones terminológicas, el ejemplo prototípico y la representación gráfica estereotipada dentro del proceso de aprendizaje de conceptos geométricos. En este estudio la expresión “ejemplo prototípico” es entendida como modelos esquemáticos de imágenes de las figuras, utilizados por los alumnos como puntos de referencia cognitivos, y la expresión “representación gráfica estereotipada” es entendida como el dibujo que habitualmente es utilizado en una explicación o

¹¹ HUERTA, Op. cit., p. 58.

¹² MORIENA, Op. cit., p. 5.

¹³ MORIENA, S. y SCAGLIA, S. Prototipos y estereotipos en Geometría. México D.F.: Ed. Santillana, 2005. p. 105.

definición de un concepto y el cual da lugar a la formación de dicho esquema mental en el alumno.

En Jaime¹⁴, se realiza un estudio denominado: “Definiciones de triángulos y cuadriláteros: Errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B.”, en donde se presentan diversos tipos de errores o contradicciones que aparecen frecuentemente en los libros de texto de E.G.B. en relación con el enunciado de definiciones de las distintas familias de triángulos y cuadriláteros. Uno de los errores mencionados en la investigación, está relacionado con el uso común de figuras en posición estándar, asociadas a cada definición de cuadrilátero. En el estudio se afirma que según las teorías de Van Hiele y Vinner, un estudiante empieza a construir su imagen mental de un concepto de una manera global, a partir de ejemplos concretos, sin realizar un análisis matemático de los elementos o propiedades del concepto, sino usando destrezas básicamente visuales.

Las investigaciones antes mencionadas (entre otras), proporcionan una primera aproximación al objeto de estudio, en donde pretendemos conocer de una manera aproximada cómo son las clasificaciones de los cuadriláteros en textos y cuadernos, a partir de las definiciones (incluyendo las figuras asociadas a cada definición) dadas. De igual manera, proporcionan un primer acercamiento sobre las concepciones manejadas por los estudiantes de grado 9º al momento de enfrentarse (resolver) a un problema geométrico que involucran a los cuadriláteros.

1.4. OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Estudiar la clasificación de los cuadriláteros en textos escolares, en cuadernos de trabajo de estudiantes de E.B., y las concepciones sobre los mismos, en estudiantes de grado 9º de E.B., a la luz del modelo de razonamiento de Van Hiele y la teoría sobre formación de conceptos de Vinner.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Analizar y describir la clasificación de los cuadriláteros en algunos textos escolares y en cuadernos de trabajo de algunos estudiantes de E.B.

2. analizar y describir las concepciones sobre cuadriláteros (caso particular de los paralelogramos, excepto el romboide) en estudiantes de grado 9º de E.B, a la luz del modelo de razonamiento de Van hiele y la teoría sobre formación de conceptos de Vinner.

¹⁴ JAIME, CHAPA, Op. Cit., pp. 53-54.

3. Identificar el nivel de razonamiento de Van Hiele en los estudiantes de grado 9º de E.B.

2. MARCO TEÓRICO

La presente investigación, toma como bases teóricas los trabajos realizados por Van Hiele con su modelo de razonamiento y S. Vinner con su Teoría sobre formación o construcción de conceptos matemáticos.

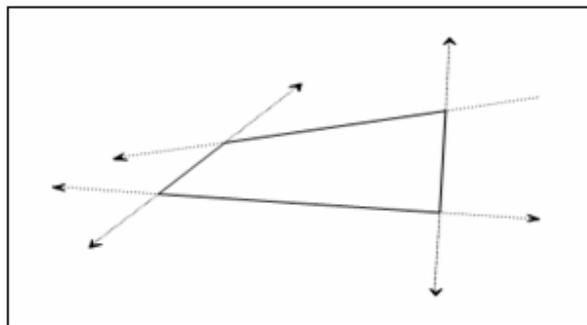
Es de suma importancia tener en cuenta que en el proceso de construcción del pensamiento geométrico, los contenidos presentados a los estudiantes, además de cumplir con las características metodológicas y didácticas para su correcta comprensión, la organización de conceptos, definiciones y propiedades deben de ser correctas de manera que no presenten ambigüedades y contradicciones que conlleven a entorpecer el proceso de aprendizaje del estudiante. Por este motivo al comienzo de este capítulo presentamos una adecuada organización y clasificación de los cuadriláteros, teniendo en cuenta por una parte, las diferentes clasificaciones actuales sobre los mismos, presentes en textos, artículos de revista e investigaciones. Seguidamente, hacemos una recopilación de las principales características del modelo de razonamiento de Van Hiele, especialmente enfocados en el aspecto descriptivo (niveles de razonamiento) más que en su aspecto instructivo (fases de aprendizaje), por los objetivos de nuestra investigación en cuanto a las concepciones de los estudiantes sobre los cuadriláteros. Finalizamos el capítulo con la descripción de la teoría sobre formación de conceptos de S. Vinner.

2.1. LOS CUADRILÁTEROS

Un cuadrilátero es una figura geométrica plana formada por cuatro lados que se cortan dos a dos, que pueden clasificarse en convexos o cóncavos, según las siguientes propiedades:

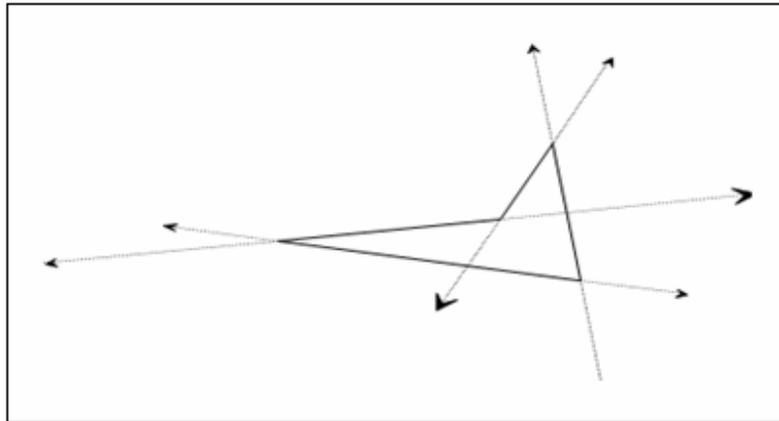
- Cuadrilátero convexo: un cuadrilátero es convexo, si al prolongar cada uno de sus lados, ninguna prolongación corta a otro lado del cuadrilátero (ver Figura 10).

Figura 10. Cuadrilátero convexo.



- Cuadrilátero cóncavo: un cuadrilátero es cóncavo, si tiene un lado que al prolongarlo, éste corta a otro lado del cuadrilátero (ver Figura 11).

Figura 11. Cuadrilátero cóncavo.



Tomando los cuadriláteros convexos se establece la siguiente clasificación, de acuerdo al paralelismo de sus lados, denominada las grandes familias de cuadriláteros o clases de cuadriláteros, conformada por:

- Paralelogramos
- Trapecios
- Trapezoides

Antes de empezar a profundizar en la clasificación de los cuadriláteros, es importante mencionar las partes o elementos que los conforman (ver Figura 12, pág. siguiente). Estos elementos a su vez, determinan ciertas características (ver Figura 13).

Figura 12. Elementos básicos de los cuadriláteros.

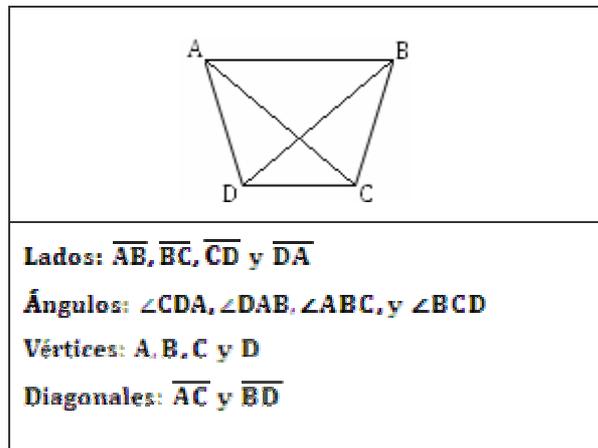


Figura 13. Características determinadas por los elementos del cuadrilátero.

<p>A los lados \overline{MP} y \overline{NO} los llamamos lados opuestos dado que no tienen un vértice en común.</p>	<p>Los lados \overline{RS} y \overline{RU} son lados adyacentes contiguos o consecutivos porque tienen un vértice en común (R).</p>	<p>Los ángulos $\angle DAB$ y $\angle BCD$ son ángulos opuestos dado que no tienen un lado en común.</p>	<p>A los ángulos $\angle HEF$ y $\angle EFG$ los denominamos ángulos adyacentes contiguos, colaterales o consecutivos, pues tienen un lado en común (EF).</p>

2.1.1. Clasificación de los cuadriláteros. La clasificación de los cuadriláteros se establece mediante las propiedades relevantes que los caracterizan y definen como tal, las cuales se construyen a partir de los elementos que los conforman: lados, ángulos y diagonales (ver Cuadro 1, pág. siguiente).

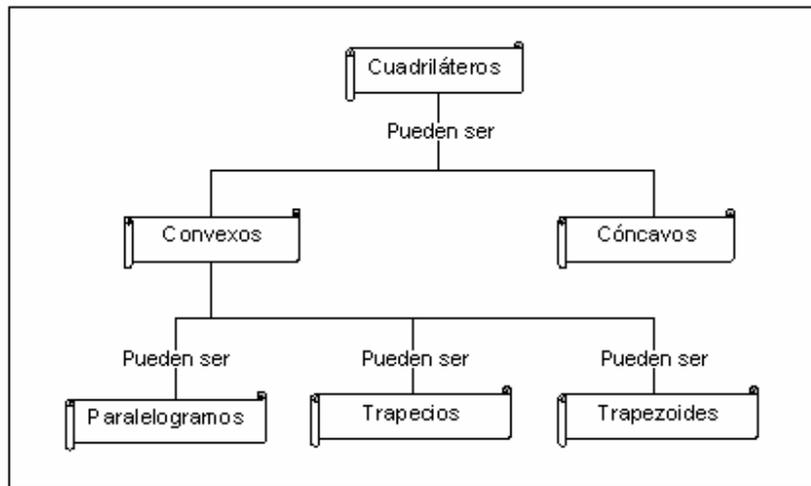
Cuadro 1. Definiciones para las familias o clases de cuadriláteros.

CLASE	DEFINICIÓN 1 (SEGÚN SUS LADOS)	DEFINICIÓN 2 (SEGÚN SUS ÁNGULOS)	DEFINICIÓN 3 (SEGÚN SUS DIAGONALES)
Paralelogramo	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Cuadrilátero en el cual ambos pares de lados opuestos son paralelos. ▪ Cuadrilátero con los lados paralelos dos a dos. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Cuadrilátero en el cual los ángulos opuestos son congruentes. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Cuadrilátero cuya diagonal determina dos triángulos congruentes. ▪ Cuadrilátero cuyas diagonales se bisecan en su punto medio.
Trapezio	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Cuadrilátero con solo un par de lados no consecutivos (opuestos) paralelos. ▪ Cuadrilátero con solo dos lados paralelos entre si. 	<p>Los ángulos no constituyen un atributo o propiedad relevante para su definición.</p>	<p>Las diagonales no constituyen un atributo o propiedad relevante para su definición.</p>
Trapezoide	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Cuadrilátero con ningún par de lados paralelos. ▪ Cuadrilátero que no es paralelogramo ni trapecio. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Cuadrilátero que puede tener a lo sumo dos ángulos opuestos congruentes. 	<p>Las diagonales no constituyen un atributo o propiedad relevante para su definición.</p>

Una de las etapas importantes en el proceso del desarrollo del pensamiento geométrico sobre un concepto en particular, es el de establecer relaciones entre las propiedades de una figura y la realización de clasificaciones inclusivas. Teniendo en cuenta las anteriores definiciones, podemos presentar una primera organización de las clases de cuadriláteros (ver Figura 14). Las relaciones de inclusión se establecen, siguiendo el esquema de organización propuesto por Pedro Huerta; donde el nexa “puede ser” significa que el nivel inferior esta contenido en el nivel superior, como por ejemplo “un cuadrilátero puede ser

convexo”, e implícitamente también se utiliza el nexa “es”, estableciendo relaciones como “un trapezoide es cuadrilátero convexo”.

Figura 14. Primera clasificación de cuadriláteros.



Cada familia de cuadriláteros convexos, se divide en subclases (ver Cuadro 2), las cuales toman propiedades particulares (ver Cuadro 3).

Cuadro 2. Clases y subclases de cuadriláteros.

	CLASES		
	Paralelogramos	Trapecios	Trapezoides
SUBCLASES	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Rectángulo ▪ Rombo ▪ Cuadrado ▪ Romboide 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Trapecio rectangular ▪ Trapecio isósceles ▪ Trapecio escaleno 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Cometa ▪ No cometa

En el cuadro 3 (pág. siguiente), se presentan las definiciones para las distintas subclases de cuadriláteros, a partir de atributos o propiedades relevantes, que son determinadas por sus lados, ángulos y diagonales.

Cuadro 3. Definiciones para las diferentes subclases de cuadriláteros.

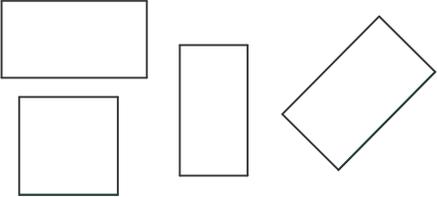
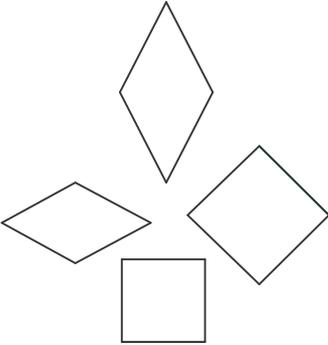
SUBCLASES	DEFINICIÓN 1 (SEGÚN SUS LADOS)	DEFINICIÓN 2 (SEGÚN SUS ÁNGULOS)	DEFINICIÓN 3 (SEGÚN SUS DIAGONALES)
Rectángulo	Los lados no constituyen un atributo o propiedad relevante para su definición.	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Paralelogramo con un ángulo recto, es decir sus cuatro ángulos congruentes. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Paralelogramo cuyas diagonales son congruentes.
Rombo	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Paralelogramo con dos lados consecutivos de igual longitud. 	Los ángulos no constituyen un atributo o propiedad relevante para su definición.	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Paralelogramo con las diagonales perpendiculares entre si. ▪ Paralelogramo cuyas diagonales son bisectrices de los ángulos interiores. ▪ Paralelogramo cuyas diagonales determinan dos triángulos isósceles congruentes. ▪ Paralelogramo cuyas diagonales al cortarse determinan cuatro triángulos rectángulos

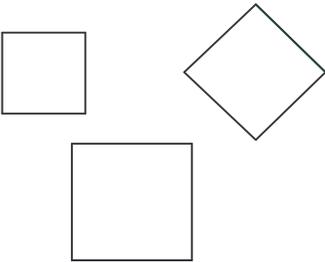
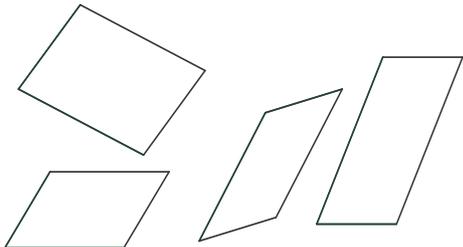
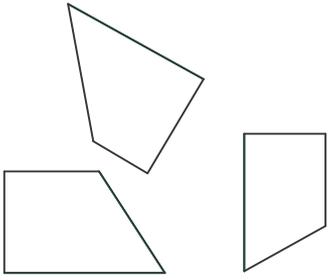
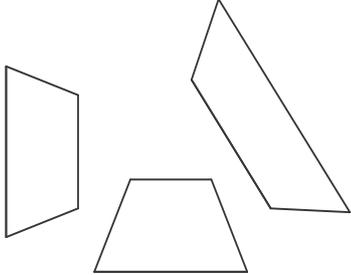
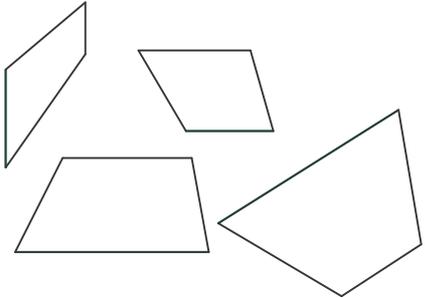
			congruentes.
Cuadrado	<ul style="list-style-type: none"> Paralelogramo con sus cuatro lados iguales, "caso particular de rombo" y con sus cuatro ángulos iguales (rectos), "caso particular de rectángulo". 		<ul style="list-style-type: none"> Paralelogramo con las diagonales congruentes y perpendiculares entre si.
Romboide	<ul style="list-style-type: none"> Paralelogramo con dos lados y dos ángulos consecutivos no congruentes (no es rectángulo ni cuadrado). 		<ul style="list-style-type: none"> Paralelogramo cuyas diagonales no son congruentes, ni perpendiculares entre si.
Trapezio rectangular	<ul style="list-style-type: none"> Trapezio con un lado perpendicular a las bases. 	<ul style="list-style-type: none"> Trapezio con un ángulo recto. 	Las diagonales no constituyen un atributo o propiedad relevante para su definición.
Trapezio isósceles	<ul style="list-style-type: none"> Trapezio que tiene los dos lados no paralelos congruentes. 	<ul style="list-style-type: none"> Trapezio con los ángulos interiores situados en los extremos de cada uno de los lados paralelos iguales entre si. 	<ul style="list-style-type: none"> Trapezio con las diagonales congruentes.
Trapezio escaleno	<ul style="list-style-type: none"> Trapezio con ningún par de lados congruente. 	Los ángulos no constituyen un atributo o propiedad relevante para su definición.	Las diagonales no constituyen un atributo o propiedad relevante para su definición.
Cometa	<ul style="list-style-type: none"> Trapezoide con dos pares de lados consecutivos de igual medida, pero el primer par de lados consecutivos de igual 	<ul style="list-style-type: none"> Trapezoide con un solo par de ángulos (opuestos) iguales. 	<ul style="list-style-type: none"> Trapezoide cuyas diagonales no son congruentes

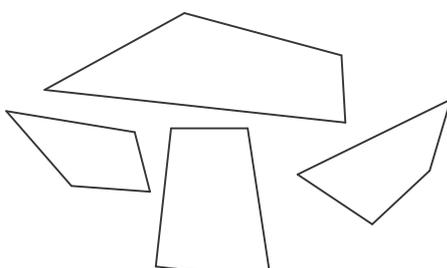
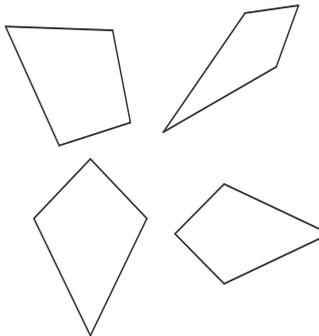
	medida es diferente al segundo par.		y perpendiculares entre si. <ul style="list-style-type: none"> ▪ Trapezoide con la diagonal de mayor longitud, bisectriz de los ángulos opuestos no congruentes.
No cometa	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Trapezoide con ningún par de lados congruentes. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Trapezoide con ningún par de ángulos congruentes. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Trapezoide con diagonales no perpendiculares.

2.1.2. Presentación visual de los cuadriláteros. Presentar una correcta definición de conceptos geométricos y una variedad de ejemplos y contraejemplos, es de suma importancia en el proceso de aprendizaje, pues esto puede evitar conflictos en las concepciones de los estudiantes, es por eso que se han construido distintas representaciones visuales para cada clase y subclase de cuadriláteros (ver Cuadro 4).

Cuadro 4. Representaciones visuales de los cuadriláteros.

