matemática educativa

13º ENCUENTRO COLOMBIANO

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

ASOCIACIÓN COLOMBIANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
ASOCOLME

MATEMÁTICA EDUCATIVA

13° ENCUENTRO COLOMBIANO

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

ASOCIACIÓN COLOMBIANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
ASOCOLME

MATEMÁTICA EDUCATIVA
13° Encuentro Colombiano

1ª edición: 2013
© Asociación Colombiana de Matemática Educativa ASOCOLME
© Universidad de Antioquia
© Universidad de Medellín

ISBN: 978-958-8815-11-4

Editor:
Gilberto Obando Zapata
Presidente ASOCOLME, docente Universidad de Antioquia

Corrección de estilo, diseño y diagramación:
Sello Editorial Universidad de Medellín
e-mail: selloeditorial@udem.edu.co
www.udem.edu.co
Cra. 87 No. 30-65
Teléfono: 340 52 42
Medellín, Colombia

Todos los derechos reservados.
Se prohibe la reproducción total o parcial de esta obra –incluido el diseño tipográfico y de portada–, sea cual fuere el medio, electrónico o mecánico, sin el consentimiento por escrito de la Asociación Colombiana de Matemática Educativa ASOCOLME, la Universidad de Antioquia y la Universidad de Medellín.

Hecho el depósito legal.

Comité científico

Para esta versión del ECME se constituyó un comité científico que contó con la participación activa de muchos de los miembros de la comunidad académica nacional e internacional. Esta amplia participación de la comunidad nacional ha dado representatividad no solo a las diferentes regiones del país, sino también a diferentes líneas de trabajo de la educación matemática. Este comité científico es una muestra de la capacidad en Educación Matemática presente en el país, y sobre todo, de las disposición en ella para apoyar diferentes actividades tendientes a consolidar la comunidad nacional.

Nombre	*Institución*
Alexander Jiménez	Universidad de Antioquia
Ángela María Restrepo	Universidad de los Andes
Ángel Hernán Zúñiga Solarte	Universidad del Cauca
Arnulfo Coronado	Universidad de Amazonía
Claudia Patricia Quintero Quintero	Universidad de Antioquia
Claudia Salazar	Universidad Pedagógica Nacional
Diana Victoria Jaramillo	Universidad de Antioquia
Diego Garzón	Universidad del Valle
Edgar Alberto Guacaneme	Universidad Pedagógica Nacional
Edinson Fernández M.	Universidad de Nariño
Eduardo Tofiño	Universidad Pontificia Javeriana
Eliecer Aldana Bermudez	Universidad del Quindío
Ermilsun Palomino	Universidad Autónoma de Occidente
Gabriela Arbeláez	Universidad del Cauca
Guillermo Silva	Universidad de Antioquia
Harold Castillo	Universidad Pontificia Javeriana
Hilbert Blanco	Universidad de Nariño
Hugo Fernando Pardo	Universidad Javeriana
Jaime Romero	Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Jesús María Gutiérrez	Universidad de Antioquia
Jhon Jairo Múnera	Universidad de Antioquia

Nombre	*Institución*
Jhony Alexander Villa Ochoa	Universidad de Antioquia
John Henrry Durango	Universidad de Antioquia
Jorge Fiallo	Universidad Industrial de Santander
Leonor Camargo	Universidad Pedagógica Nacional
Ligia Amparo Torres	Universidad del Valle
Ligia Inés García	Universidad Autónoma de Manizales
Luis Carlos Arboleda	Universidad del Valle
Luis Roberto Pino-Fan	Universidad de Granada
Luz Adriana Cadavid Muñoz	Universidad de Antioquia
Luz Marina Gaviria	Universidad de Antioquia
Martha Bonilla	Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Martha Lucia Bobadilla Alfaro	Universidad del Cauca
Martín Acosta	Universidad Industrial de Santander
María Denis Vasco	Universidad de Antioquia
Mauro Rivas Olivo	Universidad de los Andes (Mérida)
Miguel Villarraga	Universidad del Tolima
Norma Lorena Vásquez	Universidad de Antioquia
Octavio Augusto Pabón	Universidad del Valle
Orlando Lurduy	Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Oscar Fernández M.	Universidad Tecnológica de Pereira
Osmar Vera	Universidad Nacional de Quilmes
Patricia Konic	Universidad de Río Cuarto
Pedro Arteaga Ceron	Universidad de Granada
Pedro Javier Rojas	Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Rodolfo Vergel	Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Sandra Evely Parada Rico	Universidad Industrial de Santander
Sandra Milena Londoño	Universidad de Antioquia
Sandra Yaned Cadavid Muñoz	Universidad de Antioquia
Santiago González Orozco	Universidad del Tolima
Teresa Pontón	Universidad del Valle
Walter F. Castro G.	Universidad de Antioquia
Yolanda Beltrán	Universidad de Antioquia

Comité Organizador

Nombre	*Institución*
Ana Cely Tamayo	Universidad de Medellín
Lucía Zapata	Universidad de Antioquia
Gilberto Obando Zapata	Universidad de Antioquia
José Alberto Rua	Universidad de Medellín

Junta Directiva ASOCOLME

Nombre	*Institución*
Gilberto Obando Zapata	Presidente
Pedro Javier Rojas Garzón	Vicepresidente
Martha Bonilla Estévez	Tesorera
Claudia Salazar Anaya	Secretaria
Hilbert Blanco Álvarez	Vocal
Eliecer Aldaba Bermúdez	Vocal
Julio Romero	Fiscal

Presentación

El Encuentro Colombiano de Matemática Educativa ECME es un proyecto social que ha contribuido significativamente a la consolidación de una comunidad académica nacional que se ocupa de la Educación Matemática como campo de estudio y campo profesional. El encuentro ha contado con el apoyo de la Asociación Colombiana de Matemática Educativa (ASOCOLME) y de las diferentes universidades del país que, año tras año, abren sus puertas para ser la sede oficial de este evento. Esta es la versión decimotercera del encuentro, que se organiza desde el año 1999. Esta versión del encuentro se ha realizado en la ciudad de Medellín. Las versiones anteriores se han realizado en diferentes universidades colombianas. El encuentro se ha realizado en ciudades como Armenia, Pasto, Manizales, Valledupar, Santa Marta, Tunja, además, de Bogotá, Cali y Medellín. De esta forma el encuentro ha cumplido una función importante al cohesionar la comunidad académica del campo de la Educación Matemática local, regional y nacionalmente.

Cada ECME se ha convertido en una oportunidad para el encuentro de amigos y colegas, para el intercambio entre el norte y el sur, el oriente y el occidente, los extremos y el centro. El encuentro favorece la interacción entre estudiantes (de licenciatura, de maestría y de doctorado), profesores (de colegio y de universidad) e investigadores internacionales.

No nos equivocamos al afirmar que los ECME han crecido con cada uno de nosotros (muchos de los que hoy nos acompañan como profesionales, asistimos al primer ECME como estudiantes de pregrado), con nuestras ponencias y con nuestros aportes. El ECME es un proyecto social que ha contribuido significativamente a la consolidación de una comunidad académica, que a pesar de ser joven, puede presentar hoy al País y al mundo un evento con gran variedad de ponencias en la programación (99 comunicaciones breves, 24 talleres, 40 experiencias de aula, 13 poster, 18 conferencias paralelas, 4 plenarias, 9 mesas temáticas). El ECME está en el corazón de cada uno de nosotros. La Asociación Colombiana de Matemática Educativa somos nosotros. Y no solo "los nosotros" presentes en este auditorio, sino también los "nosotros" ausentes en presencia pero presentes en la comunidad de educadores matemáticos del país.

Cada año el encuentro aborda una temática distinta, y busca proponer temas de análisis y reflexión en torno a problemáticas actuales para el desarrollo de la Educación Matemática en el país. Es así como en años anteriores se han abordado problemáticas en torno a los Lineamientos Curriculares del área de matemáticas, la evaluación en matemáticas, el aprendizaje de las matemáticas, la investigación en Educación Matemática en el país, para mencionar solo algunos ejemplos

Este año el encuentro tiene como temática central la formación: la formación de maestros de matemáticas, la formación de los licenciados para enseñar matemáticas, y la formación de los ciudadanos a través de nuestro sistema educativo de la Educación Básica y Media. Este es un tema central para la educación matemática en el país, toda vez que en el país se difunde un sentimiento sobre la falta de competencias matemáticas de los y las estudiantes del sistema educativo colombiano, lo que se evidencia en los bajos desempeños en pruebas estandarizadas (SABER, ICFES). Así entonces, serán puestas en el escenario público investigaciones, experiencias de aula y diversas prácticas pedagógicas para ser sometidas a la discusión y al análisis en pequeños y grandes grupos. Estas discusiones y análisis, con certeza, posibilitarán otras significaciones de la matemática que se ponen en acto durante su enseñanza en los diferentes niveles de aprendizaje.

Para lograr lo anterior se dispone de diferentes actividades (conferencias, cursos cortos, talleres, comunicaciones breves, poster y mesas temáticas), coordinadas por invitados nacionales e internacionales. Se busca generar diversidad de ambientes orientados a las necesidades de un público diverso: maestros en formación inicial, maestros en formación continuada o posgraduada, investigadores en Educación Matemática y orientadores de políticas públicas

Las ponencias presentadas en estas memorias han sido revisadas minuciosamente por los miembros del comité científico, que reúne expertos nacionales e internacionales en diferentes campos de la Educación Matemática, lo que brinda la certeza de la calidad académica de los documentos aquí publicados.

Agradecimientos

No se puede terminar esta presentación sin resaltar el apoyo de la Universidad de Antioquia, la Universidad de Medellín y la Asociación Colombiana de Matemática Educativa, sin las cuales no hubiera sido posible este Encuentro.

Por supuesto, detrás de las instituciones están las personas que conformaron los diferentes comités (Organizador, Académico, de Divulgación, Social, de Relaciones Organizacionales, Logístico) cuyo trabajo incesante nos permite presentar a la comunidad nacional el 13º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.

Un agradecimiento a todos los integrantes del comité científico del evento cuya labor fue fundamental en el proceso de evaluación y retroalimentación recibida por cada uno de los ponentes en el evento, al igual que en el acompañamiento a las diferentes actividades realizadas en el marco del evento. El apoyo de los miembros de este comité al ECME es indudablemente un apoyo a la consolidación de la comunidad académica nacional.

También agradecemos a todos los participantes quienes dan motivan y dan sustento este emprendimiento académico conjunto.

Gilberto Obando Zapata
Presidente ASOCOLME
Octubre de 2012

Contenido

CONFERENCIAS

CURSOS

TALLERES

ACTIVIDADES ESPECIALES

13° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa

Comunicaciones breves

Competencia matemática plantear y resolver problemas: el caso de la mediana como medida de tendencia central

Luis Germán Floriano Quintero[*]
Edgar Floriano Quintero[**]
Blanca Adriana Tovar Piza[***]

RESUMEN

La siguiente comunicación presenta un avance de investigación, en el cual se pretende caracterizar los niveles de la competencia matemática plantear y resolver problemas que se caracterizan en los desempeños de los estudiantes de 9° grado de la Institución Educativa Jorge Eliécer Gaitán, a partir de actividades con secuencias didácticas que involucren el objeto matemático la mediana. El trabajo hace parte del proyecto de investigación "Formación y desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de educación básica y media del Departamento del Caquetá, del grupo de investigación Desarrollo Institucional Integrado, de la Universidad de la Amazonia (Florencia-Caquetá), en la línea Didáctica de la Matemática.

Palabras claves: competencia matemática, plantear y resolver problemas, niveles de desempeño, secuencias didácticas, la mediana.

[*] Universidad de la Amazonia. Dirección electrónica: germanfloriano@hotmail.com
[**] Universidad de la Amazonia. Dirección electrónica: edflo24@gmail.com
[***] Universidad de la Amazonia. Dirección electrónica: blancaadrianatovar@gmail.com

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La necesidad de reformular los currículos hacia un enfoque por competencias, particularmente los currículos de matemáticas como nuevo escenario educativo, conduce a plantear un primer cuestionamiento ¿Qué es la educación basada en competencias?. La tendencia que ha seguido la educación en el último siglo ha sido el otorgarle cada vez mayor protagonismo al estudiante en su proceso de formación; para el caso de Colombia, en las últimas dos décadas se han presentado cambios sustanciales para la evaluación de los contenidos en los diseños curriculares de acuerdo con los marcos legales. En el año 1994 con la Ley 115, se introdujo el concepto de logro; dos años más tarde la resolución 2343 propuso los indicadores de logro; luego, los lineamientos curriculares (MEN, 1998) abrieron el camino hacia la enseñanza basada en competencias. Esto conduce al planteamiento de nuevos cuestionamientos ¿Qué se encuentra sobre competencias en los documentos oficiales del sistema educativo colombiano? ¿Es necesario rediseñar nuevamente los currículos educativos en las instituciones, en particular para el área de matemáticas?

Al evaluar los documentos oficiales, se encontró que en los lineamientos curriculares (MEN,1998) se hace referencia a las competencias como procesos generales, en cierta forma, haciendo una transición a lo propuesto en los estándares básicos de competencias matemáticas. Los estándares, establecen competencias matemáticas para todos los niveles del sistema educativo, cuyas características fundamentales son la contextualización de los problemas matemáticos y la coherencia horizontal y vertical para los contenidos a desarrollar. El MEN, por su parte, en el diseño de pruebas censales (Pruebas Saber 5°,9° y 11°) introduce el concepto de evaluación por competencias, lo que conduce a una nueva pregunta ¿los documentos institucionales ajustan sus currículos a este nuevo modelo de evaluación?

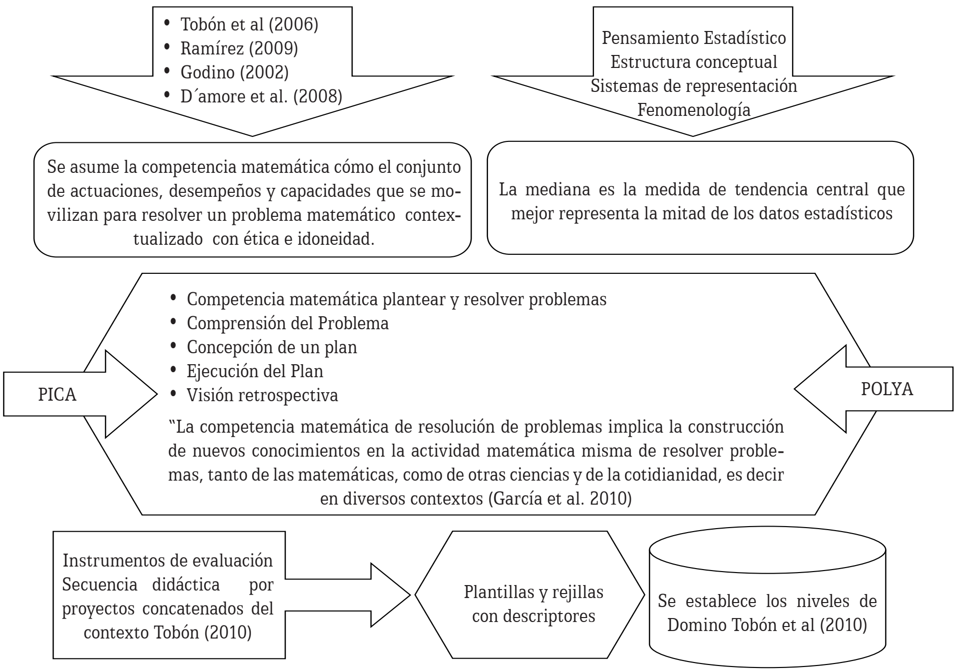
Se evidencia en la revisión de los documentos institucionales de la I.E. Jorge Eliecer Gaitán, de Florencia Caquetá, (PEI, planes de aula, planes de estudio) que no integran al currículo el aprendizaje basado en competencias y mucho menos a su sistema de evaluación. En esta perspectiva, se documenta, como evidencia empírica de esta investigación, la formación de un grupo focal con los docentes del área de matemáticas de la institución educativa, lo cual permitió conocer sus concepciones sobre competencias matemáticas, planes de área y sus evaluaciones. Se evidenció la disparidad de conceptos sobre competencias matemáticas y, su poca claridad sobre cómo desarrollarlas y evaluarlas en el aula. Esta situación coincide con problemas registrados en otros sistemas educativos como el caso de España, tal como lo documenta

Solar (2009) en su tesis doctoral cuando indica "Por contraparte, entre el profesorado existe una sensación de carencia de herramientas para desarrollar competencias en el aula. En España, el marco curricular indica las directrices sobre cómo se desarrollan las competencias matemáticas y son los centros escolares los que tienen que concretar el currículo planificando unidades didácticas para el desarrollo de dichas competencias" (p.13).

Por lo anterior desde una educación que se enfoca en competencias, el avance de investigación que reportamos en la presente comunicación pretende caracterizar los desempeños que los estudiantes evidencian en la competencia matemática Plantear y Resolver problemas, a partir de la aplicación de diseño secuencias didácticas en actividades donde se involucre el objeto matemático la mediana. Debido a la complejidad de la tarea de intervención en el aula, es conveniente expresar que el equipo de investigadores actualmente está trabajando en el diseño de las secuencias didácticas y en las matrices que permiten su evaluación.

REFERENTES TEÓRICOS

El siguiente esquema muestra el recorrido teórico que se encuentra en construcción, identifica los referentes teóricos que dan aporte al trabajo investigativo y las relaciones que se dan entre ellos:



Tomado de los diferentes aportes bibliográficos sobre competencia y competencia matemática se puede indicar que este no es un concepto abstracto. Trata de las actuaciones, desempeños y capacidades que ponen en práctica de forma integral las personas para plantear y resolver problemas específicos de la actividad matemática del contexto, recurriendo a la comprensión matemática y a las técnicas necesarias para realizar las labores que están relacionadas en diversos contenidos y procesos puestos en juego en la actividad matemática. Tiene en cuenta aspectos como, el cognitivo, el afectivo y la tendencia a la acción, donde prima el ser social, la ética y la idoneidad.

Estas actuaciones y capacidades no solo se adscriben a los sujetos, si bien ellos son las que las manifiestan. Estas se ponen en evidencia en las interacciones sociales. Es por ello que se requiere de instrumentos de mediación didáctica y sistemas de evaluación que permitan caracterizar dichas actuaciones, desempeños y capacidades, en actividades contextualizadas de complejidad creciente que se propongan a partir de secuencias didácticas, tal como recomiendan Tobón et al. (2010); es decir, una metodología para la planeación de aprendizajes y evaluación en el aula, específica para las competencias. La metodología propuesta es de tipo constructivista y se aborda desde la enseñanza problémica, lo que permite la caracterización de los niveles de dominio de la competencia que presentan los estudiantes en el saber conocer, saber hacer y saber ser, y de esta manera se plantean unos estadios que hemos considerado seguir inicialmente: inicial- receptiva; básica; autónoma y estratégico. Debido a que la enseñanza problémica atraviesa las demás competencias, se establece que la competencia matemática plantear y resolver problemas contribuye en mayor medida al problema de investigación y más mediante un objeto matemático como la mediana.

METODOLOGÍA

En esta investigación se realizará un estudio de tipo exploratorio desde el enfoque cualitativo-interpretativo, mediante la complementariedad de métodos, en este, se pretende diseñar secuencias didácticas por proyectos concatenados, diseñando instrumentos para las tareas, actividades y sistemas de evaluación con los cuales se puedan movilizar la participación de los estudiantes a través del objeto matemático la mediana. Se trata de establecer los avances mediante rúbricas y rejillas que contengan los descriptores que nos permitan identificar los niveles de desempeño en sus actuaciones; esto basado en una experiencia de aula donde se diseñan unas tareas desde la cual se proveen los datos cuando el estudiante hace actividad matemática desarrollando estas tareas.

Para el desarrollo de la presente investigación se proponen las siguientes fases: *Definición del problema* (Es provisional, no definido completamente); *Establecimiento del plan el trabajo* (este es flexible, supone la elaboración de un calendario, de una fijación de espacios y de compromisos de intervención en el aula; *Recolección de los datos* (incluye la aplicación de técnicas para la recolección de la información tales como: observación, entrevistas, encuestas, grabación, grupos focales); *Análisis de datos* (se refiere a la organización, decodificación y análisis de los datos para observar sus estructuras de significación y determinar sus alcances en diversos contextos); *Informe y validación de la información.*

ANÁLISIS

A la fecha no tenemos aún datos que analizar. La recolección de datos se hará mediante la aplicación se secuencias didácticas a un grupo de estudiantes, los cuales tienen características similares ya que pertenecen a una misma institución educativa

Los datos que se pretenden recolectar son de carácter cualitativo bajo un enfoque socio formativo. Para su recolección se diseñarán instrumentos como encuestas, entrevistas, grupos focales de discusión con docentes (inicialmente) y alumnos, diseños de secuencias didácticas, todos ellos articulados serán fuente para la descripción y análisis de los mismos.

CONCLUSIONES

La conclusión presentada es fruto de lo encontrado hasta esta etapa de la investigación.

El trabajo en curso pretende aportar a las líneas investigación sobre competencias matemáticas, que contribuyan a la construcción de los currículos en las instituciones educativas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

García et al (2010), Avance del proyecto formación y desarrollo de competencias matemáticas, Universidad de la amazonia.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1998). Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas. Serie Lineamientos. Áreas Obligatorias y Fundamentales. Creamos Alternativas Soc. Ltda. Bogotá, D.C.

OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo de mañana*. Madrid: Santillana.

Tobón S., Pimiento J., & García J (2010). Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias. Pearson Educación, México.

Solar H. (2009). Competencias de modelización y argumentación en interpretación de gráficas funcionales: propuesta de un modelo de competencia aplicado a un estudio de caso. Universitat Autònoma de Barcelona. Barcelona. España.

POLYA, G. (1969). Como plantear y resolver problemas, México, Trillas.

Construcción del concepto de fracción con estudiantes de Licenciatura en Educación Básica

Yoana Acevedo Rico[*]

RESUMEN

La comunicación expone los resultados del trabajo de investigación "*Construcción del concepto de fracción con estudiantes de Licenciatura en Educación Básica*". *Caso: una universidad en Bucaramanga,* realizado con la integración de los métodos cuantitativo y cualitativo. En una primera etapa se indagan e identifican los diferentes significados de fracción que tienen los estudiantes, a través de una prueba diagnóstica, apoyados en dos lineamientos teóricos: la didáctica de las matemáticas y la formación de maestros; posteriormente, se diseñan e implementan tres unidades didácticas utilizando las herramientas juego Partimundo, bloques lógicos de Dienes y regletas de Cuisenaire para construir los significados de fracción: parte-todo, razón y operador, lo que permite una observación directa del docente-investigador con el grupo objeto. Finalmente se aplica una prueba final que se contrasta con la prueba diagnóstica y el análisis de las observaciones realizadas en la implementación de la estrategia. El impacto de esta investigación genera en la Educación Superior la transformación de procesos de enseñanza a través de experiencias de aprendizaje significativas en los docentes en formación.

Palabras clave: fracciones, parte-todo, operador, razón, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

[*] Docente del Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad Pontificia Bolivariana Bucaramanga (Santander, Colombia). Dirección electrónica: yoana.acevedo@upb.edu.co

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La enseñanza de las matemáticas en los contextos escolares define los números fraccionarios como un eje articulador de los contenidos durante la Educación Básica. La complejidad en el proceso de aprendizaje de las fracciones emerge de los diversos significados del concepto, tales como *partidor, razón, operador,* cociente, medidor, entre otros, y de la interconexión entre estos. Los vacíos y errores conceptuales de los estudiantes reflejan una preocupación de los teóricos en el campo de la didáctica de las matemáticas, ya que si no hay una apropiación de los contenidos en el docente, la transposición didáctica será una tarea que podría traer a los nuevos estudiantes los mismos vacíos y errores conceptuales. El interés y el propósito de comprender el concepto de fracción en la enseñanza de las matemáticas se sitúa en un programa de Licenciatura en Educación Básica, con estudiantes en formación docente, desde dos perspectivas: desde su *propio proceso de aprendizaje* y desde lo que será su *futura práctica de enseñanza*. Lo anterior plantea como interrogantes de investigación: ¿Qué significados sobre fracción tienen los estudiantes de una Licenciatura en Educación Básica? ¿Qué errores conceptuales sobre fracción tienen estos estudiantes? ¿Cómo interconectan los diferentes significados hacia el concepto de fracción? *¿Cómo construi*r en futuros licenciados de la Educación B*ásica el concepto de fracción?*

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

A lo largo de la historia se han forjado diferentes significados sobre las fracciones, entendiendo como tales las distintas interpretaciones de las aprehensiones de objetos del mundo real a objetos mentales, incluyendo también las creaciones mentales y actos físicos que están implicados en su génesis.

A continuación se hace referencia a los significados que se abordan en esta investigación:

—*La fracción como parte-todo—.* Los estudios de Kieren (1983) consideran la *relación parte-todo* como un todo continuo o discreto subdividido en partes iguales, y destacan como fundamental la relación que existe entre el todo y un número designado de partes. Dentro de las expresiones del lenguaje cotidiano asociadas a este significado están, por ejemplo: la mitad del precio de un objeto; $^1/_4$ del peso de un objeto; $^2/_5$ del desplazamiento de un vehículo, es decir, donde se describen cantidades y/o valores de magnitudes. Es la interpretación sobre la cual generalmente se fundamentan los procesos de enseñanza. Llinares (1988) detalla algunas *"habilidades"* requeridas para tal significado: la noción piagetiana de inclusión de clases, identificar la unidad sobre la cual se trabaja, conservación de la cantidad y manejar la idea de área para representaciones continuas. Para Freudenthal (1995) *"las fracciones se presentan si un todo ha sido o está siendo rajado, cortado, rebanado, roto, coloreado, en partes iguales, o si se experimenta, imagina, piensa, como si lo fuera".* Con respecto al todo, lo considera discreto o continuo, definido o indefinido y estructurado o carente de estructura.

—*La fracción como razón*—. Una fracción puede ser considerada como una razón" y que "las razones desempeñan todas las propiedades de las fracciones, y todas las operaciones de cálculo se ejecutan tanto en unas como en otras (Ramírez, M., & De Block, D., 2009, p. 66). Se da el nombre de razón a la comparación de dos cantidades; con dos miras diferentes se puede hacer dicha comparación: con la mira de averiguar la diferencia que hay entre ellas, o con la de averiguar las veces que la una contiene a la otra (Sánchez, 1995).

—*La fracción como operador*—. En términos de Perera Dzul, y Valdemoros Álvarez (2009), la fracción se presenta como una forma alternativa de describir un *operador*; y se asocia directamente a multiplicaciones y divisiones sucesivas independientes del orden. En este sentido, se puede hablar de la fracción expresando un orden de ejecución; ejemplos de este uso de la fracción pueden apreciarse al expresar: *"los $^3/_4$ de los estudiantes en un salón son niños" o "el 25% de descuento sobre $3000"*; en el segundo caso, el porcentaje se asocia como operador, pues en este caso para hallar la cantidad a descontar será necesario multiplicar por 25 y dividir por 100 (o inversamente). En general, de la fracción como operador se dice que actúa como *"reductor o ampliador proporcional del objeto sobre el que se aplica"* (Gairin, 1998); o *"ciertos monstruos imaginarios que achican o agrandan a las víctimas que se les acerquen"* (Vasco, 1988).

METODOLOGÍA

El trabajo de investigación plantea una metodología integrada por la perspectiva *cuantitativa*, dada por la medición de los conocimientos tanto previos como posteriores a la implementación de una estrategia didáctica, utilizando pruebas como técnica, y la perspectiva *cualitativa*, definida por la observación e interacción con el objeto de estudio entre estudiantes en formación docente y el docente investigador, mediada por la aplicación de talleres en las unidades didácticas diseñadas. La propuesta de investigación es producto de una continua reflexión que permite situar el diseño, la implementación y la evaluación de la propuesta didáctica en el objeto de estudio.

El proceso metodológico se diseñó a través de las siguientes etapas:

—*Fase diagnóstica*—. Comprende la indagación del conocimiento previo y la problematización.

—*Fase de planeación de acciones*—. Comprende la indagación de antecedentes investigativos, fundamentación teórica, elaboración de resúmenes académicos.

—*Fase de aplicación*—. En la cual se implementa la propuesta y se hace seguimiento desde y hacia el problema. El desarrollo de esta fase se apoya con las unidades didácticas, como instrumentos que guían el proceso de enseñanza y aprendizaje Moreira (1993). Para el concepto de fracción, se diseñaron tres unidades didácticas con tres recursos didácticos pertinentes a cada significado.

—*Fase de evaluación*—. Esta fase se caracteriza por la reflexión y metacognición de la propuesta, y se efectúa en tres pasos, así: en el primer paso, se hace un contraste entre los datos recolectados de la prueba diagnóstica y el marco teórico desde y hacia el problema; en el segundo paso, se hace un contraste entre los datos encontrados en las observaciones realizadas en los talleres y los elementos de análisis obtenidos en el primer paso; y en el tercer paso, se hace un contraste entre los datos encontrados en la prueba final y los elementos obtenidos en el segundo paso. Los resultados del proceso de reflexión permiten determinar las categorías de análisis, por medio de las cuales se evalúa todo el proceso de investigación, plantear los hallazgos relevantes que caracterizaron el objeto de estudio y determinar nuevos problemas.

ANÁLISIS DE DATOS

—*Prueba diagnóstica*—. El significado de fracción de la mayoría de los estudiantes es de partidor. Hay un concepto de unidad discreta y continua, aunque las particiones de esa unidad son físicas, es decir, se piensa en partir el pan, la *pizza*, la naranja, etc., y no en cualidades que puedan representar unidades de medida de estos objetos. Las razones, en especial los porcentajes, no las relacionan con las fracciones, ni las utilizan e interpretan en la vida diaria. El significado de operador lo interpretan como una regla de tres, pero no tienen claro su algoritmo. Finalmente no hay interconexión entre los diferentes significados de fracción. De los resultados y análisis de la prueba, se puede inferir que los estudiantes muestran baja competencia en cuanto a sus conocimientos para enseñar las matemáticas de 2°, 3° y 4° grado de la básica primaria.

—*Unidad didáctica uno*—. Con la construcción del significado de la fracción como parte-todo a través del juego Partimundo, los estudiantes reconocen el todo como la unidad presentada en dos formas: continua y discreta, así como se observa la re-significación de partir unidades de medida y no objetos. Realizan la representación de la fracción en la recta numérica, tanto para fracciones propias como para fracciones impropias. Desde el significado parte-todo, los estudiantes construyen algoritmos para reconocer fracciones equivalentes y la relación de orden entre fracciones. Conforman fracciones desde la relación parte-todo y parte-parte.

—*Unidad didáctica dos*—. Los estudiantes reconocen el significado de la fracción como razón a través de los bloques lógicos de Zoltán Dienes, armando razones y proporciones (razones equivalentes). Trabajan las fracciones en otros contextos, tales como la probabilidad a través de dados y cartas de póker y análisis de datos registrados en noticias y medios de información. Construyen algoritmos para hallar y verificar proporciones, regla de tres y porcentajes. Generalizan procedimientos para ordenar fracciones de menor a mayor, y viceversa.

—*Unidad didáctica tres*—. Los estudiantes construyen el significado de la fracción como operador a través de las regletas de Cuisenaire, vistas como transformadores, achicadores o agrandadores de unidades. Construyen algoritmos para resolver ecuaciones de una incógnita. A través de los operadores achicadores y agrandadores, reconocen fracciones propias e impropias, así como la relación de orden entre fracciones.

—*Prueba final*—. Podemos inferir que los estudiantes han alcanzado competencias básicas en fracciones y sus diferentes significados, lo que les permite profundizar en los ejes temáticos del pensamiento numérico, específicamente números racionales, así como herramientas metodológicas para la enseñanza de los mismos. Hay un contraste entre los vacíos y errores conceptuales de los estudiantes encontrados en la prueba diagnóstica y los resultados adquiridos en la prueba final que reflejan la pertinencia en el diseño e implementación de las unidades didácticas, ya que les permitieron superar sus dificultades y construir nuevos conceptos.

CONCLUSIONES

Los errores conceptuales encontrados en la prueba diagnóstica se evidenciaron en las observaciones realizadas a los estudiantes en sus producciones escritas e intervenciones al resolver los talleres; se necesitó de una orientación continua para reforzar y precisar en cada grupo los significados que se iban presentando; posteriormente, en la socialización de los talleres se debían realizar precisiones de lenguaje matemático y comunicación, así como elaborar y ejercitar procedimientos y algoritmos en la etapa de la formalización.

La prueba final permite evaluar el impacto de las unidades didácticas en el concepto de fracción y realizar un contraste entre los conocimientos previos del estudiante y los logros alcanzados en la implementación de las mismas. Se reconocen los avances significativos en las dificultades detectadas en los estudiantes, así como profundización en sus conocimientos, tanto en las matemáticas como en su didáctica.

Los futuros docentes, desde una posición de estudiantes, han tenido la oportunidad de reflexionar sobre la construcción de un conjunto numérico; de cómo los sistemas de representación surgen al actuar en el modelo y de cómo las manipulaciones simbólicas permiten construir diferentes algoritmos y procedimientos que explican o resuelven una misma situación problema.

Se hacen necesarias investigaciones a futuro sobre las operaciones básicas de las fracciones con material concreto, donde el estudiante adquiera un cálculo mental con las fracciones, tal como lo tiene con los números naturales. Por otra parte, se requiere la aplicabilidad de estas operaciones a la vida diaria, donde utilicen las operaciones de las fracciones desde sus diferentes significados y no como una extensión de números naturales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Freudenthal, H. (1995). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.* CINVESTAV: México. (Traducción de L. Puig).

Gairin, J (1998): *Sistemas de representación de* números racionales positivos. U*n estudio con maestros en formación*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Zaragoza, España.

Kieren, T.E. (1980): The rational number construct-its elements and mechanisms. *Recent Research on Number Learning.* Columbus, Ohio ERIC/SMEAC

Llinares, S. & Sánchez, M., (1988*). Fracciones*. Madrid: Síntesis.

Moreira M. A. (1993). Unidades didácticas e investigación en el aula. *Colección Cuadernos de Didáctica*. Las Palmas de gran Canarias. España. Extraído el 20 de agosto, 2011.

Perera Dzul, P., & Valdemoros Álvarez, M. (2009). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *Educación Matemática*, 21, 29-61. Recuperado el 9 de junio de 2011.

Ramírez, M., & Block, D. (2009). La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares. *Educación Matemática*, 21, 63-90. Recuperado el 9 de junio de 2011.

Sánchez, M. V. (1995). La formación de los profesores y las matemáticas. Algunas implicaciones prácticas de las investigaciones teóricas. *Revista de Educación*. 306, 397-426.

Vasco, C. (1988). *El archipiélago fraccionario. Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas*. Vol. 2. Ministerio de Educación Nacional, Bogotá.

La resolución de problemas una estrategia didáctica para implementar el modelo pedagógico integrado Universidad Pontificia Bolivariana en la asignatura Cálculo Diferencial con estudiantes de primer semestre de Ingeniería Civil

Yoana Acevedo Rico[*]

RESUMEN

En esta comunicación se aborda el diseño, implementación y evaluación de una estrategia didáctica, en la asignatura Cálculo Diferencial con estudiantes de primer semestre de Ingeniería Civil. Se considera la resolución de problemas como una estrategia didáctica con la participación activa de los estudiantes. El problema formulado a los estudiantes se caracteriza por sus múltiples soluciones y proceso a largo plazo. La propuesta tiene como objetivo la aplicación de los conocimientos que deben adquirir los estudiantes en la asignatura de Cálculo Diferencial, involucrando otras asignaturas del primer semestre académico. La estrategia didáctica ha sido diseñada desde y hacia la implementación del modelo pedagógico integrado Universidad Pontificia Bolivariana (UPB). A través de la estrategia se logra el aprovechamiento del tiempo en el trabajo independiente hacia procesos de aprendizaje protagonizados por el estudiante, así como la construcción de métodos en la solución de problemas y la evaluación de estas soluciones para la toma de decisiones. Sin embargo, es necesario señalar la exigencia del trabajo durante el proceso tanto del docente como de los estudiantes, con la intencionalidad de no caer en el hacer y perder de vista el conocimiento.

Palabras clave: enseñanza y aprendizaje del cálculo, ingeniería, resolución de problemas.

* Docente del Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad Pontificia Bolivariana Bucaramanga (Santander, Colombia). Dirección electrónica: yoana.acevedo@upb.edu.co

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En las asignaturas del ciclo básico de la Escuela de Ingeniería (UPB, 2011), es preocupante el bajo rendimiento de los estudiantes, especialmente en el primer semestre, período de transición del colegio a la universidad, con todos los cambios en el estudiante en su vida personal, así como la incertidumbre de alcanzar sus metas de profesionalización.

Bajo este panorama se hace necesaria una revisión al diseño tanto metodológico como de evaluación de las asignaturas de matemáticas del ciclo básico de las ingenierías. En esta revisión es relevante plantear cambios en dos aspectos: la *aplicabilidad* de las asignaturas del ciclo básico en la Ingeniería, específicamente, las matemáticas. Y el *trabajo independiente* del estudiante, entendido como el aprovechamiento del tiempo, y la adquisición de hábitos y métodos de estudio que le permitan ser protagonista activo de su proceso de aprendizaje.

En el Modelo pedagógico integrado (UPB, 2009), se concibe el aprendizaje como promotor de construcción de conocimiento y desarrollo de competencias: habilidades, destrezas, actitudes y valores en búsqueda de la formación integral del estudiante con autonomía y un docente generador de espacios para lograr tales fines en un proceso dinámico y en continuo cambio. En sintonía con estas consideraciones, se hacen necesarios estudios e investigaciones, dedicados a profundizar y mejorar los conocimientos en matemáticas y las asignaturas del ciclo básico de los estudiantes de Ingeniería, ya que solo así garantizamos un mejor desempeño en su ciclo profesional y una mayor calidad en los profesionales que egresan de la universidad.

Se identifica la resolución de problemas como una posibilidad didáctica para la construcción y aplicación de las matemáticas que permita involucrar de manera activa al estudiante (Camacho & Santos, 2004). La resolución de problemas se considera como una estrategia de motivación intrínseca, ya que el alumno se siente estimulado a buscar conocimientos por sí solo. Ahora el estudiante es el centro del aprendizaje, y el profesor se coloca estratégicamente en la periferia, desde donde orienta el proceso (Juárez, 2004). El problema permite activar los conocimientos previos de los estudiantes, es decir, explicitar lo que saben y lo que no, para resolverlo y detectar las necesidades de aprendizaje. Adicionalmente, posibilita integrar conocimientos de diferentes áreas y facilita la comprensión. El problema es un conjunto de situaciones en un contexto dado, nuevo para el estudiante, en donde la sola utilización de los esquemas conocidos no es suficiente, sino que deben emplearse elementos precisos de conocimiento y comprensión. Para examinarlo y resolverlo, el estudiante, guiado por el profesor, observa, fija lo que sabe y no sabe, busca, analiza, juzga, evalúa, reflexiona e intercambia. Se trata de una manera de proceder mucho más próxima a la vida real que los métodos tradicionales de enseñanza (Mérida, 2005).

Es así como se lleva a cabo el proceso de diseño de una estrategia didáctica de metodología y evaluación por competencias, a través de la resolución de un problema; dicha estrategia se implementa con estudiantes de Ingeniería Civil matriculados en el primer semestre de 2011 en la asignatura de Cálculo Diferencial; posteriormente se evalúa a través del seguimiento del docente-observador de las producciones de los estudiantes durante la implementación, y una prueba escrita finalizando la implementación.

MÉTODO

El problema de investigación surge de la reflexión sobre la práctica educativa que constituye el eje de la profesión del docente, con la intencionalidad de mejorar la calidad de la formación de los profesionales y promover la comprensión del cálculo como un conocimiento del ciclo básico de la Ingeniería. Desde estos parámetros se define una metodología de investigación mixta, enmarcada en los dos paradigmas: cuantitativo, validando la implementación de la estrategia a través de la comparación de los resultados obtenidos en una prueba final con un grupo objeto con respecto a dos grupos de control, y cualitativo por el continuo acercamiento entre el docente-investigador y el objeto de estudio a través de la observación realizada en la implementación de la propuesta.

La investigación se desarrolla con un grupo objeto y dos grupos control de estudiantes de Ingeniería Civil de la Escuela de Ingeniería de la Universidad Pontificia Bolivariana, matriculados por primera vez en la asignatura Cálculo Diferencial en el primer semestre académico de 2011.

El trabajo de investigación es producto de una continua reflexión que permite situar el diseño, la implementación y la evaluación de la propuesta didáctica en el objeto de estudio. El diseño de la propuesta didáctica surge de la reflexión de la práctica de enseñanza de la docente-investigadora, contrastada con el marco teórico, haciéndola pertinente a las necesidades de conocimiento matemático de la población. Es así como la implementación está permeada por la continua reflexión de los hallazgos que se van encontrando, tanto en el grupo objeto, como en los dos grupos control. La prueba final es una prueba estándar, aplicada a todos los grupos de Cálculo Diferencial del Departamento de Ciencias Básicas de la UPB, diseñada por los profesores que dirigen la asignatura. Los resultados de la prueba final permitirán contrastar los hallazgos encontrados en la implementación de la propuesta con la evaluación del proceso, devolviéndonos al problema de investigación.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

El análisis de las observaciones realizadas durante la implementación de la propuesta didáctica se aborda de acuerdo con las fases en que se dividió dicha propuesta.

—*Primera fase*—. Los grupos se interesan por averiguar sobre el cartón, dónde lo venden, sus especificaciones técnicas, la resistencia del mismo a través de pruebas caseras que realizan y, además, clase de uniones del cartón para lograr una silla más compacta en el armado. La recopilación de la información es muy general; en algunos grupos se observa un mayor avance, puesto que se concentraron en el problema y su descomposición; otros, por el contrario, deben ser orientados por la docente. Finalizado el tiempo para esta fase, la mayoría de los grupos completan sus investigaciones preliminares y pueden entender el problema. Las parejas de trabajo son conformadas por los mismos estudiantes, y en el cumplimiento del pacto, se observa, dentro de las reglas más relevantes para ellos, la responsabilidad en las entregas de los avances, la asistencia y puntualidad a clase, entre otras.

—*Segunda fase*—. Los grupos ya traen propuestas de sillas sobre planos; la gran mayoría presenta por lo menos tres modelos, y son analizados en las entrevistas sobre el cumplimiento de las condiciones mínimas. La mayoría de modelos propuestos en planos no aceptados no cumplen algunos requisitos como el espaldar, el tamaño, la forma, etc. En esta fase, de los modelos que traen se seleccionan dos para construir modelos a escala en papel y así analizar las posibilidades que pueden tener en resistencia.

—*Tercera fase*—. Los grupos quedan con un modelo, lo construyen en cartón, a escala 1:2; en esta etapa se presentan inconvenientes, puesto que los detalles y el manejo del material no les permiten construir una silla que solucione el problema a escala real; los inconvenientes más relevantes se presentaron en desarrollos de modelos que no pueden inscribirse en una lámina estándar de cartón o la forma más resistente del cartón no coinciden con las partes de la silla que más fuerza necesitan.

—*Cuarta fase*—. Los grupos construyen la silla a escala real; para esta etapa son varios los inconvenientes, entre otros, que el cartón pierde propiedades de resistencia al ser utilizado varias veces y por eso deben utilizar láminas nuevas por cada prueba. Varios grupos han logrado la resistencia en el asiento de la silla, pero no han logrado un espaldar que soporte la persona sentada; además, las uniones que se utilizan en algunas sillas las hacen menos compactas y se desarman. Finalizando la última fase, todos los grupos logran presentar un prototipo de la silla a escala real; en el "Segundo Concurso De Sillas de Cartón de una Sola Pieza UPB-2011", de los 16 equipos conformados, el 75% logró la resistencia mínima de la silla. Una vez terminada la cuarta fase, los grupos deben analizar la solución encontrada. Los grupos que no logran la resistencia mínima de la silla continúan mejorando su propuesta hasta lograr el peso soportado requerido. Cada grupo debe construir una función de una variable que modele la superficie de la silla; posteriormente, esta función se optimiza sobre la lámina estándar de cartón (160 cm x 200 cm), para así conseguir el mayor rendimiento del material. Además, se calcula la fuerza axial de la silla, entre otros. Cada grupo debe hacer un informe de todo el proceso y construir dos situaciones problemáticas de optimización de la silla. La evaluación de la silla construida por cada grupo fue realizado por tres grupos y el docente.

En la socialización cada grupo es evaluado por todos los grupos y el docente, en donde se tiene en cuenta todo el proceso, tanto el trabajo realizado a través de las evidencias como la sustentación de la solución. Se socializa el trabajo realizado por cada equipo, mostrando el portafolio, que contiene: presentación de evidencias del seguimiento, fases 1 y 2; plano del desarrollo de la silla; silla en plano isométrico y vistas laterales; vídeo de armado de la silla en escala 1:2; vídeo prueba de la silla: armado de la silla, toma de peso, medida de la altura, lanzamiento contra la pared de la silla para probar si es compacta o no, prueba de la resistencia del respaldo por una persona, prueba de resistencia de peso que soporta hasta colapsar, análisis de la solución, donde se halla el área del cartón utilizado para modelar la función, área que depende de una de las aristas base sobre la cual se diseñó la silla; dicha función será optimizada, y se busca la silla de mayor área de cartón utilizado que pueda inscribirse en la lámina estándar del cartón (en su presentación comercial), así como se buscan modelos de rendimiento. Se evalúa el proceso teniendo en cuenta los puntos acordados en el pacto y las metas alcanzadas por cada equipo tanto a escala colectiva como individual.

A través de la prueba final se evalúa la estrategia didáctica, comparando los resultados obtenidos por el grupo objeto G1 con el que se implementa la estrategia didáctica, y los dos grupos control G2 y G3 con los que no se implementa. De los resultados obtenidos en la prueba final, se puede concluir que el 50% de los estudiantes del grupo G2 y el 45.16% del grupo G3 obtienen una nota por debajo de 2.5 sobre 5 que era el máximo valor. En contraste con los dos grupos, el grupo G1 tiene a toda la población con notas por encima de 2.5.

En la prueba escrita se observa mayor razonamiento de los estudiantes del grupo G1 que de los estudiantes de los grupos G2 y G3, ya que se justifican las respuestas con un procedimiento más preciso. En los problemas de tasas relacionadas y optimización, los estudiantes de los grupos G2 y G3 presentan dificultades y una gran parte de la población no contestó estos puntos, en contraste con el grupo G1, donde la mayoría de la población resolvió los problemas y utilizó procedimientos adecuados.

CONCLUSIONES

Se mantuvo siempre una competencia entre los grupos, específicamente hacia el cumplimiento y las propuestas que iban surgiendo; eso conservó el interés y la motivación hasta el final del proceso.

Los diferentes puntos de vista donde fue evaluado el proceso permitieron a los estudiantes hacer una retrospectiva de todo el proceso.

El método utilizado para la solución del problema y el manejo del trabajo independiente les permitieron encontrar un método de estudio e ir mejorando en la apropiación de hábitos de estudio.

Los resultados obtenidos por los estudiantes del grupo G1 en problemas de optimización comparados con los grupos G2 y G3 evidencian mayor destreza en el análisis y aplicación de los conocimientos adquiridos.

Se hace conveniente realizar réplicas de la estrategia didáctica en otros grupos con el fin de reforzar y profundizar el diseño de la metodología y evaluación implementadas.

Para implementar la estrategia es conveniente una mayor dedicación y tiempo por parte del docente, para la orientación de cada grupo, ya que se puede perder de vista la aplicación de los conocimientos y se convierte la solución del problema en pruebas de ensayo y error que conllevan a un ejercicio de solo hacer y no saber.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Camacho, M. & Santos M. (2004). *La relevancia de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas*. Números. 45-60.

Juárez, E. (2004). *La evaluación del método en el aprendizaje basado en problemas: una herramienta para toda la vida*. Agencia Laín Entralgo-CAM. Madrid:

Mérida, R. (2005). Una investigación sobre aprendizaje basado en problemas en el marco del prácticum de magisterio. *Investigación en la Escuela*. 57, 31-46.

Universidad Pontificia Bolivariana (2009). *Modelo Pedagógico integrado*. Medellín.

Universidad Pontificia Bolivariana (2010). *Estadísticas rendimiento académico 2006-2010*. Departamento de Ciencias Básicas. Bucaramanga.

Uso de representaciones geométricas para resolver ecuaciones cuadráticas a través del método griego: experimento de enseñanza

Jairo Alberto Acuña Quiroga[*]
Geraldine Bustos Motavita[**]
Miguel Ángel Cuervo Lagos[***]
Karen Lulieth Pulido Moyano[****]

RESUMEN

Presentamos los resultados obtenidos de una actividad realizada en el marco de un experimento de enseñanza desarrollado en grado noveno de una institución educativa de la ciudad de Bogotá. Dicho experimento fue realizado por cuatro estudiantes de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. En esta investigación se usa el álgebra geométrica como recurso didáctico para comprender la solución de ecuaciones cuadráticas de la forma a través del método griego. Describimos una de las actividades desarrolladas y su respectivo análisis con relación al marco teórico, el cual se basó en la teoría de representaciones semióticas de Duval (2004), los errores del álgebra de Socas et al. (1997), la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1986), y el experimento de enseñanza de Steffe y Thompson (2000). Finalmente, concluimos acerca de aspectos del álgebra geométrica relevantes encontrados dentro del desarrollo del experimento de enseñanza.

Palabras clave: representaciones, geometría, álgebra, experimento de enseñanza.

[*] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: jaacunaq@correo.udistrital.edu.co

[**] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: gbustosm@correo.udistrital.edu.co

[***] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: macuervol@correo.udistrital.edu.co

[****] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: klpulidom@correo.udistrital.edu.co

PROBLEMÁTICA

Identificamos tres tensiones que nos permitieron dar forma a nuestra investigación: la primera es el trabajo algorítmico de algunas fórmulas matemáticas, en particular el de la fórmula cuadrática; este algoritmo limita la capacidad de razonamiento de los estudiantes, lo que genera que hagan uso de él en situaciones que no la requieren (Vasco, 1986, Socas et al., 1996); la segunda es que, desde nuestra experiencia como estudiantes y docentes, observamos cómo en las clases de matemáticas se hace poco énfasis en el manejo de diferentes registros de representación de un objeto matemático, lo que difiere, por una parte, con la teoría de representaciones semióticas de Duval (2004), y por otra, con el Ministerio de Educación, (MEN, 2006), el cual resalta la importancia de hacer evidentes las diferentes representaciones de un objeto; por último, algunos docentes de matemáticas omiten la evolución histórica de algunos objetos matemáticos, conocimiento este que permite prever los posibles errores o dificultades que pueden presentar los estudiantes en el proceso de enseñanza aprendizaje. Por tal razón, nuestra investigación estaba encaminada a dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿qué aspectos del álgebra geométrica en el diseño de una secuencia de actividades permiten a estudiantes de grado noveno de una institución educativa, resolver ecuaciones cuadráticas a través del método desarrollado por los griegos? El propósito de la actividad aplicada fue identificar los aspectos de álgebra geométrica que los estudiantes tienen en cuenta al trabajar con expresiones algebraicas.

MARCO TEÓRICO

Las representaciones en la educación matemática hacen referencia a la utilización de signos y gráficos, y lo que Duval (2004) llama registros de representación semióticos, los cuales permiten registrar o comunicar el conocimiento. Este autor destaca dos procesos importante en el trabajo con los registros de representación: **conversión y tratamiento;** el primero de estos hace referencia al pasar de un registro de representación a otro, por ejemplo: pasar de la expresión algebraica a una representación geométrica que resultará equivalente a la inicial. El segundo hace referencia al manejo de cada uno de los registros; por ejemplo, al realizar el tratamiento a la siguiente expresión $a^2 - b^2$ obtenemos $(a-b)(a+b)$; observamos que nos mantenemos en un mismo registro de representación semiótico: el algebraico (Duval, 2004).

Otra referencia conceptual es el trabajo de Socas et al. (1996), del cual tomamos los siguientes aportes: en primer lugar, los estudiantes aún se encuentran muy ligados a algunas ideas de la aritmética, por ejemplo, el signo igual lo tienden a concebir como una acción física, y no identifican que se puede tomar como una restricción que condiciona el valor de x a un cierto valor que hace que la ecuación sea verdadera (Socas et al., 1996). Esto puede ser la causa, a su vez, de otros de los errores descritos por este autor, como el de la necesidad de clausura, en la cual los estudiantes tienden a operar la expresión algebraica hasta obtener un solo término, omitiendo que los elementos de la expresión inicial no son todos de la misma naturaleza. En segundo lugar, tenemos la importancia de reconocer los errores no como algo pasajero en el proceso de enseñanza sino como un puente que permite reforzar los conocimientos que se están trabajando (Socas et al., 1996). Por último, queremos identificar la interpretación que los estudiantes hacen con respecto a la letra, tomando como referencia la clasificación planteada por Küchemann (1981, citado en Socas et al., 1996). En cuanto al trabajo geométrico, es necesario que los estudiantes dominen lo que Godino, Batanero y Roa (2002) llaman la propiedad de disección, que se puede resumir como: la suma de todas las divisiones de un área es igual al área total de una figura. Pero también es necesario que se comprenda lo que es la conservación de área, es decir, la invariancia de una cierta cualidad (área) de un objeto cuando se le aplican unas ciertas transformaciones (Godino et al., 2002), o aquello que permanece invariante a pesar de las alteraciones de tiempo y espacio (MEN, 2006). Esta característica se hace de vital importancia para comprender el razonamiento que los griegos hacen para lograr resolver las ecuaciones cuadráticas.

METODOLOGÍA

El experimento de enseñanza es una metodología de investigación cualitativa que tiene la necesidad de explicar la concepción del aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes y su desarrollo en el contexto de la enseñanza, sin omitir que este modelo debía dar resultados del progreso de la comunicación interactiva matemática (Steffe, & Thompson, 2000).

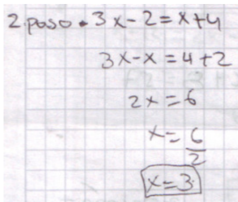
a. *Fases del experimento.* El experimento cuenta con tres fases: en primer lugar tenemos la fase planeación y diseño, en la cual los investigadores en conjunto con el grupo docente acuerdan las actividades a trabajar en el grupo, y las hipótesis de aprendizaje para cada una. En segundo lugar tenemos la fase de aplicación, en la cual se ponen en práctica las actividades propuestas, y con base en los resultados de estas se decide si es necesario modificar la planeación inicial en pro de los objetivos, y por último, el análisis retrospectivo, el cual retoma todos los datos recogidos durante la aplicación de las actividades, y permitirá concluir, de acuerdo con el marco teórico e hipótesis iniciales, si la investigación cumplió con los objetivos. Para la recolección de los datos se toman como instrumentos las videograbaciones de las sesiones de clase, las guías resueltas por los estudiantes, y los diarios de campo elaborados por el docente a cargo de las actividades.

b. *Descripción de la actividad.* La actividad está constituida por tres partes que se realizaron de manera conjunta. **A)** Hay un mapa en el que se encuentran señalados diferentes lugares. Los estudiantes deberán desplazarse a seis de los lugares señalados, siguiendo unas pistas. En estos lugares encontrarán unas claves que les permitirán desarrollar el método griego para resolver ecuaciones cuadráticas. Las pistas están dadas en un manual de instrucciones; estas consisten en resolver adecuadamente algunos ejercicios algebraicos y geométricos, y así poder llegar a los lugares en búsqueda de las claves; en caso que los estudiantes resuelvan incorrectamente dichas situaciones, no podrán llegar a los lugares previstos, por lo cual no podrán obtener todas las claves y deberán identificar cuáles fueron sus errores en el desarrollo de los ejercicios, para poder avanzar. **B)** Al llegar al lugar indicado en el mapa deben resolver otros ejercicios en las que trabajan el proceso de conversión de un registro de representación semiótico a otro, en especial de la representación algebraica a la geométrica. También se va a observar la realización del tratamiento de una expresión algebraica, dado que deberán resolver diversas ecuaciones. **C)** Al finalizar, si resuelven correctamente estos ejercicios, los estudiantes obtendrán una de las seis claves que les permitirá desarrollar el método griego para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + bx = c$.

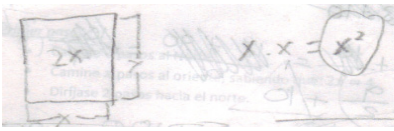
ANÁLISIS

a. *Intervención realizada por el docente investigador.* En el proceso de desarrollo de las actividades por parte de los estudiantes, el docente intervino constantemente al momento de observar errores de ellos en el desarrollo de las mismas, justificando con ello que en algunas ocasiones se llegaba a realizar el efecto *Toopaze* mencionado por Brousseau (1986), en el que indica que el docente, después de múltiples preguntas, da la respuesta de forma discreta, obstaculizando con ello la construcción del conocimiento por parte del estudiante. Aun así, las intervenciones del docente no siempre fueron de manera inadecuada, puesto que era necesario formalizar las ideas, estrategias y el conocimiento construido por los estudiantes para que de dicha forma, ellos lograran mejores nociones sobre el objeto matemático en estudio.

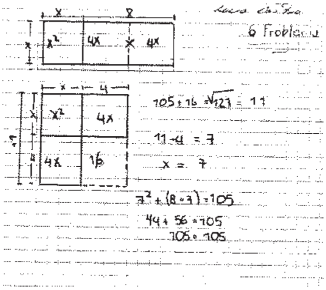
b. *Interpretación de lo realizado por los estudiantes.* En el tratamiento que los estudiantes hacen de las expresiones algebraicas, podemos identificar algunas dificultades, por ejemplo: en el ejercicio *simplifique la expresión* $2x^2+3x-x^2+6+9x$, los estudiantes reducían los términos de la incógnita de diferente exponente, y obtenían como resultado $13x^2+6$, ignorando el hecho que x^2 está restando. Este tipo de errores están directamente relacionados con uno de los cuatro puntos a los cuales se les pueden atribuir los errores del álgebra mencionados por Socas et al, (1996), quien señala que la naturaleza de los resultados del álgebra se atribuye a la necesidad de clausura con la que los estudiantes han trabajado desde la aritmética. Al respecto, los autores exponen que "las ideas sobre la respuesta única parece ser la causa de errores cometidos frecuentemente por los alumnos que simplifican una expresión como $3x+5y=8xy$" (p. 100).



Por otra parte, se puede interpretar que los estudiantes hacen uso de una de las clasificaciones de la letra mencionadas por Küchemann (1981, citado en Socas et al., 1996) quien hace referencia a la "letra ignorada", puesto que reconocen la letra pero no la tienen en cuenta al momento de realizar las operaciones. Los estudiantes evidencian fortalezas al momento de trabajar con los recíprocos aditivos y multiplicativos al momento de resolver ecuaciones lineales, como se observa en la figura de la derecha.



La conversión de un registro de representación algebraico a un registro geométrico es de gran utilidad para el desarrollo del método geométrico establecido por los griegos. De esta manera, se evidenció que los estudiantes representaron apropiadamente una expresión algebraica cuando el coeficiente de la variable x^2 era igual a uno, pero el momento que esta situación cambió teniendo como coeficiente un número mayor a uno en la misma variable, se les presentó gran dificultad al realizar la conversión. Esto nos permite reconocer que los estudiantes presentan algunas dificultades en la relación existente entre las expresiones algebraicas y su equivalente en representación geométrica, teniendo en cuenta lo que menciona Duval (2004) acerca de las representaciones como medio de comunicación del conocimiento. En la siguiente imagen evidenciamos cómo los estudiantes tienen dificultades no solo con el paso de las expresiones algebraicas a la representación geométrica, sino también con relación al perímetro y el área (figura de la derecha).



En el momento que los estudiantes reconocieron el método griego para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + bx = c$, identificaron las relaciones entre los dos registros de representación (algebraica y geométrica), además de manejar apropiadamente el proceso de conversión de un registro a otro (Duval, 2004), logrando identificar que la expresión x^2 representa una cuadrado de longitud de lado x. En la figura de la izquierda observamos cómo los estudiantes resolvieron la ecuación $x^2 + 8x = 105$.

CONCLUSIONES

En la gestión del docente se debe tener en cuenta el proceso histórico de un objeto matemático para prever diferentes dificultades conceptuales por parte de los estudiantes y obtener herramientas didácticas. Además, por medio de la representación geométrica los estudiantes lograron expresar los términos algebraicos en representaciones que los acercaban más a su realidad, los relacionaron con la repartición de terrenos en áreas, y reconocieron de esta forma relaciones y la descomposición de las mismas. Los obstáculos presentados por los estudiantes se lograban superar por medio de la reestructuración de las actividades, y de las consultas realizadas por los estudiantes sobre estos aspectos matemáticos. Los estudiantes identificaron que el término x^2 geométricamente representa un cuadrado de longitud x, y reconocieron propiedades fundamentales de figuras cuadradas. Además, se evidenció que la relación de equivalencia entre expresiones algebraicas y representaciones geométricas permitió la comprensión del método griego.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brousseau, G. (1998): *Théorie des Situations Didactiques, Grenoble,* La Pensée Sauvage.

Socas, M., Camacho M., Palarea, M., Hernández J. (1996). *Iniciación al álgebra.* Editorial Síntesis.

Duval, R., (2004) *Semiosis y pensamiento humano, registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle. Editorial Peter Lang.

Godino, J., Batanero, C., Roa, R. (2002) Medida de magnitudes y su didáctica para maestros. *Matemática y su didáctica para maestro*.

Ministerio de Educación Nacional [MEN], Colombia. (2006), *Estándares básicos de competencias en matemáticas*.

Steffe, & Thompson, (2000). Metodología de la enseñanza experimento: Principios fundamentales y esenciales elementos. En R. Kelly Lesh& AE (Eds.), *diseño de la investigación en matemáticas y ciencias* (pp. 267 – 307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Vasco, C. (1986) *Notas de matemáticas, preescolar, primaria, secundaria*. Edición 22, Bogotá.

Aproximación a las diferentes formas de constitución del número natural en niños de primer grado

*Omar Adolfo Agreda Mutumbajoy**
*Sirley Janeth Fonnegra Mesa***
*Natalia Franco Castro****

RESUMEN

Según la teoría de la actividad, el contexto sociocultural es fundamental para la construcción del conocimiento, a partir de las prácticas que desarrollen los individuos. En este contexto, el sujeto hace sus primeros acercamientos al concepto de número natural antes del ingreso a la escuela, mediante el conteo y la recitación de palabras número. Sin embargo, al llegar a la escuela este conocimiento se va transformando continuamente para acercarse a uno más estructurado. Esta modificación es evidente a través de las prácticas, las cuales son esenciales para dotar de sentido y significado a dicho concepto. Por eso, el presente trabajo busca identificar y analizar diferentes prácticas que se manifiestan al momento de desarrollar situaciones referentes al concepto número natural.

*Palabras clave: n*úmero natural, teoría de la actividad, actividad, prácticas, sentidos y significados.

* Universidad de Antioquia, dirección electrónica: agreda87@yahoo.es
** Universidad de Antioquia, dirección electrónica: janefm19@gmail.com
*** Universidad de Antioquia, dirección electrónica: nfkstro@hotmail.com

PROBLEMA

El número natural es visto como un objeto social, ya que los primeros acercamientos que el sujeto hace con este se dan antes del ingreso a la escuela, al ser usado en la vida cotidiana para resolver diferentes problemas, generalmente recurriendo al conteo y a la recitación de palabras-número. Cabe resaltar que este conocimiento es dotado de sentido y significado. Sin embargo, es en la escuela donde se privilegiará la aproximación a una construcción del conocimiento matemático más estructurado (entendiéndose por construcción del conocimiento la comprensión y uso que se le de a determinado concepto), permitiendo al sujeto, a su vez, darle nuevos sentidos y significados a dicho conocimiento, en particular al concepto de número natural, a través del intercambio entre el conocimiento escolar y el extra escolar.

¿Cómo los estudiantes de primer grado de la Institución Educativa Javiera Londoño-Sevilla construyen sentidos y significados el Número Natural a partir del trabajo con Situaciones de Aula relativas a los contextos de uso del número?

El objetivo del presente trabajo es identificar y analizar las diferentes prácticas que desarrollan los estudiantes en torno al concepto de número natural.

MARCO DE REFERENCIA

El análisis se hace a partir de la teoría de la actividad desde el enfoque socio-cultural, en donde la constitución del conocimiento matemático está ligada a un contexto cultural determinado y a "los procesos de construcción de sentidos y significados propios del intercambio sociocultural en que están inmersos" (Obando, 2011, p. 6). Es así como la actividad se convierte en la base de dichos procesos, y se entiende "actividad como el conjunto de acciones desarrolladas por los seres humanos, en contextos particulares de práctica, socialmente orientada a un fin (intencional)…" (Ricoeur, citado por Obando, 2011, p. 11). Estas acciones permiten desarrollar prácticas que responden a los retos de la cotidianidad y esto, a su vez, da lugar a la construcción de nuevos conocimientos.

METODOLOGÍA

Este trabajo se está llevando a cabo bajo la metodología de estudio de casos de tipo múltiple o colectivo (Creswell, 2007; Stake, 1999), ya que se analizan las diferentes prácticas desarrolladas por cada estudiante, lo que hace posible identificar cuáles son los procesos que se están llevando a cabo con el fin de dotar de sentidos y significados al concepto de número natural.

Para esto, se están realizando intervenciones con 6 niños del grado segundo de la Institución Javiera Londoño-Sevilla en Medellín (el proceso se inició en 2011, cuando los estudiantes estaban en el grado primero).

Intervención inicial. Con la intención de observar si los estudiantes reconocen las diferentes representaciones del número natural, realizan procesos de conteo, cardinación, correspondencia, codificación y descodificación, relaciones de orden, se lleva a cabo la situación de aula llamada "Bingo", en el cual se trabaja con un rango de 1 a 15, ya que los estudiantes solo reconocen números inferiores a 20; se emplearon diferentes formas de representar los números naturales (colecciones de muestra, constelaciones, configuraciones, símbolos-número, ver tabla 1).

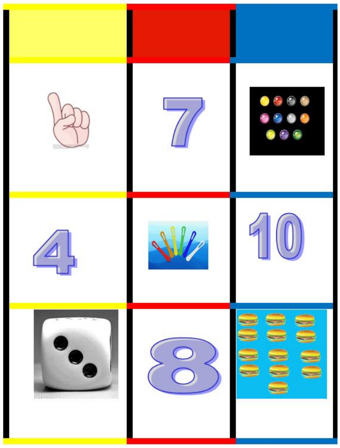


Ilustración 1

Esta primera intervención dio lugar para la realización de otras intervenciones en las que no solo se centraría la atención en las diferentes representaciones del número natural, sino también se haría referencia al uso que se le da al número natural en diferentes contextos.

¿Qué números hay en mi vida? El objetivo es indagar, a través de una imagen, qué utilidad, sentidos y significados dan los estudiantes al número natural.

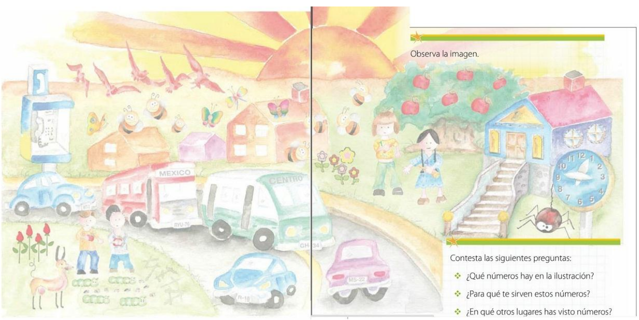


Ilustración 2[1]

1 (Slideshare, 2012)

Llegó carta. Esta situación permite hacer un acercamiento al número natural en un contexto de localización, en el cual se pretende que los estudiantes realicen procesos matemáticos de composición y descomposición. Además, que hagan uso de las nociones de lateralidad.

Aviones en vuelo. El objetivo es ver las estrategias y tácticas que usan los estudiantes para medir la distancia recorrida por un avión de papel, para lograr, así, que identifiquen al número en su contexto de medida.

Recorrido. Esta situación permite ver si el estudiante realiza procesos relacionados con las representaciones del número, el número para contar, la codificación, la descodificación y el uso de la operación suma.

ANÁLISIS DE DATOS

Para el análisis de este trabajo se toman en cuenta las siguientes categorías: técnicas, acciones, lenguaje y gestos.

Técnicas. Es común que los estudiantes usen sus dedos como herramientas para realizar diferentes procesos, en particular, los relacionados con hacer conteos a través de la correspondencia uno a uno (en este caso, se usa el dedo para señalar cada uno de los pasos que se deben dar sobre la cuadrícula o para contar una cantidad; uno de los estudiantes usa el pie para contar (medir) una longitud), dando cuenta de la práctica social en la que están inmersos los estudiantes, la que se valida como una forma de acceder al conocimiento.

Lenguaje. Algunos de los estudiantes recurren al uso de las palabras-número en voz alta cuando están realizando el proceso de correspondencia uno a uno. Sin embargo, se notó en un estudiante la ausencia de una pronunciación correcta de las mismas, por ejemplo; para decir "dos", utiliza la expresión "do". Hay que destacar que esta forma de pronunciación siempre es utilizada por este estudiante y, muy pocas veces, logra completar las palabras.

Además, emplean palabras asociadas al contexto de uso del número que se está trabajando como "kilómetros", "metros", "mil" (en contexto de medida); izquierda, derecha (en contexto de localización). En particular, hubo un caso en el que un estudiante buscaba palabras que fueran equivalentes a las que el profesor decía, por ejemplo, cuando se le dice "retroceder", el estudiante relaciona esto con ir "para atrás" (en localización).

Acciones. En las situaciones se emplean diferentes formas de representación del número; estas representaciones permiten a los estudiantes realizar diferentes formas de conteo. Contar es establecer "correspondencia uno a uno entre los objetos de una colección y la lista de las palabras-número" (Brissaud, 1993, p. 35). En localización, la correspondencia se establece entre la cantidad de pasos que se hacen sobre la cuadrícula, el dedo con el que señalan y la palabra-número que asignan a cada movimiento. En este caso, a la palabra-número se le asignaba una dirección (derecha, izquierda, adelante o atrás). En el caso de la medida, la palabra-número era relacionada con una medida de longitud (kilómetros o metro). Pero, en particular, se puede afirmar que la acción empleada por los estudiantes era la de enumerar[2], ya que toman la última palabra-número como una totalidad (Brissaud, 1993).

En la ejecución de las situaciones se evidenció que los procesos y prácticas de los estudiantes están ligados al conteo de colecciones de muestra, constelaciones y, en especial, representaciones de los números por medio de palitos y dedos. Cuando el estudiante logra identificar el número natural a través de diferentes representaciones en distintos contextos, en realidad está estableciendo relaciones que le permitirán dar mayores sentidos y significados al concepto de número natural.

CONCLUSIONES

Es preciso que los maestros tengan en consideración el contexto social y cultural en que están inmersos sus estudiantes, ya que este les brinda una serie de conocimientos iniciales que sirven de base para aprendizajes posteriores más estructurados, además de herramientas que se pueden usar para la construcción con sentido y significado de dichos conocimientos. Además, se deben plantear situaciones que permitan la participación de los estudiantes en la construcción del conocimiento y, que no los conviertan en sujetos pasivos que solo realizan procesos de memorización y mecanización.

En particular, respecto al número natural, se hace evidente la necesidad de plantear situaciones que estén relacionadas con problemas de la vida diaria, en donde se hace posible estudiar el concepto desde las diferentes representaciones que tiene el número, y los contextos en los que es usado. Esto permitirá dotar de sentido y significado dicho concepto.

[2] Es necesario tener en cuenta que los investigadores tienen diferentes opiniones respecto a lo que es pasar de contar-numerar a enumerar. Aquí se asume el enumerar como el aislar "la última palabra-número que se ha pronunciado para responder a una pregunta que comience por "¿cuántos… hay?"" (R. Gel, citado por Brissaud, 1993)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cantón, A. (2009). Matemáticas. Primer Grado.

Brissaud, R. (1993). *El aprendizaje del cálculo. Más allá de Piaget y de la teoría de los conjuntos*. Madrid, España: Visor Distribuciones.

Ministerio de Educación Nacional. (2003). *Estándares de matemáticas.* Santa Fe de Bogotá, Colombia: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas: Lineamientos curriculares.* Santa Fe de Bogotá, Colombia: Magisterio.

Obando, G. (2011). Filosofía, matemáticas y educación: por un enfoque histórico-cultural en educación matemática (pp. 1-50). En Obando Zapata, Gilberto (2011). *Manuscrito sin publicar*. Medellín.

Ruiz, M. L. (2003). La construcción del número natural y la numeración. En M. d. Chamorro, *Didáctica de las matemáticas para primaria* (págs. 93-129). Madrid, España: Pearson Educación.

Vásquez, N. L. (2010). Un ejercicio de trasposición didáctica en torno al concepto de número natural en preescolar y primer grado de la Educación Básica. (Maestría). Universidad de Antioquia. Medellín.

Una secuencia didáctica como herramienta pedagógica para introducir el concepto de función lineal en grado 9°

*Jhon Jair Angulo Valencia**

*Sonia Celorio Mina***

RESUMEN

En la presente propuesta se muestran los resultados obtenidos al implementar una secuencia didáctica sobre el concepto de función lineal, con estudiantes del grado 9º de la Institución Educativa Teófilo Roberto Potes del municipio de Buenaventura. Este recurso surge como una herramienta potente para superar algunas dificultades reportadas por algunas investigaciones en didáctica de las matemáticas; en esta se retoman elementos teóricos y metodológicos propuestos por los Lineamientos Curriculares (1998) y Estándares Básicos de Competencia en relación con el desarrollo del pensamiento variacional, como también aspectos matemáticos, didácticos y curriculares tomados de las investigaciones estudiadas. Entre estos aspectos sobresale, desde lo matemático, el concepto de función lineal y sus múltiples representaciones, y desde lo didáctico y lo curricular, la importancia de una educación situada, valorando los contextos en los cuales surge la actividad matemática con el propósito de crear significado a los objetos matemáticos que ella modela.

* Universidad del Valle. Dirección electrónica: licenmate@gmail.com

** Universidad del Valle. Dirección electrónica: socemi1985@hotmail.com

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

La falta de contextualización, articulación e integración de algunas situaciones problema en la enseñanza de las matemáticas puede crear una ruptura para que la aprehensión de conceptos como razón de cambio, variables dependientes e independientes sea más significativa y funcional. Esto es común evidenciarlo en las aulas de clases, pues en la mayoría de los casos se pierde cualquier tipo de referencia que posibilite relacionar el álgebra con fenómenos y problemas propios del contexto sociocultural en el cual se realiza la actividad matemática o de otras disciplinas.

En esta dirección, el Ministerio de Educación Nacional (1998), señala que: "El contexto tiene un papel preponderante en todas las fases del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, es decir, no sólo en la fase de aplicación sino en la fase de exploración y en la de desarrollo, donde los alumnos descubren o reinventan las matemáticas" (p. 41).

Ahora bien, siendo la actividad marítima una de las principales fuentes de ingreso económico del municipio de Buenaventura, se reconoce en ella un contexto rico para la generación de situaciones problema donde se puede modelar, descubrir y hacer matemáticas. En este sentido, la Secuencia Didáctica presenta una situación problema fuertemente arraigada en Buenaventura: el intercambio comercial relacionado con la producción pesquera. En la actividad propuesta se hace una transformación o manipulación en el paso de un lenguaje natural al lenguaje simbólico, donde se alude al uso de la función lineal como una herramienta que permite describir el comportamiento de fenómenos en diversos contextos.

De otro lado, Duval (2004) afirma: "No hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación" (P. 25), de lo cual se considera que la diversidad y coordinación de los registros de representación permiten que al validar los procesos de aprendizaje de una temática en particular se haga necesario ilustrar, organizar y presentar de diferentes maneras una determinada información y, además, apropiarse del concepto.

"Cómo a través de una secuencia didáctica se puede introducir el concepto de función lineal en el grado 9°"

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Las matemáticas, como constructo sociocultural, son una necesidad de todos los grupos humanos para poder explicar y darle sentido a todo aquello que les rodea, dado que mediante esta, el hombre da razones frente al comportamiento de un determinado fenómeno propio de las matemáticas o de otras ciencias. Siendo así, se puede asegurar que de acuerdo con unas necesidades contextuales, los individuos de una comunidad crean, desarrollan, organizan, establecen y publican saberes que consideran necesarios para el desarrollo de un determinado grupo o población. De esta forma, el concepto función surge como necesario para modelar y organizar fenómenos o situaciones de variación, razón de cambio y dependencia, entre otros.

De otro lado, teniendo en cuenta la definición de secuencia didáctica dada por Arcuri, Jusza, Nahim, Lucca y otros (2005), se considera que:

"La secuencia didáctica se entiende como una estrategia de trabajo a partir de la cual, el docente traza el recorrido pedagógico que necesariamente deberán transitar sus alumnos junto a él, para construir y reconstruir el propio conocimiento, ajustándolo a demandas socioculturales del contexto".

De lo anterior se puede decir que la Secuencia Didáctica es un dispositivo o herramienta de enseñanza, que presenta de manera organizada, articulada y sistematizada un determinado saber, mediante el uso de situaciones problema, con una intencionalidad definida que es generar en los estudiantes un conocimiento desde el análisis, la reflexión, la confrontación y la comprensión de la situación planteada.

En este orden de ideas, el desarrollo teórico de las distintas situaciones abordadas en esta investigación se fundamentó en los documentos, ideas y planes educativos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional, tales como: Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) y Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), los cuales coinciden en que: "El acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento, y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas (p. 41).

METODOLOGÍA

Este trabajo se llevó a cabo en cinco fases diferentes las cuales, a partir de una previa articulación, sirvieron de sustento para la escritura del documento final.

La primera fase inicio con una revisión bibliográfica, con el propósito de recopilar información de investigaciones, teorías y conceptos que dieran cuenta de los aspectos que intervienen para la comprensión del concepto de función lineal. En la segunda fase, se diseñó una secuencia didáctica a partir del análisis de los resultados de las investigaciones anteriores. En la tercera fase se continuó con la implementación y sistematización de la experiencia obtenida a través de la práctica de la secuencia didáctica en el aula. En la cuarta fase se siguió con el análisis de los resultados y objetivos propuestos. Y finalmente, se escribió el informe final.

RESULTADOS

No cabe duda de que la buena coordinación entre los registros de representación, la argumentación o justificación de lo que se plantea, la intervención del contexto en las actividades académicas y el uso de recursos pedagógicos como la secuencia didáctica permiten que el estudiante pueda comprender los saberes que matemáticamente se quieran transmitir.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arcuri M; Jusza I; Nahim A; Lucca L & otros. (2005). *Aportes para la elaboración de secuencias didácticas egb1 y egb2*. Recuperado el 12 de junio del 2011 de: www.institucional.mendoza.edu.ar/.../Ed%20Física%20EGB1%20y%20EG...

Azcárate, C & Deulofeu, J. (1990). Funciones y gráficas. Colección: *Matemáticas, cultura y aprendizaje*. Editorial Síntesis. Madrid, España

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano, registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (Segunda Edición).Santiago de Cali, Colombia: Peter Lang S. A.

Grupo Azarquiel. (1992). El simbolismo algebraico o ¿por qué los profesores nos empeñamos en complicar tanto la vida de nuestros alumnos?, *Tarbiya n° 1-2,* 81-90. Universidad autónoma de Madrid, España.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Santa Fe de Bogotá, Colombia

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas.* Santa Fe de Bogotá, Colombia.

Swokowski, E. (1983). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica* (quinta edición). Boston, EE. UU.: Grupo Editorial Iberoamericana.

La noción de infinito en George Cantor. Un estudio histórico-epistemológico en la perspectiva de la educación matemática

*Mónica Andrea Aponte Marín**

RESUMEN

El presente escrito muestra adelantos del trabajo de grado de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad del Valle, en el cual se intenta caracterizar, a partir de estudios históricos epistemológicos detallados, los procesos de consolidación del infinito matemático en el marco de la construcción de una teoría axiomática de conjuntos infinitos, de manera que se pueda establecer una comparación del desarrollo axiomático de esta teoría, desde el nacimiento del infinito matemático con el surgimiento de propuestas académicas en cursos de teoría de conjuntos de los programas de licenciatura de la Universidad del Valle, para intentar aportar reflexiones en cuanto a la fundamentación del desarrollo del pensamiento matemático avanzado. En este sentido se pretende propiciar algunas innovaciones curriculares en los programas de teoría de conjuntos, en pos de una mejora de la enseñanza de la teoría de conjuntos, de futuros licenciados en Educación Matemática, bajo el análisis histórico de la noción de infinito cantoriano.

Palabras clave: **infinito, teoría de conjuntos, axioma de elección, educación matemática.**

* Universidad del Valle. Dirección electrónica: Monicaaponte68@hotmail.com.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

La exploración de la historia por parte del docente contribuye a descubrir obstáculos y dificultades que se han presentado en las matemáticas: en ese sentido existe una necesidad de recuperar la historia de los objetos matemáticos, para favorecer una mirada distinta del aspecto dogmático, infalible e incuestionable con el que se suele caracterizar a las matemáticas; por ende, la historia debe concebirse como una perspectiva modeladora del quehacer matemático y no solo como algo anecdótico. Freudenthal (1973) señalaba que aprender matemáticas significa "re-inventarlas". La historia permite una profundización de lo que se enseña y aprende; así, quien reflexiona sobre el desarrollo de la matemática debe necesariamente plantearse el problema de la historia de los conceptos. Esto lo podemos sustentar desde Kant, quien afirmaba que la filosofía sin historia es *vacía*, y la historia sin filosofía es ciega. En este sentido, es pertinente indagar sobre el origen histórico, controversial y polémico del infinito cantoriano, como fruto de un trabajo colectivo y creación humana donde hay intrigas, tensiones y distensiones.

Es pertinente estudiar la manera como Cantor generalizó la teoría de conjuntos, pues esta se desarrolla bajo la idea que los conjuntos son colecciones infinitas que pueden ser contadas, lo que modificó nuestras concepciones acerca del infinito, y permitió el surgimiento de paradojas que condujeron al desarrollo de varios sistemas formales de axiomas, entre los cuales se encuentran los axiomas de elección y de remplazo, como búsqueda de la consistencia de la teoría. Ahora bien, podemos plantearnos cuestiones sobre si es posible que sean estos axiomas los que permitan comprender el infinito cantoriano, y con ello validar el estudio de una teoría de conjuntos; además, cómo puede afectar el no estudio de estos dentro de un curso de teoría de conjuntos.

Así, el siguiente trabajo pretende mostrar los adelantos del trabajo de investigación de la maestría en Educación Matemática de la Universidad del Valle, sustentado desde el siguiente interrogante: *¿Cómo se aborda la noción de conjuntos infinitos, en los cursos de Teoría de Conjuntos del Instituto de Educación y Pedagogía, de la Universidad del Valle?* Y en este sentido *¿cuál es la importancia que esta tiene en el desarrollo del pensamiento matemático para un futuro licenciado?*

MARCO TEÓRICO

A lo largo de la historia el concepto de *infinito* se presenta como misterioso y perturbador dentro de las matemáticas. Podemos decir que desde nuestra cotidianidad este expresa significados diversos en nuestra consciencia, que en la mayoría de los casos suelen diferir de los específicamente matemáticos. Y pese a la falta de sustento empírico para la noción de infinito, su existencia no se discute en virtud de que en la actualidad ella posee una estructura formal que la respalda, la cual ha sido fruto de un largo proceso de evolución histórica y filosófica.

Parece claro que desde sus orígenes el debate sobre la naturaleza del infinito tomó connotaciones teológicas más que matemáticas, al considerarse el infinito como propiedad de carácter divino. Se puede decir que solo hasta Bernhard Bolzano en el siglo XIX se logran dar las bases para la construcción de la teoría de conjuntos, lo que induce a un tratamiento para la formalización de la noción de infinito actual[1]. Bolzano, en su obra *Las paradojas del infinito*, defendió la existencia de un infinito actual y enfatizó que el concepto de equivalencia entre dos conjuntos era aplicable tanto a conjuntos finitos como infinitos. Él aceptó como algo normal que los conjuntos infinitos fueran equivalentes a una parte de ellos mismos. Esta definición de conjuntos infinitos: *Un conjunto es infinito si se puede poner en correspondencia biunívoca con un subconjunto propio* fue utilizada posteriormente por Cantor y Dedekind[2]

Hacia la segunda mitad del siglo XIX, Georg Cantor se apoya en los trabajos de Bolzano, para buscar aclaraciones acerca del infinito actual, sobre la manera en que se constituye el universo de los conjuntos infinitos, aclaraciones acerca de lo que es el continuo, pues uno de los objetivos de su obra era demostrar que no había ninguna razón para aceptar las viejas ideas en contra del infinito actual, dado que si los conjuntos infinitos se comportaban de manera diferente a los conjuntos finitos no significa que estos sean inconsistentes, sino que obedecen a una aritmética diferente; además, pensaba que sin ellos era imposible entender una realidad física, y así surgió la necesidad de sustentar matemáticamente la noción de infinito.

---

1 Sin embargo no hay que olvidar a otros filósofos y científicos, anteriores a Bolzano, que en sus trabajos encontraron situaciones paradójicas en torno a la noción de infinito, entre ellos Galileo en sus discursos y demostraciones matemáticas sobre dos ciencias nuevas. Obra en la cual pone en tela de juicio los adjetivos "más grande", "más pequeño", o "igual", en relación a las magnitudes infinitas. Pues en el diálogo entre Simplicio y Salvacio, Galileo concluye que al comparar "conjuntos infinitos" (como el de los números cuadrados y sus raíces [naturales]), se llega a que "la totalidad de los cuadrados no es menor a la totalidad de los números, ni superior a estos". Aspecto que, para Galileo, al igual que en el análisis de Bolzano, resulta paradójico.

2 La autoría de la definición también es un hecho históricamente controversial. Fue enunciada explícitamente por Dedekind, pero Cantor se reclama el hecho por cuanto considera que ya aparece de manera implícita en sus artículos.

A partir de los estudios realizados por Cantor, podríamos inferir que el acta de nacimiento de la teoría de conjuntos transfinitos lleva la fecha del 7 de diciembre de 1873 (Cantor, 2006, p. 12), cuando él logra demostrar, en una carta a Dedekind, uno de los resultados más importantes de su trabajo: que el conjunto R de los números reales no puede ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto N de los naturales; R es un conjunto no-numerable. Poco después Cantor logra la demostración de este teorema, dada una sucesión cualquiera de números reales del intervalo (0,1), demuestra la existencia de números reales no contenidos en dicha sucesión, pues si R fuera numerable, existiría una sucesión que contuviera a todos los números de [0,1], lo cual negaría el resultado anterior (Ferreirós, 1991, p. 211).

También se debe tener en cuenta que uno de los problemas centrales de la teoría de Cantor era demostrar que la potencia de cualquier conjunto tenía que ser un *aleph*. Para ello no era suficiente la definición incorporada en primera instancia por él. Así pues, en el desarrollo inicial de la teoría de conjuntos, Cantor no trabajó explícitamente a partir de axiomas, a pesar de que el análisis de sus demostraciones indica que casi todos los teoremas demostrados por él pueden derivarse de tres axiomas: (i) el axioma de extensionalidad (ii) el axioma de abstracción; (iii) el axioma de escogencia.

METODOLOGÍA

En el aspecto metodológico que se llevará a cabo en este trabajo se tienen en cuenta las metodologías trabajadas en la Historia de la Matemática; en este sentido se propone un análisis histórico-epistemológico con la finalidad de dar cuenta sobre la manera como se constituye el concepto de infinito matemático en Cantor, buscando aclarar algunos procesos que condujeron a que el infinito se convirtiera en un objeto matemático y en este sentido como este se puede volver en un objeto de enseñanza a través de cursos de matemática superior, como los cursos de Teoría de Conjuntos. De esta manera, se realizará un recorrido teórico tomando como referente especial las obras de Dauben, Ferreirós y Cantor, para determinar los fundamentos matemáticos necesarios en el surgimiento del concepto; a partir de los resultados de estos análisis se estudiaran algunos de los programas de Teoría de Conjuntos, propuestos en el Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, para los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas; esto, con el fin de poder caracterizar si existe una estructura formal de acuerdo con la teoría de conjuntos cantoriana para abordar o intentar desarrollar procesos de pensamiento matemático avanzado a partir de este concepto.

CONSIDERACIONES FINALES

Considerando que la enseñanza de un objeto matemático es más significativa, si se tienen en cuenta los procesos y dificultades en la construcción y formalización de un conocimiento en torno a este objeto, y no solamente sus productos o resultados, se evidencia que es posible a través de los procesos de caracterización histórico-epistemológica de la noción de infinito matemático, realizar análisis que generan reflexiones educativas y cognitivas dentro de los procesos socio-culturales en los que se encuentran tanto docente como estudiantes.

No debemos olvidar que la teoría de conjuntos en realidad es teoría en la medida que se consideran los conjuntos infinitos. Así pues, pasar por alto una reflexión sobre el infinito en este curso constituiría un despropósito con el mismo espíritu de la teoría. Se justifica que el análisis de este objeto en los programas de Teoría de Conjuntos del IEP, puede propender por una reforma de los mismos, en pos de una mejora de la enseñanza de estos cursos para los futuros licenciados.

Finalmente, la importancia de este tipo de estudios en historia de la matemática contribuye en la práctica educativa, en la medida que proporciona reflexiones hacia la exploración de un desarrollo adecuado del pensamiento matemático, dentro de cursos de Educación Superior, buscado favorecer en cierta medida la adquisición de conceptos matemáticos abstractos como el infinito que suele generalmente ser malinterpretado y trabajado en el aula de clase. De este modo, este trabajo pretende ser el punto de partida para un estudio adecuado de las temáticas abordadas en cursos fundamentales dentro del proceso de formación profesional de un Licenciado en Matemáticas, constituyéndose así en un punto de reflexión para el campo de la Historia y la Educación Matemática en nuestro país. No se debe ignorar que la educación matemática es un proceso sistémico, una actividad científica e intelectual de carácter explicativo, que conecta la teoría, su desarrollo y la práctica, conduciendo así a la clarificación de algunos aspectos fundamentales para nuestra reflexión como el aprendizaje de las cantidades infinitamente grandes de Cantor.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cantor, G. *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.* Mathematische Annalen 46 (1895) pp. 481-512, 49 (1897), pp. 207-246.

Cantor, G. (2006). Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta. (J. Ferreiros, Trad.) Barcelona: Editorial Crítica.

Cantor, G. (2006). Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite. New Jersey: Princeton University Press. Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta. (J. Ferreiros, Trad.) Barcelona: Editorial Crítica.

Dauben, J. (1990). *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite.* New Jersey: Princeton University Press.

Ferreiros, J. (1993). *El nacimiento de la teoría de Conjuntos,* 1854-1908. Madrid: Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.

Montoro, V. y Scheuer, N. (2003). *Pensando el infinito. Concepciones de estudiantes universitarios*. En: Publicaciones de la Universidad Nacional de Comahue, Argentina.

La comprensión y reflexión de los procesos, técnicas y rutas de demostración geométrica que emergen en las prácticas de estudiantes para profesor

Camilo Arévalo[*]
Oscar González[**]

RESUMEN

Algunos trabajos investigativos constatan el fracaso respecto a la capacidad de los alumnos para formular una demostración (Gaud y Guichard, 1984). Un estudio realizado por Senk (1985) en EE. UU. dio como resultado que de 2.699 graduandos, el 85% no domina la formulación de una demostración. Ante esta problemática se plantea una propuesta, que pretende que tres estudiantes para profesor de matemáticas se involucren con un problema que exija la demostración geométrica, y a partir de esto se reconozca la importancia de reflexionar y comprender sobre la estructura y los métodos que se abarcan a la hora de abordar una demostración en geometría. En este proceso de auto-reconocimiento y auto-reflexión de los procesos y métodos generados con el trabajo en la demostración geométrica, se pone en manifiesto que las prácticas educativas dan evidencia de que otro de los grandes aspectos que complejiza este problema de la enseñanza de la demostración geométrica está relacionado con la presentación de las afirmaciones que estructuran una demostración, ya que en la mayoría de casos, ni el docente ni sus educandos problematizan lo que parecería ser tan evidente.

Palabras clave: estrategias, método, demostración, geometría, resolución de problemas.

[*] Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. Dirección electrónica: kmilo741@hotmail.com

[**] Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. Dirección electrónica: tujavi10@hotmail.com

ANTECEDENTES **Y JUSTIFICACIÓN**

En el texto *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas* de Nicolás Balacheff (1982) el autor afirma que no por el hecho de que la demostración sea en sí misma un contenido de enseñanza, esta puede dejar de ser tratada como un tema específico y esencial dentro de la enseñanza de las matemáticas. Para que la demostración pueda ser enseñada dentro de las aulas escolares, ha de someterse a transposiciones didácticas, a fin de hacer comprensibles los procesos, relaciones y nociones que esta comprende. Es lógico pensar que la demostración adquiere distintos significados dependiendo del contexto en el que se enseñe; sin embargo, estudios realizados por el mismo autor muestran cómo los textos implementados para la enseñanza de la demostración se enmarcan bajo características propias de la actividad científica, haciendo que la demostración sea vista exclusivamente con un uso práctico, e ignorando el compromiso social que esta implica.

- Pregunta de investigación: ¿Cómo se genera la estructuración de una demostración en geometría en tres estudiantes para profesor dentro de un proceso de resolución de problemas?
- Objetivo: describir, evidenciar y reflexionar sobre algunos procesos, esquemas y rutas de demostración geométrica que emergen en la práctica de resolución de problemas en tres estudiantes para profesor.

MARCO **TEÓRICO**

A partir de la importancia que en la actualidad ha alcanzado la educación matemática, por la preocupación y mirada a las dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los objetos matemáticos (Hanna, 1996), en esta oportunidad se proyectará un trabajo hacia la demostración geométrica que presenta dificultades en la enseñanza de la Educación Básica debido no solo a la poca intensidad horaria que se establece en la educación, sino también a la poca importancia que le dan los maestros de matemáticas; como lo menciona Gil Pérez (1998), *"La geometría no ha logrado aún recuperar el lugar que le corresponde. Es proceso de transformación lento, de formación y capacitación para los nuevos docentes, que son productos de un modelo diferente de enseñar".*

La *demostración* es una prueba formal y dominante, ya que es una serie de enunciados organizados y validados desde un conjunto de reglas que le dan la esencia de veracidad. Se caracteriza por su forma estructurada de gran rigor y formalidad. *"una demostración se convierte en tal, después del acto social de 'aceptar que lo es'*. (Manin, citado por Hanna, 1983, p. 71). La demostración en matemáticas se fundamenta sobre un cuerpo de conocimientos fuertemente institucionalizado, sobre un conjunto de definiciones, de teoremas y de reglas de deducción, cuya validez es aceptada socialmente.

Ángel Gutiérrez (2001) propone una clasificación que suple los vacíos de las teorías de los autores Balacheff (1986); su clasificación se caracteriza y se enfoca en el análisis de los vacíos conceptuales que generan los estudiantes al interpretar la geometría. Esta clasificación busca enmarcar a los estudiantes en las etapas que propone el autor, basándose en los análisis e interpretaciones pertinentes. Su clasificación la fundamenta en dos grandes grupos: *demostraciones empíricas* en las que el elemento de verificación son los ejemplos y las *demostraciones deductivas, que* se basan en el análisis y razonamiento de propiedades e ideas lógicas de abstracción formal. Esta será la clasificación con la que caracterizaremos nuestro trabajo, porque expone las etapas desde la misma demostración geométrica y los procesos que se desencadenan, llevando a garantizar el trabajo que estamos realizando. Finalmente, la propuesta de Ángel Gutiérrez frente a los procesos de prueba en la demostración geométrica y la propuesta de Mason frente al proceso de resolución de problemas serán el enfoque de este trabajo, donde la propuesta de Mason servirá como enlace metodológico a la propuesta de Gutiérrez. Se establecerán unas categorías de demostración geométricas enmarcadas en una metodología de resolución de problemas; este será el producto final del presente trabajo.

Para el fin que implica este trabajo es importante reconocer la diferencia entre algunas palabras que en ocasiones suelen confundirse o concebirse como lo mismo: Lo que se considera como **explicación** desde la perspectiva de Piaget (1970), se dice que, *"en el terreno de las ciencias deductivas", es en primer lugar despejar las "razones"* para *"responder a la pregunta del porqué"*. Una **prueba** se da cuando una explicación es reconocida y aceptada por un grupo o comunidad. La **demostración** es una prueba formal y dominante, ya que es una serie de enunciados organizados y validados desde un conjunto de reglas que le dan la esencia de veracidad. Se caracteriza por su forma estructurada de gran rigor y formalidad. *"una demostración se convierte en tal, después del acto social de "aceptar que lo es"*. (Manin, citado por Hanna, 1983, p. 71).

3. METODOLOGÍA

La metodología será la enmarcada en el tipo de estudio de caso y seguirá las siguientes fases de trabajo:

I. Planteamiento y asignación del problema: A cargo del profesor

II. Resolución del problema: A cargo de los estudiantes para profesor

III. Método de resolución del problema: A partir de las fases de resolución de problemas descritas por Mason-Burton-Stacey (1989)

IV. Análisis y categorización de los resultados: Desde la propuesta de Ángel Gutiérrez (2001) que suple los vacíos de las teorías de autores como Balacheff (1986) y Harel y Sowder (1999); su clasificación se caracteriza y se enfoca en el análisis de los vacíos conceptuales que generan los estudiantes al interpretar la geometría.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Se basa principalmente en el estudio detallado del proceso de resolución de la situación problema conllevado por los tres estudiantes para profesor. Para leer correctamente este capítulo, se decide separarlo por fases, así:

I. Primera exploración del problema

II. Abordando el problema desde los acuerdos

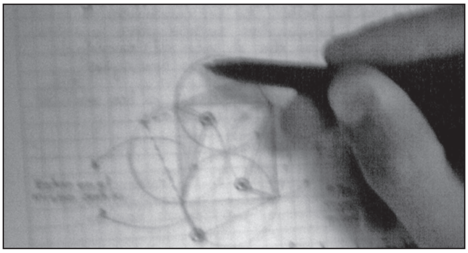
III. Construyendo el problema con ayuda de Geogebra

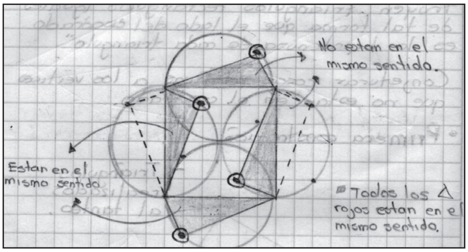
IV. Definiendo la colinealidad como el objeto matemático primordial en la demostración.

V. Empezando a construir y demostrar conjeturas

El problema asignado fue ***"Sobre los lados de un cuadrado se construyen cuatro triángulos rectángulos iguales, de tal forma que cada lado del cuadrado es la hipotenusa de cada triángulo"***. Los estudiantes evidencian que la situación problema que se les propone les permite desarrollar de manera autónoma procesos de exploración tales como la formulación de hipótesis, su validación grupal y según sea el caso su reformulación, haciendo de la situación una forma en la que se dinamicen los conceptos inmersos en ella y se relacionen las conceptualizaciones particulares con las formas universales socialmente construidas.

En las conversaciones de los resolutores se menciona explícitamente la importancia que tiene el planteamiento de preguntas. Brousseau (1986) compara este hecho con el de solucionar el problema y les da el mismo estatus de importancia. Se evidencia cómo los estudiantes, a partir de preguntas y



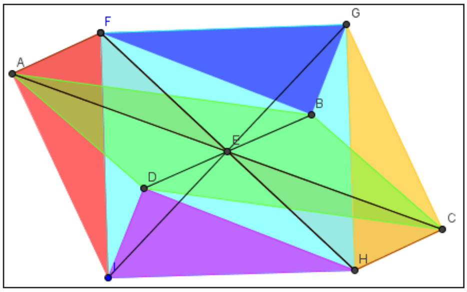


"Las imágenes y los conceptos interactúan en la actividad cognitiva del sujeto cooperando en algunos casos o en conflicto en otras situaciones".
Fishbein (1993)

exploraciones, logran abordar el problema desde las representaciones graficas con miras a esclarecer los conceptos inmersos en la situación y plantearse su problema de demostración. En esta parte del momento de exploración, surge en los estudiantes la necesidad de un esquema que les dé más información de la situación, por lo que proponen el cambio de representación, de lo dicho en la situación a una construcción. En esta parte de interacción grupal se evidencia la necesidad por cambiar de representación, un dibujo, construcción o esquema que les permita evidenciar lo que la situación les propone y les dé una visión para encaminar su trabajo resolutor.

Es importante decir que en este caso la representación gráfica puede o no ser favorable en un trabajo resolutor, ya que el detenerse mucho en la etapa de percepción de las construcciones puede limitar a los estudiantes en etapas más desarrolladas de la demostración, en el sentido de limitarse solamente a hablar de aspectos físicos o perceptivos de las representaciones gráficas, haciendo difícil el razonamiento y análisis de sus propiedades. Tal como lo afirma *María Dal Maso (2005)* "Es interesante analizar cómo las representaciones gráficas de objetos y conceptos geométricos producen muchas veces dificultades durante la resolución de problemas y en la demostración en geometría".