CLASES O FAMILIAS	SUBCLASES	PRESENTACIÓN VISUAL
Paralelogramos	Rectángulos	
	Rombos	

	Cuadrados	
	Romboides	
Trapecios	Trapecios rectangulares	
	Trapecios isósceles	
	Trapecios escalenos	

Trapezoides	No cometas	
	Cometas	

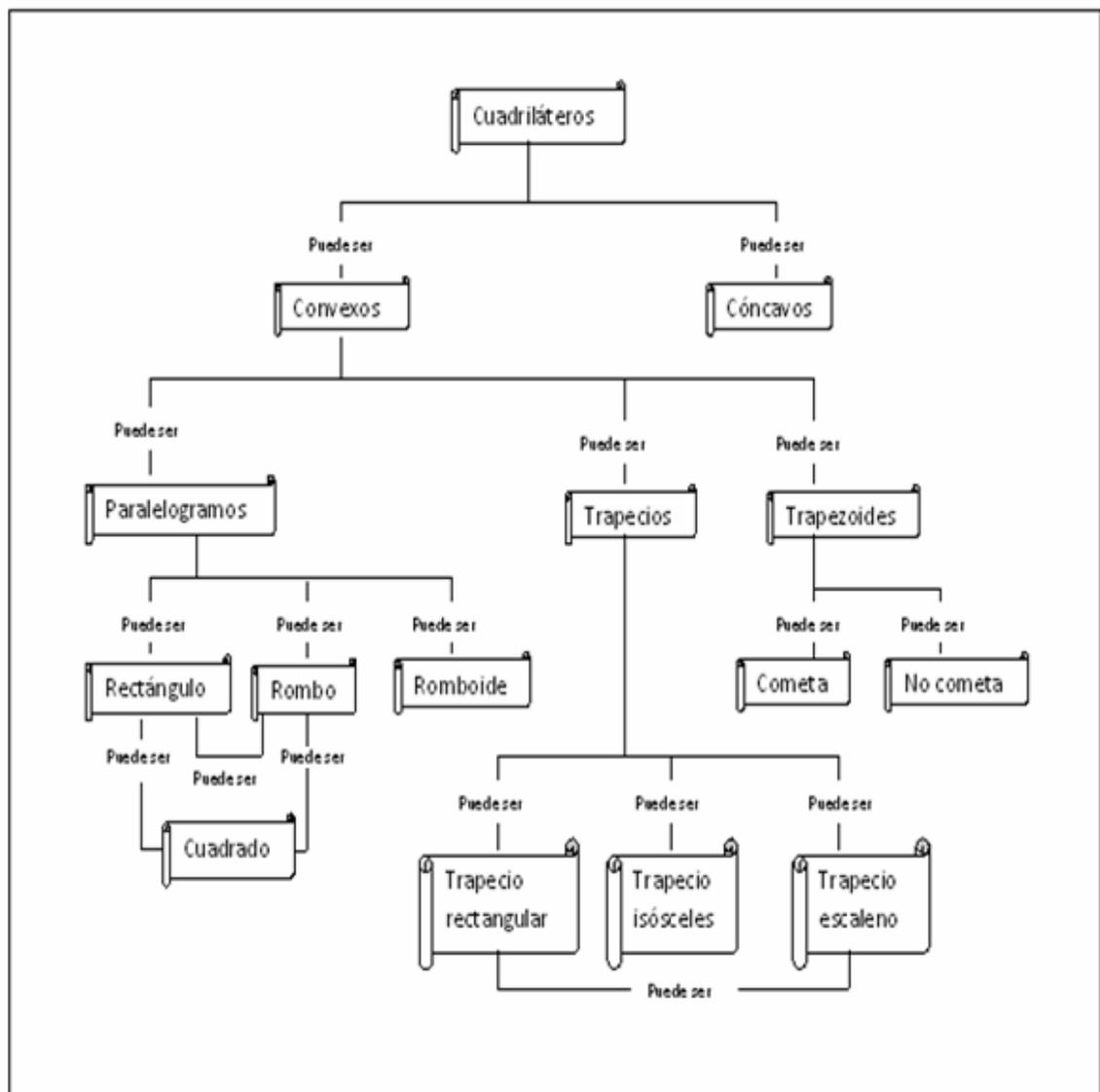
2.1.3. Relación y organización de los cuadriláteros. Al “enfrentar” los diferentes conceptos de cuadriláteros, se pueden establecer relaciones de inclusión mediante los nexos “puede ser” y “es” (inclusión total) entre las subclases de paralelogramos (rectángulo, rombo y cuadrado), así:

- Cuadrado es rectángulo: un cuadrado tiene un ángulo recto, propiedad relevante del rectángulo, luego el cuadrado es un caso particular de rectángulo.
- Cuadrado es rombo: un cuadrado tiene la propiedad de tener sus cuatro lados iguales, propiedad relevante del rombo, luego el cuadrado es un caso particular de rombo cuando este tiene sus ángulos iguales.
- Rectángulo puede ser rombo: según lo anterior el rectángulo puede ser cuadrado, pero el cuadrado es rombo, luego el rectángulo puede ser rombo.
- Rombo puede ser rectángulo: igualmente, un rombo puede ser cuadrado, pero el cuadrado es rectángulo, luego el rombo puede ser rectángulo.

Por otra parte también es posible establecer relación entre el trapecio rectángulo y el trapecio escaleno; un trapecio rectangular puede tener sus cuatro lados de diferente longitud, es decir puede ser trapecio escaleno y un trapecio escaleno puede tener dos ángulos rectos, es decir puede ser trapecio rectangular. Para los trapezoides, las definiciones conllevan a la exclusividad entre cometa y no cometa.

De esta manera, con el conjunto de conceptos relativos a los cuadriláteros convexos presentados en los cuadros 2.1 y 2.3, y las relaciones mediante la inclusión de los nexos apropiados entre las clases y subclases de cuadriláteros, es posible construir el siguiente esquema general de organización y clasificación de los cuadriláteros (ver Figura 15).

Figura 15. Esquema general de organización y clasificación de los cuadriláteros.



2.2. EL MODELO DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE

En 1975 los holandeses, Pierre Van Hiele junto a su esposa Dina Van Hiele, en su afán de encontrar un camino para favorecer el proceso de aprendizaje de las matemáticas (particularmente al de la geometría), debido al bajo rendimiento de sus estudiantes y al rechazo que muchos presentaban hacia la materia por su alto grado de exigencia mental, presentaron en sus tesis doctorales, un modelo de enseñanza y aprendizaje de la geometría, que explora el nivel de razonamiento y la comprensión que adquieren los estudiantes, cuando son expuestos a diferentes formas de enseñanza de un concepto geométrico en particular. Estos investigadores plantearon unas directrices que crean situaciones que favorecen el aprendizaje de los estudiantes. Es así que el modelo esta conformado por dos aspectos importantes que son: su proceso descriptivo e instructivo; el primero basado en los “niveles de razonamiento” a través de los cuales progresa la capacidad de razonamiento matemático de los estudiantes desde el inicio del proceso de aprendizaje de un concepto matemático, hasta llegar a un alto grado de desarrollo intelectual; y el segundo dirigido a los profesores, en la manera de abordar las clases, con actividades y problemas particulares que favorezcan en los estudiantes la adquisición de un nivel superior de razonamiento, mediante las “fases de aprendizaje”, las cuales son cinco:

- Fase 1: información
- Fase 2: orientación dirigida
- Fase 3: explicitación
- Fase 4: orientación libre
- Fase 5: integración

Las cinco fases son etapas que seleccionan y organizan todas las actividades que debe de realizar un estudiante, de tal manera que adquieran paulatinamente de manera comprensiva los conocimientos básicos necesarios para que después sean capaces de utilizarlos, combinarlos y comunicarlos, llevando así a adquirir un nivel superior. Por lo tanto, una vez completado el trabajo de la última fase de un nivel, se inicia el trabajo de la primera fase del siguiente nivel, siguiendo entonces una continuidad cíclica¹⁵ de las fases en cada nivel.

2.2.1. Los niveles de razonamiento. Cuando un estudiante se encuentra en proceso de aprendizaje de cierto contenido geométrico, pasa por distintos niveles que conllevan a una comprensión y utilización de los conceptos geométricos de una manera distinta, mientras el contenido se le presenta gradualmente. Van Hiele ubica a los estudiantes en los siguientes niveles de razonamiento de acuerdo a la actividad matemática de estos:

Nivel 1 (Reconocimiento o Visualización)

¹⁵ JAIME, A. y GUTIÉRREZ, A. Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El modelo de Van Hiele. Madrid, 1990. p. 339.

- Los estudiantes perciben las figuras geométricas en su totalidad, de manera global, como unidades, pudiendo incluir atributos irrelevantes en las descripciones que hacen.
- Además perciben las figuras como objetos individuales, es decir que no son capaces de generalizar las características que reconocen en una figura a otras de su misma clase.
- Los estudiantes se limitan a describir el aspecto físico de las figuras; los reconocimientos, diferenciaciones o clasificaciones de figuras que realizan se basan en semejanzas o diferencias físicas globales entre ellas.
- En muchas ocasiones las descripciones de las figuras están basadas en su semejanza con otros objetos (no necesariamente geométricos) que conocen; suelen usar frases como “se parece a”... “tiene forma de”..., etc.
- Los estudiantes no suelen reconocer explícitamente las partes que componen las figuras ni sus propiedades matemáticas.

Nivel 2 (Análisis)

- Los estudiantes se dan cuenta de que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y que están dotadas de propiedades matemáticas; pueden describir las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades, siempre de manera informal.
- Además reconocen las propiedades matemáticas mediante la observación de las figuras y los elementos, los estudiantes pueden deducir otras propiedades generalizándolas a partir de la experimentación.
- Sin embargo, no son capaces de relacionar unas propiedades con otras, por lo que no pueden hacer clasificaciones lógicas de figuras basándose en sus elementos o propiedades.

Nivel 3 (Clasificación)

- En este nivel comienza la capacidad de razonamiento formal (matemático) de los estudiantes: son capaces en este nivel de reconocer que unas propiedades se deducen de otras y de descubrir esas implicaciones; en particular, puede clasificar lógicamente las diferentes familias de figuras a partir de sus propiedades o relaciones ya conocidas. No obstante, sus razonamientos lógicos se siguen apoyando en la manipulación.

- Los estudiantes pueden describir una figura de manera formal, es decir Puede dar definiciones matemáticamente correctas, comprenden el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta.
- Si bien los estudiantes comprenden los sucesivos pasos individuales de un razonamiento lógico formal, los ven de forma aislada, ya que no comprenden la necesidad del encadenamiento de estos pasos ni entienden la estructura de una demostración; pueden entender una demostración explicada por el profesor o desarrollar alguna del libro de texto, pero no son capaces de construirla por sí mismos.
- Al no ser capaces de realizar razonamientos lógicos formales ni sentir su necesidad, los estudiantes no comprenden la estructura axiomática de las matemáticas.

Nivel 4 (Deducción formal)

- Alcanzado este nivel, los estudiantes pueden entender y realizar razonamientos lógicos formales; las demostraciones (varios pasos) ya tienen sentido para ellos y sienten su necesidad como único medio para verificar la verdad de una afirmación.
- Los estudiantes pueden comprender la estructura axiomática de las matemáticas, es decir, el sentido y la utilidad de términos no definidos, axiomas y teoremas.
- Los estudiantes aceptan la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas (es decir, la existencia de demostraciones alternativas del mismo teorema) y la existencia de definiciones equivalentes del mismo concepto.
- Los estudiantes del nivel 4 podrán hacer demostraciones formales de las propiedades que ya habían realizado informalmente con anterioridad, así como descubrir y demostrar nuevas propiedades más complejas.

2.2.2. Principales características de los niveles de razonamiento. Cada nivel posee características particulares que surgen a partir de la actividad de los estudiantes, pero para poder comprender y analizar mejor el razonamiento y comprensión de los estudiantes son importantes las siguientes características:

- Jerarquización y secuencialidad de los niveles.

Alcanzar un nivel superior de razonamiento, no es posible sin antes haber alcanzado el anterior a éste, es decir alcanzar el segundo nivel no es posible sin haber alcanzado la capacidad de razonamiento del primer nivel. Este proceso genera habilidades que se empiezan a adquirir en el paso de un nivel a otro, pero

las cuales serán implícitas en uno y explícitas en otro, como se evidencia en el Cuadro 5.

Cuadro 5. Elementos explícitos e implícitos en los niveles.

	ELEMENTOS EXPLÍCITOS	ELEMENTOS IMPLÍCITOS
NIVEL 1	Figuras	Partes y propiedades de las figuras
NIVEL 2	Partes y propiedades de las figuras	Implicaciones entre propiedades
NIVEL 3	Implicaciones entre propiedades	Deducción formal de teoremas
NIVEL 4	Deducción formal de teoremas	

Fuente: Jaime, A. y Gutiérrez, A. Propuesta de Fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El modelo de Van Hiele. 1990. p. 312.

- Hay una estrecha relación entre el lenguaje y los niveles.

Las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a los cuatro niveles de Van Hiele, no solo se reflejan en la forma de resolver los problemas propuestos, si no en el significado que se le da a determinado vocabulario. Por ejemplo, para un estudiante que razone en el nivel 1, la palabra demostrar, carece por completo de significado, en el nivel 2, significa comprobar que la afirmación es cierta en unos pocos casos, incluso en uno solo, en el nivel 3 demostrar tiene un significado próximo al que le dan los matemáticos y en el nivel 4 la palabra demostrar ya tiene el significado usual entre los matemáticos.

- Continuidad de los niveles.

Aunque existen teorías que no comparten la continuidad, se considera que el paso de un nivel al siguiente, se produce de manera gradual y que el razonamiento del estudiante en cierto momento puede alternar entre dos niveles consecutivos, es decir se encuentra en un periodo de transición entre un nivel inferior y el nivel inmediatamente superior, donde dependiendo de la dificultad de solución de algún

problema, este usará el nivel con el que se sienta mas seguro, que por lo general es el inferior.

2.3. LA TEORÍA SOBRE FORMACIÓN DE CONCEPTOS DE VINNER

Los conceptos matemáticos, y de manera particular los geométricos, son presentados con definiciones cuyo objetivo en el aula es la apropiación de estos por parte de los estudiantes y su correcta aplicación en situaciones – problema. En este proceso de aprendizaje juega un papel importante los componentes psicológicos de los estudiantes. Es entonces, que a la hora de estudiar la formación de conceptos, un grupo de investigadores israelitas, a la cabeza de Vinner, proponen la distinción entre definición conceptual (concept – definition) e imagen conceptual (concept – image), donde la definición conceptual, es la definición matemática formal del concepto y, la imagen conceptual es el conjunto de imágenes mentales presentes en un estudiante, que pueden ser representaciones visuales o una serie de impresiones y experiencias. Según Vinner cuando a un estudiante se le presenta una cierta definición y se le pide que la aplique, ya sea para identificar un ejemplo del concepto o para solucionar algún tipo de problema, en la mayoría de los casos el estudiante toma decisiones basándose en la imagen que tenga en su mente acerca del concepto que se trate, esta situación lleva a que algunos estudiantes tengan dificultades, pues puede suceder que el problema u ejemplo propuesto por el profesor no tenga relación, con lo que él, a construido en su mente acerca del concepto geométrico que se este trabajando. Por eso la teoría de Vinner afirma que “adquirir un concepto significa, entre otras cosas adquirir un mecanismo de construcción e identificación mediante el cual será posible identificar o construir todos los ejemplos del concepto tal como este esta concebido por la comunidad matemática”¹⁶.

En todo ejemplo concreto de un concepto, podemos encontrar atributos relevantes, que son las propiedades que definen al concepto como tal (propiedades necesarias), y atributos irrelevantes, que son propiedades no necesarias a ese concepto y que permite hacer clasificaciones entre los ejemplos. Usualmente una definición verbal esta formada por un subconjunto suficiente de atributos relevantes del concepto. Por tanto, la definición se puede considerar como un criterio para clasificar ejemplos como pertenecientes o no a un concepto.

En el aula de clase, cuando un profesor trabaja un concepto geométrico en particular, todavía es común, que este se presente con su definición matemática formal, acompañada de ejemplos que en la mayoría de los casos son escasos y prototípicos¹⁷, que hacen que sean los que se aprendan antes o los que se

¹⁶ JAIME, CHAPA, Op. cit., p. 52.

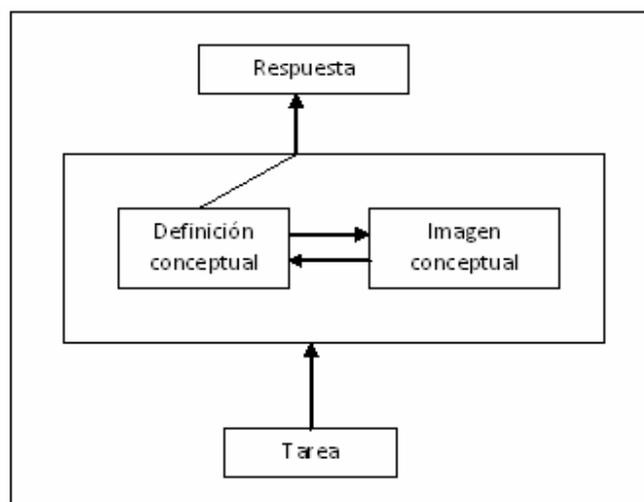
¹⁷ Figuras prototípicas son aquellas que corresponden a una organización regular del contorno, orientación y forma; figuras prototipo tienden a respetar leyes de cerramiento (los límites cerrados son percibidos preferencialmente, privilegiando algunas direcciones (tales como horizontal y

adoptan en la mente del estudiante como ejemplos únicos del concepto. Los estudiantes con imágenes conceptuales pobres, únicamente identifican los ejemplos que se asemejan a algunos de sus prototipos, ocasionando problemas a la hora de aplicar lo aprendido en un contexto diferente.

Vinner, en el proceso de conocimiento acerca del concepto de un objeto matemático, trata la existencia de dos “células” diferentes: en la primera se almacenan las definiciones del concepto, y en la otra las imágenes del concepto. De acuerdo al uso que de esas células haga el estudiante y las relaciones que establezca entre ellas, será el tipo de respuestas que el estudiante proporcione a una tarea dada, que ubicándonos en el contexto de la geometría escolar, esta tarea puede ser la resolución de un problema o la realización de una prueba.

De acuerdo a Vinner, un estudiante llega a comprender una definición y es capaz de aplicarla, si en la realización de una tarea, el estudiante activa las dos células interactuando entre ellas, como se muestra en el siguiente modelo de actividad mental planteado por Vinner (ver Figura 16).

Figura 16. Interacción entre la definición y la imagen conceptual.



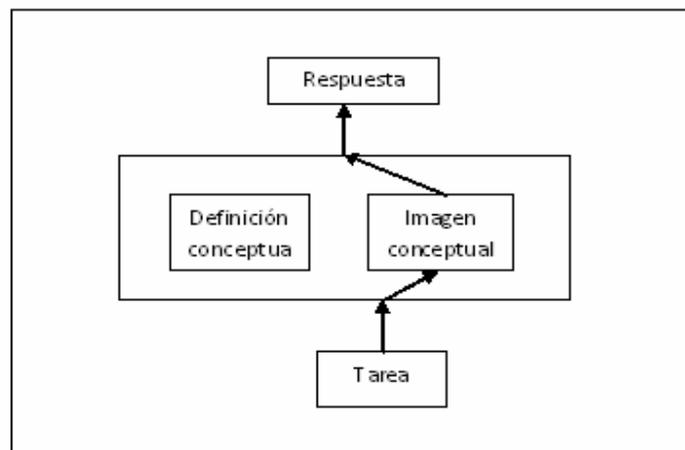
Fuente: TURÉGANO, P. Una interpretación de la formación de conceptos y su aplicación en el aula. Albacete, 2006. p.41.

Llegar a este punto de interacción, es considerado un avance en el pensamiento del estudiante, pues, para él no solo basta con analizar si la tarea tiene relación con la imagen que a formado en su mente acerca del concepto, si no que

vertical) y las formas (que tienden a ser regulares, simples y simétricas). SOSA, C. Un estudio sobre el problema de la enseñanza-aprendizaje de la definición geométrica en el nivel medio superior. El efecto de los ejemplos prototipo. México D.F., 2006. p. 2.

también se apoya, y analiza la definición para solucionar la tarea propuesta. El proceso anterior es el ideal para cualquier profesor en sus clases. Pero lo más común es que el estudiante a la hora de solucionar un problema evoque solo la imagen conceptual que particularmente a adoptado su mente, y no sienta la necesidad de recurrir a la definición conceptual, pues como menciona Turégano¹⁸ (2006), en su investigación sobre la interpretación de la formación de conceptos, afirma que el estudiante no es consciente de la necesidad de consultar la definición formal pues está convencido de que ya adoptado la definición, con la imagen que el tiene en su mente y eso es relevante a la hora de abordar un problema o catalogar un ejemplo. Vinner, ilustra el proceso anterior con el siguiente modelo denominado “respuesta intuitiva” (ver Figura 17).