Sin embargo, se evidencia que los estudiantes evocan la construcción de la situación para tener una visión más determinada del problema y con el fin de delimitar la situación a un problema específico a abordar. En este sentido la representación gráfica fue de ayuda porque les permitió evidenciar ciertos atributos de la construcción así como hacerse una idea de los posibles caminos que podrían establecer. De igual manera, en lo que corresponde a la demostración y sobre todo en la geometría, siempre se ha utilizado el dibujo (construcción) como carácter significante de lo que es la geometría. Para su enseñanza siempre han sido básicos los objetos teóricos relacionándolos con las representaciones geométricas, para llevar a que los estudiantes reconozcan el objeto matemático como una representación geométrica, y evidencien propiedades y características a través de su simple visualización. Entonces los estudiantes realizan la construcción con el objetivo de ser ayudas visuales para establecer hipótesis, conjeturas o deducciones lógicas de una demostración. *(Chevallard y Tonelle, 1982 p 4, citado en Balacheff, 1982)*



El trabajo resolutor de los estudiantes empieza a formalizarse cuando empiezan a establecer relaciones entre las construcciones que realizan y lo que les propone el problema; es aquí donde se generan discusiones frente a la manera de abordarlo y se construyen conjeturas para empezar a demostrar. En este proceso de interacción y de discusión de representaciones surge la importancia de recordar las experiencias de los estudiantes frente a problemas trabajados anteriormente que fuesen muy similares a este; hacen una retrospección de su trabajo como estudiantes para determinar la manera en que deben proceder para realizar una construcción exacta que represente la situación planteada y su respectiva demostración. A continuación se presenta una de las conjeturas obtenidas por el grupo y su respectiva demostración.

Conjetura 1 *"Si los cuatro triángulos están en el mismo sentido, dos de ellos opuestos y dentro del cuadrado, al unir los vértices entonces se obtendrá un paralelogramo".*

Finalmente, mediante una organización de pasos lógicos, cada uno de ellos justificado de manera detallada, los EPP logran construir una demostración válida por lo menos para el grupo, pues consideran que en ella se evidencia formalidad, justificación de cada paso y un orden lógico. Como vemos, únicamente se hace necesaria la construcción representativa de la demostración, ya no como soporte indispensable sino como ayuda para construir la demostración; no hacen falta recursos ajenos a la misma demostración ni explicaciones detalladas para justificar alguno de los pasos. Por lo tanto, para finalizar esta etapa, los estudiantes se encuentran en la fase de *ataque-demostración formal,* ya que realizan deducciones e implicaciones lógicas y ordenadas basadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas aunque aun aludiendo al ejemplo genérico no como objeto indispensable para la demostración sino como ayuda para su comprensión.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balacheff, N. (1982). *Procesos de prueba en los alumnos de Matemáticas*. Universidad de los Andes. Traducción. Primera Edición: Agosto 2000. Bogotá, Colombia

Camargo, L. Perry, P. Samper, C. (2006). *Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica*. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá. Colombia.

Mason, J. Burton, L. y Stacey, K. (1992). *Pensar matemáticamente*. (1ª ed. – 2ª reimpresión, 1992–). Barcelona. MEC–Ed. Labor).

Araujo, J. Giménez, J. Salas, N. (2006). *Afectos y demostraciones geométricas en la formación inicial docente.* Universidad de Barcelona, Barcelona, España.

Polya, G. (1989). Cómo plantear y resolver problemas. (15ª reimpresión). Serie Matemáticas. (Traducción, Prof. Julián Zugazagoitia). México: Editora Trillas.

Puig, L. y Cerdán, F. (1996). Un curso de heurística matemática para la Formación del profesorado. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*. n.8, P.83–90. Abril de 1996.

La enseñanza de la Estadística en la formación de ciudadanos críticos

*Claudia María Arias Arias**
*Martha Cecilia Clavijo Riveros***
*José Torres Duarte****

RESUMEN

La presente comunicación muestra la manera como se llevó al aula de Estadística una propuesta de formación para la ciudadanía crítica, a partir de combinar la problemática de las encuestas preelectorales, los ambientes de aprendizaje y las habilidades y disposiciones del pensamiento crítico; para ello, se partió de la certeza que la enseñanza de la Estadística debe dejar de ser "sólo una técnica para tratar los datos cuantitativos (...), y pase a ser una herramienta para la vida en la sociedad" ((Ottaviani, 1998; citado en Batanero (2002a), p. 2). Asimismo, se hace un breve recuento de los resultados obtenidos, y se enumeran algunas conclusiones y recomendaciones que se obtuvieron a lo largo del proceso.

Palabras clave: educación estadística, pensamiento crítico, ambientes de aprendizaje.

* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: claudiarias_01@hotmail.com
** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: ticayui@hotmail.com
*** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: jotorresd@udistrital.edu.co

PROBLEMA

Teniendo en cuenta la cantidad de información que se presenta en los medios de comunicación diariamente, se hace necesario que los ciudadanos tengan diferentes conocimientos estadísticos; además, que posean habilidades y disposiciones propias del pensamiento crítico para poder discernir la verdad de lo que se está mostrando a través de estos, especialmente en la actualidad donde los medios, en diversas ocasiones, dan a conocer la información empleando herramientas estadísticas. Por lo anterior, se planteó una investigación orientada con la pregunta: ¿Cómo lograr el fomento del pensamiento crítico en estudiantes de grado octavo, a partir del análisis de las encuestas prelectorales emitidas por los noticieros de la televisión colombiana? Tuvo como objetivo el fomentar el pensamiento crítico en estudiantes de grados octavo y noveno a partir de la propuesta e implementación de ambientes de aprendizaje que hicieran uso de las encuestas pre electorales emitidas por los noticieros de la televisión colombiana.

MARCO TEÓRICO

En el mundo actual, debido al proceso de globalización, la sociedad tiene la posibilidad de acceder a la información (Batanero, 2002) gracias a las tecnologías de la información y la comunicación (TIC); dicha información, algunas veces, evidencia problemáticas sociales y políticas de un determinado país y, en numerosas ocasiones, es presentada mediante gráficos estadísticos, los cuales son los más utilizados por los medios informativos (Batanero, 2002; Arteaga, 2011). Este es el caso de las encuestas de opinión, en las cuales, además de los gráficos estadísticos, se hace uso de otros objetos estadísticos tales como: población, muestra, tipo de muestreo y margen de error.

Como indica Cox (1997), citado en Batanero (2002), "una valoración pública de los principios generales en la interpretación de la evidencia falta en muchos aspectos de los artículos en la prensa y programas de radio y televisión" (p. 2); continua diciendo que "la información, a veces sensacionalista de los resultados de pequeños estudios, frecuentemente mal diseñados, es especialmente preocupante" (p. 2). Por lo anterior, aunque la sociedad se encuentra en un momento en donde la información es de fácil acceso, esta no siempre es verídica: se presenta de manera errónea o es manipulada por factores políticos y/o económicos que tergiversan la información. Dicha situación afecta directamente a los ciudadanos que no se encuentran preparados para el análisis de la misma, y por ello, aceptan los datos sin mostrar una actitud crítica que les permita hacer uso de habilidades cognitivas desde una postura crítica y discernir la verdad de lo que se les está mostrando a través de los mismos.

Ahora bien, como resalta Valero (2006), al reconocer que la escuela es un espacio de formación que puede dotar al ciudadano con habilidades para fomentar su pensamiento crítico, y con ello, permitirle analizar la información que brindan los medios, se encuentra que lastimosamente la escuela se ha venido enfocando en el desarrollo netamente cognitivo olvidándose de la formación del ciudadano, pues separa el saber del contexto del estudiante; por ello es necesario que el aprendizaje deje de ser un proceso cuyo fin es poseer o almacenar conocimiento y pase a ser un proceso que permita actuar en el mundo.

En relación al reto de la educación antes descrito, los estadísticos y educadores se han preocupado porque la estadística y su enseñanza dejen de ser "solo una técnica para tratar los datos cuantitativos (…), y pasen a ser una herramienta para la vida en la sociedad, (…) en términos de capacidad de comprender la abstracción lógica que hace posible el estudio cuantitativo de los fenómenos colectivos" (Ottaviani, 1998; citado en Batanero (2002a), p. 2). En pocas palabras, la estadística debe fomentar habilidades cognitivas y disposiciones en los ciudadanos para que analicen y reflexionen en torno a problemáticas sociopolíticas del contexto. Es así como se hace necesario que la educación estadística permita que los estudiantes desarrollen habilidades cognitivas y disposiciones propias del pensamiento crítico en la escuela, tales como interpretación, análisis, evaluación, e inferencia (González, 2006). Para ello se puede tener en cuenta que en la actualidad las TIC (y con ellas la televisión) hacen parte de la cultura mediática que indica el proceso de transformación de prácticas, saberes y representaciones sociales, por lo cual su uso en la escuela puede responder a un modelo pedagógico crítico que apunte a tomar instancias especialmente dialógicas frente al material utilizado, alentando a que los estudiantes hagan reflexión, tomen una posición, etc. (Huergo & Fernández, 1999) mirando más allá de las paredes del aula escolar.

UNA NUEVA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA: DESCRIPCIÓN E IMPLEMENTACIÓN

Pensando en la importancia de la estadística en la formación de ciudadanos críticos y reconociendo que en la escuela esta responsabilidad está, en parte, a cargo del profesor de matemáticas, quien es el que debe llevar al aula las temáticas relacionadas con la estadística, se configuró la propuesta de Ambientes de Aprendizaje bajo el enfoque de la Educación Matemática Crítica, teniendo en cuenta lo propuesto por Skovsmose (2000), quien identifica seis alternativas diferentes, de dichos Ambientes de Aprendizaje (A.A.) que son el resultado de combinar tres tipos de referencia; matemáticas puras, semirrealidad y situaciones de la vida real, con las formas de organización de la actividad de los estudiantes, escenarios de investigación o el paradigma del ejercicio. De esa manera, a continuación se describe cada uno de los A. que configuran la propuesta organizada en cuatro fases (reconocimiento y diagnóstico, ubicación y ambientación en el problema, construcción de herramientas conceptuales y aplicación de las herramientas conceptuales).

En el A.A. n° 1, se realizó un reconocimiento, por un lado, de las percepciones de los estudiantes hacia la problemática, y por otro lado, de las relaciones dadas en el interior del aula. Para ello se debía contestar y socializar un cuestionario referido a las encuestas prelectorales y realizar algunas representaciones de momentos de clase.

El A.A. n° 2 es una prueba diagnóstica, en la cual se toman situaciones en dos contextos relacionadas con la estadística, para así aproximarse a una caracterización de algunas habilidades del pensamiento crítico, presentes en los estudiantes, y al manejo de nociones de la estadística, enmarcadas en una encuesta de opinión.

El A.A. n° 3 permite hacer una ubicación y ambientación del problema, identificando aspectos estadísticos que intervienen, y la influencia de dichas encuestas en aspectos socio-políticos. Por ello se plantearon tareas de análisis y reflexión con respecto a una lectura titulada “Encuestas Electorales” y un vídeo que muestra una crítica hecha por un canal venezolano a las encuestas electorales realizadas en Colombia y emitidas en los noticieros.

El A.A. n°4 corresponde a la construcción de herramientas conceptuales necesarias para la realización y el análisis de las encuestas de opinión. Tomando los noticieros emitidos por los canales colombianos, se analizan las fichas técnicas que presentan cuando dan a conocer los resultados de una encuesta. De esta manera, a partir de la identificación de los aspectos técnicos reglamentarios que intervienen en la ficha técnica, se introduce en las herramientas conceptuales población y muestra.

En el A.A. n°5, se abordan las nociones de muestra y población;, para ello a partir del análisis de la recolección y sistematización de datos, por parte de los estudiantes, considerando una misma encuesta realizada a toda la población, a una muestra pequeña y a una grande, se reflexiona sobre la importancia de considerar la finalidad para caracterizar la muestra y elegir una muestra representativa.

El A.A. n° 6 se enfoca en el trabajo sobre la herramienta conceptual diagrama de barras. En este se muestra a los estudiantes diagramas de barras presentados por los noticieros, que bajo lo propuesto por Friel, Curcio y Bright (2001, citado en Espinel & otros 2009), no poseen los componentes necesarios para la comprensión de la información allí representada; posteriormente proponen la realización de estos considerando los componentes necesarios.

La actividad matemática del A.A. n° 7 está caracterizada por la reflexión en torno a la implicación que tiene la muestra, el tipo de muestreo y el margen de error en una encuesta de opinión. De esa manera se desarrolla un debate a partir de la lectura de algunos fragmentos en los que se abordan dichas herramientas conceptuales, para luego identificarlo en algunas situaciones.

El A.A. n° 8 corresponde a la última fase, en donde el estudiante puede identificar la utilidad de las herramientas conceptuales adquiridas en una situación problema de su contexto. De esta forma la actividad matemática se ve enfocada en la construcción de un artículo que refleje una observación detallada de la encuesta de opinión emitida en el noticiero de la televisión colombiana para tomar una postura y sustentar algunas ideas empleando nociones estadísticas inmersas.

Esta propuesta fue implementada en cinco cursos, entre octavo y noveno, de dos colegios del sector público: IED Restrepo Millán y el Instituto Técnico Juan del Corral. En cuanto a los resultados obtenidos que no solo se reflejan en el producto final entregado por los jóvenes (artículo), sino en los constructos de ellos durante cada uno de los ambientes de aprendizaje, se puede inferir que fue pertinente tomar como problemática del macro contexto, de los estudiantes, las encuestas de opinión con respecto a las preferencias electorales, y entrelazar los objetos estadísticos, población, muestra, margen de error, tipo de muestreo y el diagrama de barras, pues fue de ese modo como los estudiantes lograban hacer críticas de las encuestas de opinión de las preferencias electorales de manera argumentada haciendo uso de conocimientos estadísticos. Cabe resaltar que se evidenció un alto nivel de motivación que posibilitó el fortalecimiento

	ASPECTO	Estudiantes que se encuentran en el nivel superior en la prueba diagnóstico.	Estudiantes que se encuentran nivel superior luego de la implementación propuesta.
NOCIONES ESTADÍSTIC	Población	40%	90%
	Muestra	40%	90%
	Tipo de muestreo.	20%	75%
	Diagrama de barras	35%	70%
PENSAMIENTO CRÍTICO	Interpretación	50%	80%
	Análisis	35%	65%
	Evaluación	15%	55%
	Inferencia	10%	50%
	Buscador de la verdad	35%	80%
	Confianza en el razonamiento	20%	75%
	Mente abierta	25%	70%

del pensamiento crítico- pues, en cada una de las actividades se reflejó la disposición al analizar las encuestas de opinión. Es así como se contribuyó a la formación de ciudadanos críticos, considerando que los estudiantes de grados octavo y noveno son o están próximos a ser electores, y, se llegó a que los estudiantes interpreten, analicen, evalúen e infieran frente a los resultados de encuestas de opinión tomando una postura frente a estas. Lo anterior se evidencia en la comparación de resultados de entrada y de salida de los estudiantes de las dos instituciones.

CONCLUSIONES

En cuanto a la Educación Matemática Crítica, se puede afirmar que esta, en realidad, permite que en el proceso de enseñanza y aprendizaje los estudiantes adquieran y evidencien la aplicabilidad de herramientas estadísticas, particularmente en una situación que involucra aspectos sociopolíticos. Es así como desde esta perspectiva con cada una de las actividades llevadas al aula se lograron trabajar no solo con respecto a lo estadístico, sino con relación a lo social.

La negociación de significados, con la cual se culmina cada ambiente de aprendizaje, es fundamental en este proceso de enseñanza y aprendizaje pues al fomentar el debate, la interacción con sus pares y la negociación tanto de docentes como de estudiante, se pudo generar en los últimos la reflexión crítica en torno a la información presentada por los noticieros de la televisión colombiana.

En cuanto a los objetos estadísticos: encuesta de opinión, población, muestra, tipo de muestreo y el diagrama de barras, se puede concluir que al tomar situaciones relacionadas con las problemáticas del macro y del micro contexto de los estudiantes se hace más familiar el trabajo con dichas nociones y que aunque en los Lineamientos Curriculares (1999) y los Estándares de Competencias en Matemáticas (2006) no se hacen explícitas algunas de las mencionadas nociones, en esta propuesta se evidenció que al analizar las encuestas de opinión presentadas por los noticieros de la televisión colombiana, se adquieren conocimientos estadísticos que les posibilitaron fortalecer su pensamiento crítico y concienciarse frente a la importancia de tomar una postura con respecto a la información que brindan los medios de comunicación, contribuyendo de esta manera, a su formación ciudadana. Es necesario que dentro de los currículos de la Educación Básica y Media se tenga en cuenta las nociones de población, muestra, tipo de muestreo y margen de error, con el fin de que los estudiantes adquieran herramientas conceptuales para analizar las diversas encuestas de opinión que son emitidas por medio de las TIC.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. & Contreras, M. (2010). *Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales*. Universidad de Granada. Disponible en el sitio web: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/76/Articulos_02.pdf.

Batanero, C. (2002a). Los retos de la cultura estadística. *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística. Conferencia inaugural*. Buenos Aires. Disponible en el sitio web: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/CULTURA.pdf.

Batanero, C. (2002b). *Didáctica de la Estadística*. Grupo de Educación Estadística. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Espinel, M., González, M., Bruno, A. & Pinto, J. (2009*). Tendencias actuales de la investigación en Educación Estocástica*: Capítulo 7: Las Gráficas Estadísticas, Universidad de Granada. Málaga.

González, J. (2006). *Discernimiento evolución del pensamiento crítico*. Disponible en el sitio web: http://www.eduteka.org/Discernimiento.php. Acceso el 18 de Abril de 2011.

Huergo, J. & Fernández, M. (1999). *Cultura escolar, cultura mediática/ intersecciones*. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*, Bogotá.

Skovsmose, O (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*. Vol. 6. N° 1. pp. 3-26.

Valero, P. (2006). ¿De carne y hueso?: la vida social y política de la competencia matemática. Universidad de Ambientes de Aprendizaje. Dinamarca.

Identificación de las competencias asociadas a la resolución de problemas en matemáticas en un grupo de estudiantes sordos

*Sara Ximena Artunduaga Mejía**
*Karen Ortega Díaz***
*Ligia Amparo Torres****

RESUMEN

Con el objetivo de reconocer las debilidades de estudiantes sordos de algunas instituciones educativas la ciudad de Cali (Colombia) en lo que respecta a la adquisición del conocimiento matemático, planteamos esta investigación la cual se centra en los desempeños propios de la resolución de problemas matemáticos. Estos desempeños son analizados a través de los resultados de una prueba que involucra problemas numéricos, geométricos, algebraicos y aleatorios; con esto pretendemos dar a las instituciones de Educación Superior conclusiones que les permitan crear estrategias pedagógicas para generar una educación inclusiva de calidad a este grupo poblacional.

Palabras clave: solución de problemas, sordos, discapacidad, inclusión.

* Universidad del Valle. Dirección electrónica: saramena85@hotmail.com.
** Universidad del Valle. Dirección electrónica: mapsara@hotmail.com.
*** Asesora de trabajo de grado. Universidad del Valle.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

La capital vallecaucana cuenta con una población en situación de discapacidad auditiva[1] superior a los 21.665 habitantes según la información recogida por el DANE en el Censo General de 2005, de los cuales aproximadamente de 3.475 son niños y jóvenes en edad escolar (entre 5 y 24 años), lo que significa una población importante para efectos de este trabajo educativo de investigación. En Cali, existen algunos colegios que ofrecen educación básica primaria para estudiantes sordos, entre las que se encuentran la Institución Educativa (IE) María de Nuria Sacasas (ASORVAL) y el Club de Leones (ITES), instituciones que ofrecen educación bilingüe. La IE José María Carbonell es una de las pocas instituciones que se constituyen en el entorno educativo inclusivo de sordos en Educación Secundaria y Media para estudiantes usuarios de la LSC en la modalidad de inclusión con intérprete: este último tiene como función principal servir de mediador lingüístico entre los estudiantes sordos y los oyentes, en diferentes situaciones del contexto educativo como en clases, talleres, laboratorios, prácticas empresariales, actividades culturales y recreativas, conferencias, consultas a los maestros fuera de las horas de clase, investigaciones en Internet, biblioteca y en interacciones comunicativas cotidianas (INSOR, 2004).

Desde la perspectiva de los docentes que tienen a cargo la educación de personas sordas, se llega a considerar que el niño sordo tiene necesidades especiales, que pueden ocasionar que su desempeño no sea el mismo en comparación con el de sus pares oyentes; se podría considerar así que ellos podrían tener un retraso en la adquisición de su lengua natural, puesto que, antes de tener contacto con la LSC, inician un proceso de implante coclear o uso de audífonos y, asimismo, terapias del lenguaje que pueden tomar algunos años de su infancia. De este modo, el ingreso al sistema educativo se hace a una edad más tardía que la de sus pares oyentes.

Ahora bien, es importante dar cuenta de las competencias matemáticas que han construido los estudiantes sordos en la Educación Media, en la medida que las matemáticas, como cuerpo de conocimiento, ocupa y ha ocupado un lugar privilegiado en los currículos educativos, tanto en la Educación Media

[1] Es un déficit total o parcial en la percepción auditiva. Si se pierde esta capacidad de forma parcial se denomina hipoacusia y si se pierde por completo se llama cofosis. (http://universitarios.universia.es/voluntariado/discapacidad/discapacidad-auditiva/). En adelante no se usarán los términos "limitado auditivo" o "discapacitado auditivo". De acuerdo con Fernández-Viader & Pertusa (2005), los términos "discapacidad auditiva", "pérdida auditiva" y "sordo" pueden ser usados como sinónimos; sin embargo, en el transcurso de nuestro trabajo utilizaremos el término "sordo" y nos centraremos en aquellas personas con sordera profunda.

como en la Educación Superior. En este sentido, cabe resaltar que en un porcentaje muy alto de las carreras universitarias se toma al menos un curso de matemáticas; la cantidad de cursos de matemáticas aumenta ostensiblemente si los programas son de ingenierías o de ciencias. Así pues, la ubicuidad de los cursos de matemáticas así sea en un nivel fundamental en la mayoría de los programas refleja una necesidad: las matemáticas propician un tipo de pensamiento que le es inherente, este es el pensamiento matemático. Y debido a que existen factores de riesgo que dificultan el aprendizaje de las matemáticas en los sordos (Fernández-Viader & Pertusa, 2005, pp. 347-379), tiene sentido preguntarnos por las competencias matemáticas que los sordos han adquirido, al finalizar la Educación Media, para poder ingresar a la Educación Superior. Dar cuenta de algunas competencias matemáticas, podría constituir un insumo valioso para determinar si los estudiantes sordos podrían tener o no dificultades para lograr su inclusión en la Educación Superior. Es nuestro interés dirigir esta investigación en este sentido, específicamente en lo que respecta al conocimiento matemático y en particular a los procesos de pensamiento relacionados con la resolución de problemas. La resolución de problemas como competencia matemática incorpora el uso de conceptos, procedimientos y procesos (inductivos, deductivos y proporcionales) y el tratamiento de diferentes sistemas de representación.

De acuerdo con lo anterior, y teniendo en cuenta que estas personas representan un grupo numeroso y valioso de nuestra sociedad, el interés de este trabajo es responder el siguiente interrogante:

¿Cuáles son los desempeños en las competencias asociadas al proceso matemático de resolución de problemas que poseen los estudiantes sordos al egresar de la Institución Educativa José María Carbonell?

MARCO TEÓRICO

La concepción del sordo

Legalmente los sordos son reconocidos en el mundo, como se mencionó anteriormente, como un grupo de individuos que poseen una pérdida auditiva la cual es mayor a los 90 decibles, por lo cual estos no pueden adquirir el lenguaje oral. Sin embargo, el sordo es reconocido en la actualidad mucho más allá de una mera definición de carácter legal, pues han sido reconocidos como un grupo cultural minoritario, poseedor de unas características. De aquí se desarrollaron diferentes enfoques que se permitieron analizar a los sordos desde dos miradas: una, el enfoque clínico-terapéutico, el cual considera a la sordera como una enfermedad que debe ser tratada o curada; otra, el enfoque socio-antropológico de la sordera, el cual define al sordo como una persona integrada en una comunidad lingüísticamente distinta, asegurando con esto que los sordos tienen un desarrollo del lenguaje acorde con sus necesidades, lo que lleva a que se dé un desarrollo intelectual adecuado que garantiza el aprendizaje por parte de esta población. Así pues, la sordera no se analiza como una enfermedad sino como una condición o característica de un grupo cultural diferente al oralista, y cuya medio de comunicación es el uso de la LSC, fundamentalmente, sin discriminar otros medios de comunicación usados entre sordos.

La resolución de problemas

Dado su carácter multidisciplinar, la resolución de problemas es uno de los procesos de pensamiento más enriquecedores y completo, tanto, que como menciona MEN (2006) podría convertirse en el eje organizador de todo el currículo de matemáticas en la escuela. Los *Lineamientos curriculares en matemáticas* mencionan, además, que en diferentes propuestas se ha categorizado la resolución de problemas como "el objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática". Por esta razón, la resolución de problemas debe estar inmersa en todos los componentes del currículo en lugar de considerarse un componente independiente.

Para efectos de este trabajo hemos utilizado las investigaciones desarrollados por Polya, quien es citado en MEN (1998):

> … resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados.

Ahora bien, dentro del proceso de resolución de problemas es posible identificar unos desempeños específicos, los cuales son:

- ✓ Lectura e interpretación del enunciado del problema.
    - Lectura de tablas, gráficos, etc.
    - Lectura de enunciados verbales.
- ✓ Reconocimiento e identificación de los datos y las incógnitas del problema.
- ✓ Establecer relaciones, ya sean numéricas, algebraicas, geométricas, métricas entre los datos y las incógnitas según el caso.

- ✓ Expresar numéricamente o algebraicamente las relaciones mediante el lenguaje matemático (operaciones matemáticas, ecuaciones).
- ✓ Realizar las operaciones expresadas para hallar la solución del problema.
- ✓ Validar la solución del problema.

CONCLUSIONES

Algunas de las conclusiones obtenidas son:

1. La extensión de los textos puede ser un factor que dificultan el desempeño de los estudiantes sordos, en tanto que al poseer una condición lingüística distinta se hace necesaria la intervención del intérprete para la lectura; esto quiere decir que en el proceso comunicativo se involucran tres personas (estudiante sordo, interprete y evaluador) por lo cual es posible que la intención de la pregunta no llegue fielmente al estudiante, máxime si se tiene en cuenta que en algunas ocasiones el intérprete no es una persona que domine ampliamente el campo disciplinar correspondiente. Sin embargo, cabe aclarar que el diseño original de la prueba 1 está basado en ejercicios utilizados en cursos de pre-ICFES[2] a escala nacional. Así pues, este ejercicio ha servido para inferir que todavía con el ejercicio de la interpretación correspondiente a su lengua, las preguntas contenidas en estos cuestionarios pueden ser confusas para ellos.
2. Los estudiantes sordos presentan ciertas dificultades al momento de resolver problemas que requieran de la aplicación de algoritmos, expresiones algebraicas, o fórmulas. De igual manera se observó que los estudiantes sordos presentan específicamente dificultades en la interpretación y el uso de las fracciones en diferentes contextos. Asimismo, se pudo observar que estos estudiantes tienen dificultades para el desarrollo de operaciones de aritmética básica (como suma, resta, multiplicación o división).
3. Al observar las producciones escritas de estos estudiantes, se puede notar que poseen un débil manejo de la escritura, lo cual también involucra la escritura y el manejo de los símbolos matemáticos; esto quiere decir que los estudiantes no dominan el sistema de representación simbólico (que puede ser aritmético o algebraico) de las matemáticas. El uso del lenguaje escrito (específicamente el matemático) y la comprensión de su sintaxis son fundamentales para la realización de conversiones y de procedimientos

[2] Tomadas del material Entrenando el cual es una marca registrada TED Tecnología Educativa Ltda.

algorítmicos, incluso para la interpretación de la información contenida en enunciados, tablas y gráficos matemáticos. Si un estudiante no posee estas destrezas entonces se va a encontrar en una situación de desventaja a la hora de comprender el enunciado.

4. Se puede inferir que los estudiantes sordos no presentan dificultades asociadas a un pensamiento matemático específico, y que los problemas que mayor grado de complejidad presentan para ellos son aquellos donde se deben determinar datos desconocidos, deducir información que no se encuentra de manera explícita y aplicar algoritmos y/o procedimientos algebraicos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Traducción: Myriam Vega Restrepo, 1999. Editions scientifiques européennes, 1995

Fernández-Viader, M.; Pertusa, E. (2005). *El valor de la mirada: sordera y educación.* Barcelona: Publicaciones y Ediciones de la Universidad de Barcelona.

INSOR (2004). *Estudiantes sordos en la Educación Superior: Equiparación de oportunidades.* Bogotá.

MEN (1998). *Lineamientos curriculares en Matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional. Colombia.

Análisis de tareas matemáticas propuestas a niños sordos en los primeros años de escolaridad

Angélica Avalo Azcárate[*]
Nohemy Bedoya Ríos[**]
Édgar Andrés Gallo González[***]
Alexánder Tovar Aguirre[****]

RESUMEN

Se propone la utilización de una herramienta metodológica conocida como "Análisis de Tarea" para identificar las principales características de las tareas o actividades propuestas a niños sordos de los grados Transición, 1° y 2° de una institución educativa de la ciudad de Cali. Se analizaron 133 actividades contenidas en el planeador curricular, estableciendo los elementos estructurales de las tareas, así como las exigencias cognitivas implicadas en las mismas. Los resultados de este estudio permitieron reconocer la necesidad de realizar mayores adaptaciones a las situaciones didácticas propuestas para la población sorda y de una reorganización del planeador en general, pues existen vacíos fundamentales, como la ausencia de logros y objetivos que den sentido a las actividades.

Palabras clave: análisis de tarea, demandas cognitivas, planeación curricular, niños sordos.

[*] Universidad del Valle. Dirección electrónica: angelicaavalo@gmail.com
[**] Universidad del Valle. Dirección electrónica: nohemy_bedoya@yahoo.es
[***] Universidad del Valle. Dirección electrónica: edgarandresgallo@gmail.com
[****] Universidad del Valle. Dirección electrónica: alextovar2@gmail.com

PROBLEMA

Este trabajo muestra la pertinencia del uso del "Análisis de tareas" (Orozco, 2000) como herramienta metodológica para reflexión, planeación y diseño de las actividades escolares propuestas a los estudiantes en el área de matemática. Constituye una de las fases iniciales del proyecto de investigación *"Estudio exploratorio sobre el aprendizaje de la secuencia numérica de conteo en lengua de señas, en niños sordos"*[1], fase en la que se propuso el análisis de un conjunto de tareas consignadas en el planeador curricular del área de matemática para los grados de Transición, 1° y 2° de una institución educativa que trabaja con población sorda. Su propósito es caracterizar las actividades y tareas presentadas en dicho planeador, de forma tal que se logren reconocer las demandas o exigencias que se hacen a los niños en los diferentes grados, identificar los posibles vacíos que puedan encontrarse en la planeación propuesta y, posteriormente, posibilitar la reorganización de estos elementos, facilitando la reflexión sobre las adaptaciones necesarias para abordar los diferentes conceptos matemáticos con esta población, así como el diseño de nuevas situaciones.

MARCO CONCEPTUAL DE REFERENCIAS

En general, el Análisis de Tareas se plantea como un método de estudio de situaciones que exigen competencias humanas específicas (sociales, motoras, emocionales, cognitivas), y su aplicación se orienta al análisis, desarrollo o mejoramiento de situaciones en diferentes dominios del conocimiento, por ejemplo, en procesos de enseñanza-aprendizaje (Campbell, Tirapelle, Yates, Clark, Inaba, Green, Plurad, Lam, Tang, Cestero, & Sullivan, 2011; Orozco, 2000; Sullivan, Brown, Peyre, Salim, Martin, Towfigh, & Grunwald, 2007).

Esta herramienta metodológica permite "*describir y caracterizar la actividad cognitiva que subyace al desempeño de las personas, cuando se enfrentan a una tarea determinada*" (Otálora, 2006, p. 1) y explicitar cuáles son los elementos estructurales que la componen. En términos de procesamiento de información, las características de cada tarea inciden en el tipo de representaciones mentales que las personas se hacen de la misma (Mayer, 1986), por lo cual, las tareas con estructuras claras y coherentemente articuladas en términos de sus estados inicial, final, restricciones y operadores válidos, dan lugar a representaciones mentales bien estructuradas. Por el

[1] Proyecto actualmente en curso, dirigido por Diego Fernando Guerrero, financiado por COLCIENCIAS, la Universidad del Valle, la Universidad Pedagógica y la Universidad Nacional de Colombia.

contrario, una tarea estructuralmente inadecuada incidirá negativamente en el desempeño, lo cual, más allá de dar cuenta del conocimiento del sujeto, muestra los problemas de la tarea misma. En este sentido la aplicación del método permite resolver preguntas tales como ¿Qué materiales se utilizan? ¿Cuáles son las consignas que se le dan al niño? ¿Qué tipo de conocimiento previo debe tener el niño para resolver la tarea? ¿Cuál es el procedimiento que se puede sugerir o utilizar a partir del tipo de preguntas o material que se ofrece?, entre otras.

METODOLOGÍA

El Instrumento de estudio fue el modelo de análisis de tareas, propuesto por Orozco (2000), el cual se aplicó sobre 133 actividades escolares propuestas para el área de matemáticas para los grados Transición, 1° y 2° de Primaria, contenidas en el planeador curricular del año 2009. Las actividades fueron analizadas y discutidas por los cuatro autores previamente entrenados en el uso de la herramienta y con dominio sobre el conocimiento matemático. Se utilizó un diseño cualitativo-descriptivo que caracteriza cada una de las tareas en función del formato de presentación, estructura y demandas cognitivas. Se propusieron dos tipos de análisis: uno cualitativo acerca de los contenidos y demandas cognitivas específicas de cada una de las actividades del planeador y uno cuantitativo acerca de la información presente en las tareas, es decir, la frecuencia con que una determinada información aparece en dichas actividades.

ANÁLISIS DE DATOS

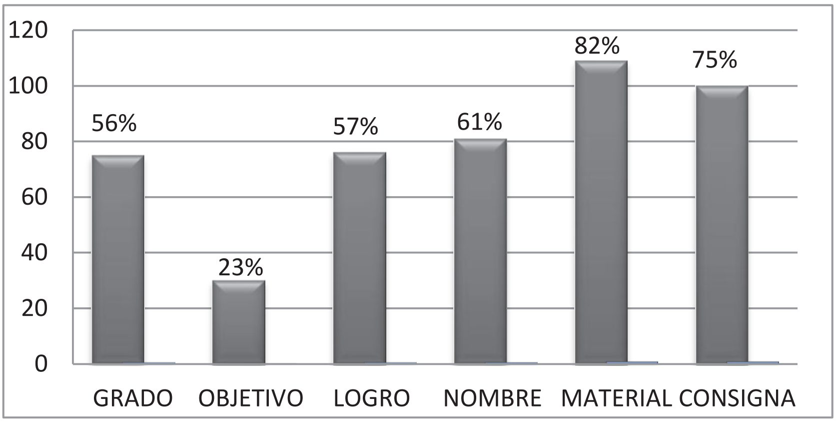
En los análisis de tareas realizados para cada una de las actividades, se especificó el componente "objetivo" que corresponde a las características de la tarea en sí misma, y el componente "subjetivo" en el que se especifican los procesos y procedimientos requeridos para resolver la tarea. A continuación se propone un ejemplo de este tipo de análisis.

Los análisis cualitativos muestran, en primer lugar que, como lo muestra el ejemplo, todas las tareas evidencian la ausencia de adaptaciones pedagógicas para la presentación de la tarea a la población sorda, pues no se contempla una consigna específica en lengua de señas o un vocabulario en lengua de señas. El ejemplo también muestra otra situación recurrente, aunque se considera importante realizar un trabajo a partir de elementos viso-espaciales (laberinto) en este caso: las demandas cognitivas son mínimas y no hay una verdadera situación de resolución de problemas (Newell & Simon, 1972).

Tabla 1. Descripción y análisis de la actividad n.° 12 del planeador

Grado: No especificado		Logro de la unidad: "Ubica objetos en espacios predeterminados"	
Nombre de la tarea: Un laberinto gatuno		Material: Una lámina de papel que contiene la imagen de un laberinto, la imagen de un gato en la parte superior izquierda y un almohadón en la parte inferior derecha.	
ANÁLISIS OBJETIVO		ANÁLISIS SUBJETIVO	
Consignas	Estructura	Demanda cognitiva	Desempeño Ideal
"pinto el camino que une al gato con el almohadón".	Una imagen visual que contiene dos objetos cuya relación debe establecerse a partir de una línea predeterminada.	- Comprender la consigna. - Memoria de trabajo (explora el camino sin olvidar la meta). - Determinar que el camino de A a B es el camino que debe pintar. - Control de acciones motoras al pintar el camino que va del objeto A al objeto B.	El sujeto pinta o traza una línea del punto A al punto B, por el camino que está trazado.

Por otro lado, los resultados del análisis cuantitativo muestran que la información con mayor desarrollo corresponde al "material", el cual está descrito en el 80% de los casos (ver gráfica 1), el cual no solo incide en la comprensión que el niño alcanza sobre las condiciones de la tarea, sino también el tipo de estrategias que genera frente a la meta propuesta (Nunes & Moreno, 1998).



Gráfica 1. Información presente en las tareas

Un 75% de las tareas contiene alguna consigna o pregunta específica; este es considerado uno de los ítems más importantes en la planeación curricular, pues las consignas determinan la estructura de la tarea y la representación mental que el niño genera (Mayer, 1986), lo cual determina la activación de sus competencias y estrategias para resolver la situación.

Se encontró que el 61% de las tareas presenta un nombre, aunque esto podría ser irrelevante en función de las demandas que se exigen; el nombre de la tarea permite a los niños identificar una situación de resolución de problemas particular y les facilita apropiarse de la situación. Solo el 57% de las actividades especifica cuáles son los logros que orientan la intervención del docente, y un 56% especifica el grado escolar para el cual está dirigida. No es claro si las tareas restantes son utilizadas para todos los grados, ni las adaptaciones que se hacen para ajustar las demandas a grupos con diferentes niveles de conocimiento.

Finalmente, el mayor vacío de información encontrado corresponde a los objetivos de las actividades, pues solo en un 23% de los casos, este es explicitado. Esto genera dificultades para reconocer cuál es el sentido y cuál el propósito didáctico del recurso que se está implementando.

CONCLUSIONES

En los resultados se evidencia que las actividades del planeador curricular examinado carecen recurrentemente de elementos estructurantes, tales como objetivos de aprendizaje, consignas o materiales con los que se presenta la tarea. Estos tienen implicaciones tanto para la comprensión de la tarea como para la generación de un aprendizaje significativo; además, permiten al docente un adecuado manejo cuando esta se implementa en el aula (Stone, 2003).

El análisis de tareas se presenta así como una herramienta pertinente que les permitiría a los docentes reflexionar sobre la coherencia entre los objetivos formativos que proponen a sus estudiantes y las actividades escolares que implementan para alcanzar tales objetivos. Esta herramienta podría sumarse al conjunto de metodologías que los docentes utilizan para orientar los procesos de enseñanza-aprendizaje. En el presente estudio el análisis de tarea permitió caracterizar el tipo de actividades que se le propone a un grupo de estudiantes sordos, indicando que la mayoría podrían no ser adecuadas en función del aprendizaje que se pretende promover y de las competencias y características propias de esta población.

Una conclusión final basada en lo anterior se plantea como una hipótesis que posteriormente debe ser evaluada: diferentes estudios reportan un desfase en el conocimiento observado entre sordos y oyentes (Leybaert & Van Cutsem, 2002; Nunes & Moreno 1998; Zafarty, Nunes, & Bryan, 2004) y aunque hay investigaciones que tratan de dar cuenta de este hecho recurrente (Avalo & Tovar, 2011). Una explicación alternativa de los factores que inciden en el bajo desempeño podría estar relacionada con la inadecuada elaboración de las tareas propuestas; por esta razón, se debe considerar la relación entre el material, el contenido, las exigencias cognitivas, la manera de presentación de las actividades y las particularidades cognitivas de los sordos, especialmente cuando algunas evidencian que están diseñadas por y para oyentes, o que le exigen al niño únicamente procesos cognitivos básicos, lo cual, como lo plantean diferentes investigaciones (Gallo, 2011; Nunes & Moreno, 1998), no responde a las necesidades de los niños sordos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Avalo, A., & Tovar, A. (2011). *Relación entre memoria de trabajo y habilidad matemática en sujetos no oyentes*. (Trabajo de grado). Universidad del Valle, Cali.

Campbell, J., Tirapelle, L., Yates, K., Clark, R., Inaba, K., Green, D., Plurad, D., Lam, L., Tang, A., Cestero, R., & Sullivan, M. (2011). The Effectiveness of a Cognitive Task Analysis Informed Curriculum to Increase Self-Efficacy and Improve Performance for an Open Cricothyrotomy. *Journal of Surgical Education*, *68(5)*, 403-407.

Gallo, E. (2011). *Algoritmo de signación en niños de primaria de una escuela para población no oyente de la ciudad de Cali.* (Trabajo de grado).Universidad del Valle, Cali.

Leybaert, J., & Van Cutsem, M. (2002). Counting in sign language. *Journal of Experimental Child Psychology, 81*, 482–501.

Mayer, R. E. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Paidos.

Newell, A., & Simon, H. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall.

Nunes, T., & Moreno, C. (1998). Is hearing impairment a cause of difficulties in learning mathematics?. En Dolan, C. (Ed.), *The development of mathematical skills* (pp. 227-254). Hove, Britain: Psychology Press.

Orozco, M. (2000). El análisis de tareas: cómo utilizarlo en la enseñanza de la matemática en primaria. *Revista EMA, 5(2),* 139-151.

Otálora, Y. (2006). El análisis de tareas como estrategia metodológica para acceder a la cognición encubierta. Documento de trabajo, Universidad del Valle.

Stone, M. (1999). ¿Qué es la enseñanza para la comprensión? Paidós, Buenos Aires.

Sullivan, M. E., Brown, C. V., Peyre, S. E., Salim, A., Martin, M., Towfigh, S., & Grunwald, T. (2007). The use of cognitive task analysis to improve the learning of percutaneous tracheostomy placement. *The American Journal of Surgery,* 193, 96–99.

Zafarty, Y., Nunez, T., & Bryant, P. (2004). The performance of young deaf children in spatial and temporal number task. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education,* 9(3), 315-326.

El desarrollo de la noción de forma en estudiantes sordos de primer ciclo de Primaria mediante la aplicación de una trayectoria de aprendizaje

Sonia Barón Vargas[*]
Silenia Agudelo Castillo[**]

RESUMEN

Se presenta la aplicación y evaluación de la trayectoria de aprendizaje diseñada por Guilombo (2011), en torno al desarrollo de la noción de forma, para estudiantes sordos de primero de Primaria. Para ello, se muestra un análisis teórico de esta, centrando en tres aspectos esenciales: trayectoria de aprendizaje, pensamiento espacial, y forma y figura, lo que permitió justificar aspectos pertinentes que se debían modificar en la trayectoria.

Palabras clave: trayectoria de aprendizaje, formas geométricas, figuras geométricas, pensamiento espacial, estudiantes sordos.

[*] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: tristania_333@hotmail.com

[**] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: sili1302@yahoo.es

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Este trabajo hace parte de la pasantía de investigación que se desarrolla actualmente en el marco de las actividades que adelanta el grupo de investigación GIIPLyM (de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas), enmarcada, específicamente, en el marco del proyecto transversal Red ALTER. NATIVA. La intención de esta comunicación es mostrar los resultados más relevantes obtenidos luego de aplicar y evaluar la trayectoria de aprendizaje planteada por Guilombo (2011), diseñada para contribuir en el desarrollo de la noción de forma, en un grupo de estudiantes sordos de primer grado de Educación Básica. Es importante resaltar que esta trayectoria fue construida por medio de veinticinco (XXV) niveles, los cuales se enmarcan dentro de cuatro procesos fundamentales: i) comparación, ii) clasificación, iii) reconocimiento de componentes y; iv) representación.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

El desarrollo del marco teórico se enfoca en tres aspectos fundamentales: trayectoria de aprendizaje, el pensamiento espacial, y concepto de forma y figura, los cuales se toman como los ejes estructuradores de este trabajo, ya que permitieron realizar un análisis teórico de los datos recolectados luego de la aplicación de la trayectoria.

Trayectoria *de aprendizaje*

Clements & Samara (2009, p. 3) utilizan el concepto de trayectoria de aprendizaje para presentar algunos niveles de pensamiento geométrico por los cuales debe pasar el niño para la adquisición del concepto de las formas geométricas; para ello resaltan que "Las trayectorias de aprendizaje nos ayudan a responder varias preguntas: ¿Qué objetivos se deben establecer? ¿Por dónde empezar? ¿Cómo saber a dónde ir? ¿Cómo llegar?". A su vez, destacan tres partes fundamentales de las trayectorias de aprendizaje: *una meta matemática, un camino de desarrollo para alcanzar la meta y unas actividades instruccionales.*

Pensamiento *espacial.*

El pensamiento espacial es fundamental para la construcción de habilidades matemáticas que a través de los años el niño utilizará para dar solución a problemas matemáticos, no rutinarios. Dickson, citando a Lappan y Winter (2001), expone que el desarrollo de este pensamiento es la representación bidimensional del espacio tridimensional, ya que a pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias matemáticas que se proporcionan a los niños se hacen desde una perspectiva bidimensional; por su parte, Clements y Samara (2009) exponen dos tipos de competencias fundamentales para la construcción del pensamiento espacial: **la orientación espacial y la visualización espacial**, las cuales se describen a continuación:

Pensamiento espacial

ORIENTACIÓN ESPACIAL	VISUALIZACIÓN ESPACIAL
Implica comprensión y funcionamiento de las relaciones entre posiciones en el espacio (paso del egocentrismo al alocentrismo). en donde se identifica el tamaño y forma de objetos; representación y ubicación en un espacio tridimensional, a través de la manipulación activa del entorno.	Habilidad de procesar y producir creaciones, interpretaciones, uso y reflexión de imágenes, dibujos y diagramas mentales en papel o en herramientas tecnológicas, con el proceso de comunicar información sobre el pensamiento y el desarrollo de ideas adquiridas con anterioridad.

Estas dos competencias se fundamentan en la investigación realizada por Piaget sobre la teoría del desarrollo de los conceptos espaciales, donde se desencadenan tres tipos de propiedades geométricas: topológicas, proyectivas y geométricas (o euclidianas), que son desarrolladas durante la interacción con el medio (especialmente a través del tacto y la vista).

Concepto *de forma y figura*

La definición de forma y figura muchas veces tiende a confundirse. Clements & Samara (2009) exponen que desde el primer año de edad los niños perciben las formas, comenzando con la identificación del círculo, seguidamente el cuadrado, el triángulo y, finalmente, el rectángulo; asimismo, resaltan que la "forma" hace referencia al nombre informal para "figuras" geométricas de dos y/o tres dimensiones formadas por puntos, líneas o planos; por ejemplo, una figura sería el círculo, mientras que la forma se refiere a lo que es redondo.

Por otra parte, Godino (2004) reconoce la forma como un objeto abstracto de un espacio geométrico, el cual puede ser representado de manera gráfica (por medio de un dibujo), mientras que las figuras geométricas son consideradas por Godino y Ruiz (2002, p. 192) "como abstracciones, conceptos, entidades ideales o representaciones generales de una categoría de objeto [...] no tienen ninguna consistencia material, ningún peso, color, densidad".

METODOLOGÍA

Para desarrollar este trabajo se hizo necesario, en un primer momento, realizar un análisis teórico, a través del cual se posibilitó una comprensión holística del trabajo propuesto por Guilombo (2011) y del desarrollo de la noción de forma en niños sordos de primer grado de Educación Básica. De manera simultánea, se estudió el contexto de un grupo de estudiantes sordos de una institución educativa distrital en un aula multigrado especializada, con el fin de adaptar la trayectoria en lo que se refiere a recursos y en particular al material didáctico, tipo de juegos y referente cultural de las actividades que se presentan en dicha trayectoria.

Para la recolección de los datos se utilizó una hoja de respuestas en donde los niños dejaban evidencias de sus procesos; por otra parte, se construyeron protocolos de sesiones de actividades, en donde podíamos registrar los aspectos que se consideraban como relevantes en la aplicación de la trayectoria y, finalmente, se hizo la reflexión final.

ANÁLISIS DE DATOS

Para el análisis de datos, planteamos tres aspectos fundamentales los cuales nos permitieron organizar la información recolectada:

Contexto *teórico*

Para la primera parte, se hace una revisión de los antecedentes, enfocándose principalmente en el referente teórico utilizado por Guilombo (2011) para su propuesta; se destacan principalmente a Piaget (1986), Clements & Samara (2009), Godino y Ruiz (2002) y Godino (2004). Esto nos sirvió para crear unas categorías de análisis que nos permitieron justificar teóricamente cuáles eran los aspectos pertinentes y cuáles los que se debían cambiar de la trayectoria.

Contexto de los estudiantes

Antes de aplicar la trayectoria, se hizo necesario realizar un estudio sobre el contexto familiar y personal de los estudiantes; para esto se indagaron aspectos como: tipo de sordera (hipoacusia o sordera profunda), número de hermanos, antecedentes familiares de la sordera (padres, hermanos u otro familiar sordo), edad adquisición de la sordera (desde el nacimiento o adquisición de la sordera en la primera infancia) y edad del estudiante. Luego de ello, específicamente en el momento de aplicar la trayectoria, se pudo evidenciar que esta presentaba inconformidades con las edades, pues, como lo afirma Márquez (2010) los estudiantes sordos "ingresan al mundo de la escuela en avanzada extra edad, razón por la que no todos los cursos son homogéneos en intereses, experiencias previas, edades y dominios de la lengua" (pág. 24).

Forma de la trayectoria

Se hizo necesario especificar los objetivos de la trayectoria, pues, dentro de ella no era posible reconocerlos. Por otro lado, Guilombo habla de cuatro procesos dentro de la trayectoria: comparación, clasificación, reconocimiento de componentes y representación, pero existían algunos niveles en donde no estaba especificado el tipo de proceso a desarrollar.

CONCLUSIONES

Después de la aplicación y evaluación de la propuesta planteada por Guilombo (2011), se pudo concluir que el uso adecuado de material tangible permite que el estudiante sordo tenga una mejor concepción de la noción de forma, puesto que por su condición, la visualización comienza a ser un factor fundamental para el desarrollo de sus habilidades geométricas. Por otra parte, se debe tener en cuenta que los procesos de aprendizaje de cada uno de los estudiantes pueden variar de acuerdo con su historial académico, y su contexto social y familiar.

Es importante resaltar que mediante el estudio de la trayectoria de aprendizaje, fue posible identificar que esta requiere de unos objetivos específicos, en cada uno de los niveles establecidos, pues, en el momento de ser analizada, no es posible reconocer con claridad cuál es su intención. Finalmente, vale la pena aclarar que dicha trayectoria no está enmarcada dentro de un proyecto de aula (como se pretendía), lo que hace necesario rediseñar las actividades para que de esta manera puedan ser enmarcadas dentro del contexto en el cual fue desarrollada la propuesta y puedan seguir una secuencia de aplicación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Clements, D., & Sarama, J. (2009). Learning and Teaching Early Math. *The Learning Trajectories Approach*. New York: Taylor & Francis.

Dickson, L. (2001) *El aprendizaje de las matemáticas*. Editorial Síntesis, Madrid, España.

Godino, J. & Ruiz, F. (2003). *Geometría y su didáctica para maestros*. Recuperado en: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf

Godino, Juan. (2004). *Matemáticas para maestros*. Publicación realizada en el marco del proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología. Recuperado en: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/8_matematicas_maestros.pdf

Guilombo M. (2011), *La búsqueda de materiales para la enseñanza de la geometría con población sorda de primer grado de educación básica: Un proceso de investigación*. Universidad Distrital, Bogotá, Colombia

Márquez, A. (2010) *Orientaciones generales para el diseño de situaciones didácticas en matemáticas a estudiantes sordos*. MEN, INSOR. Bogotá, Colombia.

Piaget, J. (1986) *La formación del símbolo en el niño*. Fondo de Cultura Económica. México.

El reconocimiento de estructuras de tipo aditivo enmarcados en las fases del modelo de van Hiele

*Dora Mercedes Bedoya Vélez**
*Ledys Llasmín Salazar Gómez***
*Pedro Vicente Esteban Duarte****

RESUMEN

La investigación tiene como objetivo principal describir el reconocimiento y la visualización de las estructuras de tipo aditivo que hacen los estudiantes del grado tercero. Para ello la propuesta se articula en el nivel de visualización del modelo de van Hiele; se realizarán tres estudios de casos presentando experiencias de aprendizaje de acuerdo con las fases del modelo, que permitan obtener como resultado la descripción del reconocimiento que los estudiantes hacen de las estructuras de tipo aditivo de forma general como herramienta para la comprensión y aplicación de las mismas en situaciones matemáticas y en grados posteriores.

Palabras clave: estructuras aditivas, reconocimiento, visualización, fases de aprendizaje y aprendizaje.

* Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: dorabedoyav@gmail.com
** Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: ledysllasmin@gmail.com
*** Universidad Eafit. Dirección electrónica: pesteban@eafit.edu.co

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Contexto. En ciertos momentos la experiencia docente genera espacios de reflexión sobre nuestras prácticas y la influencia de las mismas en los procesos de enseñanza y aprendizaje; esto conlleva al análisis de los factores que influyen en dichos procesos, entre los cuales cabe mencionar las estrategias que se desarrollan en las prácticas de aula; dichas estrategias condicionan los procesos de aprendizaje lo que las hace relevantes.

El problema de investigación. Particularmente se puede identificar cómo algunos conceptos, exclusivamente las estructuras de tipo aditivo, son abordados desde aprendizajes memorísticos en los estudiantes del grado tercero de la Institución Educativa San José del municipio de Betulia. Cuando se plantean actividades cuya solución requiere solo una actividad de cálculo, los estudiantes la realizan sin inconvenientes y aplican el algoritmo de forma mecánica; en cambio, cuando se plantean situaciones en las cuales se debe razonar, analizar, interpretar y traducir a una determinada operación se observa dificultad en los procesos que involucran la comprensión y ejecución de cada una de estas acciones.

Es pertinente entonces que en los procesos de razonamiento que involucran las estructuras de tipo aditivo, los estudiantes construyan un reconocimiento visual para llegar a la aplicación en diferentes situaciones. Esta investigación se articula en el nivel de visualización del Modelo de van Hiele, donde los estudiantes reconocen las estructuras de tipo aditivo de forma general, siendo este paso una herramienta para la comprensión posterior de las mismas. Los estudiantes del grado tercero tienen la necesidad del reconocimiento inicial de las estructuras aditivas, lo que permite la operación y aplicación de las mismas en diferentes contextos y situaciones matemáticas, ya que dicho reconocimiento inicial permite abordar las falencias y necesidades que tienen los estudiantes frente a la adición y sustracción; esto se ve reflejado en el desarrollo previo y posterior de situaciones matemáticas que involucran estructuras de tipo aditivo.

Pregunta de investigación. ¿Cómo favorecer el reconocimiento de las estructuras de tipo aditivo en los estudiantes del grado tercero?

Estructuras de tipo aditivo. Las estructuras de tipo aditivo son el conjunto de conceptos en que se trabajan todas aquellas acciones en las cuales están involucradas la adición y la sustracción; estas son fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas, ya que se convierten en una base para la comprensión de operaciones, la solución de problemas aditivos y la representación de las mismas.

Justificación

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Educación Básica Primaria se convierten en un eje fundamental en el campo de la educación, dado que posibilitan la adquisición de conocimientos básicos que en ciertos momentos son necesarios para el aprendizaje de nuevos conceptos y la solución de diversas situaciones matemáticas. Particularmente el concepto de estructura se convierte en una herramienta fundamental para la solución de situaciones con operaciones básicas en los estudiantes del grado tercero, los cuales a partir de un reconocimiento inicial, podrán dar un uso y aplicación de las mismas en grados posteriores. Con respecto a las estructuras, Jaramillo y Esteban (2006) hablan de la pertinencia de su reconocimiento y afirman que el estudio de las matemáticas debe orientarse hacia la comprensión de las estructuras que la conforman, permitiendo a los estudiantes la comprensión de la forma como operan en un concepto y así estos puedan aplicarlo en distintas circunstancias de aprendizaje.

A lo largo de la historia se ha visto cómo las estructuras de tipo aditivo son temas de gran importancia en la Básica Primaria; esta afirmación se apoya en lo planteado desde los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) donde se hace énfasis en el currículo de Matemáticas en las primeras etapas, en donde se construyen las operaciones fundamentales. Las situaciones relacionadas con estructuras de tipo aditivo son procedimientos de relevante importancia en los primeros años de escolaridad, y el avance en la comprensión de estas es indispensable en la vida cotidiana, ya que se convierten en una base para la comprensión de otros conceptos matemáticos.

Objetivo general

- Describir el reconocimiento y la visualización de las estructuras de tipo aditivo en los estudiantes del grado tercero.

Objetivos específicos

- Reconocer la identificación que los estudiantes hacen de las propiedades de las estructuras de tipo aditivo.
- Favorecer la identificación de los estudiantes, desde la visualización, de las estructuras de tipo aditivo.

MARCO CONCEPTUAL

Las estructuras de tipo aditivo son de gran importancia dentro de la educación básica primaria, pues hacen parte de la base que fundamenta el aprendizaje de otros conceptos tales como: Las operaciones con números decimales, la identificación de un área, volumen, estructura algebraica, entre otros. Estos se construyen en relación con una adecuada configuración de las estructuras de tipo aditivo. A continuación se presentan algunos estudios que han trabajado diversos aspectos de la estructura aditiva.

Estructuras aritméticas elementales y su modelización (Castro, Rico y Castro, 1995). En este trabajo se resaltan algunas de las dificultades que posteriormente en Matemáticas pueden tener su origen en la instrucción inicial de suma y resta. Castro, Rico y Castro (1995), citando a (Carpenter y Moser) afirman que: "Las estructuras aditivas contienen un gran número de conceptos matemáticos que requieren de un largo período de tiempo para su comprensión". Por ello es importante ayudar a los alumnos a fundamentar adecuadamente la estructura aditiva desde los primeros años de escolaridad.

Representaciones gráficas y simbólicas para los operadores aditivos (Ruiz, 2000). En sus argumentos, el autor presenta la construcción y formalización de una representación geométrica y otra simbólica para expresar un concepto aritmético como es la estructura aditiva, apoyado en la tabla numérica, conocida como la Tabla-100. Él afirma que la representación geométrica es la expresión visual del operador aditivo, el cual se puede ver desde un punto de vista figurativo, siendo la expresión simbólica una descripción aritmética de dicho operador (Ruiz, 2000). De esta forma, lo geométrico y lo simbólico ayudan a que el alumno afiance las operaciones en la parte aritmética, y viceversa.

El modelo educativo de van Hiele. Este marco de trabajo, desarrollado inicialmente para su implementación en geometría, le da una importancia singular a la visualización de los objetos y propiedades que conforman un concepto. De otro lado, el trabajo de aula en el que se aplican los lineamientos del modelo se enfoca en la búsqueda de estructuras que les permitan a los alumnos reconocer el concepto objeto de estudio en diferentes contextos (van Hiele, 1986). Por lo anterior, la aplicación de este modelo a la enseñanza y el aprendizaje de las estructuras de tipo aditivo es un área de investigación que promete resultados innovadores en el campo de la Educación Matemática.

El trabajo de investigación pretende describir el reconocimiento y visualización de las estructuras de tipo aditivo, que adquieren estudiantes del grado tercero a través del desarrollo de actividades enmarcadas en las fases del modelo educativo de van Hiele; las fases de aprendizaje corresponden al componente prescriptivo del modelo y son fundamentales en la estructuración de pautas para la enseñanza de conceptos matemáticos, dado que brindan herramientas de carácter secuencial y ordenado para la elaboración de actividades con sentido que propendan por el progreso a través de los diferentes niveles de razonamiento.

Según Corberán, et al., (1994), las fases de aprendizaje de van Hiele, son las siguientes:

Fase 1, información. El profesor informa los conceptos, problemas, material a utilizar y metodología empleada para desarrollar la temática. Se realiza el diagnóstico de los conocimientos previos.

Fase 2, Orientación dirigida. En esta fase se busca que el estudiante descubra, comprenda y aprenda los conceptos y propiedades del objeto de estudio en cuestión.

Fase 3, Explicitación. El estudiante expone lo que ha observado y realizado, sus conclusiones frente al concepto; esta es una fase de debate e intercambio de ideas.

Fase 4, Orientación libre. Se proponen problemas donde el estudiante se enfrente a diversas maneras de resolverlo y pueda aplicar los conocimientos.

Fase 5, Integración. Se orienta a los estudiantes para que estos lleguen a comprensiones globales, mediante la comparación y combinación de los conocimientos ya adquiridos.

Estas fases serán trabajadas en el primer nivel de razonamiento: Nivel 1, de reconocimiento visual donde los estudiantes ven el objeto de estudio de manera global, y dan características generales de éste.

Se tiene en cuenta el módulo de aprendizaje como herramienta de gran importancia para favorecer el progreso a través de las fases, el cual es un conjunto de actividades acordes con el nivel de razonamiento que se desea alcanzar; estas experiencias de aprendizaje están en una relación directa con cada una de las fases del modelo educativo de van Hiele. Se tiene como estrategia de apoyo la entrevista de carácter socrático; esta entrevista es semiestructurada, se fundamenta en un diálogo y se apoya en preguntas con aporte visual.

METODOLOGÍA

La investigación está orientada desde un enfoque cualitativo puesto que les permite a los participantes construir la realidad desde su contexto social y cultural, es decir, los estudiantes participan como sujetos que aprenden desde su entorno subjetivo; por lo tanto, en ellos los procesos se dan de manera relativa y por supuesto diversa. Para describir de manera detallada, profunda y singular el progreso de cada uno de los participantes en la investigación es conveniente utilizar el estudio de casos; para ello se tendrán en cuenta tres casos particulares para la descripción del reconocimiento que los estudiantes hacen de las estructuras de tipo aditivo a partir del diseño de experiencias de aprendizaje.

RESULTADOS ESPERADOS

Con la presente investigación se pretende describir los procesos de razonamiento con respecto al reconocimiento y la visualización de las estructuras de tipo aditivo en los estudiantes del grado tercero; además, se espera como producto final la consolidación de un Módulo de Aprendizaje que sirva como apoyo a los docentes para la enseñanza de las estructuras de tipo aditivo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Castro, E., Rico, L. & Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Corberan, R. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en enseñanza secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de van Hiele.* Madrid: Centro Nacional de Investigación y Documentación Educativa.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación.* México: Mc Graw Hill.

Jaramillo López, Esteban Duarte. (2006). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de Van Hiele. *Revista Educación y Pedagogía.* Medellín. vol. XVIII, núm. 45. p: 109-118.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá, D.C., Colombia.

Ruiz, F. (2000). *Representaciones gráficas y simbólicas para los operadores aditivos.* En P. Gómez & L. Rico (Eds) iniciación la investigación en didáctica de las matemáticas: Homenaje al profesor Mauricio Castro. Granada, España: Universidad de Granada.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight.* A theory of Mathematics Education. London: Academic Press

Zapata, S. & Sucerquia, E. (2009). *Módulo de Aprendizaje para la comprensión del concepto de series de términos positi*vos. Medellín.

"Elementos que constituyen a un docente investigativo" enmarcado en el proyecto "Formación en y hacia la investigación de profesores de matemáticas en ejercicio"

*Jenny Alejandra Beltrán González**
*Sergio Duban Morales Dussán***
*Hadayla Camila Reyes Iglesias****

RESUMEN

Este trabajo da cuenta del proceso que se realizará durante un año, en el marco de la primera fase del proyecto de investigación avalado por Colciencias escogido en una convocatoria nacional para la conformación del banco de proyectos de investigación científica o tecnológica bajo la línea de investigación formación de profesores, *"Formación en y hacia la investigación de profesores de matemáticas en ejercicio"* liderado por cuatro profesores del proyecto curricular L. E. B. E. M del grupo de investigación Crisálida. Dicho proceso evidenciará necesidades de formación en investigación de tres profesores de matemáticas de instituciones educativas de Bogotá; se pretende construir tres instrumentos (entrevista semiestructurada, observación de clases, estudio de experiencias significativas) para recoger información de carácter cualitativo.

Palabras Claves: Profesor investigador, investigación, elementos, barreras.

* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: alejandra4826@hotmail.com

** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: leonser182@hotmail.com

*** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: cri_camicami@hotmail.com

ELEMENTOS QUE CONSTITUYEN A UN DOCENTE ¿INVESTIGADOR?

La caracterización está enmarcada en la problemática general del proyecto de investigación, y atenderá a los objetivos planteados por la investigación, específicamente, los propuestos para la primera fase del proyecto.

La problemática principal del proyecto:

¿Qué características debe tener una propuesta de formación de profesores de matemáticas en ejercicio, que permita un acercamiento a los procesos de investigación desde la inmersión en ellos, a través de la reflexión sistemática de su práctica profesional, posibilitando también la transformación de la misma?

De la anterior pregunta, se deriva la siguiente problemática que apunta al objetivo específico de la primera fase del proyecto; en ella nuestra participación será como pasantes de investigación, realizando un estudio de carácter cualitativo en donde se diseñarán instrumentos de recolección de datos que nos permitan aportar al proyecto de investigación, así como a la problemática particular del trabajo de grado, argumentando las necesidades de formación en investigación encontradas en tres profesores de matemáticas en ejercicio de Educación Básica y Media.

Dada la importancia que tiene el docente de convertirse en una persona reflexiva de su práctica, de modo que pueda mejorarla por medio de la construcción activa de conocimiento, se involucra de manera directa la investigación como instrumento para que el docente pueda tener mejores herramientas a la hora de enfrentarse al aula de clase. "Los educadores que investigan sobre su práctica, probablemente aprenden mucho más de ellas que de las tendencias que son reportadas en la literatura de investigación" (Even y Ball 2009, p. 123). Es por esto importante observar cómo los profesores de matemáticas de Educación Básica y Media en Bogotá se han acercado a ese rol investigativo antes mencionado o por el contrario no se ha reflexionado en este aspecto.

Se han observado diversas perspectivas en las que los profesores están desligados del quehacer investigativo, o barreras que les impiden de algún modo relacionarse con esta práctica; algunas de dichas barreras según Even y Ball (2009) se ven identificadas bajo la falta de tiempo o la rigurosidad que se le ha dado a la investigación y además que un un ambiente investigativo solo se logra en el ámbito universitario, otra perspectiva es la enunciada por Díaz, Díez, San Fabián, Martínez (1996), donde hablan acerca de la Innovación Educativa y Desarrollo Profesional Docente planteando algunas hipótesis sobre las resistencias a participar en procesos de innovación y cambio que están expuestas en los siguientes tópicos: Primero, la insatisfacción profesional debida a las condiciones en que se desarrolla el trabajo docente y las recompensas que obtiene; segundo, la mala organización y funcionamiento de los centros educativos que no estimula la innovación y bloquea todo tipo de iniciativas personales y, por último, la deficiente formación pedagógica recibida tanto en el período de formación inicial como a través de los cursos de actualización y perfeccionamiento.

Partiendo de las diferentes perspectivas con las cuales el profesor no tiene una actitud investigativa, es importante reconocer qué necesidades se encuentran por parte de los profesores para adquirir dicha actitud. Según Camargo (2003) para hablar de necesidades nos remitimos a aquellas de formación de los profesores en el ámbito de mejorar su práctica:

> ... la formación docente se relaciona con diferentes problemáticas, entre las que cabe resaltar, por su recurrencia, las siguientes: la calidad de la educación, la profesionalidad del docente, los cambios que requieren las instituciones escolares y la práctica pedagógica que orienta las demandas del docente. Estas relaciones se convierten en justificación o razón de ser de las necesidades de formación (Camargo, 2003, p. 82).

Esta autora clasifica las necesidades en cuatro (4) tipos (ver tabla n.° 1), y define argumentando por qué son necesidades. En la primera y segunda columna, realiza una definición y descripción de cada uno de los tipos de necesidades, centrándose en los aspectos educativos que corresponden a cada una de ellas. En la tercera columna se evidencia el porqué es importante reconocer cada tipo de necesidad en el ámbito educativo y se plantean contextos donde se observan.

Tipos de necesidades	*Definición inicial*	*Definición a partir de las matrices*
Educativas	Se refieren al sector educativo más amplio en que se inscribe la práctica docente: el proyecto educativo actual del país, las exigencias a cada uno de los niveles de educación y las demandas planteadas por los proyectos de las instituciones involucradas.	Se refieren a las políticas educativas, su conocimiento, adopción y mirada crítica, así como las que se derivan de la construcción de un determinado tipo de sociedad que exige un tipo particular de individuo. También tiene que ver con el proyecto educativo nacional, sus principios y valores y la función que cumple en la sociedad y finalmente con los retos y soluciones planteados desde la educación y la escuela a la cambiante dinámica social.

Tipos de necesidades	*Definición inicial*	*Definición a partir de las matrices*
Pedagógicas	Provienen del trabajo de aula del docente, de la manera como la institución educativa realiza su misión y visión, de los modelos teóricos y operativos que circula, del valor asignado a la profesionalización de la enseñanza.	Son las necesidades sobre el saber fundante de la profesión y quehacer docente, y que se mueven entre las siguientes tensiones o relaciones: saber pedagógico y saber disciplinar; trasmisión y generación de conocimiento; formación y trasformación; enseñanza y aprendizaje; teórica y practica; enfoques tradicionales y críticos; didácticas y epistemologías.
Humanas	Corresponden a aquel tipo de demandas de tipo afectivo, valorativo y social que contribuyen a la realización del ser humano.	Se refieren a las necesidades de desarrollo individual, social y profesional como ser humano. Respecto a lo individual, se relacionan con su imagen y dignificación, así como con el carácter protagónico del maestro, con su saber, y su compromiso con lo que se hace. Lo social tiene relación con todos aquellos aspectos que plantan la sensibilidad del maestro frente a otro, su relación política con el contexto, entendido como el ámbito territorial histórico, cultural y de conocimiento.; con en reconocimiento de las posibilidades y limitaciones frente al cambio social. Finalmente, el desarrollo profesional del maestro comprende los aspectos referidos a su oficio, sus procesos formativos, las practicas pedagógicas, la participación en colectivos, la inserción en un gremio y la mayor o menor criticidad frente a estos aspectos.
Investigativas	Tienen que ver con lo que se requiere en términos de generación de conocimiento sobre el quehacer del docente. Las teorías educativas y pedagógicas y los enfoques y metodologías de abordaje de los problemas de la practica pedagógica que se construyen en referente de las necesidades investigativas	Son las necesidades relativas a los procesos de formación en la investigación misma y a la documentación de las prácticas pedagógicas. Aluden a la importancia de reconocer los criterios de validación de los saberes y a la conformación y consolidación de colectivos que permitan participar en la construcción colectiva de conocimientos y en redes.

[1] Tomado de CAMARGO, M. ET EL. (2004). Las necesidades de formación permanente del docente. Revista Educación y Educadores, Volumen 7. Universidad de la Sabana, p., 107.

Tabla N.° 1

Cuando se decide a analizar las necesidades de formación en investigación, estas apuntan al porqué el profesor debe formarse es decir los *interés*, que llevan a los profesores a buscar el ámbito investigativo, y no a las necesidades formación del docente, por otra parte se han identificado diversas barreras (por una parte están la insatisfacción, mala organización, deficiente formación pedagógica, y por otra la rigurosidad, el tiempo, etc.), las cuales le impiden acercarse a un ambiente investigativo, por lo anterior es importante identificar necesidades de formación en investigación como los elementos que permitan que un profesor pueda ser investigador, dichos elementos se definen como las características metodológicas, cualidades, actitudes etc. que se deben adquirir para tener una formación investigativa.

Existen diferentes documentos en los que se involucran las necesidades de formación en diferentes países como Chile (Arancibia, 2008), México (Ulloa & Martínez, 2005), y España (De Miguel 1996), y a nivel nacional como Camargo, Vergara, Calvo, Franco, Londoño, Zapata, y Garavito (2004) y Camargo (2003), donde se destacan las necesidades de formación desde un punto de vista en el cual se justifica el por qué se debe formar un investigador, más no se nombran qué elementos constituyen a un profesor investigador, por este motivo se quiere observar cuáles son estos elementos y si están o no presentes en los docentes, a partir de esto observaremos las necesidades de formación como parte de los elementos que constituyen a un profesor investigador.

Dado el contexto de la problemática la pregunta principal de este trabajo es: ¿Cuáles son las necesidades de formación en investigación que tienen tres docentes de matemáticas en ejercicio de Educación Básica y Media, de ciertas instituciones educativas de Bogotá?

Objetivo. Identificar necesidades de formación en investigación que tienen tres docentes de matemáticas en ejercicio de Educación Básica y Media, de ciertas instituciones educativas de Bogotá.

De esta manera se quiere indagar acerca de estas necesidades de formación en investigación de tres profesores de matemáticas de Educación Básica y Media donde se pueda analizar y argumentar estas diferentes necesidades que existen, observando cuáles son estos elementos y si pueden ser otra barrera más que impida que los profesores puedan estar en una constante construcción de conocimiento que ayude a mejorar sus prácticas educativas. Así se realizará un estudio de caso dichos profesores a los cuales se les aplicarán tres instrumentos de recolección de datos, que permitirán analizar e identificar cuáles son los elementos están presentes y cuáles no relacionando por qué se debe investigar con los elementos que se creen que ellos deben tener para poder estar en un ámbito investigativo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arancibia, M. (2008) Necesidades en formación permanente de docentes técnicos. Universidad Austral de Chile, Instituto de Filosofía y Estudios Educacionales. Valdivia, Chile. Recuperado septiembre de 2011 de http://www.scielo.cl/scielo.php?pid=S0718-07052008000100001&script=sci_arttext

Camargo, M (2003). Realidades y necesidades formativas de los docentes de la Educación Básica, Media y universitaria. Chía, Universidad de La Sabana, propuesta de investigación.

Camargo, M. Vergara, M. Calvo, C. Franco, M. Londoño, S. Zapata, F y Garavito, C. (2004). Las necesidades de formación permanente del docente. Revista Educación y Educadores, Volumen 7. Universidad de la Sabana.

De Miguel, M (1996). El desarrollo profesional docente y las resistencias a la innovación educativa. Universidad de Oviedo, España

Díaz, M. Díez, J. San Fabián, J. Martínez, P. (1996). El desarrollo profesional docente y las resistencias a la innovación educativa.

Sánchez, B. et al. (2010) Propuesta de investigación Formación en y hacia la investigación para profesores de matemáticas en ejercicio. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

Ulloa, N. & Martínez, M. (2005). La investigación acción como estrategia de formación de profesores. Una experiencia. México: UNAM, Proyecto PAPIME.

Competencia matemática Pensar y Razonar: un estudio con la media aritmética

Carlos Arturo Bohórquez Sánchez[*]
Vladimir Rivera Barrera[**]
Bernardo García Quiroga[***]

RESUMEN

Esta comunicación es un avance de investigación del proyecto "Desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes de Educación Básica y Media del departamento del Caquetá", desarrollado por el grupo de investigación "Desarrollo Institucional Integrado", línea de investigación Competencias Matemáticas. El propósito de esta investigación es presentar a la comunidad de educación matemática, los componentes de la competencia matemática Pensar y Razonar y, a partir de ellos, desarrollar su utilidad y aplicabilidad didáctica en el proceso complejo y prolongado de desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes, a partir del aprendizaje del objeto matemático media aritmética. Es decir, se trata de aportar elementos teóricos y metodológicos, para que los profesores de matemáticas puedan, en mejores condiciones, contribuir a movilizar las competencias matemáticas del estudiante.

Palabras clave: Competencias matemáticas, procesos matemáticos, niveles de complejidad, tareas y actividad matemática.

[*] Universidad de la Amazonia, Florencia, Caquetá. Dirección electrónica: carbosa44@hotmail.com.
[**] Universidad de la Amazonia-Florencia, Caquetá. Dirección electrónica: vlariba@hotmail.com.
[***] Asesor. Universidad de la Amazonia. Caquetá. Dirección electrónica: bgarciaquiroga@hotmail.com.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

"… entre los profesores existe una sensación de carencia de herramientas para desarrollar competencias en el aula…" (Solar 2009). La sensación de carencia de la que habla el autor, además de la importancia y vigencia del problema, fue una de las razones para formular el problema de investigación: ¿Cómo caracterizar la competencia matemática Pensar y Razonar a partir de los niveles de desempeño presentados por los estudiantes en la realización de actividades matemáticas planteadas con el objeto matemático media aritmética? Esto implica abordar las siguientes preguntas de investigación: ¿Cómo caracterizar la competencia matemática Pensar y Razonar? ¿Cuáles son los componentes de la C. Matemática Pensar y Razonar? ¿Cómo formular y aplicar un *modelo matemático a priori para contribuir a movilizar competencias matemáticas de los estudiantes?*

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

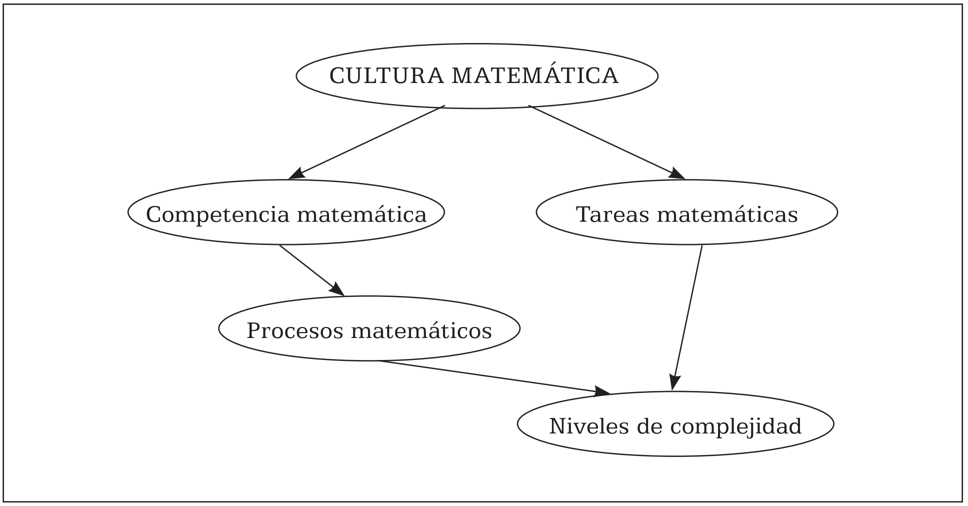
Esta investigación asume los siguientes concepciones de competencia, competencia matemática y competencia matemática Pensar y Razonar.

Competencia. Es un conjunto de potencialidades que posibilita un desempeño exitoso, que se materializa al responder a una demanda compleja que implica resolver un(os) problema(s) en un contexto particular, pertinente y no rutinario.

Competencia matemática. La competencia matemática consiste en un saber hacer en la práctica mediante herramientas matemáticas. Consiste en utilizar la actividad matemática en contextos tan variados como sea posible. Hace especial énfasis en aspectos sociales como la comunicación y la argumentación. Muestra cómo los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana. Se alcanzará en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen de manera espontánea a una amplia variedad de situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana (Rico & Lupiañez, 2008).

Competencia matemática Pensar y Razonar. Conjunto secuencial de pensamientos que representan eventos lógicamente organizados que nos movilizan para producir simbólicamente lo que no ha acontecido, influenciado por las emociones y factores físicos o sociales que modulan las formas de representar las cosas del mundo. (Solar (2009), L. Rico & J. L. Lupiañez (2008), L. Mora & N. Rosich (2010) y Tobón, et al. (2010)).

El desarrollo de la investigación condujo a asumir de Solar (2009) su propuesta de modelo de competencia matemática como estrategia y como herramienta de planificación de una secuencia didáctica. Este modelo se muestra a continuación en el siguiente gráfico:



Modelo de competencia matemática (Solar, 2009, p. 57)

Este modelo de competencia se asume como la estructura que articula las expectativas de aprendizaje a corto plazo (objetivos específicos) con las expectativas de aprendizaje a largo plazo (competencias), como lo plantean Rico y Lupiañez (2008) para desarrollar la articulación entre estas expectativas con las tareas, las actividades matemáticas de aprendizaje, los procesos matemáticos y los niveles de complejidad de la competencia, aspectos esenciales a la hora de planificar la secuencia didáctica en el aula en torno al aprendizaje de un objeto matemático para que los estudiantes movilicen sus competencias.

Para Solar (2009), una competencia matemática se compone de: *tareas matemáticas, procesos matemáticos y niveles de complejidad*. Esta investigación asumió la concepción de tarea asociada al dominio matemático, a los contenidos que se abordan en una clase de matemáticas. Estas tareas las diseña y propone el profesor como expectativa de aprendizaje a corto plazo para desarrollar procesos matemáticos que contribuyan a movilizar capacidades de los estudiantes que, por su nivel de complejidad progresivo, deben conducir al desarrollo de competencias matemáticas.

La actividad matemática de aprendizaje está estrechamente relacionada con las tareas; el estudiante la desarrolla resolviendo tareas matemáticas. Solar (2009) adjudica esta actividad matemática al estudiante, es decir, el estudiante desarrolla actividad matemática resolviendo tareas que el profesor diseña y propone. En cuanto a los niveles de complejidad de la actividad matemática, estos se articulan a la actividad creciente de resolver las tareas y desarrollar procesos matemáticos, procesos que son la base de la competencia. Solar (2009) afirma que las competencias matemáticas están compuestas por procesos matemáticos íntimamente ligados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas como son: resolución y planteamiento de problemas, razonar, comunicar, modelizar, representar, argumentar, demostrar, calcular, visualizar, graficar, etc., han estado siempre en los currículos de matemáticas. Es decir, se desarrollan competencias matemáticas como expectativas de aprendizaje a mediano y largo plazo en el marco del desarrollo de procesos matemáticos de complejidad progresiva, y asociados a expectativas de aprendizaje a corto plazo. Los procesos matemáticos movilizan una gran riqueza cognitiva cuando el estudiante se enfrenta a tareas complejas en un contexto sociocultural específico, es decir, el estudiante se involucra en procesos matemáticos cuando resuelve tareas. Esta relación entre tareas, procesos y actividad matemática genera una interacción comunicativa entre el estudiante y el profesor, y entre estudiantes y estudiantes en la construcción de significados matemáticos compartidos (Bishop, 2005).

En este componente de la competencia, al igual que el autor, asumimos los niveles de complejidad de la competencia adoptados en PISA (2003, 2004): *reproducción, conexión y reflexión.* Estos niveles han sido asumidos por nuestra investigación, de la mano de Rico y Lupiañez (2008), PISA (2003, 2004), (Mora y Rosich, 2011) y Solar (2009) de la siguiente manera:

Reproducción

Las competencias de este grupo se manifiestan en reproducir un determinado procedimiento rutinario sin relacionar ningún tipo de datos; requiere el conocimiento de hechos, representación de problemas comunes, reconocimiento de propiedades y objetos matemáticos familiares, aplicación de algoritmos y realización de cálculos habituales. Este nivel mínimo se relaciona con el tipo de respuesta.

Conexión

Este nivel se relaciona con el tipo de solución que el estudiante da a la tarea. Se apoya sobre las capacidades requeridas en el nivel de reproducción. Si el estudiante interpreta la información, identifica los elementos y conceptos matemáticos que se requieren para resolver el problema, propone más de una solución, articula procesos que orientan hacia la respuesta, utiliza más de una representación semiótica del objeto matemático y hace conexión de procesos cada vez menos rutinarios, sin dejar de ser familiares, su nivel de desempeño se ubica en el grupo de conexión.

Reflexión
Este nivel se relaciona con el tipo de estrategias de solución que el estudiante utiliza, los procesos que emplea para resolver el problema. El estudiante propone nuevas estrategias de solución y las aplica en escenarios más complejos y nuevos, explora nuevas vías de trabajo, emplea la heurística, y comunica en forma verbal y escrita sus argumentos matemáticos. Este nivel implica producción y utilización del pensamiento creativo para resolver el problema (Goñí, 2008, p. 133).

METODOLOGÍA

Esta investigación será de carácter descriptivo-argumentativo en todos los aspectos del problema de investigación. Es aplicada porque sus resultados deben ser susceptibles de aplicación en el aula de clase como una forma de contribuir a resolver el problema de investigación. Una de las características del problema de investigación es que requiere una validación de su propuesta de solución que genere repercusión directa en la práctica educativa, específicamente en el proceso de formación y desarrollo de competencias matemáticas a partir de su enseñanza y aprendizaje institucionalizados; por ello se reitera su carácter de investigación aplicada.

Este proyecto se ejecutará en la Institución Educativa La Arcadia del municipio de Algeciras, Huila; se enmarca en un contexto sociocultural rural y se apoya en el postulado de la complementariedad metodológica que nos permite la posibilidad de utilizar en forma combinada las metodologías cuantitativas y cualitativas, aunque en su uso se deben respetar los cánones metodológicos de cada enfoque. Mediante la complementariedad metodológica se utilizaron métodos y técnicas de las metodologías cualitativa y cuantitativa en su conjunto, para la obtención de una mayor cantidad de elementos fiables en la caracterización del modelo de la competencia matemática Pensar y Razonar, aplicado a los estudiantes. Esta investigación se enmarca en una corriente interpretativa orientada a describir, interpretar y comprender las relaciones y el significado de los fenómenos sociales, intentando darles sentido desde el significado que las propias personas les atribuyen a dichos fenómenos (Merriam, 1998 citado por Solar 2009).

En cuanto a la técnica de investigación se utilizaron los grupos focales con once estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa La Arcadia, encaminados a indagar e interpretar procesos de algunos fenómenos ocultos que ocurren cuando los estudiantes se enfrentan a situaciones problemáticas en la interacción social docente-estudiante, estudiante-estudiante. Es una técnica cualitativa de recolección de información basada en actividades estructuradas realizadas a grupos homogéneos en su edad, es decir, entre los 13 y 14 años. Para el desarrollo de esta técnica se ejecutan tareas previamente diseñadas por el docente de matemáticas utilizadas para contribuir al desarrollo de procesos matemáticos que serán valorados con descriptores de la competencia matemática Pensar y Razonar. Este proceso es la matriz del trabajo de aula que, mediante la interacción profesor-estudiante y estudiante-estudiante permitirá la caracterización de la competencia matemática pensar y razonar de los estudiantes.

CONCLUSIONES

Uno de los propósitos de la primera fase de la investigación fue caracterizar el nivel de competencia matemática Pensar y Razonar de los estudiantes, es decir, contribuir a establecer sus niveles de desempeño en actividades matemáticas resolviendo problemas y tareas matemáticas contextualizadas en torno al cultivo del café, Institución Educativa La Arcadia Municipio de Algeciras Huila. Una primera aproximación de esta caracterización es:

Los estudiantes se ubican en el nivel de reproducción de la competencia matemática Pensar y Razonar cuando realizan cálculos rutinarios y se relacionan con el tipo de respuestas propuestas en la actividad así: Calcula el valor de la media aritmética de los datos de área de cultivo: ¿Cuál es el valor promedio de las áreas cultivadas de café en el municipio de Algeciras? ¿Cuántos datos atípicos se presentan en la población de datos?

Los estudiantes se ubican en un nivel de conexión de la competencia Pensar y Razonar cuando razonan las respuestas del nivel de reproducción así: ¿Los datos suministrados son confiables? ¿Cómo utiliza usted el cálculo de la media aritmética? ¿Cómo obtener un dato representativo de áreas mínimas de producción? ¿Cómo halló el promedio del área cultivada de café en su vereda?

Para el nivel de reflexión de la competencia matemática Pensar y Razonar los estudiantes producen razonamientos avanzados, argumentan, abstraen, generalizan y construyen modelos aplicados a contextos nuevos así: ¿Si se varía la media aritmética, qué efectos positivos o negativos enfrentaría la producción cafetera? ¿El aumento del promedio de áreas cultivadas genera impactos ambientales? ¿Los datos atípicos son en realidad áreas vedadas por grupos al margen de la Ley? ¿Los promedios altos o bajos indican desarrollo económico para su vereda?

Los aspectos metacognitivos, volitivos y de uso social de la competencia matemática Pensar y Razonar son valorados con un instrumento desde una perspectiva socioformativa planteada por Tobón, Pimienta y García (2010).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bishop, A. (2005). *Aproximación sociocultural a la educación matemática*. Universidad del Valle.

Goñi, J. M. (2009). *El desarrollo de la competencia matemática*. Barcelona: Editorial Grao.

Mora, L., Rosich, N. (2011). *Las actividades matemáticas y su valor competencial. Un instrumento para su detección*. En Revista Números, Vol. 76. Barcelona.

OCDE. (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas*. Paris: OCDE.

OCDE. (2005). *La definición y selección de competencias clave*. Resumen Ejecutivo. OCDE. Descargado el 25 de Junio de 2008 desde www.deseco.admin.ch. Barcelona.

Rico, L. & *Lupiañez, J. L. (2008).* Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular. Madrid: Alianza Editorial.

Solar, H. (2009). *Competencias de modelización y argumentación en interpretación de gráficas funcionales: propuesta de un modelo de competencia aplicado a un estudio de cas*o. (Tesis doctoral inédita).

Tobón, S., Pimienta, J. & García, J. A. (2010). *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias*. México: Pearson Educación.

Enseñanza de la noción de límite a través de fractales

Diana Marcela Camargo Amaya[*]
Jenny Katherine Vásquez De Alba[**]

RESUMEN

Diversas investigaciones han mostrado la dificultad que existe en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto de límite; más aún cuando este presenta diversos obstáculos (geométrico, horror al infinito, relativo a funciones y ligado al símbolo) que deben ser superados en su totalidad para aprender dicho concepto. De esta manera, el presente trabajo pretende mostrar cómo desde un contexto geométrico se hace uso de los fractales, específicamente del fractal "árbol pitagórico", el cual se propone durante tres sesiones de clase en estudiantes de grado undécimo para ir construyendo la noción de límite. En este sentido, se busca promover un aprendizaje más dinámico y autónomo, donde el estudiante tenga un contacto directo con la construcción de dicho concepto.

Palabras clave: fractales, concepto de límite, contexto geométrico.

[*] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: diacamargo@hotmail.com.

[**] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: jeka_vd@hotmail.com.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Los estándares curriculares establecen lo mínimo que deben conocer los estudiantes respecto a un tema; son tenidos en cuenta para la elaboración de las pruebas de Estado (Saber 11), pruebas que indagan por situaciones que requieren: nociones intuitivas de aproximación al concepto de límite en una función, sus propiedades, algoritmos de cálculo de límites, entre otras (MEN, 1998). Es allí donde se resalta la importancia y la problemática que hay en torno a este concepto, pues los bajos resultados en las pruebas de Estado son un indicador de que algo ocurre con los procesos de aprendizaje de esta noción en el aula.

De acuerdo con García (2008):

> En la enseñanza de las matemáticas y particularmente en el análisis matemático, se ha encontrado que los resultados de las evaluaciones realizadas por estudiantes de bachillerato, no son las mejores para el nivel en el que se encuentran; es decir, tienden a adquirir un aprendizaje no significativo, llevándolos posiblemente a un fracaso en sus estudios superiores (p. 25).

En este sentido, la comprensión del concepto de límite es primordial en la Educación Media; sin embargo, la enseñanza tradicional de este conduce a sus aprendices a procesos netamente algorítmicos.

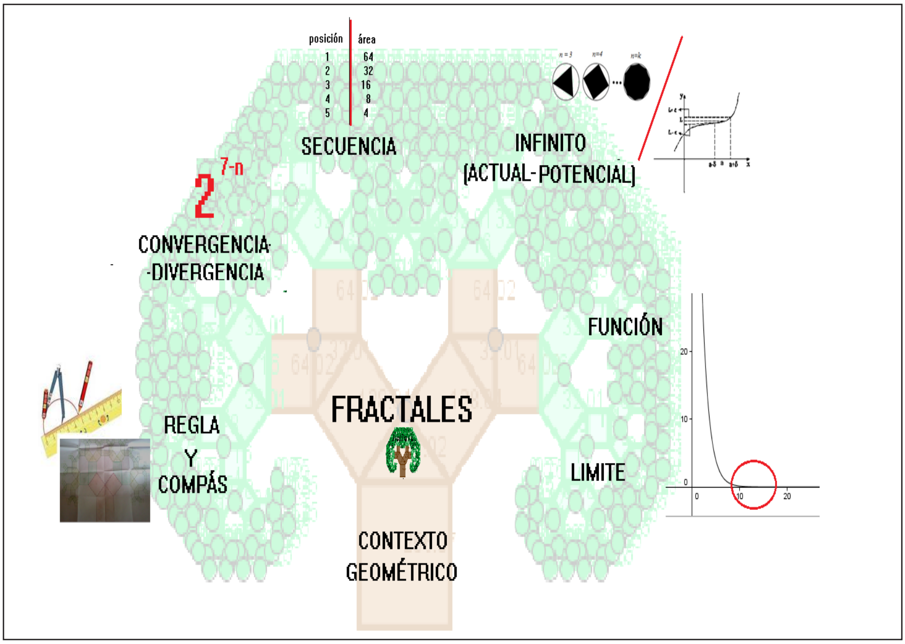
De esta manera este tópico es, sin duda, uno de los conceptos más difíciles de aprender y de enseñar, más aún cuando se le da un tratamiento estático, algorítmico y poco atractivo. En este orden de ideas, el cambio de contexto en el que se ha desenvuelto el concepto de límite en los últimos tiempos aportaría de cierta manera al proceso de enseñanza aprendizaje del mismo.

En relación con lo anterior, el contexto que aquí se propone es el geométrico dado que el concepto de límite se origina en dicho contexto al que apunta la investigación: "Una experiencia de trabajo colaborativo en sesiones virtuales y presenciales con estudiantes de grado undécimo para el tratamiento de obstáculos geométricos ligados al concepto de límite de una función". Las autoras encontraron que el empleo de fractales posibilita el tratamiento de varios obstáculos relacionados con el concepto de límite.

Autores como Cornu (1983, citado en Contreras et al. 2001) relacionan la concepción geométrica con situaciones que requieren de un contexto geométrico. Un claro ejemplo es la aproximación de las áreas de polígonos inscritos en un círculo al aumentar el número de lados, y los fractales se encuentran dentro de este contexto, ya que surgen de la repetición de un proceso geométrico elemental infinito.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

El concepto de límite no necesariamente hace parte del pensamiento matemático avanzado; pues bien, todo depende del trabajo que se realice. En este orden de ideas y tomando algunos rasgos del concepto de límite, como su abstracción y complejidad, se puede ubicar este dentro del pensamiento matemático avanzado; sin embargo, cuando se aborda el concepto de manera algorítmica, este se puede ubicar dentro del pensamiento matemático elemental.



Ahora bien, en esta investigación no se realizan demostraciones formales ni cálculos de límites, ni tampoco se hace un uso de la definición formal de dicho concepto; pues bien, lo que se busca es un acercamiento intuitivo de la noción de límite desde el tratamiento del obstáculo geométrico y, por lo tanto, la investigación se ubica dentro de un pensamiento elemental. Para conocer más sobre este concepto, es necesario estudiar la evolución de la noción de límite, dado que es en la historia donde se desarrolla el obstáculo geométrico y, por ende, se considera que para su posible tratamiento, las actividades que se diseñan deben tener una conexión histórica.

De esta manera, tales actividades tienen en cuenta dos aspectos para su planeación y revisión: un primer aspecto de carácter matemático que recoge aspectos del pensamiento matemático avanzado del concepto de límite, su evolución histórica, entre otros, y un segundo aspecto de carácter didáctico, donde se retoman teorías tanto para la enseñanza como para el aprendizaje de dicho concepto. En cada uno de estos aspectos se retoman autores como Sierpinska (1990), Blázquez y Ortega (2000), Gatica (2006), entre otros, que fueron de gran aporte en dicha investigación

METODOLOGÍA

Las actividades fueron aplicadas en un curso de undécimo grado (36 estudiantes) con tres sesiones de clase. Las actividades que se diseñaron están apoyadas en la historia, dentro de un contexto geométrico. Como situación se propone la construcción del fractal "árbol pitagórico" y el estudio de este.

Actividad	Objetivo general	Conexión histórica
N° 1: "La discusión, pensando y hablando matemáticamente"	Cuestionar las ideas sobre infinito que tienen los estudiantes de undécimo grado, a través de un ambiente colaborativo y participativo por medio de la construcción con regla y compas del fractal árbol pitagórico.	Eudoxo de Cnido.
N° 2: "Inicios de aritmetización"	Posibilitar la interacción y las estrategias grupales, para que los estudiantes encuentren el área de una o varias iteraciones utilizando un esquema o tabla donde se evidencie la relación entre ellas.	Arquímedes y Cavalieri.
N° 3: "De lo geométrico a lo numérico"	Realizar aproximaciones numéricas partiendo de la relación obtenida en las iteraciones, permitiendo que se llegue a la noción de límite a través del tratamiento geométrico que se ha dado en los grupos.	Wallis.

ANÁLISIS DE DATOS

A partir de la información obtenida por los instrumentos de recolección: escritos de los estudiantes (cuaderno de apuntes), foros de discusión (espacios de debate virtual), intercambios sincrónicos en línea (chat), grabaciones audiovisuales y hoja de registro (observadora no participante) se realiza el análisis desde las siguientes categorías:

Categorías conceptuales y procedimentales

Indicador Conceptual			
Identificación de nociones como continuidad, infinito y tendencia.	Síntesis en el uso de gráficas para ilustrar el límite, vinculadas a tablas de valores a partir del énfasis que se hace en contenidos de aproximación.	Síntesis de las ideas de aproximación gráfica y aproximación numérica.	Identificación del valor al que se aproxima una sucesión mediante la observación de los términos.
Indicador Procedimental			
Realiza deducciones intuitivas de relaciones entre magnitudes geométricas.	Realiza aproximaciones de áreas, a partir de construcciones geométricas (con regla y compás) basadas en iteraciones.	Acude a la intuición geométrica y realiza extensos cálculos numéricos para hallar resultados cuantitativos.	Abandona el marco geométrico después de asociar los valores numéricos a los infinitos indivisibles de las figuras.

Posteriormente, se compara la información recolectada donde se verifica el cumplimiento de los objetivos de esta investigación a partir de lo evidenciado en los tres instrumentos de información (vídeo, hoja del observador no participante y escritos de los estudiantes); de esta manera, se proponen posibles caminos, reflexiones y conclusiones que podrían llegar a ser ejes de una próxima investigación y, por qué no, de una nueva teoría sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de límite.

CONCLUSIONES

El uso de fractales en las matemáticas es una herramienta que posibilita a los estudiantes un mayor acercamiento a conceptos como límite, infinito, secuencia, función y convergencia; además, intervienen en aspectos como el lenguaje, la transposición de representaciones, entre otras. Por otra parte, el uso de fractales en el aula de matemáticas posibilita el tratamiento y superación de obstáculos ligados al concepto del límite como obstáculo geométrico, "horror" al infinito, relativo a funciones y transferencia de lo finito a lo infinito; todo depende de la forma en que se presente la situación y la forma como se trabaje.

En cuanto a esta investigación, los estudiantes logran intuir un proceso geométrico infinito en cada una de las sesiones que se proponen, intuición que evoluciona en el contraste entre lo geométrico y lo aritmético.

Finalmente, el desarrollo de la actividad depende, en parte, de la manera en que es presentada la situación; es por ello que la supervisión del profesor durante las sesiones de clase junto con la manera en que este interactúa con los estudiantes da lugar para que aumenten y se den de una mejor manera las interacciones personales entre los integrantes, factor que interviene en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bustos, L., Camargo, D., y Vásquez, K. (2011).*Una experiencia de trabajo colaborativo en sesiones virtuales y presenciales con estudiantes de grado undécimo para el tratamiento de obstáculos geométricos ligados al concepto de límite de una función.* Memorias de XXIV Congreso Nacional de la Enseñanza de las Matemáticas, Colima, México.

Contreras, L. (2009). El papel de la resolución de problemas en el aula. Seminario dictado en el Primer Congreso Internacional de Educación en Ciencia y Tecnología. *Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencias y Tecnología, 1* (1), 37-98.

García, A. M. (2008): Significados institucionales y personales en la enseñanza del límite de una función en el proceso de instrucción de una clase de bachillerato. Tesis de grado dirigida por: Sánchez C. Universidad de Jaén. España.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1998): Matemáticas lineamientos curriculares. Serie lineamientos curriculares. Republica de Colombia.

Análisis de los elementos constitutivos como configuradores de la guía del profesor dispuestos en algunas unidades didácticas: el caso de la práctica III en la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Julio César Cárdenas[*]
Julián Humberto Santos[**]

RESUMEN

La Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, concibe la práctica docente como el espacio de formación en el que los estudiantes para profesores de matemáticas participan en interacciones que permitan reflexionar y abordar situaciones propias de su futura labor profesional, la cual implica la construcción de su conocimiento profesional explicitando sus concepciones, expectativas, negociando nuevos significados y la posibilidad de ir integrando paulatinamente herramientas conceptuales que les permitan una observación del medio sobre el cual gira la enseñanza de las matemáticas escolares. El trabajo desarrollado está basado en la caracterización de sus acciones plasmadas en los diseños de las guías del profesor, consignadas en las unidades didácticas de la práctica intermedia III.

Palabras - Clave: Conocimiento didáctico de contenido, práctica docente, guías del profesor, gestión en el aula.

[*] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: cesarcardenas203@hotmail.com

[**] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: guly16@hotmail.com

MARCO DE REFERENCIA TEÓRICO

La estructura curricular de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM) concibe la práctica docente como el espacio de formación en el que los Estudiantes para Profesor de Matemáticas (EPM), desde su formación inicial, participen en espacios de interacción que permitan reflexionar y abordar situaciones propias de su desempeño profesional. En este sentido la práctica se entiende como un ambiente de aprendizaje desde el cual el profesor en formación pueda: generar la necesidad de reformar los planteamientos bajo los cuales ha sido educado, adoptar nuevas disposiciones que le permitan mejorar el aprendizaje de sus estudiantes, promover su interés por la construcción matemática y contribuir a la formación y crecimiento de ciudadanos, entre otros desarrollos.