Figura 17. Respuesta intuitiva.



Fuente: Turégano, P. Una interpretación de la formación de conceptos y su aplicación en el aula. Albacete, 2006. p.43.

Desde este punto de vista, y en concordancia con lo que proponen varios investigadores, interesados en la problemática acerca de las dificultades cognitivas que enfrentan los estudiantes en el aprendizaje de un concepto geométrico, es adecuado comenzar presentando variedad de ejemplos y contraejemplos mediante los cuales los estudiantes se forman una imagen del concepto, para que luego, de manera individual, cada estudiante sugiera su propia definición, esto genera una apropiación correcta del concepto lo cual evita confusiones a la hora de aplicarla.

¹⁸ TURÉGANO, P. Una interpretación de la formación de conceptos y su aplicación en el aula. Albacete, 2006. p.41.

3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se mencionan y describen los aspectos metodológicos tomados en cuenta para el desarrollo de la investigación. Primero se justifica la elección del método cualitativo como enfoque de solución al problema de investigación planteado, seguidamente se hace la caracterización de los sujetos de estudio; de igual manera se describe los aspectos y/o criterios en los que se basa la selección de la muestra, y por último se exponen los instrumentos utilizados para la recolección de información, así como el esquema general de desarrollo de la investigación.

3.1. ENFOQUE INVESTIGATIVO

El trabajo de investigación se enmarca dentro del enfoque cualitativo, puesto que, a través de la observación, los cuestionarios abiertos, la interacción y la interpretación de los registros de trabajo, se reconstruyó el proceso seguido por los estudiantes cuando modelan la solución de los problemas geométricos que involucran los cuadriláteros. Busca interpretar los sentidos (que se hacen más desde las concepciones de los cuadriláteros antes que desde lo social-cultural) y significados de las actuaciones de los estudiantes del grado 9º de E.B., al momento de solucionar problemas geométricos quienes se expresan a través de un lenguaje escrito y explicaciones verbales.

Al hacer una interpretación de las concepciones sobre los cuadriláteros en un pequeño número de casos, no tiene un carácter de pretensión de universalidad y generalización inmediata.

Por ser cualitativa, se fundamenta en los enfoques estructural, sistémico, gestáltico y humanista, propios de la epistemología postpositivista. Todo esto, para una adecuada comprensión de la realidad educativa: concepciones sobre los cuadriláteros por parte de los estudiantes del grado 9º de E.B., realidad que es típicamente humana.

Adopta inicialmente una actitud exploratoria y de apertura mental para comprender los procedimientos que siguen los estudiantes en la solución de problemas geométricos, realidades que existen y se presentan en sí mismas sin contaminación de variables preconcebidas. Se captó las concepciones con el significado que tienen para los estudiantes en ese contexto y describió los resultados con detalle a fin de que se pueda captar la vivencia de esa realidad.

De igual manera, la actividad de la mente humana es participante activo y formativo de lo que ella conoce. La orientación postpositivista rescata la

importancia del sujeto como creador donde la mente construye la percepción informando o moldeando al objeto proporcionado por los sentidos e inyectándole sus propias leyes. Esta percepción y significados dependen de nuestra formación, expectativas teóricas, actitudes, creencias, necesidades, intereses e ideales. Como dijera Miguel Martínez: “Todo conocimiento es conocimiento personal”¹⁹.

3.2. POBLACIÓN Y MUESTRA

Según los Estándares Básicos de Matemáticas, el estudio de los cuadriláteros y sus propiedades geométricas, se recomiendan trabajar en los niveles de E.B. Así por ejemplo, los estándares que hacen referencia implícita al estudio de los cuadriláteros, señalan²⁰:

GRADOS PRIMERO A TERCERO PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

1. Diferenciar atributos y propiedades de objetos tridimensionales.
2. Dibujar y describir figuras tridimensionales en distintas posiciones y tamaños.

GRADOS CUARTO A QUINTO PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

1. Comparar y clasificar objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades.
2. Compara y clasificar figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características.

GRADOS SEXTO A SÉPTIMO PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

3. Clasificar polígonos en relación con sus propiedades.

GRADOS OCTAVO A NOVENO PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

1. Hacer conjeturas y verificar propiedades de congruencia y semejanza entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.

¹⁹ MARTÍNEZ, M. La Investigación Cualitativa Etnográfica en Educación. Bogotá: Ed. Circulo de lectura alternativa, 1996. p. 20.

²⁰ MEN. Estándares Básicos de Matemáticas y Lenguaje. Bogotá, 2003. pp. 14-21.

De esta manera el estudio de los cuadriláteros y sus propiedades se dan por “entendidos” hasta el grado 9º (último nivel de la E.B.). Este es el motivo por el que se decidió realizar un estudio sobre las concepciones de los cuadriláteros en estudiantes que se encuentran en este grado de escolaridad.

Una vez comentado el propósito de nuestra investigación a los directivos y profesores de la IEM INEM de la ciudad de Pasto, ellos nos ofrecieron toda su colaboración. De los 9 grupos de grado noveno existentes en la Institución, se decidió seleccionar el grado nueve uno (9-1). Este grupo se encuentra conformado por 39 estudiantes, de los cuales 22 son mujeres y 17 son hombres. El rango de edad se encuentra entre los 13 y 15 años de edad. Ocho de las 22 mujeres tienen un bajo rendimiento académico (A), 8 tienen rendimiento académico medio (S) y 6 tienen un rendimiento académico alto (E). Del grupo de hombres, 7 tienen un alto rendimiento académico (E), 6 tienen rendimiento académico medio (S) y 4 tienen un bajo rendimiento académico (A). La mortalidad académica corresponde a un 7,7% (dos hombres y una mujer han repetido año escolar). En el cuadro 6 se resume la información sobre los estudiantes que hacen parte de este grupo.

Cuadro 6. Características de los estudiantes del grupo 9-1.

ESTUDIANTES DEL GRUPO	CANTIDAD	PORCENTAJE	RANGO DE EDAD
Mujeres	22	56%	13-15
Hombres	17	46%	13-15
Total	39	100%	

La tarea de seleccionar la muestra se realizó con la colaboración del profesor de Matemáticas que tienen a cargo este grupo. El proceso de selección se basó en los siguientes aspectos:

- La disposición de los estudiantes por pertenecer a la muestra.
- Que la muestra contenga estudiantes de ambos sexos; 6 mujeres y 6 hombres.
- De las 6 mujeres, 2 con rendimiento académico alto (E), 2 con rendimiento académico medio (S) y 2 con rendimiento académico bajo (A). De la misma manera para el grupo de hombres.

La muestra quedó constituida por 12 estudiantes (ver Cuadro 7), éstos son: Paola, Deysi, Helen, Sonia, Brayan, Diana, Cristhian, Esteban, Marcelo, Martin, Mirley y Johan.

Cuadro 7. Características de los estudiantes de la muestra.

ESTUDIANTE	EDAD	R.A.	M.A.		
			SI	NO	CUÁL
Paola	13	A		x	
Deysi	14	S		x	
Helen	14	E		x	
Sonia	15	S	x		7º
Brayan	15	A		x	
Diana	14	A		x	
Cristhian	13	E		x	
Esteban	14	S		x	
Marcelo	14	S		x	
Martin	13	A		x	
Mirley	13	E		x	
Johan	14	E		x	

R.A: Rendimiento académico

M.A: Mortalidad académica

3.3. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS PARA LA RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

Con el propósito de responder a la pregunta de investigación planteada con anterioridad y ser coherentes con los objetivos, se optó por utilizar los siguientes instrumentos para la recogida de información; por su flexibilidad y adecuación de los mismos, a un determinado contexto o realidad, los hacen propios y fundamentales dentro de la investigación cualitativa.

l) Instrumentos como fuentes de información

Técnica: Archivos

Instrumentos: textos escolares de matemáticas y cuadernos de trabajo de estudiantes

Con la intención de obtener información que nos permita realizar un análisis sobre la clasificación de los cuadriláteros, se utilizaron textos escolares de los grados 3º, 4º, 5º, 6º y 7º de E.B. Los textos fueron consultados en una biblioteca pública de la ciudad de Pasto. De igual forma utilizamos los cuadernos de trabajo de algunos estudiantes, en los que se observó y analizó el tratamiento que reciben las figuras geométricas y el hincapié realizado en la componente conceptual de los cuadriláteros.

II) Instrumento aplicado a la muestra

Técnica: cuestionario

Instrumento: cuestionario

El cuestionario que se aplicó a la muestra consta de dos preguntas (ver Anexo 1), las cuales son de carácter abierto. En ellas se planteó situaciones que involucran el uso y manejo de propiedades, definiciones y relaciones que poseen los cuadriláteros (caso particular de los paralelogramos). Las preguntas tienen una fuerte relación con los niveles de razonamiento de Van Hiele y con los conceptos de definición conceptual e imagen conceptual. El propósito que tiene la aplicación de este instrumento es el de recoger las diferentes percepciones que tienen los estudiantes sobre los cuadriláteros.

3.4. ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN

De acuerdo con los objetivos de la investigación, para poder estudiar la clasificación de los cuadriláteros, a partir de las definiciones que se dan en textos escolares y en cuadernos de estudiantes, y de igual forma las concepciones de ellos con respecto a los cuadriláteros, se planificó un escenario de investigación en cinco etapas (ver Figura 18):

Etapa I: Diseño del cuestionario. En esta etapa se diseñó los ítems o preguntas que hicieron parte del cuestionario. Los aspectos tomados en cuenta para su formulación, fueron:

- Las preguntas del cuestionario son de respuesta libre; tras analizar las investigaciones realizadas hasta el momento sobre el Modelo de Van Hiele, los ítems o problemas de respuesta libre son los que permiten identificar con mayor precisión el razonamiento de los estudiantes²¹
- Los ítems tienen relación con los niveles de razonamiento de Van Hiele y con la teoría sobre formación de conceptos de S. Vinner.

Etapa II: Experimentación del cuestionario. Esta experimentación se llevó a cabo con estudiantes de grado 9º de E.B diferentes a los de la muestra, con el propósito de corregir posibles errores en su formulación y plantear posibles categorías para el análisis de las respuestas de los estudiantes.

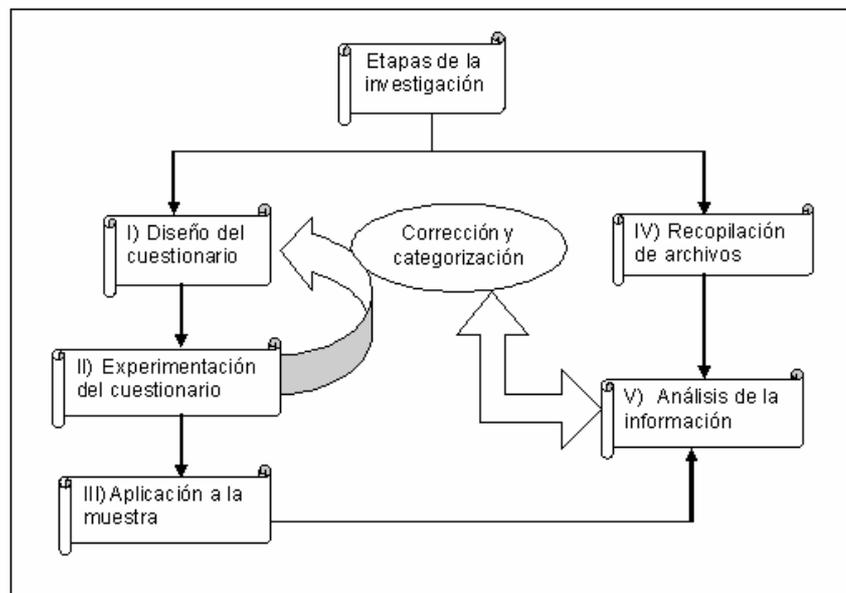
²¹ JAIME, A. Op. cit., p. 271.

Etapa III: Aplicación del cuestionario a la muestra. Esta actividad se desarrolló en el horario correspondiente al área de Matemáticas y en un lugar tranquilo donde no se puedan presentar mayores aglomeraciones de estudiantes.

Etapa IV: Recopilación de textos escolares y cuadernos de trabajo. Para el caso de los textos escolares, recurrimos a visitar bibliotecas públicas y para el caso de los cuadernos de trabajo, los solicitamos a los estudiantes del grupo 9-1 de la IEM INEM (cuadernos de años anteriores).

Etapa V: Análisis de la información recolectada. El análisis se realizó con base en el marco teórico de referencia.

Figura 18. Etapas de desarrollo de la investigación.



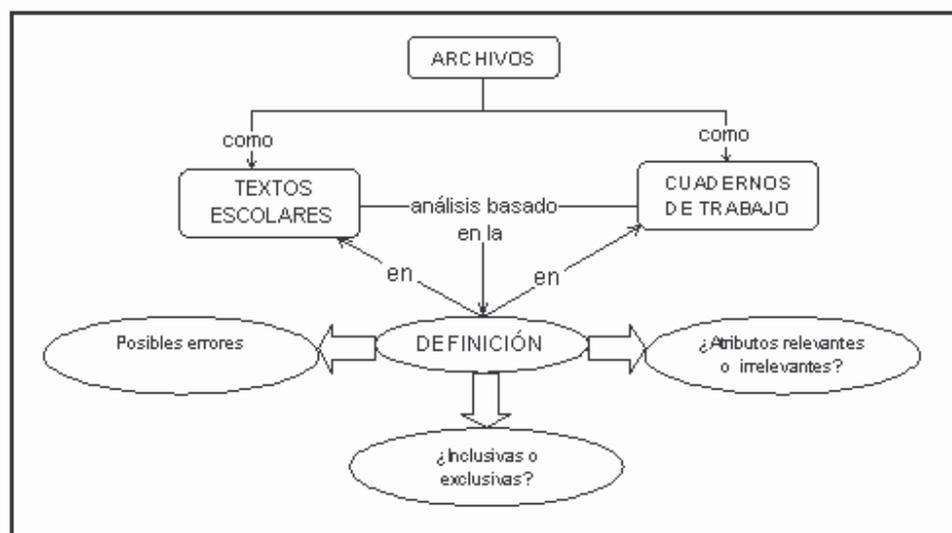
4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LA INFORMACIÓN

El objetivo de este capítulo es efectuar el análisis y descripción de la información obtenida sobre la clasificación de los cuadriláteros en textos escolares y en cuadernos de trabajo de algunos estudiantes de E.B., así como también el análisis y descripción de las respuestas dadas por los estudiantes al cuestionario; pretendemos conocer el significado que confieren los estudiantes a los conceptos de cuadriláteros, con base en la Teoría sobre formación de conceptos de S. Vinner y los niveles de razonamiento de Van Hiele.

4.1. LOS ARCHIVOS

El análisis que hemos llevado a cabo está basado en textos escolares y en cuadernos de trabajo de algunos estudiantes de E.B. El punto central del análisis se relaciona con el enunciado de las definiciones de las distintas familias de cuadriláteros presentadas en los textos y en los cuadernos; a partir de ellas se tomaron en cuenta los siguientes aspectos: atributos relevantes e irrelevantes de las definiciones, la inclusión o exclusión de las definiciones y posibles errores en las definiciones. De esta manera el proceso de análisis de archivos queda sintetizado en el siguiente esquema (ver Figura 19):

Figura 19. Esquema general del proceso de análisis de archivos.



4.1.1. Los textos escolares. Se analizaron seis textos escolares, de los cuales: uno pertenece al grado 3º, dos al grado 4º, uno al grado 5º, uno al grado 6º y uno

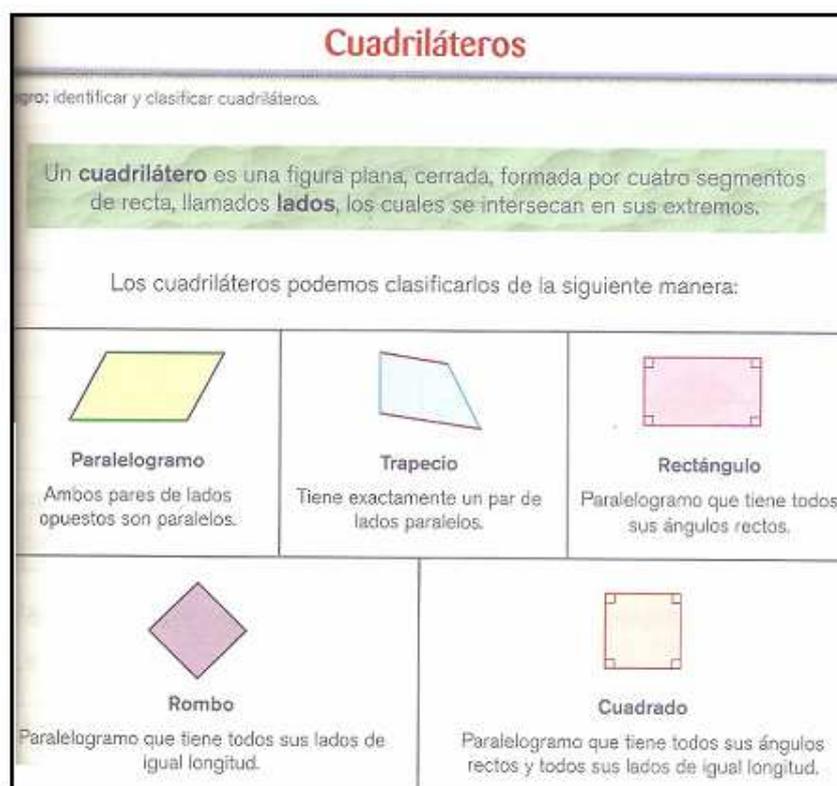
al grado 7º; cuatro textos pertenecen a una misma editorial, pero de diferente colección; cinco textos están organizados de acuerdo con las competencias y estándares propuestos por el MEN. A tales textos los hemos denominado como: Texto A, Texto B, Texto C, Texto D, Texto E y Texto F.

TEXTO ESCOLAR DEL GRADO 3º

TEXTO A

La clasificación de los cuadriláteros propuesta en este texto²², se presenta a través de las siguientes definiciones (ver Figura 20, pág. siguiente):

Figura 20. Clasificación de los cuadriláteros en un texto escolar de grado 3º de E.B.



En este texto se evidencia la primera presentación de los cuadriláteros como clases de figuras geométricas que se incluyen unas dentro de otras. En esta clasificación se tratan dos clases de cuadriláteros: por un lado el paralelogramo que, a su vez, contiene al rectángulo, al rombo y al cuadrado (no se incluye al romboide), y por otro, el trapecio del cual no se incluyen subclases.

²² ISAZA, M. Triáreas 3º. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Norma. 2005, p. 77.

ATRIBUTOS RELEVANTES E IRRELEVANTES EN LAS DEFINICIONES

En las definiciones se encuentran atributos relevantes, los cuales definen y caracterizan como tal, a cada uno de los cuadriláteros mencionados en el texto.