De esta manera se cuestiona sobre la formación profesional recibida, sobre el significado y sentido de la práctica docente, poniendo énfasis en los distintos momentos y situaciones con el fin de decidir qué enseñar y cómo enseñar; de allí deriva la importancia de la planeación de actividades, y cómo ésta determina su rol y gestión como profesor no solo dentro del aula, sino también en su desarrollo profesional y personal, y el de sus estudiantes.

De esta manera se vuelve casi una necesidad para la reformación y verificación del accionar de cada EPM perteneciente al proyecto curricular, un trabajo de sistematización que permita caracterizar cada uno de los aspectos puestos en juego en las unidades didácticas, más precisamente en las guías del profesor.

Las concepciones en cuanto al proceso de formación se basan en considerar que para enseñar basta con saber aquello que se pretende enseñar. Los procesos de enseñanza y aprendizaje están fuertemente relacionados y condicionados por las prácticas docentes. Las investigaciones sobre los procesos de aprender a enseñar como lo menciona Llinares (1996) están mediadas a disposición de sus conocimientos, creencias y aptitudes en relación con los estudiantes para profesores en cuanto a su futura labor profesional, determinando de esta manera en gran medida el desempeño de actividades a realizar en este rol profesional.

Autores como Shulman (1986), Llinares (1991) y Blanco (1999), entre otros, refieren a lo que se denomina el Conocimiento Didáctico de Contenido para aludir al conocimiento práctico del profesor, y exponen que existen diversos tipos de conocimiento involucrados en la acción didáctica del profesor (conocimientos estratégicos de casos de toma de decisiones) dispuestos en dimensiones o componentes. Para Blanco (1999), por ejemplo, existe una componente estática (organizada por conocimientos teóricos sobre matemáticas, el proceso instructivo, psicopedagogía, etc.) y una componente dinámica (organizada por conocimientos sobre casos de aula, situaciones, experiencias, protocolos de clase, diarios, etc.) que generan formas de razonamiento pedagógico en el profesor sobre el proceso de construcción de significado de los conceptos matemáticos.

Por lo tanto, los EPM del proyecto curricular de la LEBEM que llegan a la Práctica Intermedia III tienen la posibilidad dentro del eje de práctica, y en los demás que fundamentan la carrera, de construir su conocimiento práctico a partir de su conocimiento propio (valorado en los protocolos de clase de las unidades didácticas), y de acuerdo con la experiencia en las prácticas I y II, se involucra el conocimiento del contexto, del contenido, y del currículo. Los EPM de la Práctica Intermedia III deben haber generado en su proceso algunas transformaciones heurísticas de los conocimientos teóricos, que se irán integrando entre sí. Lo que quiere decir que la caracterización del conocimiento profesional del profesor es un proceso de construcción personal, que se concibe en el momento de gestionar situaciones concretas de enseñanza (guías de profesor) y de su selección posterior (protocolos). Así, el conocimiento profesional del EPM no está solo en lo que conoce, sino en el uso de su conocimiento y su actividad en el aula.

METODOLOGÍA

La metodología considerada es de corte cualitativo desde una perspectiva descriptivo-interpretativa, dado que interesa mostrar características relevantes de las guías del profesor consignadas en la unidades didácticas diseñas por los estudiantes en la práctica intermedia III, la cual se enmarca dentro de los procesos de sistematización de dichas experiencias, empleando la técnica de análisis de contenido a partir del diseño y adaptaciones de rejillas desde las propuestas de Barrantes, (2002) y Millan, (2010). Es decir, que se combinan en el proceso el análisis de resultados, análisis cuantitativos y cualitativos.

En lo que respecta al análisis de los aspectos particulares de las guías de profesor, se tienen en cuenta los elementos constitutivos de estas (objetivos, justificación, descripción de la actividad, roles de profesor y estudiante, organización del aula, metodología, intencionalidad, indicadores de logro, variables didácticas, consignas, hipótesis de aprendizaje y referentes teóricos, elementos propuestos por el grupo de práctica docente del proyecto curricular LEBEM), lo que influye en la descripción e interpretación de las formas de conocer que tienen los EPM sobre el objeto de estudio aplicado en la UD, como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje.

La sistematización tiene como propósito descubrir características de la práctica de los estudiantes para profesores de matemáticas haciendo explícitas sus concepciones y expectativas sobre la enseñanza de las matemáticas escolares.

Dentro de la sistematización, se tiene análisis de los casos como la indagación de un objeto especifico que son las unidades didácticas y específicamente las guías del profesor y sus elementos constitutivos. Se plantean dos niveles de sistematización: primero, se realizó una indagación acerca de las características de las unidades didácticas; luego, se hizo un análisis de los casos o unidades de análisis seleccionadas que nos permitiese hacer un balance de las singularidades y diferencias encontradas en el análisis particular de cada uno de ellos.

ANÁLISIS

Para realizar el análisis de la información dispuesta en guías de profesor en las unidades didácticas (UD), surgió la necesidad de consolidar un eje orientador que nos permitiera establecer una serie de categorías de observación que tuviesen en cuenta cada uno de los aspectos relacionados con la formación de los estudiantes para profesores de matemáticas (EPM).

De acuerdo con Millan (2010), para realizar el análisis de la información dispuesta en las guías de profesor en las UD seleccionadas, surge la necesidad de identificar aspectos acerca de lo que se quiere observar específicamente en dichas unidades de análisis; por ello se apeló a los aspectos relacionados con la formación de los EPM hasta que llegan al espacio de formación Práctica Intermedia III.

Para la construcción de las categorías se parte de la revisión teórica y la consideración de los trabajos propuestos por Millan (2010) y Barrantes (2002). Estas categorías no son aisladas o independientes, dado que la información que se obtiene en alguna de ellas se complementa con la obtenida en otras. Por ejemplo, cuando se trabaja guía del profesor se hace referencia a los objetivos, los cuales no son solo un parámetro que sirve de referencia para identificar hasta dónde se quiere llegar con determinado objeto, sino que también en él abordarán aspectos tanto metodológicos, como evaluativos, es decir, cómo se utiliza y en qué momentos concretos. Cada categoría da lugar a la obtención de una información particular de cada guía del profesor, y en general sobre las concepciones relativas a los contenidos de dicha categoría.

CONCLUSIONES

- EPM en la práctica intermedia III tienden a declarar y actuar considerando que su rol es encontrar las concepciones o ideas erróneas de los alumnos, pero esto no significa que deban trabajar con ellas (Lemberger, Hewson y Park, 1999). Pese a la diversidad de posturas al respecto y según nuestros resultados, consideramos que para los EPM las ideas previas de los alumnos son importantes, pero desde perspectivas más simples; de ahí es que tengan poco valor didáctico o cognitivo para la enseñanza de las matemáticas y tengan más valor afectivo.

- Dentro de las guías del profesor sistematizadas de la práctica intermedia III se evidencia que los EPM poseen un sinnúmero de competencias profesionales propias de la labor docente entre las que se desatancan:

  - La promoción de actitudes de compromiso y solidaridad entre los estudiantes,

  - El establecer un clima de relaciones interpersonales respetuosas y empáticas con sus alumnos,

  - La transmisión de una motivación positiva por el aprendizaje, la indagación y la búsqueda de soluciones a situaciones planteadas.

  - Se destaca el factor humano como esencial durante el proceso de enseñanza aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Batanero, C. Font, V, y Godino, J (2003). Currículo matemático para la educación primario. En C. Batanero; V. Font y J, Godino (Eds.). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestro* (pp. 85-115).Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación.

Barrantes, M. (2002). *Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para profesor sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje*. Tesis doctoral para aspirar al grado de doctor. Dirigida por Lorenzo Jesús Blanco Nieto. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Extremadura, Bajadoz. España.

Gómez, M. (1999). Análisis de contenido cualitativo y cuantitativo: Definición, Clasificación y Metodología- *Ciencias Humanas.* 20(1)- . Recuperado de: http://www.utp.edu.co/~chumanas/revistas/revistas/rev20/gomez.htm

Guerrero, F., Lurduy, O, y Sánchez, N. (2005). La práctica docente a partir de los modelos DECA y teoría de situaciones didácticas. En *Memorias VII Congreso Internacional en Investigación en Didáctica de las Ciencias*. Julio de 2005.

Guerrero, F., Lurduy, O, y Sánchez, N. (2011*). La práctica docente en el proyecto curricular de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas: una innovación educativa*. Ponencia presentada en XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011 Documento recuperado de internet el 11 de noviembre del 2011.

Grupo DECA. (1992). Orientaciones para el diseño y elaboración de actividades de aprendizaje y evaluación. Publicado en la *Revista Aula*, N.º 6, pp. 33-39.

Llinares, S, y Sánchez, V., (1990). El conocimiento profesional del profesor de matemáticas. En Llinares, S. y Sánchez, V., (Eds.) *Teoría y práctica en educación matemática*. Sevilla. España.

Millan, A. (2010). *Sistematización y análisis de la información dispuesta en la guía del profesor en algunas unidades didácticas de la práctica intermedia IV en el periodo comprendido entre 2005-2 y 2008-1*. Tesis de pregrado, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá. Colombia.

Panizza, M. (2006). *Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas*. Universidad Nacional de Córdoba, Argentina.

Dificultades que presentan los estudiantes para profesor de matemáticas en la comprensión del lenguaje matemático utilizado en las demostraciones geométricas euclidianas

Paola Alejandra Córdoba Villamil[*]
Yadid Katherine Quintana Castro[**]

RESUMEN

El lenguaje que es usado en las demostraciones geométricas presentadas por Euclides en su texto *Los elementos;* particularmente las traducciones entre códigos en dicho lenguaje, serán la base de este artículo. Se expone un análisis referente a las dificultades que presentan los estudiantes para profesor de matemáticas en la comprensión del lenguaje matemático utilizado en las demostraciones geométricas de Euclides. También es descrita la demostración geométrica y una clasificación establecida por Harley & Sowder (citado por Molfino, 2006), para profundizar brevemente acerca de la demostración y la relación con la traducción de lenguaje matemático, permitiendo inferir que los estudiantes no usan una secuencia lógica interconectada que genere una interpretación de la proposición (1, 5) de los elementos de Euclides.

Palabras clave: argumentación, lenguaje matemático, lenguaje cotidiano, demostraciones euclidianas, geometría euclidiana.

[*] Universidad Distrital. Dirección electrónica: pao_acv@hotmail.com
[**] Universidad Distrital. Dirección electrónica: yadiquincas29@hotmail.com

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Un aspecto de vital importancia en la formación académica de los estudiantes para profesor de matemáticas es la comprensión de las demostraciones euclidianas, además del uso de las mismas en distintas situaciones problémicas. Es así que a la luz de los autores que serán mencionados en el marco teórico, se ha planteado como pregunta orientadora: ¿Qué dificultades presentan los estudiantes para profesor de matemáticas en la comprensión del lenguaje matemático utilizado en las demostraciones geométricas euclidianas?

Para hacer un abordaje al anterior cuestionamiento, se realizará, en primer lugar, una descripción referente al lenguaje matemático y su relación con el lenguaje cotidiano, siendo fundamental tratar la traducción en el lenguaje matemático, que permite llevar a cabo la comprensión del lenguaje matemático usado por Euclides en sus demostraciones geométricas. De esta forma, se proseguirá con la delimitación de la población, análisis de los resultados obtenidos por una entrevista y una prueba, terminando con las conclusiones generadas por este trabajo investigativo.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Al hacer uso del término lenguaje cotidiano, se tomará la definición propuesta por Huerta & Radillo (s. f.): "es aquel utilizado en la vida diaria del individuo", siendo este el lenguaje natural que se usa a diario sin tecnicismos.

En el estudio de las matemáticas, se ha desarrollado un lenguaje particular, distinto al cotidiano, para transmitir el pensamiento del conocimiento y el pensamiento matemático, libre de cualquier influencia, y está excesivamente formalizado (Huerta & Radillo, s. f.).

En cuanto a las demostraciones geométricas de Euclides, se presentan, de acuerdo con Huerta & Radillo (s. f.), las siguientes dificultades:

1. Dificultades en cuanto a términos del español especializado con condiciones que deberían representarse con más de dos expresiones simbólicas.
2. Dificultades en cuanto a términos del español especializado, que son diferentes en el lenguaje cotidiano.
3. Dificultades en los sintagmas del español especializado que tienen significados muy precisos, con mayor exigencia de exactitud que en el lenguaje cotidiano.
4. Dificultades de sintaxis en la notación simbólica y/o representación gráfica.
5. Dificultades en la traducción entre códigos.

El razonamiento es entendido como una construcción de hipótesis a partir de ideas ya fundamentadas y en ocasiones no axiomáticamente demostradas. Rusell (1999) lo define como aquello que: "*(…) utilizamos para pensar acerca de las propiedades de estos objetos matemáticos y para desarrollar generalizaciones que se puedan aplicar a clases completas de objetos-números, operaciones, objetos geométricos o conjuntos de datos*". Harley & Sowder (citado por Molfino, 2006) identifican dos tipos de razonamiento de acuerdo con la veracidad de las ideas planteadas que describiremos a continuación:

1. Argumentación
2. Demostraciones
   2.1 Externas: puede ser autoritaria, rituales, simbólicas.
   2.2 Empíricas: puede ser perceptiva e inductiva
   2.3 Demostración analítica: Puede ser a partir de transformaciones y axiomas.

METODOLOGÍA

En este caso la manera de aproximarse al problema de investigación planteado fue emplear técnicas de tipo cualitativo (Martínez, 2006). Entre las herramientas que hacen parte de este tipo de investigación se hizo uso principalmente de instrumento de recolección de datos, una prueba en la que se presentará la proposición (1, 5) de los Elementos de Euclides: "En triángulos isósceles los ángulos en la base son iguales, y si los lados iguales se alargan, los ángulos situados bajo la base serán iguales entre sí".

Será aplicada a dos estudiantes para profesor de matemáticas de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM) de la Universidad Distrital que se encuentren en el curso Problemas Aritméticos II en el periodo 2012-1.

Otro instrumento de recolección de datos que se va a usar será la observación directa.

ANÁLISIS DE DATOS

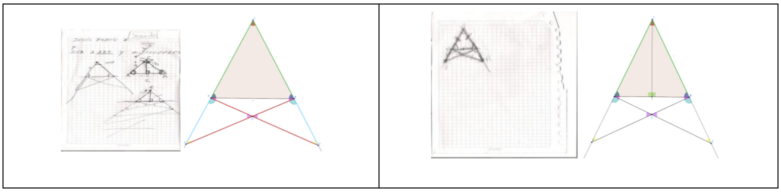


Figura 1.1 Solución dada de izquierda a derecha, por el estudiante 1 y 2.

El *estudiante número 1* presenta las siguientes dificultades al momento de resolver la prueba:

C4. Dificultades de sintaxis en la notación simbólica y/o representación gráfica.

En relación la descripción dada para el triángulo isósceles se observa que existe confusión respecto a los ángulos del triángulo, pues establece como requisito que uno de ellos debe medir 90 grados. En esta parte se observan Después por sugerencia de otro estudiante agregó otra condición, que dos de los lados del triángulo deben ser iguales. Esto muestra una demostración de tipo externo.

C2. Dificultades en cuanto a términos del español especializado, que son diferentes en el lenguaje cotidiano.

Una dificultad constante radicó en hacer mal uso del lenguaje matemático, usando términos como “alargamiento” para hablar de prolongar rectas y “paralelas” sin demostrar o tan siquiera observar las rectas que cumplían tal característica; en principio se observó que el estudiante no pensaba en la finalidad de la proposición, aislando las demostraciones sin realizar una axiomática. En particular, el estudiante tomó como sinónimos palabras del lenguaje cotidiano con respecto al lenguaje matemático, lo que puede generar confusiones.

C1. Dificultades en cuanto a términos del español especializado con condiciones que deberían representarse con más de dos expresiones simbólicas.

d) No utilizar de manera escrita el lenguaje matemático al igual que no interconectar de manera axiomática las ideas para demostrar la veracidad de las afirmaciones. Esto expresa que los estudiantes no creen necesario demostrar ciertas propiedades, porque al parecer “ya están dadas” y por ello no es necesario plantearlas; esta es una dificultad que puede ser evitada por el uso adecuado de la demostración en la enseñanza.

En cuanto al *estudiante número 2* presenta las siguientes dificultades al momento de resolver la prueba:

C3. Dificultades en los sintagmas del español especializado que tienen significados muy precisos, con mayor exigencia de exactitud que en el lenguaje cotidiano.

Dentro del proceso de comprensión de la demostración geométrica, el estudiante hizo en repetidas ocasiones del término “Iguales”, tomándolo como un término del lenguaje cotidiano, ya que en la geometría este sintagma tiene como significado congruencia, términos que jamás dio a conocer para hallar de la relación de igualdad geométrica. Al momento de demostrar, el estudiante llevaba a cabo demostración empírica, inductiva.

C4. Dificultades de sintaxis en la notación simbólica y/o representación gráfica.

En esta categoría, el estudiante no hace uso de la notación simbólica, ya que durante el proceso que desarrolla en la comprensión de la proposición presentada, hace uso de demostraciones externas dentro de las catalogadas como rituales, ya que hacía uso de la construcción como principal medio de representación, pero en sus demostraciones a partir de las mismas no había rigor. La demostración del estudiante puede estar dada a partir de demostraciones externas, ya que asume que lo presentado en la representación gráfica es verídico.

CONCLUSIONES

- Los estudiantes no usan una secuencia lógica interconectada que permita dar una interpretación cabal de la proposición 5 del libro 1, lo cual nos permite inferir que no ven la importancia de realizar una demostración específica de cada elemento que es tratado, solo observan "el razonamiento solo por la forma del mismo, sin reparar en su contenido o rigor" (Harley y Sowder; citado por Molfino, 2006) realizando una demostración externa ritual.
- La principal dificultad radicó en la forma en que se abordó la justificación de las proposiciones, ya que los estudiantes no tuvieron en cuenta elementos geométricos, porque al parecer ya estaban establecidos como válidos en la proposición, mostrando una dificultad en cuanto a términos del español especializado con condiciones que deberían representarse con más de dos expresiones simbólicas (Huerta & Radillo, s.f).
- Los estudiantes que sirvieron como objeto de estudio no están catalogados en la dificultad correspondiente a la C1, ya que en ningún momento hicieron uso de la simbología matemática; por lo tanto no usaron símbolos para cada una de las palabras que se mostraban en el desarrollo de la demostración euclidiana.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Castiblanco, A. & Armella, L. (2004) Incorporación de nuevas tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. Enlace Editores Ltda.: Bogotá.

Codina, A. & Lupiañez J. L. El razonamiento matemático: Argumentación y Demostración. Recuperado de: http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/CodinaA99-2672.PDF

Fonseca, O. (2003). Investigación cualitativa, como propuesta metodológica para el abordaje de investigaciones se terapia ocupacional en comunidad. Umbral científico: Bogotá. Recuperado de http://redalyc.uaemex.mx/pdf/304/30400207.pdf el 13 de Marzo de 2012.

Huerta, S. & Radillo, M. "… Obstáculos en el aprendizaje de la Geometría euclidiana, relacionados con la traducción entre códigos del lenguaje matemático". En R. Abrate & M. Pocholu (Ed.), Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemática. Universidad Nacional de Villa María (pp. 263-280). Recuperado de: http://unvm.galeon.com/Introduccion.pdf.

MEN (2004) Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. Ministerio de Educación Nacional: Bogotá.

Molfino, V. (2006). Lugares geométricos: ¿Cuál es su rol en la enseñanza de la geometría? México D. F. Recuperado de: http://www.fing.edu.uy/imerl/didactica_matematica/Documentos_2008/vmolfino_tesis%20may%2006.pdf

Russell, S. (1999) Razonamiento Matemático en los primeros grados. En: "Developing mathematical reasoning in Grades K-12, 1999 Yearbook" Reston, Virginia, USA. Traducción: Carlos Zuluaga. Grupo Colombia Aprendiendo.

La modelación matemática como proceso de estudio en el álgebra escolar

*Leidy Cristina Cumbal Acosta**

RESUMEN

Esta comunicación presenta algunos avances del trabajo de grado "La modelación matemática como proceso de estudio en el álgebra escolar". A través de una revisión de documentos y resultados de investigaciones en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, se pretende el diseño de una propuesta de intervención en aula que movilice procesos de modelación algebraica como una vía para generar habilidades en los estudiantes en la resolución de problemas, que permiten la reconstrucción de organizaciones matemáticas cada vez de mayor completitud; lo anterior ubica el trabajo en el campo de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y en un tema de actualidad: el desarrollo de competencias matemáticas en la escuela.

Palabras clave: modelación, competencias, tipos de problemas, algebraicos

* Universidad Santiago de Cali. Dirección electrónica: lcca17@hotmail.com

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Como producto de las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas y el progreso de esta área como disciplina científica (Gascón, 1998), hallamos propuestas que transforman lo que significa hacer matemáticas en el aula. Entre estas propuestas teóricas y prácticas encontramos diferentes enfoques, entre ellos el enfoque por competencias matemáticas.

Los enfoques tradicionales se caracterizaban por modelos de enseñanza pasiva, donde el docente era un transmisor de conocimientos y procedimientos, que asignaba tareas basadas en la repetición de técnicas o algoritmos generalmente descontextualizados. Es decir, desde este enfoque las técnicas son objetos en sí mismos de enseñanza y aprendizaje hasta llegar a su dominio. Nos enfrentamos ahora a los nuevos enfoques de la educación, diseños basados en competencias que nos dirigen hacia unas matemáticas funcionales, como potentes herramientas para resolver problemas de diversas naturalezas, incluso extra matemáticos.

Si bien es cierto que se habla de "competencias matemáticas", o de qué es ser "matemáticamente competente", de cuáles son las competencias matemáticas, sus desempeños y niveles de desarrollo, qué caracteriza cada competencia, entre otros aspectos que formalizan teóricamente este enfoque, hace falta entrelazar estos aspectos con aquellos que hagan que las prácticas escolares y sobre todo las tareas en el aula nos con lleven a que el " hacer matemáticas" sea una realidad, pero ¿cómo hacer que los estudiantes desarrollen, integren y exterioricen el conjunto de habilidades, aptitudes, actitudes, destrezas y conocimientos, para que estas aporten en la solución de situaciones problemáticas? ¿Cuáles serían los escenarios propicios y los ambientes de aprendizaje adecuados para este fin? ¿Cómo deben ser los proyectos de aula, su desarrollo y evaluación? y sobre todo primando la importancia que este trabajo sugiere ¿Qué tipo de actividad se debe desarrollar en el aula?, todo esto en vías de potenciar las competencias matemáticas, haciendo énfasis en que no solamente se trata de su cotidianidad y sus contextos, sino para la formación de ciudadanos con sentido crítico y reflexivo.

La modelación matemática forma parte de los currículos colombianos al estar presente en los Estándares Básicos de Competencias Matemática (Ministerio de Educación Nacional. Colombia, 2006) como uno de los procesos que constituyen lo que es ser "matemáticamente competente". Durante muchos años la modelación ha estado restringida en las instituciones escolares, al presentarse como una simple aplicación de un conocimiento matemático, a determinadas situaciones más o menos reales, con el fin de exponer su utilidad. Aún hoy en día, este uso perdura en los sistemas educativos, lo cual nos hace pensar que la modelación no es más que un objetivo de enseñanza y no un medio para hacer matemáticas en el aula. Se propone pues reformular lo que significa la modelación matemática en términos de procesos de reconstrucción y articulación de organizaciones matemáticas de complejidad creciente, que necesariamente deben partir de las razones de ser de aquellas organizaciones matemáticas que se desean reconstruir e integrar. Este proyecto hace énfasis en un modelo de la actividad matemática que no solamente responde a cuestionamientos de la estructura de la actividad propia en las aulas, sino a un modelo del saber matemático, desde el cual se hace un llamado a plantear situaciones que den lugar a la reconstrucción de las herramientas matemáticas. Los esquemas de modelación presentes en los diferentes contextos (MEN, 1998) (Ministerio de Educación Nacional. República de Colombia, 2006) se enfocan en procesos lineales o cíclicos (OCDE, 2006), que parten de situaciones reales a modelos reales, pasando por modelos matemáticos que resuelven la situación, para luego devolver la solución a la situación real. En este esquema de modelación, la solución a la situación es el final del proceso, donde la modelación es la aplicación de un modelo matemático requerido. Desde este punto de vista surgen preguntas que nos invitan a reflexionar acerca del proceso de modelación, ¿El esquema situación-modelo es una verdadera reconstrucción de un modelo? ¿Cómo se acredita que la situación real infiere un proceso de modelación? ¿Qué tipos de situaciones problemáticas reales desencadena un proceso de modelación? y lo que confiere en este proyecto de investigación ***¿Qué tipos de situaciones se deben llevar al aula de clase, para el desarrollo de la modelación como una competencia matemática?***

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Tradicionalmente las "matemáticas" o el "hacer matemáticas" en las instituciones se refieren a la trasmisión de conocimientos inmutables, transparentes y únicos. La teoría antropológica de lo didáctico (TAD) toma como objetos de estudio las condiciones de difusión y creación de la actividad matemática en las instituciones escolares, considera problemáticos los mismos objetos matemáticos y el paso del saber sabio al saber enseñado, teniendo en cuenta los obstáculos epistemológicos que los procesos de enseñanza y aprendizaje conllevan. Al estudiar estos aspectos que se localizan en las instituciones escolares, la TAD elabora un modelo para representar el saber matemático, su difusión, enseñanza y funcionalidad.

Uno de los principios de la TAD es que toda actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de modelación. La TAD propone un modelo de actividad matemática basado en praxeologías (praxis + logos), modela la actividad matemática productora y el saber matemático producido en praxeologías u organizaciones matemáticas, y propone las praxeologías como unidad mínima de análisis para describir la actividad matemática y la actividad didáctica. (Bosch, García, Gascón, & Ruíz, 2006).

Las praxeologías están compuestas por dos niveles: *la praxis* o práctica matemática, constituida por los tipos de tareas y las técnicas para su desarrollo, y el *logos*, las tecnologías y teorías que sustentan y justifican el uso de las técnicas. Los tipos de problema se refieren al conjunto de tareas. Las praxeologías nacen y se sostienen a través de respuestas a cuestionamientos problemáticos, que dan lugar a la reconstrucción de objetos matemáticos. Estas tareas deben presentar una técnica para ser abordadas, y en su medida las técnicas requieren una debida justificación. Este hecho hace que las tareas evolucionen. Para un tipo de tareas concretas se requiere una sistematización de su solución, a la cual llamaremos técnica. Esta técnica en muchos casos no es algorítmica, ya que la evolución de las tareas requiere una puesta en práctica indeterminada. Pero las técnicas deben encontrar un campo de justificación para su uso, pues no puede existir una práctica sin su debido razonamiento. A este discurso que justifica en primera instancia las técnicas lo llamaremos tecnología. Las tecnologías no solo permiten la reflexión sobre una técnica específica, sino que permiten el encuentro de nuevas técnicas, su validación y funcionalidad.

Desde este nuevo punto de vista las nociones de modelo y sistema se amplían para ser consideradas como praxeologías, y la actividad o proceso de modelación dejará de describirse en términos del par sistema-modelo para llevarse a un proceso de reconstrucción, el cual se caracteriza en términos de praxeologías y vínculos entre praxeologías. No tiene sentido considerar el proceso de modelación independientemente del resto de las actividades matemáticas, ni como objetos en sí mismos (para ser enseñados) ni como medios para la enseñanza y el aprendizaje de determinados conocimientos matemáticos.

METODOLOGÍA

Tomaremos como referente para el proceso de modelación matemática el esquema planteado desde la TAD, el cual consiste en pasar de un sistema no matemático a un sistema previamente matematizado, estudiando problemas que se resuelven utilizando acertadamente cierto modelo. Se pueden recalcar tres aspectos básicos en este proceso: la utilización rutinaria de modelos matemáticos ya conocidos; el aprendizaje y la enseñanza de modelos ya conocidos y la manera de utilizarlos en creación de nuevos modelos matemáticos.

En toda actividad matemática se puede reconstruir un proceso de modelación en torno a problemas de complejidad creciente, que dan lugar a modelos para dar respuesta acertada a cuestiones matemáticas.

El esquema de modelación implica dos partes: un sistema matemático o extra matemático y un modelo matemático del objeto de estudio. Este esquema se puede dividir en tres momentos: primero se define el objeto matemático que se quiere estudiar teniendo en cuenta todos los aspectos que se quieran trabajar (sistema y sus componentes). En esta etapa definimos el conjunto de situaciones iniciales delimitando el ámbito de la realidad; estas situaciones nos permiten definir variables y responder a cuestionamientos con pocas conjeturas. En la segunda etapa, empezamos a describir algunas posibles relaciones entre los componentes del sistema, la construcción del modelo y relación entre las variables. El modelo a estudiar es el conjunto de relaciones entre estas variables, lo cual nos lleva a algunas posibles relaciones de los componentes empezando a formular problemas con mayor precisión empleando la técnica. Para la tercera etapa se trabaja la técnica dentro del modelo, interpretación del trabajo y resultados. En esta última etapa se enuncian problemas nuevos que difícilmente se podrían resolver sin el modelo.

La propuesta de investigación se enfatiza en el diseño de una secuencia de tareas para intervenir en el aula, en la cual se evidencie el proceso de modelación matemática que reconstruya en su proceso de estudio una organización matemática en torno a problemas de cálculo aritmético, para pasar, a un proceso de algebrización alrededor de un objeto matemático, ecuaciones de primer orden, en el grado octavo de la Educación Básica colombiana.

En la primera etapa se abordan problemas que involucren la participación activa y motivada de los estudiantes, se responderán a cuestionamientos tales como: *Carlos piensa un número, lo multiplica por cuatro y le añade 3, el resultado de la operación fue 35.* Para responder a cuestionamientos tales como ¿Qué número pensó Carlos? ¿Qué operaciones utiliza para averiguar el número? En esta etapa se trabaja la solución de ecuaciones con el proceso de análisis-síntesis, se hace la debida rutina de la técnica, para luego dar paso a nuevos problemas tales como: *Carlos piensa un número y le añade su doble, el resultado fue 36.* ¿Qué número pensó Carlos? Con este tipo de problemas se pretende emplear el modelo de simplificación de ecuaciones y análisis-síntesis. El proceso de modelación se amplía, al responder a cuestionamiento que requieran el uso de la técnica cada vez de manera más rigurosa.

En el desarrollo de las actividades con los estudiantes se tendrán en cuenta, para la recolección de datos, instrumentos tales como la observación puntual a través de vídeos y audios de los momentos de intervención en situaciones específicas de interacción (estudiantes-estudiantes), (profesor-estudiante), además, las hojas de trabajo de los estudiantes que serán las fuentes más importantes para el análisis del proceso y resultados en el informe final.

CONCLUSIONES

La propuesta de modelación en la que se basa este trabajo está enmarcada precisamente en llevar un proceso de algebrización (Bosch & Gascon, 2010) más coherente y justificado, acorde con la propuesta de modelación de la TAD, tomando como principales actores, los tipos de tareas, su debida justificación y el proceso de modelación que estas requieren para la apropiación de conocimientos matemáticos.

Con el avance de este proyecto se puede concluir que el modelo de actividad matemática propuesto por la TAD dirige la reconstrucción de los objetos matemáticos en las instituciones escolares.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ministerio de Educación Nacional. República de Colombia. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: iun reto escolar !* Recuperado el 15 de Mayo de 2012, de Centro virtual de noticias: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Bosch, M., & Gascon, J. &. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álbebra en secundaria. *nvestigación en Educación Matemática XIV*, 545-556.

Bosch, M., García, F. J., Gascón, J., Ruíz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educacion Matemática*, 18(2), 37-74.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina cientifica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 18/1, nº 52, pp. 7-33.

MEN, (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Lineamientos curriculares en matemáticas: Cooperativa Editorial Magisterio.

OCDE. (2006). *PISA 2006 marco de la evaluación Conocimientos y habilidades.* España: Santillana Educación S.L.

El juego como estrategia didáctica para el fortalecimiento del pensamiento numérico en los esquemas aditivo y multiplicativo

Humberto Colorado Torres[*]
Diana María Gil Vásquez[**]

RESUMEN

La propuesta didáctica que se presenta busca trabajar el fortalecimiento del pensamiento numérico a partir del juego en los esquemas aditivo y multiplicativo en estudiantes de grado quinto, como base para la comprensión de otros sistemas numéricos. El enfoque desde el cual se realiza esta investigación es el experimental-exploratorio. El método utilizado para evaluar la eficacia de la propuesta es una evaluación pre y postest. La propuesta se encuentra en ejecución y los resultados han sido satisfactorios, pues los estudiantes, además de manifestar interés por las actividades propuestas, expresan la necesidad de emplear el cálculo mental a través de las diferentes operaciones necesarias para la solución del juego propuesto, contribuyendo al mejoramiento del pensamiento numérico.

[*] Docente. Universidad del Quindío, Armenia. Director del proyecto. Dirección electrónica: colorado@uniquindio.edu.co

[**] Aspirante a Maestría en Educación con énfasis en Matemáticas, Universidad del Quindío, Armenia. Dirección electrónica: dimar00@hotmail.com

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

La implementación del modelo escuela nueva en la institución Educativa San Isidro, adolece, entre otros aspectos, de actividades que permitan a los estudiantes lograr unos desempeños favorables en cuanto al desarrollo del pensamiento numérico. Las Pruebas Saber en 2009 reflejan el estado de los estudiantes en el área de matemáticas; sus resultados revelan que el 44% de los estudiantes evaluados tuvieron calificaciones insuficientes y un total de 88% presentan desempeños mínimos. (Ver gráfico N.° 1).

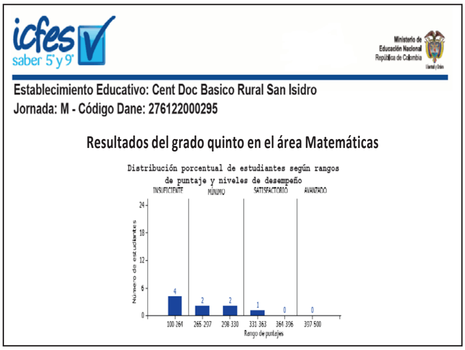


Gráfico 1

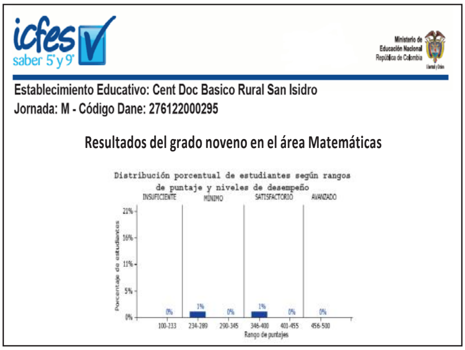


Gráfico 2

Fuente: ICFES, resultados Pruebas Saber 2009

En cuanto al grado noveno, la situación no es diferente; los estudiantes presentan en un 50% desempeños mínimos. (Ver gráfico N.° 2).

Frente a este panorama, surge entonces una pregunta: ¿Qué estrategias se pueden implementar en el grado quinto con el fin de lograr el desarrollo de un pensamiento numérico en los estudiantes, coherente con los planteamientos propuestos en los Lineamientos Curriculares, Estándares Básicos de Matemáticas, y en general, con los planteamientos actuales de la Didáctica de las matemáticas que les permita mejores desempeños en los grados superiores y, por ende, en las Pruebas Saber en el grado noveno?

Obviamente, el desarrollo del pensamiento numérico no es simple ni inmediato; es necesario considerar los aspectos neurológicos que dan el entendimiento numérico, la intervención educativa desarrollada en el modelo escuela nueva, las condiciones psicológicas de los estudiantes y el desarrollo neurolingüístico de los mismos, pero, desde el área educativa, se dará prioridad a la parte didáctica de la enseñanza.

Por lo anteriormente expuesto se vislumbra la necesidad de diseñar una propuesta para implementar estrategias de enseñanza de las matemáticas que permita a los estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa mejorar sus competencias en el pensamiento numérico y afrontar con mejores destrezas los contenidos más avanzados en los grados superiores.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Planteado en el documento Matemáticas–Lineamientos curriculares–, el currículo de matemáticas a lo largo de la Educación Básica y Media se compone de los siguientes elementos:

Pensamiento numérico y sistemas numéricos

Este componente del currículo procura que los estudiantes adquieran una comprensión sólida tanto de los números, las relaciones y operaciones que existen entre ellos, como de las diferentes maneras de representarlos.

> … el pensamiento numérico se refiere a la comprensión en general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones…(McIntosh, 1992).

En el desarrollo de este estándar se prepara a todos los estudiantes para comprender los números, las formas de representarlos, las relaciones entre ellos y los sistemas numéricos, comprender el significado de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras, y hacer cómputos de manera fluida y estimaciones razonables.

El juego como estrategia didáctica

El juego se caracteriza por ser una actividad humana lúdica, libre, reglada, limitada espacial y temporalmente, competitiva, improductiva y de resultado incierto. Entre los autores más importantes que han reseñado el juego como estrategia didáctica se encuentran:

- Lev S. Vigotsky: El juego es una actividad social, en la cual, gracias a la cooperación con otros niños, se logran adquirir papeles o roles que son complementarios al propio.
- Jean Piaget: los juegos son medios que contribuyen y enriquecen el desarrollo intelectual. Desde Claparede y Dewey, Wallon y Piaget, está bastante claro que la actividad lúdica es la cuna forzosa de las actividades intelectuales y sociales superiores, y por ello mismo, indispensable en la práctica educativa.

– María Montesori. Exalta la necesidad de los juegos para la educación de cada uno de los sentidos; al aplicar el juego, los niños observarán, manipularán y utilizarán sus sentidos para percibir y manipular el material (figuras geométricas, plano cartesiano, etc.).

Clasificación de los juegos

Para clasificar los juegos se va a considerar el trabajo de Corbalán (1994); en ese sentido, se abarcan tres grandes grupos: juegos de conocimiento, juegos de estrategia y juegos de azar, o aquellos en que intervengan dos o más de dichas características.

Por juegos de estrategia se entienden aquellos que, para conseguir su objetivo (lograr una determinada posición, dejar al contrincante sin fichas, ser el último en coger un objeto de un montón...), en cada momento el jugador debe elegir una de las diversas posibilidades existentes. El conjunto y la combinación de estas elecciones o tácticas es la estrategia que el jugador emplea para ganar o no perder. Son un buen recurso para introducir a los estudiantes en la resolución de problemas y en los hábitos típicos del pensamiento matemático (Gallagher, 1980).

Introducción de los juegos en el aula. Guías de aprendizaje

Para introducir los juegos en el aula, se tendrán en cuenta las cuatro etapas fundamentales en el acto didáctico formuladas por Fernández Bravo que son: elaboración, enunciación, concretización y transferencia o abstracción, (Fernández Bravo, 1995b). Para ello se diseñan y entregan guías con las actividades en la estructura del modelo escuela nueva, las cuales cuentan con actividades básicas: A (etapa de elaboración) en la cual se presenta una actividad introductoria al tema, de Práctica; B (etapas de enunciación y de concretización), en esta etapa se introduce el juego; los estudiantes leen la guía y hacen preguntas sobre lo que no entienden; en este momento desarrollan el juego programado para la sesión y las actividades de aplicación; C (etapa de transferencia o abstracción), en esta etapa se entregan actividades complementarias a las vistas en clase para desarrollarlas en sus casas con sus familias.

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

La investigación a desarrollar es de tipo experimental y exploratorio pues se implementará una estrategia didáctica como apoyo para el fortalecimiento del pensamiento numérico que permita superar las dificultades detectadas al abordar las operaciones básicas en los esquemas aditivos y multiplicativos en estudiantes de grado quinto, y reconocer hasta dónde la estrategia permite comprender con mayor claridad la temática tratada.

ANÁLISIS DE DATOS

Hasta el momento para el desarrollo del proyecto se han llevado a cabo las siguientes etapas:

a. Definición del grupo experimental y el grupo control.

b. Aplicación al grupo control y al grupo experimental del pre-test para conocer los conceptos previos que tienen los estudiantes acerca de las operaciones básicas. El análisis del pre-test arroja que los estudiantes tienen evidentes deficiencias en el desarrollo del pensamiento numérico para resolver situaciones aditivas y multiplicativas en ambos grupos, estableciéndose las condiciones de homogeneidad. En el gráfico del diagrama de cajas se establecen las condiciones de homogeneidad en los grupos sujetos a estudio. (Ver gráfico 3).

c. En el momento se encuentra desarrollando el tema de las operaciones básicas, siguiendo el modelo tradicional de escuela nueva con las guías de aprendizaje en el grupo control.

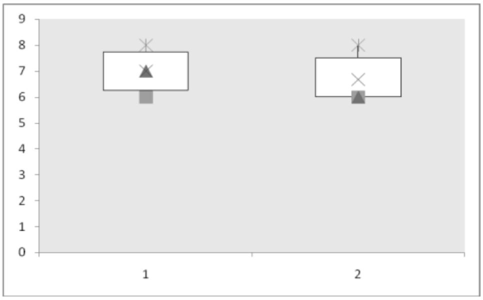


Gráfico 3. Diagrama de caja grupo 1 (San Isidro)
y grupo 2 (Camilo Restrepo López).

Fuente: elaboración propia

d. Se han trabajado 4 guías de 10 hasta la fecha en el grupo experimental, empleando el juego como una estrategia didáctica para el fortalecimiento del pensamiento numérico en los esquemas aditivo y multiplicativo. Se encuentra pendiente terminar la aplicación de 6 guías y comparar los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica y los resultados finales de la implementación, mediante un pos-test que involucre problemas de aplicación de las operaciones básicas.

e. La población objeto de estudio está definida por el grupo de quinto grado de la Institución Educativa San Isidro, Sede San Isidro, vereda Montegrande del municipio de Caicedonia.

CONCLUSIONES

a. El juego como estrategia didáctica es referenciado en las investigaciones como una herramienta que permite una mayor motivación e interés de los estudiantes en los temas matemáticos.

b. De acuerdo con los autores consultados, los juegos de estrategia son los indicados para fortalecer en los niños el pensamiento numérico en los esquemas aditivo y multiplicativo.

c. Según lo estudiado, se ha identificado que los juegos ayudan al fortalecimiento del cálculo mental, facilitando el uso de estrategias diferentes a las algorítmicas.

d. Se espera que los juegos permitan una mayor interacción del grupo en el cual se desarrolla la estrategia por medio de un trabajo cooperativo.

e. Es necesario encontrar otras alternativas a las utilizadas en el aula regular de clase, en este caso las guías de escuela nueva, para que los estudiantes fortalezcan sus destrezas matemáticas y el pensamiento numérico.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bunge, M. (1969). La investigación científica. Barcelona: Ariel.

Colorado, H. (2009) El juego como una estrategia didáctica para desarrollar el pensamiento numérico en las cuatro operaciones básicas. Documento de trabajo.

Corbalán*, F. (1994). Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato. Madrid: Síntesis.*

Chamoso, J. & *Durán*, J. (2003): "Algunos juegos para aprender Matemáticas", Actas VII Seminario Regional Castellano- Leonés de Educación Matemática. Ponferrada, 163-176.

Fernández Bravo, J. A. *(1995b): Las cuatro etapas del acto didáctico. Comunidad Educativa. ICCE, n.º 228*

Gardner, M. (1998): *"Un cuarto de siglo de matemáticas recreativas", Investigación y Ciencia, octubre, 50-57.* Alianza Editorial, Madrid.

Mcintosh, A., Reys, B., Reys, R. (1992) A proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *For the Learning Of Mathematics* 12, 3. pp. 2-44.

Nunes, Paulo (1993). Educación Lúdica: Técnicas y juegos pedagógicos. Sociedad de San Pablo. 3ra. Impresión 2002.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (2006), Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, documento No. 3, mayo de 2006, pp. 80-87.

Medida de área y el volumen en contextos auténticos: una alternativa de aprendizaje a través de la modelación matemática

*Santiago Manuel Rivera Quiroz**
*Sandra Milena Londoño Orrego***
*Carlos Mario Jaramillo López****

RESUMEN

Este proyecto de investigación se desarrolla en el contexto de las inundaciones presentadas en una Institución Educativa por causa del desbordamiento del río Cauca. Esta situación adversa funciona como una oportunidad para construir relaciones matemáticas referidas a la medida del área y el volumen mediante procesos de modelación matemática. Estos, obtenidos desde situaciones en el contexto de los estudiantes, permiten una re-significación de conceptos matemáticos. Para el desarrollo del proyecto, se tiene en cuenta el entorno cotidiano, la comunicación y las experiencias de cada individuo, aspectos propios de la investigación cualitativa; en este sentido se realiza un estudio de casos donde se pretende explorar, indagar y analizar las diversas formas como el estudiante construye y da significado a elementos matemáticos que emergen de una situación en contexto.

Palabras clave: modelación matemática, contexto auténtico, área, volumen.

* Universidad de Antioquia-I. E. Divino Niño (Caucasia-Antioquia). Dirección electrónica: santiagorq@hotmail.com.

** Universidad de Antioquia, Municipio de Medellín. Dirección electrónica: samyjdam@gmail.com.

*** Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: cama@matematicas.udea.edu.co.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Muchos ejes temáticos de la matemática se pueden desarrollar más fácilmente si se asume la conceptualización teórica y práctica de la geometría. Según Gamboa y Ballestero (2009) "La geometría ha sido considerada como uno de los pilares de formación académica y cultural del hombre, dada su aplicación en diversos contextos y su capacidad formadora del razonamiento lógico" (p. 115). Es decir, la geometría cumple un papel importante a la hora de resolver problemas de la vida diaria, propiciando en el estudiante motivación para aprenderla y usarla en diferentes contextos. Los temas de área y volumen en muchos casos son abordados de forma mecánica, se muestra la figura y se parte de la fórmula para obtener los resultados, sin que esto refleje una verdadera aplicación en el contexto escolar y una significación conceptual de las variables involucradas en estos contenidos, así varias tareas se encuentran limitadas a encontrar resultados operacionalizados, con problemas aislados y descontextualizados del entorno del estudiante. De acuerdo con Hernández (2009), se aprende Matemática para actuar con ella misma y no para recolectar definiciones, demostraciones, procedimientos específicos, luego olvidados si no se utilizan con efectividad. No significa esto que la información matemática no sea útil, por el contrario, obtiene gran valor en la medida que se necesita para resolver problemas y desarrollar situaciones relacionadas en este caso con el proceso de modelación matemática.

En la actualidad se ha venido incrementando el fenómeno de las inundaciones en el país, debido a múltiples factores biológicos y ambientales. Muchas poblaciones vienen sufriendo las consecuencias, y la escuela se ve afectada en gran medida por esta situación. Para Planas (2002) las trayectorias individuales de los estudiantes son también el producto de las prácticas sociales y de los significados culturales desde los cuales ellos aprenden a interactuar con su entorno. Se puede decir que en la construcción del conocimiento se logra realizar y trabajar la geometría a través de experiencias del estudiante. En la escuela no se evidencia la relación de las matemáticas con los pensamientos de los estudiantes, sus vivencias y problemática social en la cual se encuentran.

Es importante para este proyecto de investigación observar la forma en la que los estudiantes reconocen aspectos matemáticos que emergen en un fenómeno de inundación, desde una mirada social a partir de la identificación y construcción de regularidades inherentes a estos conceptos, así como la forma de hacer asociaciones, simetrías, diferencias, cálculo de cantidades que intervienen.

Es así como se toma en consideración observar también cómo los estudiantes relacionan elementos geométricos del área y el volumen de sólidos entre sí. Entonces basados en lo anterior se formula la siguiente pregunta: ¿De qué manera los estudiantes construyen modelos matemáticos a través de la medida del área y el volumen, emergentes en un contexto auténtico?

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

En el contexto del presente proyecto de investigación, se consideran elementos conceptuales, que hacen referencia a los términos utilizados. Para Biembengut M., & Hein N., (2006) "Un modelo matemático de un fenómeno es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna forma, el fenómeno en cuestión". De esta forma, el modelo permite, no solo conseguir un procedimiento referente sino apropiado, incluso sirve, de soporte para otras aplicaciones o teorías. "En la práctica, ese conjunto de símbolos y relaciones puede estar vinculado a cualquier rama de la matemática, en particular, a los instrumentos fundamentales de las aplicaciones matemáticas" (p. 2). En este sentido, un modelo matemático puede ser una analogía entre varios objetos matemáticos y sus respectivas relaciones, y un escenario o fenómeno de entorno no matemático; este aspecto primordial del conocimiento de modelo presenta características importantes para la enseñanza.

Se hace necesario que, al aplicar la matemática a un contexto extramatemático, se vea evidenciado un modelo matemático explícita o implícitamente en ella. También, para que un estudiante experimente con un modelo matemático y pueda reflexionar sobre las relaciones que en él existen, es una condición de motivación que el alumno pueda observar y explorar el entorno o fenómeno a modelar y la matemática allí presente, como dos elementos aislados pero al mismo tiempo interconectados entre sí. La modelación matemática para Villa-Ochoa (2007) tiene que ver con el ejercicio que se efectúa en la educación matemática la cual procede de la acción científica de la modelización matemática. El autor plantea: "La modelación matemática, más que una herramienta para construir conceptos, se convierte en una estrategia que posibilita el entendimiento de un concepto matemático inmerso en un micromundo (contexto dotado de relaciones y significados) (p. 70)". Es decir, la modelación matemática le brinda las estrategias necesarias para que el estudiante desarrolle conocimientos y lo prepara para ir creando una condición distinta de cuestionarse y abordar las complicaciones o problemas de un contexto autentico. En este mismo sentido un contexto auténtico es, según Gil, Fernández & Rubio (2000) "aquel que reside en experiencias y prácticas reales en el entorno del mundo real por parte de los participantes" (p. 86). Es decir, que un contexto auténtico es todo ambiente existente que ocupa las prácticas y costumbres de los individuos. Para Villa-Ochoa (2010) Se asume como el punto de comienzo para el proceso de modelación matemática y como un conjunto de escenarios o ambientes ligados a los contextos cotidianos, generales y culturales de los estudiantes y de su entorno, a los cuales designan como situaciones reales.

METODOLOGÍA

Este estudio está enmarcado en las relaciones entre el estudiante, el trabajo desde la actividad matemática y el contexto en el ambiente participativo, teniendo en cuenta el entorno cotidiano, la comunicación y las experiencias de cada individuo cuando interactúa con el grupo, aspectos propios de un estudio basado en la investigación cualitativa. La investigación se efectúa bajo el enfoque cualitativo, mediante un estudio de casos. En este estudio participa un grupo de 32 estudiantes de grado noveno, teniendo como base para el análisis, cuatro estudiantes de una institución educativa del municipio de Caucasia afectada por el fenómeno de inundación, con quienes se analiza el objeto de investigación mediante observaciones directas, entrevistas, elaboraciones escritas y grupos de discusión.

A continuación se muestra la tabla 1, la cual corresponde a las características presentadas desde el estudio de caso en este proyecto de investigación, correlacionada con la teoría expuesta por Hays (2004).

Tabla 1. Estudio de caso cualitativo según la perspectiva de Hays (2004).

¿Qué?	*¿Cómo?*	*¿Para qué?*
Experimentar con un grupo de estudiantes, un proceso de construcción de relaciones entre las medidas del área y el volumen a través de la modelación de situaciones en un contexto auténtico. Caso concreto en el fenómeno de las inundaciones por desbordamiento de un río.	Instaurar en forma dialógica y espontánea, la re- significación de elementos de la modelación matemática, utilizando fuentes como la observación directa, entrevistas, documentaciones entre otras.	Establecer representaciones e interpretaciones en forma reflexiva con relación a la pregunta de investigación. Analizar las formas particulares en el que relacionan los estudiantes las medidas del área y el volumen en una situación dada. Contribuir al reconocimiento de la modelación matemática como proceso de aprendizaje en el aula de clase. Evidenciar la importancia de los contextos auténticos en la construcción de conocimiento matemático

El trabajo de campo se realiza teniendo en cuenta las etapas de exploración, indagación y análisis a partir de observaciones directas, entrevistas semi-estructuradas y documentos escritos que son elaborados por los estudiantes a partir de preguntas que orientan la actividad.

ANÁLISIS DE DATOS

El análisis de los datos se realiza en forma paralela, es decir, de forma continua y haciendo comparaciones. Estas se efectúan con el fin de ir verificando el objeto de estudio con relación a la pregunta de investigación, así como al trabajo de campo y al proceso de análisis. La información acumulada por las tres fuentes será validada mediante un proceso que llamamos de triangulación. Este consiste en cruzar los datos de las entrevistas realizadas con las observaciones y los documentos escritos.

CONCLUSIONES

En el aspecto teórico, se ha discutido sobre la desarticulación entre la geometría y el entorno social y cultural del estudiante. En este sentido, las temáticas de área y volumen en muchos casos son abordados de forma mecánica, y al parecer limitan su aplicación en el contexto escolar. En este sentido se pretende articular la medida de áreas y volumen emergentes en un fenómeno de inundación a través de un proceso de modelación, que permita no solo la apropiación de conceptos matemáticos, sino la reflexión por parte de los estudiantes sobre alternativas para minimizar sus efectos.

Los ambientes enmarcados en el contexto de las inundaciones que afectan una Institución Educativa y a una comunidad, se convierte en el espacio propicio y el punto de partida para que los estudiantes se aproximen a las matemáticas escolares. La modelación mirada desde el entorno social del estudiante podría facilitar una significación conceptual del área y del volumen y, a su vez, generar conciencia frente a la problemática del invierno a través de una perspectiva sociocultural de la Educación Matemática.

Con respecto al proceso de modelación, es posible analizar su pertinencia en la implementación de diferentes metodologías y estrategias didácticas en el aula de clases, además por su papel en la interrelación entre el mundo "real" y las matemáticas.

También una situación en contexto permitirá que los estudiantes logren desarrollar un razonamiento crítico y discursivo con respecto al problema matemático en cuestión. Así el entorno del estudiante se convierte en un elemento fundamental, en donde los procedimientos matemáticos adquieren otro sentido, pues emergen del fenómeno adoptando un sentido y significado propio para los estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Biembengut, M. S., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemáticas. *Educación Matemática., 16*(2), 105-125.

Biembengut, M., & Hein, N. (2006). Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemática. *V Festival Internacional de Matematica. De Costa a Costa* (pp. 1-25). Costa Rica: Educación Matemática.

Gamboa Araya , R., & Ballestero Alfaro, E. (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 113-136.

Gil Escudero, G., Fernández García, J., Rubio Miguelsanz, F., & López Ramos, C. (2000). *La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos: Un nuevo marco para la evaluación.* Madrid: OCDE.

Hays, p. (2004). Case study research. In *Foundations for research: Methods of inquiry in education and the social* (pp. 217-234). Mahwah, NJ: LEA.

Hernández Fernández, H. (2009). Algunas Reflexiones sobre la didáctica de la Geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*(5), 113-136.

Planas, N. (2002). Nociones Sociales Recontextualizadas en Educación Matemática: el Caso de la Competencia Comunicativa. *VI Simposio de la SEIM* , 175-186.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos* (2 ed.). Madrid: Morata.

Villa-Ochoa, J. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*(19), 63-85.

Villa-Ochoa, J., Bustamante, C., & Berrio, M. (2010). Sentido de realidad en la modelación matemática. In P. Leston (Ed.), *Acta Latinomericana de Matemática Educativa ALME* (pp. 1087-1096). Mexico: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Esquemas de demostración utilizados por estudiantes para profesores de matemáticas en el momento de trabajar el álgebra geométrica

*Diana Paola Fernández Herrán**
*Diana Pahola Suárez Mendoza***
*Lina Estefanía Rozo****

RESUMEN

En este artículo se exponen los resultados de un estudio de caso dirigido a los tipos de demostración que realizan los EPPM[1] específicamente que se encuentren o hallan cursando la materia de Problemas IV, de la LEBEM al momento de trabajar el álgebra geométrica. Para ello se tuvo en cuenta la propuesta de Harel & Sowder (1998) en Vigo (2006), sobre los esquemas de demostración, creando así unas categorías de análisis que permiten ver el desarrollo de dichos esquemas a través de la aplicación de una prueba, donde se trabajan de manera conjunta estas dos áreas del conocimiento matemático. Finalmente se encontró que la demostración está influenciada por diversos factores que no siempre se relacionan directamente con elementos asociados al saber.

* Universidad Distrital. Dirección electrónica: dianapaofh@hotmail.com
** Universidad Distrital. Dirección electrónica: dipasume@gmail.com
*** Universidad Distrital. Dirección electrónica: Castañeda linis_3602@hotmail.com

1 Estudiantes para profesor de matemáticas.

INTRODUCCIÓN

El problema surgió a partir de la experiencia como estudiantes para profesores de matemáticas específicamente recordando el desarrollo una de las clases: Problemas del Álgebra y la Geometría (2011-3) del proyecto curricular LEBEM, en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, donde las integrantes del grupo empiezan a evidenciar que hay una relación bidireccional entre el álgebra y la geometría, que no habían observado en el transcurso de su etapa de formación académica.

Por otro lado se tiene en cuenta que (Alfaro, 2003) *"El aprendizaje de la geometría constituye una de las mayores dificultades para los estudiantes en todos los niveles"*, y al estar relacionada con el álgebra, el trabajo puede ser más arduo; es por ello que teniendo en cuenta dicha dificultad es importante que

> Para posibilitar cualquier aprendizaje significativo de un tópico de la geometría es necesario conciliar el conocimiento de referencia, que el aprendiz se ha formado por medio de la experiencia, con la representación formal dentro del contexto matemático (Samper y otros, 2004).

Por ello, las investigadoras se han querido centrar en el estudio de dicha área y específicamente en el realizado por EPPM, para lo cual se han planteado la siguiente pregunta orientadora:

¿Qué tipos de demostración realizan estudiantes para profesores de matemáticas en el momento de trabajar el álgebra geométrica?

MARCO TEÓRICO

Para este trabajo de investigación, es pertinente plantear una definición de demostración teniendo en cuenta a de Villiers (1993) en Samper y otros (2004) como *"(...) medio de descubrimiento, de comunicación, de explicación y de sistematización"*, teniendo en cuenta que a lo largo de la historia del desarrollo de las matemáticas se han encontrado pruebas de que la demostración ha cumplido otras funciones, lo que puede sustentar *"el potencial didáctico de la actividad demostrativa en el contexto escolar"* (Samper y otros, 2004).

Ahora, para la presente investigación se ha tenido en cuenta la propuesta de Harel & Sowder (1998) en Vigo (2006), quienes proponen unos tipos o específicamente unos esquemas de demostración, donde distinguen tres categorías según el nivel de profundidad en el desarrollo sociocognitivo; dichos esquemas son clasificados como: externos, empíricos y analíticos.

Es importante tener en cuenta que en el momento de realizar cualquier proceso de demostración geométrica se ven implícitas algunas habilidades; en este apartado se tendrán en cuenta las propuestas por García & López (2008) cuando se ve la necesidad de argumentar lo que se está desarrollando; para ello es pertinente nombrar lo que estos autores clasifican como tareas, ya que la demostración junto con la investigación y la conceptualización son indispensables para la resolución de problemas, puesto que de esta forma se puede argumentar lo que se está realizando.

Por ende, según lo expuesto por García & López (2008), a través de estas tareas se presenta una serie de habilidades en geometría, las cuales son indispensables para desarrollar cualquier actividad en esta área del conocimiento.

- Visuales
- De comunicación
- De dibujo
- Lógicas o de razonamiento
- De aplicación o transferencia.

Ahora, debido a que la investigación se encamina a observar los tipos de demostraciones que realizan los EPPM en cuanto al trabajo con el álgebra geométrica, es importante realizar una mirada a este último tema, ya que según Laguna (2011), el álgebra geométrica, GA, es un lenguaje de alto nivel usado para representar y operar convenientemente la geometría de los problemas de matemáticas.

Es por ello que para Meserve (s. f.) en Viviente (1987), la geometría posee unos valores, de los cuales él destaca:

- La geometría proporciona uno o más puntos de vista, o modos de ver, aproximadamente en todas las áreas de la matemática.
- Las interpretaciones geométricas continúan proporcionando visiones directoras del entendimiento intuitivo y avances en la mayoría de las áreas de la matemática.
- Las técnicas geométricas proporcionan eficaces útiles para resolver problemas en casi todas las áreas de la matemática y las ciencias (Meserve, s. f., en Viviente, 1987).

METODOLOGÍA

La metodología que se usará en esta investigación es el estudio de caso, basado en Yin (1984) en Martínez A & Musito G (1995), ya que este permite el estudio de objetos en particular; donde el análisis de los resultados es específico. Esta metodología se estructura en cinco (5) partes:

- Diseño del caso de estudio.
- Preparación para la recolección de datos.
- Recolección de datos.
- Análisis de datos.
- Reporte final del estudio de caso.

Instrumento de recolección de información (Prueba)

La prueba consta de 2 ítems que no hay la necesidad de resolverlos jerárquicamente; en el primero se busca principalmente que el estudiante, a partir de la situación algebraica dada, pueda llegar a lo geométrico, por medio de argumentos que le permitan realizar esta acción, validando y demostrando sus resultados. Para el segundo se tiene como propósito que el estudiante a partir de una estructura geométrica pueda identificar la(s) expresión(es) algebraica(s) que demuestre qué es lo que se quiere probar con dicha estructura geométrica.

Para ello se tendrán en cuenta los diferentes tipos de demostración que puede inferir el estudiante a partir de dicha prueba, teniendo como base principal lo propuesto por Harel y Sowder (1998) en Vigo (2006).

Categorías de análisis

Tipos de demostración Harel y Sowder (1998) e Vigo (2006).	*Categorías de análisis*		
Esquemas de demostración externos.	1. El estudiante fundamenta sus resultados por la percepción que obtiene de la representación gráfica.	2. Hace una demostración basada en símbolos sin hacer referencia a las relaciones claras de ello.	
Esquemas de demostración empiricos.	1. El estudiante se basa en ejemplos para justificar sus resultados	2. Da por hecho que la afirmación es verdadera sin lograr una demostración formal, solo emplea aspectos intuitivos.	3. La argumentación dada esta ligada al contenido de lo que se presenta.
Esquemas de demostración analíticos.	1. No se basa solo en la verificación del enunciado, sino trata de convencerse a si mismo dando la explicación necesaria para ello.	2. Justifica centrándose en aspectos generales, estableciendo una conjetura general.	3. El estudiante alcanza un nivel de deducción donde tiene un estatuto teórico preciso, teorema, axioma, definición.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Después de aplicar el instrumento a tres estudiantes, de los cuales dos ya han cursado la materia de Problemas IV de la LEBEM y uno se encuntra cursando la asignatura, se pudo evidenciar que para hallar la solución al problema, los estudiantes primero realizan la verificación de lo algebraico, para pasar a realizar una demostración geométrica, que finalmente termina igualando a una nueva argumentación algebraica. Esto se puede asociar a lo expuesto por Van Hiele (1957), quien en sus niveles de pensamiento establece el criterio de que *"Los conocimientos de un nivel se suponen conocidos en el nivel siguiente. Allí se explican relaciones que antes estaban implícitas y se profundizaban los conocimientos adquiridos previamente"*. Cabe resaltar que los estudiantes dan por hecho que todo en el problema es verdadero. Harel & Sowder (1998) lo llaman esquemas de demostración externos autoritarios, ya que es aquí cuando *"el estudiante se convence de un resultado solo porque lo dijo el profesor, un libro o incluso un compañero de clase que él considera con más conocimiento"*. En este caso los estudiantes no se dejan convencer por lo dicho por un profesor o por un libro, sino por lo dicho en el problema algebraico, ya que al pensar que solo debía demostrar lo algebraico de forma geométrica, con eso le bastaba para argumentar el problema. También se puede decir que para ellos lo más importante fue converse a ellos mismo para dar argumentos sustentables y sostenibles; además, tratan de convencer a los demás de la veracidad de su postura, de lo que se infiere que los procesos realizados por EPMM deben ser claros, tanto para ellos como para los demás; es importante destacar que el estudiante llegó a una respuesta lógica por medio de manipulaciones del álgebra y la geometría. Por último, en los procesos que realizaron los estudiantes para dar solución a los problemas se vieron inmersos la habilidad visual, la comunicación, y el razonamiento, propuestos por García & López (2008). *"Habilidad visual, la habilidad de comunicación, habilidades de razonamientoy la habilidad de dibujo"*.

CONCLUSIÓN

Después de la aplicación, recolección y análisis arrojados, a partir de la aplicación de la prueba, se puede inferir que los tipos de demostración que realizan los EPPM al trabajar con álgebra geométrica están principalmente centrados en los esquemas de demostración empíricos y analíticos propuestos por Harel y Sowder (1998), ya que en cuanto a los esquemas demostrativos empíricos, los estudiantes siempre realizan una deducción a partir de lo que observan de las situaciones problema planteadas, y dan por hecho dichas deducciones sin antes realizar una demostración formal que valide sus suposiciones; ya cuando dudan de sus inferencias por alguna pequeña indecisión que surja al responder la pregunta de forma escrita, es cuando surge la necesidad de realizar una demostración analítica, pues es aquí donde realmente se detienen a ejecutar una demostración donde, no solo se encuentre inmerso el trabajo algebraico sino, además, el geométrico (y viceversa, depende el caso); es aquí cuando este se centra más en convencerse a sí mismo dando argumentos válidos que le permitan justificar que está proponiendo como respuesta algo verdadero.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alfaro, A. (2003). Rendimiento por temas en las pruebas nacionales de matemáticas en Tercer Ciclo y Bachillerato. Revista *UNICIENCIA,* Vol. 20 Número 1, 2003, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional. Heredia, Costa Rica.

García, S & López, O (2008) *La enseñanza de la Geometría*. México. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Types of Students' Justifications. The Mathematics Teacher, Vol. 91, nº 8, noviembre, pp. 670-675. En: Vigo, V. (2006). "Lugares geométricos: ¿Cuál es su rol en la enseñanza de la demostración en geometría?" (maestría). México, D. F.: Instituto Politécnico Nacional Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología.

Laguna, G., (2011). Un acercamiento práctico al álgebra geométrica. Departamento de Ingeniería Eléctrica, UAM-Iztapalapa, México, D. F.

Martínez A & Musito G (1995). *Estudio de caso*. Madrid. Narcea.

Samper, C., Leguizamón, C., Camargo, L. & Donado A. (2004). *Hacia la construcción de un currículo del área de geometría de la Licenciatura en Matemáticas*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Van Hiele, P., (1957). The Van Hiele Levels of Geometric Thought in Undergraduate Preservice Teachers. Vol. 14, No. 1, 58-69.

Viviente, J. (1988). Geometría y/o álgebra geométrica. En memoria de Julio Rey, paladín del rigor y del valor pedagógico de la Geometría. Catedrático matemáticas, facultad de ciencias. Zaragoza

Indagando los razonamientos que permiten clasificar en los niveles de visualización a partir de un estudio de caso

*Diana Paola Fernández Herrán**
*Diana Pahola Suárez Mendoza***
*Lina Estefanía Rozo Castañeda****

RESUMEN

En este artículo se exponen los resultados de un estudio de caso centrado en los razonamientos geométricos a través de la visualización realizada por niños de 7 a 8 años de edad, a partir de la aplicación de un instrumento de investigación, que permitió clasificarlos en los indicadores de análisis observables, teniendo en cuenta las categorías de los niveles I y II de visualización propuestos por Duval (1998). Se evidenció que los niños no se encuentran en ningún nivel de visualización específico, ya que al no presentar todos los indicadores establecidos por las categorías se ubican en lo que se podría denominar un punto intermedio de los niveles de visualización.

* Universidad Distrital. Dirección electrónica: dianapaofh@hotmail.com
** Universidad Distrital. Dirección electrónica: dipasume@gmail.com
*** Universidad Distrital. Dirección electrónica: linis_3602@hotmail.com

INTRODUCCIÓN

El problema surgió a partir de la experiencia como estudiantes para profesores de matemáticas específicamente en una de las clases: didáctica de la geometría (2012-1) en el grupo I y práctica intermedia I (2011-3) en el grupo II del proyecto curricular Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas (LEBEM), en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Con respecto a la primera asignatura, el docente planteó una actividad que consistía en resolver una situación problema donde intervenían el resolutor y el observador; en dicho proceso el observador debía estar atento a todo lo elaborado por el resolutor. Posteriormente se debía hacer un análisis de dichos procesos con la lectura *El aprendizaje de la geometría* (Castiblanco & Otros, 2004). Con el desarrollo de este ejercicio, las integrantes del grupo de investigación pudieron evidenciar una serie de pasos que se realizaban allí, los cuales son trabajados y estudiados por Castiblanco y otros (2004)

A partir del desarrollo de este ejercicio las integrantes del grupo recordaron vivencias de la asignatura práctica intermedia I. Por esta razón, al tener en cuenta lo desarrollado en las dos asignaturas se decide hacer un estudio de caso que permita responder a la siguiente pregunta: ***¿Qué razonamientos permiten clasificar el nivel de visualización en el que se encuentran niños de 7 a 8 años de edad?***

MARCO TEÓRICO

Habitualmente, los seres humanos intentamos resolver problemas por medio de tácticas que faciliten llegar a una solución; asimismo, en el aprendizaje de la geometría, es necesario reconocer el desarrollo cognitivo y los procesos fundamentales que se realizan, los cuales son utilizados y puestos en práctica para plantear y ejecutar una estrategia (procesos de visualización, justificación y aplicación instrumental); esto puede ser posible, ya que en nuestro entorno estamos rodeados de diversas figuras geométricas. Esto lo podemos hacer por medio de la visualización, ya que según Duval (1998) "La visualización está ligada al pensamiento espacial, el cual conduce a un proceso de justificación que está ligado al pensamiento deductivo".

Algunos autores como Duval (1998), De Villiers (1999), Vinner (1987), Herscowits & Moreno (2002) nos dan a conocer que "*el aprendizaje de la geometría es un proceso complejo"* dentro del cual se lleva a cabo la utilización de "*polos*" o procesos de visualización y de significado. Es por ello, que dentro de los procesos cognitivos encontramos que, por ejemplo, la visualización permite que se reconozcan características básicas y relaciones existentes entre los objetos. Sin embargo, el potenciar la visualización no depende solo de la forma de observar, sino también de la reacción que pueda tenerse frente a un concepto matemático.

Cuando se presenta una situación problema referente a la geometría, entran en juego diferentes procesos (entendimiento del problema, interiorización y expresión matemática), donde el sujeto empieza a realizar una interacción entre sus percepciones empíricas relacionándolas con teoremas o axiomas, como nos menciona Castiblanco & otros (2004). Por ende, se puede decir que el aprendizaje de la geometría está recogido en tres aspectos:

1. Los procesos de visualización y su potencial heurístico en la resolución de problemas.
2. Los procesos de justificación propios de la actividad geométrica.
3. El papel que juegan las construcciones geométricas en el desarrollo del conocimiento geométrico.

Finalmente se puede mencionar que estos procesos pueden entenderse como evolutivos mediantes los cuales el estudiante es capaz de llevar a cabo razonamientos que no solo se basen en lo preceptivo y deductivo, sino que, además, como lo afirman Castiblanco & otros (2004). "*(...) asegurar el cumplimiento de propiedades geométricas y lograr una generalización (...)".*

Con lo anteriormente mencionado, para esta investigación, se tuvo en cuenta el primer proceso de visualización.

METODOLOGÍA

Para poder realizar el presente trabajo, se tuvieron en cuenta las actividades esenciales vinculadas a cualquier investigación (Romberg, 1992): identificar un fenómeno de interés, construir un modelo preliminar, relacionar con trabajos de otros autores, elaborar preguntas o conjeturas, seleccionar una estrategia de investigación, seleccionar procedimientos de investigación, obtener evidencias, interpretar la evidencia, reportar resultados y anticipar acciones de otros. Estas dieron paso a la elaboración final del trabajo; en este proceso se tuvo en cuenta la metodología estudio de caso, la cual se caracteriza según George et al. (2005), Yin (1994) por los siguientes pasos:

1. Diseño del estudio, 2. Realización del estudio y 3. Análisis y conclusiones.

Teniendo en cuenta estos pasos y lo propuestos por Romberg (1992), se resalta la relación que existe entre ellos. Por ende, se puede mencionar que esta metodología se desarrolla a partir del análisis de los resultados obtenidos en la prueba diagnóstico. Para ello se tendrá en cuenta la técnica de investigación descriptiva, la cual define el propósito de cada punto en la actividad y las técnicas de tipo cualitativo donde Martínez P. (2006) resalta que en los "*estudios cuantitativos es indispensable contar con una teoría ya construida*"; para el caso de esta investigación fue la visualización según Duval (1998). A partir de lo anterior, se utilizaron 4 fases propuestas por Moreno & Caballero (2009): Fase 1, fundamentación y formulación del problema: Fase 2, diseño y aplicación de la actividad; Fase 3, reflexión actividad, y Fase 4, conclusiones finales.

Instrumento de recolección de información. Consta de 3 puntos de los cuales, el primero se enfoca en la abstracción de cada una de las figuras geométricas que pueden observar los niños. El segundo punto hace referencia al reconocimiento de cada una de las figuras geométricas, sin que estas tengan necesariamente una posición estándar. En el tercer punto cada niño debe identificar las partes constitutivas de las figuras geométricas, de tal forma que ya no necesite relacionarlas con objetos del mundo real. En el cuarto y quinto punto de la actividad, el niño diferencia el enunciado de las figuras geométricas, por medio de la información que puede obtener de la visualización de estas (figuras geométricas).

Categorías de análisis

Categorías de la visualización (Duval, R. 1998).	*Indicadores de análisis observables a partir de las categorías.*				
Nivel I De visualización	1. Reconoce formas prototípicas.	2. Asocia figuras geométricas a objetos físicos (mundo real).	3. Reconoce las formas prototípicas de las figuras geométricas, pero aún las asocia con objetos del mundo real.	4. Reconoce las figuras prototípicas sin importar que haya cambiado su posición (boca arriba, boca abajo).	5. Realiza un proceso de comprensión (visualización) con las formas de las figuras geométricas prototípicas para poder obtener información, y así responder correctamente la actividad.

Categorías de la visualización (Duval, R. 1998).	*Indicadores de análisis observables a partir de las categorías.*					
Nivel II De visualización	1. Identifica las partes constitutivas de las figuras geométricas.	2. Reconoce las figuras geométricas, sin tener estas una posición estándar.	3. Identifica algunas características de las figuras geométricas.	4. Las figuras geométricas ya son reconocidas, y no hay necesidad de asociarlas con objetos del mundo real.	5. Reconoce cada figura geométrica que se encuentran dentro de una configuración.	6. Diferencia el enunciado de las figuras geométricas, por medio de la información que puede obtener de la visualización de estas.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Después de la aplicación del instrumento a tres niños que oscilan entre los 7 y 8 años de edad, puede inferirse que los niños de 7 años presentan más aspectos relacionados con el nivel I de visualización y el de 8 años con el II; sin embargo, en ninguno de los casos presentan todas las categorías que permitan clasificarlos en un nivel específico, pues en este caso particular se podría suponer que el niño se encuentra en lo que Holowey (s. f.) clasifica como

> (...) La percepción del espacio es la posibilidad que tienen los niños un poco mayor de comprender el espacio sólo por su percepción visual. A través de las diferentes edades se van a tener percepciones distintas, ya que éstas van ligadas al caudal de información que se va integrando (...) Holowey, s. f.).

Cabe anotar que la enseñanza-aprendizaje de la geometría es considerada un proceso difícil que suele empezar por la visualización, y en el momento de iniciarse, según Duval (1998), se observan los conceptos geométricos como entidades globales, más que como poseedoras de componentes o atributos. Las figuras geométricas son reconocidas por su configuración espacial, es decir, por su apariencia física, y no por sus propiedades.

CONCLUSIONES

- En el desarrollo de la actividad, se pudo evidenciar que los niños presentan más aspectos del nivel I de visualización debido a que no reconocen en su totalidad las características que diferencian las figuras geométricas dadas (no utilizan sus propiedades como es el reconocer el número de lados y reconocerlas en diferentes posiciones). Es por ello que los razonamientos que realizan los niños, a partir de los proceso de visualización, son deductivos, dado que sus respuestas se basan en sus experiencias empíricas y la percepción espacial que tienen del mundo, mas no por razonamientos abstractos.

- Es importante destacar que no se pudo clasificar a los niños en un nivel de visualización específico, pues estos atendían a categorías de los dos niveles de visualización; sin embargo, se puede evidenciar que su percepción es más global que de elementos constitutivos, pues en términos generales todo lo que veían trataban de relacionarlo con figuras de su entorno, dejando de lado definiciones propuestas desde la geometría.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Castiblanco, A. & otros. (2004). El aprendizaje de la geometría. En: *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales.* Serie documentos. Proyecto: Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación básica secundaria y media de Colombia (págs. 9-18). Bogotá: MEN.

Holowey (S.F), Recuperado el 21 de septiembre de 20011 de https://docs.google.com/viewer?a=v&q=cache:3vldgckqid0j:www.cesdonbosco.com/profes/satrio/documentos/didactica%2520geometria%2520por%2520el%2520prof%2520gustavo%2520zorzoli.doc+holowey&hl=es&gl=co&pid=bl&srcid=adgeesi5ktd-ah33ynepecl9jdbcjbx6eqoxr5jjsrv4amdcbrqeq7kihl3ccavp4phokkurvhpecszb9lybp-kcwctcfbzmcosknc2figvetby8awqxpipsblao9re2tok0t3vtkjhob&sig=ahietbty_8j8eongpfv7jo6zary_2llagg&pli=1

Martínez, P (2006), *El método de estudio de caso. Estrategia metodológica de la investigación científica.* España.

Moreno, L. (2002) *Cognición y computación, el caso de la geometría y la visualización.* Memorias del Seminario Nacional de formación de Docentes: Uso de nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional. En: El aprendizaje de la geometría. (pp. 9-18). Bogotá: MEN.

Etnomatemática, geometría y cultura: el caso de los artesanos del municipio de Guacamayas, Boyacá

Christian Camilo Fuentes Leal[*]

RESUMEN

En el presente documento se mostrarán los resultados finales de mi tesis de pregrado, la cual está relacionada con la identificación de actividades matemáticas universales en el proceso de elaboración de artesanía de un grupo de artesanos, a partir de la elaboración de una etnografía.

Palabras clave: geometría, constructivismo social, enfoque sociocultural, etnomatemática.

[*] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: cristianfuentes558@hotmail.com

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

El problema de para la generación de este tipo de trabajos está relacionado con la tensión existente entre la implementación de políticas educativas internacionales relacionadas con la estandarización, y las realidades escolares de los países en vía de desarrollo, tales como la diversidad cultural.

Estos fenómenos generan procesos de homogeneización, y deja de lado el rascarte de la diversidad étnica, cultural y social de las comunidades. La comunidad de Guacayamas en el departamento de Boyacá, se caracteriza por tener una rica composición cultural, (las cuales se relacionan con la elaboración de artesanías), a pesar de tener esta riqueza, el municipio presenta un alto nivel de deserción escolar,factor por el cual es de vital importancia hacer una caracterización de las dinámicas sociales de la comunidad a partir de una etnografía, para que apartir de esta información se pueden estableces estrategias de mejora en las dinamicas escolares.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Para la elaboración de la etnografía se buscaron diferentes referentes conceptuales, los cuales aportaron significativamente para la descripción y el análisis de la información, en una primer categoría, está el preguntar *¿Qué se entenderá por matemática?, p*ara poder definir el concepto teórico es necesario estudiar las acepciones de este concepto a partir las escuelas filosóficas de las matemáticas entre ellas el platonismo, el logicismo, el formalismo, el intuicionismo y finalmente el constructivismo, ésta última propuesta filosófica fue con la cual hubo más afinidad, pues ésta muestra cómo los contextos sociales en los cuales los estudiantes están inmersos pueden aportan significativamente a su aprendizaje, algunos autores como Kim (2001) presenten a esta propuesta filosófica como la que enfatiza la importancia de la cultura y el contexto, para la comprensión de lo que ocurre en la sociedad y la construcción del conocimiento basado en esta comprensión. Elemento que es de vital importancia en la elaboración de la etnografía, pues se relacionaran prácticas sociales (realización de artesanías) con las matemáticas a partir del contexto sociocultural de la comunidad.

En una segunda categoría fue necesario consultar para la elaboración de la etnografía *¿Qué se entenderá por cultura?* Pues bien, al igual que la matemática, el concepto de cultura también ha evolucionado históricamente, para poder definir este concepto en necesario el uso de elementos desde la antropología y la sociología, la definición que más se acerca a los elementos presentados en la etnografía están relacionados la definición presentada en la Conferencia Mundial sobre Políticas Culturales de la UNESCO, celebrada en México en 1982, citada en Beyer (2005), quienes caracterizan el concepto de cultura como el conjunto de rasgos distintivos que caracterizan a una sociedad o un grupo social, ella engloba, además las artes y las letras, los modos de vida, los derechos fundamentales del ser humano, los sistemas de valores, las tradiciones y las creencias, característica que se tuvo en cuenta para la recolección ya análisis de la información. Finalmente una tercera categoría que fue de vital importancia para la elaboración de la etnografía, fue preguntar *¿Qué se entenderá por La Etnomatemática?, p*ara presentar la definición de Etnomatemática que se tendrá en cuenta para la elaboración de la etnografía nos remitiremos a uno de los primeros autores en referenciar el término Etnomatemática, a partir de una definición de carácter etimológico, al dividirla en sus tres raíces (etno, mate y ticas), en un primera parte se denota el prefijo etno, mencionando que las prácticas matemáticas son llevadas a cabo en diferentes culturas, teniendo en cuenta la apropiación de los diferentes contextos sociales, con el objetivo de lidiar con el ambiente en el cual están conviviendo, es decir la modelación de la realidad (haciendo emerger la raíz matema), estos fenómenos se han construido a través de la historia, con base a la utilización de diferentes técnicas e ideas, denotando raíz (ticas), al hacer la conjunción de estas tres ideas surge la palabra Etnomatemática, como un campo de investigación preocupado por la búsqueda de procesos matemáticos presentes en las dinámicas sociales de diferentes grupos culturales, presentando una definición que afín a los objetivos planteados por la etnografía.

METODOLOGÍA

La etnografía se llevó a cabo con 7 artesanos, en 8 semanas, por medio de la mediación de las directivas de la ONG *La Espiral del Servicio*; inicialmente me presenté a las tres cooperativas campesinas que funcionan en el municipio de Guacamayas; durante las 4 primeras semanas se hizo un trabajo de reconocimiento de la población, con el fin de afianzar relaciones de confianza mutuas; además, este proceso ayudó significativamente a caracterizar socioculturalmente a la comunidad; posteriormente, en las siguientes dos semanas, se inició el acercamiento con los artesanos observando el proceso de elaboración de las artesanías; todos los procedimientos fueron escritos en el diario de campo; por medio de la observación se evidenciaron algunas heurísticas implementadas por los artesanos para la elaboración de algunos diseños geométricos presentes en las artesanías; además, se pudo observar algunos procedimientos relacionados con temáticas como proporcionalidad, la cual estaba presente en el proceso de preparación de la materia prima, para la elaboración de las artesanías. Paralelamente del proceso de observación de esta práctica cultural (elaboración de artesanías), se hizo el diseño de una entrevista semiestructurada, la cual fue aplicada a 7 artesanos de la comunidad. Finalmente, como complemento a las entrevistas semiestructuradas, se implementó la recolección de artefactos, con el fin de evidenciar algunas propiedades geométricas que cumplen ciertos diseños presentes en la cestería.

ANÁLISIS DE DATOS

La investigación tiene como objetivos, la comprensión de cuáles actividades matemáticas están presente en el proceso de elaboración de la cestería de la comunidad de Guacamayas, especialmente las relacionadas con elementos propios del pensamiento métrico y espacial, el conocer las prácticas sociales (elaboración de las artesanías) utilizadas en la comunidad de Guacamayas para la transmisión de los saberes propios de la elaboración de la cestería, en espacios extra escolares y el establecer algunos elementos matemáticos para ser tenidos en cuenta, por los maestros de la Educación Básica para la enseñanza de la matemática en la comunidad de Guacamayas, para el cumplimiento de dichos objetivos se implementó una malla de triangulación de acuerdo con los planteamientos de Goetz y Lecompte (1988). A continuación se presentará el esquema de la malla usada para el análisis de la información recolectada en la etnografía.

Instrumentos *Tópicos de investigación*	*Observación no participante*	*Fotografías*	*Entrevistas*	*Recolección de artefactos*
Actividad matemática: diseñar				
Actividad matemática: medir				
Enseñanza de las cestería				
Potencialidades pedagógicas en matemáticas				

CONCLUSIONES

A continuación se presentarán las conclusiones relacionadas con cada uno de los objetivos de la etnografía:

- *De las actividades universales*
- *Del medir*

1. Se pudo identificar que la comunidad de Guacamayas usa por lo menos cuatro (4) unidades de medida diferentes en el proceso de elaboración, que son: la cantidad de vueltas que posee cierta artesanía, la cantidad de puntadas usadas para la elaboración de un diseño, el uso del tiempo como medidor de longitudes y el sistema métrico decimal para longitudes.
2. Con respecto a la unidad de medida en vueltas, se puede mencionar que en el proceso de elaboración de la cestería esta unidad de medida parte del centro de la artesanía haciendo movimientos circulares de una tira cilíndrica de paja, asimilando la forma de un caracol; cada vez que la tira alargada de paja pase por un punto determinado será llamado una vuelta; esta unidad de medida varía dependiendo del grosor de tira cilíndrica de paja; de igual forma, la variación de esta unidad de medida determina la cantidad de horas en las cuales se debe trabajar para la elaboración de la artesanía.
3. Con respecto a la unidad de medida en puntadas, se puede comentar que esta unidad de medida es de vital importancia, pues garantiza en cierta medida la exactitud de las traslaciones o rotaciones de diferentes longitudes en los diseños, para que de esta forma no se distorsione el diseño inicialmente planteado por el artesano.
4. Con respecto a la unidad de medida en unidades de tiempo, se puede mencionar que esta es usada de forma indirecta por los artesanos, pues este sistema se basa en la exactitud de una longitud en cierto tiempo; además, este tipo de medición puede variar dependiendo del individuo, pues en caso de una tercera persona las longitudes tejidas en un determinado tiempo puede que no sean las mismas que de otro artesano, es decir, varía de individuo a individuo.
5. Con respecto a la unidad de medida en el sistema métrico decimal, se puede mencionar que esta unidad de medida es solicitada por las directivas de las cooperativas, es decir, es solicitada por terceros, pero de igual forma los artesanos la usan satisfactoriamente en el proceso de elaboración de los diseños de las artesanías.

- *Del diseñar*

1. La comunidad de Guacamayas cuenta con una gran variedad de diseños, algunos de estos son autóctonos (entre ellos, las espirales y las divisiones

de circunferencia) de la comunidad y otros son construidos a partir diferentes características dadas por el comprador de dicha artesanía; para ello usan diferentes unidades de medida y sistemas de representaciones, ya sean mentales (plantilla mental) o gráficas.

2. Algunos artesanos del municipio de Guacamayas no hacen representaciones gráficas de sus diseños; tampoco cuentan con un álbum donde tengan compilados sus diseños, ni se utilizan bocetos preliminares en la elaboración de una artesanía, es decir, que algunos artesanos manejan representaciones abstractas y no físicas de los diseño a construir; esta característica se podría relacionar con la expresión plantilla mental, mencionada por Bishop (1999), quien afirma que es un constructo abstracto, que como identidades estructurales son más importantes que los aspectos materiales del mismo.

- *De la enseñanza de la cestería*

  La enseñanza de la elaboración de las artesanías está dada totalmente en espacios extra-escolares; además, los saberes son transmitidos generalmente de la madre a los hijos; sin embargo, el aspecto más significativo es que la familia en sí es la principal institución de transmisión de los conocimientos relacionados con la cestería en la comunidad de Guacamayas.

- *De las potencialidades pedagógicas*

  Algunos diseños de la comunidad de Guacamayas presentan potencial para la enseñanza de algunos conceptos, tales como las isometrías en el plano, la simetría, los ejes de simetría, los movimientos rígidos en el plano, la translación y la rotación.

  De igual forma los diseños de la comunidad de Guacamayas, especialmente los relacionados con la división de circunferencia se pueden vincular con representaciones de fracciones parte todo en el contexto continuo.

  Otro aspecto significativo de los diseños de la comunidad de Guacamayas es que estos también pueden ser explorados en el campo de la educación matemática para esta comunidad como representaciones gráficas de progresiones geométricas, las cuales pueden llevar a la idea de función, tal como es mencionado en el numeral "las puntadas como unidad de medida".

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática, la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

Bishop. A. (2005). *Aproximación sociocultural a la educación matemática*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Beyer, W. (2005) *Matemática, desarrollo humano, cultura y naturaleza*. En Mora. D. Didáctica crítica de las matemáticas y etnomatemáticas: perspectivas para la transformación de la educación matemática en América Latina. (pp. 277-315), La Paz. Campo Iris.

D´Ambrosio, U. (2007) *Etnomatemática Elo entre as tradições e a modernidade.* Belo Horizonte: Autentica. 3ra reimpresión.

Goetz, J. & Lecompte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo de investigación educativa*. Madrid: Morata.

Kim, B. (2001). *Social constructivism. In M. Orey* (Ed.), Emerging perspectives on learning, teaching, and technology.

La enseñanza de la matemática en la escuela primaria: Una historia contada desde los manuales de aritmética

José Bernardo Galindo Ángel[*]

RESUMEN

Este trabajo muestra la importancia de realizar investigaciones en perspectiva histórica (arqueológica-genealógica) de la enseñanza de las matemáticas y la necesidad de realizarla desde los manuales y textos escolares que circularon en la escuela primaria; aquí se esboza un primer balance de las investigaciones que sobre este tema se han hecho y las relaciones que se han establecido entre historia- enseñanza y aritmética o matemática; ello para entender las prácticas que se realizan en la actualidad en esa enseñanza dentro de las escuelas y reconocer la emergencia de las tendencias y corrientes que prevalecen allí.

Palabras-clave: enseñanza - contenidos - manual y texto escolar - historia.

[*] Corporación Universitaria Minuto de Dios-Colegio Francisco de Paula Santander. I. E. D. Pertenece al grupo de investigación: Educación, Pedagogía y Subjetividades. Dirección electrónica: joseberny66@hotmail.com.

DE LAS PREGUNTAS QUE AGOBIAN Y LA MIRADA QUE AFINA... (JUSTIFICACIÓN Y MARCO REFERENCIAL)

El proyecto de investigación surge de algunas reflexiones y experiencias personales a partir de mi práctica pedagógica, tanto como maestro de primaria como de una escuela normal; ese ejercicio termina por generarme algunas preguntas y cuestionamientos sobre mi quehacer; pero de manera particular en la enseñanza de las matemáticas, ya que allí es donde encuentro mayor tropiezo y dificultad tanto con los compañeros como con los padres de familia: los primeros al considerar que por no ser formado en ese saber, no tengo la posibilidad de cuestionar los materiales, contenidos y maneras como se enseña, y los segundos por el choque con las formas en que ellos aprendieron las matemáticas; dentro de ese contexto preguntas como: ¿por qué se enseñan ciertos temas?, ¿por qué los enseño yo?, ¿soy yo el que decide qué enseñar?, ¿por qué los textos trabajan esos temas?, ¿por qué la matemática se vuelve importante en el contexto escolar?, ¿por qué se usan ciertas metodologías y no otras para enseñar las matemáticas? empiezan a convertirse en el motor del presente que me lleva a interrogar mis prácticas de enseñanza.

Una primera búsqueda me llevó a identificar las dos definiciones que ella ha tenido: aritmética y matemática; sobre la primera encontré que era definida como: "Rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de los números, sus propiedades y las habilidades necesarias para trabajar con ellos. Existen cuatro operaciones fundamentales en la aritmética: adición o suma, sustracción o resta, multiplicación y división. Estas son las bases para desarrollar todas las demás operaciones, como elevación a potencias (cuadrado o cubo de un número), extracción de raíces (cuadrada o cúbica), porcentajes, fracciones y razones"[1].

Sin embargo, el nombre con el que figura hoy en los planes de estudio y en la legislación es el de matemática la cual según los expertos se entiende como: "Las matemáticas o la matemática (del latín *mathematĭca*, y éste del griego μαθηματικά, derivado de μάθημα, conocimiento) es una ciencia que, partiendo de axiomas y siguiendo el razonamiento lógico, estudia las propiedades y relaciones cuantitativas entre los entes abstractos (números, figuras geométricas, símbolos). Mediante las matemáticas conocemos las cantidades, las estructuras, el espacio y los cambios"[2].

1 Recuperado de: Eduaamerica.Inc. Junio 2012. http://www.mathematicsdictionary.com/spanish/vmd/full/a/arithmetic.htm.

2 Recuperado de: Wikipedia.com. Junio 19 de 2012. http://es.wikipedia.org/wiki/Matematicas

Queda inicialmente claro que no son lo mismo, pero inmediatamente surgen preguntas a propósito de cuándo se decide que no son lo mismo, qué hizo que se diera ese cambio, qué hace que una habilidad se convierta en una ciencia, quiénes legitiman ese saber y por qué llegan otros saberes a ella.

En esa búsqueda incesante por tratar de responder las preguntas que me hacía, encuentro algunos documentos del Grupo de Historia de las Prácticas Pedagógicas en Colombia, a propósito de la reconstrucción del saber pedagógico en nuestro país; la lectura de textos como: "*El oficio del maestro*[3]" de Óscar Saldarriaga, "*Pedagogía y epistemología*"[4] del GHPP[5], "*Foucault, la pedagogía y la educación. Pensar de otro modo*[6]" de varios autores, "*Pedagogía e historia*", de Olga Lucía Zuluaga, me permitieron ir entendiendo que mis prácticas de enseñanza estaban atravesadas por distintos discursos y que era necesaria la reconstrucción de los dos, desde el proceso formativo que tuve tanto en la Escuela Normal como en la Universidad.

Así las cosas, el método de enseñanza adquiere otra dimensión, él no será la única posibilidad de análisis, ni se considerará como la condición primordial que posibilita la enseñanza; será asumido desde el saber pedagógico; en él también se incluyen los procedimientos que enseñan. Pero no quiere decir que los procedimientos de enseñanza ocupen un mismo lugar en el saber pedagógico. Entre sujetos que enseñan, sus discursos y procedimientos para enseñar, existen profundas diferencias resultantes de la distribución social de los saberes y de la delimitación política de los sujetos de saber"[7]; conviene subrayar entonces, que el método supera a los procedimientos, así se valga de ellos, que es el espacio donde el maestro es reconocido, pero también, es donde mayor diferencia existe como resultado de las distintas apropiaciones que ellos realizan, gracias a los dispositivos formativos que los configuran, al saber o la disciplina escogida para enseñar y al espacio social en donde se realiza esa enseñanza; esta es una arista que le permite al maestro construir un saber pedagógico.

La importancia entonces de emprender un proyecto que dé cuenta de la historia de un saber escolar, es porque permite dilucidar y ampliar la discusión

3 Saldarriaga, Oscar. 2005. *El oficio del maestro.* Editorial Magisterio. Tomo 2. Colección de historia de la pedagogía.

4 Zuluaga y otros. 2003. *Pedagogía y epistemología.* Editorial Magisterio. Tomo 1. Colección de historia de la pedagogía.

5 Grupo de Historia de las Prácticas Pedagógicas en Colombia.

6 Zuluaga y otros. 2006. *Foucault, la pedagogía y la educación* Editorial Magisterio. Tomo 9. Colección Pedagogía e historia.

7 Ibíd. P. 143.

sobre las formas constitutivas de la enseñanza de ese saber en particular; porque amplía el espectro de fundamentación en torno a la pedagogía y todos sus componentes, y porque permite en el presente, explicarse las formas de funcionamiento de la enseñanza; de igual modo, adelantar un estudio sobre la enseñanza de la matemática en la primera mitad del siglo XX en Colombia significa mirar de manera detenida el cruce de distintas fuerzas que configuraron su forma de funcionamiento.

Un elemento clave que permitiría dar cuenta de las prácticas de enseñanza de un saber específico son los manuales escolares; en ellos se recoge no solo el saber sino las estrategias de la misma enseñanza; estos han marcado el derrotero de muchas de las prácticas que hoy circulan en la escuela tal y como lo anota Souto: "El libro escolar es una herramienta que se ha venido utilizando como eje de la programación didáctica de una clase…. el manual escolar ha sido la pieza angular que determinaba la programación, la difusión de los contenidos de la cultura escolar y facilitaba el aprendizaje de algunas habilidades básicas"[8].

Por todo eso es que se hace necesario historiar la enseñanza de un saber particular desde los manuales escolares, ya que ello nos permitirá mirar de forma reflexiva, detenida y concienzuda cómo se van constituyendo redes, prácticas y discursos, que ponen en evidencia una forma particular en que es asumido un saber y su enseñanza.

DE LA PACIENCIA Y LA MINUCIA… METODOLOGÍA

El enfoque metodológico que se asume para llevar a cabo la investigación presentada es el genealógico-arqueológico, propuesto por Foucault. Una forma distinta de hacer historia -historiar las prácticas, dar cuenta de la formación de los conceptos- a cuyo servicio pone sus ideas, sus categorías y su método -caja de herramientas-, que permite, entre otras cosas, acercarse al tiempo histórico de forma no lineal, en donde los acontecimientos no se presentan desde la premisa causa-consecuencia sino gracias a un cruce de fuerzas diversas en un momento particular, que quiere dar cuenta de la emergencia del acontecimiento en lo que tiene de particular; una propuesta que niega el origen pero busca la procedencia, los comienzos; desde una revisión rigurosa, meticulosa y paciente de esas pequeñas verdades, sus regularidades, sus fugas, sus regresos, sus discontinuidades, sus rupturas. Esta revisión

[8] SOUTO GONZÁLEZ, Xosé M. (2012/12/5). Los manuales escolares y su influencia en la instrucción escolar *Biblio 3W, Revista Bibliográfica de Geografía y Ciencias Sociales*, Universidad de Barcelona, Vol. VII, nº 414, http://www.ub.es/geocrit/b3w-414.htm [ISSN 1138-9796]. P. 1.

hará visibles los saberes que irán configurando el marco referencial de la investigación[9].

La metodología se moverá en dos sentidos: uno, ubicar las publicaciones, seleccionar los textos, leer y tematizar las categorías y con ellas elaborar la base de datos histórica de los documentos seleccionados. Y dos, en el análisis de las temáticas, la lectura de los materiales que fueron conformando el marco referencial y la escritura como resultado del entrecruzamiento de estos diversos saberes, que como fuerzas hacen surgir las diversas conceptualizaciones y las diversas tendencias pedagógicas del saber de la matemática.

A MODO DE CONCLUSIÓN: HISTORIA, MANUALES Y MATEMÁTICAS: ENCUENTROS Y DESENCUENTROS

Para el estudio que nos ocupa hasta ahora ha sido posible elaborar un primer balance provisional de algunas de las principales investigaciones realizadas dentro y fuera del país en relación con las prácticas de enseñanza de la matemática y los manuales escolares; algunos de los artículos que aparecieron y que de algún modo se relacionan con la propuesta muestran que las prácticas de enseñanza de las matemáticas han sido objeto de investigación desde diferentes campos de saber y desde variadas perspectivas teóricas, lo que hace difícil establecer tendencias o agrupaciones. No obstante, existen algunos elementos comunes que dan cuenta de la presencia de las regularidades que aparecen en aquellos estudios sobre dichas prácticas.

La historia de la escuela y la enseñanza está en los manuales: una corriente historiográfica que se ha venido fortaleciendo en los últimos años ha sido aquella que reconoce los manuales como fuente que permitiría identificar las condiciones en que un saber es puesto a circular o los modos y prácticas en que este se hace posible; desde ellos también se va dando cuenta de la historia particular de la escuela y de la enseñanza como una práctica que se da en ella; proyectos como Manes en España son una prueba de ello.

La enseñanza de las matemáticas: cada modelo tiene sus estrategias. Otra de las líneas en las que se ha desarrollado investigación sobre las matemáticas ha sido aquella que ha privilegiado el uso de las estrategias que se implementan para enseñarla; en ella se hacen acercamientos a tendencias, corrientes y modelos que marcan el derrotero por el cual se mueve la enseñanza de la misma; su interés particular es dar cuenta de las posibilidades y limitantes que cada estrategia le ofrece al maestro.

9 Ibíd.

Historia y matemáticas: dos saberes y alguna relación. Este tipo de investigaciones abordará la matemática y la historia como dos saberes independientes, pero los pondrá en relación desde una ideología, una corriente histórica o un hecho relevante, es decir, aquí la una le servirá a la otra para hacer los análisis y presentar las posibles relaciones que entre una y otra se dieron.

Aritmética y matemática como disciplina escolar. Asumir la matemática y la aritmética como disciplina escolar supone ubicarse en un espacio que le reconoce su producción dentro de la escuela y no fuera de ella; supone pensar que ella ha sido un objeto construido en la propia escuela y para ella misma, que ha producido sus propias prácticas y concepciones; ubicados allí es posible construir una historia de la escuela y darle un lugar más potente a las disciplinas escolares.

Los contenidos matemáticos en los manuales. Este apartado final aborda algunos contenidos específicos de la matemática o aritmética para historiar los modos en que ellos han circulado y las prácticas que se han apropiado a propósito de los mismos; no tienen al manual escolar como su única fuente, ya que también usan la experiencia de aula para hablar desde allí.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Eduaamerica.Inc. (2012). http://www.mathematicsdictionary.com/spanish/vmd/full/a/arithmetic.htm

Saldarriaga, O. 2005 *El oficio del maestro.* Bogotá. Editorial Magisterio.

Souto, X. (2002/12/5) Los manuales escolares y su influencia en la instrucción escolar. *Revista Bibliográfica de Geografía y Ciencias Sociales*. Tomado de http://www.ub.es/geocrit/b3w-414.htm [ISSN 1138-9796]. 1.

Wikipedia: La enciclopedia libre. (2012). http://es.wikipedia.org/wiki/Aritmetica

Wikipedia: La enciclopedia libre. (2012). http://es.wikipedia.org/wiki/Matematicas

Zuluaga, O., Martínez, A., Restrepo, S., Quiceno, H. & Echeverry, A. 1988. *Educación y Pedagogía: Una diferencia necesaria*. Revista Educación y Cultura Nª 14. Pp 11 - 12.

Zuluaga, O., Martínez, A., Restrepo, S., Quiceno, H. & Echeverry, A.. 2003. *Pedagogía y epistemología*. Bogotá. Editorial Magisterio

Zuluaga, O., Martínez, A., Restrepo, S., Quiceno, H., Echeverry, A. & Álvarez, A. 2006. *Foucault, la pedagogía y la educación*. Bogotá Editorial Magisterio.

El ideario del profesor de matemáticas de Básica Primaria en la (re)significación de su práctica pedagógica

Deivis Galván Cabrera[*]

RESUMEN

Con el presente proyecto de investigación pretendo analizar la relación que se genera entre el ideario pedagógico del profesor de Básica Primaria y la (re)significación de su práctica pedagógica. La investigación se enmarca en el paradigma cualitativo, bajo un diseño de estudio de caso(s), puesto que me interesa dilucidar una porción de la realidad, en particular, dónde el ser humano es dialógico y comunicativo, fundador de sentidos y significados (Sánchez, 1998).

Palabras clave: educación matemática, ideario del profesor, práctica pedagógica, (re)significación.

[*] Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: dgalvanc@hotmail.com

EL PROBLEMA

Analizar el actuar en el que los profesores nos involucramos dentro y fuera del aula de clase, para enfrentar nuestra labor como docente, pero sobre todo, la manera como cada uno de nosotros enfrentamos/asumimos estas acciones es lo que me moviliza a realizar el presente trabajo de investigación, en el que pretendo dar cuenta del cómo se entreteje la amalgama de voces que forman el ideario con el cual el docente de matemáticas del nivel de Básica Primaria -que aunque no posee una formación específica en el área- enseña matemáticas y cuál es la posible (re)significación que este puede hacer de su práctica pedagógica.

El interés por este tema se debe, en primer lugar, a los diálogos que se han presentado cuando nos reunimos los profesores del área de matemáticas del municipio de Caucasia, por mesa de trabajo municipal, con el fin de desarrollar colectivamente una exploración conjunta de las experiencias e interpretaciones sobre el trabajo docente del profesor de matemáticas, diálogos en los que se evidencia una variedad de interpretaciones y significados de lo que representan las matemáticas para cada uno de nosotros. En segundo lugar, por la riqueza discursiva que se genera en las disertaciones entre profesores, sobre las apreciaciones e interpretaciones que tenemos en relación con las matemáticas y con la práctica pedagógica, lo cual, considero, me permitirá interpretar y comprender cómo los docentes de matemáticas de Básica Primaria (re)significan su práctica pedagógica, según el contexto sociocultural en que se encuentran.

Con base en lo expuesto, considero necesaria la reflexión sobre el ideario del profesor de matemáticas de Básica Primaria, concibiendo ideario, acorde con Jaramillo (2003), como el entretejido de ideas que se van formando en el transcurso de la vida, ideas que se movilizan según las necesidades y el contexto. Las ideas se constituyen tanto de forma individual, como en las prácticas en comunidad, y son el producto del cómo vemos y entendemos el mundo. Y la reflexión sobre la (re)significación de la práctica pedagógica la asumo desde la perspectiva sociocultural de la educación matemática, que según D'Ambrosio (2006), Radford, D'Amore & Bagni (2006) y Jaramillo (2011), es entendida como el producto de la actividad humana, generada a partir de las interacciones sociales en un tiempo y contexto determinados.

Considerando los argumentos anteriormente expuestos, planteo la siguiente pregunta de investigación ¿Cómo el ideario del profesor de matemáticas de básica primaria (re)significa su práctica pedagógica?

MARCO DE REFERENCIAS

Llinares (1991, 1994, 1996, 2000) en sus trabajos de investigación plantea que la práctica pedagógica del profesor de matemáticas debe ser entendida como una práctica social: *enseñar matemáticas,* comprendida como el conjunto de acciones que realiza el profesor cuando ejecuta las tareas que definen la enseñanza, la cual incluye acciones como asesorías, reuniones de profesores, participación en seminarios, talleres, capacitaciones y demás actividades a las que conlleva la profesión docente. En estas investigaciones se cree que aprender a enseñar matemáticas está fuertemente condicionado por las creencias epistemológicas sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, y sobre el propio proceso de aprender a enseñar; además, se piensa que estos conocimientos se construyen cuando está en proceso de formación, pero ¿cómo se enseña matemáticas, cuando no se cuenta con una preparación formal para ello? Pregunta que me moviliza a reflexionar sobre cuáles son las oportunidades que tienen los docentes de Básica Primaria que no poseen una formación en matemáticas para generar su propio conocimiento práctico personal, el cual les permite comprender las matemáticas, encontrar diversas formas de enseñarlas y las formas de pensar matemáticamente útiles para los estudiantes. Ubicados en el plano de la presente investigación, dicho conocimiento se concibe como uno de los pilares de la (re)significación de la práctica pedagógica de los docentes.

Las investigaciones en educación matemática desde una perspectiva sociocultural, realizadas por D'Ambrosio (2004), Jaramillo (2003) y Cedro (2008), me permiten asumir que el conocimiento práctico personal del profesor hace parte de su ideario pedagógico, el cual es producto de una construcción tanto individual como colectiva; es dinámico y dialéctico. Se genera en la reflexión constante sobre la práctica pedagógica, en los diálogos entre compañeros de trabajo y alumnos, cuando se busca en diferentes fuentes teóricas e investigaciones alternativas de acción en el salón de clase. En la construcción del ideario, el profesor hace una reflexión dialógica entre teoría y práctica; reflexión que según Pérez (2004) es el proceso en que el docente compila datos, describe situaciones y analiza su quehacer, para elaborar teorías que implementará y validará en proyectos y en diálogos con sus colegas, propiciando la constitución de prácticas sociales que (re)significan y dan formas de comprensión propias de su trabajo, que según Monteiro & Méndez (2011) son producidas, validadas, transmitidas y legitimadas por los propios grupos que las realizan.

Según Cedro (2008) la (re)significación de la práctica pedagógica debe ser asumida como el dar un significado propio a dicha práctica. La (re)significación comienza a ser constituida desde los conocimientos adquiridos en la educación inicial[1] que reciben las personas que llegan a hacerse profesores y cuando se inician en la cultura de las matemáticas, hecho que influye en el proceso de aprendizaje y de enseñanza de las matemáticas. Aquí la expresión "cultura de las matemáticas" es entendida en consonancia con D'Ambrosio (2004) como el conjunto de conocimientos, valores, normas de comportamiento y formas de ver el mundo con y desde las matemáticas, de y para unos individuos que viven en un tiempo y espacio determinados. En relación con esta visión de cultura y las particularidades del cómo han llegado a ser profesores de matemáticas, los partícipes de esta investigación le da importancia al análisis del ideario pedagógico de los docentes que les posibilita la (re)significación de su práctica pedagógica, lo que constituye construcciones culturales de las matemáticas en las que se muestra y se fundamenta la identidad propia de cada profesor, según el tiempo y el contexto en que se da su práctica pedagógica.

OBJETIVO DEL PROYECTO

Analizar la relación que se genera entre el ideario pedagógico del profesor de Básica Primaria del municipio de Caucasia y la (re)significación de su práctica pedagógica.

METODOLOGÍA

Según las particularidades de la investigación, el presente estudio se enmarcará desde el paradigma cualitativo, bajo un diseño de estudio de casos, tal como lo propone Yin (2009). Este abordaje me permitirá comprender la construcción de realidades personales y culturales de tres profesores de Básica Primaria que no poseen una formación específica en matemáticas, y posiblemente les permitirá a ellos dar sentido a lo que les ha ocurrido y les está ocurriendo como profesores. El análisis que logre hacer en la investigación me permitirá vislumbrar una porción singular de la realidad, en la que el ser humano es dialógico y comunicativo, fundador de sentidos y significados (Sánchez, 1998). La información producto de la investigación permitirá legitimar las experiencias y la visión (idea) de mundo de los tres profesores partícipes de la investigación, tratando, por mi parte, de comprender cómo han construido su identidad, qué sentido le dan a su profesión, a sus vi-

[1] Para la presente investigación la educación inicial es comprendida como la educación del nivel de básica primaria y básica secundaria

das, qué papel juega la educación matemática en todo ello, como también cuál es el norte que le dan a la práctica pedagógica. Esta información se constituirá en conocimiento cultural que, en gran medida, le dará sentido a las formas como los profesores de Básica Primaria se relacionan con las matemáticas.

Según el enfoque y las posibilidades que me permite el estudio de caso(s), planteo una noción de ser humano acorde con la propuesta por Sánchez (1998) quien concibe al ser humano, como un ser en el mundo, un ser espacio-temporal, situado en el mundo con otros, que existe como experiencia vivida, que participa en la comunidad y en la cultura. El ser humano es un ser no acabado, es un ser que habla para pronunciar las cosas, denominarlas y (re)significarlas; es un ser que con la palabra llena de significados al mundo. Basado en este mismo autor, planteo que los supuestos gnoseológicos, referidos a las concepciones de sujeto y objeto, y a su relación con el proceso de conocimiento, se concretan, en cómo el ideario de los profesores de matemáticas de Básica Primaria (re)significa su práctica pedagógica.

Para la producción de la información realizaré el estudio de tres casos -profesores de matemáticas del nivel de básica primaria que no poseen una formación específica en el área-; profesores en ejercicio, vinculados al sector oficial de la educación pública en la Institución Educativa Marco Fidel Suárez del municipio de Caucasia. Para ello les solicitaré y acompañaré en la construcción de sus autobiografías, las cuales serán complementadas con entrevistas semi-estructuradas, observación no participante y el registro en un diario de campo que llevarán los profesores, anotando en él las reflexiones sobre su práctica pedagógica. Este proceso se realizará durante dos meses, trabajando en dos sesiones por semana, con una duración de dos horas por sesión. Como instrumentos que posibilitarán un mayor y mejor registro de la información haré uso de videograbaciones, grabaciones de audio y un diario anecdótico que llevaré como investigador.

La información que se obtenga como producto de las acciones planeadas para el trabajo de campo será estudiada a través de bitácoras de análisis, de la cual se identificarán categorías emergentes que, a su vez, se constituirán en unidades de análisis. Cada una de las unidades de análisis será interpretada a la luz de los datos producidos, los referentes teóricos y mis reflexiones como investigador.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cedro, W. (2008). O motivo e a atividade de aprendizagem do professor de matemática: uma perspectiva histórica-cultural. Sâo Paulo: Universidad de Sâo Paulo.

D'Ambrosio, U. (2004). Un enfoque transdiscplinar à educaçào e á história da matemática. En M. A. Vigginia, & M. Carvalho, Educaçào matemática: pesquisa em mivimento (págs. 13-29). Sao Paulo, Brasil: Cortez.

D'Ambrosio, U. (2006). Ethnomatematics. Link between traditions and modernity. Sao Paulo, Brasil: Sense Publishers.

Jaramillo, D. (2003). (Re)constituição do ideário de futuros professores de Matemática num contexto de investigação sobre a prática pedagógica. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, Facultade de Educação.

__________ (2011). La educación matemática en una perspectiva sociocultural: tensiones, utopías, futuros posibles. Revista Educación y Pedagogía, 23(59), 13-36. Colombia.

Llinares, S. (1991). La formación del profesor de matemáticas. Sevilla, España: Universidad de Sevilla.

__________ (1994). El profesor de Matemática. Conocimiento base para la enseñanza y el desarrollo profesional. En L. Santaló, La enseñanza de las Matemáticas en la Educación Intermedia (págs. 249-295). Madrid: Rialp.

__________ (1996). Contextos y aprender a enseñar matemáticas. En J. Giménez, S. Llinares, & V. Sánchez, El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. (págs. 13-36). Granada: Comares.

__________ (2000). Comprendiendo la práctica del profesor de matemática. En J. P. Ponte, & L. Serrazina, Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia (págs. 109-134). Lisboa, Portugal: Secçao de Educaçao Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciencias de Educaçao.

Monteiro, A., & Mendes, J. (2011). Prácticas sociales y organización curricular. Educación y pedagogía, 23(59). Colombia.

Perez, G. (2004). Prática reflexiva do professor de matemática. En M. A. Vigginia Bicudo, & M. Carlho Borba, Educaçào Matemática: Pesquisa em movimento (págs. 251-263). Sào Paulo: Cortez.

Radford, L., D'Amore, B., & Bagni, G. T. (2006). Obstaculos epistemológicos y perspectiva socio-cultural de la matemática. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 29B (1), 12-39.

Sánchez, S. (1998). Fundamentos para la investigación educativa: Presupuestos epistemológicos que orientan la investigación. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Yin, R. (2009). Case study research: Desing and methods (4ta ed., Vol. 5). London, New Delhi: SAGE Publications.

Análisis didáctico de las prácticas docentes usadas en la enseñanza del álgebra en grado octavo

Dayelly Gamboa Valencia[*]
María Salomé Bermeo Galíndez[**]
Paola Andrea Zapata Ramos[***]

RESUMEN

La presente ponencia discute los principales resultados del proyecto de investigación "*Representación dominante del álgebra en las prácticas docentes y dispositivos didácticos diseñados por los profesores de grado octavo*", realizado por las autoras en las ciudades de Cali y Palmira, Valle del Cauca, como requisito para optar por el título profesional de licenciadas en Matemáticas. El principal propósito del estudio fue analizar la forma en que los discursos sobre el álgebra que circulan en los documentos curriculares colombianos y textos escolares influyen y determinan las prácticas que los docentes usan para enseñar álgebra en grado octavo. Las observaciones de las clases y las entrevistas permiten evidenciar la forma que toman dichos discursos en las prácticas de los seis docentes participantes.

Palabras clave: Álgebra, análisis didáctico, Educación Secundaria, análisis y reflexión sobre la enseñanza, papel del profesor.

[*] Universidad Santiago de Cali. Dirección electrónica: daye883@hotmail.com
[**] Universidad Santiago de Cali. Dirección electrónica: masabega@hotmail.com
[***] Universidad Santiago de Cali. Dirección electrónica: paz.0904@hotmail.com

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Estudios realizados en la perspectiva de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) han evidenciado en distintos sistemas educativos una fuerte tendencia a vincular el álgebra exclusivamente con la aritmética (Bolea, 2003; Valoyes, 2008) de tal forma que sus símbolos representan números. Dicha tendencia se caracteriza fundamentalmente por la ausencia de parámetros en la actividad matemática escolar, el uso de expresiones algebraicas como simples instrumentos de cálculo y el énfasis en la enseñanza de reglas para la manipulación de estas expresiones (Gascón, 1999) y en su memorización.

En relación con la forma como el álgebra se propone en los documentos curriculares en el sistema educativo colombiano, Valoyes (2008) afirma que a pesar de la relación que se plantea en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) entre el álgebra y lo variacional, la cual no necesariamente se restringe a lo numérico, la mayor parte de las referencias en los documentos considerados apuntan a señalar estos vínculos, como por ejemplo, cuando se propone su introducción a partir de la generalización del "trabajo aritmético". Es a partir de estos elementos que podemos resaltar "un rasgo dominante del modelo epistemológico de referencia (MER) del álgebra escolar en los documentos curriculares colombianos es su presentación como una generalización de la aritmética" (p. 180). El principal problema con esta representación dominante del álgebra es que limita las posibilidades de proponer otras vías de acceso al conocimiento algebraico, constituyendo un obstáculo para la algebrización de las matemáticas escolares (Bolea, Bosch & Gascón, 2001) y las posibilidades de usar el álgebra como una técnica matemática que permite a los estudiantes el estudio de diferentes tipos de problemas. Desde la TAD se plantea, además, que la representación dominante del saber matemático en un sistema educativo constituye una de las principales restricciones sobre las prácticas docentes (Bolea, Bosch & Gascón, 2001) en la medida en que condiciona las decisiones didácticas de los profesores acerca de la forma de organizar dicho saber matemático, qué y cómo evaluarlo. La principal consecuencia de esta restricción es la forma que adquiere el saber matemático finalmente aprendido por los estudiantes.

Teniendo en cuenta los anteriores referentes, la pregunta de investigación que se abordó en esta estudio fue: *¿De qué forma se manifiesta la representación institucional del álgebra dominante en el sistema educativo colombiano en las prácticas docentes, dispositivos didácticos e instrumentos de evaluación que diseñan los profesores de grado octavo en seis instituciones educativas de las ciudades de Cali y Palmira, Valle del Cauca?*

MARCO CONCEPTUAL

El álgebra escolar como una técnica matemática. De acuerdo con el MER el álgebra se considera un instrumento o técnica matemática con la cual es posible llevar a cabo el proceso de estudio de una organización matemática (Chevallard, 1999). Bosch (1994, c. p. Valoyes, 2008) afirma que el álgebra desde esta perspectiva se caracteriza por su *valencia instrumental* la cual hace referencia a su condición de herramienta para llevar el trabajo matemático y que posibilita llevar a cabo la modelación de problemas matemáticos y no matemáticos de distinta naturaleza. En términos generales, el álgebra se caracteriza por apelar a la escritura, es decir, por constituir un registro que permite la manipulación y representación de objetos y relaciones matemáticas a través de símbolos y particularmente letras. El uso del álgebra como técnica en el proceso de solución de problemas genera la modelación algebraica en la que los parámetros juegan un papel fundamental en la comprensión y resolución de dichos problemas.

Momentos del proceso de estudio. En el contexto de la TAD, el proceso a través del cual se llevan a cabo las actividades matemáticas institucionales –denominado proceso de estudio– comprende seis momentos (Chevallard, 1999): e*l momento del primer encuentro* en el cual los estudiantes se enfrentan por primera vez a los elementos problema de las organizaciones matemáticas estudiadas; el *momento exploratorio* durante el cual los estudiantes exploran y ensayan distintas maneras de resolver los problemas propuestos; en el *momento del trabajo de la técnica,* los estudiantes encuentran y dominan una técnica para resolver los problemas propuestos; el momento en el cual se indaga y se construye el discurso que describe, justifica y explica las técnicas y los problemas es denominado *momento tecnológico-teórico, y* durante los *momentos de institucionalización y evaluación* se explicitan los elementos conceptuales que el docente espera sean aprendidos por los estudiantes y que serán evaluados en aras de identificar la organización matemática finalmente aprendida por los estudiantes. Es importante mencionar que los momentos no necesariamente se presentan en el orden propuesto. Este es solo un constructo que permite analizar la dinámica interna del salón de clase.

METODOLOGÍA

Método. La perspectiva teórica de la TAD propone iniciar el análisis de los fenómenos didáctico-matemáticos que surgen durante los procesos institucionales de comunicación del saber matemático con el análisis de la actividad matemática en un momento histórico determinado. Coherente con dicho planteamiento, en el presente estudio se utilizó la siguiente metodología fundamentada en la propuesta por Bosch y Gascón (2004, c. p. Valoyes, 2008): 1) Construcción de un MER del álgebra escolar. En este estudio, asumimos el MER propuesto por Bolea (2003) que modela el álgebra como una técnica matemática útil para la solución y estudio de problemas matemáticos tal y como se describió anteriormente. 2) Contrastación del MER del álgebra con las prácticas, dispositivos didácticos y discursos utilizados por los docentes para enseñar álgebra. 3) Categorización de los resultados encontrados y análisis de los datos.

Contexto del estudio y participantes. Tres instituciones educativas públicas de la ciudad de Cali y 2 de la ciudad de Palmira fueron seleccionadas para participar en el estudio. Esta selección se realizó teniendo en cuenta la clasificación de las instituciones en el examen del ICFES (desempeño medio o inferior) y el estrato socioeconómico de la población atendida (1, 2 y 3). Dos de las cinco instituciones seleccionadas ofrecen formación en el área técnica industrial y las tres restantes en el área comercial. Seis docentes (2 mujeres, 4 hombres) de matemáticas aceptaron participar en el estudio. Los profesores tenían diferentes años de experiencia enseñando álgebra en grado octavo y eran matemáticos o licenciados en Matemáticas.

Instrumentos y recolección de la información. Se utilizaron tres instrumentos para la recolección de la información. En primer lugar, se diseñó una entrevista semi-estructurada para caracterizar las concepciones e ideas de los docentes participantes acerca de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra. En segundo lugar, se filmaron cuatro clases por cada docente en un período de dos meses. Con el fin de identificar los diferentes momentos del proceso de estudio emergentes en las clases de los docentes, se utilizó una malla de análisis tomada del trabajo de Barbé, Bosch, Espinosa y Gascón (2005). Finalmente, se aplicó un cuestionario cuyo principal objetivo fue identificar fortalezas y debilidades en la formación algebraica de los docentes.

Tabla 1. *Instrumento de observación de clase*

Episodio	Momento Didáctico	Actor Principal	Objetos Matemáticos	Actividades Didácticas Observadas.

ANÁLISIS DE LOS DATOS

Los vídeos de las clases observadas y las entrevistas de los docentes fueron transcritos y analizados en aras de encontrar coincidencias y diferencias. En particular, se diseñó un instrumento para clasificar y categorizar la información recolectada tal y como se muestra en la tabla 2.

Tabla 2. *Clasificación de la información*

Institución:		
Docente:		
Número de clase:		
Organización matemática introducida:		
Momentos didácticos	*Preguntas*	*Observaciones*
Primer encuentro	¿El docente utiliza problemas para introducir la organización matemática?	
	¿Qué tipo de problemas propone el docente para introducir la organización matemática?	
	¿Cuáles son las características de los problemas propuestos por el docente?	
Exploratorio	¿Qué tipo de oportunidades propone el docente para que los estudiantes resuelvan los problemas planteados?	
	¿Qué estrategias utiliza el docente para conciliar las diferentes técnicas utilizadas por el estudiante?	
	¿El docente propone a sus estudiantes aplicar diferentes tipos de técnicas para resolver un problema matemático planteado en clase?	
	¿Cómo el docente propicia espacios para que los estudiantes resuelvan los problemas planteados?	
	¿Los estudiantes manifiestan el deseo de buscar otras técnicas que llevan a la resolución de los problemas planteados por el docente?	
Trabajo de la tècnica	¿Qué tipo de técnicas utiliza el docente para resolver los problemas planteados?	
	¿Cómo el docente enfrenta las técnicas inusuales o novedosas que los estudiantes proponen para la resolución de problemas?	
Tecnológico teórico	¿De qué manera el docente propicia actividades para que los estudiantes se apropien de las técnicas presentadas?	
	¿De que forma el docente propicia espacios para que los estudiantes construyan, describan, justifiquen y expliquen los problemas y las técnicas propuestas?	
Institucional	¿De qué forma el docente organiza la caracterización de la organización matemática explorada en clase?	
	¿Qué dispositivos didácticos utiliza el docente para propiciar la apropiación de los principales elementos de la organización matemática estudiada? O por parte de los estudiantes?	

Momentos didácticos	*Preguntas*	*Observaciones*
Evaluación	¿Qué metodología utiliza el docente para evaluar la aplicación de las técnicas (om) aprendidas por los estudiantes?	
	¿Cómo están diseñados los instrumentos de evaluación del docente?	
Opciones	¿Cuál es el momento con mayor énfasis en el proceso de estudio propuesto por el docente?	
	¿Cuál es el papel de los problemas en el proceso de estudio propuesto por el docente?	
	¿Cuál es el principal modelo de organización de los estudiantes durante el proceso de estudio?	

Instrumentos similares fueron diseñados para categorizar la información obtenida en las entrevistas y en los cuestionarios. Luego la información se contrastó con el MER del álgebra como técnica matemática y con el modelo de los momentos del proceso de estudio. Los principales resultados se presentan a continuación.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos evidencian la ausencia de los momentos del primer encuentro exploratorio, y del trabajo de la técnica en las clases observadas. En términos generales, los docentes no proponen a los estudiantes problemas a partir de los cuales sea posible explorar distintas maneras de resolverlos y en los cuales el álgebra pueda ser utilizada como una técnica matemática. Los problemas aparecen al final de la clase y son usados como aplicaciones de los conceptos y procedimientos vistos en clase. El momento predominante en las clases observadas es el tecnológico-teórico en el cual los docentes participantes presentan reglas para manipular expresiones algebraicas. En pocas palabras, las prácticas que los docentes participantes utilizan para enseñar álgebra privilegian un modelo de esta disciplina como un sistema simbólico.

Como resultado de lo anterior, los parámetros son introducidos de tal forma que no permiten identificar tipos de problemas; este es un indicador de la forma como el carácter prealgebraico (Gascón, 1999) de las matemáticas del sistema educativo colombiano se evidencia en las prácticas de los docentes participantes. Se produce así "una atomización del proceso de enseñanza de las matemáticas" (Ibíd., p. 79), en donde los problemas son propuestos de manera aislada, sin ninguna conexión entre su estructura algebraica y las técnicas que permitan resolverlos. Igualmente, se evidencia una fuerte tendencia entre los docentes a presentar las expresiones algebraicas como instrumentos de cálculo numérico.

La observación de las prácticas de los docentes participantes evidencia, además, un modelo de enseñanza predominante, en el cual prevalece la actividad del docente y que consiste fundamentalmente en presentar reglas de cálculo algebraico. Este modelo de clase tipo magistral no propicia las condiciones para que los estudiantes participen activamente en la construcción de conocimiento matemático, y en particular en la exploración, estudio y solución de problemas, aspectos que son esenciales para el aprendizaje del uso del álgebra como una técnica matemática. En general, los docentes presentan y ejecutan una única técnica para resolver diferentes tipos de problema, sin invitar al estudiante a desarrollar o explorar otras técnicas que le permitan resolver el problema. Coherente con estas prácticas, al ser preguntados sobre qué es el álgebra, 33 % de los docentes definen el álgebra como una rama de las matemáticas que estudia las estructuras algebraicas, 33% la consideran como la combinación de números y letras, el 17% la define como un área abstracta que desarrolla el pensamiento y el 17% restante la considera como una rama de las matemáticas que estudia modelos analíticos y funcionales. Estos discursos coinciden con los discursos que sobre el álgebra circulan tanto en textos escolares de amplia difusión en el sistema educativo colombiano, así como en los documentos curriculares.

En conclusión, las prácticas de los docentes observados así como los discursos que utilizan para justificar dichas prácticas evidencian la persistencia del MER del álgebra escolar, tal y como se propone en los documentos curriculares y en los textos escolares, es decir, como una "aritmética generalizada" (Gascón, 1999), situación que nos permite plantear el interrogante sobre ¿cómo es posible contribuir a la transformación de dichas prácticas y discurso? Esta es la línea que creemos debería seguirse en futuros trabajos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barbe, J., Bosch, M., Espinoza., & Gascón, J. (2005). Didactics restrictions on the teachers' practice: The case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics, 59* (3), 235-268.

Bolea, P. (2003). *Los procesos de algebrización de las Organizaciones Matemáticas Escolares.* Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza; Zaragoza, España.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad, *Recherches en Didactique des Mathématique des Mathématiques,* 21(3), Madrid.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19* (2). 221-266.

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación Matemática, 11(1),* 77-88.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares.* Santafé de Bogotá: MEN.

Valoyes, L. (2008). *Análisis didáctico de la alegorización de una organización matemática en el sistema educativo colombiano: el caso de la semejanza en el plano.* Tesis de maestría no publicada, Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Red de trabajo colaborativo de profesores de telesecundaria en México: Un modelo de formación docente para la conformación de identidad profesional

Erika García Torres[*]

RESUMEN

La investigación que se comunica está situada entre la práctica del profesor y su identidad. Se pone de manifiesto el carácter situado de la práctica en instituciones de referencia y contextos específicos, así como el reconocimiento del profesor como un profesional reflexivo. Al proponer un espacio de formación en red bajo la dinámica de trabajo colaborativo, se postula que la reflexión en torno a la problematización del saber matemático contribuirá a la constitución de una identidad profesional –fuente de sentido y organización de la práctica–. Los participantes de la red son profesores de Telesecundaria en México, modalidad de la Educación Secundaria que opera en zonas urbanas o rurales marginadas, bajo el modelo de un solo profesor por grado.

Palabras clave: Formación de profesores, telesecundaria, práctica, identidad, trabajo colaborativo.

[*] Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Cinvestav-IPN, México. Dirección electrónica: egarciat@cinvestav.mx

INTRODUCCIÓN

El campo de la investigación en formación de profesores de matemáticas considera tres aspectos esenciales en el desarrollo del profesor: el conocimiento, la práctica y la identidad (Ponte, 2011). Diversas investigaciones han centrado su atención en cuestiones de conocimiento matemático del profesor, por ejemplo, qué conocimientos y habilidades necesita el profesor para realizar su práctica. Otras investigaciones caracterizan las prácticas del profesor y determinan qué elementos las constituyen y posibilitan su desarrollo; y un menor, pero reciente número de estudios aborda aspectos de identidad del profesor, cómo es como persona y cómo se constituye como profesor en relación con sus comunidades.

De esta descripción general de tres categorías reconocidas como fundamentales en el desarrollo del profesor devienen discusiones sobre sus especificaciones y relaciones entre ellas. Por ejemplo, en relación con el conocimiento, ¿en qué se debe poner más atención, en los conceptos, en los procedimientos o en el establecimiento de conexiones y razonamiento? En relación con la práctica, ¿bajo qué criterios se determinan y cómo se desarrollan "buenas" prácticas docentes? Estas interrogantes se fundamentan en la complejidad del campo de investigación en torno al aprendizaje de las matemáticas en el proceso de formación de profesores (Potari, 2012), y las respuestas que se van formulando contribuyen al desarrollo teórico y metodológico del mismo.

PROBLEMÁTICA

Es bien sabido que el profesor de matemáticas es un actor protagónico de los procesos educativos en el ámbito escolar. Even & Ball (2009) ponen como premisa de partida que los profesores son la clave de oportunidad de aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes, es decir, los esfuerzos encaminados a la mejora del aprendizaje de los estudiantes deben considerar al profesor como punto de partida.

Estudios realizados por Lezama (2005) muestran que existen factores tanto de carácter matemático como extramatemático, que determinan la práctica del profesor, y evidencian cómo esta es definitiva para el logro de los alumnos. El profesor, como polo del sistema didáctico con mayor responsabilidad, debe tomar el control de múltiples variables enmarcando su práctica en el contexto sociocultural en el que se desarrolla. Esto plantea la reflexión de no olvidar el carácter situado de la práctica, analizar las estructuras que soportan su funcionamiento en espacios socioculturales específicos, atender demandas ideológicas y educativas locales, proveer a los estudiantes elementos de uso funcional de conocimiento en su entorno.

La actividad humana de la labor docente inmersa en un espacio de naturaleza complejo reclama una formación continua que responda a sus necesidades, pero de manera que provea de elementos que se puedan adaptar a su situación de aula.

En general, se ha visto que los programas de formación se desarrollan bajo la concepción de comunicar conocimientos provenientes de teorías educativas, y se espera que los profesores los asimilen e integren a su práctica casi de manera inmediata y transparente.

También, en el discurso en estos espacios de formación, y en general en el discurso educativo actual, se considera al profesor como una figura homogénea y no se reconoce que existen diferencias de orden social, cultural e institucional que matizan a los grupos de profesores. Así, se llama la atención a que dentro de esta homogeneidad discursiva convive una heterogeneidad. Un análisis de la práctica del profesor y de la realidad en la que se debe poner en funcionamiento la intervención de programas de formación implica reconocer esas diferencias y acercarse a la realidad del profesor desde de su perspectiva, a su identidad como profesor (Akkerman & Meijer, 2011), para explicar desde ahí cómo se configura su práctica.

La problemática de reconocer e incorporar elementos en espacios de formación de profesores, sobre el carácter situado de la práctica normado por factores institucionales, y la heterogeneidad de los profesores, se hace evidente en una modalidad de la Educación Secundaria en México: la telesecundaria. Surge en la década de los sesenta, en un momento en el cual la mayor preocupación era ampliar la cobertura en zonas urbanas o rurales marginadas en las que no se podía instaurar una secundaria bajo el modelo tradicional. Así, la telesecundaria vino a solucionar en gran medida ese problema de cobertura, haciendo uso de las tecnologías de la información y comunicación, como la televisión y la red satelital. Sin embargo, a pesar de que se presenta como un programa pionero y ejemplar (Torres y Tenti, 2000), son pocos los procesos de investigación que proporcionan evidencia empírica respecto de sus logros y avances, así como de los procesos de enseñanza y aprendizaje que tienen lugar en sus aulas.

El modelo de operación actual consiste en el uso de una red satelital con vídeos de apoyo para todas las asignaturas y el uso de libros de texto, así como un profesor por grado escolar que asume el rol de orientador general de todas las áreas de conocimiento, que puede también desempeñar labores administrativas. Los profesores de telesecundaria tienen formaciones iniciales diversas, del área de la educación general o pedagogía, o áreas más específicas como de enseñanza media en alguna asignatura. Quienes ingresan a la modalidad realizan un curso básico para familiarizarse con el modelo operativo, pero existe poca reflexión sobre los procesos de incorporación a nuevos campos de conocimiento. Es decir, ¿cómo un profesor que se formó en un área de conocimiento específico puede conformarse como profesor general que también imparta otras asignaturas? ¿Qué estrategias desarrolla para asumirse como profesor general que domine todos los campos del saber para lograr un manejo transversal del conocimiento?

De modo que si se piensa que la enseñanza de las matemáticas es una actividad compleja incluso siendo formados para ello, ¿qué sucederá con profesores con formaciones iniciales diferenciadas? Aunado a estas interrogantes, se pone de manifiesto que las oportunidades de formación continua en telesecundaria se enfocan en cursos que se realizan antes o al final del ciclo escolar, y tienen la función de actualizar en ciertos tópicos, más que de formar a los profesores en campos específicos del saber. Así, la responsabilidad del aprendizaje recae en el profesor y en las estrategias autónomas que pueda desarrollar para generar aprendizajes en los estudiantes considerando sus contextos y realidades.

Esta investigación pretende atender esta problemática, generando para ello un espacio de trabajo en el que los profesores no se sientan aislados, y en el que se compartan formas de construir conocimiento matemático, y se reconozcan producciones en relación con el uso del conocimiento en contextos específicos. La pregunta de investigación es: ¿cómo se construye la identidad del profesor de telesecundaria en matemáticas, cuando forma parte de una red de trabajo colaborativo?

ELEMENTOS TEÓRICOS

La investigación se interesa por la práctica del profesor, desde una mirada sistémica que proporciona la teoría socioepistemológica. En ella se problematiza la construcción del conocimiento matemático trasladando el foco de atención de los objetos a las prácticas que les dan significación; por tanto, estudia y reconoce los usos del conocimiento matemático en situaciones específicas. La práctica del profesor se estudia conjuntamente con la categoría discurso matemático escolar (DME) pues este refleja una ideología a través de la forma de presentar y tratar los objetos matemáticos en el aula (qué debe estudiarse, cómo, en qué orden).

Se parte de la hipótesis de que para construir una identidad en torno a las matemáticas, es necesario reflexionar sobre el DME y problematizarlo, esto es, preguntarse por su origen y naturaleza, y tomar decisiones de reorganizarlo en términos de situaciones de aprendizaje considerando la realidad y las necesidades de los estudiantes.

Por tanto, como se pretende incidir intencionalmente en la construcción de la identidad del profesor de telesecundaria con respecto a las matemáticas, coincidimos con Giménez (2009) en que la identidad se forma, mantiene y se modifica con la interacción. Permite comprender, reconocer y explicar las acciones, por lo que también, a través de su análisis en prácticas reflexivas, permite identificar cambios en las prácticas docente (Walshaw, 2010).

METODOLOGÍA

De acuerdo con Adler et al. (2005) se han generado estudios puntuales en el área de formación de profesores, apuntando la necesidad de desarrollar estudios a gran escala y de carácter longitudinal, pues si bien los estudios puntuales permiten generar hipótesis específicas, un estudio a través del tiempo permitirá verificar dichas hipótesis en otros contextos.

Así, se implementa como metodología la conformación de una red de profesores de telesecundaria a distancia, en la que se fomente el trabajo colaborativo entre profesores, con investigadores e investigaciones en formación (Glazer & Hannafin, 2006). La *colaboración* es un término que hace referencia a intercambios en diversas direcciones, para hacer frente a la *cooperación,* referida a que son los investigadores quienes presentan diseños para que los profesores apliquen en sus aulas.

El sustento de esta red estará en promover una reflexión sobre el saber matemático manifestado en los libros de texto y materiales que utilizan, así como su reorganización en nuevas situaciones de aprendizaje. En la red, cada profesor aportará su experiencia y la referencia de la realidad de su aula y se reconocerán como válidas las argumentaciones y construcciones que emerjan en torno al uso situado del conocimiento matemático.

CONSIDERACIONES FINALES

El estado actual de la investigación es la conformación de la red. Se ha invitado a participar a profesores de diversos Estados del país, contando actualmente con 43 profesores interesados. Se han realizado cuestionarios exploratorios y una vez que se ponga en funcionamiento la red, se caracterizará el actual estatus de la identidad profesional a través de la reconstrucción de las trayectorias de vida de los profesores.

La calidad de las interacciones determinará en gran medida el funcionamiento de la red, así como las actividades que los profesores propongan trabajar según sus intereses y necesidades. Las condiciones de producción de nuevas prácticas entre los profesores no emergerán de manera inmediata y transparente, irán a la par de la construcción de su identidad. Los profesores deberán percibir la pertinencia de modificar o incorporar en sus escenarios de trabajo situaciones de aprendizaje que reformulen el DME, pero que, a su vez, respondan a sus problemáticas específicas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F. & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, *60* (3), 359-381.

Akkerman, S. & Meijer, P. (2011). A dialogical approach to conceptualizing teacher identity. *Teaching and Teacher Education, 27*, 308-319.

Even, R., & Ball, D.L. (Eds.). (2009). *The professional Education and Development of teachers of Mathematics. The 15th ICMI Study.* New York: Springer.

Giménez, G. (2009). Identidades sociales. México: Intersecciones.

Glazer, E. M. & Hannafin, M. J. (2006). The collaborative apprenticeship model: Situated professional development within school settings. *Teaching and Teacher Education 22* (2). 179-193. doi: 10.1016/j.tate.2005.09.004

Lezama, J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 8* (3), 339–362.

Ponte, J. P. (2011). Teachers' knowledge, practice, and identity: essential aspects of teachers' learning. *Journal of Mathematics Teacher Education 14* (6), 413-417. doi: 10.1007/s10857-011-9195-7

Potari, D. (2012). The complexity of mathematics teaching and learning in mathematics teacher education and research. *Journal of Mathematics Teacher Education 15* (2), 97-101. doi: 10.1007/s10857-012-9213-4

Torres, R. y Tenti, E. (2000). Políticas educativas y equidad en México. La experiencia de la educación comunitaria, la Telesecundaria y los programas compensatorios, en CONAFE. *Equidad y calidad en la educación básica. La experiencia del CONAFE y la Telesecundaria en México,* México, CONAFE, 175-272.

Walshaw, M. (2010). Mathematics pedagogical change: rethinking identity and reflective practice. *Journal of Mathematics Teacher Education 13* (6), 487-497. doi: 10.1007/s10857-010-9163-7

La evaluación en la clase de álgebra: resistencias y posicionamientos. Un estudio en la Educación Básica colombiana

Johanna Montejo Rozo[*]
Gloria García O.[**]

RESUMEN

Esta comunicación reporta un avance de la Tesis de Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. Por sus características de avance, describimos de manera general el problema, antecedentes de investigación y referentes de análisis. De igual forma, la metodología y algunos avances sobre análisis de episodios de clases de álgebra en la Educación Básica colombiana, con el fin de identificar el papel de los juicios valorativos, puesto que a partir de estos se pueden generar posicionamientos o clasificaciones de los estudiantes dentro del aula de clase, de tal manera que quienes no reciben la aprobación del profesor generan respuestas emocionales de temor e inseguridad, es decir, de resistencia hacia el álgebra.

Palabras clave: Evaluación, Álgebra.

[*] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: johanna_mr25@hotmail.com.
[**] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: gloriag@pedagogica.edu.co.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

La evaluación/valoración del aprendizaje en la clase de matemáticas se establece con base en referentes de validación desde los cuales se determina lo que cuenta como válido en la actuación matemática (Planas, 2003). En la mayoría de los casos la evaluación en la clase se realiza a través de instrumentos escritos, de lápiz y papel (o pruebas), en los que solo existe una única respuesta correcta. El centro de la preocupación en este tipo de evaluación es posicionar cuantitativamente en qué lugar del conjunto de compañeros se encuentra un estudiante –entre los primeros o los últimos, por ejemplo–. La calificación, además de constituirse en indicador cuantitativo del desempeño del estudiante, se traduce en un juicio valorativo con referencia, la mayoría de las veces, a cualidades escolares que la institución establece como normales.

Estos juicios valorativos acreditan si un estudiante posee el conocimiento, la competencia o las cualidades establecidas por la institución para validar lo que se considera como normal. Según Godino (2009) lo normal "implícita o explícitamente puede ser determinado por la propia institución o bien, por el profesor" (p. 60) y también puede estar sujeto a leyes orgánicas, costumbres, hábitos, o tradiciones que determinan patrones de comportamiento social de los estudiantes dentro del aula de matemáticas (p. 59).

Diversas investigaciones han señalado que en las prácticas evaluativas, la definición de los objetos de evaluación como las competencias o los conocimientos no es el único referente para evaluar objetivamente la actuación de los estudiantes. Debido a la naturaleza interpretativa de la evaluación (Morgan & Watson, 2002), los profesores integran a sus juicios valorativos, percepciones, sentimientos o cuestiones relacionadas con el contexto cultural, la raza, la etnia y hasta el contexto económico de los estudiantes. De otra parte, se encuentran investigaciones que desde la perspectiva social, estudian cómo ciertos dominios matemáticos, por ejemplo el álgebra escolar, tienden a actuar como agentes de reproducción social. Atweh, Cooper & Boulton-Lewis (1996) realizaron un estudio en cuatro aulas de noveno grado, localizadas en diferentes contextos económicos de los Estados Unidos y encontraron estratificaciones y diferencias; tanto en la enseñanza como en la evaluación, los profesores construyen ciertas imágenes de las necesidades de los estudiantes (relacionadas con los contextos socioeconómicos), hecho que determina enfoques de enseñanza. De esta manera, muchos profesores entrevistados consideraron que "los temas formales se desarrollan con estudiantes que poseen antecedentes socioeconómicos altos y con aspiraciones de ingresar a la universidad, mientras que a los estudiantes de bajo estatus se les enseñan unas matemáticas con un lenguaje cotidiano, poco formalizado, se les proporcionan reglas sin justificación" (Atweh, Cooper & Boulton-Lewis, 1996: p. 35). Esta investigación también señala que en las aulas se evidencia el fenómeno de separación de los estudiantes, pues se **clasifican y se posicionan** según sus capacidades: el grupo con "mayores capacidades" se encuentra aparte del grupo que reporta cierta dificultad. Los profesores efectúan la clasificación teniendo en cuenta lo que consideran como actuación matemática válida.

De otro lado, es claro que para muchos estudiantes el aprendizaje del álgebra en grado octavo es "como la puerta oficial de entrada a las matemáticas". Estos pareceres, la mayoría de las veces, están referenciados por los compañeros, familiares y amigos para quienes el aprendizaje del álgebra estuvo asociado con sentimientos de temor, miedo, o inseguridad. "Muchos (estudiantes) tienen sentimientos de temor y miedo hacia el álgebra" (Palarea, 1999, p. 11), y desde allí se **oficializan las dificultades con las matemáticas.** Es así como encontramos dificultades de los estudiantes asociadas a respuestas afectivas y emocionales, inclusive antes de estudiar formalmente el álgebra en la Educación Básica. Las siguientes apreciaciones de Angélica y Juliana, dos estudiantes de grado 7° y 8° de una institución escolar privada de Bogotá, nos permiten evidenciar estos hechos:

> Me han dicho que es muy difícil, que revuelve letras y números y que por eso casi no se entiende. También me han dicho que lo más complicado es la factorización (Angélica, Diario de campo, 2012).
>
> No me gusta el álgebra [...] Me parece complicada porque no le entiendo al profesor [...](Juliana, Diario de campo, 2012).

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Acerca de las resistencias de los estudiantes en el álgebra escolar, Pavanelo (2004), en el estudio que realiza con estudiantes adultos cuando solucionan problemas propios del álgebra, encuentra que los estudiantes tienden a mostrar resistencia al álgebra en el momento en que se propone una nueva situación o problema no conocido, puesto que los problemas los enfrentan a nuevas situaciones rompiendo con las soluciones o esquemas vigentes, y que el proceso de adaptación de los estudiantes a resolver estos problemas es "difícil y doloroso" (Pavanelo, 2004). Palarea (1999), establece que muchas de las dificultades de los estudiantes en álgebra se deben a actitudes afectivas y emocionales que desencadenan en su aprendizaje sentimientos de disgusto o de angustia, debido al hecho de no poder resolver satisfactoriamente las tareas propuestas por el profesor. Desde luego, en los estudiantes se generan reacciones de inseguridad y temor.

Acerca de la evaluación: (a) Los aportes de la investigación de Morgan y Watson (2002) señalan que en la evaluación en el aula de matemáticas intervienen percepciones de los profesores sobre cuestiones relacionadas con el contexto cultural, de raza, de etnia y hasta el contexto económico de los estudiantes; o el sesgo, que ocurre cuando los profesores pueden subestimar los logros de los estudiantes identificados con necesidades educativas especiales (dependiendo de su etnia, raza o rendimiento). (b) En los aportes de la investigación de Remesal (1999), se plantea que la evaluación no solo permite obtener información sobre las capacidades de los estudiantes, sino que también impacta su propia imagen personal. Para Remesal (1999) el estudiante que recibe la aprobación del profesor eleva su autoestima y, a su vez, se motiva por continuar su trayectoria de aprendizaje; por el contrario, el estudiante que no cuenta con la aprobación del profesor baja su autoestima y tiende a auto-excluirse.

METODOLOGÍA

Utilizamos el enfoque cualitativo con el fin de describir y caracterizar la relación entre juicios valorativos y las resistencias y posicionamientos de los estudiantes en el aula. Para este estudio, una clase de álgebra de octavo grado en una institución escolar de carácter privado de la ciudad de Bogotá fue videograbada y transcrita. También entrevistamos a la profesora de la clase y a algunos estudiantes, y tuvimos acceso a la tarea propuesta y a algunas respuestas. Para las categorías apriorísticas partimos de los elementos teóricos de base, descritos en los apartados precedentes, de los cuales inferimos que es útil considerar como unidad de análisis los ciclos de interacción que ocurren entre profesor-estudiante. El ciclo de interacción en sí mismo atiende y estructura la relación entre juicios de evaluación, resistencias y posicionamientos, y a su vez, permite establecer los referentes que tiene el profesor para determinar las actuaciones matemáticas válidas de los estudiantes, teniendo en cuenta lo que cuenta como válido cognitivamente en la actuación matemática y las características personales del estudiante o comportamientos disciplinarios normales esperados.

ANÁLISIS DE DATOS

En el momento de la grabación de la clase de álgebra, los estudiantes se encontraban trabajando sobre conceptos básicos de polinomios, tales como grado, términos y variables. La actividad de la clase consistió en resolver por grupos de dos estudiantes, 3 ejercicios relacionados con el reconocimiento de estos conceptos. En la clase precedente se habían explicado y ejemplificado previamente estas nociones. La tarea propuesta a los estudiantes fue la siguiente:

1. Escribe un polinomio que tenga 2 variables, 4 términos y que sea de sexto grado.
2. Escribe un polinomio de quinto grado, que tenga una sola variable y que sea de tres términos.
3. Escribe un polinomio que esté ordenado de manera descendente, de una sola variable y que sea de séptimo grado.

Figura 1. Ejercicios propuestos en la clase

El sistema de validación que se establece para este trabajo es la resolución adecuada de cada uno de los ejercicios propuestos, es decir, que cada estudiante haya escrito adecuadamente el polinomio atendiendo a las condiciones exigidas en cada ejercicio.

Durante la clase, la profesora pasa por los puestos de los estudiantes corrigiendo e interaccionando con cada uno de los grupos con el fin de resolver sus dudas. El juicio de valoración en algunos casos es “muy bien”, pero se encuentra relacionado con la resolución que ella considera adecuada en cada ejercicio. A medida que los grupos reciben públicamente la aprobación, se llenan de confianza y seguridad personal (Remesal, 1999). Esta confianza se manifiesta en la participación de los estudiantes puesto que preguntan a la profesora en voz alta; por el contrario, los grupos que no reciben la aprobación, difícilmente preguntan sus dudas. Una cuestión que se observa son las respuestas emocionales de inseguridad, miedo y temor (Palarea, 1999) a través de expresiones como “¿cómo así?”. En otros grupos, expresiones como “No entiendo” evidencian la sorpresa de los estudiantes ante el juicio e inmediatamente el abandono de la solución a la tarea. Se observa el posicionamiento de los estudiantes a medida que se emiten los juicios valorativos, puesto que quienes reciben la aprobación de la profesora se consolidan en una posición de ventaja respecto a sus compañeros, por la seguridad y motivación, mientras que quienes no reciben tal aprobación se encuentran en desventaja por su poca participación y sus respuestas emocionales (miedo, inseguridad, abandono a la tarea). La entrevista a la profesora nos permite determinar que sus referentes para evaluar a los estudiantes no son percepciones relacionadas con la etnia, raza o condición social (Morgan & Watson, 2002), pero el comportamiento de los estudiantes dentro de la clase sí se constituye en referente, puesto que si no es adecuado, la calificación numérica puede verse afectada.

A MODO DE CONCLUSIÓN

A partir de este avance hemos logrado evidenciar la relación entre los juicios valorativos y ciertas reacciones de los estudiantes hacia el álgebra. Tal como encontramos en el estudio piloto que realizamos en el año 2011 denominado "Las relaciones entre evaluación y el orden social en la clase de matemáticas; un estudio en una clase de álgebra" (García & Montejo, 2011), hemos observado la existencia de un orden social dentro de la clase (Planas, 2003), en el cual los estudiantes que reciben la aprobación se llenan de confianza y seguridad, mientras que aquellos que no reciben la aprobación se encuentran en desventaja, debido a que generan respuestas emocionales como inseguridad, miedo, temor o abandono de la tarea propuesta, lo que muestra su resistencia.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Atweh, B., Cooper, T., & Boulton - Lewis, G. (1996). Direcciones futuras para el estudio sobre la enseñanza - aprendizaje del álgebra. Lecciones del pasado. UNO - *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 9, 33-42.

García, G., & Montejo, J. (2011). Las relaciones entre evaluación y el orden social en la clase de matemáticas: Un estudio en la clase de álgebra. Voces y Silencios: *Revista Latinoamericana de Educación,* 2(2), 128-138.

Godino, J. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de las Matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las ciencias,* 27(1), 59-76.

Morgan, C., & Watson, A. (2002). The Interpretative Nature of Teachers' Assessment of Students' Mathematics: Issues for Equity. *Journal for Research in Mathematics Education,* 33(2), 78-110.

Palarea, M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. Números. *Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 40, 3-28.

Pavanelo, E. (2004). *Resistencias y contribuciones en relación a una propuesta de trabajo para la enseñanza del álgebra elemental, con alumnos de educación de jóvenes y adultos.* Universidad Estatal Paulista, Río Claro, Brasil.

Planas, N., & Raig, I. (2003). El contrato social en el aula: episodios en torno a la noción de status. Pubicação do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática. GEPEM., 41.

Remesal, A. (1997-1999). *Los problemas en la evaluación del aprendizaje matemático en la educación obligatoria. Perspectivas de profesores y alumnos.* Universidad de Barcelona, España.

Una propuesta de secuencia de actividades en un colegio inclusivo implementando la resolución de problemas con grado sexto

Yenny Rocío Gaviria Fuentes[*]

RESUMEN

En el documento se presenta una experiencia de aula en el espacio de formación de Práctica Intensiva en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas en el primer semestre del año 2011 en el Colegio OEA IED en la ciudad de Bogotá con estudiantes con limitación visual incluidos en un aula regular. Las temáticas trabajadas fueron: estructura aditiva, estructura multiplicativa y fracciones. Se utilizó como metodología la resolución de problemas con dos cursos de grado sexto.

** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: yengavi@hotmail.es.

¿CON QUE FIN DESARROLLAR UNA SECUENCIA DE ACTIVIDADES PARA GRADO SEXTO?

La secuencia didáctica ha sido diseñada con el fin de tener en cuenta la vida cotidiana de los estudiantes, ya que ellos pueden llevar a cabo las actividades propuestas con mayor facilidad si se proponen en un contexto familiar para ellos viendo practicidad en los saberes adquiridos.

Con base en un diagnóstico realizado por la Institución, se observaron dificultades en el algoritmo de la estructura multiplicativa y operación de fracciones desarrolladas por los estudiantes. Iniciando la práctica se propuso una guía para establecer las habilidades en desarrollo de situaciones problema para adición y multiplicación, y se encontraron conflictos en la interpretación y análisis de los enunciados; los algoritmos fueron desarrollados correctamente, por lo cual se realizó una serie de actividades donde se visualizara el trabajo efectuado y la evolución de los procesos de estudiantes con respecto a los temas trabajados a lo largo de la práctica. Para ello nos apoyamos en recursos didácticos manipulativos tangibles que favorezcan el aprendizaje de los estudiantes (vidente e invidente), tales como fichas con las cuales trabajaran orden posicional y regletas de cursineare para observar las fracciones y sus operaciones. También fueron usadas guías de trabajo (para el estudiante invidente adaptada a Braille).

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Para la realización de las actividades se tuvieron en cuenta referentes teóricos tales como Vergnaud (1996), Maza (1991) y Godino (2003); los autores presentan diferentes propuestas para la enseñanza de valor posicional, la estructura aditiva (como suma reiterada, y la importancia del juego como método didáctico), estructura multiplicativa, división como proceso inverso a la multiplicación y visto desde varias perspectivas tales como resta reiterada, multiplicación, tanteo, entre otras. También se observaron las fracciones y las cuatro operaciones básicas con regletas de Cursineare.

La secuencia inició por hacer un recorrido histórico para observar los diferentes sistemas de numeración y sus características de formación y escritura, con el fin de establecer las bases en las cuales se construyó nuestro sistema arábigo: los sistemas de numeración maya, egipcio, romano, griego y babilónico.

Se tuvo en cuenta a Vergnaud (1996) para el desarrollo de problemas de tipo aditivo, tomándolo como referencia para la elaboración de situaciones problema en las cuales identificarán que datos proporcionaba la situación y cuales debía de hallar. Así como las operaciones aritméticas de suma y resta se construyen inicialmente para abreviar los recuentos o procesos de medida, la multiplicación y la división entera son medios de abreviar los procesos de sumar (o restar) repetidamente una misma cantidad o repartir equitativamente una cantidad entre cierto número de seres u objetos.

Según Vergnaud (2003) los problemas de tipo multiplicativo son considerados como una relación cuaternaria entre cuatro cantidades; por ello no está bien visto representarla en la escritura habitual, ya que esta hace referencia a una relación ternaria, es decir, a x b = c. Menciona que existen varios tipos de problemas en la estructura multiplicativa por lo cual tuvo en cuenta el isomorfismo de medidas, el cual consiste en poner en juego cuatro cantidades.

Otro tipo de problema es el producto de medidas, donde se requiere del uso de una regla de tres, permitiendo distinguir dos clases de problemas: el primero son los de tipo multiplicativo, donde se encuentra la medida-producto cuando se conocen las cantidades de los elementos. La segunda se refiere a problemas de división donde se encuentra una de las medidas elementales cuando se conoce la otra, y la medida producto.

METODOLOGÍA

Las actividades fueron desarrolladas mediante la resolución de problemas; para cada temática trabajada se tendrán dos tipos de materiales (Godino, 1998):

Material manipulativos tangible: este pone en juego la percepción táctil; entre ellos están las piedras u objetos, reglas, compas, hoja blanca, etc. Es importante resaltar que los materiales tangibles también desempeñan funciones simbólicas, como por ejemplo, un niño puede usar un conjunto de piedrecillas para representar los números naturales.

Materiales gráfico-textuales-verbales: son aquellos en los que participan la percepción visual y/o auditiva; entre estos están las gráficas, los símbolos, las tablas, etc. Es importante resaltar que este segundo tipo de objetos-gráficos, palabras, textos y símbolos matemáticos también pueden manipularse, pues podemos actuar sobre ellos y estos sirven como medio de expresión de las técnicas y conceptos matemáticos, y al mismo tiempo son instrumentos del trabajo matemático.

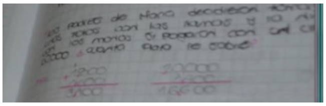


Gráfico 1: ejemplo de problema y solución de un estudiante.

Teniendo en cuenta que estamos trabajando en un aula inclusiva se debe evaluar la pertinencia del material utilizado en las actividades; en la mayoría de las actividades se utilizaron materiales manipulativos tangibles ya que esto les permitió establecer conjeturas y posible solución a las problemáticas puestas.

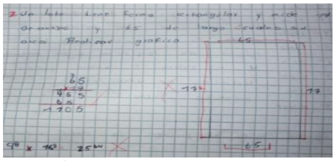


Gráfico 2: ilustración desarrollo por producto de medidas

La secuencia de actividades inició contextualizando a los estudiantes en una granja, mediante la solución de situaciones problema, los ítems incluidos en la guía a desarrollar iban enfocados a ver la adición como: dos medidas se componen para dar lugar a una medida, una transformación opera sobre una medida para dar lugar a una medida y, por último, ver la sustracción como proceso que consiste en añadir lo que nos falta a la cifra que debemos sustraer (Vergnaud, 1991).

Para la estructura multiplicativa la actividad consistió en tres zonas, en cada una de estas se ubicaba una vasija; en ellas había situaciones de diferentes tipos (interpretación de la multiplicación como producto de medidas, como plano cartesiano y desarrollo del algoritmo); en la primera zona se observan problemas en un solo espacio de medida en el cual se quiere encontrar una de las cantidades; en la segunda se abordan problemas de isomorfismo de medidas en los cuales se encuentran cuatro medidas puestas en juego, y en la tercera zona se determinan productos de medidas en las cuales los estudiantes deberán representar las estrategias utilizadas para dar respuesta a cada problema. Para observar la división tomaremos problemas análogos a los planteados en multiplicación donde se establecen variables didácticas en cada problema, que lleven a los estudiantes al uso de la división como estrategia de solución.

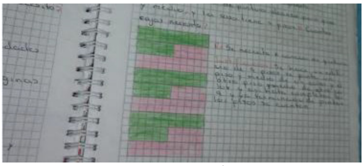


Gráfico 3: estrategias de solución problemas de división

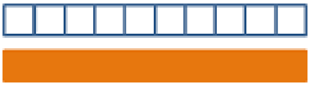


Gráfico 4: ejemplificación uso de regletas

Las fracciones fueron trabajadas desde el manejo de regletas donde el punto de referencia (unidad) es la regleta de color naranja; las demás serán particiones de esta, como se muestra a continuación:

Las regletas de Cursineare las consideramos como un material manipulativo tangible, que permite realizar operaciones tales como suma, resta multiplicación y división. Teniendo una noción de fracción, procederemos a su manejo como algoritmo mediante el desarrollo de ejercicios.

Para observar el proceso de los estudiantes fue necesario llevar un registro de las actividades y revisión de las mismas en los cuadernos de los estudiantes. Aunque la mayoría de actividades fueron realizadas en grupo todos debían llevar su propio seguimiento en los cuadernos. Para hacer la revisión del proceso del estudiante invidente y otro de baja visión fue necesario el apoyo de los tiflólogos del Colegio, los cuales de ser necesario transcribían trabajos de braille a tinta; también se buscó integrar a los estudiantes a una participación constante y poner en discusión los puntos de vista, teniendo como fin que los argumentos utilizados fueran de carácter matemático usando argumentos lógicos.

CONCLUSIONES

- La secuencia de actividades tuvo gran influencia en la perspectiva de la matemática en los estudiantes ya que reconocieron la practicidad de la matemática en su vida cotidiana y en el transcurso de la historia.
- La metodología empleada para desarrollar cada una de las actividades tuvo en cuenta las diferentes formas de trabajo, tanto individual como grupal, donde se observó una integración del estudiante invidente y de baja visión a los grupos de trabajo.

En cuanto al análisis de procedimientos y estrategias que emplearon los estudiantes para la solución de situaciones, es de resaltar la dificultad interpretativa al dar lectura a las situaciones, ya que una vez identificados los datos el estudiante podía operar. El algoritmo en adición y multiplicación fue desarrollado de manera correcta. Con respecto a la operación con fracciones a los estudiantes se les dificulta realizar el algoritmo de la adición, ya que puede representarlo con las regletas pero no analíticamente.

- Haciendo referencia al rol docente, se evidencio el papel de mediador entre el saber y el estudiante, mediante actividades inclusivas teniendo en cuenta material manipulativo que sirvieran para todos los estudiantes (videntes e invidentes) y de ser necesario a adaptación de guías.
- Los materiales propuestos por el docente tienen que ser integradores, por lo cual parte de las estrategias utilizadas para la solución fue la adaptación de guías o si había algún tipo de dificultad con la adaptación se realizaron grupos de trabajo en los cuales se ponían a consideración los problemas y posterior a esto se llevaba un registro (por parte de cada estudiante) de los acuerdos establecidos.

El marco teórico permitió realizar el diseño de la secuencia, además de buscar estrategias para hacer el planteamiento de las situaciones problema que fueran comprensibles para los estudiantes. Tambien contribuyo la búsqueda de posibles actividades y materiales que fueran inclusivos sin necesariamente estar catalogados de esta manera, ya que el objetivo consistía en ser manipulativo y guardara parámetros donde sus características estuvieran bien definidas, por ejemplo las regletas de Cursineare ya que estas pueden ser manejadas por cada estudiante y guarda características de tamaño, el color no fue utilizado ya que para el estudiante invidente no representa relevancia este dato debido a que no podía ser verificado por él.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Godino, J. y Batanero (1989). Funciones Semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. IX Seminario de Investigación en educación Matemática. Osnabruek: Alemania.

Godino, J. y Batanero, C. (2003). Sistemas numéricos y su didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada

Maza C. (1991). Enseñanza de la multiplicación y división. Síntesis. Madrid: España.

MEN (1998). Lineamientos Curriculares de Matemática

Vernaug (1986). El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de la matemática en la escuela primaria. México: Trillas.

Un estudio de los números irracionales en los libros usados en el grado octavo en Florencia, Caquetá.

Albeiro Giraldo Ospina[*]
Alirio Quesada Salazar[**]

RESUMEN

En este reporte de investigación se presenta un análisis del tratamiento didáctico dado a los números irracionales en libros de texto de matemáticas del grado octavo, a partir de dos dimensiones de análisis: **Dimensión conceptual** y **Dimensión didáctico-cognitiva**, con sus respectivas **categorías** de análisis e **indicadores**.

Palabras clave: tratamiento didáctico, libros de texto, número irracional, enseñanza, aprendizaje.

[*] Docente catedrático de Matemáticas Universidad de la Amazonia, y Matemáticas y Física Institución Educativa Jorge Eliécer Gaitán, Florencia, Caquetá. Integrante del grupo de investigación Desarrollo Institucional Integrado, línea de investigación Competencias Matemáticas, maestría en Ciencias de la Educación con énfasis en Didáctica de las Matemáticas. Dirección electrónica: Albeiro,albeiro70@gmail.com

[**] Docente de Matemáticas, Universidad de la Amazonia, Florencia, Caquetá. Dirección electrónica: matematicas@uniamazonia.edu.co

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La comunidad de educadores matemáticos reconoce que el libro de texto ha tenido una importante función en la enseñanza y, en particular, de las matemáticas; de acuerdo con Chevallard (1991) en él se ve reflejada la transposición del saber académico al saber enseñar. Parafraseando a Schubring (1987), por encima de la normativa manifiesta en los currículos institucionales, están los libros de texto, los cuales determinan la práctica real de la enseñanza, situándose así entre los componentes más importantes del sistema educativo sin perder su vigencia, aun dados los rápidos cambios de carácter tecnológicos que caracterizan el mundo contemporáneo. El libro de texto es un apoyo para el docente, como voz didáctica en presencia y/o ausencia de él; y para el estudiante, en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, impone una distribución y una jerarquía de los conocimientos, y contribuye a forjar los andamios intelectuales tanto de los maestros como de los estudiantes. Además, su análisis permite determinar cómo es el tratamiento didáctico de una noción o concepto matemático, sus posibles causas y consecuencias en la enseñanza.

En particular, optamos por considerar los números irracionales en los libros de texto debido a que estos hacen parte del currículo escolar de matemáticas en Colombia, como puede observarse, por ejemplo, en los Estándares básicos de competencias en matemáticas; además, como afirman investigadores de la educación matemática, el objeto matemático número irracional, en sí mismo, es un concepto complejo y abstracto, ya que históricamente "ha causado problemas ontológicos y su comprensión implica vencer obstáculos epistemológicos"[1] (Sirotic, 2004, p.41). En efecto, estos obstáculos son: la dificultad en aceptar que dos magnitudes (dos segmentos de recta) pueden ser inconmensurables (es decir que no admiten una unidad de medida común), y que el conjunto de los números racionales, aunque por todas partes denso, no cubre todos los puntos en un intervalo dado: hay que considerar, también, la riqueza de la infinidad de puntos irracionales (Fischbein, Jehiam & Cohen 1995); obstáculos que por supuesto, conllevan múltiples dificultades, tanto para la enseñanza de los números irracionales por parte del docente, como para el aprendizaje por parte de los estudiantes. Fischbein et al. indican que los conceptos de número racional, irracional y real no están claramente definidos en la mente de los estudiantes y que, específicamente, el concepto de número irracional está superficialmente relacionado con pocos ejemplos como π, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, lo cual muestra que su tratamiento en la matemática escolar

1 Esta cita textual corresponde a una traducción realizada por los autores de esta investigación.

no es lo suficientemente rico, tal que posibilite un mejor entendimiento en el estudiante que vaya más allá de la mera habilidad de reconocerlos y que permita abrir el camino hacia la conceptualización del número real.

De acuerdo con todo lo expuesto anteriormente, nos preguntamos:

¿Cuál es el tratamiento didáctico que se da a los números irracionales en libros de texto de matemáticas del grado octavo más utilizados en las instituciones educativas (tanto públicas como privadas), de la ciudad de Florencia (Caquetá, Colombia)?

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Inicialmente se hizo énfasis en el análisis de contenido (Bardín, 1986), como aquel que se centra en las ideas que se expresan y reflejan en un libro de texto, teniendo en cuenta su carácter didáctico, donde su fin no es ser estrictamente descriptivo, sino llegar a ser inferencial; por ello es uno de los métodos empleados frecuentemente para la investigación en educación matemática, para el análisis de libro de texto. Luego, y teniendo en cuenta que la presentación del análisis de contenido de un libro de texto debe estar acompañada por los focos en que dicho análisis se centra y los criterios que van a utilizarse, se adoptó la perspectiva teórica de Sierra, Gonzáles & López (1999), quienes en su trabajo de investigación identificaron y describieron estructuradamente los diversos significados de las matemáticas escolares en torno a un concepto matemático presente en los libros de texto de matemáticas, a partir de tres dimensiones de análisis: la dimensión de análisis conceptual, análisis didáctico-cognitivo y análisis fenomenológico didáctico. Las dos primeras dimensiones fueron tomadas para el análisis de contenido con el que se efectuó esta investigación, y complementada con aportes de investigadores como Barros de Melo (2001), Fischbein, Jehiam, Ruth & Cohen (1995), Zaskis & Sirotic (2004), entre otros.

METODOLOGÍA

Nuestra investigación se enmarcó en el campo de la investigación de la Didáctica de la Matemática, en la línea del análisis de libros de texto, de naturaleza cualitativa con características de orden descriptivo-interpretativo. Tomando en consideración que el contexto de nuestra investigación es el educativo (el ambiente escolar), nos ubicamos en dos espacios: uno de ellos, los conceptos a ser enseñados, y el otro, las herramientas de apoyo a los procesos de aprendizaje de dichos conceptos.

En cuanto a los conceptos, seleccionamos los números irracionales y, en relación con las herramientas de apoyo, los textos escolares de matemáticas de octavo grado de circulación nacional y utilizados en las instituciones educativas (tanto públicas como privadas), de Florencia (Caquetá, Colombia). Para la selección de dichos textos recurrimos a la identificación de cuáles eran los textos más utilizados por los docentes para la enseñanza y aprendizaje de los números irracionales en dicho grado. Para tal efecto, se realizó una encuesta a 43 docentes de las 14 instituciones educativas oficiales y de las 2 únicas instituciones privadas del área urbana del municipio de Florencia.

Una vez seleccionados los textos, adelantamos un pormenorizado análisis de los mismos que incluye la unidad básica de análisis: **"Tratamiento didáctico dado a los números irracionales en libros de texto de matemáticas del grado octavo"** y las dos dimensiones de análisis: **Dimensión conceptual y dimensión didáctico-cognitiva**, con sus respectivas categorías de análisis: introducción del concepto, definición de número irracional, conceptos u objetos matemáticos asociados, representaciones, situaciones que dan sentido al concepto, concepciones históricas, propiedades de los números irracionales, lugar que ocupa el tratamiento del concepto y presencia de la historia de los números irracionales en los libros de texto (para la dimensión conceptual); enfoque curricular, objetivos e intenciones del autor y obstáculos de origen didáctico (para la dimensión didáctico-cognitivo). Seguidamente se elaboró un modelo de rejilla donde se organizó la información de cada texto, y se registró en matrices de análisis la información relacionada con las dos dimensiones. Luego, a partir de la información obtenida se elaboraron tablas, con el propósito de organizar y presentar los datos, y así, facilitar el respectivo análisis.

CONCLUSIONES

El análisis efectuado a los libros de texto permitió hacer, en relación con cada una de las categorías estudiadas, numerosas consideraciones entre las que destacamos las siguientes:

(1) En cuanto a la introducción del concepto: el concepto previo al que más recurren los libros de texto es la expresión decimal de un número racional, dado que esta representación que caracteriza el número racional se niega, bien sea para definir el número irracional, o para caracterizarlo; (2) en relación con los textos que acceden al concepto de número irracional por medio de unos pocos ejemplos de números irracionales genéricos como: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π y 0,101001000100001000000…, no dan la oportunidad de abrir la mente del lector, por lo menos a una gran variedad de ejemplos o a un infinito incontable

de números irracionales; (3) respecto a la definición de número irracional, la mayoría de los textos analizados acuden a una (o a ambas) de las siguientes definiciones: (a) Un número irracional es un número que no puede expresarse como un cociente de dos enteros, con el divisor diferente de cero; (b) Un número irracional es un número cuya parte decimal no es periódica y tiene un número infinito de dígitos. En lo que concierne a la primera, algunos textos la presentan incompleta, pues omiten la condición necesaria de que el divisor tiene que ser diferente de cero; y en la segunda, utilizan la característica representacional decimal del número irracional, como definición; (4) en lo que se refiere a los sistemas de representación, ninguno de los textos hace evidente la traducción que se debe dar entre las representaciones simbólica y geométrica de los números irracionales para una completa compresión de estos; además, la mayoría utilizan la representación verbal escrita, y la representación decimal del número irracional para definirlo, identificarlo y representarlo; (5) se detecta que desde el año 1999, los autores de textos (en particular de los textos [5] y [8][2]), incluyen en el tratamiento del número irracional las concepciones históricas: C_1: Tratamiento aritmético de los números irracionales, C_3 : El numero irracional como magnitud continua, C_4 : Expresiones algebraicas y analíticas del número irracional, y C_5 : El número irracional como objeto matemático, como una manera de mostrar la evolución histórica que ha tenido el concepto de número irracional (el proceso que ha seguido en su formación y en su desarrollo), y (6) En más de la mitad de los libros de textos analizados, los autores centran sus objetivos e intenciones en el conocimiento matemático, llevando a la idea de una matemática ya terminada, que el estudiante debe memorizar y practicar, en contraste con los autores de los otros textos, que tienden a mostrarla como una ciencia falible, en constante construcción.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barros de Melo, S. (2001). Comprensión del concepto de número irracional. Una radiografía del problema y uso de la historia como una alternativa de superación: Enfoques complementarios. En: Rev. Ciencias Matemáticas (Rev. Virtual: http://www.dict.uh.cu/Revistas/CM2000_2001/CM01192c.doc). Vol. 19. No. 2 Universidad de La Habana, Cuba.

Bardín, L. (1986). El análisis de contenido. España: Akal.

[2] Los textos [5] y [8] a que se hace referencia son respectivamente: CAMARGO, L., GARCÍA, G., SERRANO, C & SAMPER, C. (1999). *Alfa 8.* Editorial Norma; SAMPER DE CAICEDO, C. (2006). Conexiones matemáticas. Editorial Norma.

Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Argentina: Aique.

Fischbein, E., Jehiam, Ruth & Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in High-School students and prospective teachers. En: Educational Studies in Mathematics. No. 29. pp. 29-44.

Schubring, G. (1987). Sobre la metodología de análisis de libros de texto históricos: Lacroix como autor de libros de texto. En: Mathesis. No. 8. pp. 273-298.

Sierra, M., González, M & López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (COU): 1940-1951. En: Revista Enseñanza de las Ciencias. Vol. 17. No. 3. pp. 463-476.

Sirotic, N. (2004). Prospective Secondary Mathematics Teachers Understanding of irrationality. Tesis de maestría. Simon Fraser University. Canadá.

Zaskis, R & Sirotic, N. (2004). Making sense of irrational numbers: focusing on representation. Proceedings of 28th International Conference for Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, Bergen, Norway, pp. 497-505.

La generalización de patrones desde una perspectiva semiótico-cultural

John Gómez Triana *
Rodolfo Vergel Causado **

RESUMEN

En esta ponencia se presenta un avance de la tesis de maestría "El pensamiento algebraico desde una perspectiva semiótico-cultural. Un trabajo con sucesiones de números reales" que se viene desarrollando en la Maestría en Docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Se presenta el análisis hecho a uno de los grupos objeto de la investigación utilizando como marco de referencia el enfoque semiótico-cultural propuesto por Radford (2008, 2009, 2010) sobre el pensamiento algebraico. El objetivo es mostrar cómo está presente la tipología del pensamiento algebraico, desarrollada por este autor, en el trabajo de generalización de patrones realizado por un grupo de estudiantes de décimo grado de la educación escolar colombiana.

Palabras clave: pensamiento algebraico, semiótica, generalización de patrones.

* Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: johngomezt@gmail.com
** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: rodolfovergel@gmail.com

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

En los últimos años en varias investigaciones en educación matemática se ha presentado una fuerte tendencia hacia los enfoques socioculturales del aprendizaje. Esto implica que actualmente gran parte de la comunidad de educadores matemáticos está reconociendo la influencia que tiene el contexto social e histórico en el que está inmerso un estudiante en la manera como aprende matemáticas. Un ejemplo de esto lo constituyen los trabajos enfocados en pensamiento algebraico desde una perspectiva semiótico-cultural en los que se busca caracterizar el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes que aún no conocen y, por ende, no manipulan el lenguaje alfanumérico propio del álgebra. El objetivo principal es mostrar que "la manipulación de los símbolos es solo una pequeña parte de lo que el álgebra es en realidad" (Mason, 1990, citado en Radford, 2010), es decir, el pensamiento algebraico va mucho más allá del uso de las letras como medio de representación de los objetos algebraicos.

En este contexto, y teniendo en cuenta que en el álgebra el lenguaje alfanumérico no constituye el único medio semiótico para representar los objetos algebraicos, nos preguntamos: ¿cuáles son los recursos semióticos movilizados por los estudiantes cuando se enfrentan a la generalización de patrones en un contexto de sucesiones de números reales? Esta pregunta surge en el marco de un trabajo de investigación de la Maestría en Docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. El trabajo tiene como objetivo principal mostrar evidencias de que cuando los estudiantes se enfrentan a la generalización de patrones en un contexto de sucesiones de números reales, movilizan una serie de recursos semióticos diferentes a la representación simbólica perteneciente al lenguaje alfanumérico propio del álgebra. En otras palabras, se pretende llamar la atención sobre la importancia de ampliar y reconocer diferentes recursos semióticos que son utilizados por los estudiantes para explicar la generalización de una sucesión determinada. La importancia de tal reconocimiento radica en el hecho de que el único medio semiótico de manifestación del pensamiento algebraico no es el lenguaje alfanumérico.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

La presente ponencia está inmersa en un marco de referencia conceptual basado en la concepción de álgebra y pensamiento algebraico desde el enfoque semiótico-cultural propuesto por Radford (2008, 2009, 2010). En este enfoque se abordan planteamientos teóricos sobre una mirada no mentalista del pensamiento, se amplía la idea de signo como medio de representación de los objetos algebraicos y se desarrolla una tipología de formas del pensamiento algebraico. Tal tipología se presenta a continuación y será la herramienta de análisis de los datos presentados en el presente escrito.

En el contexto de la generalización de patrones (Radford, 2010) se propone una tipología de formas de pensamiento algebraico:

El pensamiento algebraico factual. Aquí la indeterminación queda implícita en palabras y gestos, y el ritmo constituye la sustancia de la semiótica en los estudiantes en un proceso llamado fórmulas en acción.

El pensamiento algebraico contextual. Aquí la indeterminación se convierte en un objeto explícito del discurso. Los gestos y ritmos son remplazados por deícticos lingüísticos, adverbios, etc.

El pensamiento algebraico simbólico. Aquí las fórmulas en lugar de ser un dispositivo de resumen de cálculos aparecen como narraciones vividas; son íconos que ofrecen una especie de descripción espacial de la figura y acciones que se llevarán a cabo.

METODOLOGÍA

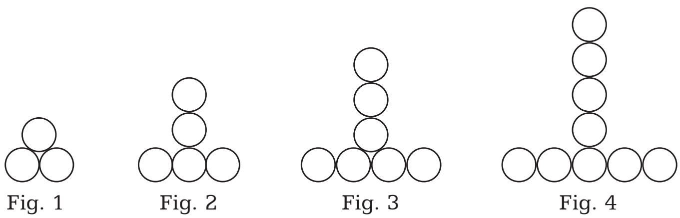


Figura 1

Como ya se mencionó anteriormente, el trabajo presentado en la presente ponencia corresponde a un avance de una tesis de maestría que se viene realizando con un grupo de estudiantes de grado décimo de un colegio público de la ciudad de Bogotá. Una de las actividades tenía que ver con el proceso de generalización de la secuencia mostrada en la figura 1. Los estudiantes trabajan en grupos de 3, se captura en grabaciones de vídeo el proceso de solución de los mismos. Posteriormente se le solicita a cada uno de los grupos que explique la forma de proceder y esta explicación también es grabada. En este reporte presenta el análisis realizado al proceso de solución de uno de los grupos.

ANÁLISIS DE DATOS

Como se mencionó anteriormente, los datos analizados aquí corresponden al proceso de generalización realizado por uno de los grupos objeto de investigación. El trabajo de los estudiantes giró en torno a resolver las siguientes cuestiones.

Dada secuencia presentada en la figura 1:

1. Dibujar la figura 5 y la figura 6
2. ¿Cuantos círculos habrá en la figura10?, ¿Y cuántos en la figura 100?
3. Escribir un mensaje a un estudiante de otra clase en el que se indique la manera de averiguar el número de círculos de cualquier figura.
4. Escribir una fórmula algebraica para el número de círculos en la figura

Los estudiantes no presentaron problema para encontrar las figuras 5 y 6. Inician el conteo del número de círculos observando la regularidad evidenciada en el las figuras 1, 2, 3 y 4. En la siguiente transcripción se puede evidenciar un ejemplo de cómo uno de los grupos solucionó la actividad.

Estudiante: En la figura 1 habían [sic] 3, habían [sic] dos por debajo y uno por encima. En la figura 2 habían [sic] 3 por debajo y dos por encima (Ver figura 2). Entonces en esto nos fijamos, abajo iba ascendiendo; abajo iba un número más y arriba iba el número que era [refiriéndose al número de la figura]. En la figura 5, seis debajo y cinco encima y en la figura 6, siete debajo y seis hacia arriba. (Ver figura 3)

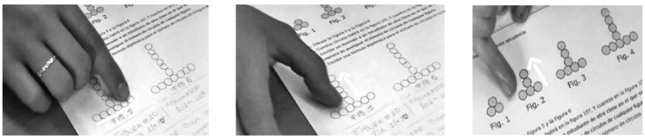


Figura 2

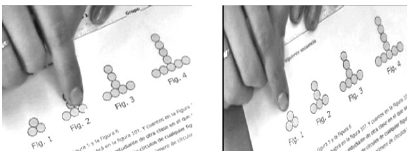


Figura 3

Los estudiantes pueden determinar el número de círculos de las figuras 5 y 6 observando el patrón en las anteriores figuras de la secuencia dada.

Al explicar el proceso, los estudiantes evidencian lo que Radford (2008, 2010) llama pensamiento algebraico factual, ya que la indeterminación y el patrón de generalización quedan implícitos en las palabras y en los gestos, como por ejemplo, el movimiento de las manos para indicar cuántos círculos deben ir en la fila horizontal y cuántos deben ir en la fila vertical. Además, como se puede evidenciar en la transcripción presentada, los estudiantes logran identificar que el número de círculos de la fila vertical corresponde al número de la figura, y que la cantidad de círculos de la fila horizontal corresponde a uno más que el número de la figura. Lo anterior es un ejemplo de lo que Radford (2010) llama fórmula en acción; esto quiere decir que la fórmula existe ($n + n + 1$) pero no se manifiesta a través de las letras; la fórmula se puede evidenciar a través del discurso de los estudiantes y de los gestos y movimientos realizados por los mismos al momento de explicar el proceso seguido. Lo importante es reconocer que esto es un estado inicial del pensamiento algebraico, así no esté presente el lenguaje alfanumérico propio del álgebra.

Ahora, para determinar el número de círculos que deben tener las figura 10 y 100, el grupo partió del patrón de generalización que había identificado anteriormente y de esta manera llegó a la conclusión que la figura 10 debía tener 11 círculos en la fila horizontal y 10 círculos en la fila vertical. Análogamente, determinó que la figura 100 debía tener 101 círculos en la fila horizontal y 100 en la fila vertical: Estudiante: En la figura 100 deberían (sic) haber 101 y hacia arriba 10.

Posteriormente, para el punto número 3 en el que el grupo debía explicarle a un estudiante de otra clase cómo calcular el número de círculos de cualquier figura, se encontró lo siguiente:

Estudiante 1: Si en la figura 1 hay un círculo arriba y el doble abajo, en la figura 2 hay dos arriba y 3 abajo, en la 3 son tres círculos arriba y cuatro abajo. Depende el número de arriba se le suma uno a los círculos de abajo. Entonces si, por ejemplo, en la figura 4 hay cuatro hacia arriba ascendería uno abajo, entonces sería cinco.

Estudiante 2: Si queremos que hallara el número del 50 [de la figura 50] entonces serían 51 uno abajo y 50 hacia arriba. Ya con esa explicación.

En esta explicación ofrecida por el grupo, se evidencia cómo las palabras "hacia arriba" y "abajo" cobran una gran importancia al momento de comunicar la manera en la que se puede encontrar la cantidad de círculos de cualquier figura. Este hecho podría catalogarse en la tipología del pensamiento algebraico propuesta por Radford (2008, 2010) llamada pensamiento algebraico contextual. Si bien los gestos no desaparecen, el énfasis está en los deícticos lingüísticos "hacia arriba" y "abajo", y la indeterminación se convierte en parte del discurso.

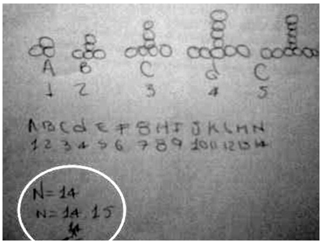


Figura 4

Por último, en el punto correspondiente a escribir una fórmula algebraica para encontrar la cantidad de círculos de la figura n, este grupo utilizó el llamado orden lexicográfico (ver figura 4) al ordenar las letras del alfabeto desde la A hasta la N utilizando los números naturales. De esta manera los estudiantes asumieron que el valor de n era 14 ya que es el lugar que ocupa esa letra en el orden establecido previamente. Partiendo de esta premisa el grupo determinó que en la figura n tendría que haber 14 círculos en la fila vertical y 15 en la fila horizontal, es decir, en la figura n hay 31 círculos.

Partiendo de este hecho, podemos decir que los estudiantes de este grupo aún no están en la tipología pensamiento algebraico simbólico (Radford, 2010) ya que no aparece una fórmula algebraica que permita resumir la y describir espacialmente la cantidad de círculos que posee cualquier figura de la secuencia presentada.

CONCLUSIONES

Según el análisis de los datos y partiendo del hecho que los estudiantes del grupo analizado aquí pertenecen al grado décimo, es decir, han trabajado con el lenguaje algebraico al menos 2 años, podemos decir que:

En el proceso de generalización de patrones, el pensamiento algebraico factual está presente sin importar el nivel en el que se encuentren los estudiantes; esto implica que la indeterminación y el patrón de generalización estarán implícitamente presentes en las palabras y los gestos al iniciar el proceso de generalización de una secuencia de figuras como la presentada en este escrito.

Por tener algo de experiencia en el trabajo con el álgebra, los estudiantes logran rápidamente desprenderse de los gestos y trabajar con la indeterminación utilizando deícticos lingüísticos como "hacia arriba" y "abajo". Esto permite que puedan obtener la cantidad de círculos presentes en cualquier figura dada de la secuencia.

Algo que llama la atención del proceso mostrado por los estudiantes tiene que ver con la utilización del orden lexicográfico para determinar el valor de cuando se les pide escribir una fórmula algebraica para determinar la cantidad de círculos de la figura n. Esto implica que sin importar la experiencia que los estudiantes tengan con la manipulación del lenguaje alfanumérico del álgebra, el proceso de generalización no logra avanzar a lo que (Radford, 2010) llama pensamiento algebraico simbólico en el que las fórmulas algebraicas aparecen como medio semiótico de representación de la generalización del patrón de la secuencia presentada.

Finalmente, es importante ampliar la mirada sobre los recursos semióticos movilizados por los estudiantes, diferentes al lenguaje alfanumérico propio del álgebra, pues estos recursos son indicadores de la presencia de pensamiento algebraico (factual, contextual o simbólico)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of pattems in different contexts. ZDM *Mathematics Education,* 40, 83-96.

Radford, L. (2009). "No! He stars walking backwards!": interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. ZDM-*The International Journal on Mathematics Education,* DOI 10.1007/s11858-009-0173-9.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education,* 12(1), 1-19.

Generalización de patrones: una reflexión didáctica sobre medios semióticos de objetivación en grado octavo

*Diana Patricia Gómez Higuera**
*María Fernanda Díaz***
*Rodolfo Vergel Causado****

RESUMEN

Este reporte hace parte de un trabajo de grado desarrollado en al marco de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, en el que se expone la presencia de algunas formas de razonamiento gestual y visual (medios semióticos de objetivación) en situaciones que tienen que ver con generalización de patrones. Se estudian y muestran los resultados partiendo de la investigación cualitativa enmarcada en la etnografía, de las diferentes acciones de un grupo de estudiantes de grado octavo de jornada nocturna en un colegio del centro de la ciudad de Bogotá (Colombia), en su mayoría adultos cuyas edades oscilan entre los 17 y 67 años, al enfrentarse a situaciones de generalización de patrones. Dicho estudio es conducido desde la teoría cultural de la objetivación desarrollada por Luis Radford.

Palabras clave: álgebra, generalización de patrones, medios semióticos de objetivación, contracción semiótica, estratos de generalidad.

* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: pattygomezhig@gmail.com

** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: maferdiaz67@hotmail.com

*** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: rodolfovergel@gmail.com

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Hace algún tiempo en la comunidad de investigación se ha despertado cierto interés por el uso de nociones semióticas en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Dicho interés es consecuencia natural del papel esencial que desempeñan los medios de expresión en los procesos de pensamiento. En este sentido, se entiende que el lenguaje algebraico es el que da voz al pensamiento algebraico y, por lo tanto, no puede haber generalización algebraica sin emplear símbolos alfanuméricos, hecho que es discutido por Agudelo,C. y Vergel R, (2007), Arzaquiel (1993), Godino J., Castro, W., Aké, L y Wilhelmi, M. (en prensa), Godino, J., Font, (2003) y Radford (2002a, 2002b, 2003a, 2003b, 2005a, 2005b, 2006a, 2006b, 2006c, 2007, 2009a, 2009b, 2009c, 2010) quienes afirman la posibilidad de expresar el pensamiento algebraico mediante el uso de otros sistemas de representación como el lenguaje verbal, lenguaje no verbal, gráficos, tablas, entre otros, a los que Radford denomina MSO. De ahí que en los procesos comunicativos que tienen lugar en la educación matemática, no solo hay que interpretar las entidades conceptuales, sino también las situaciones problemáticas y los propios medios expresivos y argumentativos. De ahí que emerja la siguiente pregunta para el estudio:

¿Cuáles son los medios semióticos emergentes en estudiantes que inician el estudio del álgebra escolar cuando son enfrentados a tareas de generalización de patrones?

LINEAMIENTOS TEÓRICOS

Objetivar es un proceso en el que se hace evidente la relación
entre lo subjetivo y lo establecido culturalmente.
"Hacer visible algo" (Radford 2006a, 2006c)

Radford (2006 a) sugiere que el pensamiento es dependiente de los recursos culturales, dado que este es considerado como aquello que relaciona el ser con el mundo, además de concebirse como una reflexión mediatizada del contexto de acuerdo con la forma de actividad de los individuos. Por otra parte, este autor define el aprendizaje como la adquisición comunitaria que se relaciona con la situación histórico-cultural del sujeto, lo cual sugiere concebir el pensamiento no limitado al plano mental.

Los medios semióticos de objetivación (MSO) son todos aquellos recursos que movilizan los estudiantes para objetivar; entre ellos están, gestos, signos, artefactos; puede afirmarse que cada uno de ellos constituye o caracteriza cada estrato de generalidad entre los cuales encontramos; el estrato fáctico o de hecho, el contextual y el simbólico. El estrato fáctico, pese a su carácter concreto, no es una manera simple de significar los objetos; estos procesos permanecen anclados a las acciones corpóreas y a los sentidos. Por su parte, en el estrato contextual el estudiante debe empezar a pensar en lo general, es decir, aparece como la abstracción de las acciones concretas en forma de un esquema operativo, el ritmo y los gestos desaparecen y se empiezan a utilizar términos y adjetivos que describen de manera precisa el espacio que ocupan los elementos; un ejemplo, es el uso de palabras arriba, abajo, etc. Finalmente, en el estrato simbólico los estudiantes acuden a los signos alfanuméricos del álgebra para objetivar el conocimiento (Radford, 2002, 2003 2006, 2007, 2010).

METODOLOGÍA Y ANÁLISIS

Este trabajo se inscribe en un enfoque cualitativo de investigación enmarcado en el terreno de lo etnográfico. Se plantean tres tareas referidas a la generalización de patrones, posteriormente se realiza un pilotaje y, por último, la prueba se aplica en un grado octavo en el colegio Camilo Torres de la ciudad de Bogotá (Colombia), en jornada nocturna a estudiantes cuyas edades oscilan entre los 17 y 67 años. Durante el desarrollo de la prueba los estudiantes se organizan en grupos de, máximo, cuatro personas. La recolección de la información se realizo a través de grabación en audio y vídeo, notas de los estudiantes, hojas de trabajo o guías, entrevistas y diarios de campo, los cuales fueron utilizados para el posterior análisis con el propósito de identificar, describir y analizar los MSO emergentes en el proceso de generalización con estudiantes de grado octavo.

Entre las categorías de análisis se enuncian atendiendo a los criterios de la clasificación de los estratos de generalidad: fáctica o de hecho, contextual y simbólica, cada una caracterizado por determinados MSO; por ejemplo: el estrato de generalidad fáctica se compone de MSO como dibujos, gestos deícticos, kinetográficos y uso de lenguaje coloquial; estrato de generalidad contextual: se compone de procesos de objetivación como ritmicidad, elementos como operaciones, gestos simbólicos e icónicos; estrato de generalidad simbólica, se compone de procesos de objetivación denominada contracción y uso de lenguaje alfanumérico.

Sobre las tareas

En una primera fase los estudiantes se enfrentan a preguntas como: ¿Cuántos palillos, cuadrados o circunferencias forman la figura que se encuentra en las posiciones 5, 10, 20?; a partir de la cantidad de circunferencias, cuadrados o palillos encontrar la posición correspondiente, y completar la tabla. En la segunda fase de la actividad se les solicita encontrar una forma de expresar la secuencia para el término Y por último se les invita a describir la manera en que procedieron para encontrar la expresión, de acuerdo con la secuencia que se les muestra según sea el caso.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Exposición de E7:

1. *Primero tenemos una figura triangular, en la segunda tenemos [dibuja la figura], en la tercera [dibuja la figura], en la cuarta [dibuja la figura]...*
2. *Vemos que la primera figura ocupa tres palillitos, la segunda cinco palillitos, la tercera siete palillitos y la cuarta ocupa nueve palillitos,….,*
3. *Entonces tenemos que de 3 a 5, de 5 a 7 y de 7 a 9, tenemos de a dos, que se aumentan de a dos palillitos por figura,… bueno y aquí [señala la figura 3] si le agregamos dos palillitos sería la posición cuarta y serían 11 palillitos...*
4. *Bueno, entonces lo que yo hice es que tenemos la secuencia del 2 acá sí [haciendo referencia al número de palillos por cada posición], entonces lo que yo hice fue multiplicar el número de palillitos [posición] por dos y le agregué 1 aumentando. [Escribe la expresión en el tablero]*
5. *¿Sí?, entonces por ejemplo, la posición uno queda 2, que es el número de palillitos que va aumentando, por 1 más 1 que es una posición y eso es tres palillitos [mientras lo escribe en el tablero]. Eso es lo que yo hice, es lo que yo pienso, no sé si está bien o mal.*
6. *Entonces aquí por ejemplo posición 20, vamos a tomar 20 que es la posición que es esta [señala la que había escrito en el tablero], para mi concepto, por 2, igual 40,*
7. *Más 1 que es la posición que me va aumentando de uno en uno, que es esta [señala el numero 20], me da 41. La posición 100, es 100 por 2 que es los palitos que aumenta, más uno me da 201.*
8. *Entonces de aquí podríamos decir, que esta, ¿cómo una formula no? Como una forma que podría ser… eemm... 2 por , no mentiras [mientras borra la n], sería n por 2 y le sumamos 1 al resultado que me dé. Sería la posición por 2 que es el número que agrego y más 1.*

Comenzado con la interpretación del discurso abordado por E7 (líneas 1 y 3), este estudiante utiliza el dibujo de la secuencia para inferir una característica perceptual; las figuras representadas como herramienta para expresar la forma de las figuras consecutivas, los gestos deícticos y kinetógraficos han sido dejados de lado. Aparecen frases como, "entonces lo que yo hice fue multiplicar el número de palillitos (posición) por dos y le agregué 1 aumentando". En términos de Radford (2008, 2010), E7 estaría desarrollando una generalización de tipo contextual, pues el medio semiótico de objetivación movilizado es el término o frase clave, que objetiva lingüísticamente la generalidad. Por otra parte, en la línea 6 cuando señala "... 20 que es la posición que es esta" vemos que refiere al sentido metafórico; en esta ocasión E7 asume el término "n" como una letra que puede surtirse por cualquier número, hay plena conciencia de que no se trata de despejar una incógnita cuyo valor es desconocido (Radford, 2002). Posteriormente ejemplifica lo dicho para concluir con la expresión alfanumérica (línea 8) para encontrar la cantidad de palillos de cualquier posición $n \times 2 + 1$

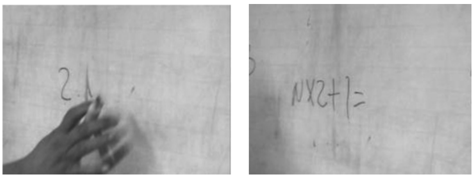


Fig. 19: Expresión para el caso de la posición

Al prestar atención a (líneas 5, 6 y 7) puede afirmarse que la expresión tiene una forma híbrida. Por una parte aparece como procedimientos (ver Fig. 19); ejemplos claros se notan en oraciones como, "tomo lo multiplico por 2 sumo uno", espera obtener un resultado al operar (signo igual "=" es asumido como un operador)[1]; por otra parte toma forma de narrativa, es decir, en el sentido en que relata con símbolos alfanumérico la característica objetivada, la "fórmula" cuenta lo encontrado en el proceso de observación y objetivación (Radford, 2002, 2010), lo cual sugiere que E7 podría estar desarrollando un tipo de generalización simbólica. Esto puede considerarse como un hallazgo del estudio, pues en un mismo segmento de clase, un estudiante transita desde el estrato de generalidad contextual hacia un estrato de generalidad simbólica ("multiplicar el número de palillitos por dos y le agregué 1 aumentando" hacia $n \times 2 + 1$).

---

[1] Rojas, P., Rodríguez, J., Romero, J., Castillo, E. y Mora O. (2002). La transición de la aritmética la Álgebra. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá.

CONCLUSIONES

Se puede afirmar que cuando los estudiantes se enfrentan a tareas sobre generalización de patrones acuden a ciertos recursos semióticos tales como gestos, palabras, expresiones alfanuméricas, movimientos y ritmicidad que emergen como MSO. Este resultado coincide con resultados de otros estudios llevados a cabo en el contexto internacional por Luis Radford. La tabulación de datos se constituye en uno de los medios emergentes en el estrato de generalidad contextual, es considerado como un recurso movilizado por los estudiantes para validar sus respuestas. Afirmamos que se ubica en este estrato de generalidad dado que el estudiante considera la relación entre las diferentes posiciones y dado el esquema operativo utilizado para su realización.

El análisis de los datos sugiere que los estudiantes comienzan haciendo señalamientos y gestos, unido con actividad perceptual, los cuales se constituyen en medios semióticos de objetivación insoslayables cuando enfrentan las tareas sobre generalización de patrones. En el transcurrir de las sesiones de clase se observa en algunos estudiantes una reducción de recursos semióticos, lo cual los obliga a concentrar el significado en un número menor de palabas y símbolos. Esta idea, que ha sido teorizada por Luis Radford como contracción semiótica, parece ser un proceso de objetivación ineludible en las actuaciones de los estudiantes cuando enfrentan las tareas sobre generalización de patrones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Godino, J., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. (en prensa). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/naturaleza_RAE.pdf

Godino, J. y Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.

Radford, L. (2002a). On heroes and the collapse of narratives. A contribution to the study of symbolic thinking. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME 26 (Vol. 4, pp. 81-88). University of East Anglia.

Radford, L. (2002b). The seen, the spoken and written: a semiotic approach to problem of mathematical knowledge. Ontario, Canada.

Radford, L. (2000a). Gestures, speech and the sprouting of signs. Mathematical Thinking and Learning, 5(1), 37-70.

Radford, L. (2005a). Why do gestures matter? Gestures as semiotic means of objectification. In H. Chick & J. Vincent (Eds.), Proceedings of the 29th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 143-145). Melbourne, Australia: University of Melbourne.Radford, L. (2006a). Elements of a cultural theory of objectification. Revisit Latino Americana of Investigation en Mathematic Educative, Special issue on semiotics, culture and mathematical thinking, 103–129. Recuperado de: http://www.laurentian.ca/educ/lradford/.

Radford, L. (2006b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), Proceedings of the 28th conference.

Radford, L. (2006c). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In J. L. C. S. Alatorre, M. Saíz, of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American

Radford, L. (2009c). Signs, gestures, meanings :algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. University Laurentienne, Ontario, Canadá.

Rojas, P., Rodríguez, J., Romero, J., Castillo, E. & Mora O. (2002). La transición de la aritmética al Álgebra. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá.

Un nombre recursivo: uso de los recursos didácticos en matemáticas

Erika Yised González Urueña[*]
Natalia Andrea Palomá Barrera[**]

RESUMEN

En este trabajo se busca caracterizar los aspectos más importantes a tener en cuenta para que un recurso didáctico sea considerado una orientación matemática que conlleve un aprendizaje en el aula de clase. Es importante reconocer qué instrumentos dirigen la enseñanza en el estudiante, encontrando de manera primordial hipótesis de aprendizajes que permitan desarrollar una clase de matemáticas, identificando, analizando y reflexionando sobre los aspectos que conducen a la construcción de la magnitud longitud. La experiencia que se muestra es un proceso llevado a cabo durante la práctica docente, en el segundo semestre del 2011[1], con estudiantes del grado segundo del colegio Juan del Corral.

Palabras clave: recursos didácticos, magnitud longitud, pensamiento métrico

[*] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: erikyised@hotmail.com
[**] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: napaba31@hotmail.com
<?> González, E., Peña, A., Palomá, N., & Quitian, J. (2011). Unidad didáctica: un nombre recursivo. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Esta comunicación breve corresponde a la *Construcción de la Magnitud Longitud* desarrollada en el Colegio Juan del Corral IED (Bogotá) con estudiantes de grado segundo. En ella se cuestiona la viabilidad y utilidad de los recursos en la enseñanza, llevando así al profesor de matemáticas a interrogarse sobre cuáles son los aspectos a tener en cuenta para que un recurso didáctico sea considerado herramienta para la orientación matemática, que conlleve a un aprendizaje significativo.

A partir del reconocimiento de los procesos de enseñanza vistos en el aula clase, se cuestiona sobre la verdadera utilidad de los recursos didácticos en matemáticas, ya que si bien se considera que estos permiten que los estudiantes tengan un mejor acercamiento al conocimiento, la realidad observada mostró que no siempre su uso es efectivo y, por el contrario, los recursos se convirtieron en elementos distractores y poco útiles para los estudiantes.