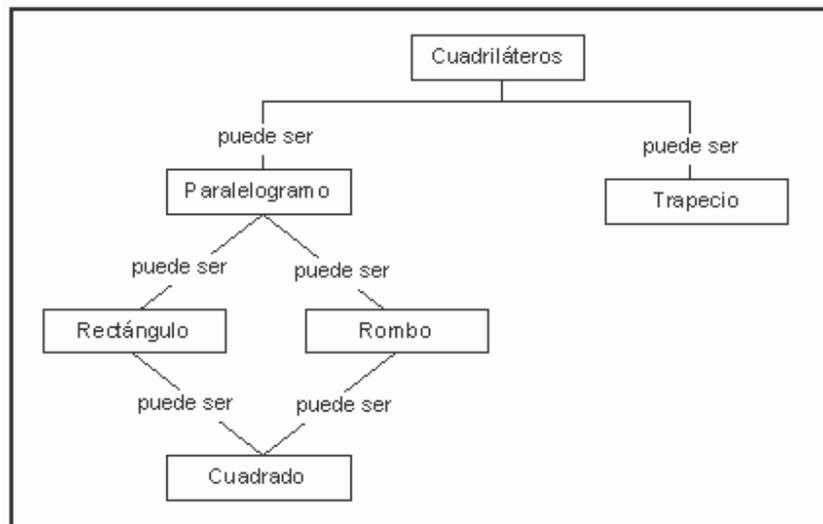
EN CUANTO A LA INCLUSIVIDAD O EXCLUSIVIDAD DE LAS DEFINICIONES

Para el caso de los paralelogramos (rectángulo, rombo, cuadrado), las definiciones son inclusivas, pero tal inclusividad está dada en forma implícita; el cuadrado es definido en términos de las propiedades relevantes del rectángulo (tener sus cuatro ángulos rectos) y del rombo (tener sus cuatro lados congruentes), pero sin mencionar en ningún momento que el cuadrado es un caso particular de rombo y de rectángulo.

ERRORES EN LAS DEFINICIONES

Aunque no se trata de un error matemático, el uso de ejemplos de figuras en posición estándar (prototípicas), asociadas a cada definición, constituye un serio error didáctico que conlleva a un obstáculo epistemológico impidiendo una construcción adecuada de toda la red conceptual sobre los cuadriláteros y su clasificación. De acuerdo con la clasificación presentada en el texto, se tiene el siguiente esquema de organización para los cuadriláteros (ver Figura 21):

Figura 21. Esquema de organización y clasificación de cuadriláteros en un texto de grado 3º.

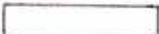


TEXTOS ESCOLARES DEL GRADO 4º

TEXTO B

La clasificación de los cuadriláteros propuesta en este texto²³, se presenta a través de las siguientes definiciones (ver Figura 22):

Figura 22. Clasificación de los cuadriláteros en un texto escolar de grado 4º de E.B.

Cuadriláteros: tienen cuatro lados y cuatro ángulos. Por las longitudes de sus lados y por la medida de sus ángulos, se clasifican así:		
Nombre del cuadrilátero	Características	Forma
Cuadrado	Rectángulo con sus lados de igual medida.	
Rectángulo	Tiene sus cuatro ángulos rectos.	
Trapezio	Tiene dos lados paralelos y los otros dos no paralelos.	
Paralelogramo	Tiene sus lados opuestos paralelos dos a dos.	
Rombo	Paralelogramo con dos lados consecutivos de igual longitud.	

En ésta clasificación se tratan dos clases de cuadriláteros: por un lado el paralelogramo que, a su vez, contiene al rectángulo, al rombo y al cuadrado (no se incluye al romboide), y por otro, el trapecio del cual no se incluyen subclases.

ATRIBUTOS RELEVANTES E IRRELEVANTES EN LAS DEFINICIONES

En las definiciones se encuentran atributos relevantes, los cuales definen y caracterizan como tal, a cada uno de los cuadriláteros mencionados en el texto.

EN CUANTO A LA INCLUSIVIDAD O EXCLUSIVIDAD DE LAS DEFINICIONES

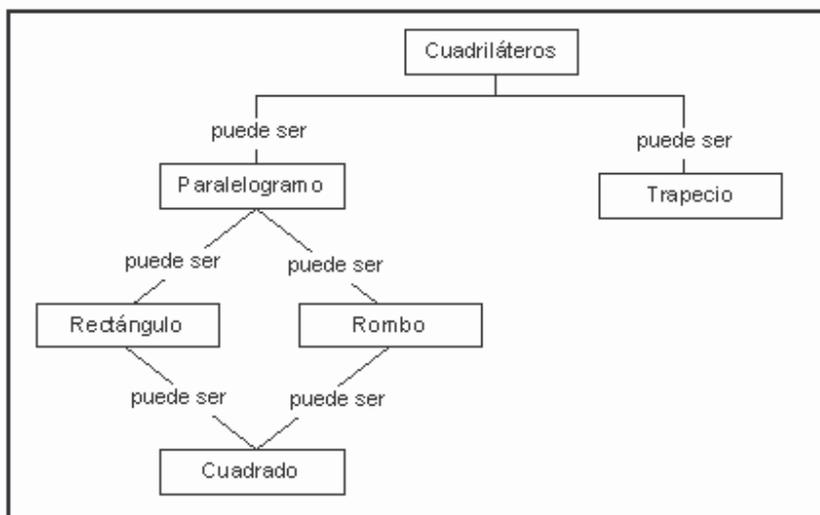
²³ CALDERÓN, I. *SUPERMAT 4º E.B.* Bogotá, Colombia: Ed. Voluntad S.A. 2000, p. 46.

Para el caso del cuadrado, se tiene por un lado, que su definición es inclusiva y explícita, ya que es definido como un rectángulo, y por otro, su definición es inclusiva e implícita, ya que es definido en términos de la propiedad relevante del rombo (tener sus cuatro lados iguales), pero sin mencionar que es un caso particular de rombo.

ERRORES EN LAS DEFINICIONES

Aunque no se trata de un error matemático, el uso de ejemplos de figuras en posición estándar (prototípicas), asociadas a cada definición, constituye un serio error didáctico que conlleva a un obstáculo epistemológico impidiendo una construcción adecuada de toda la red conceptual sobre los cuadriláteros y su clasificación. De acuerdo con la clasificación presentada en el texto, se tiene el siguiente esquema de organización para los cuadriláteros (ver Figura 23):

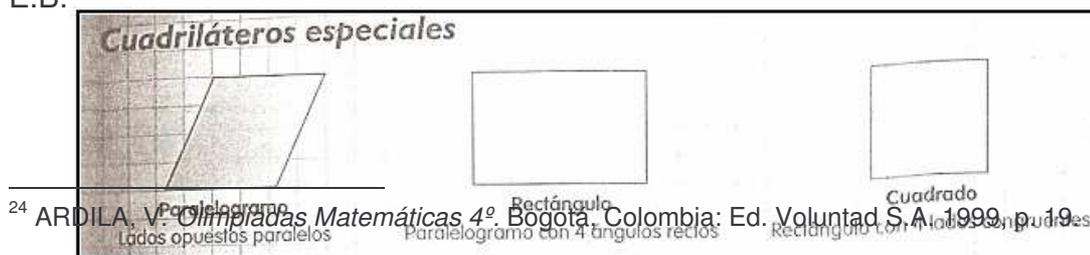
Figura 23. Organización de los cuadriláteros en un texto escolar de grado 4º.



TEXTO C

La clasificación de los cuadriláteros propuesta en este texto²⁴, se presenta a través de las siguientes definiciones (ver Figura 24):

Figura 24. Clasificación de los cuadriláteros en un texto escolar de grado 4º de E.B.



²⁴ ARDILA, V. *Olimpiadas Matemáticas 4º*. Bogotá, Colombia: Ed. Voluntad S.A., 1999, p. 19.

En ésta clasificación se trata una clase de cuadriláteros: el paralelogramo que, a su vez, contiene al rectángulo y al cuadrado (no se incluye al rombo ni al romboide).

ATRIBUTOS RELEVANTES E IRRELEVANTES EN LAS DEFINICIONES

En las definiciones se encuentran atributos relevantes, los cuales definen y caracterizan como tal, a cada uno de los cuadriláteros mencionados en el texto.

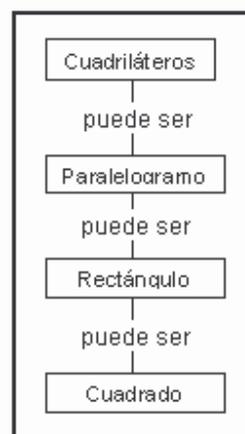
EN CUANTO A LA INCLUSIVIDAD O EXCLUSIVIDAD DE LAS DEFINICIONES

Las definiciones están dadas de forma inclusiva y explícita; el rectángulo está definido como un paralelogramo y con su característica relevante (tener sus cuatro ángulos rectos) y el cuadrado está definido como un rectángulo y con su otra característica relevante (tener sus cuatro lados congruentes).

ERRORES EN LAS DEFINICIONES

Aunque no se trata de un error matemático, el uso de ejemplos de figuras en posición estándar (prototípicas), asociadas a cada definición, constituye un serio error didáctico que conlleva a un obstáculo epistemológico impidiendo una construcción adecuada de toda la red conceptual sobre los cuadriláteros y su clasificación. De acuerdo con la clasificación presentada en el texto, se tiene el siguiente esquema de organización para los cuadriláteros (ver Figura 25):

Figura 25. Organización de los cuadriláteros en un texto de grado 4º.

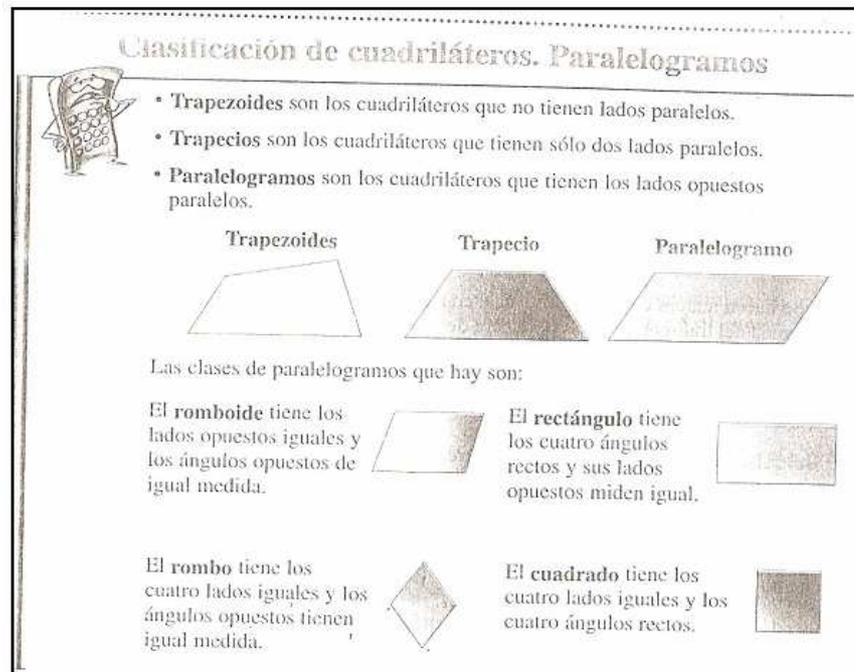


TEXTO ESCOLAR DEL GRADO 5º

TEXTO D

La clasificación de los cuadriláteros propuesta en este texto²⁵, se presenta a través de las siguientes definiciones (ver Figura 26):

Figura 26. Clasificación de los cuadriláteros en un texto escolar de grado 5º de E.B.



En ésta clasificación se tratan tres clases de cuadriláteros: por un lado el paralelogramo que, a su vez, contiene al rectángulo, al rombo, al cuadrado y al romboide, por otro lado, el trapecio del cual no se incluyen subclases y por último el trapezoide del cual no se incluyen subclases.

ATRIBUTOS RELEVANTES E IRRELEVANTES EN LAS DEFINICIONES

El rectángulo aparece definido de la siguiente manera:

²⁵ QUIROGA, M. *Matemáticas Activas 5º*. Bogotá, Colombia: Ed. Santillana S.A. 2000, p. 93.

“El rectángulo tiene los cuatro ángulos rectos y sus lados opuestos miden igual”.

En la definición hemos marcado con letra cursiva el atributo o propiedad relevante que lo define y caracteriza como tal, y con negrita hemos marcado la propiedad irrelevante, la cual no es necesaria a este concepto.

Para el caso del rombo, la definición aparece de la siguiente manera:

“El rombo tiene los cuatro lados iguales y los ángulos opuestos tienen igual medida”.

En la definición hemos marcado con letra cursiva el atributo o propiedad relevante que lo define y caracteriza como tal, y con negrita hemos marcado la propiedad irrelevante, la cual no es necesaria a este concepto.

EN CUANTO A LA INCLUSIVIDAD O EXCLUSIVIDAD DE LAS DEFINICIONES

Puesto que en la definición del rectángulo aparece un atributo irrelevante, esto implica que la definición este dada de forma exclusiva; al mencionar que el rectángulo debe tener sus lados opuestos iguales, supone para el estudiante, que los rectángulos tienen dos lados más largos que los otros dos (y teniendo en cuenta además su imagen prototipo). De igual manera para el caso del rombo, al aparecer en su definición un atributo irrelevante, esto implica que la definición este dada de forma exclusiva; al mencionar que el rombo debe tener sus ángulos opuestos de igual medida, supone para el estudiante, que los rombos tienen dos ángulos opuestos obtusos y dos ángulos opuestos agudos (y teniendo en cuenta además su imagen prototipo). De esta manera, los cuadrados no son una clase especial de rectángulos ni de rombos.

ERRORES EN LAS DEFINICIONES

El romboide aparece definido de la siguiente manera:

“El romboide tiene los lados opuestos iguales y los ángulos opuestos de igual medida”.

Ahora definamos el concepto de romboide de manera correcta:

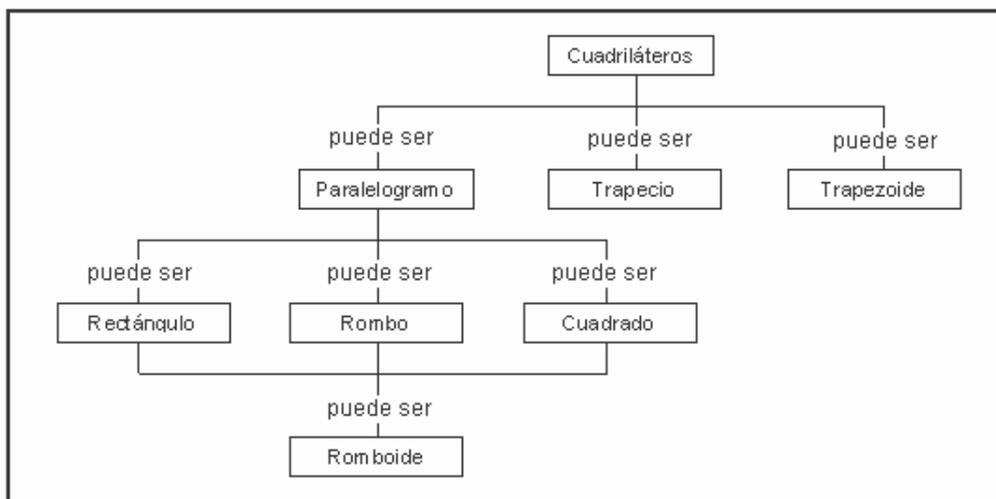
“El romboide es un paralelogramo que no tiene sus cuatro ángulos rectos ni sus cuatro lados iguales”.

Si tomamos en cuenta la definición presentada en el texto, los rectángulos, los rombos y los cuadrados son romboides, puesto que el rectángulo tiene sus ángulos opuestos iguales, el rombo tiene sus lados opuestos iguales y los

cuadrados tienen sus ángulos y lados opuestos iguales (propiedad de los paralelogramos). Por otro lado, si tomamos en cuenta la definición correcta, se puede establecer que los romboides no son ni rombos ni rectángulos (lo que implica que tampoco sea cuadrado).

Al igual que en los anteriores textos, aunque no se trata de un error matemático, el uso de ejemplos de figuras en posición estándar (prototípicas), asociadas a cada definición, constituye un serio error didáctico que conlleva a un obstáculo epistemológico impidiendo una construcción adecuada de toda la red conceptual sobre los cuadriláteros y su clasificación. De acuerdo con la clasificación presentada en el texto, se tiene el siguiente esquema de organización para los cuadriláteros (ver Figura 27):

Figura 27. Organización de los cuadriláteros en un texto de grado 5º.



TEXTO ESCOLAR DEL GRADO 6º

TEXTO E

La clasificación de los cuadriláteros propuesta en este texto, se presenta a través de las siguientes definiciones (ver Figura 28):

Figura 28. Clasificación de los cuadriláteros en un texto escolar²⁶ de grado 6º de E.B.

3. CUADRILATEROS

A. PARALELOGRAMOS

PRIMERA ACTIVIDAD

- Recordemos que un cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos se llama **PARALELOGRAMO**.
- Dibuja en tu cuaderno los siguientes cuadriláteros y señala cuáles son paralelogramos.



- Un paralelogramo cuyos cuatro ángulos son rectos se llama **RECTANGULO**. Señala en la figura los paralelogramos que son rectángulos.
- Un paralelogramo cuyos cuatro lados son iguales se llama **ROMBO**. Señala en la figura los paralelogramos que son rombos.
- Si un paralelogramo es al mismo tiempo rectángulo y rombo, entonces se denomina **CUADRADO**. Señala en la figura los paralelogramos que son cuadrados.

RECUERDA

Un **TRAPECIO** es un cuadrilátero que tiene un solo par de lados paralelos.

SEGUNDA ACTIVIDAD

- Considera de nuevo los trapecios de la figura anterior:



(1) (2) (3) (4)

- Señala:
 - Los trapecios que tienen los lados no paralelos iguales.
 - Los trapecios que tienen los lados no paralelos desiguales.
 - El trapecio que tiene un ángulo recto.
- Los trapecios (1) y (4) son trapecios isósceles. Los trapecios (2) y (3) son trapecios escalenos. El trapecio (3) es un trapecio rectángulo.

 **RECUERDA**

- Un trapecio es **ISOSCELES** si tiene los lados no paralelos iguales.
- Un trapecio es **ESCALENO** si tiene los lados no paralelos desiguales.
- Un trapecio es **RECTANGULO** si tiene dos ángulos rectos.

²⁶ MEJÍA, H. Elementos de Matemáticas 6º. Bogotá, Colombia: Ed. BEDOUT EDITORES S.A., 1998. p. 295-297.

En ésta clasificación se tratan dos clases de cuadriláteros: por un lado el paralelogramo que, a su vez, contiene al rectángulo, al rombo y al cuadrado, y por otro, el trapecio del cual se incluyen tres subclases, el trapecio isósceles, el trapecio escaleno y el trapecio rectángulo.

ATRIBUTOS RELEVANTES E IRRELEVANTES EN LAS DEFINICIONES

En las definiciones se encuentran atributos relevantes, los cuales definen y caracterizan como tal, a cada uno de los cuadriláteros mencionados en este texto.

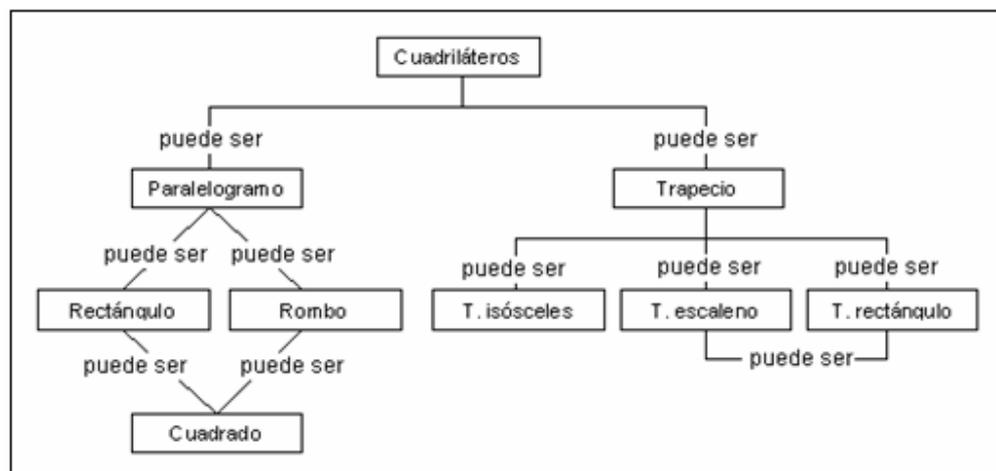
EN CUANTO A LA INCLUSIVIDAD O EXCLUSIVIDAD DE LAS DEFINICIONES

Las definiciones están dadas en forma inclusiva y explícita; el cuadrado está definido como una clase especial de rectángulo y de rombo. Para el caso de los trapecios, en la SEGUNDA ACTIVIDAD planteada en el texto, se muestra implícitamente la relación entre el trapecio escaleno y el trapecio rectángulo; un trapecio rectángulo puede ser un trapecio escaleno, y viceversa.