JUSTIFICACIÓN

Se considera importante identificar, analizar y reflexionar sobre los aspectos que hacen que un recurso didáctico haga parte del aprendizaje matemático evidenciado en el aula de clase y no se convierta en un elemento distractor u obstáculo para el aprendizaje del estudiante; es por ello que se caracterizan dichos elementos a los que los profesores, dada su experiencia, consideran vitales para tener en cuenta al usar recursos didácticos.

MARCO DE REFERENCIA

Godino (2002) clasifica los recursos didácticos en instrumentos semióticos que hacen referencia a los objetos ostensivos y que son las representaciones materiales usadas en la actividad matemática. Se puede hablar de los objetos entregados a los niños como esta entidad; además, de cada una de las expresiones y símbolos que se irán involucrando a medida que el contenido va avanzando, aquellos manipulativos tangibles que ponen en juego la percepción táctil y los manipulativos gráficos, textuales, verbales en los que participan la percepción visual y/o auditiva.

Estas representaciones son los instrumentos con los que se realiza el trabajo matemático en el aula de clase, entendiéndolos desde la propuesta de Godino (2002) así como los instrumentos semióticos, reconociéndolos *como correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido o significado), estable-*

cidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia (Castro, 2011).

Es así que se puede decir que las herramientas semióticas soportan actividades colaborativas, y su introducción en la instrucción matemática potencia las situaciones didácticas y logros curriculares en el aula de clase.

Ahora bien, se puede ver cómo desde los objetos matemáticos a enseñar, es posible realizar un análisis en función de los recursos didácticos que permiten el desarrollo de la enseñanza y aprendizaje en el aula de clase; es así como a partir de la construcción de la magnitud longitud, se posibilitan diferentes recursos utilizados al momento de presentar este objeto matemático a los estudiantes.

Una vez incurrido en la línea de enseñanza (del Olmo, Moreno y Gil, 1989) con el propósito de involucrar la medida desde las *destrezas perceptivas* que un estudiante pueda emplear, es conveniente y/o oportuno hacer una aplicación de dicha percepción en un proceso de comparación que para Godino (...) será la fina relación que se pueda establecer entre dos o más objetos, y en la búsqueda de construir el término magnitud en lo que compete a la longitud, el rigor del Olmo (1989) lleva a establecer relaciones de longitud con las cualidades "más largo que", "más corto que" y "tan largo como"; de este manera se encaminan los procesos de clasificación que dieron apertura con una percepción de los atributos medibles que posteriormente pasan por un proceso de cualificación o de *comparación* para, ahora sí, construir la primera noción de medida que gira alrededor de la longitud.

Para hacer este hecho una realidad y previo al trabajo con unidades arbitrarias y estándar, se hace una validación de conocimientos por medio de la *estimación*; concepto que en la experiencia de aula se realiza a través del uso de criterios de comparación y estableciendo procesos de obtención de una medida sin la ayuda de instrumentos; como lo menciona Godino (2002), es la "medida" realizada "a ojo" de una cualidad de un objeto.

En efecto, los procesos de estimación en la construcción de medida se pueden ejemplificar desde la aplicación de *medidas antropométricas*: ¿Cuántos pies tendrá la longitud del largo de la escuela? Evidentemente para la estimación es de suma importancia que la respuesta sea dada, previa una actividad práctica de la situación.

Con el pretexto de ir encaminando al grupo de estudiantes, del Olmo, Moreno y Gil (1989) creen en el oportunismo de adentrar las medidas arbitrarias mediante una *comparación indirecta*, que será la aplicación de un elemento transportable sobre dos objetos de igual tamaño para finalmente tomar dicho objeto como unidad de medida; todo esto gracias a la relación de equivalencia que establecerán los estudiantes con un énfasis en la transitividad en el caso de la comparación indirecta.

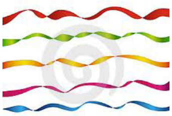
Sin olvidar que la construcción de la magnitud longitud debe contemplar la *conservación* de tal magnitud (longitud), resulta pretencioso planear actividades en las que se manipulen objetos y luego se produzca un cambio de situación (características de los objetos: longitud), dado que la percepción no toma un rol tan importante como inicialmente se había diseñado y el propósito es alejar precisamente al estudiante de dicha propiedad para dar comienzo a la reversibilidad, entendida por Godino (2002) como el conocimiento de muchos cambios físicos (de cantidad y posición) y que están en la capacidad de volver a la situación inicial.

Además de plantear comparaciones indirectas también se realizan actividades de *comparación directa* entre objetos. Inicialmente dicha comparación está dada esencialmente en función del sentido de la vista; se pueden establecer comparaciones que permitan decir fácilmente cuál longitud es más larga o menor que, donde la diferencia entre la una y la otra sea visiblemente evidente, y otra en donde suceda lo contrario, es decir, que la diferencia entre el tamaño de las longitudes sea mínima, en la cual se requiere de una verificación y precisión que es lo que posibilita los instrumentos de medición.

METODOLOGÍA

La experiencia de aula fue llevada a cabo con niños de segundo grado del Colegio Juan del Corral de Bogotá; se siguieron las fases de planeación aconsejadas por el grupo DECA (1992) de Introducción, Reestructuración, Profundización e institucionalización.

Análisis de los recursos para la construcción de magnitud longitud

Recursos	*Análisis*
  Mesas y sillas y algunas partes del cuerpo	En la experiencia se pudo ver cómo los estudiantes por medio de estos recursos, tomaban medidas de algunas longitudes, observando de esta manera que al utilizar estos instrumentos las medidas no siempre iban hacer exactas, sobraban o faltaban pedazos del objeto con que se medía; así los estudiantes tomaban medidas directas con algunas partes del cuerpo y objetos que se encontraban en el aula de clase.
Los palos de balso 	Los estudiantes con palos de balso midieron algunas longitudes y buscaron una que midiera lo mismo, buscando la relación que allí se encontraba. El manejo del palo fue pertinente, ya que los niños, al hallar la medida con este, subrayaban con un color hasta dónde había llegado y luego con esta indicación buscaban otra medida que fuera igual; de esta manera se veía cómo el palo de balso intervenía para formar medidas indirectas respecto a la longitud de uno de los lados de los objetos medidos.
 Pita	La pita fue pertinente al momento de realizar otra transformación a las medidas igualadas, ya que al poder esta encogerse y luego alargarse, el estudiante comprendía de una manera más fácil que la longitud no variaba a pesar de las transformaciones que se le hacían a estas; de esta manera se pudo ver las conservación de las longitudes de las cuerdas utilizadas.
 Cintas de colores	Al utilizar las cintas para observar los submúltiplos de la unidad de una longitud, la facilidad de doblarlas permitió que los estudiantes encontraran diferentes medidas que se pudieran reiterar veces exactas sobre la longitud total, partiendo del hecho de que era más fácil encontrar las medidas de las potencias de 2, ya que estás se podían dividir en partes iguales de manera más sencilla, que buscar las divisiones en tercios o quintos, pero aún así algunos de los estudiantes se dieron cuenta de que si dividían la longitud total en partes iguales, estas medidas se reiteraban veces exactas.
 Cinta métrica	Este recurso sirvió para reconocer, que aunque se puede medir con diferentes objetos: lápices, cuadernos, manos, pies…, estas medidas no siempre van a ser las mismas para todos, por eso es necesario medir con un instrumento que permita expresar la medida obtenida y que sea entendida por todos.

CONCLUSIONES

Partiendo del hecho que se ha fijado una hipótesis de aprendizaje a un recurso, se convierte el manejo y/o pericia del docente frente al instrumento semiótico en un aspecto de suma importancia, puesto que cualquier recurso puede fácilmente convertirse en agente distractor del aprendizaje puesto como horizonte

Cualquier elemento puede ser tomado como recurso; solo mediante la anticipación de resultados puede pasar a un plano que genere conocimiento <Recurso didáctico>, puesto que en cada diseño de actividad se otorga una función de dicho instrumento que cobra importancia en el momento que se enuncie una hipótesis de aprendizaje.

A partir de la propuesta de un autor en particular, los estudiantes construyeron la magnitud longitud, de acuerdo con los procesos de medición enunciados en el transcurso del documento; se agrega que fue necesario fijar en los recursos una función con su respectiva hipótesis orientada siempre por la labor del docente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Castro, C., & Suavita, S. (2011). *Formación, tratamiento y conversión como actividades cognitivas de representación: una experiencia con estudiantes para profesor.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Del Olmo, M. A.; Moreno, M. F.; Gil, F. (1989). *Superficie y volumen, ¿algo más que el trabajo con fórmulas?,* (n.º 19). Madrid: Editorial Síntesis S. A.

Godino, J; Batanero, C. (2002). *Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.*

Godino, J, Batanero, C & Roa, R. (2002). *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros.* Granada: Universidad de Granada.

Formación continuada de profesores de Estadística

Difariney González Gómez[*]

RESUMEN

El presente documento describe el avance de una propuesta de investigación que adelanto en la línea de formación de profesores. El objetivo de esta propuesta es investigar la transformación de la práctica pedagógica de los profesores cuando hacen parte de programas de formación continuada en el área de estadística. La metodología que se plantea es bajo un paradigma cualitativo con un enfoque crítico-dialéctico. Los profesores participantes en esta propuesta serán miembros de una comunidad de práctica en la que compartirán y estudiarán sus propias realidades.

Palabras clave: formación continuada de profesores; práctica pedagógica; análisis y reflexión sobre la enseñanza.

[*] Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: difariney@gmail.com

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

En Colombia a finales del siglo XX e inicios del siglo XXI las políticas de gobierno, los investigadores y las instituciones educativas han empezado a interesarse en la formación continuada de profesores. Este interés se justifica en varias razones: los profesores cada día se enfrentan a situaciones nuevas para las cuales su formación inicial es insuficiente, la velocidad a la que marchan los cambios tecnológicos hace que los profesores necesiten estar actualizados, las continuas reformas curriculares demandan que los profesores estén en condiciones de atender dichos requerimientos. En la actualidad, el interés del Estado colombiano por la formación de los profesores se hace visible en documentos oficiales en los cuales se establece:

> La formación, capacitación, actualización y perfeccionamiento de los educadores en servicio debe contribuir de manera sustancial al mejoramiento de la calidad de la educación y a su desarrollo y crecimiento profesional, y estará dirigida especialmente a su profesionalización y especialización para lograr un mejor desempeño, mediante la actualización de conocimientos relacionados con su formación profesional, así como la adquisición de nuevas técnicas y medios que signifiquen un mejor cumplimiento de sus funciones (MEN, 2002).

Para atender a los intereses del Estado, los programas de formación continuada de profesores se han caracterizado por la dicotomía en la que, por un lado, va la realidad de la escuela con sus características y tensiones, y por otro, las teorías y discursos propios de los programas de formación de profesores (Vaillant, 2009). Esta separación entre teoría y práctica no es admisible. Los programas de formación deben permitir una participación activa de los profesores en tiempos y espacios propicios para un buen aprovechamiento.

Particularmente, los profesores que enseñan matemáticas deben asumir la orientación de la estadística, área en la cual no tienen la formación suficiente y/o actualizada. Autores como Ottaviani (1999) y Heaton (2002) indican que la investigación en la enseñanza de la estadística ha mostrado poco contacto de los profesores con la asignatura ya que en algunas ocasiones la estadística es olvidada en la Educación Básica y Secundaria. A esto se le suma que al enseñarla dentro de las matemáticas, algunos profesores olvidan las características interdisciplinares de la estadística, las cuales permiten utilizarla transversalmente en otras áreas.

Considerando los anteriores escenarios, la presente investigación constituye como objeto de estudio la transformación de la práctica pedagógica de los profesores de estadística; para ello se propone como pregunta de investigación: ¿Cómo es la transformación de la práctica pedagógica de los profesores desde programas de formación continuada en estadística?

JUSTIFICACIÓN

No hay duda de que la formación continuada de los profesores es uno de los principales factores de la calidad educativa. La importancia de la formación en estadística y en didáctica de la estadística en los profesores en ejercicio se deduce claramente del papel asignado a la estadística en los lineamientos curriculares (MEN, 1998) y los estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2003) donde se incluye el tratamiento de la información, azar y probabilidad desde el primer ciclo de educación.

En investigaciones como la de Zapata y Rocha (2011) se plantea que los profesores son conscientes de la necesidad de fortalecer su formación en estadística ya que algunos solo vieron uno o dos cursos de estadística y en algunos casos no vieron un curso de didáctica de la estadística. Todos esos profesores que experimentan esas tensiones tienen una tarea que es aprender y (re)aprender estadística desde un punto de vista más amplio que trasgreda el hecho de la sola aplicación de fórmulas, utilizando en dicho proceso recursos, espacios y tiempo que les permitan auto-cuestionarse, reflexionar y apropiarse del conocimiento estadístico.

Para ello, se hace necesario generar espacios donde los profesores puedan reflexionar acerca de su práctica pedagógica particularmente en la enseñanza de la estadística; como proponen Arbesú y Figueroa (2001), Loredo y Grijalva (2000), Arbesú y Rueda (2003), resulta conveniente desarrollar programas de formación docente que partan del trabajo reflexivo de los profesores acerca de su acción docente, con la finalidad de que propongan mejoras a los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Se entiende la formación de profesores en el mismo sentido que Moretti (2007) lo plantea: “la formación continuada de profesores se entiende como un proceso que ocurre en la continuidad de la formación inicial y que visiona a la transformación de la realidad escolar por medio de la articulación entre teoría y práctica docente” (Moretti, 2007, pág. 24).

En los espacios de formación, los profesores tienen la posibilidad de interactuar y compartir con otros colegas las experiencias de clase y en especial de la clase de estadística, esperando que con la reflexión, socialización y discusión dada, emerja una transformación en su conocimiento y en su práctica pedagógica, entendiendo que no es admisible la separación entre teoría y práctica (Vaillant, 2009).

Batanero (2009) señala que en la formación de profesores se requiere de entornos y contextos, además de la necesidad de trabajar de manera colaborativa ya que esto permite a los profesores intercambiar ideas y materiales además de posibilitar la reflexión de la práctica pedagógica.

En estos espacios conformados por grupos de profesores autores como Lupu (2010) señalan que el aprendizaje implica un proceso de participación en una comunidad de práctica, en donde un grupo de personas comparten un interés por algo que hacer o algo que deseen aprender a hacer mejor; lo anterior se da a medida que interactúan en forma regular con otras personas, debido a que una de las características de las comunidades de práctica es la posibilidad de participar en actividades conjuntas y discusiones en donde los profesores se ayudan mutuamente y pueden compartir información construyendo así las relaciones que les permitan aprender de los otros.

METODOLOGÍA

La investigación se desarrollará en el marco del paradigma cualitativo bajo un enfoque crítico-dialéctico que concibe al hombre como el resultado de los procesos sociales e históricos, determinado por contextos económicos, políticos y culturales y al mismo tiempo como un ser transformador de esos contextos. Se tiene una concepción de realidad, entendiendo la realidad con una visión dinámica: el mundo es inacabado y en constante construcción, la educación es comprendida como un fenómeno que transforma (Sánchez, 1998). Estos principios del enfoque crítico dialéctico me llevan a considerar la orientación de la investigación bajo el mismo, debido a que se concibe el profesor como un ser crítico, social y transformador de las situaciones cotidianas en la escuela.

La propuesta incluye profesores en ejercicio que tengan bajo su responsabilidad la enseñanza de la estadística. Los profesores se reunirán periódicamente durante un semestre en comunidades de práctica las cuales resaltan la importancia del aprendizaje informal de los profesores y del trabajo colaborativo (Lupu, 2010). En las comunidades de práctica los profesores comparten dificultades y aciertos en la enseñanza de la estadística, y reflexionan sobre diferentes elementos teóricos y prácticos de sus propias clases.

Para la producción de registros y datos se utilizarán algunos instrumentos que posibilitarán que el profesor reflexione y confronte sobre su práctica pedagógica, la que sueña, la que está realizando y la que debe realizar (Jaramillo,2003). Los instrumentos considerados hasta el momento son: autobiografía; observación de clases (videograbación), análisis de casos o episodios; los diarios de campo, entrevistas estructuradas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arbesú, I., & Figueroa, A. (2001). La evaluación docente como un proceso de diálogo, comprensión y mejora de la práctica. En M. Rueda, F. Díaz-Barriga, & M. Díaz Pontones, Evaluar para comprender y mejorar la docencia en educación superior (págs. 161-174). México: CESU-UAM.

Arbesú, I., & Rueda, M. (2003). La evaluación de la docencia desde la perspectiva del propio docente. Reencuentro. Análisis de problemas universitarios , 36, 56-65.

Heaton, R. (2002). The learning and teaching of statistical investigation in teaching and teacher education. Journal of Mathematics Teacher Education , 5, 35-59.

Batanero, C. (2009). Retos para la formación estadística de los profesores. Recuperado el 21 de mayo de 2012 de http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/Formprofesores.pdf , 1-23.

Jaramillo, D. (2003). (Re)constituição do ideário de futuros professores de Matemática num contexto de investigação sobre a prática pedagógica. Campinas: Tese de Doutorado. No publicada.

Loredo, J., & Grijalva, O. (2000). Propuesta de un instrumento de evaluación de la docencia para estudios de posgrado. En M. Rueda, & F. Díaz-Barriga, Evaluación de la docencia (págs. 103-132). México: Paidós.

Lupu, M. M. (2010). Learning to be a teacher between participating to a community of educational practice and belonging to a learning community. Journal of Educational Sciences , 12 (2), 63-69.

MEN. (2002). Decreto 1278. Estatuto de Profesionalización Docente. Artículo 38. Recuperado el 7 de mayo de 2012.

MEN. (2003). Estándares Básicos de Matemáticas. Santa Fe de Bogotá: Centro de Pedagogía Participativa.

MEN. (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. Santa Fe de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Moretti, V. (2007). Professores de matemática em atividade de ensino. Uma perspectiva histórico-cultural para a formação docente. (Tesis de doctorado). Recuperado el 01 de 04 de 2012, de http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-05102007-153534/pt-br.php

Ottaviani, G. (1999). Promover la enseñanza de la estadística. La contribución del IASE y su cooperación con los países en vía de desarrollo. Conferencia inaugural.

Sánchez, S. (1998). Fundamentos para la investigación educativa: presupuestos epistemológicos que orientan al investigador. Santa Fé de Bogotá: Magisterio.

Vaillant, D. (2009). Formación de profesores de Educación Secundaria:realidades y discursos. Revista de Educación , 350, 105-122.

Zapata, L., & Rocha, P. (2011). La clase de estadística más alla de la Reforma. Manuscrito no publicado .

Interacciones, roles y organizaciones en el aula desde el enfoque ontosemiótico

*Rossmajer Guataquira López**
*Orlando Lurduy Ortegón***

RESUMEN

En consideración de la importancia que deben tener en los procesos de estudio las interacciones, roles y organizaciones en el aula y de los escasos estudios que existen en Colombia acerca de estos -desde la perspectiva del onfoque ontosemiótico-, presentamos este proyecto de investigación en educación matemática, el cual se encuentra en desarrollo y pretende describir y caracterizar algunos de los factores condicionantes que influyen en el conjunto de normas sociomatemáticas que regulan la relación profesor-estudiante y estudiante-estudiante(s) en un entorno del aula de clase de grado noveno, en Colombia. Ello, mediante la realización de un estudio de caso y la implementación y gestión de una secuencia de actividades sobre la noción de función lineal.

Palabras clave: Procesos de estudio, interacciones, roles, organizaciones, normas matemáticas.

* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: rossmajer@yahoo.com.
** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: jolurduy@udistrital.edu.co.

DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

La Ley General de Educación de Colombia señala en su artículo 76, que el currículo implementado en cada institución escolar debe contribuir a "la formación integral y a la construcción de la identidad cultural nacional, regional y local…"; sin embargo, tanto en los resultados de investigaciones en las que se ha estudiado el alcance de este fin como en la experiencia propia (en nuestras vivencias como estudiantes de la Educación Básica y como estudiantes para profesor de matemáticas (EPM) en LEBEM), hemos evidenciado que las normativas implementadas por las instituciones contribuyen principalmente a la formación disciplinar de los estudiantes, formación basada en el aprendizaje de contenidos con poca atención al desarrollo humano.

Al respecto, los lineamientos curriculares de matemáticas emitidos por el Ministerio Nacional de Educación de Colombia, en correspondencia con la Ley 115 de 1994 (Ley General de Educación en Colombia), coinciden en que la educación debe orientarse hacia "la visión nueva de la educación capaz de hacer realidad las posibilidades intelectuales, espirituales, afectivas, éticas y estéticas de los colombianos, que le garantice el progreso de su condición humana…" (MEN, 1998, p. 60), lo que deja a la escuela -como escenario propicio para la educación de los individuos- el deber de formar integralmente a sus estudiantes, dando igual importancia al aprendizaje de contenidos como a la formación de personas, en cada una de las facetas del desarrollo humano.

Es así como el enfoque ontosemiótico (EOS) ha desarrollado investigaciones (algunas de ellas han tenido lugar en nuestro país) en torno a la trayectoria cognitiva, epistémica y mediacional que tienen lugar en el aula de clase, y que permite obtener mayor información acerca del complejo mundo del aprendizaje de la matemática, pero son muy escasos los estudios (por lo menos en Colombia) que se han centrado en la descripción y análisis de la trayectoria interaccional desde la perspectiva teórico-metodológica del EOS.

Respecto a la formación integral, vale la pena resaltar que el enfoque del interaccionismo simbólico plantea que "las dimensiones culturales y sociales no son condiciones periféricas del aprendizaje matemático sino parte intrínseca del mismo" (Godino y Llinares, 2000), lo cual hace manifiesta la importancia de realizar estudios que permitan describir y caracterizar la trayectoria interaccional en el aula de clase en torno al saber, como parte constituyente y no periférica del aprendizaje. En este sentido, según planteamientos de algunos autores consultados y de los resultados obtenidos en los estudios realizados dentro del programa de investigación Rutas de Estudio y Aprendizaje (REA) por Lurduy (2005) acerca de la modelación de las relaciones, se ha determinado que la interacción que tiene lugar en el aula está estrechamente relacionada con la labor misma del docente y del estudiante, por la influencia del entorno que los rodea y por la estructura social de la escuela en la que se lleva a cabo el proceso de aprendizaje.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

De acuerdo con Godino y cols. (2008) el estudio de las interacciones, roles, procesos de estudio y organizaciones está es sus inicios de construcción teórica y metodológica por parte de la perspectiva teórico-metodológica del enfoque ontosemiótico de la cognición y la instrucción matemática (EOS).

Sin embargo, el EOS ha trabajado en los modelos teóricos propuestos en el seno de la didáctica de las matemáticas sobre la instrucción matemática, surgiendo lo que ellos han denominado como "dimensión normativa de los procesos de estudio" con la cual realizan una categorización de las normas según la faceta (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica) de los procesos de estudio que esté en consideración, facetas que al ser tomadas junto con los criterios de idoneidad didáctica de los procesos de estudio incorporan una racionalidad axiológica en el análisis didáctico. Esta "dimensión normativa" es propuesta "… para, por un lado, poder describir con mayor precisión el funcionamiento de los procesos cognitivos e instruccionales normados y, por otro, incidir en aspectos de la dimensión normativa (modificándolos si fuera necesario) para facilitar la mejora de dichos procesos de estudio de las matemáticas" (p. 60).

Es decir, este enfoque ha realizado –conforme a su objetivo- un estudio global sobre las reglas de funcionamiento y control de procesos de enseñanza, lo cual nos permite una orientación teórica para alcanzar el objetivo de nuestro proyecto de investigación: describir y caracterizar algunos de los factores condicionantes que influyen en el conjunto de normas sociales, matemáticas y sociomatemáticas, y que regulan la relación profesor-estudiante y estudiante-estudiantes en un entorno del aula de clase.

Pero, además de esta orientación teórica se hace necesario conocer otros estudios que posibiliten ampliar la información que el EOS nos ofrece con relación a las interacciones que tienen lugar en el aula; encontramos así los estudios realizados por el enfoque de investigación conocido como interaccionismo simbólico, acuñado por Herbert Blumer en 1938 en el que se describen y caracterizan las normas sociales y sociomatemáticas, así como el trabajo sobre ambientes e interacciones en el aula, de Lurduy (2005), quien junto a su grupo de investigación "Rutas de estudio y aprendizaje en el aula (REA)" han realizado investigaciones con respecto a las organizaciones e interacciones que tienen lugar en el aula de clase.

METODOLOGÍA

El método de la investigación de este estudio tiene como base una investigación cualitativa de tipo descriptivo-exploratorio, mediante el estudio de caso y la implementación de una secuencia de actividades diseñada por Suspe y Vega (2005), y pilotada y validada por ellas y otros autores en diferentes poblaciones de Colombia y del exterior. A partir de dicha implementación -en el trabajo de campo- se ha realizado la recolección de la información que es objeto de análisis para la emisión de los resultados de la investigación que se está llevando a cabo. Al respecto, vale la pena resaltar que la secuencia de actividades implementada está diseñada con la teoría de las situaciones didácticas propuesta por Brousseau (1996) y que en esta investigación solo se ha analizado la fase de validación de dicha secuencia, ya que consideramos que en esta fase podemos evidenciar una mayor interacción profesor-estudiante y estudiante-estudiante, debido a que en ella se ponen a juicio de los interlocutores las producciones matemáticas individuales y grupales, sustentando los procedimientos empleados y las respuestas encontradas.

Población y contexto de aplicación

La población objeto de estudio son estudiantes de noveno grado de un colegio distrital de la localidad décima de Bogotá (Engativá), cuyas edades oscilan entre los 14 y los 17 años. Los sujetos objeto de observación son, específicamente, el profesor y el estudiante. Pero, dado que el objeto de estudio está en la cara del tetraedro didáctico que relaciona al estudiante (polo cognitivo) – profesor (polo didáctico) – entorno (polo ecológico), el aspecto ecológico, también está siendo descrito y observado.

Instrumentos de recolección de información

La recolección de datos se llevó a cabo mediante el empleo de cuatro instrumentos: uno, basado en la observación directa y mediatizada (videograbación) y los otros, en el estudio de documentos escritos: protocolo del observador,

Análisis de datos

El análisis de datos se está haciendo a partir de las investigaciones realizadas por el EOS acerca de la dimensión normativa, de los tipos de norma postulados por el interaccionismo simbólico y por los ambientes de aprendizaje propuestos por Lurduy (2005). Dichos análisis están basados en la categorización de la información recolectada, en la que se organizó la información de acuerdo con las relaciones que se pueden establecer entre cada uno de los polos de la cara del tetraedro didáctico que es objeto de nuestro estudio (polo cognitivo, ecológico y didáctico), de la adaptación realizada a la tipología de objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, situaciones-problemas, conceptos-definición, proposiciones, procedimientos y argumentos) que propone Godino y cols. (2008) y del análisis de significado de las interacciones, roles y organizaciones que tienen lugar en el aula de clase, según la relación que los signos tienen con el objeto (íconos, índices y símbolos). Veamos:

Supra_ Categoría	*Categoría*	*Sub_ Categoría*	*Descriptor*	*Indicador*
Relación estudiante-entorno-profesor Relación estudiante- entorno-saber	Entorno-Estudiante Entorno-profesor Estudiante-estudiante (saber)	Interacciones Roles Organizaciones	Vienen dados por la adaptación realizada a los elementos de significado propuestos por Godino.	Íconos Índices Símbolos

CONCLUSIONES

Como nos encontramos en la fase de análisis de resultados, aún no se tienen resultados frente a los cuales emitir conclusiones, sin embargo, las conclusiones a las que se quiere llegar al finalizar el análisis de resultados girarán en torno a:

- Describir y caracterizar algunos de los factores condicionantes que influyen en el conjunto de normas sociales, matemáticas y sociomatemáticas, y que regulan la relación profesor-estudiante y estudiante-estudiante(s) en un entorno del aula de clase.
- Proponer un método o instrumento que permita la caracterización de los factores condicionantes que influyen en el conjunto de normas didácticas y en la relación profesor-estudiante y estudiante-estudiante(s).
- Realizar algunas reflexiones en torno a la caracterización de los factores condicionantes que influyen en el conjunto de normas didácticas y en la relación profesor-estudiante y estudiante-estudiante(s).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Colombia. Congreso General de la República. (1994). Ley 115 de 1994, por la cual se expide la Ley General de Educación. Bogotá: El Congreso, 1994.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Consultado el 10/05/10. Disponible en línea en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. En Revista Educación Matemática, Vol. 12, N.° 1: 70-92. Universidad de Granada-Universidad de Sevilla. Publicado en Rutas de estudio y aprendizaje en el aula. Lurduy (2005).

Lurduy, O. (2005). Algunos elementos conceptuales para la comprensión de la cultura del aula. Ambientes e interacciones de aprendizaje. Cuadernos de investigación N.° 5. Rutas de estudio y aprendizaje en el aula. Grupo de investigación MESCUD. Editado: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Matemáticas. Lineamientos Curriculares. MEN. Bogotá. Ministerio de Educación Nacional.

Suspe, M. y Vega, D. (2006). Propuesta de secuencia de actividades para la construcción de las representaciones de la función lineal grado noveno. Tesis de grado. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.

La modelación matemática en la educación matemática realista: un ejemplo a través de la producción y uso de modelos cuadráticos

Sara Marcela Henao[*]
Johnny Alfredo Vanegas[*]

RESUMEN

La presente propuesta se enmarca dentro de una investigación en curso y toma como principal referente los aportes de la Educación Matemática Realista. En este sentido, se busca a partir de algunos de sus referentes teóricos y metodológicos fundamentar un diseño relativo al trabajo con modelos cuadráticos que permita estudiar el proceso de modelación matemática. Se destaca el papel que desempeña dicho proceso matemático en la conjugación de las matemáticas y la realidad para la promoción de la formación de conceptos matemáticos asociados a lo cuadrático, donde se asumen los diversos niveles de matematización, como una posibilidad que permite analizar el desempeño matemático de los estudiantes y las implicaciones didácticas y cognitivas, en relación con el proceso de modelación en el ámbito escolar.

Palabras clave: educación matemática realista, modelación matemática, contextos, modelos cuadráticos

[*] Área de Educación Matemática. Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle. Dirección electrónica: s.a.rit@hotmail.com

[**] Área de Educación Matemática. Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle. Dirección electrónica: yovanegasdiaz@gmail.com

CONTEXTUALIZACIÓN Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

Una de las necesidades que constantemente circula dentro de la comunidad de educadores matemáticos, se refiere a la búsqueda, el diseño e implementación de nuevas propuestas escolares destinadas a reivindicar el (sin) sentido común de los estudiantes en la interpretación y resolución de problemas en diferentes contextos. En consecuencia, se ha sumado un esfuerzo por proporcionar a los estudiantes algunas estrategias y herramientas matemáticas que posibiliten la utilización de sus conocimientos escolares en la resolución de problemas del mundo real (Valoyes & Malagón, 2006; San Martí, Burgoa & Nuño, 2011).

Al margen de estas perspectivas, el MEN (1998, 2006) viene considerando la implementación del proceso de modelación matemática como una estrategia didáctica que permite conectar las estrategias informales de los estudiantes con las matemáticas formales, promoviendo la aplicación de conocimientos matemáticos en situaciones extraescolares, a la vez que genera la construcción de conocimientos matemáticos en forma significativa.

Sin embargo, la aplicación de estos planteamientos en las prácticas educativas es un proceso que no se ha venido dando de la manera más deseable. A modo de ejemplo, algunas investigaciones (Biembengut & Hein, 2004; Trigueros, 2009) señalan que la implementación de la modelación matemática en la escuela sigue siendo un asunto problemático, debido a la complejidad que exige la producción de un modelo, el tiempo de convivencia de los profesores y de los estudiantes ante unos métodos de enseñanza "tradicionalistas", y la poca formación de los profesores que la usan.

Estas preocupaciones convergen en un problema general de formación docente, relacionado con las dificultades que presentan los profesores para comprender, identificar y diseñar contextos significativos que promuevan la construcción de modelos matemáticos inventados o reinventados por los mismos estudiantes, con el objeto de favorecer los procesos de modelación matemática.

Frente a estas problemáticas, emerge como una respuesta plausible, la consideración de los contextos tal como se utilizan dentro de la educación matemática realista, pues a partir de estos, se promueven los procesos de modelación matemática en las clases, a la vez que se crean puentes para pasearse entre lo abstracto y lo concreto, facilitando diversas conexiones matemáticas y mejores perspectivas de aprendizaje de los contenidos matemáticos.

Este proceso de modelación matemática es especialmente útil para abordar el estudio de conceptos matemáticos cuya comprensión y desarrollo han sido producto de consideraciones de la realidad junto a un constante proceso de matematización. Es el caso de lo cuadrático, que puede asociarse a tres nociones matemáticas fundamentales: la ecuación de segundo grado, la parábola y la función cuadrática. Pues bien, la introducción de la modelación matemática en el ámbito escolar en relación con dichas nociones cuadráticas favorecería el estudio simultáneo de tres contenidos matemáticos escolares que en la enseñanza "tradicional" siempre se abordan independientemente y mejoraría el desempeño matemático de los estudiantes para interpretar, formular y solucionar situaciones problemas a través de las conexiones que pueda establecer entre las matemáticas y el mundo real (Mesa & Villa, 2011).

Así, la presente propuesta problematiza el asunto de las limitaciones, alcances y posibilidades de la educación matemática realista en la implementación de la modelación matemática en el ámbito escolar, con miras a aportar elementos que permitan atender a las debilidades que se han pronunciado y especialmente a las dificultades de los docentes para reconocer situaciones significativas para los estudiantes en relación con la enseñanza y aprendizaje de lo cuadrático.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Esta propuesta relativa al proceso de modelación matemática toma como referencia las principales aportaciones teóricas de la educación matemática realista. Dicho enfoque teórico se basa en unos principios de enseñanza y aprendizaje, cuyas directrices para la enseñanza de las matemáticas surgen como consecuencia natural de las ideas alcanzadas sobre el aprendizaje de las matemáticas (Goffree, 2000).

Principio de actividad: significa que los estudiantes se enfrentan a situaciones problema en las cuales ellos mismos a través de sus conocimientos informales "reinventan" las matemáticas como participantes activos durante el proceso de aprendizaje (Panhuizen, 2008). Así, pues, inicialmente las producciones de los estudiantes representan la construcción de unas matemáticas que son producto de una actividad de organización o modelación matemática que ellos mismos elaboran. Dicho proceso de modelación matemática se denomina matematización y puede estudiarse a partir de dos niveles: la matematización horizontal y la matematización vertical.

Principio de realidad: indica que se debe partir de contextos y situaciones realistas con el ánimo de que los estudiantes sientan la necesidad de matematizar la situación problema. Dichos contextos y situaciones realistas guardan alguna conexión con el mundo real, pero son ante todo situaciones que son reales en la mente de los estudiantes, y por tanto, las situaciones realistas tienen un carácter relativo que depende exclusivamente de la experiencia previa de los alumnos y/o de la capacidad de estos para imaginar la situación y no necesariamente implica que los problemas provienen del mundo real. De ser así, las situaciones limitarían las posibilidades de los estudiantes para aprender a operar dentro de los sistemas matemáticos (Bressan & Gallego, 2011).

Principio de nivel: durante el proceso de modelación matemática los estudiantes pasan por diferentes niveles de comprensión: desde la capacidad para inventar soluciones informales estrechamente ligadas al contexto [modelo de] pasando por esquematizaciones generales de la situación, hasta llegar a la adquisición de relaciones más amplias aplicables a otros contextos y situaciones [modelo para] (Panhuizen, 2008, Bressan & Gallego, 2011).

Principio de entrelazamiento: existe una fuerte interrelación e integración entre los contenidos matemáticos escolares, puesto que la resolución de situaciones realistas, a menudo, exige establecer conexiones con una amplia variedad de herramientas y conocimientos matemáticos. Así, pues, Bressan & Gallego (2011) afirman que este enfoque no hace mayores distinciones entre las unidades curriculares, generando coherencia a la enseñanza y facilitando que se den modos de matematizar muy diferentes.

Principio de interacción: el aprendizaje de las matemáticas es una actividad social donde la interacción colectiva (estudiante-estudiante/s y estudiante-docente) promueve la elevación en los niveles de comprensión. Esto no implica que todos los estudiantes alcanzan el mismo nivel de comprensión, sino que cada estudiante sigue su trayectoria propia de aprendizaje. Además, es esencial que el docente encuentre el momento oportuno para incluir la reflexión en el salón de clases y que anticipe cuando la interacción social puede obstaculizar el proceso de aprendizaje (Goffree, 2000).

Principio de orientación. Los docentes desempeñan un papel crucial en la forma como los estudiantes adquieren conocimientos, y es indispensable que estos promuevan espacios a través de los cuales se puedan construir los saberes matemáticos. De ninguna forma el docente debe olvidar que es un mediador entre las producciones informales de sus alumnos y las herramientas formales de la matemática, pues podría caer en el error de mostrar a los estudiantes lo que deben aprender, contradiciendo el principio de actividad.

PROPUESTA METODOLÓGICA

El diseño metodológico se fundamenta en consideraciones metodológicas de la EMR (los contextos, el análisis fenomenológico y la gestión docente) y algunos elementos de un estudio de casos cualitativo, básicamente un estudio de casos descriptivo, enfoque que permite identificar y describir los distintos factores que ejercen influencia en el fenómeno estudiado; en este caso, caracterizar, identificar y describir los diferentes niveles de matematización que presentan los estudiantes de Educación Secundaria cuando se enfrentan a situaciones realistas que involucran la creación de modelos cuadráticos.

El estudio se basó en el diseño de tres tareas sustentadas en la educación matemática realista, por lo cual, cada tarea está organizada de acuerdo con una estructura que inicia con la descripción general de la misma y termina con la anticipación de posibles modelos que pueden construir los estudiantes en diversos niveles de matematización.

La puesta en escena de la secuencia se desarrolló con la participación de 20 estudiantes que habían tomado el curso Álgebra y Funciones dictado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad del Valle en el marco del proyecto "Semilleros de Matemáticas". Estos estudiantes fueron seleccionados porque permitían la conformación de grupos heterogéneos al provenir de diferentes instituciones educativas y variados niveles de escolaridad.

La aproximación metodológica permitió el empleo de recursos tales como la entrevista, vídeos y grabaciones de audio que ayudaron a realizar con mayor detalle la interpretación y análisis de los resultados obtenidos. De igual manera, la observación participativa y especialmente las producciones de los estudiantes desempeñaron un papel fundamental para comprender cuáles son los niveles de matematización que presentan estos estudiantes cuando trabajan en la producción de modelos cuadráticos, a través de tareas fundadas en contextos significativos.

ALGUNAS CONCLUSIONES

En análisis del trabajo exploratorio se encuentra en construcción, pero los resultados obtenidos hasta el momento nos permiten reflexionar acerca de:

- ✓ Las posibilidades que ofrecen los contextos realistas para generar procesos de modelación y simbolización matemática.
- ✓ La formulación o integración de propuestas curriculares que reconozcan la importancia de involucrar el trabajo con contextos realistas en las aulas de

matemáticas, en la Educación Secundaria, habida cuenta de que la mayoría de las investigaciones se han planteado para la Educación Primaria.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arcavi, A. (2006). Lo cotidiano y lo académico en matemáticas. Disponible en http://www.sinewton.org/numeros/numeros/63/Articulo01.pdf

Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Disertación doctoral publicada, Centro de investigación y de estudios avanzados del instituto politécnico Nacional, Distrito Federal, México.

Biembengut, M. & Hein, N. (2004). Modelación Matemática y los desafíos para enseñar matemática. Educación matemática, 16(002), 105-125.

Bressan, A & Gallego, M. (2011). La Educación Matemática Realista: Bases teóricas. III Congreso Nacional de Matemática y Problemáticas de la Educación Contemporánea. Santa María, Argentina.

Córdoba, F. (2011). La modelación en matemática educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería. (Tesis inédita de maestría). Instituto politécnico nacional: centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada, México

Goffree, F. (2000). Principios y paradigmas de una educación matemática realista. En Gorgorió, Balachef y otros (comp.), Matemática y Educación. Retos y cambios en una perspectiva internacional, ICE, Universidad de Barcelona, Ed. Grao.

Razonamiento covariacional en estudiantes de quinto grado

María Elena Henao Ceballos[*]
Wilson Bosco Marín Franco[*]
Daniel Fernando Montoya Escobar[***]
Johan Sebastián Restrepo Tangarife[****]
Jhony Alexánder Villa-Ochoa[*****]

RESUMEN

Se presenta un avance de una investigación de tipo cualitativo en la cual se busca identificar las características de razonamiento presentadas en estudiantes de grado quinto al momento de enfrentarse a situaciones de tipo variacional; dichas características se discuten a la luz del marco conceptual para la covariación propuesto por Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu (2003). Desde las situaciones, se desprenden algunas implicaciones y recomendaciones para su implementación en el aula de clase, específicamente para un acercamiento a nociones como: función y tasa de variación, las cuales se encuentran en las bases propias del razonamiento covariacional y pueden abordarse desde los primeros grados de escolaridad como una manera de crear cimientos en la comprensión de los conceptos más relevantes del cálculo.

Palabras clave: razonamiento covariacional, tasa de variación, función, correlación.

[*] Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: mariahenaomf@hotmail.com
[**] Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: wilsonmarin77@hotmail.com
[***] Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: daniel_bass@hotmail.com
[****] Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: sebasrestrepo@hotmail.es
[*****] Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: javo@une.net.co

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

De acuerdo con lo observado en el aula de clases y algunas producciones teóricas formuladas en los ámbitos nacional e internacional, en las que se destacan las orientaciones del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (Colombia, 1998, 2006) y el marco conceptual planteado por Carlson y sus colaboradores, se viene desarrollando un estudio encaminado a brindar elementos que aporten al desarrollo del pensamiento variacional a partir de los razonamientos de los niños; en ese sentido, se planteó la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son algunas características del razonamiento covariacional en niños de quinto grado de la I. E. República de Uruguay? En coherencia con esta pregunta, el estudio se propuso identificar los comportamientos que caracterizan dicho razonamiento en niños del grado escolar en mención.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Carlson et al. (2003), basados en los estudios de Thompson (1994b), Confrey y (1995), Saldanha y Thompson (1998), Piaget (1970), entre otros, describen la noción de razonamiento covariacional como: "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra" (p. 124). Asimismo, presentan un marco conceptual compuesto por cinco acciones mentales y cinco niveles de razonamiento que describen y proporcionan un medio para clasificar la habilidad de razonamiento covariacional que un individuo exhibe en el contexto de una situación o tarea específica.

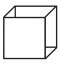
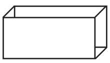
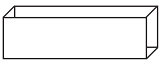
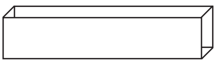
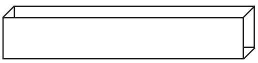
Si bien es cierto que los niveles de razonamiento y las acciones mentales están en términos de variables, aún no abordadas conceptualmente hasta el grado quinto, desde la misma definición de razonamiento covariacional, se habla de la coordinación de cantidades y, por tanto, se considera pertinente el pensar estrategias, situaciones, experiencias, etc., con el ánimo de resaltar, fortalecer y desarrollar estos modos de razonar que son fundamentales en la posterior comprensión de los conceptos más relevantes del cálculo.

METODOLOGÍA

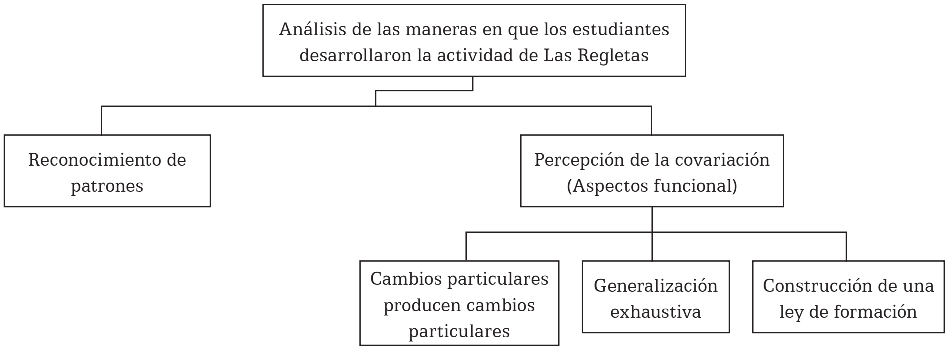
La investigación está orientada bajo el enfoque metodológico cualitativo, ya que se concibió desde una perspectiva abierta, libre y flexible a todo aquello que pudiera emerger -del contacto entre estudiantes, maestro cooperador e investigadores frente a situaciones que involucraran razonamiento covariacional y que permitieran identificar las características de dicho razonamiento- a medida que se iba nutriendo de las observaciones, los datos obtenidos de las experiencias con los estudiantes, así como de la interpretación que se hizo de estos. Como método de investigación se optó por el estudio de casos, el cual se fundamentó bajo la perspectiva de Stake (2007, p.11). La información fue recolectada a través de audio y vídeo, documentos elaborados por los estudiantes y diarios de campos, para después organizarla y analizarla mediante el establecimiento de categorías emergentes las cuales están en coherencia con los comportamientos que se propone describir esta investigación.

LOS PRIMEROS RESULTADOS

En este documento, se analiza un episodio de la investigación en el cual se les entregaron a los estudiantes las regletas de Coussinaire y se les pidió que hallaran el área superficial de cada regleta, cada vez que su volumen aumentaba. Para esto, se les entregó la siguiente tabla:

Regleta	Volumen (Unidades cúbicas)	*Área superficial* (Unidades cuadradas)
	1	6
	2	10
	3	
		
		
…….		

Después de los estudiantes diligenciaron la tabla, los entrevistadores interactuaron con cada grupo preguntándoles a los estudiantes acerca de los procedimientos realizados para completar la tabla, así como de las observaciones detectadas en el volumen y el área superficial; de acuerdo con sus respuestas emergían nuevos interrogantes que permitieron una conversación fluida, tranquila y abierta, con el ánimo de profundizar en las relaciones que pudieron establecer entre dichas magnitudes. En el siguiente diagrama, se presentan algunas de las características del razonamiento covariacional observadas en los estudiantes durante la ejecución de la actividad:



El siguiente episodio pretende ilustrar la percepción de la covariación intentando establecer algunas relaciones entre las cantidades de una manera más general:

Investigador: ¿Cómo hiciste para hallar el área superficial de cada regleta?

Estudiante: Yo primero sumé [los cuadrados que componen] las caras de cada regleta, si era la cinco, sumaba 5+5+5+5 y más uno de este lado y uno de este otro lado [aquí el estudiante señalaba los dos lados extremos de cada regleta]. Luego me di cuenta que era multiplicando por cuatro y sumándole estos dos.

Investigador: ¿Qué es lo que multiplicas por cuatro?

Estudiante: La regleta que me piden. Si es la catorce, multiplico 14 x 4 más estos dos. Si es la diez, igual y la cien también.

Investigador: ¿Qué puedes concluir de lo que has observado en el área superficial cuando aumentábamos el volumen de las regletas?

Estudiante: Entre más cubos más aumenta el área si le quitan cubos disminuye el área. Para saber cuánto tiene de volumen [área superficial] se multiplican todas las caras [el número de caras laterales de la regleta] por cuatro y a lo último se le suman las caras de los lados.

En este episodio se observa que el estudiante está asignando un nombre a la regleta de acuerdo con volumen que posee; de esa manera, la regleta compuesta por 15 cubitos, la llama "regleta quince". Si bien es cierto que al final del anterior diálogo, se observa una "confusión" entre el volumen y el área superficial, es importante aclarar que este hecho parece obedecer a una "ligereza en el lenguaje", más que a un error conceptual o procedimental. Lo anterior se confirma cuando el estudiante proporcionó la siguiente expresión para hallar el área superficial de la regleta treinta y cinco (compuesta de 35 cubitos unidad):

$$\begin{array}{rl} 35 & \\ \times\ 4 & \\ \hline 140 & + \\ 2 & \\ \hline 142 & \end{array}$$

En el razonamiento del estudiante se puede observar un reconocimiento de una correlación directa entre las cantidades volumen y área superficial (crecimiento/ decrecimiento en una cantidad, genera el mismo efecto en la otra cantidad). Asimismo, se reconoce que el estudiante determina dicha relación en forma verbal y la ejemplifica aritméticamente. Las declaraciones del estudiante permiten inferir que su razonamiento no estaba limitado al cálculo de algunos valores numéricos, sino que más allá de ello, la operación aritmética se convirtió en una manera de ejemplificar una relación más general establecida por el estudiante entre las dos cantidades que intervienen en la situación; esa generalidad se observa en la manera como el estudiante describe retóricamente el procedimiento para calcular el área dependiendo del volumen dado. En esta primera parte del estudio, no encontramos evidencias sobre la manera como el estudiante identificó la razón de cambio entre las cantidades; de esa manera la covariación, entendida en los términos de Carlson y sus colegas, se mostró más asociada en una implicación lógica en términos de causa-efecto, que a su comprensión y representación a través de una razón o cociente entre los valores entre dichas variables.

CONSIDERACIONES FINALES

En el episodio analizado anteriormente se pudo observar que los estudiantes tienen diferentes maneras de aproximarse a la noción de covariación; sin embargo, el hecho de que algunos estudiantes presentaran razonamientos con características covariacionales hace pertinente el generar ciertas experiencias y situaciones en el aula, con el objetivo de resaltar, fortalecer y desarrollar estos modos de razonar que están en las bases de la comprensión de los conceptos propios del cálculo.

En otros productos de la investigación en curso, se espera aportar mayores evidencias de las demás características del razonamiento covariacional descritas en el diagrama anterior. Asimismo, a otras maneras en la que los estudiantes reconocen algunos significados de la razón de cambio y su comprensión como una comparación y como una tercera cantidad que aporta al entendimiento de la manera como covarían las cantidades.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: una marco conceptual y un estudio. EMA, 8(2), 121-156.

Dolores, C., y Salgado, G. (2009). Elementos para la graficación covariacional. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 72, 63-74.

Johnson, H. (2012). Reasoning about variation in the intensity of change in covarying quantities involved in rate of change. The Journal of Mathematical Behavior, 31 (3), 313–330.

Colombia, Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos curriculares: Matemáticas. Santa fe de Bogotá, D.C.: Cooperativa Editorial Magisterio.

Colombia, Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Imprenta Nacional de Colombia.

Moore, K. C., y Carlson, M. P. (2012). Students' images of problem contexts when solving applied problems. The Journal of Mathematical Behavior , 31 (1), 48-59.

Stake, R. E. (2007). Investigación con estudio de casos (Cuarta ed.). Madrid: Morata.

Strom, A. D. (2006). The role of covariational reasoning in learning and understanding exponential functions., PME-NA 2006 Proceedings. Vol. 2-624

Villa-Ochoa, J. A. (2011). Raciocínio "covariacional": O caso da função quadrática. Comunicación presentada en la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Recife-Brasil.

Villa-Ochoa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. Tecné, Episteme y Didaxis (31). pp. 9-25

Enfoques para el estudio didáctico de conceptos del Cálculo

*Eric Hernández Sastoque**
*Lucía Zapata Cardona***

RESUMEN

En este artículo se presentan algunas reflexiones sobre resultados de investigaciones relacionadas con la comprensión de conceptos del cálculo presentes en la Educación Secundaria y Universitaria, como parte del avance de la configuración del estado del arte de una investigación doctoral en Educación Matemática. Las reflexiones presentadas se enmarcan en trabajos adelantados en programas de investigación sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con el análisis matemático, bajo diferentes enfoques epistemológicos como el cognitivo y sociocultural, y aproximaciones como la onto-semiótica. En cuanto a la metodología utilizada, se trata de una revisión documental para establecer descripciones, análisis o conclusiones.

Palabras clave: cálculo, epistemología, procesos cognitivos, sociocultural, comprensión.

* Universidad del Magdalena/Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: ehernandezs@unimagdalena.edu.co
** Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: luzapata@ayura.udea.edu.co

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Con respecto a la formación matemática de los jóvenes que estudian los últimos años de la Educación Secundaria o inician sus estudios universitarios es de gran importancia atender, desde los aportes en el área de la investigación educativa, los temas relacionados con las aproximaciones a la comprensión de los conceptos que involucra el análisis matemático, en particular los conceptos correspondientes al cálculo que estén presentes en la transición de la Educación Secundaria a la universitaria, más aún, cuando en el ámbito de la educación matemática se tiene que tanto algunos docentes universitarios como de la educación secundaria muestran preocupación por el fenómeno relacionado con el elevado número de estudiantes de primer año de estudios universitarios que reprueban los cursos de Cálculo. Para el caso de los que aprueban dichos cursos, la inquietud se centra en las dificultades que se presentan en la comprensión, aplicación o profundización de los conceptos involucrados en estos cursos durante el desarrollo de la carrera universitaria.

Por otra parte, el estudio de los conceptos relacionados con el análisis matemático ha ocupado a los investigadores en educación matemática alrededor de treinta años bajo diferentes enfoques epistemológicos; así, visto desde la investigación educativa, se aprecia la diversidad de paradigmas existentes que muestran que la investigación está lejos de ser un campo unificado, y que si bien esto contribuye a la riqueza del mismo, de igual forma dificulta el uso y síntesis de resultados de investigación (Artigue, 2003). Por lo tanto, se considera pertinente presentar algunas características generales de teorías o aproximaciones a la comprensión de conceptos propios del cálculo, con el propósito de contribuir al reconocimiento de diversos enfoques en esta temática. Este ejercicio puede conducir al enriquecimiento del debate sobre marcos referenciales en investigaciones en el área de la educación matemática, que le apuesten al tratamiento del aprendizaje del cálculo, y con ello abordar problemáticas educativas en las escuelas y universidades.

Se espera que a través de la presentación de algunas reflexiones sobre el aporte de investigaciones desarrolladas bajo enfoques cognitivista, aproximaciones “sociocultural” o enfoque onto-semiótico, podamos analizar, sin pretensiones de exhaustividad, algunos elementos diferenciadores o característicos que permitan una mejor explicación de los fenómenos relacionados con el aprendizaje de conceptos del cálculo.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Enfoque cognitivo. Las investigaciones de tipo cognitivo centran su principal atención en el individuo; se presentan en un primer momento investigaciones sobre el aprendizaje del alumno y, al considerar aspectos relacionado con el profesor, se extiende el objeto de investigación a procesos de enseñanza-aprendizaje considerando propiedades del alumno o del profesor como representaciones, valores, etc. Este tipo de estudios es cuestionado por el hecho de que la tradición psicologista no tiene suficientemente en cuenta el aspecto social (Font, 2002).

Este enfoque cognitivo está presente en muchas investigaciones de la educación Matemática interesadas en los esquemas mentales de los alumnos o de los profesores. Entre las líneas de investigación que se destacan dentro de este enfoque están: pensamiento matemático avanzado y la teoría de los campos conceptuales. A continuación consideraremos algunos elementos explicativos sobre la línea de pensamiento matemático avanzado.

Esta línea de investigación se genera alrededor de 1985 en el seno del congreso Psicología de la Educación Matemática (PME por sus siglas en inglés Psychology of Mathematics Education), cuando se forma un grupo de trabajo cuyo objetivo era estudiar la naturaleza del llamado pensamiento matemático avanzado, y en particular, profundizar en las investigaciones cognitivas acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con el cálculo infinitesimal (Tall, 1991). Entre estos procesos se encuentran la abstracción, la representación, la visualización y la conceptualización de naturaleza más psicológica que otros procesos cognitivos de naturaleza matemática como definir y demostrar, que también están presentes.

Ahora, en la práctica docente es común observar diferencias entre los conceptos formulados por las matemáticas y las interpretaciones que los estudiantes hacen de ellos. Para ello, Tall y Vinner (1981) definieron lo que se llamó concept image (imagen conceptual) como toda la estructura asociada al concepto, que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados a la noción matemática, la cual es lo que evocamos cuando escuchamos o vemos el nombre de un concepto, en vez de el concept definition (definición del concepto) (Vinner, 1991). Vinner considera la existencia de dos lugares diferentes en nuestra estructura cognitiva: uno para concept definition y el otro para concept image, donde puede haber interacción entre los dos, aunque se pueden formar de manera independiente.

Por otra parte, para el análisis teórico de un concepto, el grupo de investigación dirigido por Ed Dubinsky propuso un modelo cognitivo que describe las construcciones mentales específicas que un estudiante podría elaborar con el fin de desarrollar su comprensión de un concepto. Este análisis teórico se denominó descomposición genética del concepto, para lo cual se considera que la comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales, previamente construidos, para formar acciones; luego, las acciones se interiorizan para formar procesos, los cuales se encapsulan para formar objetos. Entonces, los objetos pueden ser des-encapsulados hacia los procesos y finalmente las acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas. Esta teoría se conoce en inglés como APOS (Action, Process, Object, Schema) (Azcárate & Camacho, 2003).

Aproximaciones de tipo sociocultural. La investigación en educación matemática durante los últimos años ha tomado interés sobre el contexto social de la clase de matemáticas, para lo cual, el rótulo de socio-cultural se usa para denotar epistemologías que ven al individuo como situado dentro de culturas y contextos sociales. Es así como el conocimiento es considerado conocimiento cultural y por lo tanto socialmente construido, potencialmente cambiable y regulado socialmente. Lo que implica tomar distancia de un conocimiento a priori y construido individualmente (Sierpinska & Lerman, 1996). En los enfoques socioculturales el conocimiento es producido por sujetos concretos, los cuales se identifican como un sujeto que piensa y siente dentro de un trasfondo cultural, en oposición a la concepción burguesa-liberal del sujeto constructivista caracterizado por un poder de autodeterminación y cuyos proyectos y significados emanan del propio sujeto (Radford, 2011).

Una de las aproximaciones desarrolladas bajo este enfoque es la teoría de la actividad, en la cual se toma el hecho de que a través de herramientas culturales se mediatizan la sociedad y la cultura; por lo tanto, las acciones del individuo en una actividad involucran cognición, cultura y afecto, motivadas por la perspectiva del individuo. Otra aproximación importante que promueve una visión socio-cultural es el interaccionismo, para el cual, el aprendizaje no es el intento de la mente individual de adaptarse a un entorno, sino se presenta como una interacción con la cultura de la clase, la cual también se ve afectada en su constitución. En este sentido, los significados están constituidos en interacciones y no son generados por construcciones de mentes individuales ni son atributos de una mente colectiva de una sociedad. Algunos de los problemas centrales para la Educación Matemática, desde el interaccionismo son: ¿Cómo se constituyen interactivamente los significados matemáticos en las diferentes culturas de la clase de matemática?, ¿Cómo se estabilizan estos significados?, ¿Cómo son estos significados y cómo dependen del tipo de cultura de la clase en que evolucionan? (Sierpinska & Lerman, 1996).

Por último, desde esta misma perspectiva sociocultural, se presenta la teoría de la objetivación (to), la cual plantea que las didácticas disciplinares y particularmente la didáctica de las matemáticas deben ocuparse tanto del saber como del ser, y no limitarse solamente a la difusión de saberes disciplinares. Es así como el aprender se asume no como un simple adquirir de conocimientos sino como un proceso formativo y trans-formativo del ser, del sujeto que aprende, con un reconocimiento de responsabilidades no solo de las que le atañen en lo personal sino en su compromiso en una cadena histórica del ser, donde está inmersa la realización de los otros seres. La TO desarrolla dos constructos teóricos interrelacionados, denominados objetivación y subjetivación, para teorizar la evolución de formas culturales de pensamiento y ser. Las objetivaciones son procesos sociales, donde el estudiante dota de significados a los objetos culturales matemáticos y de la lógica cultural de estos, alcanzando una comprensión crítica. Las subjetivaciones son procesos intersubjetivos, donde el estudiante se reconoce y es reconocido como miembro de una comunidad sociocultural, a través de su participación en prácticas sociales. Entre las preguntas de investigación desde la TO, se plantean las que se refieren a dar cuenta de los procesos de objetivación y subjetivación (Radford, 2011).

Enfoque onto-semiótico (EOS). Este enfoque se presenta como una perspectiva sistémica e interdisciplinaria para enfrentar la complejidad de la educación matemática como campo de investigación, la cual podría ayudar a superar algunas limitaciones para el análisis de la cognición e instrucción matemática. La formulación de nociones clave para el EOS como: práctica matemática, objeto matemático, función semiótica, entre otras, permitiría una articulación coherente con otros marcos teóricos, como el constructivismo social, el enfoque socioepistemológico, el enfoque etno-matemático y el sociocultural (Godino, Batanero, & Font, 2007).

CONCLUSIONES

En educación matemática hay una riqueza de problemas de investigación que pueden surgir para estudiar el aprendizaje y enseñanza del cálculo; esta riqueza va acompañada de una variedad de aproximaciones que divergen en sus enfoques epistemológicos. Sin embargo, actualmente existen estudios y programas de investigación que abordan algunos de estos problemas intentando explicar los fenómenos involucrados a través de constructos teóricos con cierta articulación de diversos enfoques. Por lo tanto, es conveniente estudiar diferentes enfoques teóricos presentes en una disciplina en crecimiento y fortalecimiento como la educación matemática, lo cual permitirá identificar los marcos de referencia más adecuados a las características y condiciones del problema de investigación de interés.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X No. 2, 117–134.

Azcárate, C., & Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en Didáctica del Análisis Matemático. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X No. 2, 135–149.

Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en Didáctica de la Matemáticas. Revista EMA, 7 No.2, 127–170.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The Onto-Semiotic approach to research in Mathematics Education. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1–2), 127–135.

Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la Didáctica de las Matemáticas. In J. Vallès, D. Álvarez & R. Rickenmann (Eds.), L'ctivitat docent intervenció, innovació, investigació Girona (Spain): Documenta Universitaria.

Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In A. J. Bishop (Ed.), International Handbook of Mathematics Education (pp. 827–876). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1991). Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall D. y Vinner S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular rference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12 (2), 151–169.

Vinner, S. (1991). The role of denitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (pp. 65–81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Una unidad social para el aprendizaje dialógico en la zona de desarrollo próximo: el trabajo con monitores en secundaria

Diana Jessica Hernández Márquez[*]

RESUMEN

Se reporta la aplicación de una estrategia colaborativa entre pares de estudiantes de distinto rendimiento en la asignatura de Matemáticas, en sesiones de resolución de problemas, examinando los diálogos entre parejas seleccionadas de un grupo de 27 estudiantes de secundaria. La estrategia propuesta propicia el trabajo en la ZDP. En la experimentación se impartió un taller para profesores donde se sugirieron algunos instrumentos que pueden auxiliarles en la selección de las duplas de estudiantes que mejor pueden colaborar. Los resultados mostraron que el trabajo colaborativo entre pares de alumnos permite un diálogo matemático más simétrico que entre maestro-estudiante, y en conjunto con la estrategia, fomentan el trabajo cooperativo que ayuda a esclarecer conocimientos matemáticos previos de mala calidad o escasos.

Palabras clave: trabajo en pares, aprendizaje dialógico, zona de desarrollo próximo

[*] CINVESTAV-México. Dirección electrónica: dhernandez@cinvestav.mx

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

El presente trabajo reporta una investigación todavía en curso interesada en proponer una estrategia de trabajo para la resolución de problemas en Educación Secundaria, explorando el uso del lenguaje matemático y común utilizado en duplas de estudiantes en su resolución. En México, la orientación de los planes y programas de estudio vigentes recomiendan el trabajo colectivo, pero generalmente los grupos de clase son muy numerosos y el espacio de las aulas muy reducido. Se sabe que resulta complicado diseñar, dar seguimiento y evaluar el aprendizaje matemático real de los estudiantes cuando trabajan en equipos con numerosos integrantes. Pensando en dar una alternativa a lo anterior, surge la idea principal de esta investigación, que es proponer una manera de trabajo que permita una forma muy elemental de trabajo colectivo, manejable en grupos de clase numerosos y que no implique un cambio radical dentro del aula para que los profesores con formación tradicional puedan acceder a ella sin cambiar drásticamente su forma de llevar la clase de matemáticas. Nuestra propuesta utiliza la unidad mínima de trabajo compartido, el trabajo en parejas, seleccionadas para que un alumno más aventajado ayude a otro que lo está menos, poniendo en funcionamiento el diálogo entre iguales para crear una ZDP.

Las preguntas que aborda esta investigación son: ¿De qué manera la estrategia de trabajo en conjunto con los intercambios dialógicos entre iguales permite al alumno de secundaria incorporar los recursos matemáticos que son puestos en movimiento con ayuda de un compañero más aventajado trabajando juntos en la ZDP? y ¿Cómo usa después esos recursos matemáticos de manera autónoma utilizando la estrategia propuesta para trabajar la resolución de problemas?

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

La estrategia de trabajo que proponemos en esta investigación intenta, por una parte, aprovechar el trabajo asistido que puede proporcionar un igual más aventajado en el dominio matemático, y por otra parte, beneficiarse del diálogo más simétrico que se establece con interlocutores de edades semejantes, para crear una zona de desarrollo próximo. De acuerdo con el enfoque sociocultural los sistemas de conceptos científicos se forman de las experiencias con el entorno, con el uso de herramientas simbólicas de la cultura, y de la interacción con otros estudiantes o adultos.

La experiencia de los estudiantes está presente en dos planos diferentes: primero en un plano interpersonal -con otros-, y después en un plano intrapersonal o sea con él mismo (Vigotsky, 1962).

Vigotsky (1979) define la zona de desarrollo próximo como la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz. Según Vigotsky el desarrollo en una conducta sucede en dos niveles que limitan la zona de desarrollo próximo: el nivel bajo hace referencia al desempeño independiente del estudiante, lo que sabe y puede hacer solo; el nivel superior es lo máximo que un estudiante puede lograr con ayuda de un adulto o un igual y le llama desempeño asistido. Entre el desempeño asistido y el desempeño independiente existen varios grados de desempeño parcialmente asistido; este último incluye las conductas en las que el estudiante contó con la ayuda de su profesor o de otra persona, incluso alguien de su misma edad. Esta interacción puede consistir en preguntas guía, reformular la pregunta, pedir nuevamente una explicación, solicitar la narración de lo entendido, presentar el diseño de una exposición. La interacción es una forma de cooperación para recibir conocimiento. Otra forma de intervención es la ayuda indirecta, la cual consiste en procurar ambientes de aprendizaje, sometiendo al medio para facilitar la práctica de determinados hábitos intelectuales.

El desempeño asistido incluye conversaciones con otra persona, así como cualquier situación en donde mejoren las actividades mentales como resultado de la interacción social (Vigotsky, 1962). Además de los diálogos entre las parejas de estudiantes, nos interesa el diálogo profesor-estudiante, que es uno de los dispositivos comunes más tradicionales utilizados en la enseñanza. Estas formas de enseñanza apuntan a algunos problemas referidos a la organización de las actividades escolares y a ciertas características sociolingüísticas de las escuelas, incluidas las formas de discurso escolar. En este sentido Baquero (1995) rescata la importancia de buscar nuevas formas de aprendizaje que revolucionen los actuales sistemas escolares. La escolarización se delimita, entonces, como una actividad culturalmente organizada en donde se producen procesos de apropiación específicos. Pero un proceso de apropiación podría ser mucho más benéfico si fuera mutuo y secuenciado.

Newman, Griffin y Cole (1991) mencionan que en desarrollo de una actividad específica por ellos indagada, el profesor intenta hacer los emparejamientos entre los niños como si se hubieran realizado de acuerdo con el objetivo que se tiene en mente. Este tipo de apropiación constituye una característica que invade todas las interacciones docentes. Coincidimos con esta concepción, ya que en un diálogo asimétrico el profesor intenta dialogar con sus estudiantes y con base en sus objetivos él cree que están aprendiendo. La asimetría en la comprensión de las situaciones de enseñanza posee un elemento de importancia en relación con la posible comprensión de un tema.

El elemento crucial parece consistir en una participación asimétrica en la definición de la situación de enseñanza aprendizaje y, por tanto, en la asignación relativa de posiciones subjetivas. Un desconocimiento relativo, por parte del aprendiz, de los objetivos que regulan la actividad conjunta parece un elemento inherente a las prácticas educativas y, por consiguiente, la comprensión de los objetivos o la complejidad global de un problema de estudio solo es factible, si las prácticas de enseñanza lo señalan o proponen como objetivo específico. Sin embargo, el progreso cognitivo parece darse, también, por la posibilidad de participar en actividades como si se comprendiera el último tema que se trata; el desempeño del sujeto va por delante de su competencia, según Cazden (1991).

El problema que plantean algunos autores en torno al diálogo asimétrico es que es probable hablar de desarrollos truncos rudimentarios o múltiples, e incluso de pensamientos desviados, es decir, que los estudiantes aparentemente comprendan, pero en realidad estén equivocados en su apreciación respecto a la solución de un problema, los procesos de enseñanza, o las características de los sistemas de interacción como planteaba Tudge (2001) no reúnan las condiciones adecuadas, o el proceso de escolarización de un sujeto se interrumpa o bien quede con muchos "huecos" de conocimientos. Es decir, el modelo admitiría un repertorio significativo de contingencias y otorga un carácter de positividad a las distintas formas posibles de construcción cognitiva.

METODOLOGÍA

La investigación se realizó en una Escuela Secundaria Pública en el turno matutino, con un grupo de 29 estudiantes de segundo año de secundaria de entre 13 a 14 años de edad. Previo a la toma de datos se impartió un taller a 4 profesores de matemáticas para dar a conocer nuestra propuesta de trabajo con monitores, que de manera muy general consiste en ubicar a los alumnos que podrían ser candidatos a ser monitores y monitoreados auxiliándonos de los instrumentos que detallamos más adelante. Una de las características de los estudiantes monitores es que deberán ser más aventajados en el dominio matemático y los alumnos monitoreados se caracterizarán por tener bajo rendimiento en la asignatura de matemáticas. También hay que explicar al grupo la organización previa para el trabajo en clase de matemáticas y la forma de participación en clase.

El ambiente de trabajo creado por el docente será punto capital para el buen funcionamiento de la estrategia de trabajo. Posteriormente se eligió trabajar con uno de los 4 profesores y se le solicitó hicieran el llenado de un cuadro de obtención de datos; se solicitó también la aplicación de un sociograma al grupo en general. El objetivo de ambos instrumentos fue obtener datos para tener una noción de los posibles alumnos candidatos a ser monitores y monitoreados, además de detectar la afinidad para el trabajo entre ellos. El cuadro plantea diez características referentes al dominio y eficiencia la comunicación de los temas de matemáticas, así como tipos de participaciones en clase y se pide al profesor que coloque en los cuadros según las características que considere para cada alumno. Se solicitó la lista de evaluación para observar de manera general los estudiantes de alto y bajo rendimiento en la asignatura.

El sociograma consta de 8 preguntas referentes a las empatías para el trabajo con los estudiantes. Los dos instrumentos se enfocan a encontrar las mejores duplas para la resolución de problemas. También propuso un repertorio de problemas a resolver referentes a los temas "estimación de ángulos y comparación de razones" para que los trabajaran las parejas de estudiantes y recuperar los diálogos utilizados entre ellos en la resolución de los mismos.

Posteriormente, se puso en acción el trabajo con monitores con la finalidad de realizar la observación directa de las parejas de estudiantes y tomar en vídeo los diálogos entre ellos. Finalmente, se trabaja en el diseño de las entrevistas a algunas duplas de trabajo y el profesor con la finalidad de ampliar los datos obtenidos. Para el análisis de los diálogos se utiliza la propuesta de Gee, J. (2011), quien sugiere algunas herramientas para analizar el discurso; estas herramientas permiten enfocar ciertos elementos de los intercambios dialógicos como por ejemplo: la deixis que habla de qué aspectos y significados necesitan ser completados para entender el contexto; la herramienta de completar que trata de lo que debe completarse para lograr una mejor claridad, y la herramienta de haciendo y no solo diciendo que trata de poner atención no solo en lo que lo que se está diciendo sino también en lo que se está haciendo.

ANÁLISIS DE DATOS Y CONCLUSIONES

El análisis completo de los diálogos aún está en proceso; sin embargo, los resultados preliminares de la aplicación de la estrategia propuesta en conjunto con unidades mínimas de trabajo colaborativo mostraron que existen diferencias en el uso de las herramientas dialógicas en los pares de estudiantes y profesor-alumno, principalmente en la de deixis, que es utilizada por el alumno monitoreado para solicitar aspectos de significados específicos que necesitan para iniciar la comprensión del problema y después también es usada para el inicio de la resolución del mismo; en la de completar, que es utilizada por algunos estudiantes monitores de manera que proporcionan información adicional como por ejemplo analogías que pueden ayudar a indagar o completar de manera más sencilla. El profesor la utiliza solo esperando una respuesta cerrada del estudiante y si no es completada de manera correcta pide a otro compañero que la complete sin asegurarse de que el alumno que no la pudo completar haya entendido el porqué de la respuesta dada, y la herramienta haciendo y no solo diciendo que es utilizada por algunos monitores para indicar a sus compañeros acciones específicas que deben realizar. El profesor las hace tácitas. Esperamos dilucidar con más detalle cómo intervienen estos elementos en la ZDP.

En las duplas con monitores se observó una situación inicial donde los monitoreados mostraban: 1) pobre vocabulario de la lengua materna, 2) problemas de comprensión de lectura y pobre escritura, 3) baja autoestima, 4) conocimientos de mala calidad y escasos conceptos matemáticos. En las duplas de trabajo los monitoreados mostraron mejoría en los cuatro puntos antes mencionados, y en relación con los puntos 1) y 2) el profesor reforzaba el trabajo del monitor. Notamos también que el trabajo colaborativo entre pares y cooperativo entre alumnos y profesor ayudan a mejorar los puntos 2) y 4) y como consecuencia el punto 3) comienza a cambiar su estatus. Es importante procurar un ambiente de trabajo respetuoso de las ideas de los demás y con un trato equitativo hacia los estudiantes, independientemente de su tipo de participación en clase, aspectos que se detallan en una sección de nuestra propuesta de trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Baquero, R. (1996). Vigotsky y el aprendizaje escolar. Aique. Argentina.

Cazden, C. (1991). El discurso en el aula: el lenguaje de la enseñanza y del aprendizaje. Barcelona, España: Paidós.

Gree, P. (2011). How to do Discours Analysis. A toolkit. Routledge. USA.

Mercer, Nail (2001). Palabras y mentes. España: Paidós.

Newman, D., Griffin, P. & Cole, M. (1991). La zona de construcción del conocimiento.

Madrid: Morata.

Secretaría de Educación Pública. (2011). Plan de Estudios 2011. Educación Básica. México: SEP.

Smagorinsky, P. (1995) The Social Construction of Data: Methodological Problems of

Investigating Learning in the Zone of Proximal Development. Review of Educational. Research, 65 (3), 191–212.

Tudge, J. (2001). Vygotsky, la zona de desarrollo próximo y la colaboración entre pares: connotaciones para la práctica en el aula. Argentina: Aique.

Vigotsky, L. (1962). Thought and language. Cambridge, M. A.: MIT Press. (Original work published 1934).

Vigotsky, L. S. (1979). El desarrollo de las funciones psicológicas superiores. En: Obras

Escogidas, Vol. III. Madrid, España: Visor. Cazden, C. (1991). *El discurso en el aula: el lenguaje de la enseñanza y del aprendizaje*. Paidós.

Gree, P. (2011). *How to do Discours Analysis*. A toolkit. Routledge. USA.

Mercer, Nail (2001). *Palabras y mentes*. España: Paidós.

Newman, D., Griffin, P. & Cole, M. (1991). *La zona de construcción del conocimiento*. Madrid: Morata.

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Plan de Estudios 2011. Educación Básica*. México: SEP.

Smagorinsky, P. (1995) *The Social Construction of Data: Methodological Problems of*

Investigating Learning in the Zone of Proximal Development. Review of Educational. Research, 65 (3), 191-212.

Tudge, J. (2001). *Vygotsky, la zona de desarrollo próximo y la colaboración entre pares: connotaciones para la práctica en el aula*. Argentina: Aique.

Vigotsky, L. (1962). *Thought and language*. Cambridge, M. A.: MIT Press. (Original work published 1934).

Vigotsky, L. S. (1979). El desarrollo de las funciones psicológicas superiores. En: *Obras Escogidas*, Vol. III. Madrid, España: Visor.

Análisis didáctico de las ecuaciones algebraicas de primer grado y su impacto en la Educación Básica

*Cristian Andrés Hurtado Moreno**

RESUMEN

La propuesta surge como motivo de reflexión de las necesidades formativas que requieren los profesores de matemáticas para desempeñar, entender, analizar, y actuar sobre sus prácticas cotidianas. Así, se piensa la propuesta metodológica del análisis didáctico como medio para tal fin. Esta comunicación da cuenta de los avances de una tesis de investigación de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad del Valle, en donde se pretende, grosso modo, realizar un análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado para construir, posteriormente, una unidad didáctica en torno a este objeto matemático. Dicha unidad será puesta a criterio de dos profesores de Educación Básica para realizar registros de análisis frente a su formación y a las necesidades de la misma.

Palabras clave: formación de profesores de matemáticas, álgebra escolar, análisis didáctico.

* Universidad del Valle. Direcciones electrónicas: crianmo@hotmail.com, cirsmo@univalle.edu.co

PRESENTACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

Tanto en el marco amplio de la investigación en didáctica del álgebra, como en mi práctica profesional como docente de matemáticas y, asimismo, en los análisis de pruebas tanto internacionales como nacionales, se evidencia, con gran preocupación, la oposición que se presenta en los estudiantes al enfrentarse al aprendizaje del álgebra, en general, y a la compresión y significación de las ecuaciones algebraicas, en lo particular (Palarea, 1999; Kieran, 1992; Valoyes & Malagón, 2006; Filloy & Rojano, 1989). Es así como Castro y Molina (2007) aseguran que:

> La enseñanza del álgebra escolar ha sido y sigue siendo tema de preocupación para la educación matemática. Muchos investigadores consideran que la enseñanza tradicional del álgebra no es adecuada y señalan la falta de comprensión que ponen de manifiesto los alumnos en su aprendizaje algebraico

Entre las múltiples dificultades que se ponen de manifiesto en este ámbito sobresale, entre otras, la falta de compresión en los escolares para abordar métodos y símbolos que dan cuenta de procesos de generalización y, con ello, mayores niveles de abstracción que los que usualmente se encontraban en sus estudios aritméticos. Tal problema se resalta, por ejemplo, cuando se presenta la necesidad de operar las incógnitas en el campo de las ecuaciones algebraicas y, por tanto, de entender que lo que cobra importancia en los estudios algebraicos son las relaciones puestas sobre lo representado, las operaciones, y no la(s) letra(s) en sí misma(s), la cual es comúnmente pensada como un número en particular.

El hecho tal que los estudiantes lleguen con años de "experiencia" en los distintos tratamientos y maneras de entender y concebir las ecuaciones y que hayan logrado consolidar muy poco de este objeto matemático al terminar sus estudios escolares, simplificando su conocimiento a tal punto de simples procedimientos mecánicos, rutinarios y memorísticos para resolver ecuaciones, esto es, pasando de un lado al otro letras y números, deja grandes inquietudes frente a los procesos de enseñanza que se le han dado al objeto en cuestión y el rol que ha jugado el profesor a cargo de este proceso, dado que este lo determina radicalmente.

La manera como el docente enseña un determinado conocimiento determina radicalmente la forma como sus estudiantes lo aprenderán, lo cual ha sido ampliamente discutido (Ernest, 1989). Así pues, el papel que el profesor juega en la adquisición de conocimiento en los estudiantes, particularmente, en la forma como se ido construyendo la noción y maneras de abordar las ecuaciones lineales en el colegio se vuelve un punto central para intentar aproximar posibles cuestiones frente a las dificultades y errores que manifiestan los estudiantes en sus estudios y tratamientos con este objeto matemático.

Diversas investigaciones, así como mi experiencia profesional ponen en primera vista la "forma tradicional", y muy cuestionada por numerosos investigadores, de ser enseñada el álgebra en la escuela. Los profesores a cargo de este proceso, y guiados por los currículos locales, siguen una manera convencional de enseñar álgebra, una manera que podría acentuar la brecha epistemológica, cognitiva y didáctica existente entre los modos de pensamiento aritméticos y algebraicos.

Se trata de poner en el centro de la problemática la formación que poseen los docentes en torno al trabajo que realizan para enseñar determinado objeto, en particular el mencionado. Si bien, pues, se reconoce que el profesor quiere realizar su trabajo lo mejor posible, la manera como regularmente se abordan las ecuaciones algebraicas de primer grado en las aulas, esto es, de manera tradicional, magistral y de forma mecánica, pone de manifiesto su carencia de elementos teóricos y didácticos necesarios para la enseñanza del objeto en cuestión.

> Los profesores de matemáticas presentan acusadas carencias formativas en psicología, pedagogía, sociología de la educación, epistemología, historia, y didáctica de la matemática, lo cual implica una desconexión entre su trabajo profesional y las bases y desarrollos teóricos correspondientes. (Rico, 1997)

Se trata entonces de resaltar la eminente necesidad de formación para los profesores de matemáticas, tal cual como se ha debatido durante los últimos años en el campo de la Educación Matemática (Rico, 1997, 1998; Bedoya, 2011; Flores y Fernández, 2001). Es necesario que los profesores en ejercicio, con mayor razón, se apropien de modelos teóricos y de esquemas fundados que organicen el conocimiento pedagógico de los contenidos y, con ello, destruir la creencia que para trabajar la enseñanza de las matemáticas basta con poseer conocimientos y destrezas específicos en esta ciencia. "[...] el *conocimiento matemático* de los profesores aunque necesario no es suficiente para explicar las diferentes aproximaciones didácticas de los profesores de matemáticas" (Ernest, 1989).

La problemática que se intenta poner de manifiesto gira en torno a que, si bien el profesor de matemáticas encargado de enseñar álgebra en la escuela necesita sólidos conocimientos sobre los fundamentos teóricos del currículo, el diseño, implementación y evaluación para sus clases, este carece de las herramientas teóricas necesarias que le permitirán lograr tal fin, viendo limitado su quehacer a lo que cree o no está bien. "Sin una formación teórica adecuada en este campo, los profesores ven limitadas sus funciones a las de meros ejecutores de un campo de decisiones cuya coherencia y lógica no dominan y no entienden" (Rico, 1997).

Bajo esta perspectiva, es necesario que los docentes se apropien de elementos teóricos y conceptuales que les permitan tomar decisiones en el momento de actuar en el aula de clase, en el momento de adoptar y adaptar la estructura curricular que implementarán con sus estudiantes. Se propone, en este sentido, que el profesor cuente con los elementos necesarios para que se responsabilice de diseñar y desarrollar el currículo en su contexto local: el aula de clase.

La ubicación de las problemáticas señaladas se aborda en una doble dialéctica entre los desarrollos mundiales sobre la didáctica del álgebra y la formación de profesores de matemáticas. Es así como nos interesa indagar:

¿Qué *conocimientos didácticos base requiere un profesor de matemáticas para elaborar y para implementar una unidad didáctica en torno a la enseñanza de las ecuaciones algebraicas de primer grado con una incógnita?*

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

La presente propuesta se vincula a los desarrollos teóricos, conceptuales y metodológicos desarrollados por el grupo PNA de la Universidad de Granada en España, a la cabeza del profesor Luis Rico. Así pues, se toma como marco amplio conceptual la propuesta del profesor Rico de los o*rganizadores del currículo* y el *conocimiento didáctico*, también trabajada, complementada y desarrollada por muchos de los miembros del grupo mencionado, en donde se pone de manifiesto, como parte procedimental y metodológica, el *análisis didáctico*. Son pues estos tres grandes desarrollos teórico-conceptuales los que dirigen el proyecto de investigación que da lugar a la propuesta que se presenta.

De otro lado, se toman como referencia investigaciones producidas en torno al papel docente como promotor y generador de pensamiento algebraico en los estudiantes y las necesidades que estos demandan para tal fin: Castro (2008); Godino et al, (2011)

METODOLOGÍA

Par efectos del tal objetivo, se pretende, en primera instancia, realizar un análisis didáctico del contenido en cuestión, esto es, someterlo a la revisión documentada de ciertos organizadores que considero claves para su enseñanza, a saber: un análisis de tipo matemático, un análisis de tipo histórico y epistemológico, un análisis fenomenológico y uno de tipo semiótico (o de las representaciones). El análisis didáctico ha de permitir, por un lado, la identificación de momentos y elementos clave en el desarrollo del objeto matemático en cuestión, así como los necesarios para los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por otro lado, debe permitir la construcción de la unidad didáctica que se requiere para la enseñanza de dicho objeto, en el sentido que permita recoger los elementos teóricos y didácticos brindados por los distintos análisis mencionados y ponerlos al servicio de la unidad.

En un segundo momento, se pretende realizar encuentros directos con el profesor a cargo de orientar los grados séptimos y octavos en la institución en la cual laboro (años en los cuales el estudio de las ecuaciones lineales es central), esto a partir de encuestas. Esto para poner de relieve aspectos centrales que se desean indagar conforme a los objetivos del proyecto. Finalmente se realizarán, a la luz de la formación de profesores, análisis de los datos obtenidos a partir de lo trabajado por los profesores sobre la unidad didáctica construida.

ESTADO ACTUAL DEL PROYECTO

El proyecto se encuentra en el desarrollo del análisis didáctico de las ecuaciones algebraicas de primer grado. En este, se está avanzando en el análisis de los aspectos históricos y epistemológicos, y el análisis de las representaciones. Respecto al primero, se han identificado tres momentos clave para su estudio: los trabajos propuestos por Al –Khwarizmi, Cardano y Descartes. Respecto al segundo análisis, se abordan las ecuaciones desde tres registros de representación semiótica que se consideran claves para su movilización en las prácticas de enseñanza y aprendizaje, a saber: el registro algebraico o simbólico, el registro de lengua natural y el registro gráfico o del sistema coordenado.

CONCLUSIONES

Dado que la presente propuesta se vincula a una tesis de maestría en ejecución, (un 45% de su totalidad se ha desarrollado) no se cree pertinente arrojar conclusiones de lo que hasta el momento se tiene conforme a los objetivos planteados; no obstante, se podrían dar varias de las resaltadas por lo que reportan las investigaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bedoya, E. (En prensa). Formación Profesional del Profesor de Matemáticas: Conocimiento y Análisis Didáctico. *Documento de trabajo en elaboración*. Santiago de Cali: Área de Educación Matemática, Universidad del Valle.

Castro, E. & Molina, M. (2007). *Desarrollo del Pensamiento Relacional Mediante Trabajo con igualdades Numéricas en Aritmética Básica*. En: Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal. *Educación Matemática*, *19*(2). México.

Castro, W. (2008). Razonamiento algebraico elemental en futuros maestros: un estudio exploratorio. Tesis de maestría. Universidad de Granada, Granada, España.

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. En Ernest, P. (Ed.). *Mathematics Teaching: The State of the Art*, London, Falmer Press, 1989. 249-254.

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving Equations: The transitions from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics*, 9 (2), 19–25.

Flores & Fernández (2001). *Reflexión sobre un problema profesional relacionado con la enseñanza del álgebra*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.

Godino, J., Castro, W. & Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores. *UNION*: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 25, pp. 73 - 88

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Grows, D. A. Ed. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Traducción castellana de Luis Puig.

Palarea, M. (1999). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. Tesis doctoral. Tenerife: Departamento de Análisis Didáctico, Universidad de La Laguna.

Rico, L. (1998). Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional. RELIME - *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1 – 001, pp. 22-39.

Rico, L. (Coord.) (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Horsori.

Valoyes, L. & Malagón, M. (2006). *Formación de pensamiento algebraico en la educación escolar*. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía. Cali, Valle del Cauca.

La comprensión del teorema de Thales y la entrevista de carácter socrático

Tanith Celeny Ibarra Muñoz[*]
Edison Sucerquia Vega[**]
Carlos Mario Jaramillo López[***]

RESUMEN

El programa de Maestría en Educación con énfasis en Docencia de las Matemáticas, de la Universidad de Antioquia, ha extendido su formación a las diferentes sedes de nuestro departamento. El presente escrito hace parte del proceso de investigación desarrollado en la región del suroeste de Antioquia y, además, pertenece a una de las líneas de investigación del Grupo de Investigación en Educación Matemática e Historia (UdeA–Eafit). El estudio tiene como objetivo principal, caracterizar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes del grado quinto sobre el concepto de proporcionalidad enfocado desde el teorema de Thales, según el modelo educativo de van Hiele. Para clasificar o ubicar a los estudiantes en un nivel de comprensión, se realizará una entrevista de carácter socrático como instrumento para el proceso de investigación.

Palabras clave: teorema de Thales – niveles de van Hiele – entrevista de carácter socrático.

[*] Estudiante de Maestría Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: tanith927@yahoo.es
[**] Docente Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: esucerquia@ayura.udea.edu.co
[***] Docente titular, Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: cama@matematicas.udea.edu.co

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Contexto

La educación matemática en Colombia está fundamentada por lo que plantean los lineamientos curriculares en matemáticas y estándares básicos de competencias en matemáticas, los cuales resaltan que en el conocimiento matemático se distinguen dos tipos básicos (MEN, 2003):

> ... el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental. El primero está más cercano a la reflexión y se caracteriza por ser un conocimiento teórico, producido por la actividad cognitiva, muy rico en relaciones entre sus componentes y con otros conocimientos; tiene un carácter declarativo y se asocia con el saber qué y el saber por qué. Por su parte, el procedimental está más cercano a la acción y se relaciona con las técnicas y las estrategias para representar conceptos y para transformar dichas representaciones; con las habilidades y destrezas para elaborar, comparar y ejercitar algoritmos y para argumentar convincentemente.

Uno de los aspectos principales en la enseñanza de la matemática, y que en algunos casos ha causado gran dificultad, es identificar qué tanto comprenden los estudiantes los conocimientos matemáticos especialmente los conocimientos conceptuales, lo que genera, en algunos casos, dificultades para esclarecer los procesos metodológicos que permitan que los estudiantes progresen en sus procesos de aprendizaje. El presente estudio pretende construir, implementar y validar un instrumento que permita conocer la comprensión que tienen los estudiantes para el concepto de proporcionalidad, concepto fundamental en la matemática.

A continuación se describe brevemente el proceso de investigación que se desarrolla en la Institución Educativa Rural Jesús María Osorno, institución de carácter oficial que está ubicada en la zona rural en la vereda la Frisolera del municipio de Donmatías ubicado en la región del norte de Antioquia. Actualmente, la institución cuenta con 86 estudiantes matriculados desde preescolar hasta noveno grado y con un personal de cuatro docentes, trabaja una sola jornada de 8 a. m. a 2:30 p. m. para Básica Secundaria, y hasta la 1:30 p. m. para Básica Primaria. Por el bajo número de estudiantes los grados están por grupos: el grupo uno es el de preescolar, primero y segundo que tiene 30 estudiantes; el grupo dos es el de tercero, cuarto y quinto que cuenta con 20 estudiantes; el grupo tres es el de sexto y séptimo con 26 estudiantes, y el grupo cuatro es el de octavo y noveno con 10 estudiantes; para el área de matemáticas se destinan en cada uno de los grupos 5 horas semanales. En esta institución se identificó el siguiente problema de investigación.

Planteamiento del problema. Los estudiantes del grado quinto de la Institución Educativa Rural Jesús María Osorno tienen dificultades para comprender el concepto de proporcionalidad; estas dificultades se manifiestan en la solución de situaciones de tipo proporcional.

Pregunta de investigación. ¿Cual es el nivel de comprensión que tienen los estudiantes de 5º de la I. E. R. Jesús María Osorno sobre el concepto de proporcionalidad enfocado desde el teorema de Thales desde el modelo educativo de van Hiele?

Objetivo general. Caracterizar el nivel de comprensión desde el modelo educativo de van Hiele que tienen los estudiantes de 5º de la I. E. R. Jesús María Osorno del concepto de proporcionalidad enfocado desde el teorema de Thales.

Objetivos específicos.

- Identificar el nivel de comprensión desde el modelo educativo de van Hiele que tienen los estudiantes del grado quinto de la I. E. R. Jesús María Osorno del concepto de proporcionalidad enfocado desde el teorema de Thales.
- Diseñar y aplicar una entrevista de carácter socrático donde se use el software Geogebra para la visualización del teorema de Thales.
- Elaborar unos descriptores de nivel desde el modelo de van Hiele para determinar la comprensión del concepto de proporcionalidad enfocado desde el teorema de Thales.

MARCO REFERENCIAL

El concepto de proporcionalidad desde el teorema de Thales. El concepto de proporcionalidad es uno de los conceptos fundamentales según lo planteado por el Ministerio de Educación Nacional (2003) en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Para abordar el concepto en el grado quinto, se retoma el teorema de Thales o teorema fundamental de la proporcionalidad como objeto de estudio de la presente investigación porque tienen una componente visual geométrica, por sus múltiples aplicaciones en la vida diaria y porque es la base para la construcción de conceptos matemáticos más avanzados; con esto, entonces, se hace necesario establecer una estrecha relación entre el razonamiento numérico y el razonamiento geométrico como componentes fundamentales para la comprensión del concepto de proporcionalidad.

El modelo educativo de van Hiele.

Es un modelo que fue propuesto por Pierre Marie van Hiele Dina van Hiele-Geldof en el año de 1957; inicialmente centró sus aplicaciones en el campo de la geometría; sin embargo, en las últimas décadas ha tenido una extensión al campo de conceptos del pensamiento matemático avanzado.

El modelo educativo de van Hiele está compuesto por cuatro aspectos: el insight, la red de relaciones, los niveles de razonamiento, aspecto descriptivo del modelo, y las fases de aprendizaje, aspecto prescriptivo.

Es importante dentro del proceso de investigación determinar y caracterizar los procesos de comprensión que tienen los estudiantes en lo referente al concepto objeto de estudio; por lo tanto se hará énfasis en los niveles de razonamiento que describen con claridad el grado de comprensión que un estudiante tiene ante un determinado concepto; dicho de otra manera, son una estratificación del razonamiento humano. Para esto, Van Hiele propone 5 niveles de razonamiento que, para el presente proyecto de investigación, serán descritos de acuerdo con Jaramillo C. & Esteban P. (2002):

Nivel 0, predescriptivo: en este nivel los estudiantes reconocen los elementos básicos de estudio.

Nivel 1, de reconocimiento visual: los estudiantes ven el objeto de estudio de manera global, dan características físicas de este.

Nivel 2, de análisis: en este nivel se identifican y generalizan las propiedades del concepto estudiado.

Nivel 3, de clasificación o de relaciones: el estudiante es capaz de establecer relaciones entre las propiedades del concepto.

Nivel 4, de deducción formal: la característica de este nivel es que se emplea el razonamiento formal para hacer demostraciones de las propiedades del concepto.

La entrevista de carácter socrático. Ha sido utilizada en las últimas investigaciones, para determinar el nivel de razonamiento que tienen los estudiantes ante un determinado concepto matemático y así confirmar los descriptores correspondientes para cada nivel. Esta entrevista es semiestructurada por lo que se realiza con anterioridad un guion, pero este es un guion abierto, que se fundamenta en un diálogo debido a su carácter socrático apoyándose en preguntas que visualmente se van pasando; el componente visual que requieren las preguntas de la entrevista se realizara con actividades en el software de geometría dinámica geogebra.

La entrevista se caracteriza porque, además de detectar el nivel de razonamiento que un estudiante tiene, convierte este proceso en una experiencia de aprendizaje, pues permite que el estudiante progrese a través de ella en el nivel de comprensión. Uno de los aspectos que se deben tener en cuenta a la hora de diseñar la entrevista son las preguntas y los "aportes de información" sobre el concepto, lo que hace que durante el proceso se reflexione y reorganice sus ideas y conocimientos en el campo de estudio.

METODOLOGÍA

Este proyecto de investigación se abordará desde un enfoque cualitativo ya que se tendrá en cuenta que los estudiantes participantes construyen su realidad a partir de su subjetividad y del contexto social y cultural en el que están inmersos; por lo tanto, a estos estudiantes se les reconoce como sujetos que comprenden y aprenden de forma diversa y relativa; el proceso investigativo como tal está orientado a comprender e interpretar en cada caso la singularidad de cada persona participante de la investigación.

Tipo de estudio. El tipo de estudio que se realizará es un estudio de casos pues se requiere un tratamiento específico y obtener información detallada; su propósito básico es alcanzar una comprensión en profundidad del caso en sí mismo, es decir, aprender del mismo sin generar ninguna teoría ni generalizar los datos. El producto final es un informe básicamente descriptivo.

RESULTADOS ESPERADOS

- Establecer el nivel de comprensión en que se encuentran los estudiantes de quinto grado relacionado con del concepto de proporcionalidad enfocado desde el teorema de Thales.
- La consolidación de unos descriptores de nivel que permitan identificar el nivel de razonamiento de los estudiantes para el concepto de proporcionalidad enfocados desde el teorema de Thales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Jaramillo, C. M. & Esteban, P. V. (2002). El Modelo Educativo de van Hiele.

Jurado, F. M. & Londoño, R. A. (2005). Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas. Tesis de Maestría no publicada, Medellín, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2003). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá, D. C., Colombia: Editorial Magisterio.

Sucerquia E. A. & Zapata S. M. (2009). Módulo de aprendizaje para la comprensión del concepto de series de términos positivos. Tesis de Maestría no publicada, Medellín, Colombia.

Van Hiele, P. M. (1957). El problema de la comprensión: en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría. Tesis Doctoral, Holanda.

Enseñanza de las secciones cónicas como lugares geométricos en un aula inclusiva de estudiantes invidentes

Sindy Paola Joya Cruz[*]
Rubén Morales Camargo[**]

RESUMEN

Este trabajo corresponde a una propuesta dirigida a la enseñanza de las secciones cónicas como lugares geométricos en un aula inclusiva con estudiantes invidentes de grado décimo. Para su desarrollo se consideró el diseño y elaboración de actividades de aprendizaje y de evaluación propuestas por el Grupo DECA (1992), y la propuesta didáctica presentada por Del Río (1996); una revisión teórica tanto del marco histórico, legal, didáctico, matemático y metodológico, como de las formas de evaluación; de igual manera se consideró un marco referente a la limitación visual para reflexionar sobre la inclusión en el aula. Posteriormente, se desarrolló el planteamiento de situaciones problema desde las cuales se orientó al estudiante a identificar las cónicas como lugares geométricos.

Palabras clave: alumnos discapacitados; materiales manipulativos; desarrollo del pensamiento matemático; resolución de problemas; planificación del profesor.

** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: sindy.joya@gmail.com
** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: femcmath@gmail.com

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

La matemática es considerada una de las áreas que más genera en los estudiantes frustración, lo que conduce a que necesiten apoyo educativo; de tal manera, es posible suponer que cuando el estudiante tiene limitación visual, su dificultad para enfrentarse a ella es mayor, pues en muchas ocasiones su enseñanza está apoyada en recursos visuales; en tal sentido es importante que la educación matemática se sitúe de forma crítica, reflexiva y resolutiva ante este hecho y propicie la emergencia de propuestas que conlleven a la transformación de la enseñanza, en aras de mejorar la inclusión de estudiantes con Necesidades Educativas Especiales en aulas regulares. Una posibilidad para transformar esta realidad puede estar dada por el diseño, gestión y evaluación de una secuencia de actividades para la enseñanza de la geometría a estudiantes en un aula inclusiva. Ahora bien, para el caso particular de este artículo, se presentan los resultados emergentes de una investigación desarrollada para responder a la pregunta: ¿Cómo contribuir a la enseñanza y el aprendizaje de las cónicas como lugares geométricos, en grado décimo (10º) en un aula inclusiva de estudiantes en condición de discapacidad visual, mediante el uso de recursos didácticos?

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Para el desarrollo de esta propuesta se consideran los siguientes parámetros:

1. Legal: Destacando los Estándares Curriculares de Matemáticas establecidos en relación con la enseñanza de las cónicas para grado décimo (MEN, 2006), y la inclusión en el aula caracterizada por los planteamientos de Echeita (2007) al indicar que es necesario abordar la inclusión en el aula teniendo en cuenta que hasta el día de hoy se han mantenido prácticas de una educación escolar poco capaz de atender a la diversidad del alumnado, lo que ha llegado a convertirla en educación excluyente y de baja calidad.
2. Didáctico: Presenta la relación correspondiente a la propuesta de Del Río (1996), caracterizada por una metodología de tres fases: Contextualización: el estudiante establece relaciones entre los contenidos que ya posee y los que el docente desea enseñar. Construcción: el estudiante se apropia de los nuevos aprendizajes llevando a cabo relaciones transitivas en las que se amplía el conocimiento, partiendo de la intuición hasta la formulación matemática. Ampliación: el estudiante amplía la cantidad y calidad de relaciones entre los aprendizajes previos y los nuevos, todo con el fin de que se integren en una estructura más significativa. Por otro lado es necesario destacar, que la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau)

favoreció la aplicación de las fases y, por consiguiente, orientó el proceso de formación del objeto matemático a trabajar dentro del pensamiento geométrico, guiado desde la metodología de resolución de problemas.

3. Recursos: Correspondiente al tipo de material que se usó, basados en lo establecido por Godino (1998) y a la caracterización de los mismos según las particularidades de los estudiantes. De tal manera, el material empleado fue de dos tipos: el primero, para los estudiantes invidentes adaptado en braille y en relieve para ser distinguido por el tacto. Y el segundo, para los estudiantes videntes, presentado impreso y manipulable para facilitar la comprensión de los objetos matemáticos. Ahora bien, teniendo en cuenta los tres aspectos anteriores, es necesario señalar que los Niveles de Van Hiele (Guillén, 2004), en cuanto a visualización y análisis, fueron usados en la planeación de una secuencia didáctica, orientada a la enseñanza de conceptos geométricos en un aula inclusiva, con estudiantes con limitación visual.

4. Evaluación: constante y formativa, donde el profesor adquiere el rol de observador y el conocimiento se centra en la realidad y en su aplicación en la vida cotidiana. Considerando lo propuesto por Giménez (1997), se establece *"Ayudar y orientar a los estudiantes y satisfacer sus demandas; (...) la regulación y control del aprendizaje y sus interacciones* [y] *una misión de control y juicio del propio sistema evaluador".*

5. Inclusión: Caracterizada por (A) las políticas públicas de atención a poblaciones vulnerables, como la Constitución Política de Colombia de 1991, Ley General de Educación de 1994, y en el Plan Nacional Decenal de Educación (2006 – 2016). (B) La educación matemática y las Necesidades Educativas Especiales, resaltando a Gross (2004) quien expone algunas de las razones comunes de las dificultades matemáticas en estudiantes. (C) La adaptación de materiales para el trabajo en matemáticas con población invidente, donde Rosich y otros (1996) distinguen etapas que se producen en la cognición matemática a bajo nivel, no solo para esta población en particular.

METODOLOGÍA

La propuesta desarrollada considera como metodología la implantación de la propuesta del Grupo DECA (1992) para el diseño de actividades en unidades didácticas. En ella se resaltan las actividades de iniciación e introducción; actividades de desarrollo y reestructuración; actividades de aplicación y profundización; y actividades de evaluación. En cada una de estas actividades se les brinda a todos los estudiantes las herramientas conceptuales para apropiarse del objeto matemático.

Las actividades pasan por fases en las que el estudiante es problematizado, amplía sus conocimientos, relaciona los conocimientos adquiridos y construye nuevas estructuras de aprendizaje. Para ello, se reconocen los preconceptos geométricos de los estudiantes; se construyen y reconocen las secciones cónicas a través de material didáctico; se enfatiza en la elipse como sección cónica reconociendo sus elementos, ecuación y gráfica, y se aborda la ecuación de la elipse en diferentes situaciones.

Como la propuesta fue desarrollada en un aula inclusiva, todos los estudiantes recibían una orientación y/o explicación verbal completamente detallada como instrucción para la identificación y caracterización de cada uno de los elementos tratados en clase. Adicionalmente, se resalta que se otorgan a los estudiantes materiales manipulables (plano cartesiano, cauchos, puntillas, tablas de dibujo) que les permiten abordar con mayor facilidad los aspectos geométricos. En cuanto al lenguaje matemático se otorgaba al estudiante una plantilla en la que se caracterizaban aspectos de escritura braille para ecuaciones; el estudiante reconocía la escritura para que en sus textos se consideraran las mismas características que las de sus compañeros.

ANÁLISIS DE DATOS

Los datos son analizados desde los niveles de razonamiento de Van Hiele (citado en Santa, 2011, pp. 225-227):

Nivel 0: Pre-descriptivo. Se identifica el conjunto de conocimientos previos que necesita el estudiante para comprender el concepto de elipse como lugar geométrico. Entre estas nociones se considera el axioma básico de la geometría euclidiana: "Por dos puntos pasa una única recta"; y se identifican nociones como: punto, recta, segmento, distancia, perpendicular, entre otras; finalmente, relacionan el doblado de papel con dichas nociones.

Nivel I: Reconocimiento visual. Utiliza la geometría del doblado de papel para construir la mediatriz, la circunferencia y la elipse. Los estudiantes identifican que el lugar geométrico que se construyó es la elipse, pero aún no reconocen todas las propiedades que la caracterizan.

Nivel II: De análisis. Los estudiantes reconocen la mediatriz y la circunferencia como lugares geométricos e identifican los elementos propios de la elipse y características como mediatriz, equidistancia, centro; adicionalmente, identifican que siempre que se hagan dobleces que surgen de llevar puntos de una circunferencia sobre su centro, se genera un conjunto de mediatrices que envuelven, a su vez, otra circunferencia interior (concéntrica); que la elipse está formada por el conjunto de mediatrices construido y por dos puntos interiores fijos.

Nivel III: De clasificación. Los estudiantes establecen que la suma de dos segmentos determinados es el radio de la circunferencia; un punto pertenece a la elipse si la suma de sus distancias a los dos puntos fijos es el radio de la circunferencia inicial y finalmente definen de manera formal la elipse como lugar geométrico.

CONCLUSIONES

Respecto al diseño e implementación de la secuencia de actividades, se analizan diversos aspectos, relevantes para su construcción, tales como las orientaciones para el diseño y elaboración de actividades de aprendizaje y de evaluación, objetos geométricos abordados, procesos de inclusión, socialización, institucionalización, validación y evaluación. De cada aspecto se puede referenciar lo siguiente:

Metodología. Las orientaciones para el diseño y elaboración de actividades de aprendizaje y de evaluación propuestas por el Grupo DECA (1992), acompañadas de la Teoría de Situaciones Didácticas propuestas por Brousseau, posibilitaron el planteamiento de situaciones que potencian la construcción, el reconocimiento y la caracterización de las secciones cónicas como lugares geométricos.

Objeto geométrico. Siguiendo lo establecido en MEN (2006, p. 88), se tienen en cuenta algunos estándares propios del pensamiento espacial y sistemas geométricos para la implementación de la propuesta en el aula inclusiva. Entre ellos se destaca que se identificaron de forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de la elipse como lugar geométrico; se identificó cómo localizarla en el plano cartesiano; y se realizaron cambios de registro de lo algebraico a lo geométrico, y viceversa.

Procesos de inclusión. Se concibe que la inclusión escolar posibilite una escuela abierta a la diversidad del alumnado, no solo de aquellos que tienen una necesidad educativa especial considerable. Por otro lado, es necesario involucrar al estudiante con limitación visual activamente en el aula de clase, para que de esta manera se potencie su participación y construcción social. Adicionalmente, incluir a los estudiantes en aulas regulares hace posible que se les brinden espacios de igualdad en los que se enfatiza en la construcción del conocimiento y no en las diferencias físicas.

Procesos de socialización, institucionalización, validación y evaluación: todos los estudiantes se hacen partícipes en cada uno de los procesos, lo que contribuye de manera significativa a la construcción del conocimiento y al intercambio de ideas. Adicionalmente tienen la posibilidad de cuestionar los conocimientos propios y ajenos, llevándolos a debatirlos y trabajar respecto a ellos para encontrar una "respuesta" adecuada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brousseau, G. (1986) Fundamentos de la Didáctica de la Matemática, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Serie B, *Trabajos de Matemática*, N.° 19 (versión castellana, 1993)

Del Río, S. J. (1996). *Lugares geométricos. Cónicas. Educación matemática en secundaria*. Madrid: Síntesis.

Echeita, G. (2007). *Educación para la inclusión o educación sin exclusiones*. Editorial: Madrid: Narcea.

Giménez, J. (1997). ¿Por qué y para qué evaluar en matemáticas? En*: Evaluación en matemáticas.* Madrid. España. Síntesis.

Godino, J. (1998). Uso de material tangible y gráfico-textual en el estudio de las matemáticas: Superando algunas posiciones ingenuas. En: A. M. Machado y cols. (Ed.), *Actas do ProfMat 98* (pp. 117-124). Associaçao de Professores de Matemática: Guimaraes, Portugal.

Gross, J. (2004). *Necesidades educativas especiales en educación primaria: una guía práctica*. Madrid: Ediciones Morata.

Grupo DECA. (1992). Orientaciones para el diseño y elaboración de actividades de aprendizaje y de evaluación. Publicado en revista *Aula*, Nº 6, pp. 33-39.

Guillén, G. (2004). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática*. MÉXICO: Santillana.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá, Colombia. Cooperativa Editorial Magisterio.

Rosich, N; Núñez, J; & Fernández J. (1996). *Matemáticas y deficiencia sensorial*. Madrid: Editorial Síntesis.

Santa, Z. (2011). *La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.

"Juegos de rol como mediación educativa para el desarrollo del lenguaje y pensamiento matemático"

Yuli Adriana Caicedo Parra[*]
Erika Julieth Pulido[**]
Yenifer Paola Correa[***]
Marien Jaime[****]
Yennifer Karina Universidad[*****]
Edna Lissneidy Uñate Herrera[******]
Sandra Milena Umbacia Sutachan[*******]
Néstor Fernando Guerrero R.[********]

RESUMEN

La experiencia educativa en condiciones de niños vulnerados en derechos fundamentales ubica al profesor de matemáticas a reflexionar sobre el papel del juego en el aprendizaje y la construcción de la zona de desarrollo próximo. En este punto, son importantes los ambientes lúdicos con miras a la construcción de mundos posibles por parte de los niños, desarrollando en ellos la imaginación a partir de elementos de la fantasía, entre la ficción y la realidad. Para esto se busca la implementación de los juegos de rol como una mediación educativa para el desarrollo del lenguaje y pensamiento matemático en los niños que asisten a la Fundación Asociación Apoyemos de la comunidad del Mochuelo, los cuales se encuentran bajo condiciones vulnerables de tal manera que se genere un desarrollo plenamente como sujetos de conocimiento y afectividad.

Palabras clave: juegos de rol, ambientes de aprendizaje, pensamiento matemático, imaginación, narrativas.

[*] Universidad Distrital. Dirección electrónica: anguscurrent@gmail.com
[**] Universidad Distrital. Dirección electrónica: Mahecha julieth.erk@hotmail.com
[***] Universidad Distrital. Dirección electrónica: Hernándezpao7189@hotmail.com
[****] Universidad Distrital. Dirección electrónica: Esteban marienjaime@gmail.com
[*****] Distrital. Dirección electrónica: Salcedo Portelakarina20014@gmail.com
[******] Universidad Distrital. Dirección electrónica: liss_the_best@gmail.com
[*******] Universidad Distrital. Dirección electrónica: mileorl@hotmail.com
[********] Profesor de planta Universidad Distrital en el proyecto curricular de Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas. Dirección electrónica: nfguerreror@gmail.com

CARACTERIZACIÓN DE LA POBLACIÓN

Mochuelo Bajo es uno de los barrios de la periferia de la ciudad de Bogotá; se ubica en la zona rural, al extremo sur de la localidad de Ciudad Bolívar. Es de anotar que no existe un medio de transporte público que conecte directamente a Mochuelo con la zona céntrica de la ciudad, lo cual implica cierto aislamiento y dificultad para la movilidad de sus habitantes. Por su situación geográfica su economía se fundamenta en la agricultura y la ganadería; por otro lado las mayores fuentes de empleo son el relleno sanitario de Doña Juana (que emplea a los jóvenes y adultos temporalmente como asalariados) y las ladrilleras que pululan en la zona (estas contratan por días, $8.000 diario). Las vías de acceso de uso peatonal están sin pavimentar, y el agua potable proviene de un nacedero en la montaña y hasta ahora se están iniciando las obras para la construcción de un tanque y la red del acueducto. El servicio de energía es prestado por la empresa privada. El sector de Mochuelo Bajo está dividido en 4 barrios, cada uno con Junta de Acción Comunal (JAC), existe una escuela de educación básica primaria, un jardín de madres comunitarias del Instituto Colombiano de Bienestar Familiar (ICBF) y un jardín infantil que surgió de la colaboración y trabajo conjunto de la comunidad y una ONG (Fundación Apoyemos) que trabaja con comunidades en diferentes puntos de la ciudad.

Antecedentes a la experiencia de la pasantía

Desde el año 2007 se viene implementando como modalidad de trabajo de grado la Pasantía de extensión "Ambientes lúdicos para el desarrollo del pensamiento numérico" con los niños y jóvenes que asisten a la Fundación Asociación Apoyemos. Los ambientes lúdicos han propiciado el desarrollo de habilidades interpersonales, afectivas, sociales y del pensamiento numérico, atribuido en particular a la implementación de los juegos de rol. La narrativa construida se basó en el proyecto de aula desarrollado por la profesora Dora Torres, Juegos de rol "Fantasciencia" en el año de 1998, con estudiantes adolescentes del barrio Cazuca en la clase de biología como trabajo de finalización del PFPD Pensamiento creativo y mediaciones educativas en la Universidad Javeriana (Bogotá – Colombia).

OBJETIVO DE LA PASANTÍA

Promover la generación de ambientes educativos a partir de la implementación de la mediación de los juegos de rol, de modo que contribuya a la formación matemática de los niños de la comunidad del Mochuelo bajo de la localidad de Ciudad Bolívar.

MARCO TEÓRICO QUE SOPORTA LA PASANTÍA

Para Bruner (2003) citado en Fairstein (s. f.), "La narrativa es presentada como uno de los medios privilegiados a través de los cuales la cultura da forma a la mente; es concebida como un modo de funcionamiento cognitivo, una forma de organizar la experiencia, de construir la realidad, irreductible al tipo de pensamiento lógico-científico" Fairstein (S,F pp. 2)

Para este mismo autor, la narrativa es, en espíritu, subversiva, no "pedagógica". Según este autor, la ficción narrativa crea mundos posibles, a partir del mundo que conocemos. Tiene en cuenta la vida real, lo familiar, pero debe transferir de ella lo suficiente como para tentarnos con alternativas que la trasciendan.

Las narrativas en los juegos de rol

Sirven para salirse de la cotidianidad, desarrollar sentimientos, seguir personajes y hacerlos evolucionar de acuerdo con una historia, según las características que uno quiere que tenga el personaje en quien se proyecta. Los juegos de rol son de imaginación, histriónicos, y tienen como objetivo interpretar personajes en un mundo distinto y fantástico. El propósito es desarrollar al máximo el personaje para exteriorizar algo que uno tiene. Según la enciclopedia libre Wikipedia el significado del juego de rol está asociado con:

> […] un juego interpretativo narrativo en el cual los jugadores asumen "el rol" de los personajes a lo largo de una historia o trama, para lo cual interpretan sus diálogos y describen sus acciones. No hay un guion a seguir, ya que el desarrollo de la historia queda por completo sujeto a las decisiones y acciones de los jugadores. Destaca el hecho de que la imaginación, la narrativa, la originalidad y el ingenio son primordiales para el adecuado desarrollo de este juego dramatúrgico.

Por otro lado se debe entender que un juego de rol no es un juego de computadora, o similares, es una interpretación teatral, sin llegar a ser tan estricta (no existe un guion fijo a seguir) y que normalmente se juega sentados alrededor de una mesa (existen excepciones llamadas rol en vivo o live action).

Los juegos de rol contienen a todos los demás juegos de tablero, cartas, de estrategia, videojuegos, de fantasía, entre otros. El máster del juego escribe los guiones del juego de rol. En el juego de rol él diseña las trampas para que los demás jugadores caigan en ellas. Es un mundo que mantiene aparte al participante (jugador), construyendo una realidad con estructura propia, cuyos resultados le permiten vivir mejor en el mundo actual.

Aportes del juego de rol a la formación de los niños y jóvenes

- Promocionar la lectura como medio lúdico y recreativo, favoreciendo la creación de hábitos que ayuden a superar muchas de las dificultades que surgen en los estudios como consecuencia de una deficiente lectura comprensiva, por falta de motivación.
- Adquirir una gran riqueza de vocabulario.
- Estimular el potencial creativo e imaginativo de los niños y jóvenes, además de adquirir nuevas habilidades a lo largo del juego permitiendo el razonamiento y la lógica durante el transcurso de las aventuras al enfrentar nuevos mundos, retos y confrontaciones e intentar solucionarlos.
- Afianzar lazos de amistad en los grupos de participantes.

METODOLOGÍA DE LA PASANTÍA

Se pretende incluir los juegos de rol en situaciones que motiven y permitan que los jugadores salgan de la realidad en la que viven, por medio de la interacción y la creatividad de cada participante para crear su personaje, donde se cree una trama que potencie en los participantes el trabajo colaborativo para así salir un poco de la cotidianidad que se presenta en los centros educativos, tal como se presenta en una clase magistral.

En este sentido, el juego será un ambiente de aprendizaje lúdico que permitirá según Duarte (2003), un medio de vida compartido, solidario y democrático.

Organización de los talleres para la creación de los mundos o paracosmos en los juegos de rol

a) Creación del personaje por los niños basado en el libro *Animales fantásticos y dónde encontrarlos*.

b) Creación de la narrativa basado en juegos de rol como "Calabozos y dragones" y "El señor de los anillos" con énfasis en juegos matemáticos que vinculen distintas nociones matemáticas.

c) Recreación de los escenarios del Mochuelo Bajo, donde cobrarán vida los personajes inventados por los niños y los mundos creados en los juegos de rol.

d) Desarrollo de la secuencia de los mundos en sesiones sucesivas.

e) Análisis de las bitácoras de los niños y de las vivencias en los juegos de rol.

ALGUNAS CONCLUSIONES DESDE LA EXPERIENCIA DE LA PASANTÍA DE EXTENSIÓN

- Los juegos de rol potencian el uso del número, puesto que adquiere un carácter más dinámico y cercano a la cotidianidad de los niños, se vincula a ellos en forma más natural y se sienten motivados para construir en forma autónoma su conocimiento; de esta manera se apropian de lo aprendido e interiorizan los diferentes usos y contextos en los que se puede utilizar el número. Desde Duarte se hace referencia a la utilidad del juego como mediador de procesos, que permite incentivar saberes, generar conocimientos y crear ambientes de aprendizaje. En el ámbito educativo tiene multiplicidad de propósitos; "son la posibilidad de construir autoconfianza e incrementar la motivación en el jugador. Es un método eficaz que posibilita una práctica significativa de aquello que se aprende" (Álvarez et al., 2008, p. 62).

- Cambio positivo en las percepciones actitudinales del niño sobre sí mismo y del educador sobre su alumno. Tendencia a mejorar en el nivel de socialización, en su capacidad de apreciarlos y estimarlos; en su capacidad de realizar actividades grupales, colaborar, reconocer y respetar diferencias; en la capacidad de comunicar y en la reciprocidad que experimenta en dichas relaciones (Vergara, 2010, p. 88).

- En el sentido de la educación crítica, la experiencia en la pasantía de extensión es un espacio en donde se percibe la labor docente como intelectual transformativo, que cuestiona su práctica como detonante en la búsqueda de actividades de aprendizaje y de enseñanza justa, equitativa y democrática; considera la matemática para la vida, el cambio reflexivo, respetuoso y cooperativo (Pérez, 2010, p. 58).

- Las interacciones que se dieron entre los jugadores favorecieron el desarrollo de habilidades cooperativas para aprender y solucionar problemas; como el trabajo colectivo, para participar, negociar y hacer una aportación común en torno a la resolución de un problema. (Pérez, 2010, p. 57)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Álvarez, L., Triviño, J. & Flórez, O. (2008). *Ambientes lúdicos para el desarrollo del pensamiento numérico.* Trabajo monográfico para optar por el título de Licenciado en Educación básica con énfasis en Matemáticas. Sin publicar.

Duarte, J. (2003) Ambientes de Aprendizaje: Una Aproximación Conceptual. *Revista Iberoamericana de Educación* (ISSN: 1681-5653). Documento recuperado de Internet (Disponible en red). En: http:// www. rieoei.org/delos lectores/524Duarte. PDF 19.

Farsteisn, G. (s. f.) *Reseña sobre La fábrica de historietas* (Bruner, 2003). Recuperado el 2 de abril de 2012. Disponible en red en: http://www.propuestaeducativa.flacso.org.ar/archivos/libros/17.pdf

Juego de rol. Recuperado el 2 de abril de 2012. Disponible en red en: http://es.wikipedia.org/wiki/Juego_de_rol

Pérez, A. (2009). *Ambientes lúdicos para el desarrollo del pensamiento numérico.* Trabajo monográfico para optar por el título de Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas. Sin publicar. Universidad Pedagógica Nacional – U.P.N.

Vargas, Y. et al. (2010). *Ambientes lúdicos para el desarrollo del pensamiento numérico.* Trabajo monográfico para optar por el título de Licenciado en Educación básica con énfasis en Matemáticas. Sin publicar.

Vergara, Y. (2010). *Ambientes lúdicos para el desarrollo del pensamiento numérico.* Trabajo monográfico para optar por el título de Licenciado en Educación básica con énfasis en Matemáticas. Sin publicar.

Generalización de patrones figurales y medios semióticos de objetivación movilizados por estudiantes de 8 y 9 años[1]

Adriana Lasprilla Herrera[*]
Rodolfo Vergel Causado[**]
Francisco Javier Camelo Bustos[***]

RESUMEN

Este escrito se inspira en las investigaciones sobre la semiótica cultural adelantadas por Radford. Los procesos interpretativos de los estudiantes se investigan a través de la objetivación del conocimiento y la configuración de los signos matemáticos, los gestos y las palabras que recurren a fin de alcanzar mayores niveles de conceptualización. El estudio describe y analiza brevemente los medios semióticos de objetivación y los estratos de generalidad, en donde se evidenció tanto la riqueza de producción semiótica por parte de los estudiantes como la importancia que puede tener en el desarrollo de significado.

Palabras clave: generalización de patrones figurales, estratos de generalidad, medios semióticos de objetivación, contracción semiótica.

[*] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia. Dirección electrónica: arranala@gmail.com

[**] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia. Dirección electrónica: rvergelc@udistrital.edu.co

[***] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia. Dirección electrónica: fjcamelob@udistrital.edu.co

[1] Este escrito hace parte del trabajo de grado de Lasprilla, A. (2012).

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

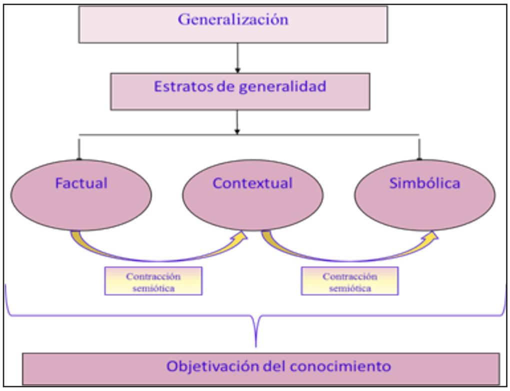
Resultados recientes sobre la semiótica cultural (Radford, 2008, 2009, 2010a, 2010b, Vergel, 2010) señalan la importancia de empezar a reconocer que en el trabajo de aula existe diversidad de medios de expresión de la producción matemática de los niños. De otra parte, investigaciones sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra han identificado que las dificultades que muestran los estudiantes pueden ser originadas por la manera como los docentes desarrollan los temas en clase. Por ejemplo, el Grupo Azarquiel (1993) afirma que la enseñanza tradicional del álgebra da prioridad a procesos algorítmicos más que a desarrollar procesos de pensamiento que permitan la construcción de un pensamiento algebraico. A este respecto, Mason et al. (1999, p. viii) comentan que en el álgebra: "[...] es indiscutible que la construcción del pensamiento algebraico tiene lugar a lo largo de un proceso paralelo y continuo dentro del trabajo aritmético y geométrico que se inicia en los primeros años".

De lo anterior se desprende que se debe iniciar el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros cursos de la Educación Básica, lo que coincide con las ideas de Butto y Rojano (2000), según las cuales los tiempos didácticos para el aprendizaje del álgebra son prolongados, por lo que es conveniente iniciar en edades tempranas, aprovechando las fuentes de significados que están presentes en los contenidos matemáticos de la Educación Primaria. Lo cual sugiere que desde allí deben desarrollarse actividades que permitan el inicio y desarrollo del pensamiento algebraico y, en particular, que debe realizarse un trabajo con actividades de generalización de patrones figurales, pues permiten a los estudiantes acercarse a situaciones de variación, importantes para el desarrollo del pensamiento algebraico.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Fue necesario retomar ideas de Radford (2008, 2010a; 2010b) sobre la perspectiva semiótica cultural y aceptar que un estudiante aprende cuando está en la capacidad de movilizar objetos o medios semióticos (gestos, miradas, dibujos, recursos extra-lingüísticos, etc.) que le posibiliten acceder a una interpretación del objeto u objetivar el conocimiento. Esto es, la acción de convergencia del signo y del pensamiento que lleva a hacer aparente lo que en el mundo conceptual se perfila como meramente potencial. Más específicamente, objetivar es toparse con el objeto (con eso que objeta a la conciencia) en el encuentro entre lo subjetivo y lo cultural.

Radford (2008, 2010a, 2010b) muestra que cuando los estudiantes se enfrentan a tareas sobre generalización de patrones figurales, van reduciendo recursos semióticos, obligando, necesariamente, a concentrar su significado. Él ha denominado a este proceso de objetivación contracción semiótica, la cual puede evidenciarse por el avance o recorrido en los distintos estratos de generalidad, que se caracterizan por los medios semióticos de objetivación puestos en juego en su actividad reflexiva.



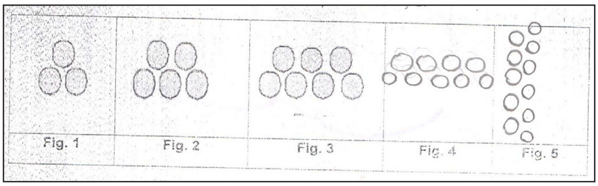
Para Radford (2010a), la generalización implica identificar lo común en una secuencia, para luego hacerlo extensible a todos los términos de la misma y generar la posibilidad de establecer, al final, una regla que permita determinar cualquier miembro. Así, y a partir de estos planteamientos, es posible considerar que la generalización puede ser analizada a través de estratos de generalidad, que dependen de los diversos medios semióticos de objetivación movilizados. Dicha dependencia posibilita clasificar tales estratos en factual, contextual y simbólico, como puede observarse en el diagrama a la derecha. Un estrato de generalidad es factual en la medida que la generalización surge de actividad perceptual, acciones sobre los números, gestos y palabras; mientras que el contextual es más fino, en términos de los medios semióticos que emplea, ya que es a partir de la observación de aspectos estructurales, como “el de arriba”, “el de abajo”, etc., que se da la generalización. Y el simbólico se refiere al uso de signos alfanuméricos del álgebra, en donde los medios semióticos empleados son los símbolos escritos. La idea de estrato de generalidad es teorizada en la perspectiva semiótica cultural asociada a los objetos matemáticos. En tal sentido, Santi (2010, p.69) señala que “el objeto matemático es una entidad estratificada en estratos de generalidad. Cada estrato de generalidad se asocia con una actividad reflexiva en particular determinada por las características de los medios semióticos de objetivación que median". Nos parece importante anotar que en su camino de generalizar, los estudiantes desarrollan procesos de objetivación, esto es, procesos sociales a través de los cuales capturan la lógica cultural con que los objetos de conocimiento han sido dados y se familiarizan con las formas de acción y pensamiento históricamente constituidas (Radford, 2009).

METODOLOGÍA

El trabajo es de corte cualitativo, en donde hubo una preocupación centrada en indagar los hechos o fenómenos educativos en su "realidad natural", sosteniendo una concepción holística. En otras palabras, se buscó comprender en profundidad y desde la totalidad contextual en que se producen las prácticas (Bravin y Pievin, 2008). Por lo tanto, el análisis fue de carácter cualitativo, fundamentalmente descriptivo-interpretativo y se realizó utilizando vídeos, notas de clase y el trabajo desarrollado por los estudiantes como instrumentos de recolección de información; la triangulación de estos fortaleció el análisis de los datos. La toma de datos se llevó a cabo con estudiantes de grado tercero (8 y 9 años), durante el desarrollo de tres sesiones de clase de matemáticas. Presentamos a continuación un ejemplo de descripción y análisis de los medios semióticos de objetivación movilizados por los estudiantes.

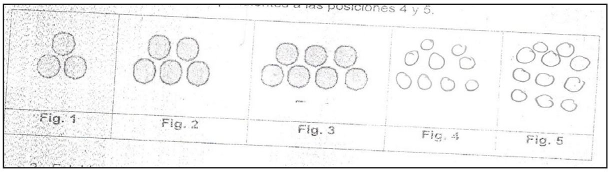
ANÁLISIS DE DATOS

El primer medio semiótico emergente se identificó cuando los niños realizaron dibujos de las posiciones cuatro y cinco; en este se dieron dos posibilidades: conservar la distribución geométrica de la figura y no hacerlo, como se puede ver en las figuras 1 y 2.



Nata, fig. 1

Nata consideró necesario conservar la distribución geométrica de la figura aunque por cuestiones de espacio la figura cinco la hizo en sentido vertical, (ver fig. 1), mientras que Car no prestó atención en la distribución de los círculos; para él era necesario considerar las cantidades de cada posición (ver fig. 2); este aspecto fue importante posteriormente, ya que el grupo que prestó atención a la distribución pudo establecer una generalización más eficiente en relación a quienes no tuvieron en cuenta este aspecto.



Nata, fig. 2

Aunque es importante considerar que los niños realizaron gestos que evidenciaban que no comprendían la situación[1], en el grupo de Lui, Feli y Nata, establecieron que para hallar las cantidades era necesario sumar 2 a la cantidad de la posición anterior, dando las cantidades como razón, comparando la cantidad de bolas y la posición. Para la posición ocho escribieron: 17/8, en la nueve: 19/9 y en la diez 21/10. Es importante mencionar que Lui, Feli y Nata usaron la regla para dibujar las posiciones pedidas, conservando la distribución espacial de los círculos de las primeras posiciones.


Car, fig. 2

Los medios semióticos movilizados para abordar la primera parte de la actividad, que en principio surgieron como signos que les permitieron acercarse a la tarea, se convierten en medios semióticos en la medida que en las posteriores sesiones les permitieron objetivar la generalización planteada, ya que los instrumentos, el dibujar, el usar la regla, el escribir las cantidades para cada posición, permitió plantear una solución. En este grupo se estableció una generalidad de otro tipo, que podría considerarse contextual, ya que, a partir de las cantidades de bolas en la parte superior y en la parte inferior de cualquier posición, y luego su suma, determinaron la cantidad total de bolas para cualquier posición. Esta forma de generalizar se caracteriza por sustituir gestos o ritmos por términos clave, como en este caso, la fila superior e inferior.

1 La filmación y las fotos aquí mostradas fueron autorizadas para los fines de este trabajo por los padres de los niños.

CONCLUSIONES

El desarrollo de este trabajo permitió analizar que existen formas de evidenciar en un estudiante sus medios semióticos de objetivación (movimientos, miradas, gestos, palabras, escritos), sugiriendo la necesidad de reconocer un espacio para una gran zona conceptual donde los estudiantes pueden empezar a pensar en forma algebraica, aun cuando no estén recurriendo (o al menos en no gran medida) a los signos alfanuméricos del álgebra. Esta zona, que se ha denominado *zona de emergencia del pensamiento algebraico* (Radford, 2010b), se ha mantenido en gran medida ignorada como resultado de nuestra obsesión por el solo reconocimiento de los símbolos algebraicos (Grupo Azarquiel, 1993; Espinosa, 2002; Mason et al., 1989; Socas et al., 1989; Kieran, 1994).

Este trabajo puso en evidencia que el primer medio semiótico movilizado por los estudiantes fue el gestual, ya que su reacción frente a la tarea propuesta fue de no entendimiento, en donde expresaban con movimientos corporales, tomándose la cabeza, o mirando hacia los lados, sugiriendo que no tenían claridad de lo que se planteaba. En la medida que se reunieron en grupos surgió el empleo de otros medios semióticos, ya que tuvieron la oportunidad de interactuar con sus compañeros lo cual les posibilitó modificar o reafirmar sus propuestas; como bien lo señala Bajtín (2009), el sujeto es en tanto la presencia del otro, su discurso, su actuación. De este modo se evidenció que cada uno de los grupos estableció una manera de generalizar, y que el hecho de ir socializando sus hallazgos y escuchando los de los compañeros les permitió dar claridad a lo que hacían y, a la vez, cuestionar si las producciones de sus compañeros eran correctas, constituyendo una interacción, en el interior del curso, que les permitió complejizar los procesos de significación que fueron elaborando en relación con la generalización que establecieron.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bajtín, M. (2009). *Estética de la creación verbal*. México: Siglo XXI.

Bravin, C. & Pievin, N. (2008). *Documento metodológico orientador para la investigación educativa*. Organización de Estados Americanos y para la Educación la Ciencia y la Cultura. Disponible en: http://www.me.gov.ar/infod/documentos/documentometodologico.pdf.

Butto, C. & Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática, 22* (3), 55-86.

Espinosa, M. (2002). Aplicación de un instrumento de evaluación de álgebra elemental. Réplica del trabajo de Fernández García. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada. Granada. España.

Grupo Azarquiel (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Colección matemática, cultura y aprendizaje Nº 33. Madrid. Síntesis.

Kieran, C. (1994). "*El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar*". Traducción de Vilma Mesa. Una empresa Docente. www.ued.uniandes.edu.co

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. & Gowar, N. (1999). Raíces del álgebra/Rutas hacia el álgebra. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education*, 40, 83-96.

Radford, L. (2009). ''No! He starts walking backwards!'': interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, DOI 10.1007/s11858-009-0173-9.

Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12 (1), 1-19.

Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4 (2), 37-62.

Santi, G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: a comparison between semiotic perspectives*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Bologna.

Socas, M. Camacho, M; Palarea & Hernández. (1989). Iniciación al álgebra. *Colección matemáticas: cultura y aprendizaje*. Madrid: Síntesis Nº 23.

Vergel, R. (2010). La perspectiva de cambio curricular Early-álgebra como posibilidad para desarrollar el pensamiento algebraico en escolares de educación primaria: una mirada al proceso matemático de generalización. Memoria 11 Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Bogotá, Colombia.

Desarrollo de competencias matemáticas en torno al concepto de función lineal

*Jose Arley Londoño Acevedo**
*Eliécer Aldana Bermúdez***

RESUMEN

En este estudio se reportan los primeros resultados de una investigación en curso, donde se busca el desarrollo de competencias en el pensamiento variacional desde el concepto de función lineal. La investigación tiene como base la teoría de "Las Situaciones Didácticas" de Brousseau. Para ello se ha utilizado, como metodología, una ingeniería didáctica a un grupo de veinticinco estudiantes de grado noveno, quienes se les aplicaron un cuestionario y una entrevista. A partir del análisis y de los resultados se muestran algunas dificultades que ellos ponen de manifiesto y el logro de algunas competencias como pensar y razonar, plantear y resolver problemas, y representar.

Palabras clave: función lineal, ingeniería didáctica, representaciones, situaciones didácticas, competencias.

* Institución Educativa Robledo. Dirección electrónica: arleymate2010@hotmail.com.
** Universidad del Quindío. Dirección electrónica: eliecerab@uniquindio.edu.co.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Los resultados de investigaciones acerca del concepto de función lineal reflejan algunas dificultades de comprensión en este conocimiento, ya que los estudiantes no han logrado desarrollar las competencias esperadas en matemáticas. Al respecto, Santos y Alvarado (2000) reportan la falta de aprendizaje del concepto debido al énfasis que se hace en la enseñanza de procedimientos algorítmicos, y la carencia de una enseñanza basada en la resolución de problemas. Así mismo, Arzarello et al. (1995, pp. 10-11) plantean que el uso de símbolos inadecuados no favorece el desarrollo del pensamiento variacional; por este motivo en la historia del álgebra tiene importancia no solo la historia de los conceptos sino también el sistema de símbolos utilizados para poder expresarlos. Asimismo, Duval (1988), (citado por De la Rosa, 2000), menciona la falta del concepto de función lineal en el lenguaje natural y la carencia de la habilidad de visualización. El problema que motiva esta investigación tiene que ver con la necesidad de que los estudiantes desarrollen competencias básicas en matemáticas que les permitan generar un aprendizaje más consciente. Por tanto lo que se espera en concreto es: **¿Cómo generar en el estudiante de grado noveno el desarrollo de competencias matemáticas, en torno al concepto de función lineal?**

MARCO CONCEPTUAL

El desarrollo del pensamiento variacional juega un papel importante en la investigación y requiere de la formación de conceptos apropiados; además del desarrollo de algunas habilidades y del proceso de actitudes, se considera la implementación de situaciones problema que involucran el contexto sociocultural del estudiante, en la perspectiva de desarrollar su pensamiento variacional con el fin de lograr algunas competencias básicas como: pensar y razonar, plantear y resolver problemas, y representar a partir de situaciones de la vida cotidiana.

Por ejemplo, para la competencia de pensar y razonar se pretende plantear preguntas propias de las matemáticas como: ¿cuántos hay?, ¿cómo encontrarlo?, si es así,… entonces, etc., además de conocer los tipos de respuestas que ofrecen las matemáticas a estas cuestiones. En la competencia de representar, se pretende lograr que los estudiantes relacionen diferentes formas de representación de acuerdo con la situación del problema y el propósito.

Para desarrollar esta investigación nos apoyamos en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (1986) y de la Teoría de la Transposición

Didáctica (Chevallard). Una situación didáctica es un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidas entre un estudiante o un grupo de estudiantes, en algún entorno (incluyendo instrumentos o materiales) y el profesor, con el fin de permitir a los estudiantes aprender, esto es, reconstruir algún conocimiento. La primera fase de una situación didáctica es la denominada a-didáctica, en la cual el profesor no interviene dejando que el estudiante viva esta situación como investigador de un problema matemático (Margolinas, 1993). La entrada en una fase a-didáctica es algo que debe gestionar el mismo maestro. Esto dio lugar al concepto de "devolución" desarrollado por Brousseau (1988): "La devolución es el acto por el cual el enseñante hace aceptar al estudiante la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta él mismo, las consecuencias de esta transferencia".

METODOLOGÍA

La metodología de investigación está fundamentada en la ingeniería didáctica, de tipo cualitativo; es un estudio de caso, orientado al desarrollo de competencias matemáticas en el pensamiento variacional desde el concepto de función lineal. Esta investigación se realiza en la Institución educativa Robledo con 25 estudiantes de grado noveno con edades entre 14-18 años; para la obtención de los datos se pretende utilizar dos secuencias a-didácticas, con cuestionarios, una entrevista y videograbaciones, con el fin de generar en ellos competencias como: pensar y razonar, plantear y resolver problemas, y representar. El desarrollo del estudio se hizo en diferentes fases: se diseñaron dos secuencias que fueron analizadas por expertos y aplicadas a cada uno de los estudiantes. A partir del informe de los expertos y de los resultados en el análisis preliminar se aplicó un cuestionario. Luego se diseñó una entrevista con el objetivo de obtener más información sobre algunos resultados para describir y explicar las dificultades encontradas y el desarrollo de algunas competencias en la construcción del concepto de función lineal.

Para alcanzar este propósito se consideró conveniente utilizar metodología de investigación cualitativa. Merriam S. (1998) señaló, sobre esta metodología, que, primero, consiste en entender el fenómeno de interés desde las perspectivas de los participantes y no del investigador; segundo, el investigador es el instrumento primario para la colección de datos y el análisis; tercero, esta metodología se refiere al estudio de casos; cuarto, emplea la estrategia de investigación inductiva; quinto, se enfoca en los procesos y entendimientos; el producto del estudio cualitativo debe enriquecerse descriptivamente.

Finalmente, el investigador consume una cantidad de tiempo sustancial, en el medio natural, muchas veces en intenso contacto con los participantes. (Merriam S. 1998, p. 6)

ANÁLISIS DE DATOS

En el análisis preliminar se pudieron establecer los conceptos de proporcionalidad, magnitudes inversamente proporcionales, relaciones de cambio, variación y variable. El estudiante suele usar algunas competencias como: pensar y razonar, plantear y resolver problemas y representar.

Para suministrar agua a una pequeña población, se tiene un tanque lleno con 120000 litros de agua. La llave del tanque se abre para que salgan, 12000 litros de agua por hora. Con la información anterior complete la siguiente tabla que relaciona el tiempo transcurrido (t) y la cantidad de agua que queda en el tanque (c).

Tiempo (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Cantidad (c)	108000	96000	84000	72000	60000	48000	36000	24000	12000	0	0

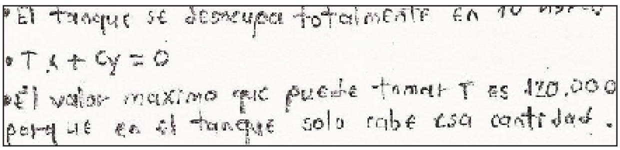
- *¿En cuántas horas se desocupa totalmente el tanque?*
- *Construya una expresión que permita determinar la cantidad de agua c (en miles de litros) que hay en el tanque transcurridas t horas.*
- *¿Cuál es el valor máximo que puede tomar t? (explique)*

Este estudiante con base en la información establece que es una magnitud inversamente proporcional y puede construir el concepto de función desde las magnitudes.

Tiempo (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Cantidad (c)	108000	96000	84000	72000	60000	48000	36000	24000	12000	0	0

A3, Representación de la tarea 3 en el análisis preliminar.

El estudiante pone en manifiesto no tener dificultades, porque desarrolló algunas competencias como pensar y razonar, ya que plantea soluciones matemáticas, señalando la relación del estudio de funciones a través de las magnitudes.


•El tanque se desocupa totalmente en 10 horas
•Tx + Cy = 0
•El valor maximo que puede tomar T es 120.000 porque en el tanque solo cabe esa cantidad.

A3, Solución de la tarea 3 en el análisis preliminar

En el siguiente episodio muestra cómo desarrolla competencias como plantear y resolver problemas.

E. ¿Me podría explicar cómo obtuvo esta respuesta?

A3: Lo que hice fue que con la información del problema observé que tenía dos valores en la variable independiente en este caso (t); entonces comencé a llenar los espacios y el último valor de esta variable fue de 11. Luego en la variable dependiente empecé a sacar la diferencia. Por esto puedo determinar que es una magnitud directamente proporcional. Además de poder responder correctamente la pregunta a.

En cuanto a la construcción de la expresión algebraica, esto es lo que hace.

E. ¿Por qué representa la expresión de esta manera y, además, cuál fue el valor máximo?

A3*: Al responde esta pregunta pensé que tomando el valor del tiempo (t) más cantidad (c) la podía igualar a cero entonces determiné que esta era la ecuación pero después especulé que esta expresión era de otra forma. El valor máximo tomado fue el de 12.000 cuando el tanque tenía la cantidad mínima.*

Nótese que el sujeto desarrolla algunas competencias como pensar y razonar, plantear y resolver problemas, pero presenta dificultades en modelar una expresión algebraica y no utiliza el lenguaje simbólico, formal y técnico, ni las operaciones.

1. *Responder las siguientes preguntas de acuerdo con la información presentada:*

a) *Dibuja una recta que pasa por los puntos (3,2) y (5,4)*

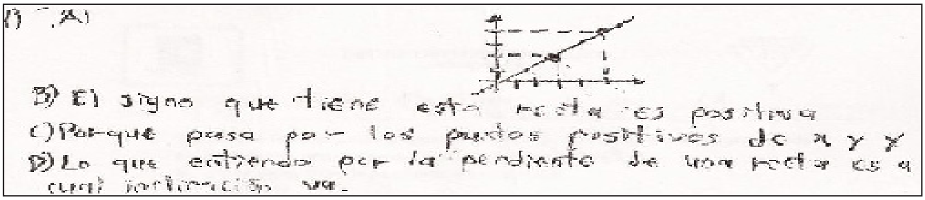
b) ¿Qué signo tiene la pendiente de esta recta?

c) ¿Por qué?

d) ¿Qué entiendes por pendiente de una recta?

La siguiente tarea muestra cómo el estudiante logra desarrollar competencias en torno al concepto de función lineal.

Este estudiante coordina y representa la gráfica y la noción de pendiente de la siguiente manera:



A3, Representación de la tarea 1 en el cuestionario

Se puede establecer que los estudiantes desarrollan competencias de representación.

E. ¿Cómo obtuvo la gráfica de una función lineal?

A3: Gráficamente lo que hice fue tomar los dos puntos que me dan en la información y como yo sé que una recta pasó por dos puntos, entonces ubiqué los puntos dentro de un plano cartesiano y después uní los puntos por medio de una recta.

E. ¿Qué es para usted una pendiente y qué signo tiene en el anterior punto?

A3: Lo que entiendo por pendiente de una recta puede ser la inclinación que tiene la recta, además al ejercicio le asigné una pendiente positiva porque se encuentra en el primer cuadrante.

Los estudiantes recurren a graficar las parejas ordenadas y a partir del dibujo determinan si la relación es lineal.

Analice la siguiente tabla de valores y determine como se relacionan las variables *x* y *y*.

x	y
0	9
2	8
4	7
6	6
8	5
10	4

Tabla 1

x	y
-4	16
-2	4
0	0
4	16
7	49
13	169

Tabla 2

x	y
-2	2
-1	1
0	0
2	2
3	3
4	4

Tabla 3

Se evaluó el desarrollo de algunas competencias al realizar la representación y argumentar.

E. ¿Cuáles de las tres representaciones es una función lineal y por qué?

A3: A partir de los dibujos obtenidos, determiné que la primera tabla representa una función lineal ya que a cada elemento de x le corresponde solo uno de y, mientras que las otras dos tablas no son funciones lineales, además me di cuenta que los puntos no coincidían en una sola recta.

CONCLUSIONES

Los estudiantes presentan dificultades en relación con la articulación entre registros gráficos, algebraicos, tabulación y en la noción de pendiente; no expresan argumentos matemáticos en algunos problemas en contexto; en las situaciones didácticas, los estudiantes lograron desarrollar algunas competencias como: pensar y razonar y representar, ya que pueden distinguir entre diferentes tipos de cuestiones propias de una función lineal; por la forma como resolvieron las tareas a lo largo de todo el análisis preliminar, el cuestionario y el modo de justificar las respuestas en la entrevista, pone en evidencia que los estudiantes desarrollan algunas competencias, porque recuerdan los elementos matemáticos necesarios en la resolución de problemas, utilizan algunos sistemas de representación (tabulación y gráfica); pero presentan dificultades en el procedimiento algebraico relacionado con el concepto de función lineal.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adrián, D. l. (2000). *El concepto de función en secundaria: Conocer el grado de visualización de función lineal en el alumno,Experimentaciones en Educación Matemática en los Niveles Medio Superior y Universitario.* México: Editores F. Hitt y G. Hernández, Cinvestav-IPN.

Artigue, M. (1998). *Ingeniería didactica. En Artigue, M, Douay, R, Moreno, L, Gomez, P. (Eds). Ingeniería didáctica en educación matemática.* Colombia: Una empresa docente.

Arzarello, F. B. (1995). The construction of algebraic knowledge: towards a socio-cultural theory and practice. . *Proceedings of the 19th International Conference for Psychology of Mathematics educatio*, Vol I., pp. 119-140.

Brousseau, G. (1988). *Los diferentes roles del maestro. En: Parra C. & Saiz, I. (Comp.) Didáctica de las Matemáticas: Aportes y reflexiones.* Buenos Aires: Paidos.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires.: Aique.

Kieran, C. (2007). .Learning and Teaching Algebra at the Middle School Through College Levels. En Lester, F. K. (Ed.). Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. *Reston, Virginia: NCTM e IAP*, pp. 707-762.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative Research and Case Study. Applications in Education.* San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Santos, & M y Alvarado. (2000). *Reforma curricular y desempeño de los estudiantes del nivel medio superior en el proceso de resolución de problemas no rutinarios, Experimentaciones en Educación Matemática en los Niveles Medio Superior y Universitario,.* México, pp. 1-16: Editores F. Hitt y G. Hernández, Cinvestav-IPN,.

Weed. (1992). *Assessment of Student's Knowledge of Mathemathics: steps toward a theory.Capitulo 26 del Haldbook of Research on Teaching and Learning Mathematics.* New York. N.L.: D.A. Grows editor.

La comprensión del concepto de parábola como una cónica

Jorge Hernán López Mesa[*]
Eliécer Aldana Bermúdez[**]

RESUMEN

Esta investigación es parte de un estudio más amplio que se viene realizando con estudiantes de Ingeniería de Sistemas. El propósito de este estudio es el de analizar cómo los estudiantes llegan a la comprensión del concepto de parábola y las dificultades que encuentran en la construcción de este concepto matemático. Para ello se ha utilizado el marco teórico de las Situaciones Didácticas, y la metodología de la Ingeniería Didáctica, apoyada en cuestionarios, entrevistas y videograbaciones, y en la utilización de entornos informáticos. A partir del análisis se muestran los primeros resultados sobre los procesos cognitivos y las dificultades que presentan los alumnos en el desarrollo de la comprensión /construcción del concepto de parábola en su fase a-didáctica.

Palabras clave: parábola, geogebra, sistemas de representación, situaciones didácticas, ingeniería didáctica.

[*] Universidad del Quindío. Dirección electrónica: jhlopez@uniquidio.edu.co.
[**] Universidad del Quindío. Dirección electrónica: eliecerab@uniquindio.edu.co

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

En las prácticas pedagógicas se evidencian las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión de las cónicas, en concreto, la parábola; se observa que realizan un trabajo algorítmico apoyados en un proceso algebraico y memorístico, y dejan de lado la comprensión analítica del concepto. Al respecto, Santa y Jaramillo (2007), ponen de manifiesto el desconocimiento por parte de los estudiantes de los componentes que integran la parábola, lo que indica que no pueden relacionar sus elementos de manera analítica. Gómez y Carulla (2000) plantean que el tratamiento gráfico que realizan los estudiantes en la comprensión geométrica de la parábola es muy complejo, por la síntesis que deben hacer en los modos de representación gráfico, algebraico y analítico. Asimismo, Fernández (2010) en su trabajo sobre cónicas presenta las concepciones erróneas que imposibilitan la comprensión del concepto de lugar geométrico.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

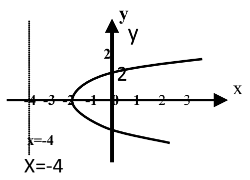
Para este estudio se han utilizado las situaciones didácticas de Brousseau (1986), las cuales indican un conjunto de secuencias de clases concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo, por parte del profesor, para desarrollar un proyecto de aprendizaje, un saber constituido o en vías de construcción; es un producto resultante de un análisis a priori y a posteriori de unas acciones puestas en práctica. Una situación didáctica incluye un contrato didáctico, la situación problema, la variable didáctica y la situación a-didáctica. El contrato didáctico, según Chevallard (1998), hace referencia a los compromisos y resultados que espera el profesor del estudiante, y viceversa. La situación problema puede ser de control o aprendizaje; es de control si nos sirve para comprobar si el estudiante ha adquirido el conocimiento, o de aprendizaje si se plantea un problema al estudiante y este debe tener una estrategia y conocimiento previo para resolverlo. En la variable didáctica, el profesor modifica la estrategia para generar cambios en ella, que le permitan al estudiante llegar al saber matemático. La primera fase en una situación didáctica es la a-didáctica (de resolución de una tarea por parte del alumno), en la que la intención de enseñanza no es explícita para el estudiante, no hay una intención del maestro en cuanto al saber, solo se centra en motivar, en ayudar al sujeto en una fase de adaptación con el medio. En esta fase aparece la devolución, de acuerdo con Brousseau (1997, p: 41): "La devolución es el acto por el cual el enseñante hace aceptar al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia".

METODOLOGÍA

La metodología utilizada en este estudio es cualitativa interpretativa, porque permitirá la comprensión; según lo refiere Dreyfus y Eisenberg (1990), citado por Aldana (2011, p: 19), en cuanto explica la forma como los sujetos llegan a la comprensión/construcción del concepto de parábola, apoyada en la Ingeniería Didáctica de Chevallard (1998). El estudio ha sido desarrollado en varias fases: (a) elaboración de situaciones a-didácticas, (b) validación de las tareas por juicio de expertos, (c) aplicación de las situaciones a-didácticas, (d) confrontación de la validación por juicio de expertos y los resultados alcanzados por los sujetos, (e) análisis a priori de la situación a-didáctica, modificación y elaboración de las situaciones didácticas, (f) aplicación de algunas situaciones didácticas, (g) análisis a posteriori, (h) realización de entrevistas, (i) triangulación de la información. Para el estudio se tomó un grupo de 25 estudiantes de Ingeniería de Sistemas de primer semestre, algunos son repitentes, cuyas edades oscilan entre 17 y 30 años. Se utilizó el programa geogebra, se aplicaron cuestionarios, entrevistas, observación en el aula y videograbaciones. A partir de estos instrumentos se realizó el análisis mediante triangulación de la información.

ANÁLISIS DE DATOS

El análisis se realizó considerando conjuntamente los instrumentos y notas de desempeño del estudiante en el desarrollo de las tareas. Para ello nos centraremos en el análisis de la tarea 1.



1. Observe la gráfica correspondiente a una parábola y determine los aspectos que se relacionan.
    a. ¿Cuáles son las coordenadas del foco y el vértice de la parábola?
    b. ¿Cuál es la ecuación de la directriz?
    c. Según la posición de la directriz y el foco ¿cuál es el eje principal de la parábola?
    d. ¿Cuál es la ecuación correspondiente a la cónica?
    e. Determine la longitud del lado recto.

Figura 1. Tarea 1 del cuestionario 1, situaciones a-didácticas.

En la figura 2 mostramos la manera como el estudiante (E6) realiza la tarea:

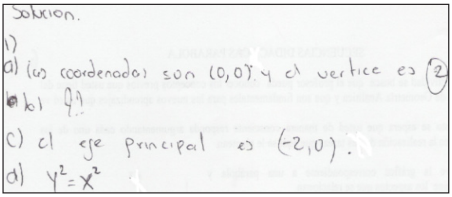

Solucion.
1)
a) las coordenadas son (0,0) y el vertice es (2
b) ¿?
c) el eje principal es (-2,0).
d) $Y^2=X^2$

Figura 2. Resolución de la tarea 1del cuestionario

Se observa en la figura 2 que el sujeto responde de forma incorrecta, porque los argumentos que utiliza no corresponden al lenguaje matemático y no usa los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tarea; además, no es capaz de establecer una coordinación entre los sistemas de representación gráfico y algebraico.

Durante la entrevista cuando se le pregunta, esto es lo que argumenta el estudiante.

I: ¿Por qué se le dificultó la interpretación de este ejercicio?

E6: No recordé la ecuación de la parábola, y no pude reconocer los elementos como el foco, el vértice, la directriz.

I: ¿Cómo puede establecer usted que la gráfica que se referencia corresponde a una parábola?

E6: Por su forma, tiene un vértice y una orientación de una ecuación de segundo grado.

I: ¿Qué importancia tiene la línea recta que se muestra en la gráfica?

E6: Cuando está acompañada de una parábola, se trata de la directriz, y tiene que ver con el valor de p, nos ayuda a formar la ecuación de la directriz.

Estos mismos argumentos los representa en forma escrita el estudiante (E6), (véase figura 3).

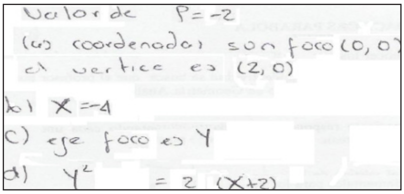

Valor de P=-2
las coordenadas son foco (0,0)
el vertice es (2,0)
b) X=-4
c) eje foco es Y
d) $Y^2 = 2(X+2)$

Figura 3. Resolución de la tarea 1 en la entrevista

En la figura 3, se evidencia que este sujeto ha resuelto la tarea correctamente, excepto al referir al eje focal, porque reconoce los elementos de la parábola; sin embargo, no alcanza un nivel analítico porque no utiliza la ecuación canónica $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ para relacionar los elementos de la gráfica.

En la figura 4 se muestran los argumentos dados por el estudiante (E15) frente a la misma tarea.

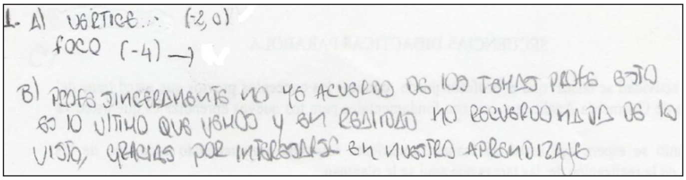


Figura 4. Resolución de la tarea 1 del cuestionario

El sujeto tuvo un contacto previo con el objeto matemático, pero no tiene los elementos para resolver la situación, no logra la construcción analítica del concepto. En la entrevista, logra identificar los elementos.

I: ¿Por qué se le dificultó la interpretación de este ejercicio?

E15: Como mencioné en la prueba, no recordé la ecuación de la parábola, y no pude hallar el foco, la directriz.

I: ¿Cómo puede establecer usted que la gráfica que se referencia corresponde a una parábola?

E6: Por su forma y la curva que representa la parábola.

I: ¿Qué importancia tiene la línea recta que se muestra en la gráfica?

E6: Es la directriz de la parábola, y su importancia es porque me permite establecer la distancia entre la línea y el vértice de la parábola y puedo hallar el valor de p.

Aquí el estudiante muestra mayor nivel de elaboración del concepto, porque reconoce algunos elementos algebraicos de la parábola y los coordina con la representación gráfica.

CONCLUSIONES

El trabajo desarrollado por los estudiantes, del cual se han mostrado algunos casos representativos en este documento, permite aproximar a algunas de las características de sus actuaciones al resolver problemas sobre parábolas, a saber: (a) muestran dificultad para interpretar gráficas por la forma como relacionan y analizan los elementos de la parábola, (b) no logran abstraer los elementos para relacionarlos con la ecuación canónica, (c) no aplican procedimientos que permitan visualizar la forma como coordinan los modos de representación, desde un análisis algebraico hasta llegar a la forma analítica, (d) muestran concepciones erróneas para coordinar los diferentes modos de representación, (e) tienen nociones débiles sobre el objeto matemático de parábola, porque no comprenden la definición de lugar geométrico, memorizan información que les permite resolver situaciones inmediatas, no coordinan los procesos analíticos que les permitan argumentar de manera lógica su desempeño.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aldana, E. (2011). *Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la Teoría* "*APOE*". Tesis doctoral no publicada. Universidad de Salamanca, España.

Fernández, M. (2010). *Estudio de una secuencia de situaciones para la enseñanza de las cónicas integrando Cabri Géomètre II Plus*. Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño, Pasto Colombia.

Gómez, P. & Carulla, C. (2000). *Enseñanza sobre la Función Cuadrática.* Universidad de los Andes. Colombia.

Santa, Z. & Jaramillo, C. (2007). *Construcción de las secciones cónicas mediante el doblado de papel en el marco del modelo educativo de van Hiele*. X Encuentro Colombiano de Matemáticas Educativa. Universidad de Antioquia.

Brousseau, G. (1986): *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemát*ica, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19 (versión castellana 1993).

Brousseau, G. (1997). La théorie des situations didactiques. Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal, Montréal.

Chevallard (1998). *La transposición didáctica del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique Group Editor.

El concepto de número racional: un estudio de su proceso de aprendizaje desde un abordaje sociocultural[1]

Juan Antonio López Guerra[*]

RESUMEN

En este trabajo estudiaremos el proceso de aprendizaje del concepto de número racional, en un grado 4 de la Básica Primaria de una institución ubicada en el municipio de Caucasia, mediante el uso de actividades orientadoras de enseñanza, elaboradas desde la teoría de la actividad de Leontiev, apoyados en autores como Davidov (1982, 1988), Radford (2004, 2008, 2012), GEPAPe (2010) entre otros, que ven en esta perspectiva la posibilidad de que las comunidades construyan y produzcan un conocimiento matemático en dialéctica con sus prácticas sociales, es decir, con el bagaje, las necesidades, la historia y la cultura de los niños de su comunidad.

Palabras clave: número racional, perspectiva histórico-cultural, teoría de la actividad, actividades orientadoras de enseñanza (AOE), prácticas sociales.

[*] Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: jlopez1464@gmail.com

[1] Tesis de Maestría en desarrollo realizada por el autor para optar por el título de Magíster en Educación, Énfasis en Educación Matemática en la Universidad de Antioquia. 2012. Directora de tesis: Mg. María Denis Vanegas.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Nuestro interés en el tema sobre el concepto de número racional es debido a que se encuentra estratégicamente ubicado en el currículo de la institución puesto que se pone en práctica en el estudio posterior del álgebra y otras temáticas, y porque es un tema que entrelaza todo lo estudiado en matemáticas y otras disciplinas como física, química y biología. Además, porque actuando como docente de matemáticas, he notado que los estudiantes habitualmente presentan dificultades en resolver problemas y dominar procedimientos de cálculo con fracciones.

Otro dato de nuestra experiencia ocurre en la participación en mesas de trabajo institucionales de matemáticas, en las cuales se ha planteado muchas veces que la el concepto de fracción lo seguimos presentando de una manera estática (como dos números aislados), y superficial (traemos al aula una torta, un pan, una manzana etc. y las partimos en X partes iguales, o desiguales en muchos casos, y luego pasamos a realizar operaciones). Por ello, generalmente aparecen brechas entre la enseñanza formal, la comprensión del concepto de número racional y el uso que se le da en contextos fuera de la escuela.

En investigaciones como la de Catalani (2002) también es notable que esa cuestión del conocimiento matemático y el énfasis dado a los aspectos lógico-formales del tema de las fracciones ocasione una enseñanza que por lo general prioriza los algoritmo más que el concepto. En consecuencia, los docentes, para enseñar fracciones, comúnmente recurrimos a modelos como el siguiente (Catalani, 2002. P. 27):

- Representación del concepto en su expresión simbólica –utilización de juegos, tortas, frases para que los recuerden, etc.–.
- Demostración del funcionamiento del concepto –la técnica operatoria–.
- Aplicación del concepto –los modelos de problemas resueltos por el profesor–.
- Reproducción de la técnica y de la aplicación –el alumno recibe la lista de ejercicios y problemas para reproducir lo aprendido–.

Otra causa de dificultades e incomprensiones de este tema tiene que ver con el significado que le damos a las palabras. En muchas ocasiones, por ejemplo, los docentes usamos términos como fracción y número racional de cualquier manera o para referirnos a un mismo concepto. Nuestro trabajo toma distancia de este tipo de trastornos de significados y se ubica en el plano de Lima y Moisés (1998), quienes establecen que el concepto de número racional está relacionado con cuatro ideas fundamentales: la fracción, la medición, los elementos básicos de la geometría, y el movimiento de las cantidades continuas. Estas categorías, según estos mismos autores, son fundamentales y si no se combinan o se tienen en cuenta en el aprendizaje de este concepto entonces habrá dificultades para la comprensión y se tornará mecánico el concepto del número racional. Esto quiere decir que aprender fracciones solamente no es suficiente para comprender a cabalidad el concepto de número racional. De hecho Lima y Moisés (1998) sostienen que la fracción no es un número, es apenas un prenúmero, una forma de registrar las relaciones entre las cantidades, una notación, una forma de representación. Sin embargo, muchos docentes tomamos las fracciones como sinónimo de número racional y dejamos de lado las otras ideas fundamentales que componen dicho concepto y más aún, la manera de relacionar estas en el contexto, teniendo en cuenta lo histórico, lo social y lo cultural, donde se desenvuelven los estudiantes. Inquietados por esto nos pusimos en la tarea de buscar algunas respuestas de cara a la siguiente pregunta: ¿Cómo es el proceso de aprendizaje del concepto de número racional, en los estudiantes del grado 4º de una institución educativa del municipio de Caucasia, desde una perspectiva sociocultural?

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

De las investigaciones rastreadas hasta este momento en el contexto de la Educación Básica percibimos, en primer lugar, que las comprensiones y análisis de los procedimientos y acciones de los estudiantes sobre los números racionales son tratados desde teorías de tipo cognitivista, como la semiótica de Duval y la teoría de campos conceptuales de Vergnaud (De León y Fuenlabrada 1996; Vallejo y Tamayo 2008; Gallardo y otros 2008; Ruiz 2005; Fandiño 2009; Sancheza 2010; Mesa y Barrios 2010, son ejemplos de algunos). A partir de allí, han hecho aportes significativos a la praxis pedagógica y le han dado importancia a las diferentes representaciones o significados que ayudan a construir el concepto de racionalidad.

En segundo lugar, las investigaciones rastreadas toman el concepto de fracción como sinónimo del concepto de número racional, y asumen este concepto como una necesidad de ampliación del campo numérico de los números enteros, puesto que no dan solución a la ecuación $bx = a$, donde b es distinto de cero, cuando a no es múltiplo de b; además, se puede observar que el surgimiento de la fracciones está dado desde el contexto de la medida.

El paso que se da del número Natural al número Racional implica la comprensión de procesos de medición y partición de una unidad en el marco de situaciones en donde la unidad de medida no esté contenida un número exacto de veces en la cantidad que se desea medir o en las que se hace necesario expresar una magnitud en relación con otras magnitudes como por ejemplo relacionar fracciones, números mixtos y números decimales (Meza y Barrios, 2010. P. 3).

Ahora bien, relacionando todas las investigaciones anteriores con lo que pretendemos hacer, es pertinente decir que conllevamos el mismo contexto de aprendizaje de los números racionales, pero sin confundirlo con la fracción. Esto implica la inscripción de nuestro trabajo en el plano de las investigaciones que como la de Lima y Moisés (1998) y la de Catalani (2002) toman las elaboraciones sobre la racionalidad **a/b** como resultado de pensamiento y lenguaje en la actividad social e histórica de la humanidad. Además, tendremos en cuenta la perspectiva histórico-cultural para considerar que un sujeto comprende un determinado conocimiento matemático cuando lo produce en dialéctica con su entorno y lo usa en diferentes prácticas sociales que realiza.

En este sentido, Lima y Moisés (1998) exponen que el concepto de número racional está relacionado con cuatro ideas fundamentales: la fracción, la medición, los elementos básicos de la geometría, y el movimiento de las cantidades continuas. Estas categorías, según estos autores, se convierten en un ciclo a seguir para el aprendizaje de este tema.

El movimiento de las cantidades continuas aparece para los autores como el núcleo de este ciclo; en él se organizan las unidades naturales a partir de la correspondencia biunívoca entre el conjunto que cuenta (lo que enumera, por ej. las rayitas, las piedras) y el conjunto contado (lo enumerado, por ej. animales) en la naturaleza de sus cualidades y cantidades. Pero, cuando el sujeto se encuentra con la naturaleza en continuidad (aquella que no se puede contar, por ej. un río) recurre a una unidad artificial, lo cual conduce a la segunda capa denominada, por Lima y Moisés (1998), como geometrización, es decir, al uso de espacios, a la producción de objetos de barro, arcilla, etc. y a la construcción de moradas (con el tijiolo, por ej.) donde se ve el uso evidente de unidades inventadas por el hombre. Ello trae consigo elementos de medición: como el de comparar una cantidad con otra del mismo tipo definida como unidad y la medición de cantidades menores que la unidad, lo cual, a su vez, genera un choque, que permite el nacimiento de la fracción. Estas cuatro ideas que enriquecen este concepto las encontramos comúnmente en actividades ligadas a las necesidades del diario vivir, y permiten aproximarnos a la interacción que puede darse entre las orientaciones al plantear los problemas y las formas de comprender este concepto desde un abordaje histórico cultural. Así, las voces de los estudiantes y del maestro producidas desde las esferas de las prácticas sociales entran en un movimiento que permite también el conocimiento colectivo.

Instalados en esta concepción, también acogemos en nuestro trabajo el concepto de actividad, desde las actividades orientadoras de enseñanza (GEPAPe, 2010) las cuales, se fundamentan teóricamente desde la Teoría de la Actividad de Leontiev (1981), retomada por Moura (1998, 2003), Radford (2004, 2008, 2011) entre otros. Desde allí se propone que las actividades son procesos que corresponden a la relación del ser humano con el mundo, en su afán de satisfacer una necesidad especial, por lo que es dirigida por un objeto-motivo que, a su vez, moviliza acciones subordinadas a objetivos.

De ese modo, no se trata de pensar que el concepto de número racional es diferente de acuerdo con el lugar y a las personas con las que se trabaje; de lo que se trata es de comprender que las formas de construcción y producción del conocimiento matemático sí dependen de los contextos socioculturales en los que está el sujeto que enseña y el sujeto que aprende; en otras palabras, para tener en cuenta las particularidades de los estudiantes, del contexto, de sus pensamientos y sentimientos, de su manera de entender el mundo, y sobre todo de sus necesidades.

METODOLOGÍA

Esta investigación se lleva a cabo en un grado 4º de la Básica Primaria perteneciente a la Institución Educativa Divino Niño, ubicada en el sur del municipio de Caucasia, Antioquia. Este grado está conformado por 35 estudiantes (21 niñas y 14 niños), sus edades oscilan entre 9 y 11 años, y pertenecen a los estratos socioeconómicos 1 y 2. De este grado soy docente de matemáticas, lo que quiere decir, que me desenvuelvo como profesor e investigador. De ahí que este trabajo esté enmarcado bajo una investigación cualitativa con un abordaje de una investigación participante (IP). El objetivo de la IP, desde Cano (1997), busca:

> Reconocer, analizar y sistematizar el conocimiento de índole popular a fin de facilitar la participación real de los grupos involucrados en la planeación y ejecución de las acciones que corresponden y se relacionan con el desarrollo (Cano, 1997, p. 86).

En concordancia con lo anterior, propusimos desde el mismo paradigma cualitativo el enfoque crítico-dialéctico, el cual, según Sánchez (1998) cuestiona la visión estática de la realidad, debido a que esa visión esconde el carácter conflictivo, dinámico e histórico de la realidad, y tiene un "interés transformador" de las situaciones o fenómenos estudiados. En esa vía, nuestro sueño es aportar a la transformación en la forma de enseñar y aprender el concepto de número racional, desde un abordaje sociocultural.

Para el trabajo de campo se tuvieron en cuenta *las actividades orientadoras de enseñanza* (AOE) como estrategia metodológica, que son situaciones propiciadoras de desarrollo y aprendizaje que proponen pensar, crear y ejecutar los episodios en el aula de clase, procurando interacciones que posibiliten aprender el conocimiento matemático socialmente construido, desde los elementos que constituyen la *teoría de la actividad.*

Las AOE se ejecutaron en 45 días, en sesiones de 4 horas semanales. Desde estos encuentros en el aula de clase, utilizamos los siguientes instrumentos para recopilar la información: videograbaciones; registros de las producciones escritas de los participantes; diarios de campo y entrevistas semiestructuradas a los estudiantes.

Actualmente, estamos en el proceso de ***análisis*** de la información. Para ello, recurrimos al estudio de casos (Yin, 1984) y adoptamos una triangulación entre los datos, las notas de los participantes y la teoría. El caso estará conformado por 5 estudiantes que manifestaron su deseo de participar, (algunos se destacaban por indagar y participar constantemente en clase, otros, en cambio, expresaban tener dificultad en la comprensión del área de matemáticas). De estos estudiantes nos interesa observar, interpretar y comprender las interrelaciones que se tejen, en el aula de clase, con el conocimiento matemático referido al concepto de número racional.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cano, M. F. (1997) *Investigación participativa: inicios y desarrollos.* Recuperado el 26 de octubre de 2009, de: www.insp.mx/Portal/Centros/ciss/nls.../inv_participativa.pdf.

Catalani, E. M. T. (2002) *Ainter-relacao forma e conteudo no desenvolvimento conceitual da fracao / - Campinas*, SP: (s. n.)

Jaramillo, D. (2009). Educação Matemática, Leitura e Escrita: Armadilhas, utopias e realidades. PROVIA. En C. E. Lopes & A. M. Nacalato (Eds.). *Entre o saber* *cotidiano e o saber escolar um olhar a partir da etnomatemática. ¿Utopía o realidad?* Belo Horizonte: Mercado de Letras.

Lima A., & Moisés R. (1998) - A fração A repartição da terra. Momento de criar matemática III. *Os conjuntos numéricos* – 2. Sao Paulo: CEVEC-CIARTE

Radford, Luis. (2008) Theories in Mathematics Education: A Brief Inquiry into their Conceptual Differences. École des sciences de l'éducation. Université Laurentienne. Ontario, Canada. *Working Paper*. Prepared for the ICMI Survey Team 7. The notion and role of theory in mathematics education research.

Sánchez, S. (1998). *Fundamentos para la investigación educativa. Propuestas epistemológicas que orientan al investigador*. Bogotá: Cooperativa editorial magisterio.

Yin, R.K. (1984). *Case study research: design and methods*. Beverly Hills, CA: Sage

Una propuesta para promover un razonamiento condicional en estudiantes de grado undécimo a partir de representaciones (arbórea y tabular), con el uso de un recurso de la Web

*Anyela Paola Malagón García**
*David Fernando Pinzón Piñeros***
*Diana del Pilar Rodríguez****

RESUMEN

En esta comunicación breve reportamos el desarrollo de una investigación que presenta una propuesta para promover un razonamiento condicional en estudiantes de grado undécimo de escolaridad teniendo en cuenta, que en las orientaciones curriculares para este último ciclo se propone desarrollar competencias en torno a probabilidad condicional, y se reconoce la ausencia de este tema en la enseñanza. Para el desarrollo de la investigación se diseñó una secuencia de actividades bajo el enfoque teórico de las situaciones didácticas de Brousseau y con ayuda de un recurso de la Web; posteriormente, se implementó con 14 estudiantes de grado undécimo de una institución educativa de Bogotá para analizar las producciones de los estudiantes y la pertinencia del recurso.

Palabras clave: Probabilidad condicional, recurso de la Web, representaciones tabular y arbórea, razonamiento condicional.

* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: anyelamalagon@gmail.com

** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: davidfernando001@hotmail.com

*** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: djprodri@yahoo.com

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Diversas investigaciones han resaltado la importancia de la probabilidad condicional tanto en el estudio de la inferencia estadística, como en la vida cotidiana. En la estadística, la probabilidad condicional es un concepto teórico básico requerido en la construcción del espacio muestral producto (Assumpta, Díaz y de la Fuente. S. f.), y en el estudio de la correlación y la regresión, que fueron definidos a partir de esta (Contreras 2009).

También, resaltamos que en el terreno profesional e incluso en la vida cotidiana, la toma de decisiones acertadas en situaciones de incertidumbre se basa en gran medida en el razonamiento condicional (Assumpta, Díaz y de la Fuente. S.f.), pues este permite incorporar cambios en nuestro grado de creencias cuando adquirimos nueva información (Contreras, 2009).

De esta manera, y acorde con Contreras (2009), consideramos que "*no es exagerado decir que la probabilidad condicional es posiblemente uno de los temas estadísticos más relevantes*" (p. 3), y reconocemos la necesidad e importancia de introducir este concepto en la enseñanza con el fin de preparar a los estudiantes en la toma de decisiones de su diario vivir.

Como sostiene Batanero (2009), si queremos preparar a los estudiantes para enfrentarse a la toma de decisiones en la vida cotidiana, es importante introducir en la enseñanza la probabilidad condicional, base de la concepción subjetiva de la probabilidad. Dicha concepción no aparece explícitamente en las orientaciones curriculares para la educación matemática en primaria propuestas por el MEN, aunque, sí, en la propuesta para secundaria.

Sin embargo, acorde con Azcarate (2006) a pesar de que los temas de estadística y probabilidad se incluyan en una forma oficial en el currículo de matemáticas, no significa necesariamente que se estén enseñando.

Por lo tanto, podemos reconocer y destacar la problemática existente en la enseñanza de la aleatoriedad y específicamente en la enseñanza de la probabilidad condicional, motivo por el cual, hemos decidido abordar parte de este tema desde su enseñanza y aprendizaje, utilizando uno de los recursos de la web analizados por Contreras (2009) en su investigación titulada "Recursos en Internet para la enseñanza de la probabilidad condicional" para diseñar e implementar una secuencia de actividades con estudiantes de grado undécimo.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Definición intuitiva de la probabilidad condicional

Algunos libros presentan la definición intuitiva de la probabilidad condicional de un evento A dado otro evento B a partir de la frecuencia relativa.

Recurso de la web "El problema de Monty hall"

Supón que estás en un concurso, y se te ofrece escoger entre tres puertas: detrás de una de ellas hay un coche, y detrás de las otras, cabras. Escoges una puerta, digamos la n.º 1, y el presentador, que sabe lo que hay detrás de las puertas, abre otra, digamos la n.º 3, que contiene una cabra. Entonces te pregunta: ¿No prefieres escoger la n.º 2? ¿Es mejor para ti cambiar tu elección? Contreras, (2009, p. 46))

Cuando se utiliza este problema para enseñar probabilidad condicional a estudiantes de grado undécimo, es importante permitir la experimentación del juego un gran número de veces. Para el trabajo con este problema es necesario que el docente realice preguntas del tipo: ¿Debes mantener tu elección original, escoger la otra puerta o es irrelevante?, ¿por qué?, ¿hay alguna diferencia entre cambiar o no de puerta?

De esta manera la solución matemática del problema consiste en identificar cuál es el jugador que tiene la mayor probabilidad de ganar el carro: el que cambia de puerta o el que no cambia.

Para el diseño de la secuencia de actividades se decidió trabajar con las orientaciones de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1986), en donde propone desarrollar cuatro situaciones: acción, formulación, validación e institucionalización.

METODOLOGÍA

Dado que el objetivo principal de la investigación era analizar las producciones de los estudiantes respecto al razonamiento condicional y la pertinencia del trabajo con el recurso de la Web para contribuir al desarrollo de este razonamiento, la investigación es de carácter cualitativo procediendo mediante estudio de caso. El carácter cualitativo caracteriza la gestión de las actividades, así como algunos elementos de análisis que corresponden a las producciones de los estudiantes y la pertinencia del recurso de la Web utilizado; en este caso el enfoque cualitativo particular que se utilizó en el desarrollo de la investigación fue exploratorio-descriptivo.

ANÁLISIS DE DATOS

En la Actividad 1 (situación de acción): se dieron dos tipos de respuesta: en la primera, los estudiantes consideraron irrelevante cambiar o no cambiar de puerta, reconociendo que el juego era aleatorio; en las respuestas y argumentos de los estudiantes el 90% no consideraron importante la frase “el presentador, que sabe lo que hay detrás de las puertas, abre otra, digamos la n.º 3, que contiene una cabra”; de esta manera se evidencia un error de razonamiento que es explicado mediante la falacia del eje temporal descrita por Falk (1986; citado en Contreras (2009)).

La segunda respuesta que se presentó está enmarcada en un razonamiento donde solo se tuvo en cuenta el contexto de la situación, pues, los estudiantes consideraron pertinente no cambiar de puerta argumentando que la acción del locutor de abrir una puerta tenía como objetivo confundir al participante. En este razonamiento también se evidencia que los estudiantes no consideran la información de la situación respecto a la puerta que abre el locutor.

En la Actividad 2 (situación de formulación): los estudiantes al experimentar el juego en el sitio Web un determinado número de veces reformularon sus hipótesis iniciales, pues, identificaron que ganaban mayor cantidad de veces cuando cambiaban de puerta que cuando no cambiaban; sin embargo, la dificultad estaba en cómo argumentar probabilísticamente su nueva hipótesis, además de no comprender lo sucedido con la experimentación.

En la Actividad 3 (situación de validación): los estudiantes demuestran su hipótesis planteada en la actividad anterior; para ello el docente formula preguntas que lo ayuden a construir alguna de las representaciones (diagrama de árbol o tabla de doble entrada).

Después de discusiones en el aula de clase respecto a las preguntas y a la construcción de cada una de las representaciones, los estudiantes lograron comprender cada uno de los eventos inmersos en el juego incluyendo la dependencia e independencia entre ellos y asignaron las probabilidades correspondientes al evento de ganar con cada una de las estrategias: cambiar y no cambiar de puerta.

En la Actividad 4 (situación de institucionalización): el docente explica las representaciones utilizando lenguaje formal, para explicar cada una de las probabilidades cuando se utilizan las estrategias de cambiar y no cambiar de puerta.

ALGUNAS CONCLUSIONES

La implementación de la secuencia de actividades diseñada bajo el enfoque de la teoría de las situaciones de Brousseau junto con el recurso de la Web permitió que los estudiantes construyeran una noción del razonamiento condicional a partir de representaciones (arbórea y tabular). De la misma manera la implementación permitió que los estudiantes reconocieran eventos independientes y dependientes dentro de un experimento aleatorio.

De esta manera se evidencia la pertinencia del uso del recurso de la Web, pues la finalidad de la propuesta era permitir a los estudiantes construir un razonamiento condicional y esto se logró a partir del conflicto cognitivo que sufrieron los estudiantes en la experimentación con el recurso después de la actividad 1 y las preguntas de la situación problema.

Finalmente nos atrevemos a concluir que la propuesta es innovadora, por un lado, al decidir abordar temas de probabilidad y estadística, y específicamente de probabilidad condicional, el cual, a pesar de ser incluido en los estándares básicos de competencias en matemáticas, en ocasiones se ha omitido de la enseñanza, como lo resalta Azcarate (2006), y por otro lado, al utilizar en la propuesta un recurso de la Web para abordar la probabilidad condicional, pues en el análisis realizado se evidencia tanto la pertinencia del uso del recurso, como el de la secuencia de actividades.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Assumpta, E. Días, C. & de la Fuente, I. (s.f.). Un Estudio Inicial De Sesgos En El Razonamiento Sobre Probabilidad Condicional En *Alumnos Universitarios*. Universidad de Granada. Recuperado de http://dialnet.unirioja.es

Azcarate, P. (2006) ¿Por qué no nos gusta enseñar estadística y probabilidad?

Batanero, C. (2009) *Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo*. 19 de agosto de 2010.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Revista Reserches en Didactique des Mathématiques,* 7, 33-115.

Contreras, M. Díaz, C & Batanero, C. (2009) *Recursos en Internet para la enseñanza de la probabilidad condicional*. (Trabajo de investigación tutelada, Universidad de Granada). Recuperado de http://www.ixsgapeio.uvigo.es/resumenes/38_79_paper.pdf

¿A qué llamamos historia de la Aritmética? Una respuesta a través de cinco trazas

Adriana María Gálvez[*]
Andrés Felipe Maldonado[**]
Edgar Alberto Guacaneme[***]

RESUMEN

En este documento se responde la pregunta que hace parte del título desde cinco trazas diferentes pero interrelacionadas, a saber: la historia del número, la historia de los sistemas de numeración, la historia de los sistemas numéricos, la historia de la teoría de números y la historia de la logística. Esta respuesta analítica, constituye parte del marco de referencia usado para caracterizar el papel de la historia de la aritmética en la formación inicial de profesores de matemáticas.

Palabras clave: Conjuntos numéricos, operaciones aritméticas, relaciones numéricas, sistemas de numeración, historia de la aritmética.

[*] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: adrianam.galvez@gmail.com
[**] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: andresmaldonado2703@gmail.com
[***] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: guacaneme@pedagogica.edu.co

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

En un intento de caracterizar el papel que cumple la historia de la aritmética en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas, hemos estado desarrollando un trabajo de grado[1] que asume como contexto de estudio el espacio académico *Enseñanza y aprendizaje de la aritmética y el álgebra,* de la Licenciatura en Matemáticas de la misma universidad. En este orden de ideas hemos requerido precisar aquello que constituye y define la historia de la aritmética, asunto por demás problemático dado que, por un lado, no es tan sencillo establecer qué es aritmética y, por otro lado, en su historia parecen entremezclarse las historias del concepto de número, de los numerales, de los conjuntos numéricos, de las propiedades de los números, de las operaciones y algoritmos aritméticos. Para contar con un marco de referencia para el trabajo de grado, y sin ninguna pretensión de escribir una nueva historia de la aritmética, desde un enfoque analítico, hemos configurado cinco trazas de la historia de la aritmética a través de las cuales observar sistemáticamente el lugar de esta en el curso de formación citado.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

La historia del número, la historia de los sistemas de numeración, la historia de los sistemas numéricos, la historia de la teoría de números y la historia de la logística, constituyen las cinco trazas que hemos identificado y establecido para la historia de la aritmética. Si bien sabemos que estas no están desligadas y que se definen recíprocamente, en la medida de lo posible hemos decidido tratarlas de manera independiente, pues buscamos que ellas configuren un marco analítico específico para la indagación. Por otra parte, reconocemos que estas pueden no suministrar una visión exhaustiva de la historia de la aritmética, pues aspectos lúdicos de ella (*verbigracia*, el trabajo de Euler sobre los cuadrados mágicos y los puzles), y quizá otros aspectos que desconocemos, pueden no necesariamente estar incluidos en tales trazas. A continuación esbozamos algunos rasgos descriptivos de las cinco trazas.

Historia de los sistemas de numeración. Esta traza la abordamos teniendo en cuenta tres aspectos que son: los símbolos que se han usado históricamente para representar los números, las bases numéricas y el tipo de sistema (aditivo, posicional, etc.), todo ello desde las culturas de los babilonios, egipcios, romanos, griegos, chinos, árabes e hindúes. Los babilonios usaban

[1] Titulado “El papel de la historia de la aritmética en un curso de didáctica para la formación de profesores de matemáticas” desarrollado en el marco de la línea de investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional.

la escritura cuneiforme, utilizaban la base 60 y en su sistema se repetían los símbolos, hasta que tiempo después lograron tener un sistema posicional. En los egipcios se reconocen dos tipos de numerales (los jeroglíficos y los numerales de la notación hierática, que es la que aparece en los papiros), se usa la base 10 y se tenían símbolos para cada cifra. El conocido sistema de numeración romano que en general utiliza letras mayúsculas es un sistema base 10 aditivo. Los chinos tenían varios sistemas, uno de ellos era un sistema multiplicativo y otro fue el sistema a base de varillas que era un sistema en base 10. Los árabes, por su parte, asimilaban con gran rapidez la cultura de los pueblos que conquistaban, por lo cual utilizaron diferentes sistemas de numeración; uno de ellos, el que actualmente se conoce como sistema de numeración arábigo, proviene de la India. El sistema hindú, que inicialmente era un sistema reiterativo y luego pasó a ser posicional, era un sistema base 10. Para pasar al sistema que usamos actualmente fue necesario reconocer dos cosas: la primera es que con solo nueve dígitos y el sistema posicional se podía representar cualquier número; lo segundo fue la introducción de un símbolo para una posición que falta, el cero (Boyer, 2001). Es evidente que en todas las culturas el símbolo para el cero apareció tarde en comparación con los demás símbolos para los números (D’Amore & Fandiño, 2012).

Historia de los sistemas numéricos. Esta historia la abordamos teniendo en cuenta los momentos en los que se intentan configurar o definir los conjuntos numéricos, es decir, construir los conjuntos de manera rigurosa, con sus propiedades y con su estructura en general. Hemos encontrado que históricamente se hizo un trabajo con los naturales, con los racionales, los reales y luego sí se trabajó en torno a los negativos (D›Amore & Fandiño, 2012). La historia de esta traza no se remonta a tiempos tan lejanos como la historia de los sistemas de numeración; sus inicios se refieren a los trabajos de los matemáticos, que desde diferentes perspectivas y con diferentes intenciones procuran la construcción de los conjuntos numéricos, por ejemplo, Dedekind desde el estructuralismo, Frege y Russell desde el logicismo; Peano en el siglo XIX desde la teoría de conjuntos buscaba darle rigor al conjunto de los naturales, darle una estructura y ponerlos en un ámbito diferente, es decir, ponerlos en el marco de una teoría, en este caso teoría de conjuntos. Con respecto a las intenciones, se puede señalar que Dedekind hace la construcción del conjunto de los números reales para darle rigor al Cálculo, y trabajar las funciones sobre conjuntos bien definidos (Devlin, 1998). Russell buscaba reformular las matemáticas desde la perspectiva de la lógica, y para ello comenzó reescribiendo la aritmética y procurando darle un soporte fuerte a lo que son los conjuntos numéricos. Algo similar intentó de manera fallida hacer Frege, como se lo hizo notar el mismo Russell. Hilbert propuso una formalización para los números reales, es decir, sin recurrir a la intuición de número (Pareja, 2008).

Historia del número. Esta traza se aborda fundamentalmente en atención al significado de número; este ha cambiado dependiendo del momento histórico y la corriente filosófica. Desde la época de Pitágoras (580 a. C.), ya se consideraban los números como entes abstractos que tenían una existencia al margen de los objetos que los representan; para los pitagóricos el número era el principio y explicación de todo el universo, tanto así que uno de los discípulos llamado Filolao llegó a afirmar que todas las cosas conocidas contienen número, pues no es posible que sin número nada pueda ser conocido ni concebido. Por otra parte, en la época dorada griega, la concepción de número toma otro significado, porque son expresión de pluralidad y de lo discreto; en consecuencia, no consideraban el uno como número (Arbeláez, Anacona, & Recalde, 1998). En los siglos XVII y XVIII, el intento por dar estructura a los números en un conjunto numérico les da un significado distinto al presentando en otras épocas. A principios del siglo XX, hay una posición extrema, en el intento *formalista* de hacer una teoría, en que el objeto matemático número no tenga significado alguno.

Historia de la teoría de números. En la historia de la teoría de números se tiene en cuenta la historia del estudio de las propiedades de los números. En este sentido reconocemos a los pitagóricos quienes hicieron estudios de los números según sus propiedades, clasificándolos en números amigos, perfectos, abundantes, deficientes; además los pitagóricos iniciaron el camino para el estudio de los números figurados. Por otra parte, Euclides también se interesó por los números perfectos e hizo consideraciones sobre los números pares e impares, la divisibilidad, los números primos y, en general, presentó una teoría de números en los libros VII, VIII y IX de *Elementos.* A partir de estos se inicia un recorrido hacia el Teorema Fundamental de la Aritmética demostrado por Gauss, que incorpora el trabajo de matemáticos como Al-Farisi, Prestet, Euler y Legendre (Agargün & Özkan, 2001). La historia de la teoría de números da cuenta de diferentes aspectos en relación con los números primos, por ejemplo, los intentos de Fermat y Euler, para encontrar una expresión general para los números primos. Igualmente, se han enunciado e incluso se han establecido conjeturas relacionadas con los números primos como la conjetura de Goldbach, conjetura que aún sigue sin ser demostrada y que relaciona la escritura de los números pares con los números primos. Euclides, Kummer y Euler, en diferentes contextos sociales y culturales, demuestran que los números primos son infinitos (Bagni, 2008).

Historia de logística. En esta traza vamos a considerar los instrumentos y estrategias para hacer cálculo de operaciones. Si bien mucho antes que los pitagóricos se reconoce la existencia de culturas que desarrollaron estrategias o técnicas para hacer cálculo numérico, es en estos donde se reconoce o donde se advierte una distinción entre lo que consideraban *aritmética,* que se refería a las relaciones abstractas existentes entre los números, y lo que consideraba *logística*, que se ocupaba del cálculo práctico con números y su aplicación en el comercio (Newman, 1980). En la época dorada griega no se hicieron muchas contribuciones a la logística, dado que los matemáticos se interesaron más en la teoría que en los aspectos prácticos. En otras culturas se han interesado en desarrollar diferentes estrategias de hacer operaciones, algunas de esas estrategias son manipulativas y otras incluyen instrumentos que se usaron para hacer cuentas, como por ejemplo el ábaco. En Roma, se empleaba una tabla de contar o ábaco; los chinos y japoneses también utilizaron ábacos. Hace 400 años en Europa se hacían la adición y sustracción en tablas de contar; los números eran representados por cuentas que se quitaban a medida que el problema lo requería. Hacia finales del siglo XVI, Napier desarrolló un método para multiplicar (los huesos de Napier), preocupado porque los cálculos numéricos largos frenaban el progreso científico (Collette, 2006). En el Renacimiento, aparecen los nomogramas como instrumentos para realizar cálculos. Y en el siglo XX fue muy usual el trabajo con las reglas de cálculo. Los indígenas americanos también desarrollaron estrategias o métodos para hacer cuentas. Los nativos del Perú usaron los llamados quipus que consistían en cuerdas anudadas para llevar sus cuentas. Los mayas multiplicaban usando trazos para representar los números; ellos trazaban líneas horizontales para un número y líneas verticales para el otro, el resultado se encontraba teniendo en cuenta el número de intersecciones entre las líneas (Boyer, 2001).

CONCLUSIONES

Las cinco trazas anteriores configuran un marco de referencia, desde el cual analizar el papel de la historia de la aritmética en un curso de Didáctica; en otras palabras, esta forma de aproximarnos a la historia de la aritmética nos sirve para abordar lo que sucedió en las clases del curso de Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra (con relación a la historia de la aritmética) con un poco más de precisión y dando un carácter más analítico a lo que allí aconteció. En un segmento del curso, se hizo referencia a Peano y su construcción de los números naturales, lo cual desde la anterior perspectiva se ubica como parte de la historia de los sistemas numéricos y no de la historia del número.

Por otro lado, estas trazas ofrecen una perspectiva analítica, que contribuye a la cualificación de la conciencia sobre los aspectos curriculares de la matemática escolar. En este sentido, permite a los profesores de matemáticas de la Educación Básica y Media identificar en qué momento trabajan la teoría de números, en qué grados se hace un trabajo sobre la logística y cuándo se dota de nuevos significados la idea de número, entre otros. Asimismo, permite evidenciar diferencias en el trabajo matemático como, por ejemplo, que es distinto trabajar propiedades de los números cuadrados a encontrar el cuadrado de un número.

Por último, queremos mencionar que la aproximación a la historia de la aritmética a través de estas trazas constituye un ejercicio inicial abierto a la crítica y a las modificaciones que el devenir del trabajo vaya generando. En esta dirección, el contenido de este documento más allá de un resultado se debe reconocer como un momento de un proceso de reflexión en nuestra formación docente e investigativa.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agargün, A., & Özkan, E. (2001). A Historical Survey of the fundamental Theorem of Arithmetic. *Historia Mathematica, 28*, 207-214.

Arbeláez, G., Anacona, M., & Recalde, L. (1998). *Número y magnitud: una perspectiva histórica.* Cali: Artes gráficas Univalle.

Bagni, G. (2008). A Theorem and Its Different Proofs: History, Mathematics Education, and the Semiotic-Cultural Perspective. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education, 8*(3), 217-232.

Boyer, C. (2001). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza.

Collette, J. (2006). *Historia de las Matemáticas.* México: Siglo XXI.

D›Amore, B., & Fandiño, M. (2012). *El número cero. Aspectos históricos, epistemológicos, filosóficos, conceptuales y didácticos del número más misterioso.* Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Devlin, K. (1998). *The Language of Mathematics: Making the Invisible Visible.* Holt Paperbacks.

Newman, J. (1980). *Sigma: El mundo de las Matemáticas.* Barcelona: Grijalbo.

Pareja, D. (2008). *El lenguaje y las Matemáticas.* Quindio: Universidad del Quindio.

Relaciones de conectividad y complejidad en el eje de problemas y pensamiento matemático avanzado

Gabriel Mancera[*]
Jaime Fonseca González[**]

RESUMEN

El grupo de profesores del Eje de Problemas y Pensamiento Matemático Avanzado de la Licenciatura de Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas ha abordado una reflexión respecto de los propósitos del eje, en concordancia con la propuesta curricular de la Licenciatura y la discusión sobre la relación que los espacios de formación de dicho eje guardan horizontalmente entre sí. Los espacios de formación fueron agrupados en tres conjuntos y se analizaron las relaciones de complejidad y conectividad entre ellos, en relación con los conceptos de proporción y medida. Se expone la complejización de tales objetos matemáticos y de los procesos matemáticos asociados a su tratamiento en las distintas representaciones, el lenguaje matemático, en las formas de argumentación y validación, en los procesos de modelación, entre otros, para desarrollar, así, competencias profesionales en el estudiante para profesor.

Palabras clave: documentos curriculares, formación inicial de profesores, resolución de problemas.

[*] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: gmancerao@udistrital.com.co

[**] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: jaimejaimef@hotmail.com

PRESENTACIÓN

El presente documento busca exponer las reflexiones de los profesores del *Eje de problemas y pensamiento matemático avanzado* (EPPMA), del proyecto curricular de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM) de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, en relación con los propósitos del mismo y las relaciones existentes entre los espacios de formación (EF) del eje. La estrategia trazada por los profesores del eje ha consistido en mirarse a sí mismos y entre sí.

MARCO CONCEPTUAL

El proyecto curricular de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas se ha propuesto como un proyecto de investigación e innovación que intenta responder a la pregunta ¿Qué formación debe tener un profesor de jóvenes y niños que pretenda ayudarles a ingresar (o profundizar) en el ámbito del trabajo académico y particularmente en el de la *matematización constructora de mundo sin ejercer segregación ni otras formas de violencia?* Para responderla, se implementaron cuatro ejes de formación que atraviesan la malla curricular del proyecto LEBEM: problemas y pensamiento matemático avanzado, didáctica de las matemáticas, práctica docente y contextos profesionales.

Particularmente, el EPPMA busca que el estudiante para profesor sea reflexivo de su práctica como resolutor de problemas de matemáticas, es decir, que reconozca que no es desde la matemática formalista la manera en que se accede al conocimiento matemático y que es en la resolución de problemas donde está principalmente la actividad matemática. Cuando el énfasis en los procesos está en la abstracción, la demostración, la comprensión de textos formales y el uso operativo de definiciones formales, se dice que se trata de la resolución de problemas en el contexto de pensamiento matemático avanzado (Tall, 1978). Sin embargo, el objetivo de formación del eje, en el núcleo del pensamiento matemático avanzado, no va sobre el aprendizaje de la matemática moderna o formal como conocimiento enciclopédico, (LEBEM, 1999), sino sobre el dominio y el uso de estos procesos.

METODOLOGÍA

Dentro de las acciones metodológicas desarrolladas por el grupo de profesores del EPPMA, debe señalarse que durante cada semestre académico se han realizado acciones específicas que intentan robustecer el eje y construir respuestas parciales a la pregunta de investigación del proyecto LEBEM.

Por ejemplo, en el período académico 2007-3, se identificó el propósito de formación y objeto de conocimiento en cada espacio de formación, y cada profesor trató de especificar sus concepciones sobre estructura aditiva, conteo y estructura multiplicativa, aleatoriedad, topología, álgebra, medida y magnitud, movimiento o continuo. En 2011-I, se realizó un seminario de profesores para buscar establecer algunas relaciones entre los espacios de formación del eje en relación con su conectividad, complejidad y conexión con los propósitos del eje.

Particularmente, en el desarrollo del trabajo desarrollado en el período 2011-I, los espacios de formación del eje fueron agrupados en tres conjuntos, según sus conexiones en términos del objeto matemático y su fenomenología. El *conjunto I* está conformado por los EF Problemas aritméticos I, Problemas aritméticos II, Problemas aritméticos III y Problemas de álgebra geométrica. El *Conjunto II* está conformado por los EF Matemática del movimiento I, Matemática del movimiento II, Matemática del movimiento III y Taller de ciencias. Y el *conjunto III* está conformado por los EF Problemas del continuo, Problemas de aleatoriedad, Extensiones numéricas y Validez y modelos. A continuación se describirá cada uno de estos conjuntos.

Conjunto I. Los EF que conforman este conjunto han sido agrupados a partir del reconocimiento de varios aspectos comunes: los objetivos curriculares apuntan, en general, al estudio de las estructuras aditivas, las estructuras multiplicativas, y de lo que los vincula para que se reconozcan como estructuras. Tratan objetos asociados directamente con las matemáticas escolares y lo que caracteriza el pensamiento asociado a tales estructuras. Son el escenario inicial en el que los estudiantes para profesor se aproximan a algunos procesos asociados a la actividad matemática como conjeturar, contar, particularizar, generalizar, inducir, deducir, argumentar, validar y demostrar. Finalmente, son los primeros espacios en los que los estudiantes, por la vía de la resolución de problemas, aprecian la construcción de conocimiento matemático como actividad comunitaria, compleja, en la que es fundamental la comunicación entre los actores participantes.

Relación de conectividad. En todos los EF de este conjunto se generan experiencias con procesos de generalización y búsqueda de patrones, las cuales se propician "como posibilidad de acercamiento a la noción de variable, además de la necesidad de que el número generalizado varíe en diferentes universos numéricos" (Grupo Pretexto, 2002: 85). Otro aspecto que vincula el trabajo realizado en este Conjunto es el sentido del infinito, visto desde diversas situaciones en las que el estudiante se familiariza desde primer semestre con aspectos como recursión, inducción, conteo y conjeturación. Además, en dichos EF es importante el uso del contexto geométrico para dar sentido al tratamiento aritmético y algebraico en las estructuras conformadas por algún tipo de medición. Así, el trabajo desde la geometría y axiomática de Euclides permite hacer reflexiones sobre la construcción de algoritmos, procedimientos, argumentaciones, representaciones y demostraciones que en contextos puramente aritméticos podrían parecer reflexiones sin sentido.

Relación de complejidad. Conceptos como número, forma, variable y expresión sirven de soporte para hilar y fortalecer la malla que empieza a generar las llamadas estructuras aditivas y multiplicativas, y conceptos como magnitud, medida, que anclan las bases para fortalecer otros tipos de pensamientos. En este sentido, no solo tienen en cuenta el estudio de la adición y la multiplicación en el sentido del álgebra estructuralista, sino que, además, hacen evidente la comprensión de diferentes conceptos en el desarrollo de las situaciones, lo que hace que la adición y la multiplicación se conformen bajo estructuras conceptuales.

Conjunto II. En medio de los problemas del movimiento y las matemáticas como una herramienta no solo para modelar las situaciones, sino como instrumento para validar diferentes propiedades de los objetos empleados en el modelo, algunos conceptos como medida, razón y proporción permiten organizar tipos de problemas a tratar en los EF de este conjunto.

Relación de conectividad. Se promueve en los estudiantes, el uso de la modelación matemática, el lenguaje matemático y la búsqueda de elementos que les permitan comunicar y validar sus reflexiones en torno a la solución de problemas en los que intervienen conceptos propios del cálculo como la función, la derivada y la integral.

Relación de complejidad. Los objetos matemáticos en este conjunto advierten la presencia de lo dinámico. Dicho proceso conlleva la elaboración de estructuras mentales capaces de advertir la presencia de relaciones, transformaciones, procesos algebraicos, geométricos que aporten a los procesos de modelación y matematización. No solo es indispensable que el estudiante haya desarrollado pensamiento variacional y relacional, sino que, además, lo obliga a ver con otros ojos las relaciones de fenómenos reales presentes en su entorno, y los obliga a interpretar esos fenómenos y reconocer en ellos la existencia de elementos matemáticos que subyacen.

Conjunto III. Estos EF propenden por el desarrollo del pensamiento avanzado, entendido este como el pensamiento encargado de generalizar, demostrar, formalizar, aplicar y modelar matemáticamente situaciones que conviven con elementos de un cierto grado de abstracción, donde podrían tratarse otro tipo de representaciones las cuales, cognitivamente hablando, complejizan tanto el objeto matemático como su comprensión. Así, se pretende hacer uso de elementos formales de argumentación en matemáticas y promover en los estudiantes el uso de lenguaje matemático para comunicar sus producciones, y para caracterizar y comprender las situaciones propuestas.