Un aspecto importante que cabe señalar en la clasificación presentada en este texto, es lo referente a la presentación visual de los cuadriláteros; la definición de los conceptos no está asociada a prototipos visuales (una sola figura en posición estándar). A partir de las definiciones, se pide a los estudiantes que señalen las figuras que cumplen con las propiedades que se mencionan en la definición. Las figuras son utilizadas como “herramientas”, para la definición (explicación) de los diferentes cuadriláteros.

De acuerdo con la clasificación presentada en el texto, se tiene el siguiente esquema de organización para los cuadriláteros (ver Figura 29):

Figura 29. Organización de los cuadriláteros en un texto de grado 6º.



La clasificación de los cuadriláteros propuesta en este texto²⁷, se presenta a través de las siguientes definiciones (ver Figura 30):

Figura 30. Clasificación de los cuadriláteros en un texto escolar de grado 7º de E.B.

5.2 CLASIFICACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS

Los cuadriláteros pueden ser:

- **Paralelogramo.** Es un cuadrilátero en el que los lados opuestos son paralelos.



- **Trapezio.** Es un cuadrilátero en el que solo un par de lados opuestos son paralelos.



- **Trapezoide.** Es un cuadrilátero que no tiene ningún par de lados paralelos.



▼ Clasificación de los paralelogramos

- **Rectángulo.** Es un paralelogramo que tiene los cuatro ángulos rectos.



- **Rombo.** Es un paralelogramo que tiene sus cuatro lados congruentes.



- **Cuadrado.** Es un paralelogramo que tiene los cuatro lados congruentes y los cuatro ángulos congruentes.



Dadas las características, el cuadrado es rectángulo y rombo.

- **Romboide.** Es un paralelogramo de ángulos y lados contiguos iguales.



²⁷ CUBILLOS, C. y LIZARRAGA, J. *Matemáticas Activas 7º*. Bogotá, Colombia: Ed. Santillana S.A. 2002, pp. 85-86.

▼ Trapecios

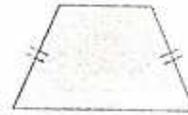
- **Bases del trapecio.** Es el nombre que reciben los dos lados paralelos. Al lado de mayor longitud se le denomina base mayor y al lado de menor longitud se le denomina base menor.
- **Lados del trapecio.** Es el nombre que reciben los lados no paralelos.

Por las características de sus lados y de sus ángulos, los trapecios se clasifican en:

1. **Trapecio rectángulo.** Es un trapecio que tienen un lado perpendicular a las bases; es decir, que este lado con la base forma ángulos de 90° .



2. **Trapecio isósceles.** Es un trapecio que tiene los dos lados paralelos congruentes o iguales.



3. **Trapecio escaleno.** Es un trapecio que tiene los lados desiguales.



▼ Clasificación de los trapezoides

1. **Trapezoide simétrico.** Es un trapezoide que tiene dos pares de lados consecutivos iguales, de tal forma que la longitud del primer par de lados consecutivos iguales es diferente de la longitud del segundo par de lados.
2. **Trapezoide asimétrico.** Es aquel trapezoide que no es simétrico.

En ésta clasificación se tratan tres clases de cuadriláteros: por un lado el paralelogramo que, a su vez, contiene al rectángulo, al rombo, al cuadrado y al romboide, por otro lado el trapecio, del cual se incluyen tres subclases, el trapecio rectángulo, el trapecio isósceles y el trapecio escaleno, y por último el trapezoide del cual se incluyen dos subclases, el trapezoide simétrico o cometa y el trapezoide asimétrico o no cometa.

ATRIBUTOS RELEVANTES E IRRELEVANTES EN LAS DEFINICIONES

Las definiciones cuentan con atributos o propiedades relevantes, las cuales los definen y caracterizan como tal.

EN CUANTO A LA INCLUSIVIDAD O EXCLUSIVIDAD DE LAS DEFINICIONES

En la clasificación de los cuadriláteros que tienen la propiedad de ser paralelogramos, las definiciones están dadas en forma inclusiva y explícita; el cuadrado es definido en términos de las características relevantes del rectángulo y del rombo, indicando a continuación que dadas estas características, el cuadrado es un caso particular de rectángulo y de rombo. No se menciona de manera explícita ni implícita, la relación que se puede establecer entre el trapecio rectángulo y el trapecio escaleno.

ERRORES EN LAS DEFINICIONES

El romboide aparece definido de la siguiente manera:

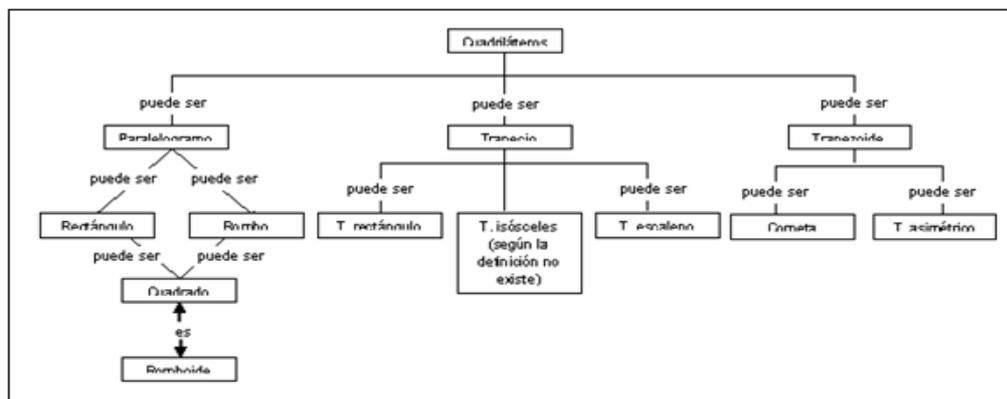
“Es un paralelogramo de ángulos y lados contiguos iguales”.

De acuerdo con ésta definición presentada en el texto, los romboides son equivalentes a los cuadrados, ya que las definiciones son equivalentes.

En la definición del trapecio isósceles, se menciona que los dos lados congruentes corresponden a los dos lados paralelos, lo que constituye un error; los lados congruentes corresponden a los lados no paralelos. Un ejemplo (figura) que represente tal definición no existe.

Al igual que en los anteriores textos, aunque no se trata de un error matemático, el uso de ejemplos de figuras en posición estándar (prototípicas), asociadas a cada definición, constituye un serio error didáctico que conlleva a un obstáculo epistemológico impidiendo una construcción adecuada de toda la red conceptual sobre los cuadriláteros y su clasificación. De acuerdo con la clasificación presentada en el texto, se tiene el siguiente esquema de organización para los cuadriláteros (ver Figura 31):

Figura 31. Organización de los cuadriláteros en un texto de grado 7^o.

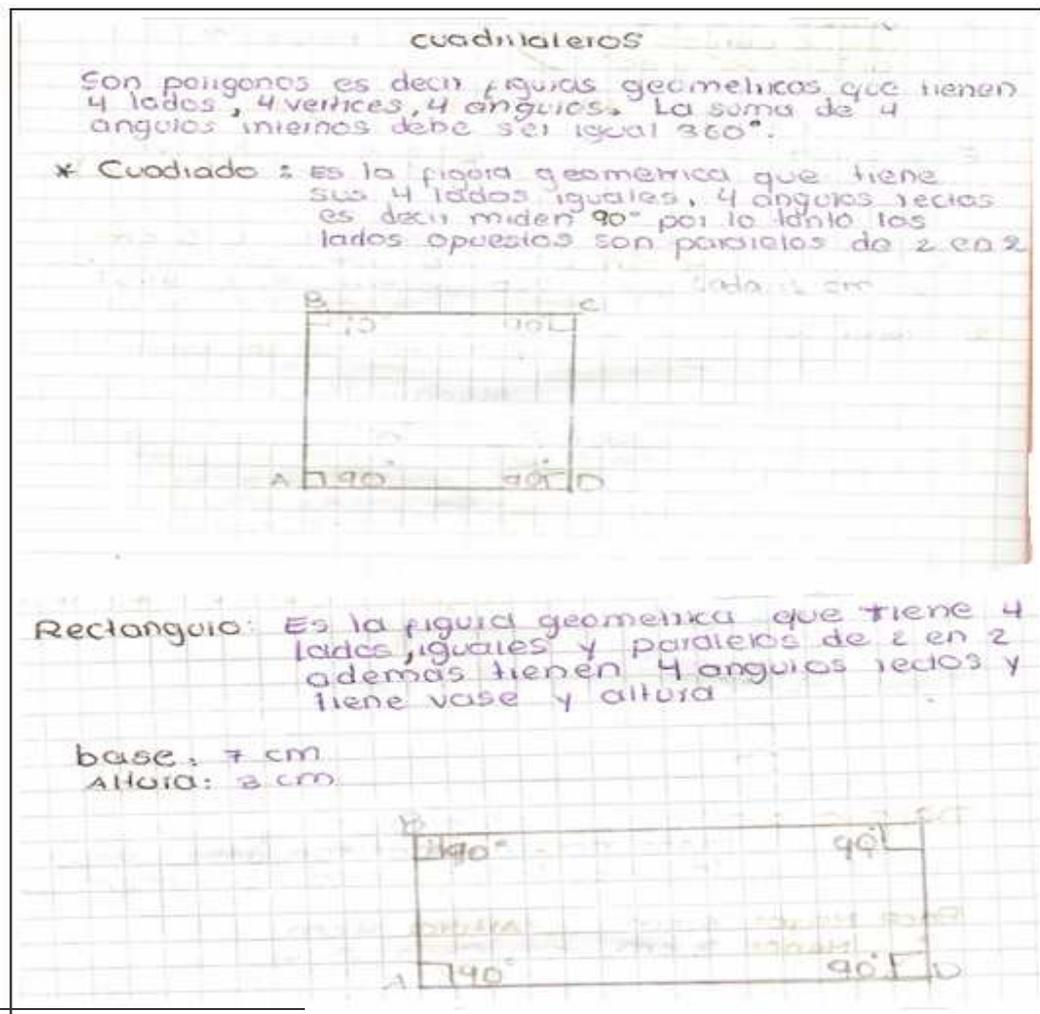


4.1.2. Los cuadernos de trabajo. Se analizaron dos cuadernos de trabajo de estudiantes²⁸. El análisis tiene en cuenta los mismos aspectos que fueron tomados para los textos escolares. A tales cuadernos los denominamos como: Cuaderno A, correspondiente a grado 6º y Cuaderno B, correspondiente a grado 7º.

CUADERNO A

La clasificación de los cuadriláteros propuesta en este cuaderno de trabajo, se presenta a través de las siguientes definiciones (ver Figura 32):

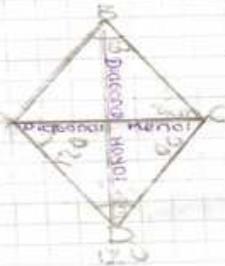
Figura 32. Clasificación de los cuadriláteros en un cuaderno de trabajo de grado 6º.



²⁸ Los cuadernos pertenecen a estudiantes que actualmente se encuentran en grado 9º. Estos estudiantes respondieron al cuestionario.

* **Rombo:** Es la figura geométrica que tiene sus 4 lados iguales pero sus ángulos no son rectos para su construcción se debe conocer la diagonal mayor y la diagonal menor.

Diagonal Mayor 5 cm
Menor 3 cm



Lados \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DA}
 vértice A, B, C y D.
 Ángulos $60^\circ + 60^\circ + 120^\circ + 120^\circ = 360^\circ$

* **Trapezio:** Tiene 2 lados paralelos y los otros 2 lados no. además se debe conocer la base mayor y la base menor.

Base Mayor 6 cm
Menor 3 cm

Altura 4 cm



Lados paralelos : $\overline{BC} \parallel \overline{AB}$
 " no paralelos : $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
 vértice A, B, C y D.
 Ángulos $70^\circ + 70^\circ + 110^\circ + 110^\circ = 360^\circ$

* **Paralelogramo:** Es un rectángulo deformado que tiene sus lados paralelos de 2 en 2 y ninguno de sus ángulos mide 90° .

Base 5 cm
Altura 3 cm



Lados paralelos $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
 $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

Vértice A, B, C y D.

Ángulos $70^\circ + 70^\circ + 110^\circ + 110^\circ = 360^\circ$

En ésta clasificación se tratan dos clases de cuadriláteros: por un lado el paralelogramo que, a su vez, “contiene” al rectángulo, al rombo, y al cuadrado, y por otro, el trapecio del cual no se incluyen subclases.

ATRIBUTOS RELEVANTES E IRRELEVANTES EN LAS DEFINICIONES

El paralelogramo aparece definido de la siguiente manera:

“Paralelogramo: Es un *rectángulo deformado* que tiene sus **lados paralelos de 2 en 2** y *ninguno de sus ángulos mide 90°*.”

En esta definición aparecen tres propiedades o atributos; dos de ellos son irrelevantes (los hemos marcado en cursiva), y el otro es el atributo relevante que lo define y caracteriza como tal (la hemos marcado en negrita). La definición apunta a la descripción de su aspecto físico.

El rectángulo aparece definido de la siguiente manera:

“Rectángulo: Es la figura geométrica que tiene 4 lados, *iguales* y **paralelos de 2 en 2** además tienen **4 ángulos rectos** y tiene base y altura”.

En esta definición aparecen tres propiedades o atributos; dos de ellos son relevantes (los hemos marcado en negrita), y el otro es un atributo irrelevante; el tener sus lados opuestos de igual longitud (lo hemos marcado en cursiva). La definición apunta a la descripción de su aspecto físico.

El cuadrado aparece definido de la siguiente manera:

“Cuadrado: Es la figura geométrica que tiene sus cuatro lados iguales, 4 ángulos rectos es decir miden 90° por lo tanto los lados opuestos son paralelos de 2 en 2”.

En esta definición aparecen los dos atributos relevantes que definen y caracterizan al cuadrado como tal; tener sus cuatro lados iguales y sus cuatro ángulos rectos.

El rombo aparece definido de la siguiente manera:

“Rombo: Es la figura geométrica que tiene **sus cuatro lados iguales** pero *sus ángulos no son rectos* para su construcción se debe conocer la diagonal mayor y la diagonal menor”.

En esta definición aparecen dos propiedades o atributos; uno de ellos constituye el atributo relevante que define y caracteriza al rombo como tal (lo hemos marcado en negrita), y el otro es un atributo irrelevante; el no tener sus ángulos rectos (lo hemos marcado en cursiva). Tal definición se basa principalmente en su aspecto físico.

El trapecio aparece definido de la siguiente manera:

“Trapecio: **Tiene 2 lados paralelos y los otros 2 lados no**; además se debe conocer la base mayor y la base menor”. En esta definición aparece la propiedad o atributo relevante que caracteriza al trapecio (lo hemos marcado en negrita).

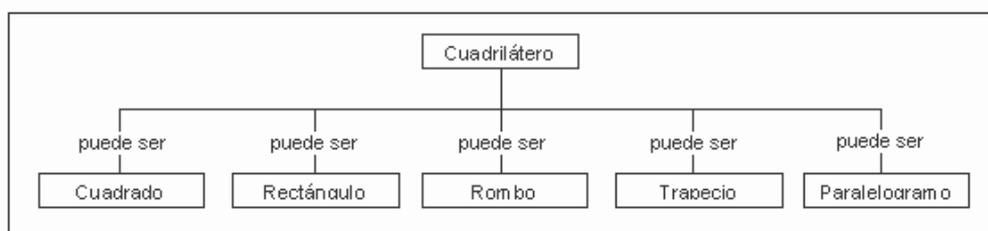
EN CUANTO A LA INCLUSIVIDAD O EXCLUSIVIDAD DE LAS DEFINICIONES

Puesto que en las definiciones de los cuadriláteros que tienen la propiedad de ser paralelogramos, aparecen atributos irrelevantes, esto implica que no se puedan establecer relaciones entre ellos; el rectángulo, el rombo y el cuadrado, no son clases especiales de paralelogramos, así como también, el cuadrado no es un caso particular de rectángulo ni de rombo.

ERRORES EN LAS DEFINICIONES

Aunque no se trata de un error matemático, el uso de ejemplos de figuras en posición estándar (prototípicas), asociadas a cada definición, constituye un serio error didáctico que conlleva a un obstáculo epistemológico impidiendo una construcción adecuada de toda la red conceptual sobre los cuadriláteros y su clasificación. De acuerdo con la clasificación presentada en este cuaderno de trabajo, se tiene el siguiente esquema de organización para los cuadriláteros (ver Figura 33):

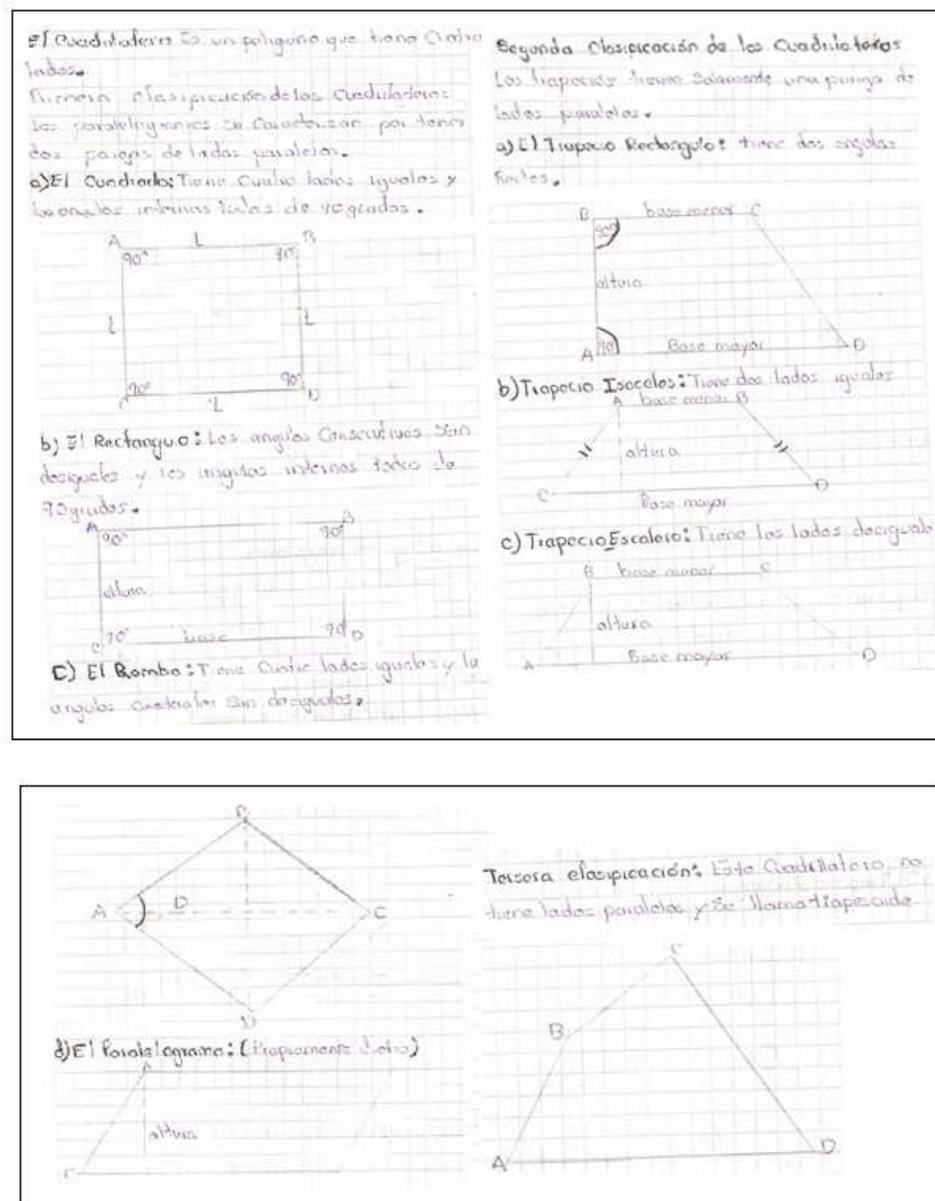
Figura 33. Organización de los cuadriláteros en un cuaderno de trabajo de grado 6º.