Relación de conectividad. Los EF que conforman este conjunto se caracterizan por poner mayor énfasis en los procesos de abstracción, demostración, comprensión de textos formales y el uso operativo de definiciones formales por medio de la resolución de problemas. Se promueve en los estudiantes el uso de lenguaje matemático para comunicar sus producciones o desarrollos sobre avances en la resolución de problemas en torno a los temas sobre los que girarán los espacios de formación, para que a través de la resolución de problemas se puedan establecer generalizaciones, cuestionamientos y técnicas usadas en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

Relación de complejidad. Los objetos matemáticos presentes en este conjunto toman un tratamiento diferente, en el sentido de que son abordados con el objeto de resignificarlos, de ampliar sus estructuras y relaciones con otras áreas de la matemática; es por ello que el grado de complejidad se asume ya que cada objeto es de nuevo reconstruido, ampliado y aplicado en otros estadios. Por ejemplo, el número racional es construido desde las bases de la teoría de conjuntos, analizada su estructura algebraica, su topología, sus aplicaciones y representaciones para poder gestar el sistema de los números reales que, a su vez, son resignificados al cambiar topologías que ayudan a darle nuevo sentido a la continuidad, derivabilidad, entre otras. En este sentido, algunos procesos cognitivos potenciados en los demás conjuntos se hacen más visibles, en este conjunto de espacios; por ejemplo, en los conjuntos I y II, procesos como analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, demostrar toman sentido para atacar y resolver las diferentes situaciones propuestas, pero aparte de estos, las representaciones mentales de los conceptos matemáticos que los estudiantes logren complejizar potencian y dotan de sentido a los diferentes elementos del análisis, las estructuras algebraicas y la topología.

CONCLUSIONES

Teniendo en cuenta que a medida que se complejiza el objeto, también se complejizan sus relaciones, se producen diferentes conexiones entre diferentes conceptos que, a su vez, van fortaleciendo y generando toda una red conceptual que se convierte en modelo y luego en artefacto para pensar matemáticamente y resolver problemas cada vez más complejos. Esta complejización de los conceptos puede vislumbrarse en los propósitos del EPPMA, eje problematizador del conocimiento matemático. No solo el objeto matemático se complejiza, sino también los procesos asociados a su tratamiento en las distintas representaciones: el lenguaje matemático, en las formas de argumentación y validación, en los procesos de modelación, entre otros. Se desarrollan, así, competencias profesionales en el estudiante para profesor.

Para el caso específico de la proporción y la medida, en el Conjunto I son abordados los elementos fundantes de estas, como, la necesidad de construcción de unidad, la interpretación de cantidades de magnitud respecto de la unidad, la relación uno a muchos en el conteo, la divisibilidad, los algoritmos de comparación, entre otros ya descritos; además, se abordan las relaciones entre tales elementos que dan origen a procesos algebraicos y de generalización como las ecuaciones, expresiones algebraicas, operaciones y algoritmos nuevos. En el Conjunto II, emergen las relaciones variacionales dándole dinamicidad a los objetos y sus relaciones, caso que no ocurre en el Conjunto I. Además, aparecen otros tipos de magnitudes como velocidad, fuerza, presión, entre otros, ampliando así el concepto de magnitud y medida, lo que genera procesos de modelación y simulación. En el tercer Conjunto, los objetos son vistos de forma global, general y formal, ya que las situaciones de aprendizaje propuestas requieren que tales objetos sean trabajados como un constructo, que permite reinterpretar los demás elementos desarrollados en relación con este.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Grupo Pretexto. (2002). *Transición Aritmética-Álgebra*. Bogotá. Grupo editorial GAIA.

LEBEM. (1999). *Documento de acreditación previa*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Documento no publicado.

LEBEM. (2010). *Documento de reacreditación con fines de renovación de la acreditación de alta calidad*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Documento no publicado.

Tall, D., (1978). *The Nature of Advanced Mathematical Thinking.*

Intenciones de uso de la historia de las matemáticas en un curso de formación inicial de profesores de matemáticas. Algunos aportes teóricos y metodológicos

Jairo Alonso Triana Yaya[*]
John Fredi Manrique García[**]
Lyda Constanza Mora Mendieta[***]

RESUMEN

Este escrito constituye un avance de la tesis de maestría "El papel de la historia del álgebra en un curso de formación de profesores". Pretende aportar evidencia experimental sobre las intenciones con las cuales se usa la historia de las matemáticas (hm) en la formación inicial de profesores, a través del análisis de registros de clase de un curso de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Se presenta una codificación emergente, la cual se contrasta con una propuesta teórica sobre las intenciones de uso de la HM y se plantean algunas relaciones de estas y los códigos identificados inicialmente.

Palabras clave: formación inicial de profesores, historia de las matemáticas, álgebra.

[*] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: jaty5051@gmail.com
[**] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: johnfredimanrique@gmail.com
[***] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: lmendieta@pedagogica.edu.co

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Autores como Jankvist (2009) y Guacaneme (2010) coinciden en señalar la diversidad que existe con relación al uso que se hace y que se podría hacer de la Historia de las Matemáticas (HM) en los procesos de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas (FIPM). Esta diversidad ha permeado el ámbito de la investigación en Educación Matemática.

Si bien la investigación reconoce la utilidad, implicaciones y posibles relaciones de la HM con la FIPM, no es claro hasta el momento el tipo de historia a considerar en la FIPM. Autores como Jankvist (2009) y Guacaneme (2011) hacen un llamado a realizar estudios de tipo experimental, que corroboren los resultados teóricos. Atendiendo a este llamado, en el marco de la Maestría en Docencia de la Matemática, se está indagando por el papel asignado a la HM en un curso de formación inicial de profesores denominado "Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra" de la Universidad Pedagógica Nacional. Precisamente, sobre el papel que se le asigna a la HM en la FIPM está el interés de la tesis de maestría en desarrollo, pues como se ha mencionado, son diversos los usos que de la HM se pueden hacer, pero los estudios no constituyen suficiente evidencia empírica para documentarlos.

Por las razones expuestas, en la tesis de la que se deriva esta ponencia, se aborda la pregunta: ¿Cuál es el papel asignado a la historia de las matemáticas en un curso de formación de profesores, cuando construyen ideas en torno al álgebra como objeto didáctico? En busca de una solución, se han delimitado, hasta el momento, tres espacios de indagación particulares en relación con a) los objetos del álgebra que son estudiados, b) el tipo de historia que interviene en el estudio de esos objetos y c) *las posibles intenciones con las que se introduce o se hace uso de la HM.* Sobre este último se centra la atención en este escrito.

Inicialmente se describe el fundamento teórico que sustenta el tercer espacio de indagación, luego se bosqueja el diseño metodológico desarrollado y, por último, se ilustran algunos datos codificados, se discuten en relación con la teoría y se propone un camino para puntualizar la tipificación propuesta por Guacaneme (2011).

INTENCIONALIDADES DE LA HM EN LA FIPM

La investigación sobre relaciones HM-FIPM se puede agrupar de varias maneras: en torno a la forma como la HM hace parte de la formación de los profesores (Fauvel & Van Maanen, 2000), de acuerdo con las implicaciones que su uso puede llegar a tener en las concepciones de los profesores de matemáticas (Tzanakis & Arcavi 2000; Furinghetti & Pehkonen, 2002), o según los argumentos que sustentan el uso de la HM en la FIPM (Guacaneme, 2010; Jankvist, 2009). Estas agrupaciones pretenden responder a qué tipo de historia de las matemáticas deben aprender los futuros profesores, a cómo usar la HM, cuáles son las razones por las que se usa y cuáles son las intencionalidades de su uso.

Dado el interés de la investigación, y partiendo del hecho de que el papel de la HM en una clase particular atiende a asuntos de intencionalidad por parte del docente, se torna relevante caracterizar dicho papel en un curso de Didáctica de la Aritmética y el Álgebra, evidenciando una aproximación al para qué se usa la HM en la FIPM. Al indagar sobre la utilidad que puede tener la HM en la FIPM, se encuentra que esta constituye objeto de interés en la investigación en la medida que autores como Tzanakis & Arcavi (2000), Jankvist (2009), Fauvel & van Maanen (1997) y Furinghetti & Pehkonen (2002), ven en la HM una fuente de herramientas para el quehacer del docente de matemáticas.

Respecto al para qué usar la HM en la FIPM, Guacaneme (2011) agrupa las intenciones de uso de la HM en relación con *instrumentos* que esta puede brindar al profesor de matemáticas, generando una tipificación que pone en evidencia posibles aportes que la HM hace a 1. Las visiones de la actividad matemática, 2. Las visiones de los objetos matemáticos, 3. Las competencias profesionales, 4. La transformación en la manera de enseñar y 5. Fuentes de materiales o recursos para la enseñanza. Esta tipificación se ha constituido, hasta el momento, en herramienta de análisis para identificar intencionalidades en el uso de la HM. A continuación se describe la construcción de la herramienta y se ilustra un episodio que, a nuestro juicio, amplía la categoría "*Competencias profesionales*"

METODOLOGÍA

Si bien el curso que es objeto de indagación podría catalogarse como un curso de Didáctica específica, en este interviene frecuentemente la HM, sin ser la Historia un objetivo de aprendizaje *per se*; en vez de esto, se pretendía "*la construcción de elementos teóricos que permita a los estudiantes, elaborar un discurso coherente y fundamentado sobre la enseñanza y el aprendizaje de algunos objetos aritméticos y algebraicos*" (UPN, 2011, p.1). El curso se desarrolló en 26 sesiones de clase de aproximadamente dos horas cada una, para las cuales se realizaron registros de vídeo y audio.

Cada una de los registros de vídeo fue revisado inicialmente en busca de momentos en que aparecía la HM. Posteriormente, se generaron descripciones de dichas intervenciones que fueron codificadas con la ayuda del software ATLAS ti. Los primeros códigos pretendían diferenciar los momentos donde aparecía la HM y aquellos relacionados específicamente con la historia del álgebra, así como diferenciar cuándo la HM surgía por intervenciones de la profesora, los estudiantes o el observador participante. Luego se generaron códigos para analizar los registros en relación con los tres espacios de indagación mencionados. A continuación se describe el análisis de los registros que sobre la intencionalidad han sido detectados.

La construcción del marco de referencia ha posibilitado la construcción e implementación de instrumentos analíticos partiendo de la formulación de hipótesis sobre cómo y con qué organizar y analizar la información, así como la construcción e implementación de categorías emergentes de análisis, su puesta a prueba y evaluación. Un hecho de gran importancia en el análisis ha sido la comparación y validación constante con el grupo de investigación y con la teoría, pues ha permitido consolidar una mirada común sobre los registros.

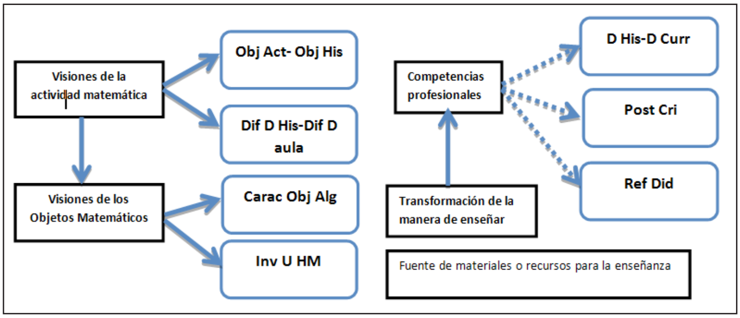
Se realizó una codificación emergente sobre 83 episodios en los que interviene la Historia del Álgebra (HA) y la HM generando los códigos: [CaracObjAlg] Caracterización de objetos algebraicos (Establecer diferencias y semejanzas que permitan caracterizar objetos de estudio de la Aritmética y el Álgebra), [D His-D Curr] Desarrollos históricos-desarrollo curricular (Vincular los desarrollos históricos con las propuestas curriculares), [Dif D his-Dif D Aula] Dificultades en el desarrollo histórico-dificultades en el aula (Comprender los procedimientos, estrategias, formas de pensamiento de los estudiantes de acuerdo con algún momento del desarrollo histórico de la aritmética o del álgebra), [Inv U HM] Invitaciones a usar la HM para comprender las matemáticas, [Post Cri] Tomar una postura crítica haciendo uso de la historia [Inv U HM] Reflexiones didácticas y [Object-ObjHis] Relaciones sobre un contenido matemático en la historia y uno actual.

ANÁLISIS DE DATOS

Los códigos anteriores se contrastaron con la clasificación de Guacaneme (2011) identificando las relaciones mostradas en el esquema 1. Las flechas continuas indican una relación directa entre el descriptor propuesto por los autores y la descripción de Guacaneme, mientras que las flechas punteadas indican una

Esquema 1

posible contribución de la codificación propia con la descripción base. Las flechas que van desde “Visiones de actividad matemática” a “Visiones de los objetos matemáticos” indican que no se ha encontrado (y quizá no se hallará) un episodio en el que se referencie la actividad matemática sin hacer referencia a un objeto matemático; la diferencia radica en la intencionalidad misma del uso de la HM. Asimismo, se considera que el desarrollo de competencias profesionales debería impactar su práctica profesional y, por tanto, transformarla.



A continuación se ilustra un ejemplo de interacción entre profesora y estudiantes, correspondiente a los códigos D His-D curr y Ref Did. La siguiente trascripción proviene de la segunda sesión de clase. La profesora indaga sobre el punto de vista que los estudiantes tienen después de haber leído una sección del libro de Socas (1989) sobre Historia del Álgebra:

E1: Trataba [el documento de Socas] sobre la historia del álgebra.

Profesora: ¡Conociste sobre la historia del álgebra!

E2: En algunos (...) había ejemplos.

Profesora: Había ejemplos que le ayudaban a uno a entender (...)

E3: ¿Cómo podríamos utilizar en forma didáctica la historia del álgebra?

Profesora: Al principio [*refiriéndose al documento de Socas*] hablaba sobre la importancia de saber algo histórico en la formación de profesores (...)

El diálogo continúa y un estudiante afirma que la historia de las matemáticas contribuye a tener una mirada más amplia de las matemáticas refiriéndose a aspectos sociales y culturales. Las afirmaciones hechas por la profesora y los estudiantes aluden a un reconocimiento de asuntos didácticos en relación con la HM desde el uso de la historia como instrumento para una cierta forma de enseñanza y desde una mirada amplia sobre los objetos matemáticos que abarque aspectos socioculturales. Lo anterior no está contemplado en Guacaneme (2011) para quien las competencias profesionales en principio se limitan al desarrollo de habilidades de escritura, lectura y escucha. Si bien Guacaneme también reconoce que incluir la HM en la FIPM promueve la discusión de asuntos didácticos entre profesores en ejercicio no reporta reflexiones o discusiones de tipo didáctico cuando profesores en formación estudian la HM en cursos de didáctica.

En la sesión 17, luego de haber construido elementos teóricos alrededor de lo que en el curso se denominó *concepciones históricas del álgebra (generalización de la aritmética, estudio de las estructuras, herramienta para la solución de ecuaciones, herramienta para manipular expresiones, álgebra como lenguaje y estudio de relaciones entre cantidades* [P3:32-39]) recurriendo a fuentes de tipo didáctico que abordan la historia del álgebra y *concepciones curriculares del álgebra* la profesora afirma: "*… quiero que antes de dar el cierre como tal veamos si esas que aparecen aquí [refiriéndose concepciones curriculares del álgebra] estaban, como les decía al principio, relacionadas con las concepciones históricas o no*" [P3:30]. En este episodio es explícita la intencionalidad de la profesora en establecer vínculos entre propuestas curriculares y desarrollo histórico; de modo más general, podría decirse que la historia se introduce como objeto para comprender las propuestas curriculares actuales. Este es un aspecto que no está contemplado en Guacaneme (2011) y que los autores de este escrito, consideran, hace parte de las competencias profesionales que debería desarrollar un profesor de matemáticas.

A MODO DE CONCLUSIÓN

La propuesta metodológica contribuye a contrastar los hallazgos emergentes de la práctica con los resultados teóricos reportados en la literatura. La identificación de algunos episodios de clase que dan cuenta de intencionalidades del uso de la HM en la FIPM pueden complementar la clasificación teórica propuesta por Guacaneme (2011).

Es necesario profundizar las relaciones que se han establecido con la tipificación propuesta por Guacaneme (2011), con el fin de establecer si las relaciones, en efecto complementan o si los hallazgos pueden llegar a constituirse en categorías diferentes a las propuestas por el autor.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Fauvel, J., & Van Maanen, J. (2000). Historical support for particular subjects. En *History in mathematics education: the ICMI Study* (pp. 241-243). Kluwer: Dordrecht.

Furinghetti, F. & Pehkonen, E. (2002). Rethinking characterisations of beliefs. In G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), Beliefs: A hidden variable in mathematics education? (pp. 39-57). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Guacaneme, E. A. (2010). ¿Qué tipo de Historia de las Matemáticas debe ser apropiada por un profesor? Revista Virtual Educyt, 2(2).

Guacaneme, E. A. (2011). La Historia de las Matemáticas en la educación de un profesor: razones e intenciones. Ponencia presentada en la Décimo tercera Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática (XIII CIAEM-IACME), Recife, Brasil.

Jankvist, U. T. (2009). On empirical research in the field of using history in mathematics education. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12(1), 67-101.

Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M., & Hernández., J. (1989). Iniciación al Álgebra. Madrid, España: Ed. Síntesis.

Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic Survey. En J. Fauvel, & J. Van Maann, History in mathematics education: the ICMI study (pp. 210-240). Dordrecht.

Universidad Pedagógica Nacional UPN. Facultad de Ciencias y Tecnología. Departamento de Matemáticas. (2011). Programa del Seminario Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra.

Función de la visualización en el área de superficies planas. Análisis de un texto escolar

Gustavo A. Marmolejo[*]
María Teresa González[**]

RESUMEN

La visualización es una actividad cognitiva de importancia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; discriminar la función que desempeña es un asunto de interés en el campo de la educación matemática. En esta comunicación se pretende, de un lado, describir y caracterizar las clases de funciones visuales presentes en los capítulos donde un manual presenta el área; de otro, determinar la manera como estas funciones se articulan y el efecto que producen tanto en el rol que juegan los lectores, como el estatus que se asigna a las figuras tratadas.

Palabras clave: visualización, libros de texto, áreas

[*] Universidad de Nariño. Dirección electrónica:usalgamav@gmail.com
[**] Universidad de Salamanca. Dirección electrónica: maite@usal.es

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Se ha considerado que la visualización permite dar miradas sinópticas y que suscita la exploración heurística de situaciones complejas. Igual, se asume como un legítimo elemento de prueba matemática y que genera sentimiento de auto-prueba e inmediatez. La visualización, pues, permite ilustrar proposiciones, relaciones e ideas; suscita elementos matemáticos y/o preguntas que se han de considerar en el desarrollo de una tarea; ayuda a discernir entre las distintas maneras de proceder aquellas que habrán de tenerse en cuenta en el desarrollo de un procedimiento e inspira bosquejos globales de maneras de proceder que van más allá de lo meramente procedimental. El interés de esta investigación recae en el papel que juega la visualización en la construcción de conocimiento matemático, en particular, consideraremos la forma como los manuales escolares de matemáticas suscitan la enseñanza del área de figuras planas. Pretendemos, pues, aportar elementos que nos acerquen a las respuestas de las siguientes cuestiones ¿Cuáles funciones desempeña la visualización asociada a las figuras geométricas en la manera en que los manuales de matemáticas suscitan la construcción del área de superficies planas? ¿Qué papel asignan las funciones visuales que se privilegian en los manuales a los lectores de estos materiales didácticos? ¿Cuál es el estatus que juegan las figuras en los manuales al construir el área de superficies planas?

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

El marco teórico de referencia para el desarrollo de esta investigación es el usado por Marmolejo y González (2011) para describir los tipos de visualización presentes en los manuales escolares de España y Colombia al suscitar la construcción del área de superficies planas. En este sentido son cinco los elementos visuales a considerar en la investigación, a saber: 1) las operaciones figurales, es decir, las acciones que se aplican sobre una figura y que suscitan en ella modificaciones perceptivas, 2) los cambios figurales, o sea, el efecto que produce en una configuración geométrica la aplicación de acciones que transforman su organización perceptual, 3) el cambio dimensional, relacionado con el paso de considerar una figura como una gestalt a discriminar en ella sus partes constituyentes de dimensión 1 y 0, 4) el cambio de focalización bidimensional que refiere a pasar de centrar la atención en las características globales 2D de la figura de partida a hacerlo en sus partes 2D constituyentes y/o, en caso de haber varias figuras de partida, pasar de centrar la atención de una a otra y/o considerar simultáneamente la forma y contorno de la figura de partida y la de la figura de llegada y 5) el flujo que considera el sentido de la secuencia visual aplicada.

METODOLOGÍA

La presente investigación es de naturaleza cualitativa, descriptiva e interpretativa. Se analizó un libro de texto de matemáticas dirigido a estudiantes de grado quinto, en particular se consideraron los capítulos donde explícita e implícitamente se trata el área de superficies planas. Las unidades de análisis asumidas están compuestas por las definiciones, los ejemplos y las actividades propuestas en el libro de texto para que el lector las desarrolle. La captación y selección de los datos se realizó de forma inductiva, es decir, las categorías de análisis fueron extraídas del propio texto. Fueron tres las categorías consideradas: ***heurística***, cuando la visualización, con base en la información estrictamente perceptual de la figura, genera ideas o suscita maneras de proceder que apoyan o guían la comprensión del tema que se expone o de la tarea propuesta y su desarrollo; ***Inductiva***, al ser necesario considerar información ajena a las características perceptuales de la figura de partida e ***Informativa***, es decir, cuando la figura asume estatus de objeto (Duval, 2003).

Para analizar los datos y dar respuesta a las interrogantes planteadas hemos reorganizado los elementos que conforman la metodología de análisis en tres nuevas categorías. La primera considera el número de funciones de naturaleza distinta que desempeña la visualización en la comprensión o desarrollo de las tareas expuestas en el manual analizado. Hablaremos, pues, de ***función simple***, cuando un tipo de función esté presente y de ***función compuesta***, al aparecer simultáneamente dos o tres funciones. La segunda categoría se relaciona con el rol que se asigna al lector del manual escolar por acción del tipo de función al cual se ve enfrentado. La función de naturaleza inductiva o la composición de funciones inductiva e informativa se caracterizan porque la visualización tiende a ser guiada por el propio texto. Por el contrario, las tareas donde la función heurística está presente promueven que de alguna manera el lector juegue un papel activo en la manera de ver considerada. En el primer caso decimos que ***el lector juega un papel inactivo***, en el segundo, que ***el rol desempeñado por el lector es de naturaleza inactiva***. La tercera categoría, por su parte, alude a la existencia o ausencia de la función informativa, su presencia es un importante aspecto a considerar en el papel que desempeña la visualización en los textos escolares, pues, quien intenta resolver o comprender la problemática planteada debe recurrir directamente a la figura, a sus características perceptivas, para discriminar datos a considerar en el desarrollo o comprensión de la tarea propuesta. En este sentido, quien ve la figura debe introducir en ella medidas, discriminar la forma de la figura o determinar propiedades geométricas a partir de sus características perceptivas o considerar la forma de la figura para aplicar fórmulas determinadas. Así, la confrontación entre las ***tareas donde la visualización juega una función informativa y aquellas donde la función es de naturaleza diferente es un aspecto a considerar en esta investigación.***

ANÁLISIS DE DATOS

Son cuatro las clases de función visual imperantes en la manera en que el manual analizado construye el área de superficies planas. En un caso aparece de forma simple, en los restantes se presenta de manera compuesta. De esta manera, las funciones de mayor presencia son las de naturaleza compuesta; destaca así la composición de las funciones inductiva, informativa y heurística (IIH), y la composición inductiva e informativa (II), presentes en un 29/61 y un 20/61 de las tareas analizadas en el libro CS5. La función simple, caracterizada por aquellas tareas que hacen que la visualización aparezca de forma inductiva, se encuentra presente en un 7/61. Por último, está la función compuesta inductiva e heurística (IdH) presente en el 5/61 de las tareas.

En relación con el papel que el texto asigna al lector a partir de la función o funciones visuales que suscita en el desarrollo o comprensión de las tareas expuestas, el libro tiende a privilegiar en mayor medida un rol activo. Esto se ve reflejado en la frecuencia de las tareas que propician composición de funciones donde la función heurística junto a la informativa y/o inductiva está presente, es decir, en las funciones de naturaleza IIH o IdH que representan el 34/61 del número total de tareas, más de la mitad de las tareas presentadas. Por otra parte, el porcentaje de tareas que introduce funciones de naturaleza Id o II, es decir, que suscitan un rol inactivo en el lector es menor: 27 de 61 tienen tal característica. Por otra parte, respecto al número de tareas que permiten que las figuras tengan un estatus de objeto y que se ven reflejadas en tareas donde el lector ha de asignar una función informativa, estas aparecen de dos maneras diferentes: 1) junto a la función inductiva y 2) compuesta con la función inductiva y la heurística. Esta función está presente en la mayor parte de las tareas (49/61). En breve, este libro destaca por tres aspectos en que las tareas propuestas privilegian: 1) las funciones visuales compuestas, sobre las de naturaleza simple; 2) que el lector asuma un rol activo; en relación con la manera como deberá ser introducida la visualización a explicitar, están mayormente presentes (34/61) que aquellas que, por el contrario, asignan al lector un rol inactivo, y 3) la figura en estudio tiende a asumir un estatus de objeto, donde discriminar su forma o medir sobre este tipo de representaciones se constituyen en acciones determinantes en el desarrollo de las tareas propuestas, en consecuencia, de la visualización asociada.

CONCLUSIÓN

El área de superficies planas es un objeto matemático donde la visualización tiende a ser propicia, consistente y pertinente. Los textos escolares, por su parte, al ser uno de los materiales didácticos de mayor uso en la escuela, se constituyen en elementos a considerar en torno a las posibilidades que desempeña la visualización en el área de superficies planas. En este sentido, el modelo metodológico aquí aplicado a las tareas de áreas expuestas en un manual se considera potente para detectar, no solo los tipos de funciones que privilegian los manuales, sino para determinar el rol visual que el texto asigna a sus lectores y el estatus de las figuras consideradas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century.* Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 37-51.

Duval, R. (2003). Voir en mathématiques. En E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual.* Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. Mexico, 41-76.

Marmolejo, G. & González, M.T. (2011). *La visualización en la construcción del área de superficies planas en la educación básica. Un instrumento de Análisis de libros de texto.* Conferencia presentada en Asocolme 12 (6-12 octubre). Armenia (Colombia).

Cabri e infinito potencial, un ejemplo de argumentación situada en una clase de geometría de grado octavo

Diego Martínez González[*]
Jorge Buitrago Londoño[**]
Leonor Camargo Uribe[***]

RESUMEN

En nuestra ponencia mostramos que es factible crear un ambiente propicio en las clases de geometría, para que estudiantes de grado octavo se aproximen a una argumentación matemática acerca del infinito, aprovechando herramientas que provee el programa de geometría dinámica Cabri. Se ilustra este hecho con la argumentación situada que un estudiante hace de la afirmación "en una circunferencia se pueden trazar infinitos radios". Reconocemos el potencial que tiene dicha argumentación en el desarrollo de posteriores procesos de argumentación matemática y justificación deductiva.

Palabras-clave: Cabri, procesos de justificación, razonamiento.

[*] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: digomatema@gmail.com
[**] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: jebuitragol@yahoo.com
[***] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: leonor.camargo@gmail.com

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

En esta ponencia presentamos un hallazgo no previsto del proyecto de investigación que adelantamos en la Maestría en Docencia de la Matemática, de la Universidad Pedagógica Nacional, programa que busca consolidar comunidades y redes de educadores matemáticos comprometidos con la innovación y la investigación en el campo profesional de la educación matemática.

El proyecto del que se surge esta ponencia atiende a dos problemas: uno, la manera en que tradicionalmente se han desarrollado las clases de matemáticas en el Instituto de Promoción Social, de Villeta, Cundinamarca, manera que incide en el escaso compromiso con el que los estudiantes se responsabilizan de las respuestas que dan a cuestiones matemáticas que se les plantean; usualmente, no argumentan sino que recurren a una figura de autoridad (generalmente el docente) para justificar; dos, la poca relevancia que se le da al estudio de la geometría en la institución; esta situación se explicitó en el Plan de Mejoramiento Institucional en el que los docentes del área de Matemáticas reconocimos que el estudio del pensamiento geométrico está relegado a un segundo plano y, por lo tanto, no se aprovecha para introducir a los estudiantes en una actividad matemática genuina que dé lugar a prácticas argumentativas matemáticas.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Teniendo en cuenta los problemas identificados, nos vinculamos a la línea de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional, cuyas investigaciones están enmarcadas en la "actividad demostrativa". Por tal razón, los trabajos realizados por los principales exponentes de esta línea de investigación (Perry, Camargo y Samper, 2005) representan la primera fuente de referencia conceptual para nuestro trabajo. Además, tenemos en cuenta los constructos teóricos de unidad cognitiva (Garuti, Boero y Lemut, 1998) y de dominio de abstracción (MEN, 2004).

Desde el punto de vista de Perry, Camargo, Samper y Rojas (2005), aprender a demostrar es un proceso que implica conjeturar y justificar. Estas acciones no se consideran separadas, sino que se vinculan mediante la argumentación, inicialmente de la plausibilidad de la generalización que da lugar a la conjetura y luego de la validez de esta. Esta perspectiva está en consonancia con la visión acerca de los procesos de aprender a demostrar de Garuti, et al. (1998), quienes señalan que cuando los estudiantes logran vincular de manera articulada los procesos de argumentar propios de la conjeturación y la justificación, se hace evidente una unidad cognitiva útil para el aprendizaje de teoremas. Para determinar analíticamente si se logra unidad cognitiva, investigadores como Pedemonte (2006) sugieren emplear el modelo de argumentación de Toulmin. Según este modelo, la estructura de toda argumentación se compone de tres elementos básicos: una afirmación, algunos datos que justifican la afirmación y una regla de inferencia (llamada garantía) que permite vincular los datos a la afirmación; además, es posible encontrar algunos elementos auxiliares: cualificadores, refutaciones y soportes.

Algunos ambientes de aprendizaje son más propicios para favorecer la unidad cognitiva que otros. En nuestra investigación nos apoyamos en el software de geometría dinámica Cabri. Según Moreno (citado en MEN, 2004), este escenario representa un *dominio de abstracción* ya que genera ideas iniciales, vinculadas a Cabri, que funcionan como soporte argumental para la producción de ideas más generales y abstractas. Los recursos que el medio pone a disposición de los estudiantes estimulan la construcción de significados, y el medio funciona como un soporte para el establecimiento de conexiones entre fragmentos de conocimiento y da pie a la generación de argumentos para defender una conjetura o para justificarla. Desde esta perspectiva, se trata entonces de sacar provecho al hecho de que las semillas de lo abstracto se generan en las interacciones con lo concreto.

METODOLOGÍA

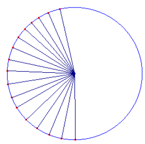
La investigación de la cual se deriva la presente ponencia se enmarca en una perspectiva sociocultural del aprendizaje, a partir de la cual se fomentan ambientes de aprendizaje, en los que estudiantes y profesor conforman una comunidad, con la intención de desarrollar de manera colectiva actividades matemáticas, promoviendo la participación autónoma de los estudiantes; en nuestro caso, esta actividad se refiere a la producción de una porción de sistema teórico de geometría euclidiana plana, construida a partir de conjeturas que los estudiantes formulan y justifican.

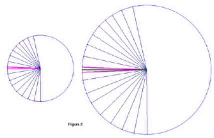
Los datos de este estudio se tomaron durante el segundo semestre del año 2011 con la participación de 35 estudiantes de Educación Básica Secundaria del grado octavo en el Instituto Nacional de Promoción Social (Villeta, Cundinamarca). Durante el desarrollo del experimento de enseñanza que permitió recoger la información, los estudiantes utilizaron por primera vez el software Cabri como herramienta de mediación. Uno de los autores de esta ponencia era el profesor titular, lo que favoreció construir estrategias de trabajo que promovieran la actividad demostrativa. Se utilizaron videograbaciones para recoger información del trabajo de los estudiantes, y posteriormente realizamos una transcripción de la totalidad de los vídeos, que se convirtieron en los datos para comenzar el proceso de análisis.

Al realizar los primeros ejercicios analíticos en los que buscamos caracterizar la actividad demostrativa en la que participan los estudiantes e identificar la presencia de unidad cognitiva en sus argumentos, hallamos, de manera inesperada, una situación que nos parece interesante para comunicar, relacionada con el concepto de infinito. Esta situación surgió durante la resolución de un problema en el que se esperaba que los estudiantes descubrieran la propiedad *todos los radios de una circunferencia son congruentes*. En el momento en el que los estudiantes estaban resolviendo el problema surgió una conversación entre ellos, que dio pie a discutir acerca del número de radios de una circunferencia. El ambiente de aprendizaje participativo y el apoyo de Cabri, sirvieron de escenario para que los estudiantes argumentaran que el número de radios de una circunferencia era infinito.

ANÁLISIS DE DATOS

Más que un ejemplo del análisis de los datos principales de la investigación, reportamos la discusión que hicimos a la controversia que se generó entre los estudiantes de un grupo de trabajo alrededor de la afirmación que uno de ellos hizo, con relación al número de radios que tiene una circunferencia. Gracias a Cabri, el estudiante realizó una argumentación que llevo a dirimir el conflicto. Desde nuestro punto de vista, el estudiante se aproximó a una argumentación matemática acerca del infinito, situada en el ambiente Cabri. A continuación reproducimos un fragmento de la conversación entre los estudiantes, en la que intervino el profesor, y luego presentamos nuestro punto de vista.

	Interventor	*Intervención*
1	Luis	[Construye una circunferencia y traza varios radios de ella] Una circunferencia tiene infinitos radios. 

	Interventor	*Intervención*
2	Laura	[Señalando la figura]. No. Infinitos tampoco, no señor, porque se van a acabar.
3	Luis	Pero usted pudo haber hecho otro radio entre estos dos [señala dos de los radios construidos en la circunferencia] y otro, entre estos dos [señalando otros dos radios].
4	Laura	No… no… porque… cuando se acaben, ya no serán infinitos.
		[Los estudiantes permanecen en silencio por unos minutos]
5	Profesor	Laura, tú mostrabas algo en la figura y le preguntabas a él [se refiere a Luis] ¿Qué le decías?
6	Laura	Pues que se puede acabar el espacio para construir los radios [señala la figura]
7	Profesor	Pero entonces, ¿cuántos radios serían?
8	Laura	Pues serían muchísimos, pero no infinitos.
9	Profesor	Tú [refiriéndose a Luis], ¿qué decías?
10	Luis	Son infinitos, porque cada vez puedo hacer más y más. Si hago el círculo más grande, le caben más y más [amplía la circunferencia utilizando el arrastre], miren, acá ya se ve que se pueden hacer más radios, si yo hago un radio acá [traza un radio cercano a uno de los radios construido], aún puedo ampliar la circunferencia y hacer otro radio entre estos dos. 

El argumento de Luis se puede representar utilizando el esquema de Toulmin. Los datos que utiliza son la circunferencia y algunos radios de esta; la afirmación o conclusión es que en una circunferencia se pueden trazar infinitos radios; la garantía que permite relacionar los datos con la conclusión no es una propiedad matemática sino una acción situada en Cabri, relacionada con la posibilidad que ofrece el programa para ampliar una figura mediante la opción de arrastre.

- Circunferencia.
- Algunos radios.

DATOS

En una circunferencia se pueden trazar infinitos radios.

AFIRMACIÓN

Acción situada en Cabri: arrastre para agrandar la circunferencia

GARANTÍA

Laura admitió la argumentación de Luis, después de que el estudiante repitió la acción de agrandar la circunferencia y colocar un radio entre dos ya construidos. Decimos que Cabri se constituye en un dominio de abstracción que le permitió concretar una idea abstracta sobre el número infinito de radios. Si bien este no es un ejemplo de unidad cognitiva porque los estudiantes no tienen los elementos algebraicos para relacionar la acción situada en Cabri con, por ejemplo, la correspondencia puntos de una circunferencia-números reales y la densidad de los reales, vemos en la argumentación de Luis el germen de un elemento de significado para tratar este asunto en otro momento. La discusión surgió, de manera espontánea, ligada a la solución del problema en Cabri y a la actividad demostrativa de los estudiantes. Si el profesor retoma esta argumentación posteriormente y la aprovecha, podrá guiar a los estudiantes hacia conceptos complejos de las matemáticas, significativamente.

CONCLUSIONES

Aunque la discusión sobre el infinito no tiene que ver estrictamente con el foco de nuestro trabajo de investigación, quisimos comunicarlo porque vemos que es posible crear ambientes de aprendizaje en los cuales los estudiantes construyen ideas iniciales que no corresponden a la presentación formal de las matemáticas. En este caso, la acción situada favorecida por Cabri les permite a los estudiantes acercarse a ideas relacionadas con el infinito, que posteriormente se pueden relacionar con ideas más formales de la matemática, como densidad, cardinalidad, infinito potencial, entre otras.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Garuti, R., Boero, P., & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. *Proceedings of the 22th PME Conference* 2, 345-352.

MEN. (2006). *Tecnología Informática: Innnovación en el currículo de a educación básica secundaria y media.* Ministerio de Educación, Bogota: Enlace Editores.

Pedemonte, B. (2006). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démostration. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 25(3), 313 – 348.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., & Rojas, C. (2006) *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá: Editorial de Universidad Pedagógica Nacional.

Producción de numerales en diferentes formatos de representación numérica en niños de 2° y 3° grado de Básica Primaria

Brehinert Alfredo Martínez Mora[*]
Jhon Heider Orrego Muñoz[**]

RESUMEN

Se propone un estudio exploratorio-descriptivo de tipo transversal en niños que cursan 2° y 3° grado de primaria donde se pretende indagar cómo los formatos de representación numérica que se plantean a los niños afectan sus desempeños durante la resolución de situaciones de trascodificación numérica. Se utiliza una tarea que exige a los niños participantes traducir conceptos numéricos al formato arábigo escrito y al formato de representación con material concreto. Los resultados indican que los niños de 2° grado de primaria presentan un mayor logro en la escritura de numerales arábigos, mientras los niños de 3° grado muestran un mayor logro en la composición de numerales con material concreto.

Palabras clave. Sistemas de representación, conocimiento, procesos cognitivos

[*] Universidad Cooperativa de Colombia, Sede Cali. Dirección electrónica: bremartzm@gmail.com

[**] Universidad Cooperativa de Colombia, Sede Cali. Dirección electrónica: jhon.orrego@ucc.edu.co

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

La presente investigación consiste en observar el desempeño de los niños que cursan 2° y 3° grado de primaria en tareas de trascodificación numérica, en la producción de numerales arábigos y la composición con material concreto, con la finalidad de establecer diferencias entre grados en función de los formatos de representación numérica que identifica las tareas matemáticas que se les proponen a los niños.

En este sentido, se define como formato de representación numérica a los diferentes sistemas que han sido construidos históricamente como los numerales hablados, numerales romanos y numerales arábigos que son utilizados para representar la información numérica que corresponden a realidades externas de los sujetos; bajo este criterio la manera de observar la relación entre los distintos formatos de representación numérica puede ser a través de las tareas y el proceso de trascodificación numérica, que se define como un conjunto de reglas que son activadas para trasladar numerales de un formato de representación numérico verbal a un formato de representación numérico arábigo o de un formato de representación numérico verbal a un formato de representación material concreto, y viceversa, independientemente de que el modelo sea de tipo semántico o asemántico (McCloskey & Maracuso, 1995; Barrouillet, Camos, Perruchet & Seron, 2004; y Orozco & Hederich, 2002).

El presente trabajo se dirige a explorar las diferencias en los tipos de producciones que generan los niños de 2° y 3° grado de primaria en función de dos formatos de representación numérico: el arábigo y los objetos concretos. La pregunta que orienta el presente estudio es: ¿Qué diferencias se generan en los desempeños de los niños observados en función de grado, cuando se les exige dar cuenta de un mismo concepto numérico en formatos de representación diferentes?

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Diferentes investigaciones han reportado que el desempeño de los niños pequeños en tareas matemáticas parece estar relacionado con los formatos de representación. Brizuela & Cayton (2010) proponen que el acierto y el error en las producciones de numerales arábigos está asociados con los formatos de presentación, confirmando de cierta manera que se genera un fenómeno de efecto representacional. Sin embargo, Seron & Fayol (1994) plantean que los errores en la producción de numerales arábigos son similares para los diferentes formatos de presentación, de lo cual se infiere que las formas de presentación no inciden en el desempeño de la escritura de numerales arábigos.

La relación entre el formato de representación verbal, el formato de representación material concreto, el formato de representación arábigo y el proceso de trascodificación numérica ha sido investigada también por Brizuela & Cayton (2010) con niños de pre escolar, primero y segundo de primaria. En este estudio se utilizaron dos tareas; (1) la primera de ellas consistió en presentarles a los niños numerales verbales, para que luego los anotaran de forma arábiga, y la (2) segunda consistió en presentar una colección de fichas para que representaran su valor con el correspondiente numeral arábigo. Los resultados indican claramente que a los niños cuando se les realizó la presentación con las fichas de valor para escribir los numerales arábigos cometieron respuestas de tipo no convencional "transcodificación completamente literal y notación compactada", pero la presentación de forma verbal para anotar los numerales arábigos se asoció con respuestas de tipo convencional; en este sentido se puede plantear que se presenta un efecto representacional debido a la disociación en las producciones en los numerales arábigos.

Por otro lado, la relación entre el formato de representación material concreto y el formato de representación arábigo en el proceso de trascodificación numérica ha sido investigada por Seron & Fayol (1994), a través de una análisis funcional, donde los autores proponen 5 tareas a 20 niños de habla francesa que cursan segundo grado de primaria: la (1) tarea es un dictado del formato de representación verbal al formato de representación arábigo; la (2) tarea es de comparar cantidades numéricas; la (3) tarea fue de comprensión gramatical; la tarea (4) consistía en representar verbalmente el numeral referido por las fichas de colores, y la (5) tarea consistía en escribir numerales arábigos de acuerdo con el valor representado en las fichas. Los resultados muestran que los niños, al producir numerales arábigos desde las diferentes rutas de presentación (tareas 1 y tarea 5), cometen un gran número de errores en la producción de numerales arábigos, es decir, los errores que los sujetos hicieron en la tarea 5 son similares a las cometidos en la tarea 1 "transcodificación completamente literal y transcodificación parcialmente literal", de lo que se puede inferir que las formas de presentación no afectan la escritura de numerales arábigos.

Otra línea de autores Baroody, 1990, y Fuson & Briars, 1990, se han centrado en estudiar la relación entre los formatos de representación a través de modelos que puedan facilitar el desempeño en diferentes competencias matemáticas "reconocimiento de las palabras número, valor de posición en la escritura de dígitos arábigos y operaciones aritméticas de suma y resta", debido a que los niños presentan muchas dificultades en aprender las habilidades de dichas competencias.

METODOLOGÍA

Este estudio propone un diseño cuasi-experimental de tipo transversal, en el que participa un total de 26 niños distribuidos de la siguiente manera: 13 niños que cursan el 2 grado de primaria y 13 niños que cursan el 3 grado de primaria.

Descripción

Se presenta un dictado de numerales de 3 y 4 dígitos sin ceros y con ceros intermedios, que le otorga un rol al niño que está ubicado como solucionador de la tarea; por ejemplo escuchar el dictado de los numerales, reconocer la categoría a la que pertenece o, en el caso de los numerales que contienen cero, reconocer su valor cardinal, para luego componer el numeral con material concreto y escribirlo en numeral arábigo.

Se utilizan dos tareas: la primera de ellas consiste en la escritura de numerales arábigos donde el material utilizado será lápiz y papel; luego se les entregan a los niños un lápiz y una hoja de papel diciendo que escriban su nombre y grado, y se les pide que "por favor, escriba los siguientes numerales en la hoja de arriba para bajo". Luego se procede al dictado de numerales.

La segunda tarea consiste en la composición de numerales con material concreto donde el material utilizado son cubos de madera balso que estarán distribuidos en diferentes tamaños y que representan cada rango numérico de acuerdo con el sistema notacional en base diez; los cubos de 1cm por cada lado representan el valor de unidad; los cubos de 2cm por cada lado representan el valor de decena; los cubos de 3cm por cada lado representan el valor de la centena; los cubos de 4cm por cada lado representan el valor de mil. Se trabaja con un total de 120 cubos que se dividieron en cuatro tarros decorados, los cuales tienen el valor del numeral que representa cada tamaño. Luego se procede al dictado de numerales.

Por lo anterior, el objetivo de estas tareas es evaluar y detectar diferencias en el desempeño de los niños en función de los formatos de representación.

ANÁLISIS DE LOS DATOS

En 2° grado (ver tabla 1), el análisis de logro en función de la variable tipo numeral, en relación con el desempeño en los diferentes formatos de representación, indica que el porcentaje más alto se da en los numerales de tres dígitos sin cero en la escritura de numerales arábigos, mientras el porcentaje más bajo en la escritura de dígitos arábigos se presentó en numerales de cuatro dígitos con cero en decenas y centenas; por otra parte los porcentajes más altos en la composición con material concreto se presentan en numerales de tres dígitos sin cero y numerales de cuatro dígitos sin cero, y los porcentajes más bajos se dan en numerales de tres dígitos con cero en decena y en numerales de cuatro dígitos con cero en decenas y centenas.

Tabla 1. Desempeño niños segundo grado de primaria.

	Arábigo		*Material concreto*	
	Logró	*No Logró*	*Logró*	*No Logró*
Numerales 3 dígitos sin cero	85%	15%	50%	50%
Numerales 3 dígitos con cero en decenas	69%	31%	20%	80%
Numerales 4 dígitos sin cero	46%	54%	50%	50%
Numerales 4 dígitos con cero en decenas y centenas	31%	69%	10%	90%

En 3° grado (ver tabla 2), el análisis de logro en función de la variable tipo numeral, en relación con el desempeño en los diferentes formatos de representación, indica que el porcentaje más alto se da en la composición con material concreto de forma similar en todos los rangos numéricos, mientras en la escritura de dígitos arábigos el porcentaje más alto se da en numerales de cuatro dígitos sin ceros, y los porcentajes más bajos se dan en los rangos numéricos, restantes sin presentar diferencias significativas.

Tabla 2. Desempeño niños tercer grado de primaria.

	Arábigo		Material concreto	
	Logró	No Logró	Logró	No Logró
Numerales 3 dígitos sin cero	77%	23%	100%	0%
Numerales 3 dígitos con cero en decenas	77%	23%	100%	0%
Numerales 4 dígitos sin cero	85%	15%	100%	0%
Numerales 4 dígitos con cero en decenas y centenas	73%	27%	90%	10%

CONCLUSIONES

En 2° grado el desempeño en los diferentes formatos de representación indica que los niños presentan un mayor acierto en la escritura de numerales arábigos en todos los rangos numéricos; sin embargo, en la composición con material concreto, los niños muestran un mayor error en los diferentes rangos numérico. Mientras en 3° grado el desempeño en los diferentes formatos de representación indica que los niños presentan un mayor acierto en la composición de numerales con material concreto en todos los rangos numéricos, en la escritura de numerales arábigos muestran un mayor error en los diferentes rangos numéricos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Baroody, A. (1990). How and when should place – value concept and skills be taught. Journal for research in *Mathematics Education*, 21 (4) 281-286.

Brizuela, B & Cayton, G. (2010) Anotar números desde pre-escolar hasta segundo grado: el impacto del uso de dos sistemas de representación en la presentación. *Cultura y Educación*, 22 (2), 149-167.

Barrouillet, P; Camos, V; Perruchet, P & Seron, X (2004). ADAPT: A Developmental, Asemantic, and Procedural Model For Transcoding From Verbal To Arabic Numerals. *Psychological review*, 111 (2), 368-394.

Fuson, K & Briars, D. (1990), Using A Base - Ten Blocks Learning / Teaching Approach For First And Second Grade Place – Value And Multidigit Addition And Subtraction, Journal For Research In *Mathematics Education*, 21(3) 180-206.

Fayol, M. & Seron, X. (1994) Number transcoding in children: A functional analysis. *British journal of development psychology*, 12, 281–300.

Fayol, M & Seron, X. (2005) About Numerical Representations: Insights from Neuropsychological, Experimental, and Developmental Studies. En J. I. D. Cambell (Ed.) *Handbook of Mathematical Cognition*.

McCloskey & Macaruso, P. (1995) Representing and using numerical information. *American Psychologist*, 50 (5), 351-363

Orozco, M. & Hederich, C. (2002) *Errores de los niños al escribir numerales dictados*,

Comprensión del principio de valor de posición en niños de 1° y 2° grado

Diego A. Medina Rodríguez[*]
Nohemy M. Bedoya Ríos[**]

RESUMEN

Se presentan dos investigaciones centradas en el estudio de la comprensión del valor de posición en niños de Básica Primaria que cursan 1° y 2° grado. Los dos estudios planteados utilizan un diseño cuasiexperimental pre y postest con grupos experimentales y control, que incluyen procesos de intervención dirigidos a facilitar la comprensión del valor de posición. No obstante que estas investigaciones llegaron a resultados diferentes –de acuerdo con los objetivos que las identificaban–, los análisis realizados en tales investigaciones permiten construir una descripción integral de las características que los niños evidencian para acceder a una comprensión cada vez más compleja, de este principio estructural del sistema de notación arábigo.

Palabras clave: Valor de posición, comprensión, intervención, notación arábiga.

[*] Universidad Cooperativa de Colombia. Dirección electrónica: diego.medinar@ucc.edu.co
[**] Universidad del Valle. Dirección electrónica: nohemy_bedoya@yahoo.es

PROBLEMA

El manejo de la regla del valor de posición es un aspecto importante en el proceso de aprendizaje matemático en el niño, ya que este sustenta otro tipo de nociones y operaciones. Sin embargo, muchos estudiantes presentan dificultades relacionadas con este principio, debido a que su comprensión propone exigencias y demandas cognitivas muy altas para los niños de los primero grados escolares (Kamii, 1985). De manera general, los estudios que se proponen en el presente documento, se cuestionan sobre ¿Cuál es la comprensión que niños de 1º y 2º grado tienen sobre el valor de posición? Y ¿Qué relación existe entre esta comprensión y el conocimiento del niño sobre otros aspectos del dominio numérico? A través del análisis de los desempeños y estrategias de los niños se busca generar propuestas que puedan proporcionar un apoyo en este proceso a los estudiantes que cursan los primeros grados de la Básica Primaria.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Existen diversas formas de representación numérica, pero actualmente la más utilizada es el sistema de notación arábigo. Este es un sistema posicional, en el que los símbolos correspondientes a las cifras del 1 al 9, más el símbolo especial 0, sirven para representar las cantidades básicas y, al yuxtaponerse, son suficientes para representar cualquier número. El valor de los dígitos en un numeral es multiplicado por una potencia de la base, las cuales son representadas por la posición del símbolo en la cadena de dígitos. Esta característica permite descomponer el número en grupos jerárquicos sobre la base. Por lo tanto, llegar a utilizar correctamente el valor de posición exige comprender que en un numeral cada dígito representa un doble valor: el que corresponde al número de unidades y el relativo al orden de la unidad. Y reconocer que aunque la potencia no se encuentra explícita, puede inferirse a partir de la ubicación de los dígitos en el numeral (Lerner & Sadovsky, 1994; Orozco, 2001).

Sin embargo, este tipo de comprensión representa un gran reto para los niños durante su proceso de aprendizaje. Diferentes investigaciones han reportado las dificultades que tienen los niños para dominar el valor de posición en tareas de escritura y lectura de numerales (Tolchinsky y Karmiloff-Smith, 1992; Scheuer, Sinclair, Merlo y Tièche, 2000, Orozco y Hererich, 2002) y en tareas de suma y resta (Fuson, 1998; Ho y Cheng, 1997).

Para algunos, la comprensión de este concepto se relaciona con habilidades de conteo, los conceptos de unidad simple y compuesta, relaciones parte-todo, la composición aditiva, la equivalencia numérica, la unitización, entre otras (Baturo, 2000). Aunque no se ha establecido con claridad la relación existente entre estas habilidades y nociones, sí se ha evidenciado que muchas de las dificultades en los desempeños matemáticos de los niños escolarizados se relacionan con el valor de posición (Ver Baroody, 1990, Cawley *et al.,* 2007; Kamii, 1985; Thompson, 2000). Hunter y Turner (1994) afirman que la comprensión superficial e inadecuada de este principio genera, a su vez, dificultades en la comprensión de los procedimientos de llevar y quitar que se realizan en la suma y resta, respectivamente, así como en la utilización del punto decimal. En general los niños que tienen pobres conceptos sobre el valor de posición tienden a experimentar dificultades con los procedimientos algorítmicos de las operaciones aditivas y multiplicativas.

METODOLOGÍA

Estudio 1[1]. La primera investigación pretende establecer cómo la comprensión del concepto de valor de posición impacta la actividad de escritura en 96 niños de 1° grado, con un promedio de 6:9 años de edad. Se utiliza un diseño cuasiexperimental pre y postest, con intervención, que incluye un análisis comparativo entre dos grupos experimentales con tratamientos diferentes; equivalencia numérica y composición aditiva, y un grupo de control. Durante el pre y postest, se aplicaron dos tareas de comprensión en valor de posición (tarea de valor de posición con fichas y barras de colores y tarea de valor de posición con tarjetas y fichas) y una tarea de producción de numerales arábigos al dictado.

Estudio 2[2]. En un segundo estudio, se utilizó un diseño pretest –intervención– postest, con grupo control. Para el pre y postest se aplicaron tres tareas dirigidas a evaluar la comprensión del niño sobre el valor de posición (asignación de unidades de orden, comparación de magnitudes, escritura de numerales). El proceso de intervención se realizó a partir del uso de un protocolo de preguntas aplicadas en dos tareas de composición (tarea de la tienda y composición con fichas); ambas fueron aplicadas en formato verbal buscando que no se presentaran efectos asociados al trabajo directo sobre el formato arábigo. Se seleccionaron al azar 45 niños de 2° de primaria, en

[1] "*Efecto de la comprensión del valor de posición en la escritura de numerales arábigos en niños de 1° grado*", desarrollado por Diego A. Medina Rodríguez, en el periodo 2009-2011. Investigación financiada por el Fondo de Becas Glen Nimnicht–CINDE y avalada por la Universidad del Valle.

[2] "*Caracterización de las relaciones entre composición aditivo-multiplicativa y comprensión valor de posición*", desarrollado por Nohemy Bedoya Ríos, en el periodo 2009-2010. Proyecto de Joven Investigadora financiada por COLCIENCIAS y avalada por la Universidad del Valle.

dos escuelas públicas de la ciudad de Cali de estrato socio-económico medio y se conformaron 2 grupos (intervención y control, cada uno compuesto por 21 estudiantes.

ANÁLISIS DE DATOS

Estudio 1. El análisis de medias en función de grupos y tareas propone que en el postest, las medias de acierto más altas se presentan en los grupos de equivalencia numérica y composición aditiva para las tres tareas aplicadas. En la tarea de "valor de posición con tarjetas y fichas", los resultados del análisis de covarianza mostraron diferencias significativas entre grupos; $F(2, 96) = 8.656$; $p<0.05$). El ANCOVA también evidenció efecto entre aplicaciones para esta tarea; $F(1, 96) = 34.063$; $p<0.05$). En la tarea "fichas de valor de posición", el análisis de covarianza mostró diferencias significativas entre grupos; $F(2, 96) = 7.628$; $p<0.05$) y efecto entre aplicaciones para esta tarea; $F(1, 96) = 3.779$; $p<0.05$). En la tarea de escritura de numerales, el análisis de covarianza mostró efecto entre grupos; $F(2, 96) = 14.440$; $p<0.05$), y efecto entre aplicaciones; $F (1, 96) = 69.389$; $p<0.05$).

Tabla 1. Análisis de medias de los puntajes en el pre y post–test en función de grupos y tareas

Tarea	*Grupo*	*N*	*Media de acierto Pre–Test*	*Media de acierto Post-Test*	*Desviación estándar Pre–Test*	*Desviación estándar Post–Test*
Valor de posición con tarjetas y fichas	Equivalencia	32	4.88	11.34	4.430	5.277
	Composición	32	3.91	11.47	4.100	5.093
	Control	32	6.06	8.16	5.330	6.217
	Total	96	4.95	10.32	4.620	5.794
Valor de posición con tarjetas y barras de colores	Equivalencia	32	6.19	9.72	2.550	2.174
	Composición	32	6.00	10.66	2.450	2.280
	Control	32	6.44	8.31	2.960	3.053
	Total	96	6.21	9.56	7.960	2.686
Escritura de numerales	Equivalencia	32	6.28	11.66	3.340	3.075
	Composición	32	6.69	10.78	3.310	3.535
	Control	32	6.69	8.44	3.650	3.818
	Total	96	6.55	10.29	3.433	3.713

Estudio 2. En el análisis general del logro se observan diferencias entre las puntuaciones del pre y el postest en las tres tareas, en ambos grupos, con una tendencia al aumento del logro obtenido durante el postest. Un

análisis estadístico posterior evidenció diferencias significativas entre los resultados del pre y postest en el grupo intervención en la tarea de escritura ($t_{(20)}$ = -2,578; p < 0,05), y en la tarea de asignación de unidades de orden ($t_{(20)}$ = -6,033; p < 0,05), mientras que entre los resultados del pre y postest del grupo intervención no se encontraron diferencias significativas en ninguna de las tareas (ver tabla 2).

Tabla 2. Distribución del logro por tarea

		Pre Test		Post Test	
Tarea	Grupo	Media	D. T.	Media	D. T.
Escritura	Control	7,7	4,2	8,1	4,1
	Intervención	5,6	3,2	6,7	3,8
Comparación	Control	6,5	1,5	6,5	1,5
	Intervención	6,1	1,4	6,6	1,2
Asignación de unidades	Control	1,9	2,0	2,7	2,2
	Intervención	1,5	1,6	3,8	1,8

CONCLUSIONES

En el "Estudio 1", los resultados observados en el grupo de composición aditiva y equivalencia numérica sugieren que la comprensión de la composición aditiva se encuentra vinculada con la comprensión del valor de posición. Igualmente, el nivel de comprensión de la regla del valor de posición, como el nivel de escritura de base observado de manera inicial en los niños, parece estar vinculado directamente con los avances o retrocesos en la producción de numerales arábigos.

En el "Estudio 2" los resultados de los diferentes análisis realizados permiten plantear que el conocimiento sobre las operaciones de composición mejora el desempeño y la comprensión de los valores asociados a las unidades de orden, Mientras que los procesos de escritura y comparación de magnitudes parecen estar más relacionados con el conocimiento del niño sobre reglas específicas de los formatos, que con la comprensión sobre las propiedades generales del número.

De manera general, los análisis de los datos obtenidos en los dos estudios permiten establecer la siguiente caracterización de la comprensión que los niños logran sobre el valor de posición: (a) algunos niños operan en función del valor nominal, pero no identifican la importancia de la posición del dígito para establecer su valor total, (b) otros logran establecer que los dígitos pueden tener un valor diferente a su valor nominal, pero siguen operando sobre la idea que todos valen lo mismo, (c) otros establecen que los dígitos representan valores diferentes y que estos valores están relacionados con la posición en la que se encuentran, (d) algunos identifican que los valores de los dígitos aumentan de manera progresiva y ordenada, y este orden se asocia a la dirección de la escritura izquierda-derecha, (d) en contraste, otros niños identifican que los dígitos representan valores diferentes, que estos aumentan de forma ordenada y progresiva, pero a diferencia del caso anterior, este orden es de tipo convencional (derecha-izquierda). Sin embargo, la asignación ordenada y secuencial de estos valores generalmente no se encuentra relacionada con una posición canoníca.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Baroody, A. J., (1990). How and should place-value concepts and skills be taught? *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 21, N.° 4, pp. 281-286.

Baturo, A. R., (2000). Construction of a numeration model: A theoretical analysis. In Bana, J. and Chapman, A., (Eds). *Proceedings 23rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Groupof Australia*, pp. 95-103, Fremantle, WA.

Bedoya, N., (2010) *Caracterización de las relaciones entre composición aditivo-multiplicativa y comprensión valor de posición*. Informe de Investigación. Universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia.

Cawley, J. F., Parmar, R. S., Lucas-Fusco, L. M., Kilian, J. D., & Foley, T. E. (2007). Place value and mathematicsfor students with mild disabilities: Data and suggested practices. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal*, 5(1), 21-39.

Fuson, K. C., (1998). Pedagogical, mathematical, and real-world conceptual-support nets: A model for building children's multidigit domain knowledge. *Mathematical Cognition*, 4 (2), 147-186.

Ho, S-H., & Cheng, F. S-F. (1997) Training in Place-Value Concepts Improves Children´s Addition Skills. Contemporary Educational Psychology. 22, 495-506.

Hunter, J. & Turner, I., (1994) Learning multi-unit number concepts and understanding decimal place value. *Educational Psychology*, 01443410, 1994, Vol. 14, 3.

Kamii, C. K., (1985). Las cifras y el valor de posición como objetivos. Capítulo IV. En: El niño reinventa la aritmética: Implicaciones de la teoría de Piaget. Aprendizaje Visor.

Lerner, D. & Sadovsky, P., (1994). El sistema de numeración: un problema didáctico. En Parra, C. y Saiz, J. (Eds.), *Didáctica de las matemáticas,* 95-84. Paidós.

Medina, D. A., (2012). *Efecto de la comprensión del valor de posición en la escritura de numerales arábigos en niños de 1° grado.* Trabajo de Tesis realizado para optar por el título de Máster en Psicología. Universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia.

Orozco, M., (2001). Los errores sintácticos cuando los niños aprenden a escribir numerales (*Paper Work*). Cali; Centro de Investigaciones en Psicología. Universidad del Valle.

Orozco, M. & Hederich, C., (2002). Errores de los niños al escribir numerales dictados. Recuperado el 26 de octubrede 2010 de http://www.univalle.edu.co/~cognitiv/

Scheuer, N., Sinclair, A., Merlo S. & Tièche, C., (2000). Cuando ciento sesenta y uno se escribe 10071: Niños de 5 a 8 años produciendo numerales. *Infancia y aprendizaje, 90, 31-50.*

Tolchinsky-Ledsmann, L. & Karmiloff-Smith, A., (1992). Las restricciones del conocimiento notacional. *Psicología Educativa*, 16 (17), 39-90.

Thompson, I., (2000). Teaching place value in UK: time for a reappraisal? Educational Review, Vol. 52, N.° 3.

Influencia del contexto en el desempeño de los estudiantes al resolver problemas de probabilidad condicional

*Gladys Mejía Osorio**
*Lady Yamile Sierra Blanco***
*Felipe Fernández Hernández****

RESUMEN

La resolución de problemas de probabilidad condicional en estudiantes de secundaria conlleva diversas dificultades que deben ser conocidas por los profesores de matemáticas. En este trabajo, se presentan algunos avances respecto a la aproximación metodológica que se propone para evidenciar cómo el contexto y la estructura en que se presentan los datos de un problema de probabilidad condicional ternario de nivel 1 generan diferentes efectos en la búsqueda de estrategias de solución por parte del estudiante.

Palabras claves: probabilidad condicional, tipos de problemas, resolución y estrategias.

* Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: gladys6m@hotmail.com
** Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: elimay83@hotmail.com
*** Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: fjfernandez@pedagogica.edu.co

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Al revisar algunos documentos que existen en el medio sobre la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad condicional, como los adelantados por Cerdán, Huerta y Lonjedo (2009), quienes manifiestan que "... *algunas investigaciones refieren las dificultades y el poco éxito que los estudiantes tienen en la resolución de problemas de probabilidad condicional, pero en su mayor parte, no prestan atención a la estructura del problema ni al contexto en el que están formulados y, por tanto, no relacionan sus resultados con esos aspectos que se consideran pueden ser influyentes en el éxito y las dificultades de los estudiantes*" nos condujo a diseñar un experimento de enseñanza que posibilite documentar los efectos que generan el contexto y la presentación de los datos en los estudiantes, a la hora de resolver problemas ternarios de probabilidad condicional N_1, en tres contextos diferentes (contexto social, diagnóstico e industria).

Consideramos pertinente, en relación con lo anterior, realizar un estudio como trabajo de grado titulado: ""*Influencia del contexto en el proceso de resolución de problemas ternarios de probabilidad condicional*". Para el caso puntual de esta ponencia, se presentan algunas ideas y avances de nuestro trabajo de investigación, el cual está en correspondencia con la línea de investigación Educación Estadística que soporta el programa de Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. Esta línea se preocupa por documentar de manera cuidadosa procesos de instrucción en torno a las concepciones, creencias y actitudes de estudiantes y profesores sobre temas estocásticos y de probabilidad.

Se espera que los resultados que arroje el estudio brinden elementos y herramientas en el diseño curricular de la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad condicional.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

El trabajo de grado base de esta presentación se fundamenta en dos referentes teóricos. El primero se refiere a cómo se clasifican los problemas de probabilidad condicional desde la postura de Lonjedo y Huerta (2009). El segundo a lo planteado por Valero (2002) en relación con contexto presente en el enunciado del problema, considerando en este punto los contextos: social, industria y diagnóstico.

Lonjedo y Huerta abordan problemas ternarios de probabilidad condicional, y los clasifican de acuerdo con *nivel*, *categoría* y *tipo*. El nivel está determinado por el número de probabilidades condicionales presentes en el texto del problema o de los datos interpretables como probabilidades condicionales. Específicamente para el nivel que se ha elegido trabajar en el proyecto no hay probabilidades condicionales en el enunciado del problema, sino que hacen parte de la pregunta.

La categoría depende del nivel de problema que se considere. En la categoría uno se encuentran los problemas que presentan como datos tres probabilidades de la intersección; en la categoría dos, los datos que se presentan constituyen dos probabilidades de la intersección y una marginal; y en la categoría tres están los problemas donde se encuentran como datos en el enunciado dos probabilidades marginales y la probabilidad de una intersección. Por otro lado, estos autores definen el tipo como determinado por la pregunta del problema. Ellos consideran tres tipos: el *Tipo 1*, donde la pregunta del problema es una probabilidad condicional; el *Tipo 2*, donde la pregunta del problema es una probabilidad marginal; y el *Tipo 3,* donde la pregunta del problema es la probabilidad de una intersección. Para el caso particular de este trabajo se han elegido el *nivel 1*, las categorías 1, 2 y 3 y el tipo 1.

La idea de contexto es considerada en el sentido de Valero (2002), quien sostiene que el *contexto de un problema* puede referirse al campo de nociones y procedimientos matemáticos dentro de los cuales se ubica el problema o referirse a las referencias que la formulación de un problema evoca en el estudiante. Con base en esta consideración los problemas que componen el experimento de enseñanza pertenecen al campo de la probabilidad y específicamente al de la probabilidad condicional. En cuanto al marco de referencia que la formulación del problema evoca en el estudiante, se consideran las situaciones sociales de su entorno, así como las que aluden a la industria o al diagnóstico de una situación particular de alguna patología.

METODOLOGÍA

Puesto que el interés de la investigación de la que sacamos los datos para esta comunicación se centra en buscar evidencias sobre los efectos que genera el contexto de un problema de probabilidad condicional de enunciado verbal, cuando estudiantes de grado once deben resolverlo, el enfoque utilizado en la investigación se enmarca dentro de una perspectiva interpretativa. Dicha perspectiva se considera apropiada para el objetivo que se persigue alcanzar, ya que no establece unos procesos estandarizados, rígidos que deben seguirse de manera puntual, sino que ofrece la oportunidad de ir trazando la ruta investigativa. Para la recolección de los datos utilizamos talleres que desarrollan los estudiantes, así como grabaciones de episodios y de socializaciones realizadas en el aula.

La investigación se desarrolla en cuatro sesiones de clase con estudiantes de grado once[1] de secundaria que tienen conocimientos básicos de probabilidad, tales como la identificación de eventos, sucesos, espacio muestral y asignación de cálculos de probabilidades. La profesora titular de dicha asignatura es una de las autoras de esta ponencia.

Para evidenciar los efectos que genera el contexto en el proceso de resolución de problemas se diseña un experimento de enseñanza (conformado por tres tareas cada una con tres problemas), en el cual se enfatiza en los problemas ternarios de probabilidad condicional de nivel 1 en las tres categorías mencionadas en el marco de referencia expuesto. Para la presentación del enunciado del problema se decidió expresar los datos en tres contextos diferentes: social, de industria y de diagnóstico. Por otro lado, se controlaron variables como la naturaleza de los datos (porcentajes, razón o probabilidad) y la estructura del enunciado del problema. En particular, los datos se dieron en cantidades absolutas en un solo nivel.

ANÁLISIS DE LOS DATOS

Aunque se menciona de manera general la metodología del trabajo de grado, es importante destacar que para el caso de la ponencia, se enfatiza en el diseño de la primera tarea del experimento de enseñanza y en un corto análisis de la aplicación de la misma a 36 estudiantes que trabajaron de manera grupal. En la tarea 1, se proponen a los estudiantes tres problemas de enunciado verbal con la misma estructura (nivel 1, tipo 1, categoría 3), presentación de los datos, pero en contextos diferentes. A continuación aparece la tipificación de cada uno de ellos:

Social	Industria	Diagnóstico
Problema 1: Una compañía aseguradora de vehículos presenta su reporte anual en relación a la situación de 2000 autos asegurados, así: a) 400 vehículos de color azul fueron asegurados b) 280 vehículos se accidentaron c) 150 vehículos de color distinto al azul se accidentaron Si al seleccionar un vehículo al azar, se sabe que este se accidentó, ¿cuál es la probabilidad de que sea azul? Explica tu respuesta.	Una planta recibe 250 reguladores de voltaje de dos diferentes distribuidores, 120 de los reguladores se compran a la empresa Voltage y el resto a la empresa Electric Company. Si de los reguladores comprados 12 se encuentran defectuosos y se sabe que 115 motores de los comprados a Voltage se encuentran en buenas condiciones. ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar al azar un regulador este sea defectuoso dado que se ha comprado a Electric Company?	En un centro médico, de 120 nacimientos 62 fueron varones y 50 hembras. Si de las ecografías previstas 70 indicaban que sería un varón y 43 nacimientos de niñas fueron previstos por la ecografía. Encuentra la probabilidad de que naciera un varón dado que la ecografía indicaba que era mujer.

[1] Esta investigación se está llevando a cabo con 36 estudiantes de grado once de un colegio de Bogotá.

El primer problema se considera de contexto social, ya que hace referencia a situaciones comunes del hombre, que en la vida requieren de un análisis de probabilidad. Se clasifica en el nivel 1, dado que no presenta en el enunciado, datos relacionados con probabilidades condicionales, sino dos probabilidades marginales y una intersección. Las probabilidades marginales corresponden a los ítems *a* y *b*, donde se destacan los eventos color y accidentados, y la intersección se presenta en el ítem c. Al final se pregunta por una probabilidad condicional. El segundo problema presenta iguales características que el primero con la variante del contexto (industria), debido a que en el enunciado se alude a prácticas presentes en empresas donde es necesario hacer uso de la probabilidad condicional. El tercer problema está en el contexto de diagnóstico, ya que se pregunta acerca de la predicción del género en una ecografía.

Con el fin de hacer un pequeño acercamiento a la influencia del contexto en la resolución de problemas de probabilidad condicional, estos tres problemas fueron aplicados a un grupo de estudiantes de grado once. Los resultados encontrados se muestran a continuación:

Problema del contexto social. El 70% de los estudiantes acertó en la solución del problema; el 11% identificó los datos de manera adecuada, pero la solución fue errada; el 19% no identificó los datos ni presentó la solución de manera adecuada. La mayoría de los estudiantes manifestó entender el problema y tener claridad de la pregunta que se plantea. En la mayoría de los grupos de estudiantes que acertaron en la solución, se evidencian procedimientos similares en la resolución de problemas.

Problema del contexto de industria. El 60% de los estudiantes acertó en la solución del problema. El 40% restante presenta una solución no adecuada, considera que el problema es similar al primero, pero se encuentra un poco más de dificultad al interpretar la pregunta.

Problema del contexto de industria. Únicamente el 30% de los estudiantes acertó en la solución. El 70% realiza análisis y procedimientos, pero no presenta solución acertada. Los estudiantes manifiestan mayor dificultad al entender el problema, no consideran que este presente la misma estructura de los anteriores, requieren de mayor tiempo y análisis, y utilizan diferentes estrategias para llegar a la solución. No se identifican los datos de manera adecuada, hay confusión entre la probabilidad marginal y la de la intersección. Algunos episodios que sustentan lo anterior se presentan a continuación:

Episodio 1	*Episodio 2*
Jasmin: es que lo que pasa es que ya habíamos hecho los dos anteriores problemas y este (tercero) no lo habíamos hecho porque no habíamos entendido … *Docente:* y ¿Por qué crees que no entiendes este?, ¿los otros dos si los entendieron pero el tercero no? *Jasmin:* (la estudiante lee el problema nuevamente en presencia de la profesora, termina de leer y al final hace humm) Docente: entonces te parece más difícil *Jasmin:* siii, es más difícil porque no me están dando los datos bien	*Docente:* ¿Qué pasa con el problema tres? *Angie:* es que dice que son 120 nacimientos, pero es que aquí (señala la hoja), me dan 113 *Docente:* estas sumando las "ecografías", 70 mas 43, pero ¿porque sumas ese 43 con ese 70? *Angie:* sonríe.., y dice: ay, profe (se supone que quiere decir, porque me pregunta eso) *Docente:* ¿Qué entiendes del 43? *Angie:* lo que pasa es que… *Docente:* ¿para tí qué significa el 43? *Angie:* los nacimientos de niñas *Docente:* siiii *Angie:* la probabilidad de que naciera ahh ba Paula: se enredó

CONCLUSIONES

Aunque los resultados obtenidos aún se encuentran en proceso de sistematización y análisis, la información procesada hasta el momento permite concluir que entre los tres contextos presentados en los problemas, se evidencia que el contexto de diagnóstico genera en los estudiantes mayor dificultad para extraer y comprender los datos, así como para encontrar la solución a la pregunta planteada. Aunque los problemas propuestos en la Tarea 1 tienen la misma estructura, el contexto juega un papel importantísimo en la comprensión del enunciado, hace que problemas similares se vean como diferentes y casi sin elementos comunes en el enunciado. A pesar de que el contexto de diagnóstico es el menos comprendido por los estudiantes, este conduce al estudiante a un esfuerzo analítico y a buscar estrategias y tipos de representaciones diferentes para encontrar solución a la pregunta. Por otro lado, los problemas enmarcados en el contexto social y de industria, se convierten para algunos estudiantes en ejercicios, ya que encontrar la solución no requiere de un gran esfuerzo o de uso considerable de estrategias o representaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Huerta, M & Lonjedo, M.A., (2009). *Una clasificación de los problemas escolares de probabilidad condicional.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia.

Valero, P. (2002). Consideraciones sobre el contexto y la educación matemática para la democracia. *Quadrante, 11*(1), 49-59.

Integración de un ambiente de geometría dinámica mediante una secuencia de situaciones respecto a la noción de simetría

Carlos Alberto Morales García[*]
FranciLined Obando[**]

RESUMEN

Se muestran algunos adelantos de la propuesta de trabajo de grado, en el marco de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad del Valle, la cual está encaminada a estudiar e implementar una situación didáctica que logre potenciar el pensamiento espacial y los sistemas geométricos en los estudiantes de sexto de Educación Media. En particular, se revisarán los diseños que ya se han incorporado en las clases de geometría y posteriormente se realizará un diseño de una secuencia didáctica, tomando referentes de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y la Orquestación Instrumental (OI). Será aplicada a los estudiantes de grado sexto del Colegio Jefferson, y se realizará la sistematización de la puesta en acto de dicho diseño enfocado al estudio de las transformaciones geométricas, específicamente sobre la noción de simetría axial y central, utilizando el ambiente de geometría dinámica Cabrí géomètre II plus.

Palabras clave: Cabrí geometre II plus, orquestación instrumental, situaciones didácticas, transformación de simetría.

[*] Universidad del Valle. Dirección electrónica: cmorales@jefferson.edu.co
[**] Universidad del Valle. Dirección electrónica: francylined@yahoo.com

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Durante los años sesenta y setenta surge el programa de matemáticas modernas el cual se centraba en la enseñanza de teoría de conjuntos y en el álgebra. Este programa deja como consecuencia el abandono de la geometría. Con la renovación curricular se recupera el interés en la enseñanza de la geometría, se busca la exploración del espacio y el desarrollo del pensamiento espacial y los sistemas geométricos a través de la exploración, entendida como la manipulación y la transformación de las representaciones mentales de los objetos del espacio. Posteriormente con la reforma a la educación de acuerdo con la Ley 115 y los lineamientos curriculares, se considera una necesidad el hecho de recuperar el sentido espacial y se retoma la geometría activa para la exploración del espacio, devolviéndole el dinamismo a los sistemas geométricos.

Por otro lado, de acuerdo con los resultados del Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS) se revela una creciente necesidad de continuar en el proceso de mejoramiento en la enseñanza de la geometría. El TIMSS (2007) presenta la necesidad de realizar un mayor esfuerzo en la enseñanza de la simetría bidimensional.

En el marco de estas reflexiones y teniendo en cuenta la misión, la visión y las políticas de calidad del Colegio Jefferson, los maestros del área de matemáticas, desarrollaron en el año 2006 un proyecto de incorporación de las nuevas tecnologías de la educación, el cual se denominó: "Incorporación de nuevas tecnologías en el currículum de matemáticas del Colegio Jefferson". Algunos aspectos relevantes del proyecto han sido la reflexión en el interior de la institución, sobre las concepciones y el proceso de cualificación docente e institucional.

Se pretende tomar como insumo lo realizado por el equipo de profesores del área de matemáticas del Colegio Jefferson y contribuir con el diseño de algunas prácticas que recojan las reflexiones de carácter metodológico y didáctico. Como producto de la puesta en acto y del análisis de la integración de un ambiente de geometría dinámica, se realizará la sistematización de una secuencia didáctica en torno a las transformaciones geométricas de simetría, innovando y fundamentando la que actualmente existe.

Así, la propuesta se sustenta desde la siguiente pregunta: ***¿Cómo incide el diseño de una secuencia didáctica apoyada en un ambiente de geometría dinámica en la construcción de significado de las transformaciones geométricas de simetría axial y central, de los*** *estudiantes del nivel sexto de Educación B* ***ásica en el Colegio Jefferson?***

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Desde las situaciones didácticas se considera que el sujeto necesita construir por sí mismo sus conocimientos, se pretende que los estudiantes aprendan haciendo funcionar el saber, aprendiendo a observar, realizando hipótesis; como manifiesta Piaget, adaptándose a un medio que es el resultado de contradicciones y dificultades. Este saber, fruto de la adaptación del estudiante, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje (Brousseau, 1986), aunque se debe tener en cuenta que, a diferencia de las concepciones piagetianas, la teoría de Brousseau sobre la enseñanza, se basa en que estas reclaman al maestro generar en el estudiante las adaptaciones deseadas. Brousseau retoma la teoría piagetiana sobre el concepto de aprendizaje por adaptación y lo replantea en el análisis de las actividades escolares; en el aprendizaje por adaptación se considera la interacción de un sujeto con un medio.

El punto de partida es la intención del sujeto, que genera una acción sobre el medio, este reacciona a esa acción inicial (llamada retroacción). El sujeto debe interpretar la retroacción del medio usando los conocimientos adquiridos anteriormente. Posteriormente el sujeto valida su acción de acuerdo con la interpretación que hace de las retroacciones del medio.

En el caso en que la validación permite satisfacer la intención inicial, se considera positiva, y se fortalece esta acción. Si la validación no permite satisfacer la intención inicial se considera negativa; en este caso el sujeto replanteará la acción ejecutada, dando inicio al proceso acción-retroacción-validación; así, toda validación genera una señal de aprendizaje.

Uno de los elementos fundamentales del aprendizaje por adaptación, y de las situaciones a-didácticas es el medio. El medio es aquello con lo que interactúa el estudiante, sobre el cual puede realizar acciones y recibir retroacciones que le permitan la validación. Ese medio debe ser seleccionado o diseñado de manera cuidadosa para que los conocimientos producto del aprendizaje por adaptación sean lo más parecidos posible al saber que se quiere enseñar.

Desde el enfoque instrumental se entiende al sujeto, como un individuo que interactúa con un instrumento; este se considera como una construcción del sujeto que parte de un artefacto, el cual se ha constituido socialmente, y es utilizado por los sujetos en acciones instrumentadas. En este sentido las interacciones entre el sujeto y el artefacto pueden, potencialmente, generar una transición hacia la constitución de un instrumento, entendidas las interacciones como los esquemas que constituyen el sujeto por intermedio de sus acciones. De esta manera, el instrumento permite comprender al sujeto los objetos conceptuales implicados en una determinada situación.

Los esquemas de acción realizados por el sujeto, además de ser actos observables, son fundamentales en la constitución de un instrumento; la evolución y emergencia de dichos esquemas de acción permiten el surgimiento de lo que se conoce como los procesos de génesis instrumental, los cuales se constituyen a partir de dos procesos: la *instrumentalización* y la *instrumentación*. La instrumentalización se entiende como el reconocimiento del sujeto sobre el artefacto. La instrumentación permite crear en el sujeto tanto los esquemas de uso como los esquemas de acción instrumentada.

Trouche (2003) define la orquestación instrumental como el conjunto de varios dispositivos, es decir, todos aquellos elementos que se constituyen en la organización y ejecución de una clase, que gestiona un profesor para el surgimiento de los procesos de génesis instrumental por parte de un estudiante. Asimismo, caracteriza tres niveles o configuraciones de orquestación instrumental: en el primer nivel, los artefactos son vistos como herramientas de uso común; los objetivos fundamentales en este nivel se caracterizan por generar un primer acercamiento del sujeto con el artefacto e iniciar un reconocimiento del mismo, a partir de las modificaciones en los esquemas de uso; en el segundo nivel, el artefacto se constituye en instrumento; el objetivo fundamental en este nivel es la socialización de los procesos de génesis instrumental de un estudiante con sus pares; en el tercer nivel se preserva la relación establecida por el sujeto con un instrumento, y se caracteriza por propiciar en los estudiantes un análisis de su propia actividad.

De esta manera, la orquestación instrumental propicia la constitución de esquemas de acción instrumentada, tanto individuales como colectivos, los cuales son entendidos como aquellos elementos de carácter social que se movilizan en la clase y que influyen de manera directa en los procesos de génesis instrumental; además, gestiona los demás elementos presentes en el desarrollo de dichos esquemas.

METODOLOGÍA

En particular se realizará una secuencia de aula que será aplicada a los estudiantes del nivel sexto del Colegio Jefferson y posteriormente se realizará la sistematización de la puesta en acto de dicho diseño referente al estudio de las transformaciones geométricas en el plano, más específicamente sobre la noción de simetría, utilizando el AGD Cabrí II plus, como componente del medio. Se tendrá en consideración la propuesta planteada en los lineamientos curriculares, los estándares básicos de matemáticas, y algunos referentes de la TSD y la OI.

Para la organización y la ejecución de este trabajo de grado se han concretado cuatro fases, organizadas de la siguiente manera: Fundamentación didáctica y curricular, Selección y adecuación de la secuencia didáctica, Desarrollo curricular en el aula, Análisis y evaluación.

CONSIDERACIONES FINALES

Finalmente, la búsqueda del mejoramiento de las prácticas educativas es un objetivo fundamental en el proceso de cualificación docente; en este sentido la sistematización de las mismas es un potencial para generar en los profesores una reflexión continua y permanente, entendida la sistematización de las experiencias como el proceso que se quiere incorporar a nuestras prácticas pedagógicas, dotando las mismas de aspectos teóricos y metodológicos que fundamenten su carácter profesional. Se debe tener en cuenta que los propósitos educativos son los que delimitan y proyectan el sentido que se le quiere dar al proceso de sistematización, pensando la misma desde una dimensión más práctica que teórica. En este sentido consideramos la pertinencia de este trabajo en la contribución a las prácticas educativas, en la medida que proporciona reflexiones en torno al desarrollo del pensamiento espacial en la Educación Media.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1997). *Teoría de las situaciones didácticas: Didáctica de las matemáticas 1970-1990*. Dordrecht: KluwerAcademicPublishers.

Garzón, D. (2005). Hacia una perspectiva de las redes de aprendizaje desde la didáctica de las matemáticas. En: *Memorias Primer Seminario Internacional de Tecnologías En Educación Matemática*. Primera edición (pp. 285 -299). Bogotá: MEN

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometrytaskswith Cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 283–317.

Ministerio de Educación Nacional (1999). Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas. *Serie Lineamientos Curriculares*.

Rabardel, P. (1995) *Les hommes et les technologies. Uneapproche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Collins.

Rabardel, P. & Samurçay, R. (2001) *From Artifact to instrument mediated learning*. Helsinki: University of Helsinki.

Yaglom, I. (1962) *Geometric transformations. Translated from the Russian by Allen Shields*. University of Michigan. New York: RandomHouse

Formación en valores en el aula de matemáticas

Rubén Morales Camargo[*]
Sindy Paola Joya Cruz[**]
Oscar Suancha Velandia[***]

RESUMEN

La escuela es un espacio en continua transformación, donde se promueve y fomenta un conjunto de valores, creencias y conductas, orientadas a la transformación y mejoramiento de las condiciones de vida de los integrantes de la sociedad. En ella, los individuos participan desde su forma particular de observar el mundo, mas, limitados por un conjunto de normas que en ocasiones contribuyen al mejoramiento de las relaciones sociales entre ellos. Por tal motivo, el presente artículo se encamina a la descripción de un aula en donde se enseña matemática, analizada desde interacciones que en ella tienen lugar, y desde las cuales se esperaba observar la emergencia de valores como el respeto, la tolerancia y la solidaridad.

Palabras clave as socio matemáticas; relación de la educación matemática con otras áreas; resolución de problemas; análisis y reflexión sobre la enseñanza; relaciones interpersonales.

[*] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: femcmath@gmail.com.
[**] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: sindy.joya@gmail.com
[***] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: osfersuve@yahoo.com

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Este artículo es un elemento emergente de una investigación en la cual se buscó caracterizar la forma como se hace explícita e implícita la formación en el respeto, la tolerancia y la solidaridad, en un espacio orientado principalmente a la enseñanza de las matemáticas. Dicha investigación fue de tipo cualitativo, enmarcada en la metodología de observación no participante, y se dirigió a la búsqueda y establecimiento de algunas relaciones entre la formación en valores y matemáticas; también a reflexionar sobre las interacciones que tienen lugar en el aula, vistas desde la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1986) y el interaccionismo simbólico en la educación matemática (Godino & Llinares, 2000), con el fin de ampliar la comprensión que se tiene sobre la promoción de valores en el aula de matemáticas. La pregunta que orienta el problema de investigación es: ¿De qué forma se promueven valores en las clases de matemáticas?, pregunta que surge como orientación de una investigación, que se origina tras la revisión teórica de las propuestas del MEN, en particular de las referentes al papel de las matemáticas en la consolidación de valores democráticos (MEN, 2003). Se indica, sin embargo, que esta pregunta es muy amplia, dado que el universo de los valores es, a su vez, muy extenso, así como las concepciones que se tienen de ellos.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

El análisis de la relación entre la formación en valores y la educación matemática ha sido abordado por diferentes autores, tales como Sigarreta y Torres (2003), y Bishop (1999), quienes consideran que los valores no son condiciones periféricas a la formación en matemáticas, sino que, por el contrario, son cualidades susceptibles de ser promovidas por la matemática como asignatura escolar, que pueden contribuir a mejorar las condiciones de vida de los sujetos y las interacciones entre ellos.

Una de las aproximaciones teóricas que a nuestro juicio plantea una ruta metodológica para analizar las relaciones existentes entre la formación en valores y la educación matemática corresponde al trabajo de Sigarreta y Torres (2003), quienes establecen que para poder hacerlo es necesario desarrollar los siguientes 5 pasos:

- Selección de los valores a trabajar.
- Realizar un estudio de sus indicadores.
- Buscar aquellos indicadores que son comunes a los valores estudiados.

- Elaborar, a partir de las definiciones de los indicadores, las características de los problemas para incidir en un determinado componente del valor.
- Proponer actividades que complementen el desarrollo de los indicadores que no fueron abordados mediante los problemas propuestos (Sigarreta & Torres, 2003, p. 214).

Cabe señalar, además, que para poder visualizar la forma como se promueven valores en el aula de matemáticas es importante delimitar las interacciones entre profesor y estudiante, las cuales son mediadas por un conjunto de normas no explícitas, que pueden ser: *normas sociales* que regulan el funcionamiento de las actividades docentes y discentes, y *normas sociomatemáticas*, dirigidas más a explicitar la forma como son los argumentos e intervenciones del profesor o los estudiantes, en las interacciones que se dan en el aula de matemáticas. Este aspecto se aborda desde las propuestas de Brousseau (1986) y Godino & Llinares (2000), en tanto que la enseñanza de las matemáticas es un proceso de producción de conocimientos en un ambiente escolar, en el cual, además de transformar, promover, establecer y reorganizar un conjunto de conocimientos, se dan interacciones que conllevan a la promoción de valores.

METODOLOGÍA

La investigación desarrollada es de tipo cualitativo, corresponde a un estudio de caso, orientado a la búsqueda y establecimiento de relaciones entre la formación en valores y la formación en matemáticas. Su realización se enfoca principalmente a la forma como se promueven la solidaridad, el respeto y la tolerancia en una clase de matemática. Los datos tomados corresponden a registros escritos, obtenidos bajo la estrategia de observación no participante, en clases de matemáticas gestionadas por un estudiante para profesor de matemáticas, y otras de un profesor titulado, con varios años de experiencia.

La revisión de los datos y el establecimiento de relaciones entre lo observado y la teoría usada en la investigación se realizó usando la siguiente ruta de análisis.

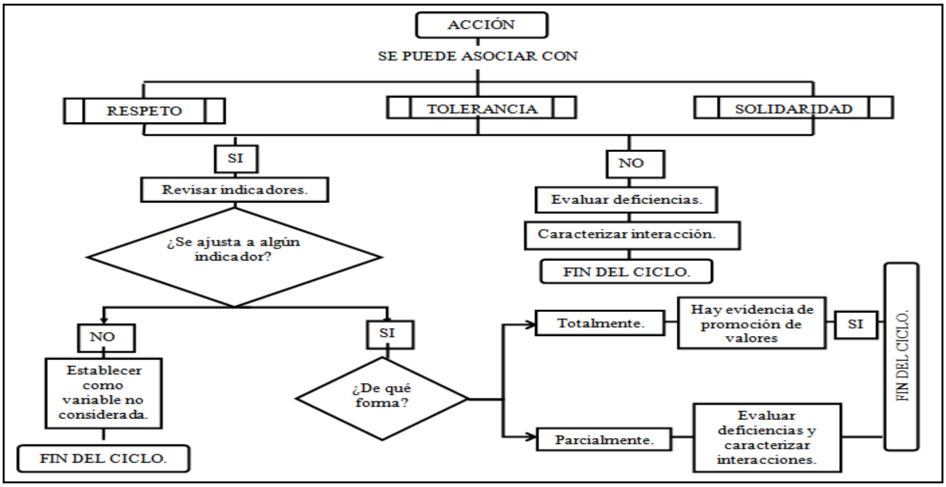


Grafico 1. Ruta de análisis

Se denominó acción al conjunto de hechos que tenían lugar en el aula, en los cuales, de forma directa o indirecta, se daba la interacción entre estudiante-profesor, estudiante-medio y las demás interacciones propuestas por Brousseau (1986); entre los hechos registrados se encuentran riñas entre estudiantes, conversaciones grupales, interacciones entre estudiantes y el profesor. Algunos de los indicadores establecidos para el análisis de cada valor fueron:

Tabla 1. Indicadores de valores estudiados.

Valor	*Indicadores*
Solidaridad	• Propicia reflexiones respecto al trabajo a realizar, que contribuyen al desarrollo de las actividades propuestas por el profesor. • Participa activamente y coopera en la proposición de estrategias para la resolución de las situaciones problema. • Comprende las situaciones problema presentadas y contribuye a la comprensión de sus compañeros. • Colabora con el orden del salón y favorece el desarrollo de la clase. • Interpreta adecuadamente las situaciones emergentes de la dinámica del aula.

Valor	*Indicadores*
Respeto	• Acepta a sus compañeros dentro del aula y los reconoce como iguales, es decir, como ser autónomo, con cualidades, defectos, experiencias, posibilidades, conocimientos, dificultades, etc. • Las formas de hablar usadas para referirse al profesor y a los estudiantes se dan en un tono respetuoso y acertado. • Acepta las intervenciones de los demás miembros de la clase, aunque estas impliquen cambiar las opiniones propias. • Privilegia los espacios comunicativos en donde las intervenciones de los miembros de la clase se dan en condiciones de igualdad. • Se comunica de manera correcta, usando el lenguaje específico del área y permitiendo interlocuciones de otros.
Tolerancia	• Acepta las intervenciones de los demás miembros de la clase, aun cuando ellas sean expresadas de una forma que no se corresponda con la propia. • Los espacios para interlocución entre sujetos (individuales o colectivos), pese a estar delimitados, no evidencian rasgos de coerción ni imposición de argumentos. • Las relaciones entre estudiante-profesor y estudiante son equitativas, respecto al acceso a los beneficios, actividades, servicios y oportunidades. • Se presenta igualdad de oportunidades para la participación de los individuos o grupos independientemente de los rasgos particulares de cada uno. • El grupo de estudiantes junto con el profesor cooperan de forma respetuosa, en busca de soluciones a problemas y controversias que les atañen, en aras de conseguir beneficios y el logro de metas comunes.

ANÁLISIS DE DATOS

Se encontró evidencia de que en las clases observadas se promueven de forma implícita los valores mencionados. Muchos de los indicadores que se tuvieron en cuenta se corresponden con alguno de los hechos estudiados y, como si fuera poco, las comprensiones de estudiantes para profesor respecto a la necesidad de promoverlos desde la enseñanza de las matemáticas son amplias y aportan de forma positiva a este aspecto.

Se encontraron, además, elementos que permiten establecer que en las interacciones entre profesor, estudiante y medio, *las normas matemáticas y sociomatemáticas* delimitan aspectos que permiten visualizar la importancia de la comunicación en los procesos formativos en matemáticas y valores; esto teniendo en cuenta que dichas normas no son explícitas y, por consiguiente, su ruptura y la del contrato didáctico pueden darse de manera recurrente.

Adicionalmente y considerando lo afirmado por Godino & Llinares (2000, p. 84) es necesario señalar que al ser el maestro quien puede estratificar las producciones de los estudiantes, tiene la facultad de orientar lo que sucede en el aula, y por tanto, las sugerencias, preguntas y orientaciones hechas por él al estudiante no solo están referidas al asunto matemático que se está tratando, sino que, por el contrario, pueden expresarle intenciones y orientaciones, que por tener carácter implícito, deben provocar la necesidad de descifrar lo que quiso decir el docente y de actuar para responder a las condiciones impuestas por el medio.

CONCLUSIONES

Consideramos, entonces, que la formación en valores es necesaria y que la formación del profesorado y de los estudiantes está permeada por diversas experiencias particulares que siempre están presentes en sus interacciones con otros. De acuerdo con esto, afirmamos que pese a que la matemática es un elemento cultural que promueve valores, el diseño e implementación de un proyecto en el que se haga de forma explícita la formación y promoción de valores desde el área escolar de matemáticas, deben estar planeados y ejecutados partiendo del hecho de la multiculturalidad presente en el aula, y fundados en una perspectiva filosófica y axiológica que le permita al docente dirigir de manera efectiva las situaciones en el aula.

Adicionalmente, dicho proyecto debe vincular el contexto familiar del estudiante, valorar sus formas de proceder y pensar matemáticamente, posibilitar interlocuciones entre diferentes formas de ver, pensar, justificar y demostrar, y por consiguiente, considerar la parte emocional de los estudiantes y el nivel de desarrollo moral de los mismos, y como si fuera poco estar en continuo cambio, respondiendo a las diferentes necesidades cognitivas que se presentan en el aula.

Finalmente, creemos que la pregunta inicial sigue abierta, las respuestas pueden ser amplias y divergentes; lograr este objetivo seguramente no es fácil; hacernos conscientes del conjunto de valores que promovemos en el aula seguramente tampoco lo es. No obstante, estamos seguros de que es posible desarrollar propuestas encaminadas en este sentido.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bishop, A. (1999). Mathematics teaching and values education: An intersection in need of research. En Clarkson P., Presmeg N (Comps.), Critical Issues in Mathematics Education (pp. 231 – 238). USA: Springer.

Bishop, A. (1999). *Values in Mathematics Education: Making Values Teaching Explicit in the Mathematics Classroom*. Faculty of Education, Monash University. Melbourne, Australia.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, *Serie B, Trabajos de Matemática*, N.° 19. (Versión castellana, 1993).

Godino, J. & Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática,* 12 (1), 70-92.

Sigarreta, J. & Torres, J. (2003). Utilización de los problemas matemáticos en la formación en valores. *Revista EMA*. Vol. 8, N.º 2, pp. 208-225.

Un acercamiento a las necesidades de formación en investigación de dos profesores de matemáticas en ejercicio en Bogotá

Ximena Moreno Ojeda[*]
Deysi Ivonne Latorre[**]

RESUMEN

El presente artículo tiene como propósito dar a conocer avances sobre la identificación de necesidades de formación en investigación de dos docentes de matemáticas en ejercicio, en Bogotá. Dicho avance dará cuenta de lo que se está entendiendo por necesidad, y la clasificación propuesta para la misma, además se dan a conocer las características que deben tener los profesores que investigan sobre su propia práctica; finalmente se dan a conocer los principales resultados obtenidos a partir del análisis de los instrumentos de investigación utilizados. Ahora bien, para la identificación de las necesidades mencionadas, se realizaron dos estudios de caso, donde se tomaron en cuenta las características de un profesor investigador, para comparar el quehacer del docente con su deber ser.

Palabras clave: Necesidades de formación en investigación, estudios de caso, entrevistas, observaciones.

[*] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: ximenamorenoojeda@hotmail.com

[**] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: d.ivonne025@hotmail.com

PROBLEMÁTICA SOBRE LA NECESIDAD DE INVESTIGAR

La intervención del docente de matemáticas en el aula ha sido considerada por la comunidad educativa de matemáticas uno de los factores más importantes en la formación académica de los estudiantes debido a que el docente es un ente representativo en el ámbito social, y por tanto es considerado como un buscador y generador de ideas que en muchas ocasiones resuelven necesidades y dificultades que impiden el bienestar del estudiante; por tanto, consideramos que el docente en el sistema educativo es calificado como un generador de cambios, que debe proponer compromisos y retos para sus estudiantes, con el fin de promover tanto la construcción de conocimientos, como las habilidades y los valores que se consideran necesarios para la práctica diaria de los mismos, tal como lo señala Paulo Freire (2006),

El papel fundamental del profesor es, al enseñar, posibilitar que el alumno asimile el significado más profundo de aquello que él está enseñando. Sólo así, el alumno podrá realmente conocer lo que, en este caso, significa reconocer aquello que ya es conocido por el profesor *(*p. 273).

Por lo anterior, consideramos indispensable indagar por qué hay que investigar en la práctica docente. Frente a ello, Latorre (2003, p.7), menciona que "La imagen del profesorado investigador se considera como una herramienta de transformación de las practicas educativas", es decir el profesor, es el primer encargado de realizar cambios relevantes en la educación, comenzando por su propia práctica y reflexión sobre la misma.

Pero ¿qué necesita un docente para investigar?, será tiempo, interés… o ¿qué necesita para formarse como investigador?, será ¿innovar sobre su metodología de manera que contribuya con su labor en el aula?; al respecto Messina, (1999) afirma que "el «problema» de la formación docente en América Latina, persiste en una cultura escolar donde se sigue buscando la transmisión y no la construcción de conocimientos".

Por otra parte, es indiscutible que si a un profesor de matemáticas no le interesa o no considera necesario hacer uso de la investigación, es imposible que la lleve a cabo, al respecto Kemmis (s. f., citado por Duhalde (1999), menciona:

> Muchos investigadores, siguen estudiando la práctica desde "el exterior", convencidos, de que sus instituciones, adquiridas en la batalla intelectual, en los seminarios de posgraduados, o en conferencias internacionales, producirán cambios en la práctica educativa de los profesores que no asisten a tales encuentros (p. 99).

Entonces, entendiendo la importancia de investigar, y el interés de los docentes por realizarla, es pertinente decir que para llegar a una buena práctica pedagógica, hay que estar en permanente investigación; así, el docente podrá examinar críticamente su práctica, creando y recreando el conocimiento, siendo este un paso gigante para el desarrollo de la sociedad; por lo tanto, vale preguntarse: ¿qué es lo que le hace falta al docente de matemáticas para investigar sobre su práctica educativa?

UNA MIRADA TEÓRICA AL PROFESOR INVESTIGADOR

Para la conceptualización teórica de las necesidades y el perfil del profesor investigador, en el marco del proyecto de investigación: "Formación en y hacia la investigación para profesores de matemáticas en ejercicio" del grupo Crisálida de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas del cual hacemos parte como pasantes de investigación, se propone realizar una revisión exhaustiva de literatura sobre el tema; a partir de ello, se llega al acuerdo de entender necesidad como: *la **diferencia** entre un estado actual y un estado deseado o de deber ser, o aquello que permite el **tránsito** a un estado deseado o de deber ser* (Sánchez. B, Torres, J. & Fonseca, J 2012, p. 5). Vale la pena aclarar, que el estado deseado es definido por el docente, mientras que el deber ser será establecido a partir de un ideal de profesor investigador y, por tanto, se identificaron necesidades con base en una caracterización del profesor investigador, de donde salieron cuatro grandes características: la crítica, la estrategia, la interacción y la problematización, relacionadas con las acciones, actitudes, y conocimientos del profesor.