CUADERNO B

La clasificación de los cuadriláteros propuesta en cuaderno de trabajo, se presenta a través de las siguientes definiciones (ver Figura 34):

Figura 34. Clasificación de los cuadriláteros en un cuaderno de trabajo de grado 7º.



En ésta clasificación se tratan tres clases de cuadriláteros: por un lado el paralelogramo que, a su vez, contiene al rectángulo, al rombo, al cuadrado y al paralelogramo propiamente dicho²⁹, por otro lado el trapecio, del cual se incluyen

²⁹ Se le llama "paralelogramo propiamente dicho" al cuadrilátero que posee los lados opuestos paralelos, pero no es cuadrado ni rectángulo.

tres subclases, el trapecio rectángulo, el trapecio isósceles y el trapecio escaleno, y por último el trapecoide del cual no se incluyen subclases.

ATRIBUTOS RELEVANTES E IRRELEVANTES EN LAS DEFINICIONES

El rectángulo aparece definido de la siguiente manera:

“El rectángulo: *Los ángulos consecutivos son desiguales* y los ángulos internos todos de 90 grados”.

Cuando en la definición se afirma “los ángulos consecutivos son desiguales” (la cursiva es nuestra), lo que en realidad se está afirmando es que los lados consecutivos son desiguales. Esta parte de la definición se convierte en una propiedad irrelevante para el concepto de rectángulo, lo que implica que éste, sea presentado de forma exclusiva; esta propiedad hace que sólo se consideren como rectángulos a aquellos que tienen dos lados más largos que los otros dos (en este caso no se podría considerar al cuadrado como una clase especial de rectángulos). La definición apunta a la descripción de su aspecto físico.

El rombo aparece definido de la siguiente manera:

“El Rombo: **Tiene cuatro lados iguales** y *los ángulos colaterales son desiguales*”.

La definición contiene un atributo relevante (marcado con negrita) que lo caracteriza como tal, pero al mismo tiempo se menciona un atributo irrelevante (marcado con cursiva), implicando que el rombo sea presentado de forma exclusiva; en este caso el cuadrado no se puede considerar como una clase especial de rombos. La definición apunta a la descripción de su aspecto físico.

EN CUANTO A LA INCLUSIVIDAD O EXCLUSIVIDAD DE LAS DEFINICIONES

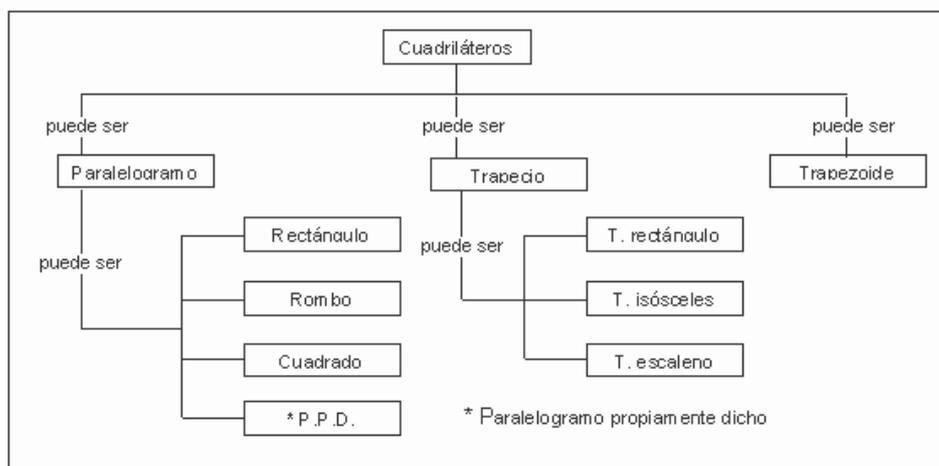
Puesto que en las definiciones del rectángulo y rombo aparecen atributos irrelevantes, esto las hace explícitas; el cuadrado no representa una clase especial de rectángulo ni de rombo.

En la primera clasificación de cuadriláteros (los paralelogramos), el paralelogramo es definido como el cuadrilátero que se caracteriza por tener dos parejas de lados paralelos; se menciona el atributo relevante que lo caracteriza. Sin embargo, en las subclases del paralelogramo se menciona al paralelogramo propiamente dicho, lo que implica una presentación totalmente exclusiva; los rectángulos, los rombos y los cuadrados no representan clases especiales de paralelogramos. Además su representación en posición estándar (imagen prototípica), hace que el rectángulo o el cuadrado sean tan diferentes a este, que el efecto unificador del concepto desaparece.

ERRORES EN LAS DEFINICIONES

Aunque no se trata de un error matemático, el uso de ejemplos de figuras en posición estándar (prototípicas), asociadas a cada definición, constituye un serio error didáctico que conlleva a un obstáculo epistemológico impidiendo una construcción adecuada de toda la red conceptual sobre los cuadriláteros y su clasificación. De acuerdo con la clasificación presentada en este cuaderno de trabajo, se tiene el siguiente esquema de organización para los cuadriláteros (ver Figura 35):

Figura 35. Organización de los cuadriláteros en un cuaderno de trabajo de grado 7^o.



4.2. EL CUESTIONARIO

Todos los estudiantes que previamente habían sido seleccionados para responder al cuestionario asistieron puntualmente a la prueba. La actividad se realizó el 24 de abril del año 2009, en el horario correspondiente al área de Matemáticas³⁰ y en la biblioteca perteneciente a la IEM INEM.

Los aspectos objeto de estudio asociados a las respuestas de los estudiantes fueron:

1. Análisis sobre la definición conceptual o imagen conceptual concebida por los estudiantes, con respecto a los paralelogramos, rectángulos, rombos y cuadrados (pregunta 1A).

³⁰ La actividad se realizó con la correspondiente autorización de los coordinadores y profesores.

2. Análisis sobre la influencia de gráficas estereotipadas en posición estándar en el cuestionario (figuras 1, 3 y 4 de las preguntas 1B y 2).

3. Análisis sobre la influencia de la presencia de las definiciones en el cuestionario (preguntas 1 y 2).

4. Análisis sobre los niveles de razonamiento de Van Hiele utilizados por los estudiantes en sus argumentaciones (preguntas B1 y B2).

El análisis sobre la definición conceptual o imagen conceptual concebida por los estudiantes, se realiza teniendo en cuenta la organización de las respuestas (definiciones) en categorías.

El análisis sobre la influencia de gráficas en posición estándar en el cuestionario, se realiza teniendo en cuenta las clasificaciones hechas por los estudiantes para las figuras 1, 3 y 4 de las preguntas 1B y 2.

El análisis sobre la influencia de la presencia de las definiciones en el cuestionario, se realiza teniendo en cuenta las clasificaciones hechas por los estudiantes para las figuras 1, 2, 3, 4 y 5 de las preguntas 1B y 2.

El análisis sobre los niveles de razonamiento utilizados por los estudiantes en sus argumentaciones, se realiza teniendo en cuenta las características particulares de cada nivel y los descriptores de las respuestas a las preguntas B1 y B2.

4.2.1. Análisis de los resultados del cuestionario. El proceso de análisis de las respuestas arrojadas por el cuestionario comienza con la categorización de las respuestas que tienen relación con la definición de los conceptos de paralelogramo, rectángulo, rombo y cuadrado. Seguidamente con la organización de las clasificaciones a través de una matriz, y por último la asignación de los niveles de razonamiento teniendo en cuenta las características de cada nivel de razonamiento y los descriptores de las respuestas.

CATEGORIZACIÓN DE RESPUESTAS SOBRE LA DEFINICIÓN DEL CONCEPTO DE PARALELOGRAMO, RECTÁNGULO, ROMBO Y CUADRADO.

La definición conceptual o imagen conceptual concebida por los estudiantes con respecto a los paralelogramos, rectángulos, rombos y cuadrados, se manifiesta en las descripciones o en la representación visual de cada uno.

Pregunta 1A: “Define los siguientes conceptos: paralelogramo, rectángulo, rombo y cuadrado”. Las respuestas (ver Anexo B) se clasifican como sigue (ver Cuadros 8 a 9):

PARA EL PARALELOGRAMO

Cuadro 8. Categorías y ejemplo de respuestas para la definición de paralelogramo.

CATEGORÍA	SUBCATEGORÍA	FRECUENCIA	EJEMPLO DE RESPUESTAS
I. No contesta.	N.A	2	N.A
II. Únicamente presentación visual.	a. En posición estándar.	7	
	b. En posición no estándar.	0	N.A
III. Definición acompañada o no, de una presentación visual en posición estándar.	a. Comparación con un rectángulo deformado.	1	“Es como un rectángulo movido” (Esteban).
	b. Lados paralelos.	1	“El paralelogramo es una figura geométrica que consta de líneas paralelas” (Marcelo).
	c. Otras.	1	“El paralelogramo es una figura que ayuda a calcular el peso como en gramos” (Brayan).

Dos de los doce estudiantes no reconocen a un paralelogramo, ni por su definición conceptual, ni por su imagen conceptual. Para 7 estudiantes, la definición de paralelogramo es concebida a través de su imagen conceptual; representación visual en forma estándar (prototípica). Un estudiante considera al paralelogramo como un rectángulo deformado. Un estudiante hace referencia al paralelismo de sus lados y un caso excepcional en el que un estudiante concibe al paralelogramo como una herramienta para calcular el peso de los cuerpos en gramos.

PARA EL RECTÁNGULO

Cuadro 9. Categorías y ejemplo de respuestas para la definición de rectángulo.

CATEGORÍA	SUBCATEGORÍA	FRECUENCIA	EJEMPLO DE RESPUESTAS
I. Únicamente presentación visual.	a. En posición estándar.	7	
	b. En posición no estándar.	0	N.A
II. Definición, acompañada o no, de una	a. Lados no iguales.	3	“Es una figura geométrica la cual tiene cuatro lados

presentación visual en posición estándar.			desiguales” (Deysi).
	b. Lados paralelos.	1	“Es una figura geométrica que tiene 2 líneas paralelas” (Esteban).
	c. Otras.	1	“Es una figura geométrica formada por 3 líneas iguales” (Martínez).

Siete de los doce estudiantes testados, conciben al rectángulo a través de su imagen conceptual; representación visual en forma estándar (prototípica). Tres estudiantes consideran al rectángulo como una figura en la que dos de sus lados son más largos que los otros dos. Un estudiante hace referencia al paralelismo de sus lados y un caso excepcional en el que un estudiante concibe al rectángulo como una figura geométrica formada por tres líneas iguales.

PARA EL ROMBO

Cuadro 10. Categorías y ejemplo de respuestas para la definición de rombo.

CATEGORÍA	SUBCATEGORÍA	FRECUENCIA	EJEMPLO DE RESPUESTAS
I. Únicamente presentación visual.	a. En posición estándar.	9	
	b. En posición no estándar.	0	N.A
II. Definición, acompañada o no, de una presentación visual en posición estándar.	a. Comparación con otras figuras.	1	“Es una figura geométrica que tiene 4 lados en forma de diamante” (Esteban).
	b. Igualdad de lados.	2	“Esta es una figura con iguales lados” (Brayan).

Nueve de los doce estudiantes testados, conciben al rombo a través de su imagen conceptual; representación visual en forma estándar (prototípica). Un estudiante compara al rombo con un diamante; en este caso la característica figural, es considerada antes que la característica conceptual, y dos estudiantes hacen alusión a los cuatro lados iguales; aunque al momento de realizar las clasificaciones no la aplican (ver Anexo B).

PARA EL CUADRADO

Cuadro 11. Categorías y ejemplo de respuestas para la definición de cuadrado.

CATEGORÍA	SUBCATEGORÍA	FRECUENCIA	EJEMPLO DE RESPUESTAS
I. Únicamente presentación visual.	a. En posición estándar.	5	
	b. En posición no estándar.	0	N.A
II. Definición, acompañada o no, de una presentación visual en posición estándar.	a. Igualdad de lados.	6	“Esta formado por 4 lados iguales” (Martínez).
	b. Ángulos rectos.	1	“Es una figura con un ángulo de 90°” (Matin).

Cinco de los doce estudiantes testados, conciben al cuadrado a través de su imagen conceptual; representación visual en forma estándar (prototípica). Seis estudiantes definen al cuadrado sólo por su igualdad de sus lados, sin mencionar el otro atributo relevante que lo caracteriza (tener sus ángulos rectos) y un estudiante hace referencia a la medida de sus ángulos rectos sin mencionar el otro atributo relevante que lo caracteriza (tener sus lados iguales).

ANÁLISIS SOBRE LA INFLUENCIA DE FIGURAS EN POSICIÓN ESTÁNDAR EN EL CUESTIONARIO: CLASIFICACIÓN DE LAS FIGURAS 1, 3 Y 4 DE LAS PREGUNTAS 1B Y 2.

Las figuras 1, 3 y 4 de la actividad 1B son congruentes a las figuras 1, 3 y 4 de la actividad 2 (ver Anexo A); las figuras fueron rotadas. Antes de describir los resultados, incluimos algunas conjeturas de partida que justifican la elección de las figuras incluidas en estas actividades. Los estudiantes:

- Clasificarán las figuras 1, 3 y 4 de la actividad 1B como rombo, cuadrado y rombo respectivamente, ya que en cada caso corresponden a sus representaciones gráficas estereotipadas en posición estándar.
- Clasificarán las figuras 1, 3 y 4 de la actividad 2 como cuadrado, rombo y paralelogramo respectivamente, ya que en cada caso corresponden a sus representaciones gráficas estereotipadas en posición estándar.

Pregunta 1B y 2: las clasificaciones (ver Anexo C), realizadas por los estudiantes se resumen en la siguiente matriz (ver Cuadro 12):

Cuadro 12. Clasificación de las figuras 1, 3 y 4 de las preguntas 1B y 2.

Estudiante	Figura	Clasificación 1B				Clasificación 2			
		P	R	X	C	P	R	X	C
Paola	1			x					x
	3				x			x	
	4			x		x			
Deysi	1			x					x
	3				x			x	
	4			x		x			
Helen	1			x					x
	3				x			x	
	4			x		x			
Sonia	1			x					x
	3				x			x	
	4			x		x			
Brayan	1			x		x			x
	3				x	x		x	
	4			x		x			
Diana	1			x	x	x		x	x
	3			x	x	x		x	x
	4			x	x	x	x		x
Cristhian	1			x					x
	3				x			x	
	4			x		x			
Esteban	1			x					x
	3				x			x	
	4			x		x			
Marcelo	1			x		x			
	3				x	x			
	4			x		x			
Martin	1			x					x
	3				x			x	
	4			x		x			
Mirley	1			x	x	x		x	x
	3			x	x	x		x	
	4			x	x	x		x	
Johan	1			x					x
	3				x			x	
	4			x		x			

P: paralelogramo R: rectángulo X: rombo C: cuadrado

Nuestras suposiciones con respecto a que los estudiantes clasificarían las figuras 1, 3 y 4 de la actividad 1B como rombo, cuadrado y rombo, han sido acertadas (puesto que se presenta el 83% de clasificaciones de este tipo). Las tres figuras se presentan mediante las representaciones gráficas estereotipadas en posición estándar. De igual manera, nuestras suposiciones con respecto a que los estudiantes clasificarían las figuras 1, 3 y 4 de la actividad 2 como cuadrado, rombo y paralelogramo, han sido acertadas puesto que se presenta el 75% de

clasificaciones de este tipo. Las tres figuras se presentan mediante las representaciones gráficas estereotipadas en posición estándar.

ANÁLISIS SOBRE LA INFLUENCIA DE LA PRESENCIA DE LAS DEFINICIONES EN EL CUESTIONARIO (PREGUNTAS 1B Y 2).

En la pregunta 1B se pide clasificar las figuras sin la presencia de las definiciones, y en la pregunta 2 se pide clasificar las mismas figuras (las figuras 1, 3 y 4 son congruentes) con presencia de las definiciones.

Ante la presencia de las definiciones en la actividad 2, cuatro de los doce estudiantes testados mostraron cambios en sus clasificaciones; Brayan, Diana, Marcelo y Mirley (ver Anexo C).

Según Brayan, por ejemplo:

Podemos notar que en la clasificación hecha sin la presencia de la definición, Brayan recurrió a utilizar la “célula” de la imagen del concepto (sus clasificaciones muestran una fuerte relación con gráficas estereotipadas en posición estándar), mientras que en la clasificación hecha con la presencia de la definición, Brayan parece haber activado la “célula” de la definición del concepto (comprensión del significado de las definiciones); la figura 1 de la actividad 2, la clasificó como paralelogramo, cuadrado y rombo (aunque faltó rectángulo), la figura 3 la clasificó como paralelogramo, rombo y cuadrado (aunque faltó rectángulo), la figura 4 la clasificó como paralelogramo y rombo y la figura 5 la clasificó como paralelogramo y rectángulo.

Según Diana, por ejemplo:

Clasificó las figuras 1, 2, 3, 4 y 5 de la actividad 2 como paralelogramos. La figura 1 la clasificó como cuadrado, rombo y paralelogramo, de igual manera la figura 3.

Según Marcelo, por ejemplo:

Clasificó las figuras 1, 2, 3, 4 y 5 de la actividad 2 como paralelogramos, pero no asimila o comprende las características particulares de cada subclase. Es decir, en las definiciones:

- Un paralelogramo es un cuadrilátero en el cual ambos pares de lados opuestos son paralelos.
- **Un rectángulo es un paralelogramo** con sus cuatro ángulos rectos.

- **Un rombo es un paralelogramo** que tiene sus cuatro lados iguales.
- **Un cuadrado es un paralelogramo** que tiene sus cuatro ángulos rectos y sus cuatro lados iguales.

Con negrita hemos marcado la parte que sólo fue asimilada por el estudiante (no tomo en cuenta el resto de la definición).

Según Mirley, por ejemplo:

Con la presencia de la definición, la figura 1 aparte de haberla clasificado como rombo y cuadrado, ahora la clasificó como paralelogramo. La figura 2 que la había clasificado erróneamente como cuadrado y rectángulo, ahora la clasificó como paralelogramo. La figura 3 fue clasificada de la misma manera que la figura 1. La figura 4 que la había clasificado como rombo y cuadrado, ahora la clasificó como paralelogramo y rombo. La figura 5 que la había clasificado como rectángulo y cuadrado, ahora la clasificó como paralelogramo y rectángulo.

Para el resto de estudiantes (ocho), la presencia de las definiciones no influyó, y sus clasificaciones se basaron tomando como referencia la imagen del concepto antes que la definición del concepto.

ANÁLISIS SOBRE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE UTILIZADOS POR LOS ESTUDIANTES EN SUS ARGUMENTACIONES (PREGUNTAS B1 Y B2).

Con la preguntas B1 y B2 (ver Anexo A) del cuestionario, se pretendió conocer los niveles de razonamiento utilizados por los estudiantes, al momento de argumentar sus clasificaciones.

Preguntas B1 y B2: las respuestas (ver Anexo C), hacen evidente que la mayoría de los estudiantes se encuentran en el nivel 1 (reconocimiento o visualización) (ver Cuadros 13 y 14).

A la pregunta, ¿Es la figura 3 un rombo?, diez de los doce estudiantes respondieron “no”. En el Cuadro 13 se muestra la asignación del nivel de razonamiento para cada estudiante, acompañada de la justificación para tal asignación.

Cuadro 13. Respuestas de los estudiantes a la pregunta B1.

PREGUNTA B1: ¿Es la figura 3 un rombo?					
Estudiante	Si	No	Respuesta	Nivel	Justificación
Paola		x	“Porque tiene los cuatro lados iguales”.	1	Tiene una percepción individual de la figura: el rombo es considerado como una figura independiente de las otras de su misma clase. No relaciona la característica común del cuadrado y del rombo (tener sus lados iguales).
Deysi		x	“Porque tiene los cuatro lados iguales y este es un cuadrado que tiene cuatro lados iguales”.	1	El mismo caso de Paola.
Helen		x	“Porque un rombo es como un triángulo solo que este tiene cuatro lados y la figura 3 es un cuadrado que tiene todos sus cuatro lados iguales”.	1	A parte de presentar el mismo caso de Paola, la respuesta hace notar que la posición del rombo en el plano es determinante; Si se traza la diagonal menor del rombo, entonces en la parte superior se puede observar un triángulo en posición estándar.
Sonia		x	“Porque es una figura llamada cuadrado”.	1	El mismo caso de Paola.
Brayan		x	“La figura 3 no es un rombo porque es un cuadrado que tiene sus cuatro lados y vértices iguales”.	1	A parte de presentar el mismo caso de Paola, en la respuesta no se reconocen explícitamente las partes de que se componen las figuras; en este caso lo que el estudiante quiere decir no son vértices sino ángulos.
Diana	x		“Porque un rombo tiene cuatro lados igual que un cuadrado”.	1	No señala con claridad la característica o atributo que los relaciona (tener sus 4 lados iguales). Al entrevistarla, ella argumentó: “si es un rombo porque esta girado”, no hizo alusión a los cuatro lados iguales.
Cristhian		x	“No es un rombo ya que este es un cuadrado”.	1	El mismo caso de Paola.
Esteban		x	“Un rombo tiene forma de diamante la figura 3 es un cuadrado”.	1	A parte de presentar el mismo caso de Paola, en la respuesta claramente se puede evidenciar descripciones por semejanza con otros objetos, cuando en ella se menciona que el rombo tiene

					forma de diamante.
Marcelo		x	“Porque tiene líneas completamente rectas como el cuadrado”.	1	Su respuesta está referida especialmente a la posición en el plano; según su respuesta los lados del rombo deben ser estrictamente oblicuos.
Martin		x	“Porque sus ángulos son de un ángulo promedio de 90°”.	1	Su respuesta está basada principalmente en su aspecto físico; para el estudiante, la amplitud de los ángulos del rombo se constituye en una característica relevante.
Mirley	x		“Porque los rombos son cuadrados pero inclinados”.	1	Su respuesta se refiere principalmente a la posición en el plano de la figura; no menciona ningún atributo relevante en su justificación.
Johan		x	“porque todos sus lados son iguales”.		El mismo caso de Paola.

A la pregunta, ¿Es la figura 5 un paralelogramo?, diez de los doce estudiantes respondieron “no”, un estudiante respondió “sí” y uno no respondió. En el Cuadro 14 se muestra la asignación del nivel de razonamiento para cada estudiante, acompañada de la justificación para tal asignación.

Cuadro 14. Respuestas de los estudiantes a la pregunta B2.

PREGUNTA B2: ¿Es la figura 5 un paralelogramo?					
Estudiante	Si	No	Respuesta	Nivel	Justificación
Paola		x	“Porque sus rectas son hacia adelante”.	1	Su respuesta se basa principalmente en su aspecto físico; cuando menciona que sus rectas son hacia adelante, lo que quiere manifestar es que los “lados más cortos”, están dispuestos verticalmente y no en forma oblicua (inclinados).
Deysi		x	“Porque los paralelogramos son inclinados”.	1	Su respuesta corresponde a una descripción totalmente basada en su aspecto físico.
Helen		x	“Porque el paralelogramo tiene que ser sus lados laterales corridos y la figura 5 está mostrando un rectángulo”.	1	Su respuesta corresponde a una descripción totalmente basada en su aspecto físico, además el reconocimiento que hace de la figura 5 como un rectángulo implica una percepción individual de la figura; no relaciona características del rectángulo con las del paralelogramo.
Sonia		x	“Porque es una figura llamada rectángulo”.	1	Tiene una percepción individual de la figura: el rectángulo es considerado como una figura independiente de las otras de su misma clase. No

					relaciona la característica común del rectángulo y del paralelogramo (tener sus lados opuestos paralelos).
Brayan		x	“La figura 5 es un rectángulo ya que todos sus lados no corresponden y no son iguales como un cuadrado”.	1	El mismo caso de Sonia.
Diana		x	“Porque hay cuatro lados iguales en la cual dos son iguales”.		Lo que quiere manifestar en la respuesta es que la figura 5 corresponde a un rectángulo y no a un paralelogramo. De esta manera la respuesta de Diana corresponde al mismo caso de Sonia.
Cristhian		x	“No es un paralelogramo ya que este es un rectángulo”.	1	El mismo caso de Sonia.
Esteban		x	“Se parece pero no es. El paralelogramo es corrido”.	1	Su respuesta corresponde a una descripción totalmente basada en su aspecto físico.
Marcelo	x		“Porque tiene dos líneas separadas entre sí que no se unen”.	2	Por la definición dada para el paralelogramo en la pregunta 1A y por la argumentación a esta pregunta, se puede observar que el concepto de paralelismo lo tiene en su mente y trata de relacionarlo.
Martin		x	“Porque tiene dos lados iguales y los otros dos son de medidas más reducidas”.	1	Su respuesta corresponde a la descripción del rectángulo, basada principalmente en su aspecto físico. Además corresponde al mismo caso de Sonia.
Mirley			No responde.		
Johan		x	“Porque no tiene forma de paralelogramo sino de rectángulo”.	1	A parte de presentar el mismo caso de Sonia, en la respuesta claramente se puede evidenciar descripciones por semejanza con otros objetos, cuando en ella se menciona que el rectángulo no tiene forma de paralelogramo.

5. CONCLUSIONES

Las conclusiones de este trabajo de investigación se establecen y están condicionadas por el marco teórico de referencia, por el enfoque metodológico de la investigación, incluyendo los textos escolares y cuadernos de trabajo, así como también el cuestionario como punto de referencia para analizar las concepciones de los estudiantes de la muestra con respecto a los cuadriláteros. En consecuencia y con base en los objetivos planteados en la investigación, presentamos las conclusiones derivadas de los resultados de este estudio.

EN CUANTO A LA CLASIFICACIÓN PRESENTADA EN LOS TEXTOS ESCOLARES

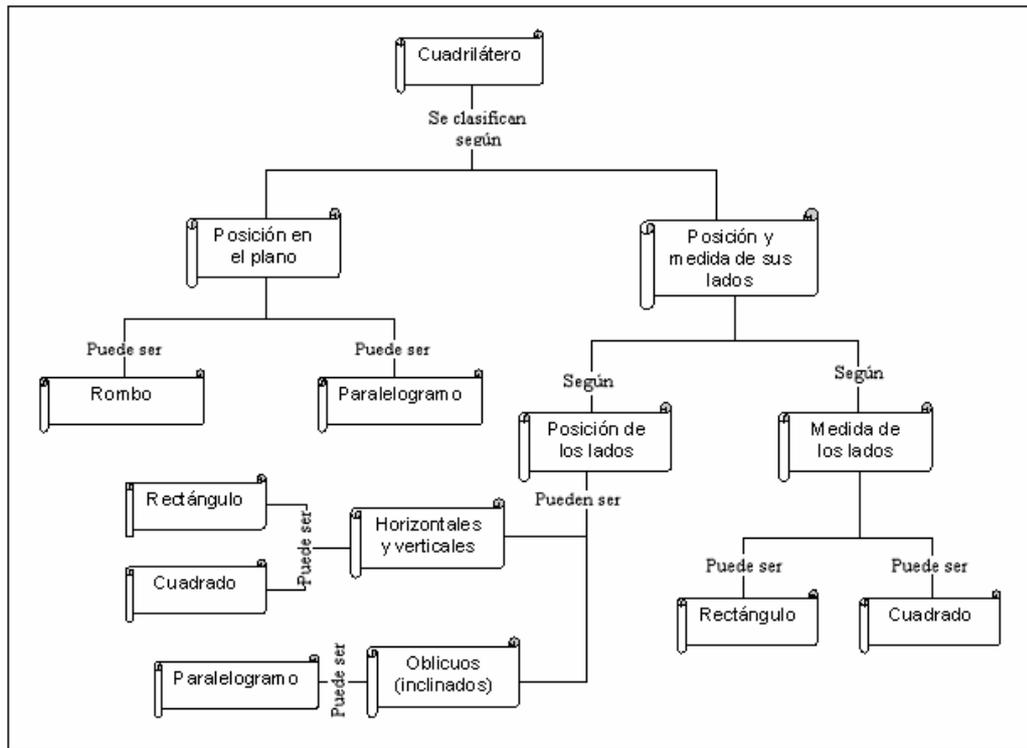
En general, se observó que la componente conceptual para los diferentes cuadriláteros está dada en forma inclusiva. Sin embargo, se evidenció que las representaciones visuales de los cuadriláteros asociadas a cada definición, se presentan únicamente en posición estándar.

EN CUANTO A LA CLASIFICACIÓN PRESENTADA EN LOS CUADERNOS DE TRABAJO

En este caso se observó, que tanto la componente conceptual como la imagen conceptual asociadas a cada concepto de cuadrilátero, está bien delimitada; particularmente para el paralelogramo (romboide) su definición se basa principalmente en la descripción de su aspecto físico.

EN CUANTO A LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE UTILIZADOS POR LOS ESTUDIANTES.

- Se observó que los doce estudiantes testados exhiben características del nivel de visualización o de reconocimiento (Nivel 1); la definición para los paralelogramos fue dada a través de su representación visual en posición estándar y por medio de descripciones basadas principalmente en su aspecto físico y posición en el plano (ver cuadros del 8 al 14 y Anexos 2 y 3).
- De acuerdo a las respuestas, se dedujo el siguiente esquema mental concebido por los estudiantes al momento de definir y clasificar un cuadrilátero.

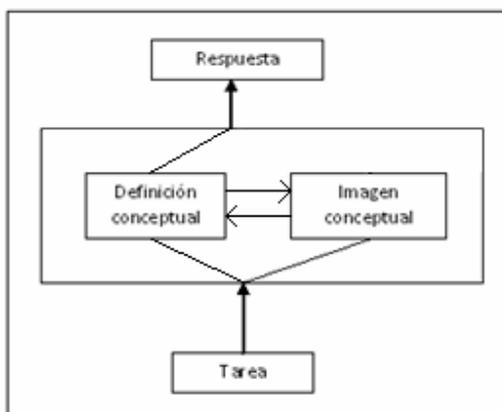


6. SUGERENCIAS

De acuerdo con los resultados a los que se ha llegado en este trabajo de investigación, siendo conscientes de las posibles limitaciones que en ella se puedan encontrar y desde luego, abierta a sugerencias y críticas desde la racionalidad educativa, planteamos a continuación algunas sugerencias de tipo didáctico, dirigidas especialmente a docentes que laboran en los niveles de E.B:

- La apropiación de la definición conceptual y la imagen conceptual de las diferentes clases y subclases de cuadriláteros, debe constituir para los docentes, el punto de partida para su abordaje con un grupo de estudiantes.
- Cuando el estudiante se enfrente a un problema o a una tarea de carácter geométrico que involucre a los cuadriláteros, tratar de desarrollar y activar el uso de la definición e imagen conceptual por parte del estudiante (ver Figura 38), a través de situaciones didácticas que favorezcan dicha actividad mental.

Figura 36. Esquema de actividad mental deseado en la resolución de problemas geométricos por parte de los estudiantes.

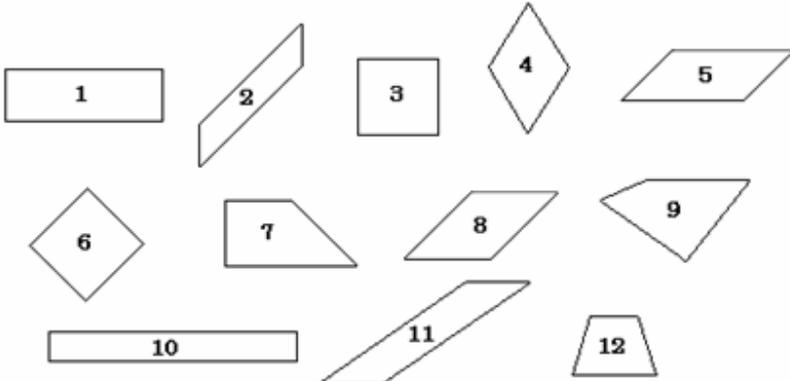


En este sentido, a continuación mencionamos algunos aspectos que podrían tenerse en cuenta en el diseño y aplicación de una actividad o situación didáctica:

- Si el estudio de los cuadriláteros se inicia con la definición de los mismos, evitar presentar una, y solo una representación visual en posición estándar asociada a tal definición. Lo que sugerimos es efectuar un “careo” entre la definición presentada y una amplia gama de figuras, a partir del cual, el docente a través de preguntas orientadoras se genere la inquietud, curiosidad, reflexión y sobre todo la comprensión de dichas definiciones. A continuación se presenta una situación didáctica que podría ser utilizada en una clase de cuadriláteros y en la cual se busca que el estudiante relacione y utilice la definición e imagen del concepto.

Un paralelogramo es un cuadrilátero en el cual ambos pares de lados opuestos son paralelos.

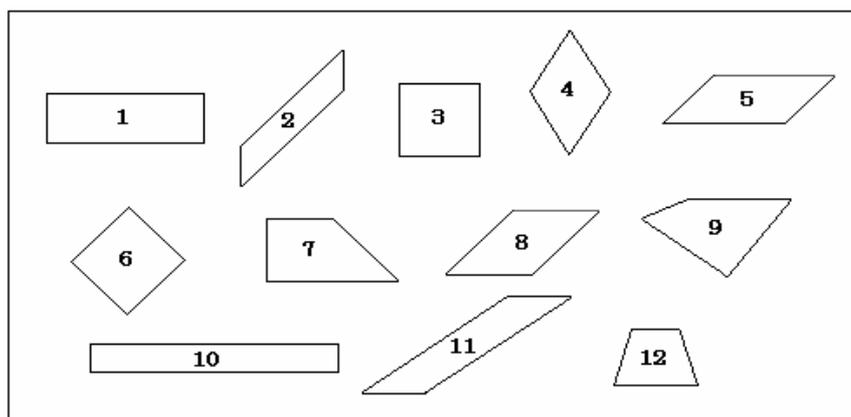
A partir de la anterior definición, decide cuáles de las siguientes figuras son paralelogramos. Justifica tus respuestas.



- Si no se decide iniciar con la presentación de la definición de los cuadriláteros, entonces se sugiere presentar una situación didáctica como la siguiente:

ACTIVIDAD

Agrupar los siguientes cuadriláteros según alguna característica, de modo que ninguna figura quede sin formar parte de algún grupo. Escriban la característica que tuvieron en cuenta para armar cada grupo.



Esta actividad puede ser aprovechada en una clase de geometría, para discutir grupalmente las argumentaciones o producciones que cada estudiante y cada grupo pueden plantear. Una vez socializado el trabajo, se pueden presentar las definiciones de las diferentes clases y subclases de cuadriláteros, de manera que sean los estudiantes quienes discutan y reflexionen sobre la relación existente

entre lo que “dice” la definición y las diferentes figuras que se presentan (el acompañamiento y asesoramiento del docente debe ser constante). En este caso, el hincapié tiene que estar centrado en las definiciones más que en las representaciones visuales.

- Si los recursos de la Institución Educativa lo permiten, utilizar un software de geometría (como el Cabri Géomètre) como medio interactivo para la formación de conceptos referentes a los cuadriláteros.

BIBLIOGRAFÍA

ALSINA, C., FORTUNY, J. y PÉREZ, R. ¿Por qué Geometría?. Propuestas Didácticas para la ESO. Madrid, España: Ed. Síntesis, S.A., 1997. pp. 170.

ARDILA, V. Olimpiadas Matemáticas 4º. Bogotá, Colombia: Ed. Voluntad S.A. 1999, pp. 160.

CALDERÓN, I. SUPERMAT 4º E.B. Bogotá, Colombia: Ed. Voluntad S.A. 2000, pp. 208.

CUBILLOS, C. y LIZARRAGA, J. Matemáticas Activas 7º. Bogotá, Colombia: Ed. Santillana S.A. 2002, pp. 128.

HUERTA, P. Los cuadriláteros a comienzos del siglo XIX, a comienzos del siglo XX, ¿qué ha cambiado?. En: Suma, Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Madrid. (Febrero, 1996); pp. 55-62.

ISAZA, M. Triáreas 3º. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Norma. 2005, pp. 121.

JAIME, A. Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La Enseñanza de las Isometrías del Plano. La evaluación del nivel de razonamiento. Valencia, 1993. pp. 1-302. En: <http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/Jai93.pdf>.

JAIME, A., CHAPA, F. y GUTIÉRREZ, A. Definiciones de triángulos y cuadriláteros: Errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B.. En: Epsilon nº 23. Valencia. 1992. pp. 49-62. En: <http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/JaiChaGut92.pdf>

JAIME, A. y GUTIÉRREZ, A. Propuesta de Fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El modelo de Van Hiele. 1990. pp. 295-384.

MARTÍNEZ, M. La Investigación Cualitativa Etnográfica en Educación. Bogotá: Ed. Circulo de lectura alternativa, 1996. pp. 1-109.

MEJÍA, H. Elementos de Matemáticas 6º. Bogotá, Colombia: Ed. BEDOUT EDITORES S.A., 1998. pp. 315.

MEN. Estándares Básicos de Matemáticas y Lenguaje. Bogotá, 2003. pp. 1-37.

MEN. Lineamientos curriculares. Matemáticas. Bogotá, 1998. pp. 1-103. En: <http://www.mineducacion.gov.co/lineamientos/matematicas/matematicas.pdf>

MORIENA, S. y SCAGLIA, S. Efectos de las Representaciones Gráficas Estereotipadas en la Enseñanza de la Geometría. México D.F.: Ed. Santillana, 2003. pp. 5-19. En: <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/405/40515101.pdf>

MORIENA, S. y SCAGLIA, S. Prototipos y estereotipos en Geometría. México D.F.: Ed. Santillana, 2005. pp. 20-35. En: <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/405/40517306.pdf>

QUIROGA, M. Matemáticas Activas 5º. Bogotá, Colombia: Ed. Santillana S.A. 2000, pp. 112.

TURÉGANO, P. Una interpretación de la formación de conceptos y su aplicación en el aula. Albacete, 2006. pp. 35-48.

SOSA, C. Un estudio sobre el problema de la enseñanza-aprendizaje de la definición geométrica en el nivel medio superior. El efecto de los ejemplos prototipo. México D.F., 2006. pp. 1-13.

ANEXOS

Anexo A. Cuestionario Aplicado a la Muestra de Estudiantes.

1. Resuelve las siguientes actividades:

A) Define los siguientes cuadriláteros:

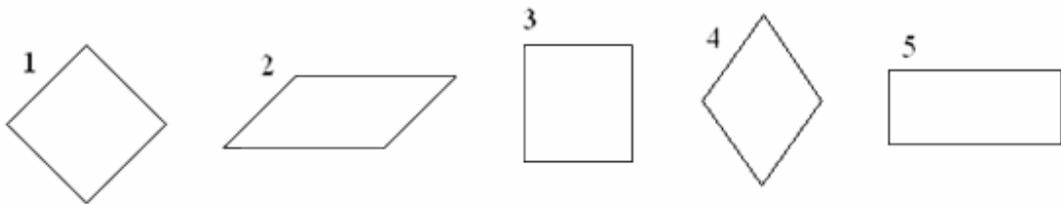
NOTA: Si no sabes o no recuerdas las definiciones, puedes dibujarlos.

Cuadrilátero	Definición
Paralelogramo	
Rectángulo	
Rombo	
Cuadrado	

B) En las siguientes figuras,

Pon una P dentro de los que son paralelogramos,
Pon una R dentro de los que son rectángulos,
Pon una X dentro de los que son rombos,
Pon una C dentro de los que son cuadrados,

Si es necesario, puedes escribir varias letras en cada figura.



B1) ¿Es la figura 3 un rombo? SI NO Justifica: _____

B2) ¿Es la figura 5 un paralelogramo? SI NO Justifica: _____

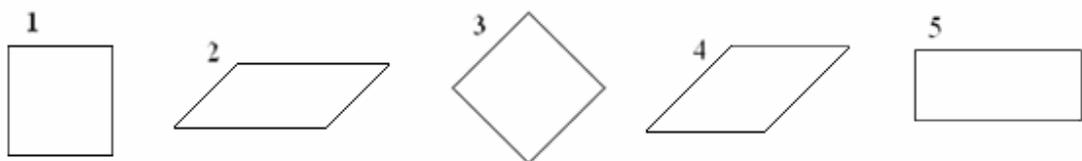
2. Lee las siguientes definiciones:

- Un paralelogramo es un cuadrilátero en el cual ambos pares de lados opuestos son paralelos.
- Un rectángulo es un paralelogramo con sus cuatro ángulos rectos.
- Un rombo es un paralelogramo que tiene sus cuatro lados iguales.
- Un cuadrado es un paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos rectos y sus cuatro lados iguales.

De acuerdo con las anteriores definiciones,

Pon una P dentro de los que son paralelogramos,
 Pon una R dentro de los que son rectángulos,
 Pon una X dentro de los que son rombos,
 Pon una C dentro de los que son cuadrados,

Si es necesario, puedes escribir varias letras en cada figura.



Anexo B. Respuestas de los Estudiantes a la Pregunta 1A: "Define los siguientes cuadriláteros: paralelogramo, rectángulo, rombo y cuadrado".

Respuestas de Paola

Cuadrilátero	Definición
Paralelogramo	
Rectángulo	
Rombo	
Cuadrado	 es el q ^{ue} tiene 4 lados iguales

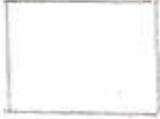
Respuestas de Deysi

Cuadrilátero	Definición	
Paralelogramo		
Rectángulo		Es una figura geométrica la cual tiene cuatro lados desiguales
Rombo		El rombo es una figura q" tiene cuatro lados iguales
Cuadrado		El cuadrado es una figura geométrica q" tiene cuatro lados iguales

Respuestas de Helen

Cuadrilátero	Definición	
Paralelogramo		
Rectángulo		
Rombo		
Cuadrado		Es el q' tiene sus cuatro lados iguales.

Respuestas de Sonia

Cuadrilátero	Definición
Paralelogramo	
Rectángulo	
Rombo	
Cuadrado	

Respuestas de Brayan

Cuadrilátero	Definición
Paralelogramo	 EL PARALELOGRAMO ES UNA FIGURA QUE AYUDA A CALCULAR EL PESO COMO EN GRAMOS
Rectángulo	 SUS LADOS NO SON IGUALES
Rombo	 ESTA ES UNA FIGURA CON IGUALES LADOS
Cuadrado	 SUS CUATRO LADOS SON IGUALES COMO DEBEN SER

Respuestas de Diana

Cuadrilátero	Definición
Paralelogramo	
Rectángulo	
Rombo	
Cuadrado	

Respuestas de Cristhian

Cuadrilátero	Definición
Paralelogramo	
Rectángulo	
Rombo	
Cuadrado	

Respuestas de Esteban

Cuadrilátero	Definición
Paralelogramo	 Es como un rectángulo movido
Rectángulo	Es una figura geométrica que tiene  2 líneas paralelas
Rombo	Es una figura geométrica que tiene 4 lados en forma de diamante 
Cuadrado	tiene 4 lados iguales 

Respuestas de Marcelo

Cuadrilátero	Definición
Paralelogramo	El paralelogramo es una figura geométrica que consta de 2 líneas paralelas.
Rectángulo	Es una figura geométrica formada por 3 líneas iguales
Rombo	
Cuadrado	ESTO FORMADO POR 4 LADOS IGUALES.

Respuestas de Martin

Cuadrilátero	Definición
Paralelogramo	
Rectángulo	UN RECTANGULO ES DESCENDIENTE DEL CUADRADO PERO EN ESTO FIGURO TIENE DOS LADOS QUE NO SON IGUALES O LOS DEMAS EJ: 
Rombo	
Cuadrado	ES UNO FIGURO CON UN ANGULO DE 90° 

Respuestas de Mirley

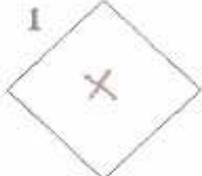
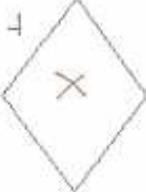
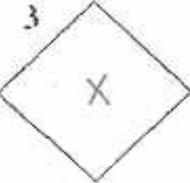
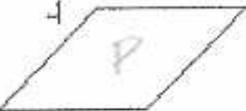
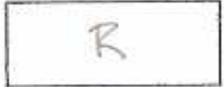
Cuadrilátero	Definición
Paralelogramo	
Rectángulo	
Rombo	
Cuadrado	

Respuestas de Johan

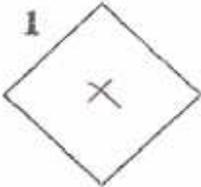
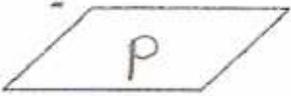
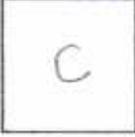
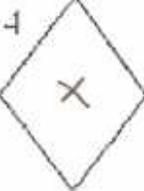
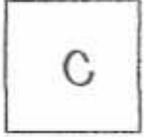
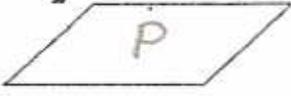
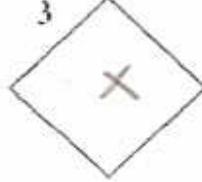
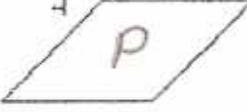
Cuadrilátero	Definición
Paralelogramo	
Rectángulo	
Rombo	
Cuadrado	

Anexo C. Clasificaciones y Respuestas de los Estudiantes a las preguntas B, B1, B2 y 2.

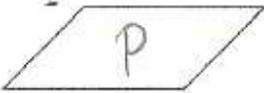
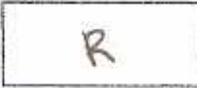
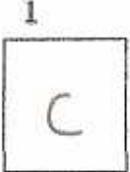
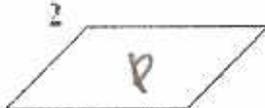
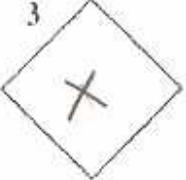
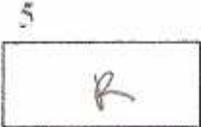
Respuestas de Paola

Respuesta a las preguntas B, B1 y B2					
1	2	3	4	5	
					
B1) ¿Es la figura 3 un rombo? SI <input type="checkbox"/> NO <input checked="" type="checkbox"/> Justifica: <u>porq" tiene los 4 lados iguales</u>					
B2) ¿Es la figura 5 un paralelogramo? SI <input type="checkbox"/> NO <input checked="" type="checkbox"/> Justifica: <u>porq" sus rectas son hacia adelante</u>					
RESPUESTA A LA PREGUNTA 2					
1	2	3	4	5	
					

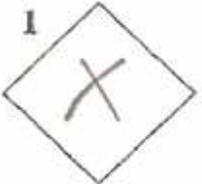
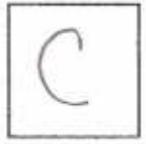
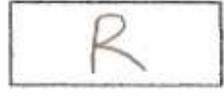
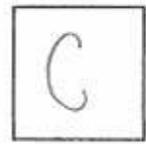
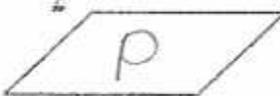
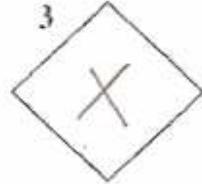
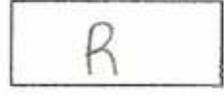
Respuesta de Deysi

Respuestas a las preguntas B, B1 y B2				
				
B1) ¿Es la figura 3 un rombo? SI <input type="checkbox"/> NO <input checked="" type="checkbox"/> Justifica: <u>Porq" tiene los cuatro lados iguales y este es un rectangulo q" tiene cuatro lados pero desiguales</u>				
B2) ¿Es la figura 5 un paralelogramo? SI <input type="checkbox"/> NO <input checked="" type="checkbox"/> Justifica: <u>Porq" los paralelogramos son inclinados</u>				
RESPUESTAS A LA PREGUNTA 2				
				

Respuestas de Helen

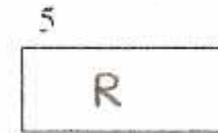
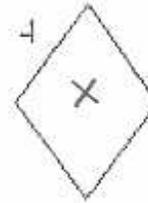
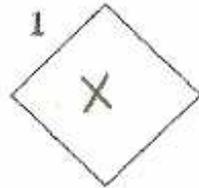
Respuestas a las preguntas B, B1 y B2				
				
<p>B1) ¿Es la figura 3 un rombo? SI <input type="checkbox"/> NO <input checked="" type="checkbox"/> Justifica: <u>por q' un rombo es como</u> <u>on triangulo</u> ^{solo q' este tiene 4 partes.} <u>y la figura 3 es un cuadrado q' tiene todos sus lados</u> <u>iguales</u></p> <p>B2) ¿Es la figura 5 un paralelogramo? SI <input type="checkbox"/> NO <input checked="" type="checkbox"/> Justifica: <u>por q' el paralelogramo</u> <u>tiene q' ser sus dos lados laterales corridos y la figura 5</u> <u>esta mostrando un rectangulo</u></p>				
RESPUESTA A LA PREGUNTA 2				
				

Respuesta de Sonia

Respuestas a las preguntas B, B1 y B2				
				
B1) ¿Es la figura 3 un rombo? SI <input type="checkbox"/> NO <input checked="" type="checkbox"/> Justifica: <u>X ≠ ES UNA FIGURA LLAMADA</u> <u>CUADRADO</u>				
B2) ¿Es la figura 5 un paralelogramo? SI <input type="checkbox"/> NO <input checked="" type="checkbox"/> Justifica: <u>X ≠ ES UNA FIGURA LLAMADA</u> <u>RECTANGULO</u>				
RESPUESTA A LA PREGUNTA 2				
				

Respuestas de Brayan

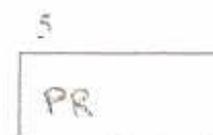
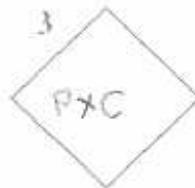
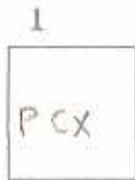
Respuesta a las preguntas B, B1 y B2



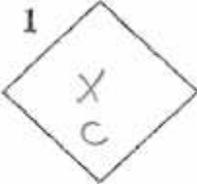
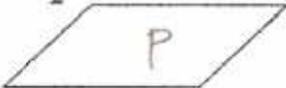
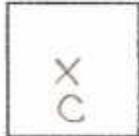
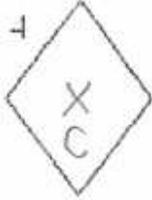
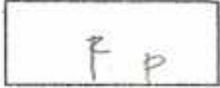
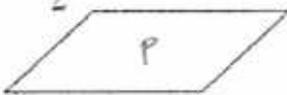
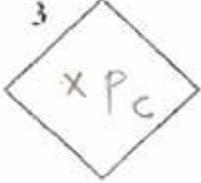
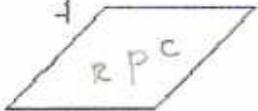
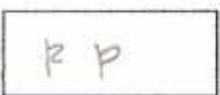
B1) ¿Es la figura 3 un rombo? SI NO Justifica: LA FIGURA 3 NO ES UN ROMBO PORQUE ES UN CUADRADO QUE TIENE SUS CUATRO LADOS Y VERTICES IGUALES

B2) ¿Es la figura 5 un paralelogramo? SI NO Justifica: LA FIG 5 ES UN RECTANGULO YA QUE TODOS SUS LADOS NO CORRESPONDEN Y NO SON IGUALES COMO UN CUADRADO

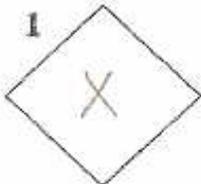
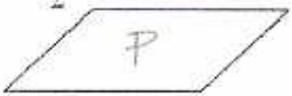
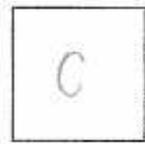
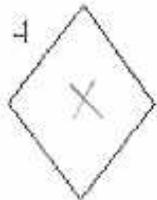
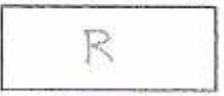
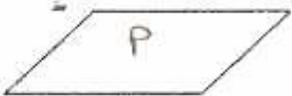
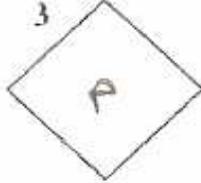
RESPUESTA A LA PREGUNTA 2



Respuestas de Diana

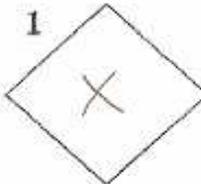
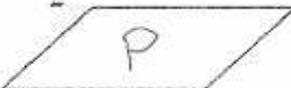
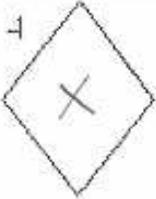
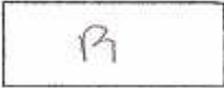
Respuestas a las preguntas B, B1, y B2				
<p>1</p> 	<p>2</p> 	<p>3</p> 	<p>4</p> 	<p>5</p> 
<p>B1) ¿Es la figura 3 un rombo? SI <input checked="" type="checkbox"/> NO <input type="checkbox"/> Justifica: <u>PORQUE UN ROMBO TIENE 4 LADOS IGUALES QUE UN CUADRADO</u></p> <hr/>				
<p>B2) ¿Es la figura 5 un paralelogramo? SI <input type="checkbox"/> NO <input checked="" type="checkbox"/> Justifica: <u>POR QUE HAY 4 LADOS IGUALES EN LA</u> <u>LADA DOS SON IGUALES</u></p> <hr/>				
RESPUESTA A LA PREGUNTA 2				
<p>1</p> 	<p>2</p> 	<p>3</p> 	<p>4</p> 	<p>5</p> 

Respuestas de Cristhian

Respuesta a las preguntas B, B1 y B2				
				
B1) ¿Es la figura 3 un rombo? SI <input type="checkbox"/> NO <input checked="" type="checkbox"/> Justifica: <u>No es un rombo ya que este es un cuadrado</u>				
B2) ¿Es la figura 5 un paralelogramo? SI <input type="checkbox"/> NO <input checked="" type="checkbox"/> Justifica: <u>No es un paralelogramo ya que este es un rectángulo</u>				
RESPUESTA A LA PREGUNTA 2				
				

Respuestas de Esteban

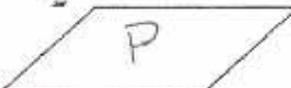
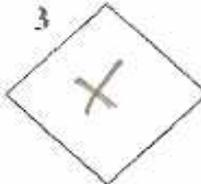
Respuesta a las preguntas B, B1 y B2

1  2  3  4  5 

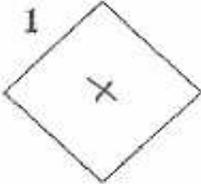
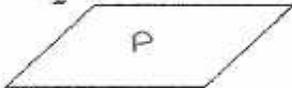
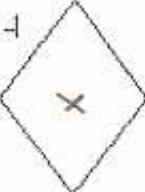
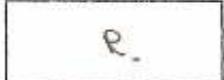
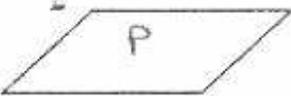
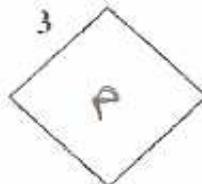
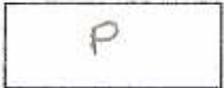
B1) ¿Es la figura 3 un rombo? SI NO Justifica: un rombo tiene forma de diamante la figura 3 es un cuadrado

B2) ¿Es la figura 5 un paralelogramo? SI NO Justifica: se parecen pero no son: el paralelogramo es corrido

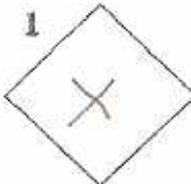
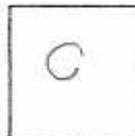
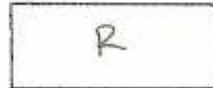
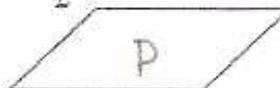
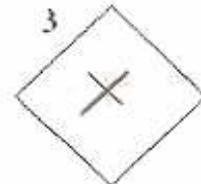
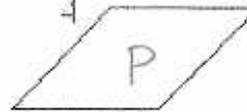
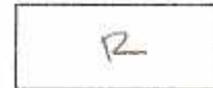
RESPUESTA A LA PREGUNTA 2

1  2  3  4  5 

Respuestas de Marcelo

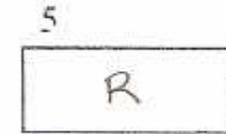
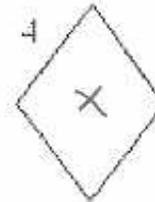
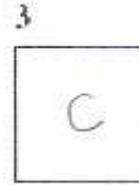
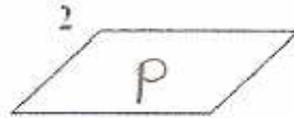
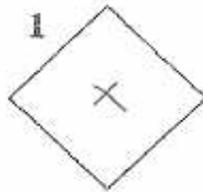
Respuestas a las preguntas B, B1 y B2				
1	2	3	4	5
				
B1) ¿Es la figura 3 un rombo? SI <input type="checkbox"/> NO <input checked="" type="checkbox"/> Justifica: <u>Por no tener líneas completamente iguales</u> <u>como el cuadrado.</u>				
B2) ¿Es la figura 5 un paralelogramo? SI <input checked="" type="checkbox"/> NO <input type="checkbox"/> Justifica: <u>Por q' tiene 2 líneas paralelas</u> <u>de diferente longitud.</u>				
RESPUESTA A LA PREGUNTA 2				
1	2	3	4	5
				

Respuestas de Martín

Respuestas a las preguntas B, B1 y B2				
				
B1) ¿Es la figura 3 un rombo? SI <input type="checkbox"/> NO <input checked="" type="checkbox"/> Justifica: <u>Porque sus lados son de un ángulo promedio de 90°</u>				
B2) ¿Es la figura 5 un paralelogramo? SI <input type="checkbox"/> NO <input checked="" type="checkbox"/> Justifica: <u>Porque tiene dos lados iguales y los otros dos son de medidas más reducidas</u>				
RESPUESTA DE LA PREGUNTA 2				
				

Respuestas de Mirley

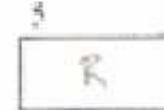
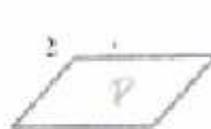
Respuestas a las preguntas B, B1 y B2



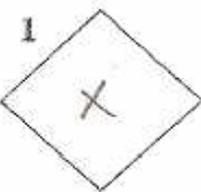
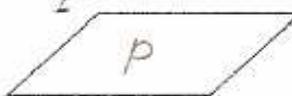
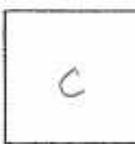
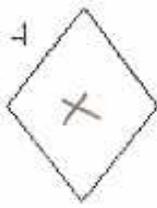
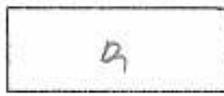
B1) ¿Es la figura 3 un rombo? SI NO Justifica: Porq" tiene los cuatro lados iguales y este es un rectangulo q" tiene cuatro lados pero desiguales

B2) ¿Es la figura 5 un paralelogramo? SI NO Justifica: Porq" los paralelogramos son inclinados

RESPUESTA A LA PREGUNTA 2



Respuestas de Johan

Respuesta a las preguntas B, B1 y B2				
				
B1) ¿Es la figura 3 un rombo? SI <input type="checkbox"/> NO <input checked="" type="checkbox"/> Justifica: <u>por que todas sus lados son iguales</u>				
B2) ¿Es la figura 5 un paralelogramo? SI <input type="checkbox"/> NO <input checked="" type="checkbox"/> Justifica: <u>por que no tiene forma de paralelogramo si no de rectangulo</u>				
RESPUESTA A LA PREGUNTA 2				