Por otra parte, se asume la clasificación de necesidades de Bradshaw (citado en Zabala, A 2000), que indica cuatro tipos de necesidades que se han considerado como el eje de la presente investigación:

1. Sentidas: Son las que son percibidas de sí mismo, pues se es consciente de lo que hace falta.
2. Percibidas: las distinguen y expresan los miembros de la comunidad.
3. Normativas: identificadas por expertos, que hacen uso de su experiencia profesional para emitir juicios de valor.
4. Comparadas: Son aquellas establecidas por el observador que compara situaciones o comunidades con características similares, con la situación que considera ideal.

Pues bien, en el caso particular, se relaciona la identificación de dichas necesidades, respecto a cuatro entes: el profesor, quien manifiesta las necesidades sentidas; los pares y el jefe inmediato, las necesidades percibidas, y el experto, las normativas. Quienes a partir de la consolidación de la caracterización propia del perfil del profesor investigador identifican y manifiestan las características que a su parecer hacen falta en la práctica del docente investigado.

METODOLOGÍA

Se llevó a cabo la metodología cualitativa, puesto que a partir de ella se puede describir minuciosamente la información, es decir, presentar detalladamente el contenido y el significado de los sucesos. De esta manera, Taylor y Bogdan (1987) mencionan que la investigación cualitativa proporciona una descripción íntima de la vida social, en nuestro caso, una descripción de la práctica educativa de los dos docentes a estudiar por medio de la observación de la misma y de diversas entrevistas semiestructuradas.

Siguiendo con este orden de ideas, se tomó el estudio de caso como método de la investigación cualitativa asumida, dado que es una estrategia que posibilita registrar las conductas que presenta la población a investigar de acuerdo con un fenómeno estudiado; a su vez, el estudio de caso puede ser: descriptivo, si lo que se desea es identificar y describir diferentes factores que determinan algún tipo de influencia sobre el fenómeno estudiado, o exploratorio en el caso en el que se pretenda relacionar el aporte teórico que corresponde al objeto de estudio con la realidad. Es decir, que en relación con nuestra investigación, el estudio de caso es pertinente, dado que facilita la descripción y el análisis profundo de los diversos componentes de la práctica pedagógica.

En primera instancia, se consolidó una base de datos[1] de docentes de matemáticas en ejercicio, teniendo en cuenta los siguientes factores: primero que el docente estuviera interesado en colaborar con el proyecto de investigación; segundo, que tuviera disposición de tiempo para la investigación, y por último, que presentara experiencias significativas de su práctica educativa. Se tomaron únicamente dos docentes para llevar a cabo el estudio de caso de esta investigación.

1 El reporte detallado de la escogencia de docentes interesados en su práctica se puede encontrar en "Reflexión sobre la propia práctica en una muestra por conveniencia en Bogotá".

A partir de ello, se han examinado hasta el momento algunas de las necesidades que manifiestan dichos profesores relacionadas con la formación en investigación, a través de diferentes instrumentos de investigación, entre ellos: observaciones de tipo no participante-semiestructurada de su práctica pedagógica, y entrevistas semiestructuradas referidas a temas como: reflexión, metodologías de clase, vocación, currículo, política educativa, entre otras.

Una vez finalizada la observación de las prácticas de los docentes, se está procediendo al análisis de los resultados obtenidos, comparando sus actividades diarias y el perfil del profesor investigador.

PRIMEROS RESULTADOS

Teniendo en cuenta las características asociadas al perfil del profesor investigador, y el estudio de caso a los profesores de matemáticas en ejercicio de Educación Secundaria, se ha logrado determinar hasta el momento que:

En el marco de las necesidades sentidas propuestas por Bradshaw, los profesores expresan que, para que un profesor pueda investigar debe tener la vocación, puesto que partir de ello establecerá ideas que lo lleven a desarrollar un proceso investigativo, con el cual realizan mejoras al sistema educativo actual. Otra necesidad se enmarca en la conciencia que el profesor debe tener sobre la reflexión, puesto que si no logra desarrollar esta habilidad, difícilmente quiera hacer cambios en su práctica docente y, por ende, en la educación.

También se determinó que la influencia del currículo y las políticas educativas en la formación del profesor como investigador es un causante para que los docentes no puedan investigar, dado que tanto los pares como el docente manifiestan que el currículo solo busca la trasmisión desenfrenada de conocimientos a los estudiantes, lo que dificulta el desarrollo de procesos de investigación en el aula, enmarcados en la comprensión de conocimientos; por otro lado, se establecen necesidades que, aunque no son de formación en investigación, sí son importantes para llevar a cabo el proceso investigativo; dentro de ellas se encuentra la necesidad de un espacio de investigación en las instituciones educativas, dado que si no abre el espacio, difícilmente los profesores quieran realizar investigación en el aula, principalmente por dos factores: primero la falta de tiempo para dedicar a una investigación y segundo la escasez de recursos económicos, necesarios para la misma.

CONCLUSIONES

Respecto a las características del profesor investigador (crítica, estrategia, interacción y problematización), se logró identificar, la necesidad de reflexionar sobre la misma, tanto en el aula como fuera de ella, asimismo, la actitud abierta frente a las transformaciones del ámbito educativo; también se encuentra la búsqueda de metodologías o métodos, que permitan llevar a cabo un mejor proceso de enseñanza-aprendizaje. Por otra parte, y aunque no estén inmersa dentro del perfil del profesor investigador, se hace evidente la necesidad de adquirir un buen ingreso económico y un verdadero sentido de vocación para investigar.

De acuerdo con lo anterior, es posible identificar la pertinencia del método de estudio de caso como estrategia de investigación, dado que el mismo facilita la descripción y el análisis profundo de los diversos componentes de la práctica pedagógica de los docentes. A su vez, es fundamental, considerar la categorización de necesidades por parte de Bradshaw, dado que estableció una pauta fundamental en la búsqueda de necesidades a partir de la concepción de diferentes miembros de la comunidad educativa.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Duhalde, M. A. (1999). *La investigación en la escuela*. Buenos Aires: Novedades educativas.

Freire, P. (2006) Pedagogía de la autonomía México: Paz e terra.

Latorre, A. (2003). *Investigación acción: conocer y cambiar la práctica educativa*. España: Grao.

Messina, G. (1999). Formación docente. *Revista Iberoamericana de Educación*. Número 19. Recuperado el 1 de octubre de http://www.oei.es/oeivirt/rie19a04.htm

Sánchez, B, Torres, J & Fonseca J (2012). Reporte de investigación. *No publicado.* Taylor, S. J., Bogdan. R. (1987). Introducción a los métodos cualitativos de la investigación. Barcelona: Paídos Ibérica.

Valero, M. (S. F) *Investigación y formación docente*. Colegio Universitario de los Teques "Cecilio Acosta".

Zabalza, A. (2000) *Diseño y desarrollo curricular*. Madrid: Narcea S. A.

Análisis de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS 2009 y 2010

Cindy Nathalia Morgado Hernández[*]
María de Pilar Neusa Vargas[**]
Gabriel Yáñez Canal[***]

RESUMEN

En este trabajo se presenta un análisis de las respuestas de los estudiantes que participaron en las Olimpíadas Regionales de Matemáticas en la Universidad Industrial de Santander para los años 2009 y 2010. Un análisis estadístico arrojó que existía un comportamiento semejante en los resultados en los dos años, en cada una de las fases y en cada una de las sedes. El análisis, utilizando el modelo Rasch, mostró la alta dificultad de algunos ítems respecto a la habilidad matemática de los estudiantes participantes. Básicamente la dificultad de los ítems estriba en la interpretación de la información suministrada por el problema.

[*] Universidad Industrial de Santander. Dirección electrónica: cinathalia@gmail.com
[**] Instituto Santa Teresita. Dirección electrónica: pili8819@gmail.com
[***] Universidad Industrial de Santander. Dirección electrónica: gyanez@uis.edu.co

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Las Olimpiadas UIS se desarrollan en 3 niveles: Básico (grados sexto y séptimo), Medio (grados octavo y noveno) y Avanzado (grados décimo y once), en las siguientes 4 fases:

Preparatoria. Esta fase la realiza cada estudiante que desee participar en las Olimpiadas. Para esta fase, el proyecto ofrece talleres de preparación previos a la fase de clasificación.

Clasificatoria: En esta fase participan los estudiantes de secundaria inscritos, quienes presentan la prueba en su institución educativa según el grado de escolaridad. La prueba consta de 12 problemas de selección múltiple con única respuesta.

Selectiva: En esta fase participan el 10% de los estudiantes inscritos que corresponden a los mejores puntajes de la prueba de clasificación, quienes presentan la prueba en la sede regional correspondiente según el grado de escolaridad. La prueba consta de 9 problemas: 6 de selección múltiple con única respuesta y 3 tipo ensayo, es decir, justificando las respuestas.

Final: En esta fase solo clasifican los estudiantes que obtuvieron los 20 mejores puntajes. En caso de empate se da prioridad a quien responda el mayor número de preguntas tipo ensayo. La prueba consta de 6 problemas tipo ensayo.

Los participantes de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS son estudiantes de secundaria de colegios públicos y privados. La sede de Bucaramanga cobija los estudiantes de los municipios de Bucaramanga, Girón, Floridablanca, Piedecuesta y Lebrija; los estudiantes del resto del departamento cuentan con las sedes de Barbosa, Málaga, Barrancabermeja y Socorro, para las fases preparatoria y selectiva; la fase clasificatoria se realiza en cada colegio y la fase final se lleva a cabo en la sede central en Bucaramanga.

Los resultados de la aplicación de pruebas masivas en el desarrollo de una Olimpiada matemática proporcionan una gran cantidad de información que se presta para ser analizada. En el grupo de Olimpiadas Matemáticas UIS surgió la necesidad de identificar las dificultades de los estudiantes por áreas en cada uno de los niveles y sedes, con el fin de fortalecer las áreas que presenten mayor dificultad, por lo cual se realizó una investigación para dar respuesta a las siguientes preguntas:

¿Cómo se podrían caracterizar las habilidades matemáticas de los estudiantes que se presentan a las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS?

¿Existen diferencias entre las habilidades matemáticas de los estudiantes por sede, nivel y área?

¿Existen diferencias en la dificultad de los ítems por sede, nivel y área?

En este trabajo presentamos algunas respuestas para la fase clasificatoria del nivel medio para el total de los estudiantes sin diferenciación de sedes en los años 2009 y 2010. Mayores detalles de los análisis realizados en las demás fases se pueden consultar en Neusa y Morgado (2011).

MARCO DE REFERENCIA

El modelo Rasch, que utilizamos en nuestra investigación, fue propuesto por el matemático danés con el mismo nombre en 1960. Este modelo, que hoy se utiliza ampliamente en áreas como educación, psicología y más recientemente en medicina, por solo citar algunas, se caracteriza por la siguiente expresión:

$$\boxed{P_{ni} = \frac{e^{\theta_n - \beta_i}}{1 + e^{\theta_n - \beta_i}}}$$

Que expresa la probabilidad de que un individuo n responda acertadamente el ítem i en función de la diferencia entre la habilidad del individuo y la dificultad del ítem. 1. El atributo que se desea medir puede representarse en una única dimensión donde se sitúan conjuntamente ítems y personas. Bajo el modelo Rasch los niveles de habilidad de las personas y dificultad de los ítems (θ_n, β_i), se ubican en la misma escala y presentan las mismas unidades. La unidad de esta escala es el lógito que no es otra cosa que el logaritmo natural de la relación entre la probabilidad de acierto y la de error (proporción entre la probabilidad de errores y la de aciertos para un ítem dado o entre la probabilidad de acierto y la de error para una persona dada). Con las respuestas dadas se estiman los parámetros (θ_n, β_i), y los errores típicos para cada estimación (Hambleton, Swaminathan y Rogers, 1991).

METODOLOGÍA

Como metodología de análisis de los resultados de la pruebas, además de un análisis descriptivo y de pruebas ANOVA, se utilizó el modelo Rasch que permite cuantificar la habilidad de los estudiantes y la dificultad de los ítems y la comparación entre estos valores. Los datos que se utilizaron para modelar son los obtenidos en las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS de los años 2009 y 2010. Para el análisis de los datos a través del modelo Rasch se utilizó el paquete Winsteps.

En la fase clasificatoria del año 2009 la prueba constaba de 4 problemas de geometría (G), 1 de teoría de números (TN), 2 de combinatoria(C), 2 de álgebra y 3 de lógica (L); para esta misma fase del año 2010 la prueba presentaba 4 problemas de geometría, 4 de teoría de números, 3 de álgebra y 1 de lógica. El análisis de la información de los años 2009 y 2010 por sedes, niveles y áreas se realizó en tres etapas:

1. Los resultados de los 12 ítems correspondientes a la etapa clasificatoria.
2. Luego se juntaron los resultados de las etapas clasificatoria y selectiva para tener un total de 21 ítems.
3. Después se tomaron conjuntamente los resultados de las fases clasificatoria, selectiva y final para tener un total de 27 ítems.

ANÁLISIS DE DATOS

En los diagramas de barras de las figuras 1 y 2 se presentan los porcentajes de buenas respuestas de los 12 ítems de la fase clasificatoria para el nivel medio en los años 2009 y 2010. Los gráficos permiten darse cuenta que 9 de los 12 ítems, con menos del 30% de aciertos, se pueden considerar difíciles para los estudiantes. En particular los ítems G6 (Geometría) en 2009, el G4 (Geometría) y A1 (Álgebra) en 2010 con tasas de respuesta inferiores al 10% se pueden catalogar de demasiados difíciles. Más adelante se ampliará el análisis de dichos ítems.

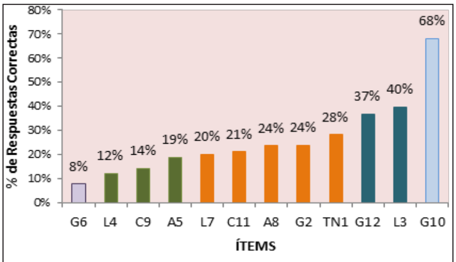


Figura 1. Tasa de aciertos de los ítems en la prueba clasificatoria del nivel medio, 2009

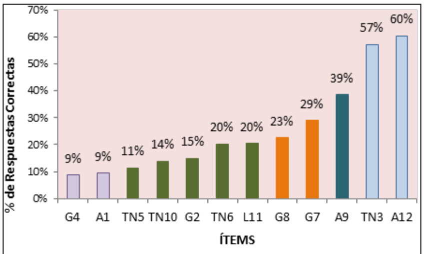


Figura 2. Tasa de aciertos de los ítems en la prueba clasificatoria del nivel medio, 2010

A continuación cada uno de los mapas presenta la interacción entre la habilidad de las personas y la dificultad de los ítems. A la izquierda de la línea punteada se muestra la distribución de los estudiantes y su media M.

En la parte derecha se encuentra la distribución de la dificultad de los ítems con media estándar 0, como es lo establecido en WINSTEPS.

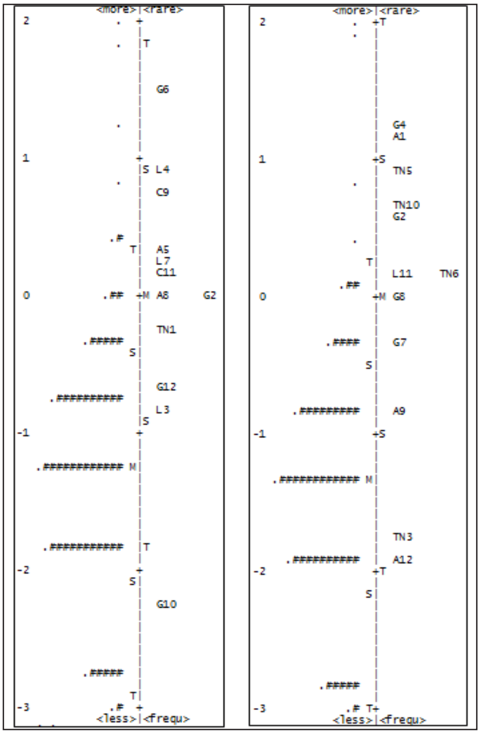


Figura 3. Mapas de ítems de la prueba clasificatoria para el nivel medio 2009 (izquierda) y 2010 (derecha).

En la figura 3 la media de la dificultad de los ítems se encuentra cercana a la media de la habilidad de los estudiantes estando los ítems más dispersos que los estudiantes. La mayoría de los ítems se encuentran concentrados en la parte superior, a excepción del ítem G10 en el 2009 y los ítems A12 y TN13 en el 2010 que se encuentran muy debajo de la media resaltando su facilidad. El ítem G10 es un problema de geometría donde se debía manejar el concepto de volumen y conocer las características de un cubo; además, se debía plantear y resolver una ecuación con una sola incógnita.

Del año 2009 los ítems de mayor dificultad fueron: el ítem G6 que correspondía al siguiente problema de geometría:

6. Los lados paralelos de un trapecio miden 3 cm y 9 cm; los lados no paralelos miden 4 cm y 6 cm . Una recta paralela a la base divide el trapecio en dos trapecios de igual perímetro; la razón en que quedan divididos los lados no paralelos es:
(a) 4 : 3 (b) 3 : 2 (c) 4 : 1 (d) 3 : 1 (e) 6 : 1

En este problema se requería conocer las características básicas de un trapecio y establecer razones entre las longitudes de sus lados, además de plantear un sistema de ecuaciones.

Del año 2010 los ítems de mayor dificultad fueron: el ítem G4 correspondía al siguiente problema de geometría:

4. Sea R un rectángulo. ¿Cuántos círculos que están en el mismo plano que R tienen un diámetro cuyos dos extremos son vértices de R?
(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 5 (e) 6.

En este problema se requería conocer el concepto de plano, vértice, diámetro de un círculo y realizar la respectiva representación gráfica. La dificultad seguramente no fue por desconocimiento de los conceptos implicados sino al momento de representar la situación.

El ítem A1 correspondía al siguiente problema de álgebra:

1. Si $[a, b, c]$ representa la operación $\frac{a+b}{c}$, donde $c \neq 0$, ¿Cuál es el valor de $[[60, 30, 90], [2, 1, 3], [10, 5, 15]]$?
(a) 0 (b) 0,5 (c) 1 (d) 1,5 (e) 2

En este problema se requería remplazar los valores dados, en la expresión algebraica y realizar los cálculos respectivos. La dificultad estribó en que cada terna interna es un número.

CONCLUSIONES

El nivel de dificultad de los ítems en la prueba clasificatoria resultó, como se esperaba, de un nivel alto de dificultad en los dos años considerados. Comparando la distribución de los ítems de los dos años se observa que en el año 2010 se presentaron más ítems por debajo de la habilidad de los estudiantes, lo que indica que la dificultad de los problemas planteados fue mayor que la de los problemas del año 2009.

Los problemas de mayor dificultad se asociaron con la geometría (características de un trapecio, planteamiento de razones entre las longitudes de los lados de la figura), teoría de números (factorial de un número y los múltiplos del número), álgebra (aplicar un producto notable e interpretación de las raíces de un polinomio de segundo grado) y probabilidad (regla del producto en probabilidad). En la fase clasificatoria el nivel de dificultad de los problemas fue el mismo para todas las sedes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Hambleton R.K., Swaminathan H. & Rogers J. H., (1991). MMSS *Fundamentals of item Response Theory*. SAGE Publications, Inc.

Neusa, P. & Morgado, N., (2011). Análisis de las olimpiadas regionales de matemáticas UIS implementando el modelo Rasch para los años 2009 y 2010. Tesis de Licenciatura en Matemáticas no publicada, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Una caracterización del tratamiento y asimilación de contenidos en los cursos de Álgebra Superior

Luisa Nataly Mukul Doblado[*]
Martha Imelda Jarero Kumul[**]

RESUMEN

Las Instituciones de Educación Superior, en México, reportan bajos índices de Eficiencia Terminal, hecho relacionado con la reprobación, como es el caso de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, donde se presentan altos porcentajes de reprobación en la asignatura de Álgebra. Desarrollamos un estudio cualitativo empleando la etnografía, para caracterizar el tratamiento de los contenidos, otorgado por el profesor, y el nivel de asimilación de estos, por parte de los estudiantes. Identificamos las principales representaciones semióticas empleadas por el profesor, donde concluimos que el tratamiento otorgado a los contenidos es preferentemente algebraico y conjuntista. Además, la práctica de evaluación limita a los estudiantes a reproducir los conceptos enseñados.

Palabras clave. Álgebra, tratamiento y asimilación de contenidos.

[*] Universidad Sergio Arboleda. Dirección electrónica:luisa_mukul@hotmail.com,
[**] Universidad Autónoma de Yucatán. Dirección electrónica: jarerok@uady.mx

REPORTES SOBRE LA REPROBACIÓN EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Uno de los problemas que enfrentan las Instituciones de Educación Superior en México es el bajo índice de Eficiencia Terminal, situación que se asocia a la deserción, el rezago y la reprobación estudiantil. La Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán en México ha enfrentado problemas de reprobación y rezago escolar, cerca de los últimos 20 años, principalmente en los primeros semestres de estudio, en cursos de Cálculo y Álgebra (Aparicio, 2006). Las estadísticas del año 2007, realizadas por el Departamento de Control Escolar de la misma dependencia, reportan el 63% de reprobación en el curso de Álgebra Superior I (ASI) curso que resulta ser el de mayor índice de reprobación. Ante este hecho, nos cuestionamos sobre sus posibles causas y nos planteamos la siguiente pregunta: *¿cómo se promueve el desarrollo de las habilidades cognitivas requeridas por el curso de ASI?* Nos interesó c*aracterizar el tratamiento otorgado a los contenidos que se estudian en el curso de ASI y el nivel de asimilación alcanzado por los estudiantes en el mismo.*

Investigaciones como las de Melchor y Melchor (2002), Aparicio, Jarero y Ávila (2007), entre otras, reportan que la mayoría de los profesores universitarios utilizan la prueba escrita como único instrumento de evaluación y calificación. Dochy, Segers y Dierick (2002) mencionan que estas pruebas no reflejan adecuadamente la capacidad de resolución de problemas, el pensamiento crítico y el razonamiento. Y la educación matemática no puede ser planteada en una formación basada en la de memorización de hechos, el desarrollo de cálculos y la repetición, lo cual debilita las habilidades en el razonamiento matemático, y resulta ser un obstáculo para que los estudiantes puedan comprender el valor y la utilidad de las matemáticas en su vida (Ruiz, Alfaro & Gamboa, 2007).

MARCO CONCEPTUAL

La construcción de los conceptos matemáticos inevitablemente depende de la capacidad de usar más registros de representaciones semióticas de esos conceptos. Los contenidos que incluye la unidad 2 del curso de ASI pueden ser tratados bajo diferentes registros de representación; en particular, el concepto "Función" puede representarse mediante la notación conjuntista, de manera coloquial, numérica (donde se encuentra la forma matricial, por pares ordenados o en forma de tabla), algebraica, gráfica o el diagrama sagital. Por otro lado, se pretende determinar el nivel de asimilación de los contenidos logrados por los estudiantes como producto de la enseñanza ofrecida en los cursos de ASI y consideramos los cuatro niveles de asimilación del conocimiento (Ramos, Valle & Ross, 2007): familiarización, reproducción, producción y creación.

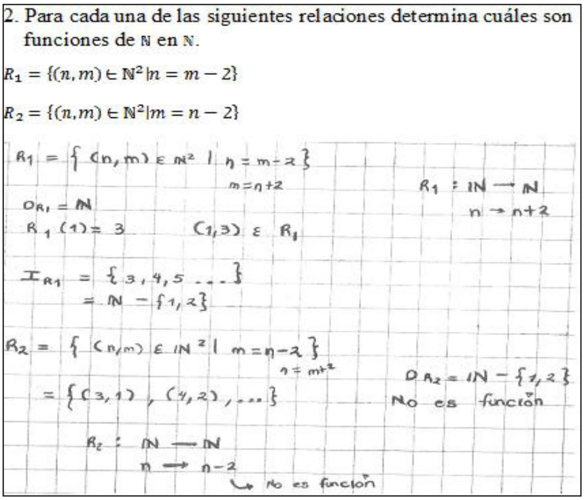
Método de investigación

Utilizamos la etnografía como método de investigación. La comunidad estudiada estaba conformada por un grupo de 33 estudiantes de la Facultad de Matemáticas que cursaron la asignatura de ASI y el profesor titular de la asignatura. Hemos restringido nuestro estudio a la unidad 2: "Relaciones y Funciones", ya que los profesores a cargo del curso de ASI reportan altos índices de reprobación en esta unidad. Para la recolección de datos, utilizamos *la observación no participante*, buscando puntualizar las características del tratamiento dado a los contenidos y el nivel de asimilación por parte de los estudiantes en los cursos de ASI. Se observaron 17 sesiones de clase y se registraron los hechos en notas de campo. Se revisaron *las notas del estudiante* para obtener evidencia sobre el tratamiento otorgado a los contenidos del curso. Y aplicamos *una prueba experimental*, diseñada por el grupo de investigadores a cargo del proyecto del cual forma parte este trabajo, para caracterizar los niveles de asimilación de los estudiantes, al mirar sus producciones en reactivos que involucran diferentes registros de representación.

Resultados

> **Definición de función**
> Sean A y B conjuntos no vacíos. Una función de A en B es una relación R entre A y B que satisface:
>
> i. $D_R = A$
>
> ii. $\forall y_1, y_2 \in B, \forall x \in A, (x, y_1) \in R \wedge (x, y_2) \in R \Rightarrow y_1 = y_2$
>
> **Observación** $\forall x \in A, \exists! y \in B, (x, y) \in R$

Presentamos una síntesis del recorrido temático de la unidad, para dar evidencia de los registros de representación que se emplearon e iniciamos con la definición del concepto "Función", la cual se apoyó en el registro algebraico, como se muestra en el siguiente recuadro.


2. Para cada una de las siguientes relaciones determina cuáles son funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$.

$R_1 = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 | n = m - 2\}$

$R_2 = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 | m = n - 2\}$

Figura 1

En la figura 1, se presentan algunos ejercicios propuestos a los estudiantes sobre el concepto "Función", donde se emplea la notación conjuntista. Además, se observa que los estudiantes recurrieron a la representación algebraica para la resolución de los mismos.

Al presentar la definición de "Composición de funciones", así como en algunas demostraciones relacionadas con el mismo concepto, se recurrió a la representación sagital (figuras 2 y 3).

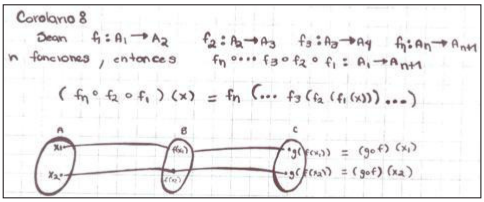


Figura 2. Definición

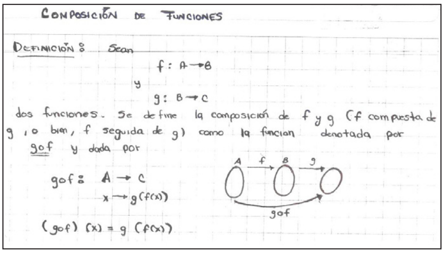


Figura 3. Corolario

En algunos ejercicios relacionados con la "Composición de funciones" se utilizó el registro numérico-matricial (figura 4) y en otros el registro algebraico (figura 5).

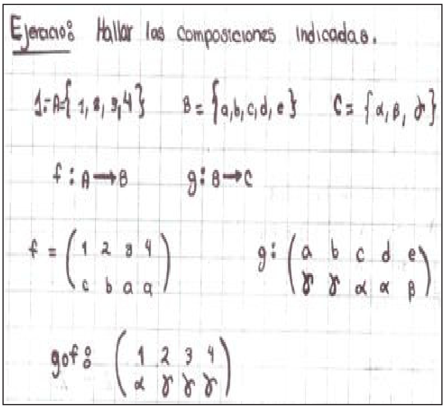


Figura 4. Ejercicios

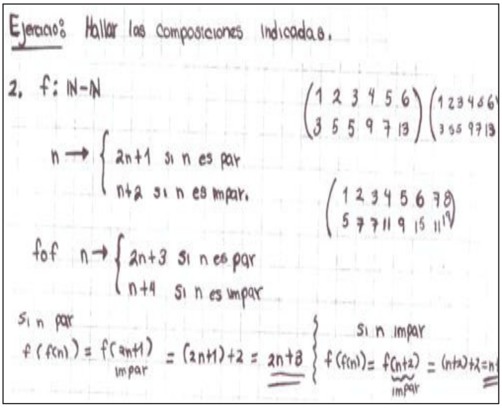


Figura 5. Ejercicios

Por otro lado, para identificar el nivel de asimilación que alcanzan los estudiantes, se clasificaron los reactivos de la prueba experimental en reactivos de reproducción y producción. Esperábamos un mejor nivel de respuestas en los primeros reactivos, ya que en estos se emplearon representaciones semióticas que el profesor utilizó durante la enseñanza, pero se obtuvieron mejores resultados en los reactivos de producción, los cuales incluían representaciones no utilizadas por el profesor. Los porcentajes de respuestas correctas de los reactivos de reproducción fluctúan entre 26.3 y 94.7, y para los de producción oscilan entre 57.8 y 100.

Los estudiantes, para responder los reactivos de producción, emplearon estrategias propias. Se identificó que utilizaron otras representaciones semióticas, dando evidencia de la necesidad de transitar de un registro a otro (figura 6).

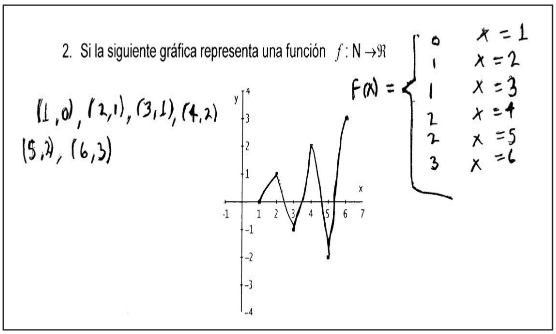


Figura 6. Uso de otras representaciones semióticas

CONCLUSIONES

El tratamiento otorgado a los contenidos del curso de ASI es preferentemente algebraico y conjuntista, y no se promueve la conversión entre registros, lo cual contribuye de forma escasa en la comprensión de los conceptos tratados por parte de los estudiantes. El empleo de diferentes registros de representación podría contribuir a que el estudiante acepte gráficos "agujereados" como gráfica de una función y con ello atender a la necesidad de ruptura al trabajar con el conjunto de los números reales.

Tratando de caracterizar el nivel de asimilación que alcanzan los estudiantes, concluimos que son capaces de alcanzar el nivel de producción, ya que obtuvieron mejores resultados en reactivos donde se emplearon registros de representación distintos a los recurridos por el profesor, empleando estrategias propias para resolverlos. Sin embargo, las prácticas de evaluación limitan a los estudiantes al nivel de reproducción, para lo cual recurren a la memoria y tratan de reproducir el trabajo del profesor, sin embargo, no implica una comprensión de los conceptos. Para que el estudiante pueda llegar al último nivel de asimilación, se deben producir en él, aprendizajes significativos; para ello el profesor debe comprometerse en formular una metodología adecuada y, además, saber cómo tratar los errores que cometen los estudiantes. El estudiante debe establecer una relación entre el nuevo contenido y los conocimientos previos; para ello debe tener en su estructura cognitiva conceptos, ideas y proposiciones estables y definidas, con las cuales pueda interactuar la nueva información; y mientras existan más relaciones, el aprendizaje es mucho más significativo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aparicio, E. (2006). Un estudio sobre factores que obstaculizan la permanencia, logro educativo y Eficiencia Terminal en las áreas de matemáticas del nivel superior: El caso de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán. En G. Martínez Sierra (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19, 450-455. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Aparicio, E., Jarero, M. & Ávila, E. (2007). La reprobación y rezago en cálculo. Un estudio sobre factores institucionales. *Premisa. Revista de la sociedad Argentina de Educación Matemática*. Edición 35, 3 – 12.

Dochy, F., Segers, M. & Sabine Dierick (2002). Nuevas Vías de Aprendizaje y Enseñanza y sus Consecuencias: una Nueva Era de Evaluación. *Revista de Docencia Universitaria*. Universidad de Maastricht. Recuperado septiembre 24, 2008 de http://www.um.es/ojs/index.php/red_u/article/view/20051/19411

Melchor, J.; Melchor, V. (2002). El conocimiento de las matemáticas. En Xixim, *Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas*. Universidad Autónoma de Querétaro. Recuperado agosto 30, 2008, de http://www.uaq.mx/matematicas/redm/art/a0904.pdf

Ramos, C., Valle, M. & Ross, S. (2007). El grado de reflexión de los alumnos de cálculo diferencial. Una experiencia. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 2(2), 54–70. Recuperado diciembre 17, 2008, de http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/files/anio2/num2/REIEC_anio2_num2_art6.pdf

Ruiz, A., Alfaro, C. & Gamboa, R. (2007). *Aprendizaje de las matemáticas: conceptos, procedimientos, lecciones y resolución de problemas*.

Concepciones de evaluación de profesores que imparten Cálculo Diferencial en la Universidad Sergio Arboleda y su relación con la reprobación

*Luisa Nataly Mukul Doblado**
*Luis Eduardo Pérez Laverde***

RESUMEN

Uno de los principales problemas que enfrenta el sistema de Educación Superior de Colombia es el alto nivel de deserción académica en el pregrado, el cual está asociado a la reprobación de las asignaturas de matemáticas, entre otros factores. La Universidad Sergio Arboleda, en Bogotá, presenta altos índices de reprobación en la asignatura de Cálculo Diferencial. Aparicio, Jarero y Ávila (2007) mencionan que por la falta de cultura en evaluación de los aprendizajes, no se plantean aspectos de solución y prevención en la deserción y reprobación. Por tanto, deseamos determinar la relación entre la evaluación y la reprobación en dicha asignatura, a partir de una investigación mixta, donde caracterizaremos la práctica evaluativa de los profesores, aplicando encuestas y entrevistas.

Palabras clave. Cálculo, evaluación, modelos pedagógicos, reprobación.

* Universidad Sergio Arboleda. Dirección electrónica:luisa_mukul@hotmail.com,
** Universidad Sergio Arboleda. Dirección electrónica:luis.pereze@usa.edu.co,

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Uno de los principales problemas que enfrenta el sistema de Educación Superior de Colombia es el alto nivel de deserción académica en el pregrado. "Según estadísticas del Ministerio de Educación Nacional, de cada cien estudiantes que ingresan a una institución de Educación superior cerca de la mitad no logra culminar su ciclo académico y obtener la graduación" (Guzmán, Durán, Franco, Castaño, Gallón, Gómez y Vásquez, 2009, p. 13). Por otro lado, Clemente (1997) citado también en Pérez (2001) plantea que la falta de formación de los profesores es un causa de la deserción escolar. En México, en las universidades públicas y privadas, el problema de deserción escolar es causado por la asignatura de Cálculo, no obstante muy posiblemente afecta a instituciones de nivel superior de otros países del mundo (Albert, 1996, citado en Cantoral y Reséndiz, 2003). Romo (2002, citado por Aparicio, Jarero y Ávila, 2007) menciona que las múltiples causas curriculares o académicas que afectan el rezago, la deserción escolar y la reprobación en matemáticas, particularmente en Cálculo, muy poco se han identificado y no le han dado mucha importancia en las escuelas. Además, "se considera que la existencia de una escasa cultura institucional en estudios de seguimiento, de trayectoria estudiantil y formas de evaluación de los aprendizajes" (Aparicio et al., 2007, p. 5) influye en que el rezago, la deserción escolar y la reprobación no puedan prevenirse y solucionar.

La Universidad Sergio Arboleda no se excluye de las instituciones que presentan el problema de reprobación, el cual se observa en los primeros semestres de estudios, como en el caso de la asignatura de Cálculo Diferencial. En dicha universidad se han aplicado medidas para reducir el índice de reprobación en Cálculo Diferencial, como unificar los criterios utilizados para evaluar, sin embargo, el problema sigue presente. Se sabe que no se han realizado estudios relacionados con la evaluación, por tanto, nos planteamos la siguiente pregunta: *¿Cuál es la relación entre las concepciones de evaluación de los profesores de la Universidad Sergio Arboleda, que imparten Cálculo Diferencial, y los altos índices de reprobación en dicha asignatura?,* cuyo objetivo es *determinar las concepciones sobre evaluación de los profesores de la Universidad Sergio Arboleda, que imparten Cálculo Diferencial, y la relación de éstas con los altos índices de reprobación.* Conocer las concepciones de evaluación de los profesores permite saber por qué estos actúan de cierta forma, pues como menciona Camargo y Guerrero (1998), la práctica evaluativa de los profesores está regida por sus experiencias cuando fue estudiante, al observar cómo era evaluado, de la forma tradicional, o al observar a sus colegas. Por tanto, el profesor aplica con sus estudiantes lo que ha vivido y ha observado. "Las concepciones… se expresan o plasman en opiniones, conceptos, discursos, narrativas y acciones de los actores" (Camargo et al., 1998).

ESTADO DEL ARTE Y MARCO TEÓRICO

Hemos encontrado investigaciones que describen las concepciones de los profesores acerca de la evaluación (Pérez, 2007; Balam, 2009; Camargo et al., 1998); el uso de las funciones diagnóstica, formativa, sumativa, retroalimentadora y obtención de información, así como el empleo de la evaluación unidireccional, coevaluación y autoevaluación (Pérez, 2007; Rivero, 2007; Balam, 2009); y los instrumentos utilizados para evaluar y los objetivos con los que son empleados (Rivero, 2007; Balam, 2009; Lozano, Hoyos, Gómez y Lozano, 1998).

Con el fin de determinar la relación entre la práctica de evaluación de los profesores con los altos índices de reprobación, deseamos caracterizar las concepciones de los docentes con respecto a la enseñanza, aprendizaje y evaluación, ya que estos tres aspectos deben ser coherentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje; para ello nos estamos apoyando de los modelos pedagógicos que actualmente se contemplan en la Educación Superior, los cuales son: el didáctico (se caracteriza por la enseñabilidad), cognitivo (es caracterizado por la educabilidad) y cientificista (se identifica por la investigabilidad). Torres (2010) menciona que el proceso de evaluación llevado a cabo en un aula de clase depende del tipo y las concepciones que se tienen del modelo pedagógico adoptado por los que realizan la evaluación. Los modelos pedagógicos sustentan las características de la evaluación, es decir, se puede inferir el modelo pedagógico que se emplea en el proceso de enseñanza y aprendizaje, a partir, de la forma de evaluar que se esté llevando a cabo. Estas ideas se pueden resumir en la siguiente frase "dime cómo evalúas y te diré para qué educas" (Torres, 2010, p. 51).

Por otro lado, cada modelo pedagógico describe el proceso académico, según las teorías que los fundamentan (los propósitos u objetivos que se desean alcanzar; las características de la enseñanza y aprendizaje; el papel y características del profesor y estudiante; la metodología y recursos didácticos; y características de la evaluación). Para nuestro estudio estamos considerando las características del proceso académico de los modelos tradicional y conductista (didáctico), desarrollista e histórico cultural (cognitivo), y el aprendizaje basado en proyectos (cientificista). Hemos considerado estos modelos porque han sido y son los más representativos durante la historia de la educación, como son el caso del tradicional y conductista; y en el caso del desarrollista, del histórico cultural y de los proyectos son modelos que proporcionan aspectos relevantes e innovadores a considerar en las clases.

METODOLOGÍA

Tipo de estudio. El tipo de investigación que estamos desarrollando es mixto; por un lado, es de corte cuantitativo porque aplicaremos encuestas para caracterizar las concepciones de los profesores sobre evaluación, su práctica y los modelos pedagógicos; nos interesará saber el porcentaje de profesores que se encuentran en cada modelo pedagógico y establecer una relación entre la evaluación y la reprobación en la asignatura de cálculo diferencial. Por otro lado, es de corte cualitativo, ya que realizaremos entrevistas para profundizar, fundamentar y contrastar la información obtenida a partir de las encuestas.

Proceso de la investigación. El proceso que estamos siguiendo se resume en tres pasos fundamentales, los cuales se describen a continuación:

- Caracterizaremos las concepciones de evaluación de los profesores y del director del Departamento de Matemáticas, para conocer las ideas que tienen estos acerca de la evaluación de los aprendizajes, así como su práctica evaluativa (tipos de evaluación, instrumentos que utilizan, formas de participar en la evaluación), con el fin de determinar la coherencia entre lo que el profesor cree, piensa y sabe, con lo planeado y lo puesto en práctica.
- Determinaremos los criterios de evaluación estipulados por el Departamento de Matemáticas y por cada uno de los profesores, en Cálculo Diferencial, para después determinar la relación entre los criterios y las concepciones de evaluación, y establecer las implicaciones de la relación entre estos.
- Determinaremos las implicaciones de las concepciones y la práctica evaluativa de los profesores empleadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de Cálculo Diferencial, en el desempeño académico de los estudiantes que cursan dicha asignatura.

Instrumentos de recolección de datos. Los instrumentos que emplearemos para recolectar los datos son encuestas estructuradas y entrevistas. Para caracterizar las concepciones de los profesores, hemos aplicado una encuesta que consta de cuatro partes, las cuales denominados como: dimensión personal; dimensión formativa; dimensión profesional; y dimensión práctica docente y evaluativa. En la dimensión personal deseamos conocer la edad y el sexo; en la dimensión formativa indagamos sobre los estudios realizados por los profesores; el objetivo de la dimensión profesional fue determinar la experiencia profesional de los docentes, en especial en la Universidad Sergio Arboleda; por último, el objetivo de la dimensión práctica docente y evaluativa fue clasificar a cada profesor en uno de los tres tipos de modelos pedagógicos, ya sea el didáctico, cognitivo o cientificista. Esta última parte de la encuesta está conformada por 15 ítems, donde se establecieron enunciados que los profesores debían complementar escogiendo 1 de 5 posibles opciones, las cuales corresponden a las características del proceso académico de cada uno de modelos pedagógicos (tradicional, conductista, desarrollista, histórico cultural y aprendizaje basado en proyectos), para poder establecer si existe coherencia entre las concepciones de enseñanza, aprendizaje y evaluación. Los resultados de la encuestas serán capturados en una hoja de cálculo de EXCEL, y posteriormente, se transportarán al programa estadístico SPSS, para el análisis de datos. Después de analizar los datos de la encuestas, construiremos una entrevista semiestructurada para los profesores con el fin de ahondar en aspectos de nuestro interés.

Para determinar los criterios de evaluación, entrevistaremos al director del Departamento de Matemáticas y con ayuda de los profesores que han impartido Cálculo Diferencial durante muchos años, construiremos la evolución de los criterios de calificación que se han empleado en esa asignatura, a lo largo de los años en que se ha ofrecido, para establecer si existe alguna relación entre los criterios y las concepciones de evaluación. Por último, aplicaremos una encuesta a una muestra de estudiantes que cursan Cálculo Diferencial, para determinar las implicaciones de las concepciones de evaluación de los profesores en el desempeño de los estudiantes. Estamos considerando encuestar a estudiantes con bajo, mediano y alto rendimiento académico, con el fin de conocer los diferentes puntos de vista de la evaluación que sus profesores emplean en las clases de Cálculo Diferencial, y de esta forma poder establecer alguna relación entre la reprobación y las concepciones de evaluación.

POSIBLES RESULTADOS

Los factores que inciden en la deserción estudiantil y la reprobación, son de diversa índole; por tanto, es muy difícil proponer estrategias o posibles soluciones que abarquen todas y que permitan a los estudiantes concluir satisfactoriamente sus estudios. No obstante, los factores relacionados con las instituciones educativas y más aún con las prácticas docentes se pueden ir solventando poco a poco, sin embargo, es una tarea difícil pero no imposible. En la Universidad Sergio Arboleda, se han planteado algunas soluciones para reducir los altos índices de reprobación en la asignatura de Cálculo Diferencial: un proyecto sobre actitudes de los estudiantes frente a la asignatura de Cálculo, inserción de monitores, asesorías, promoción de la educación entre pares, homogeneidad de criterios de evaluación, entre otros. Sin embargo, se han desarrollado pocas estrategias relacionadas con la evaluación de los aprendizajes. Esperamos obtener información necesaria acerca de la práctica evaluativa de los profesores, con el fin de poder analizar si esta afecta el rendimiento académico de los estudiantes, lo cual puede estar ocasionando los altos índices de reprobación y deserción en cálculo diferencial; y por consiguiente poder tomar medidas para reducir estos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aparicio, E., Jarero, M. & Ávila, E. (2007). Sobre factores institucionales. Premisa. *Revista de la sociedad Argentina de Educación Matemática 35*, 3 – 12.

Balam, C. (2009). *Una caracterización de las prácticas evaluativas en cursos de Álgebra de Nivel Superior*. Tesis de Licenciatura no publicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán. Mérida, México.

Camargo, M. & Guerrero, A. (1998). La evaluación escolar como representación social. En F. Lozano (Ed.), *La investigación: Fundamento de la Comunidad Académica* (pp. 83-142). Colombia: IDEP.

Cantoral, R. & Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6(2)*, 133-154.

Guzmán, C., Durán, D., Franco, J., Castaño, E., Gallón, S., Gómez, K. & Vásquez, J. (2009). *Deserción estudiantil en la educación superior colombiana. Metodología de seguimiento, diagnóstico y elementos para su prevención*. (Primera Edición). Bogotá, Colombia: Editorial Imprenta Nacional de Colombia.

Lozano, M., Hoyos, P., Gómez, G. & Lozano, F. (1998). El conocimiento práctico del profesor a través de la práctica evaluativa. En F. Lozano (Ed.), *La investigación: Fundamento de la Comunidad Académica* (pp. 15-82). Colombia: IDEP.

Modelos Pedagógicos. Recuperado el 10 de agosto de 2011 de http://www.iucesmag.edu.co/reglamentos/modelos.pdf

Pérez, L. (2001). Los factores socioeconómicos que inciden en el rezago y la deserción escolar. En Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior (ANUIES), *Deserción, rezago y eficiencia terminal en las IES. Propuesta metodológica para su estudio*. México: ANUIES.

Pérez, G. (2007). La evaluación de los aprendizajes. *Reencuentro 048*, 20-26.

Rivero, J. (2007). Evaluación de los aprendizajes desde una perspectiva humanista en las universidades pedagógicas venezolanas. *Revista Electrónica de Humanidades, Educación y comunicación Social 3(2)*, 1-14. Recuperado el 16 de junio de 2011 de http://www.urbe.edu/publicaciones/redhecs/historico/pdf/edicion_3/1-evaluacion-de-los-aprendizajes.pdf

Torres, G. (2010). *Currículo y Evaluación*. Universidad Militar. Departamento de Educación. Bogotá, Colombia.

Elementos de análisis y reflexión para la formación matemática en la transición Álgebra Cálculo

Gloria Inés Neira Sanabria[*]

RESUMEN

Lo que se encuentra generalmente en los escenarios del trabajo inicial del cálculo es repitencia, deserción escolar, incomprensión de conceptos, inadecuado manejo de los razonamientos, una no muy sólida competencia algebraica en la resolución de los nuevos problemas; los cursos se desarrollan en forma mecánica y el trabajo descansa en lo puramente algorítmico y en el álgebra, sin alcanzar una comprensión de los razonamientos y conceptos del cálculo. Se plantea que el lenguaje, los razonamientos, la lógica, la alternancia de cuantificadores y el tratamiento de los signos usados en el cálculo, entre otros, plantean una "ruptura" con lo que se hace usualmente en álgebra.

Palabras clave: dificultades, cálculo diferencial, algebra, transición, ruptura

[*] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica:gneira@udistrital.edu.co; nicolauval@yahoo.es

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Las principales dificultades que encuentran los estudiante de primeros semestres de universidad para comprender los conceptos fundamentales del cálculo, Artigue las clasifica en tres grupos: las que tienen que ver con la conceptualización de la noción de límite; las que se refieren a la complejidad de los objetos básicos del cálculo –que dan lugar al estudio de los obstáculos: epistemológicos, semióticos, culturales, didácticos,– y las vinculadas con las rupturas necesarias en relación con los modos de pensamiento puramente algebraicos.

Sierpinska (1994), por su parte, respecto a las dificultades con que tropiezan los estudiantes al acceder al cálculo plantea cinco categorías: el rechazo al estatus operacional que permite el paso al límite, el referente al principio de continuidad, los obstáculos relacionados con la noción de función, los obstáculos geométricos, los obstáculos lógicos, y los obstáculos simbólicos.

Y es que, en efecto, el tratamiento de igualdades e inecuaciones, los razonamientos, la alternancia de cuantificadores, las aproximaciones, el simbolismo, el lenguaje, las demostraciones rompen con las formas de trabajo que se presentan en los cursos anteriores a la iniciación del cálculo escolar. Como Artigue (1995) afirma, generalmente se han atacado los problemas de incomprensión del cálculo con reformas e innovaciones al interior del cálculo mismo, sin estudiar todo ese proceso que le antecede, y propone centrarse allí, para emprender una investigación que se ubique en la Transición Algebra-Cálculo, postulando que no existe un paso natural del álgebra al cálculo, que no existe un desarrollo continuo y regular del conocimiento, sino que se da un desarrollo caótico: una ruptura, frente a la cual se debe emprender una investigación, que es precisamente la que ha sido abordada por la autora de este escrito en su tesis doctoral.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Al preguntarnos: ¿Qué elementos conceptuales trae el estudiante para trabajar las nociones intuitivas del cálculo? o ¿Sobre qué predica el cálculo?, o, ¿Qué requiero para acceder al cálculo? las posibles respuestas (Neira, 2000) involucran entidades como: funciones, números reales, infinito, aproximaciones, continuidad, vecindades, entre otras, conceptos que como tales tienen sus propios problemas de conceptualización y de representación.

Con respecto a las funciones, para referenciar solo un ejemplo, vale la pena anotar aquí las dificultades que tienen los estudiantes para pasar de un registro semiótico de representación a otro, y para articular los distintos registros de representaciones semióticas (Duval 1992) y reconocer en todos el mismo objeto matemático. Por ejemplo, se rechaza la función real constante de valor 4 si se presenta en la forma y=4, porque lo que existe en el estudiante es una asociación de la función con su fórmula dependiente de x; o de función como variación; en cambio, si se presenta gráficamente por la asociación recta= función se presentan menos errores.

Y es que curricularmente el modo en que ocurre la instrucción en la escolaridad institucional es dos cursos de Álgebra en 8º y 9º grado y un curso de Cálculo en grado 11, es decir, se presenta el álgebra como un dominio, unas prácticas, anteriores al cálculo, y no solo anteriores sino como prerequisito para entrar a él posteriormente. En la universidad, por ejemplo, en primer semestre de Ingeniería, el estudiante debe tomar un curso de Cálculo Diferencial para el cual es necesario, aunque no suficiente, un buen dominio del álgebra. Incluso hay universidades que han incluido un curso de Fundamentos de Matemática o Matemáticas Básicas, repaso del álgebra y de las funciones, para suplir los vacíos que puedan presentarse antes de entrar a un curso formal de Cálculo.

Históricamente también se desarrolló primero el álgebra y posteriormente el cálculo. Así que en esta postura, paso o transición significa el camino que ha dado tanto la humanidad como la escuela en la adquisición y ordenamiento de ciertos contenidos aceptados universalmente como básicos en la educación, particularmente en el álgebra y el cálculo escolar.

En la práctica pedagógica de organización escolar actual, lo que se da es una separación de un año (trigonometría y geometría analítica). De facto se encuentra un 10º grado que configura un elemento o estadio de transición escolar, que se da más por razones de tradición que por alguna razón matemática o pedagógica. Interesa la transición del álgebra al cálculo en el sentido de lo que cambia, con respecto al álgebra, semántica, sintáctica, semióticamente, para el estudiante, una vez que entra al mundo del cálculo, tanto en grado 11 como en el primer semestre de universidad. Pero no solo cronológicamente, sino también en qué momentos, en qué temáticas, con cuáles situaciones se está presentando ya una irrupción de elementos constitutivos del cálculo. Voy a decir paso, ni curricular, ni cognitivo, sino entendiendo que curricularmente se pone primero álgebra y después cálculo, que el álgebra se considera pre-requisito para el cálculo, que para compartir las prácticas del cálculo se requiere en gran medida manejar las del álgebra. Hay un paso que algunos lo dan de una vez, otros se devuelven, otros permanecen un poco ambiguos por un tiempo y otros tal vez nunca pasen, pero cualquiera de las situaciones confirma que está bien llamado también transición. Esa transición puede ser cognitiva, lingüística, curricular, semiótica, pero no se está abordando ni desde el punto de vista antropológico, ni desde el punto de vista del análisis del discurso.

ANÁLISIS

Hay múltiples tensiones entre el análisis real, el cálculo escolar, la geometría escolar, la geometría analítica escolar, el álgebra abstracta, el álgebra de bachillerato, la aritmética de los reales, la aritmética de los racionales, la aritmética de los enteros, la aritmética de los naturales, entre lo discreto y lo continuo (y en la mitad, lo denso), entre lo finito y el infinito actual (y en la mitad, el infinito potencial).

Hay algunos aspectos en los que la notación del cálculo parece la misma del álgebra escolar, pero no lo es, como se ve ante todo por la ausencia de la composición, por el entendimiento del exponente (–1) como recíproco, no como inverso de la función, por el uso del apóstrofe para la derivada, por la manera de entender las igualdades que empiezan por "$y = \ldots$" como funciones, por la yuxtaposición de letras sin indicar multiplicación en los nombres de las funciones (como "lnx"). La idea es documentar que se trata de un registro semiótico diferente para un sistema conceptual diferente.

La principal operación binaria analítica es la composición de funciones, operación que no figura en el álgebra de bachillerato. Los elementos u objetos del análisis no son los números racionales y reales, sino las funciones reales de valor real. En noveno grado, ¿cuándo vieron x^2 o x^3?, y ¿el resultado es x^5 o y^6? Son pues muy diferentes de los objetos de la aritmética generalizada.

Respecto a la relación continuo-discreto (en el interior de la aritmética, del álgebra y del cálculo), en la mitad hay una zona gris: lo denso, o la densidad. En lo discreto están los conjuntos finitos, los números naturales y los enteros; luego se llega a los racionales positivos Q+, que son densos, y de allí se llega a los racionales Q. Luego se trata de capturar el continuo (línea, región) a través de lo discreto y lo denso. Generalmente se viene trabajando en el álgebra de bachillerato con ciertas funciones muy limitadas: la función cuadrado, la función cubo, las funciones lineales y las funciones afines o de gráfica lineal (que se confunden frecuentemente con las lineales). No se consideran las funciones constantes como funciones, sino como constantes. La función idéntica no se utiliza como función, tal vez "porque no hace nada".

La x se considera como incógnita, como variable, o como indeterminada, pero no como función.

No es conveniente confundir la función, (Neira, 2010), tomada como operación o transformación, que es un objeto activo, con su grafo, que es un objeto pasivo propio de la teoría de conjuntos. Se perdería el aspecto activo de la función y no se podría hablar de la diferencia entre el conjunto de salida y el dominio, ni de la diferencia entre el conjunto de llegada y el recorrido, rango o codominio. No habría diferencia entre función parcial y función totalmente definida, ni entre función en versus función sobre o sobreyectiva. Menos conveniente todavía es confundir la función con su gráfica cartesiana. La una es un elemento u objeto analítico, y la otra es un elemento u objeto geométrico.

La entrada en el mundo del cálculo obliga también a los estudiantes a reconstruir objetos matemáticos ya familiares pero en otros mundos: por ejemplo, la noción de tangente. En la enseñanza del bachillerato, los alumnos encuentran primero esta noción en el contexto del círculo. La tangente es un objeto geométrico que posee propiedades específicas: • no corta al círculo, • Lo toca en solo un punto, • en el punto de contacto es perpendicular al radio. Todas estas propiedades son globales y no tienen nada que ver con la idea de dirección común.

Esta concepción geométrica se puede generalizar aplicándose a otras curvas, por ejemplo parábolas, y conduce a la concepción algebraica de la noción de tangente como recta que tiene una intersección doble con la curva, que resulta operativa con las curvas algebraicas. Claramente, no hay una filiación directa entre esta tangente y la definida en cálculo, caracterizada por una propiedad local: la recta con que la curva tiende a confundirse localmente (aproximación afín al orden uno) y cuya pendiente está dada por el valor de la derivada de la función asociada.

Conclusiones

Tener en cuenta la transición o ruptura cognitiva, didáctica, curricular, semiótica,… que se da en el tránsito del álgebra escolar al cálculo diferencial y tomar plena conciencia de las dificultades y posibles obstáculos que pueden emerger, ha de dotar de herramientas teóricas, epistemológicas y metodológicas a formadores de profesores, profesores y estudiantes para el mejoramiento de su práctica docente y de su aprendizaje en el cálculo diferencial en diferentes niveles de escolaridad. La investigación en este sentido pretende aportar herramientas teóricas y metodológicas para la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial escolar en estudiantes universitarios, que han de servir también, por supuesto, para todo aquel que esté transitando del álgebra escolar al cálculo diferencial escolar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M., Duoady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (Ed.). (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* Bogotá/México: una empresa docente/Grupo Editorial Iberoamérica

Duval, R. (1992). *"Gráficas y ecuaciones". Antología de la Educación Matemática.* (Trad. Parra, M del original en francés: *"Graphiques et equations" L'Articulation de deux registres"*, 1988). *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* 125-139. México: Cinvestav-IPN.

Neira, G. (2000). *El paso del Algebra al Cálculo: punto fundamental para lograr una comprensión significativa en matemáticas. Revista Ingeniería, (*Universidad Distrital Francisco José de Caldas*). 1*, 87-92

Neira, G (2010*) Algunas dificultades detectadas en la transición del álgebra escolar al cálculo diferencial*, Memorias IX ENEMES Paipa-Boyacá 2010

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics.* [Studies in Mathematics Education Series]. London: The Falmer Press.

Estudio etnomatemático en la confección de muebles típicos de la vela de coro

Alexandra Noguera[*]
Angel Castro[**]

RESUMEN

La investigación parte de la interrogante: ***¿está presente conocimiento matemático en la confección de muebles típicos de artesanía veleña***? y más específicamente, ***¿es posible encontrar aspectos geométricos en la fabricación de estos muebles***? Teóricamente se sustentó en House, Trentacosta y Burke (citados por Shirley, 2001) quienes asumen que la diversidad cultural puede ser incorporada en la pedagogía. Metodológicamente atiende a un estudio etnomatemático (D´Ambrosio, 1990) con enfoque crítico/interpretativo, dividido en cuatro fases: marco teórico, escenario, trabajo de campo y análisis. Resultados permitieron evidenciar que artesanos muestran habilidades en construcción de muebles donde están presentes elementos geométricos: circunferencia, polígonos rectangulares, simetría, rectas paralelas y medidas de ángulos. Partiendo de ello, se diseña propuesta pedagógica que recrea la enseñanza matemática con utilidad social.

Palabras clave: etnomatemática, componente geométrico, aprendizaje

[*] Universidad Nacional Experimental "Francisco de Miranda" – Venezuela. Dirección electrónica: alexnoguera66@gmail.com

[**] Universidad Nacional Experimental "Francisco de Miranda" – Venezuela.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

La sociedad actual requiere personas preparadas para enfrentar la complejidad del mundo real, capaces de pensar críticamente y de analizar y sintetizar información para resolver problemas sociales, políticos, económicos y científicos. Es así que el proceso de aprendizaje se hace cada vez más relevante en el campo educativo, por ser esencia e instrumento de autorrealización y liberación del hombre, contribuyendo con el desarrollo y maduración personal de los individuos y, por ende, coadyuvando a la mejora de la sociedad en la que estos se integran.

En este orden de ideas, Stekman (2010) enfatiza que el mundo del aprendizaje está compuesto por una serie de elementos propios, característicos de cada uno de los individuos que aprenden; en el caso específico de las matemáticas es común que los estudiantes presenten rechazo y hasta ciertos miedos a esta área del conocimiento, que está implícita en todos los aspectos de la vida. El propósito es no convertir el aprendizaje de las matemáticas en un hecho traumático que marque negativamente al estudiante, sino que, por el contrario, esta ciencia sea un estímulo positivo y significativo que lleve al estudiante a desear explorar cada vez más su potencial para descubrir el conocimiento y "hacerse" con el saber.

Bajo esta perspectiva, el sistema educativo venezolano pareciera no haber cumplido su responsabilidad de formar el tipo de ciudadanos que el contexto demanda, discutiéndose mucho acerca de por qué en la escuela no se genera un auténtico aprendizaje constructivo y significativo. Tal apreciación obedece al hecho de que estudios de Mendoza (2007), Noguera (2009), Noguera y Guerra (2005) y Grabinger (1994), entre otros, han demostrado que al estudiante no se le prepara para resolver exitosamente problemas en el mundo real, puesto que solo se le suministran fragmentos aislados de información totalmente descontextualizada.

De allí que esta investigación partió de la interrogante: ***¿está presente el conocimiento matemático en la confección de los muebles típicos de artesanía de La Vela, Municipio Colina del Estado Falcón***? y más específicamente, ***¿es posible encontrar aspectos propios de la geometría en la fabricación de estos muebles***?, lo que permitió documentar lo que aún no se había interpretado de las prácticas cotidianas de los artesanos de esta comunidad veleña: reconocer la matemática que existe dentro del entorno social (y que pudiera llevarse a las aulas de clases de las instituciones educativas de ese municipio), manifestar la necesidad de mostrar cómo se pueden utilizar los saberes populares en el aula para propiciar el aprendizaje de temas matemáticos formales y reconocer el enfoque innovador de la etnomatemática como pedagogía viva, dinámica, de hacer cosas novedosas en respuesta a necesidades y estímulos ambientales, sociales y culturales.

FASE I: MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

En los últimos años la etnomatemática se ha presentado como otra forma de pensar el saber matemático, intentando rescatar los valores que el pueblo y su cultura tienen. Esta corriente es vista por algunos con cierto escepticismo y por otros como la nueva alternativa para el aprendizaje de la matemática (Blanco, 2008). A este respecto, consideramos que todos los modos de matematización que realicen esos grupos culturales para solucionar sus problemas cotidianos se las puede denominar etnomatemáticas, toda vez que hacen uso de los componentes matemáticos, aun desconociendo su formalización (e inclusive, aun no teniendo contacto con la educación formal) para resolver problemas propios de su acontecer socio-cultural.

En este orden de ideas, "en la etnomatemática, los etnomatemáticos intentan describir el mundo matemático, como los otros lo ven... la etnomatemática crea un puente entre la matemática y las ideas (conceptos y prácticas) de otras culturas" (D´Ambrosio, 2010:3). La parte de un estudio etnomatemático alude al porqué esas otras ideas se observan como matemáticas, y por lo tanto, por qué ellas podrían ser de interés a los matemáticos. Tal estudio crea la posibilidad de que ambas matemáticas provean una nueva perspectiva sobre los conceptos o prácticas para ellas dentro de la otra cultura, y de los matemáticos que ganan una nueva perspectiva sobre su propio tema. Es por ello que asumiremos en este estudio como etnomatemática al conjunto de conocimientos matemáticos, prácticos y teóricos, producidos o asimilados y vigentes en su respectivo contexto sociocultural; fundamentalmente comprende: el sistema de numeración propio, las formas geométricas que se usan en la comunidad, las unidades o sistemas de medida utilizadas local o regionalmente (tiempo, capacidad, longitud, superficie, volumen), los instrumentos y técnicas de cálculo, medición y estimación o los procedimientos de inferencia y otros conceptos, técnicas e instrumentos matemáticos usuales.

En este contexto, importa destacar que en la planificación de la enseñanza de la matemática debemos tomar en cuenta el contexto natural de donde viene el alumno y usar expresiones del mismo para lograr un puente afectivo entre él y el conocimiento matemático formal que debe adquirir, y el enfoque etnomatemático es una alternativa para lograr este propósito.

FASE II: DEL ABORDAJE DE LOS INVESTIGADORES AL ESCENARIO

El estudio se fundamentó en una investigación cualitativa, que posee un fundamento decididamente humanista para entender la realidad social investigada, por lo que se adoptó un paradigma interpretativo que intenta buscar la objetividad en el ámbito de los significados utilizando como criterio de evidencia el acuerdo intersubjetivo en el contexto estudiado. Además, se enmarcó en un estudio etnomatemático. El escenario de investigación se encuentra en La Vela de Coro, la cual es una ciudad y puerto de Venezuela, capital del municipio Colina del estado Falcón.

FASE III: TRABAJO DE CAMPO

Comenzamos nuestro recorrido en la carretera Morón-Coro en el sector del municipio Colina, donde pueden observarse diversas ventas de artesanías veleñas, específicamente de muebles de diversidad de madera que han hecho famosa a esta comunidad. Nos dedicamos a entrevistar a 12 artesanos que se encargan de comercializar estos muebles, de los cuales solo 2 son fabricantes, dado que la fabricación de estos muebles recae solo en dos familias: los Bermúdez y los García. Sin embargo, a pesar de que estas familias son las que poseen la hegemonía en confección de muebles, nos encontramos con que la Familia Morales es la que los confecciona en los talleres de los dueños, quienes son los encargados de comercializarlos.

Al querer indagar sobre sus conocimientos geométricos, le pedimos a uno de los artesanos que nos explicara el procedimiento para realizar la parte superior de una mesa circular y él dijo: "Ah, el redondo". Esta expresión del artesano, nos permitió concluir sobre su desconocimiento en cuanto al concepto y lenguaje geométrico; sin embargo, nos explicó que para realizar esa forma circular, tomaba un listón de madera, en una de las punta colocaba un clavo para fijar el centro y a partir de allí medía la longitud a la cual la querían, es decir 15 cm, 20 cm o 30 cm y en el otro extremo coloca un lápiz y comienza a girar, dibujando la parte redonda de la mesa. Una persona escolarizada, con conocimientos básicos del componente geométrico, sería capaz de reconocer la circunferencia como una curva cerrada, convexa, tal que la distancia de cualquiera de sus puntos a otro fijo es constante; además, identificar el punto fijo, llamado centro de la circunferencia y la distancia constante llamada radio (también se llama radio al segmento que uno el centro con cualquier punto de la circunferencia) y el diámetro como cualquier segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro. Sin embargo, el artesano entrevistado, en su conocimiento rudimentario y destreza para la confección de las piezas que conforman la mesa, reflejó un manejo práctico del concepto que representa el centro de la circunferencia y la medida del diámetro de la misma.

También abordamos a otro artesano sobre el proceso de construcción de las camas, ya que en ellas tenía mayor habilidad y destreza, y le preguntamos: ¿cuál de los modelos de camas es más fácil realizar? Y ¿por qué?, a lo que este respondió: "las literas, porque que las piezas son simplemente rectángulos y formas cuadradas de medidas estándar que cortamos y ensamblamos con mucha facilidad y rapidez". Una persona escolarizada, sería capaz de definir los rectángulos y cuadrados como un cuadrilátero, el cual es un polígono que tiene cuatro lados, tienen distintas formas pero todos ellos tienen cuatro vértices y dos diagonales.

Al entrevistar al señor Pedro Morales, se encontraba ensamblando una cama tipo matrimonial, y notamos que para dicho proceso utilizaba piezas que parecían ser simétricas, lo cual es un rasgo característico de formas geométricas. Al respecto le preguntamos sobre el proceso de confección de la plantilla utilizada para el copete de la cama y particularmente sobre la plantilla que utilizaba para ello. El artesano nos comenta que ellos dibujan la plantilla con la mitad izquierda del copete, puesto que la otra mitad es la misma plantilla pero colocada hacia la derecha. ¿Cómo así? Le preguntamos, a lo que él respondió: es como si le colocáramos un espejo y se refleja la misma plantilla y ambas se unen y forman el copete. Lo que el artesano trababa de explicarnos se refiere a una propiedad de las formas geométricas denominada simetría reflectiva o simetría especular que se caracteriza por la existencia de un único plano;, matemáticamente está asociado al grupo SO(1) o su representación equivalente $\mathbb{Z}_2$. En dos dimensiones tiene un eje de simetría y en tres dimensiones tiene un plano.

FASE IV: DEL ANÁLISIS CRÍTICO/REFLEXIVO

El proceso investigativo llevado a cabo en el seno de la comunidad de artesanos de muebles típicos de La Vela, Municipio Colina del estado Falcón nos permitió llegar a las siguientes reflexiones: la matemática está implícita en el proceso de construcción de los muebles; algunos conceptos que se manejan pertenecen al campo de la geometría, como la circunferencia, el radio, el diámetro, entre otros. Es notoria, además, la presencia de formas geométricas para la confección de las plantillas que son utilizadas como guía para los cortes respectivos de la madera y que posteriormente sirven para el ensamblaje de los muebles.

Particularmente, los contenidos antes citados son abordados en matemática de 1er año y podría mejorarse la motivación hacia la enseñanza de estos contenidos, incorporando en la planificación didáctica aspectos socioculturales y económicos propios de la comunidad del municipio Colina del Estado Falcón. La organización de las estrategias propuestas para el logro de aprendizajes dentro de un proyecto de aprendizaje de aula, donde se tomen en cuenta las visitas guiadas a los talleres de los artesanos se centra en el análisis matemático de las formas geométricas que allí pudieran evidenciarse, dentro del marco de la etnogeometría y etnomatemática al presentar los diseños geométricos reflejados en los muebles autóctonos de la cultura veleña, enlazar contenidos curriculares y ejes transversales, así como los objetivos y contenidos de las áreas académicas.

Como reflexión final de la presente investigación se quiere resaltar el hecho de que sí es posible encontrar matemática en las cosas cotidianas, de forma tal que no es extraña e inconexa a la vida, y este hecho se puede aprovechar para contextualizar su enseñanza, dado que, al utilizar la realidad, se está consiguiendo que el alumno desarrolle habilidades cognitivas superiores. Ese mismo propósito es perseguido por el Ministerio del Poder Popular para la Educación de Venezuela cuando propone que el estudiante aprenda la matemática en contexto y que la conozca y reconozca en sus aplicaciones o representaciones. El estudio mostró, desde el punto de vista teórico y práctico, la relación entre la matemática y la realidad, y apoya, no solamente desde la perspectiva didáctica, sino, además, desde el campo de la aplicabilidad, el significado profundo que tiene la matemática y en este caso particular, la geometría, para comprender el mundo que nos rodea. Finalmente, abogamos por la necesidad de innovar en la planificación didáctica de la matemática y en especial de la geometría, salir del contexto del aula y proporcionar experiencias de aprendizajes que permitan a cada estudiante identificar los elementos matemáticos y geométricos de su entorno.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Blanco, H. (2008). Entrevista al Profesor Ubiratán D´Ambrosio. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática* 1(1) 21-25.

D'Ambrosio, U. (2010, 16 de Octubre). Etnomatemática. *Revista Digital de la Red Latinoamericana de Etnomatemática* Recuperado de: http://etnomatematica.org/articulos/Ambrosio6.pdf.

Grabinger, S. (1994). "Directrices para ambientes ricos para el aprendizaje activo". *Ponencia presentada en ASI*. Edimburgo, Escocia.

Mendoza, H. (2007). *Estrategia de enseñanza para la práctica de las operaciones de suma y resta de fracciones*. (Tesis inédita de Licenciatura) Universidad Nacional Experimental "Francisco de Miranda", Coro, Venezuela.

Noguera, A. & Guerra, M. (2005) Propuesta de un MEC para el fortalecimiento del aprendizaje matemático en alumnos de 9no grado de Educación Básica. *Revista RCSE-UNEFM*, Vol. 3 N.º 1, pp. 88-109

Noguera, A. (2009) *Entornos innovadores para el aprendizaje de la matemática en la Licenciatura en Educación en Matemática*, Mención Informática de la UNE-FM. Trabajo de Grado para optar al título de MSc en Docencia para Educación Superior. UNERMB

Shirley, L. (2001) *Ethnomathematics as a Fundamental of Instructional Methodology. ZDM*, 33(3), 85- 87. Traducción de Navarrete, M. (2001)

Stekman, J. (2010) *Aproximación teórico fenomenológica hermenéutica implicada en la valoración estética de la matemática para el fortalecimiento de la emocionalidad* (Tesis inédita de Doctorado) UPEL-Maracay, Venezuela

El reconocimiento de variables en el contexto cafetero y su constitución como modelos matemáticos

Jorge Didier Obando Montoya[*]
John Fredy Sánchez Betancur[**]
Lina María Muñoz Mesa[***]
Jhony Alexander Villa-Ochoa[****]

RESUMEN

En esta comunicación reportamos algunos avances de una investigación en la que pretendemos que los estudiantes reconozcan variables propias de un contexto cafetero para la constitución de sus propios modelos matemáticos en un proceso de modelación. La investigación se viene adelantando con metodología cualitativa puesto que nos posibilita hacer un estudio detallado en el contexto, debido a que posee un fuerte componente descriptivo que permite a través de la recolección de datos una profunda y significativa comprensión del contexto y, como método, adoptamos el estudio de casos para analizar la particularidad y la complejidad de un caso y así llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes. Finalizamos el documento con una situación en donde la modelación matemática puede contribuir a una visión de algunos tópicos del contexto y del contenido matemático; además, reflexionamos sobre algunos aspectos en la relación matemática y cultura.

Palabras clave: contexto cafetero, variables, modelación y modelo

[*] Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: jdom.6@hotmail.com
[**] Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: jofresanbeta@hotmail.com
[***] Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: limamu07@gmail.com
[****] Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: javo@une.net.co

PRESENTACIÓN DE PROBLEMA

A partir de nuestra experiencia como docentes de matemáticas observamos cierto predominio del uso de enunciados verbales que intentan "simular" ciertos aspectos de la "vida cotidiana" de los estudiantes. Frente a tales enunciados notamos en ellos ciertas dificultades al reconocer y representar las variables que se implican en la situación; asimismo, evidenciamos problemas al construir significados entre los aspectos del contexto de la situación y el contenido matemático que se puede determinar en él. En ese sentido nos propusimos desarrollar, en el marco de la Maestría en Educación de la Universidad de Antioquia, una investigación en la que pretendemos observar la manera como los estudiantes reconocen algunas variables propias de un contexto cafetero (etapa vegetativa), las analizan y representan matemáticamente a través de un proceso de modelación.

Como lo expresamos anteriormente, algunos de los conceptos que presentan dificultad en los estudiantes están asociados al reconocimiento de variables. Este aspecto ya ha sido reportado en diversas investigaciones, en las cuales se establecen rupturas entre la representación (matemática) y la interpretación de las variables en el contexto que se le presenta al estudiante. Según Morales y Díaz (2003, p. 109) "[...] las variables se usan en textos escolares sin proporcionar una experiencia introductoria que pudiera servir como base en la cual la idea de variable pueda desarrollarse en sus diferentes significados". Desde esta apreciación, consideramos que las prácticas de la enseñanza de la matemática deben responder a una identificación de elementos significativos que lleven al estudiante a crear modelos matemáticos (en sus diversas connotaciones) en el análisis de situaciones cotidianas, con el fin que le encuentre significado a su aprendizaje y así contribuir a suplir algunas de las falencias encontradas en los textos y en las mismas aulas de clase.

Desde esta mirada buscamos que las variables sean estudiadas en el contexto propio en el cual surgen; para ello propusimos a los estudiantes que, de acuerdo con sus intereses, eligieran una "situación" desde la cual quisieran *des-cubrir* algunas matemáticas. En este sentido, los estudiantes eligieron situaciones del contexto cafetero argumentando que es allí donde muchos de ellos y sus familias se desenvuelven, pues, el cultivo y la producción de café, constituyen uno de los pilares económicos de la región del suroeste antioqueño en donde se realiza esta investigación.

ALGUNOS ELEMENTOS TEÓRICOS

Teniendo en cuenta las ideas anteriores, observamos en la modelación matemática una manera de atender a las cuestiones que se asumen en esta investigación. De forma particular, hacemos hincapié en las primeras acciones del proceso de modelación las cuales consisten en el reconocimiento de cantidades, la abstracción de relaciones entre ellas y su simplificación con el propósito de construir un modelo matemático (representación en lenguaje matemático).

Consideramos que la modelación se debe incentivar desde el aula de clase debido a que ésta fortalece la reflexión y el razonamiento, porque muestra un camino que lleva a solucionar problemas de la vida cotidiana empleando modelos que describen el fenómeno y se pueden interpretar en expresiones matemáticas, en sus diferentes representaciones.

Para esta propuesta, entenderemos la modelación como:

> El proceso de estudio de fenómenos o situaciones que pueden surgir tanto desde los contextos cotidianos, sociales y culturales de los estudiantes como de otras ciencias o disciplinas académicas. Dicho proceso de estudio involucra el uso y la construcción de modelos y otras herramientas matemáticas con las cuales puede ofrecerse una compresión del fenómeno y resolver el problema (Villa-Ochoa, 2010).

Concebida la modelación como un proceso implicado en la construcción y validación de modelos matemáticos se hace necesario describir la manera en la que entenderemos los "modelos matemáticos"; es así como un modelo matemático lo entendemos desde la idea de una *construcción matemática* dirigida a estudiar un sistema o fenómeno particular, un contexto o fenómeno de los plateados anteriormente; en las palabras de Giordano et al. (1997), ese modelo matemático puede incluir gráficas, símbolos, simulaciones y construcciones experimentales. De esta manera, establecemos cómo el modelo no se refiere solo a una fórmula, sino cómo adquiere significado desde las construcciones experimentales que generan argumentos desde diversas representaciones verbales, simbólicas, entre otras.

METODOLOGÍA

Esta investigación se viene desarrollando desde el enfoque cualitativo, ya que nos permite hacer un estudio detallado en el contexto y debido a que posee un fuerte componente descriptivo que permite a través de la recolección de datos una significativa comprensión del proceso de modelación matemática.

En este sentido, Erickson (citado por Stake, 2007) para referirse a lo primordial de los estudios cualitativos escribe que:

> [...] la característica más distintiva de la indagación cualitativa es el énfasis de la interpretación y ella es la forma más apropiada de hacer investigación social, aunque pensar en la interpretación desde el inicio de ésta es un error, porque da la sensación de que el estudio hace referencia a sacar conclusiones de una forma apresurada (p.20).

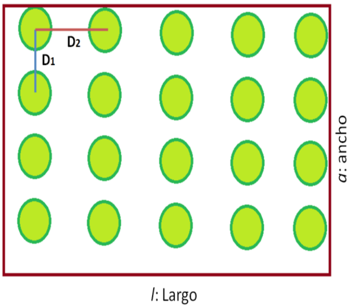
El método de investigación en el que se centrará nuestro trabajo es el estudio de caso, el cual permite llevar a cabo los objetivos propuestos. Desde esta perspectiva, Yin (citado por Sandoval, 1996) define un estudio de casos como una indagación empírica que: "Investiga un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto real de existencia, cuando los límites entre el fenómeno y el contexto no son claramente evidentes y en los cuales existen múltiples fuentes de evidencia que pueden usarse" (p. 91).

Los participantes del estudio son tres estudiantes de grado noveno y dos de grado décimo de una de las Instituciones Educativas del municipio de Andes-Antioquia los cuales, en compañía de los investigadores, analizarán el contexto particular en la producción de café en su primera etapa, desde la siembra hasta la primera floración. Los estudiantes, al relacionarse con el entorno de su interés, comenzarán a comprender las relaciones que se generan al reconocer sus variables y significados, además de incorporar algunas nociones conceptuales que son comprensibles e interpretables porque han surgido de su contexto cotidiano. La información será analizada atendiendo a las sugerencias de Yin (1989) las cuales nos permiten establecer vínculos entre los objetivos, la pregunta de investigación y la información recogida, para lo cual se seguirán las siguientes fases: organización del material, categorización individual, análisis individual y transcripción-categorización de segundo orden. Es de anotar que este análisis se elaborará con mayor profundidad en el informe final de esta investigación; por efectos de la comunicación breve del presente escrito, solo serán mencionados los elementos de análisis, mas no referenciados en detalle.

ALGUNOS MODELOS EN EL CONTEXTO CAFICULTOR

En una investigación previa desarrollada en el contexto del café, Berrío (2012) indaga por los elementos que intervienen en la (re)construcción que hacen los estudiantes en los modelos matemáticos, en este caso, en el contexto del cultivo del café. En su trabajo este investigador señala que la modelación ofrece una mirada alternativa que da "sentido" a algunos tópicos de la matemática en las aulas escolares. En un primer momento Berrío (2012) problematiza (con sus estudiantes) sobre la cantidad de árboles que pueden sembrarse el determinado terreno, frente a lo cual muestra cómo algunas ideas y creencias de los estudiantes se transforman a través de la modelación. En este documento retomaremos la pregunta de Berrío y detallaremos los aspectos matemáticos que se deben tener en cuenta para la construcción del modelo matemático estandarizado que generalmente se usa por los asesores técnicos en las empresas de caficultores.

Frente la pregunta inicial ¿cuántos árboles pueden sembrarse en un terreno? Berrío (2012) menciona una cantidad de variables que intervienen en la situación. Simplificando un poco la cuestión podemos suponer que el terreno es rectangular, y que se incluyen las variables *puente* (D_1: Distancia vertical entre los árboles) y *calle* (D_2: Distancia horizontal entre los árboles). En la siguiente ilustración se presenta un *modelo* gráfico de la situación.



Para calcular la cantidad de árboles que pueden sembrarse horizontal y verticalmente se efectúan respectivamente las operaciones $C_1 = \frac{a}{D_1}$ y $C_2 = \frac{l}{D_2}$. De esa forma, la cantidad de árboles está dada por la expresión $C_1 \times C_2 = \frac{a}{D_1} \times \frac{l}{D_2} = \frac{al}{D_1 D_2}$.

Sin embargo, es claro que este modelo solo podría ser aplicable en terrenos de forma rectangular. Para generalizar a cualquier tipo de terreno plano en el cual se siembre de manera rectangular, se hace necesario considerar idea de "área" y de "unidad de medida" y, por tanto, para el caso de la hectárea se tendría el modelo $\frac{10.000}{D_1 D_2}$ que es el modelo generalmente usado por los asesores de las agencias de caficultores como lo reporta Berrío (2012). Esta última expresión funciona como una "unidad de medida" para calcular la cantidad de árboles que se sembrarían en cualquier terreno plano, pero ahora con "cualquier forma" y conociendo su área. De esa manera el modelo matemático a construir sería: $Cant_{total\ de\ árboles} = \frac{10.000}{D_1 D_2} \times A$, donde A representa el área del tal terreno.

CONSIDERACIONES FINALES

La modelación matemática viene siendo defendida como un proceso que en el aula de clase permite: (i) ayudar a los estudiantes a comprender mejor los contextos en los cuales se desenvuelven, (ii) apoyar el aprendizaje de las matemáticas (motivación, la compresión, entre otros), (iii) promover el desarrollo de algunas competencias y actitudes adecuadas hacia la matemáticas, y (iv) contribuir a una visión adecuada de las matemáticas (Blum y Borromeo-Ferri, 2009).

Estos elementos están en coherencia con las sugerencias que el Ministerio de Educación Nacional propone en cuanto a que el conocimiento matemático es imprescindible y necesario para que todo ciudadano pueda desempeñarse en forma activa y crítica en su vida social y política y para interpretar la información necesaria en la toma de decisiones (Colombia, 2006). Desde nuestra investigación concordamos con las reflexiones de Villa-Ochoa y Berrío (en prensa) en el sentido que no se trata de asumir un contexto de la cotidianidad o de la cultura solo con fines motivacionales, de introducir o producir un concepto; tampoco se trata solo de producir ideas utilitarias de la matemática como la de mostrar que ella "está en todas partes" y que "tiene múltiples aplicaciones" o que "sin ellas el conocimiento científico no hubiera alcanzado en nivel de desarrollo actual"; no se trata solo de un aprendizaje de contenidos específicos en contexto, ni del desarrollo de habilidades para identificar *"formas"* del contexto equiparables con las *"formas"* matemáticas. Más allá de ello, se trata de generar espacios en los cuales las matemáticas y la cultura dialoguen sin subordinarse entre sí.

AGRADECIMIENTOS

Aunque no sean responsables de lo escrito en este documento, queremos agradecer a los miembros de la Red Colombiana de modelación en Educación Matemática-RECOMEM (www.recomem.com.co) por los comentarios realizados a las versiones previas de este documento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Berrío, M. (2012) *Elementos que intervienen en la construcción que hacen los estudiantes frente a los modelos matemáticos: el caso del cultivo de café.* Tesis de Maestría no publicada (Programa en Enseñanza de las Ciencias), Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

Blum, W., & Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1* (1), 45-58.

Colombia: Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias.* Bogotá: Magisterio.

Giordano, F., Weir, M., & Fox, W. (1997). *A first Course in Mathematical Modelling.* Brooks/Cole Publishing Company.

Morales, L. & Diaz, J. L. (2003). *Concepto de variable: Dificultades de su uso a nivel Universitario.* Sonora, México.

Sandoval, C. A. (1996). Especialización en teorías, métodos y técnicas de investigación social. Bogotá: ARFO Editores e Impresores Ltda.

Stake, R. (2007). Investigación con estudio de casos. España: Ediciones Morata S. L.

Villa-Ochoa, J. A. (2010). *Modelación Matemática en el aula de clase. Algunos elementos para su implementación.* Conferencia presentada en el primer seminario de Educación Matemática, Historia y Entomatemáticas, Universidad de Medellín, Medellin.

Villa-Ochoa, J. A., & Berrio, M. (sf). Matemática y Cultura. Algunos aportes desde la modelación Matemática. *Documento inédito.*

Yin, R. (1989). Case Study Research, Design and Methods. SAGE Publication.

El valor absoluto: una mirada desde la metodología de la ingeniería didáctica

Luis Fernando Olaya Q.[*]
John Edward Forigua P.[**]

RESUMEN

En esta comunicación se darán a conocer los resultados parciales de una investigación realizada por los autores sobre la noción del valor absoluto; se usará como metodología de investigación la ingeniería didáctica en su primera fase, enunciando los elementos relevantes de las consideraciones de tipo epistemológico, cognitivo y didáctico del valor absoluto, en docentes en formación y otros en ejercicio de último año de Educación Media.

Palabras clave: investigación experimental- análisis cognitivo- expectativas de aprendizaje – valor absoluto.

[*] Docente SED Bogotá. Dirección electrónica: luixolaya1@gmail.com
[**] Docente SED Bogotá; DCBFULL. Dirección electrónica: jed_mth@yahoo.com

PROBLEMÁTICA Y JUSTIFICACIÓN

La noción de valor absoluto se ha abordado a lo largo de varios años en los currículos escolares de matemáticas en Colombia. Tomando como referencia las últimas reformas curriculares y haciendo una revisión de los estándares de matemáticas propuestos por el MEN, es posible identificar dentro de las matrices planteadas para los grados de la Educación Básica Secundaria y Media procesos muy relacionados con el desarrollo de la noción de valor absoluto en donde se propone: "Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas (…) Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada (…) Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas" (MEN. 2006. pp. 87,89).

Los libros de texto de diferentes grados, en especial de undécimo, que se basan en las reformas curriculares actuales siguen abordando el valor absoluto desde diversas perspectivas. Cañas, Forigua & Olaya (2009)[1] afirman a partir del análisis de algunos libros de texto, que la noción de valor absoluto es abordada a partir de definiciones como:

La distancia de un punto a otro, desde su representación en la recta numérica entera o real desde un contexto geométrico- analítico (…) La función en el plano cartesiano.

La descripción y definición de algunas propiedades necesarias para la resolución de desigualdades (…) El concepto de límite. (p.24)

Con base en el estudio de los libros de texto es posible identificar que hay un tratamiento indiscriminado de la conversión entre las representaciones del concepto de valor absoluto, pasando rápida y fácilmente de la representación algebraica a la representación tabular, y de esta a la de tipo cartesiano de la función; presentado el objeto de estudio de esta forma, se propone posteriormente un listado de ejercicios que siguen trivializando esta conversión entre representaciones, proceso bastante complejo documentado por varios autores como Duval (1999) y Sfard (1991), donde esta última afirma que el desarrollo de un concepto consta de las fases de interiorización, condensación y reificación. En la etapa de interiorización, el estudiante se empieza a familiarizar con el nuevo concepto que puede llevarse a cabo a través de las

[1] Para profundizar en el estudio de la revisión de los libros de texto consultar el trabajo de grado no publicado de Cañas, Forigua & Olaya (2009) para optar al título de especialistas en Pedagogía y Didáctica de las Matemáticas de La Universidad La Gran Colombia sede Bogotá

representaciones que él genera, en donde abstrae las propiedades fundamentales del mismo, hasta llegar a la siguiente etapa que es la condensación, en la cual nace oficialmente el nuevo conocimiento, permitiendo combinar procesos, comparar y hacer generalizaciones; esta etapa se manifiesta cuando el estudiante puede transitar entre distintas representaciones de un concepto. Posteriormente pasa a una tercera etapa de reificación como un objeto abstracto separado de los procesos, e interioriza totalmente el concepto y aumenta su capacidad de resolver problemas. Estas tres etapas son de tipo jerárquico: no se puede llegar a una sin alcanzar la otra.

En consecuencia, el porcentaje de éxito que alcanzaron los estudiantes cuando se enfrentaronn a este tipo de situaciones de conversión de representaciones de un concepto como el de valor absoluto, tal como aquellos a quienes se les aplicó el test de Engler et al. (2007) fue considerablemente bajo para una población con grado de escolaridad similar a los estudiantes de grado once de la Educación Media, por lo que no es ingenuo pensar que la noción de valor absoluto es tratada de forma operativa y no de forma comprensiva, en donde verdaderamente se haga una mirada más compleja, se posibiliten situaciones y otro tipo de herramientas que favorezcan la adquisición y desarrollo de esta noción.

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Artigué (1995) describe la metodología de la ingeniería didáctica por medio de un proceso de investigación experimental, delimitado en cuatro fases: *"(...) la fase 1 de análisis preliminar, la fase 2 de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, la fase 3 de experimentación y finalmente la fase 4 de análisis a posteriori y evaluación" (p. 38).* Teniendo en cuenta la metodología enunciada anteriormente, se documentará en esta comunicación la implementación de la primera fase de la ingeniería didáctica, caracterizada de la siguiente manera:

La primera fase permite concebir un marco teórico general adquirido a partir de un determinado número de análisis preliminares, que nosotros de ahora en adelante denominaremos como *consideraciones*. Dado que esta fase de la metodología abarca consideraciones de orden epistemológico, cognitivo y didáctico, según Artigué (1995) debe tener las siguientes dimensiones:

La dimensión epistemológica asociada a las características del saber en juego; la dimensión cognitiva asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza; la dimensión didáctica asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza. (p. 40).

Para reportar los datos encontrados en esta investigación retomaremos los apartes más relevantes de las consideraciones epistemológicas y cognitivas, para finalizar con las posibilidades de profundización de este estudio.

ANÁLISIS DE DATOS

Análisis de las consideraciones de tipo epistemológico. Para la construcción de las situaciones problemáticas del valor absoluto se retomaron las cuatro fases propuestas por Gagatsis (1995), en la evolución de la noción de valor absoluto de un número real: fase uno, el valor absoluto como un concepto implícito; fase dos, el concepto de valor absoluto en el álgebra de inecuaciones; fase tres, transición a un nuevo contexto conceptual; fase cuatro, el valor absoluto en el camino de la notación y la formalización.

En relación con estas fases, la aceptación del valor absoluto como un concepto independiente, el establecimiento de una notación particular y la formalización de las propiedades requirieron un largo tiempo y un cambio en el significado conceptual. Para Gagatsis (1995), el proceso histórico del concepto de valor absoluto se reconoció en las nuevas concepciones de los números negativos, la introducción de definiciones rigurosas, las profundizaciones en el cálculo y en una interacción cerrada entre los números complejos y los reales.

Análisis de las consideraciones de tipo cognitivo. Desde las ideas de Sfard (1991) expuestas anteriormente, podemos describir las etapas referidas a la formación del concepto del valor absoluto a través del siguiente cuadro:

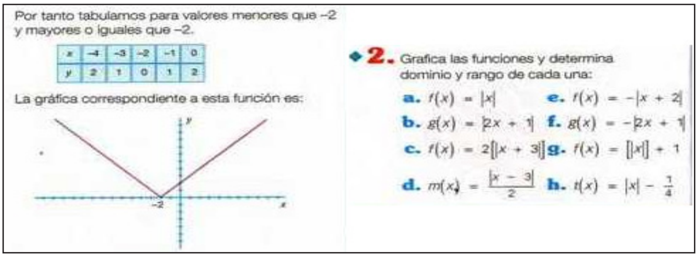
Etapas en la formación del concepto de valor absoluto	
Interiorización	El estudiante se familiariza con la noción de valor absoluto, como un número sin signo que inicia su desarrollo con los números enteros y posteriormente lo plantea como una distancia entre dos números, reconoce de forma algebraica o de forma gráfica (usando la recta real),la definición:
Condensación	En esta etapa combina los procesos que realiza para definir el concepto de Valor Absoluto y sus respectivas propiedades: a) (con), es equivalente a: ó . b) (con), es equivalente a: y , es decir, c) es equivalente a ó Transitando entre representaciones gráficas, algebraicas y verbales y puede resolver ejercicios como , , , , que además le permita hacer generalizaciones para resolver desigualdades de este tipo en donde deba utilizar los procesos propios de la definición de valor absoluto y de sus propiedades.

Etapas en la formación del concepto de valor absoluto	
Reificación	Reconoce el concepto del valor absoluto como una entidad abstracta, resuelve problemas con desigualdades y situaciones que deban ser modeladas a través de ecuaciones con valor absoluto, sus propiedades y por medio de la función valor absoluto, concibiéndola como la métrica usual en. Además, conecta la noción con otros conceptos matemáticos como el número real, la función, la distancia, la variable, el límite, la derivada e integrales.

Fuente: Los autores. 2009

Análisis de las consideraciones de tipo didáctico. Para este análisis se aplicó una serie de encuestas a 119 estudiantes universitarios de licenciaturas, distribuidos en distintas carreras afines al uso de las matemáticas y a 20 docentes de grado 11 de distintos colegios, en la cuidad de Bogotá D. C. en el año 2008. Basados en estos resultados se decidió tomar el libro de texto empleado con mayor frecuencia (*Inteligencia lógico matemática 11*) y analizarlo con base en el instrumento propuesto por González y Sierra (2004), y se encontró que la presentación que hace del concepto de valor absoluto está enmarcada en los aspectos de tipo tecnológico y expositivo utilizando descripciones formales con símbolos matemáticos para la definición del mismo, así como reglas de aplicación, sin tablas y expresiones simbólicas, cuyo significado parte de la definición, dada como una norma de aplicación.

De la misma manera, el libro de texto presenta ejercicios rutinarios que parten de definiciones estructurales y teóricas en donde las gráficas utilizadas tienen como finalidad la visualización y ejemplificación del concepto; además, las tablas presentadas son vistas como un elemento auxiliar de forma estática, lo que denota la ausencia total del aspecto comprensivo en todas las categorías, y trivializa la actividad de resolución de problemas y, por ende, el proceso de enseñanza de las matemáticas, tal y como se puede observar en la siguiente figura:



Fuente: Peña Pinzón, Ángela Julieta. 2003. Inteligencia lógica matemática 11 (p. 20)

CONCLUSIONES

Al desarrollar un análisis de las consideraciones de tipo didáctico del concepto de valor absoluto en el que se tuvo en cuenta la forma como este se aborda en los libros de texto de grado once, se identificó que por lo general se trivializa el concepto, lo que contribuye a generar en los estudiantes nociones alejadas de contextos reales que les permitan tener una aprehensión de los significados y relaciones que favorecen el aprendizaje.

Uno de nuestros mayores alcances estuvo en que a través del uso de la teoría de Sfard (1991), ante la ausencia de la existencia de categorías con respecto a las etapas de formación del concepto de valor absoluto, fue diseñar y proponer algunas que nos permitieran analizar nuestro objeto de estudio, las cuales presentamos en el cuadro expuesto anteriormente.

Teniendo en cuenta este trabajo, recomendamos que se le dé continuidad al mismo en las posteriores fases de la ingeniería didáctica, es decir, el análisis a posteriori que contempla la intervención en el aula, en donde se implementen y evalúen situaciones problemáticas, para seguidamente analizar los resultados que se obtengan.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos, en P. Gómez (ed): *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamericano/ Una empresa docente.

Cañas, Forigua & Olaya. (2009) *La noción de valor absoluto: consideraciones epistemológicas y didácticas*. UGC trabajo de grado no publicado.

Duval R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle. Colombia.

Engler, Aquere, Vrancken, Hecklein, Müller & Gregorini (2007) *Nos preparamos para el cálculo trabajando sobre la recta real*, Universidad Nacional del Litoral Esperanza, Argentina.

Gagatsis A. & Thomaidis I. (1994) *Une* Ètude *multidimensionnelle du concept de valeur absolue. Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France*. Pág. 343-348. Ed. La Pensée Sauvaje. Francia. Traducción al español por Cañas, O., Forigua, J. & Olaya, L. 2009. No publicada.

Peña, Pinzón Ángela Julieta. 2003. *Inteligencia lógica matemática* 11. Ed. Voluntad.

Sfard A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36. Traducción al español por Edgar Guacaneme. U. P. N. Bogotá, Colombia.

Competencia matemática modelizar: un estudio exploratorio desde la función cuadrática

César Olmos Rojas[*]
Dermin Rogelio Sarmiento Rivera[**]
Leonardo Montealegre Quintana[***]

RESUMEN

Este estudio corresponde a un avance de tesis de la maestría en Ciencias de la Educación con énfasis en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de la Amazonia, como parte del proyecto "Formación y desarrollo de competencias matemáticas", realizado por el grupo Desarrollo Institucional Integrado. Se propone la caracterización de la competencia matemática modelizar para el caso de la función cuadrática en estudiantes del grado noveno, a partir de un modelo teórico funcional cuyos componentes estructurales son las fases del proceso de modelización, las tareas matemáticas, los niveles de complejidad y los procesos metacognitivos. Desde una metodología cualitativa interpretativa, en un estudio de caso, centramos la atención en las interacciones en el aula y las actuaciones integrales ante tareas matemáticas de diferentes niveles de complejidad.

Palabras clave: competencia, competencia matemática, modelización, tareas, función cuadrática.

[*] Universidad de la Amazonia. Dirección electrónica: cesarolmos0982@yahoo.es.
[**] Universidad de la Amazonia. Dirección electrónica:der.327@hotmail.com.
[***] Universidad de la Amazonia. Dirección electrónica: leonarmont@gmail.com.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

En Colombia el currículo de matemáticas se orienta desde el enfoque por competencias, el cual hace énfasis en el carácter funcional del conocimiento de las matemáticas en sociedad (MEN, 2006). Desde esta perspectiva puede afirmarse que en el contexto colombiano, el currículo de matemáticas tiene como propósito el desarrollo de competencias matemáticas (MEN, 1998, 2006); no obstante, hacen falta desarrollos teóricos curriculares basados en la noción de competencia matemática sustentados en el resultado de investigaciones empíricas (Solar, 2009). Como consecuencia de lo anterior, existe en la actualidad confusión en los docentes sobre las finalidades y propósitos de la educación matemática y del significado y uso de la noción de competencia matemática, y de competencias matemáticas específicas, como la de modelizar, lo cual se hace evidente en charlas informales con docentes y en la revisión realizada al PEI, plan de estudios y plan de área de matemáticas de la Institución Educativa Juan Bautista La Salle.

Lo anterior es descrito por Solar (2009) cuando afirma: "... sobre todo existe una carencia de experiencias cuyo objetivo sea indagar sobre el desarrollo de competencias en el aula. Por otra parte entre el profesorado existe una sensación de carencia de herramientas para desarrollar competencias en el aula" (P. 5).

En particular sobre la modelación como proceso matemático y objeto de enseñanza, Villa (2007) ha hecho relevantes aportaciones; sin embargo son escasas las investigaciones sobre la competencia matemática modelizar, situación que describen Sol, Jiménez y Rosich (2007) al argumentar: "si bien hay diversos estudios centrados en la adquisición de procesos de modelización, hay mucho menos en el desarrollo competencial y son menos aún, los que tratan de hacer proyectos con alumnos de 12 a 16 años" (P. 47).

En este sentido, la problemática para este estudio se concreta en la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuál sería una caracterización de la competencia matemática modelizar para el caso de la función cuadrática, en estudiantes del grado noveno de Educación Básica Secundaria de la Institución Educativa Juan Bautista la Salle?

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Solar (2009), García (2011) y Marcos (2008) son antecedentes de este estudio, que han contribuido desde la investigación al enfoque competencial. Solar (2009), en su tesis doctoral, plantea un modelo teórico a priori de la competencia matemática modelizar el cual tiene como componentes estructurales: los procesos matemáticos, las tareas matemáticas, los niveles de complejidad y las fases de la modelización. Marcos (2008) analiza el desarrollo de la competencia matemática comunicativa cuando la clase de geometría se organiza en ambiente mediado con TIC y un modelo de trabajo colaborativo. García (2011) investiga cómo el uso del software Geogebra puede contribuir a desarrollar la competencia matemática y sugiere un procedimiento para la evaluación por competencias en el aula de secundaria.

En nuestro caso, para caracterizar la Competencia Matemática Modelizar, adoptamos un modelo teórico funcional de esta competencia, basado en Solar (2009) respecto a los componentes conceptuales de este modelo como son: procesos matemáticos de las fases de modelización, tareas y niveles de complejidad. Por otra parte de (2006) asumimos el componente metacognitivo.

Una aproximación a la matriz de competencia, que resume la estructura del modelo teórico funcional de la competencia matemática modelizar que se asume para el desarrollo de la investigación, se presenta a continuación:

	Componentes de la competencia matemática Modelizar	*Elementos de los Componentes*	*Categorías de análisis*
Competencia matemática modelizar	Conceptual	Procesos matemáticos de las fases modelización	Fases de modelización
	Uso	Tareas	Contenido (función cuadrática) Niveles de complejidad Fases del proceso
		Niveles de complejidad	Reproducción Conexión Generalización Reflexión
	Metacognitivo	Metacognitivo	Declarativa Procesal
	Interacciones sociale	Participación	

Tabla 1. Matriz de competencia para el modelo teórico de la competencia matemática modelizar

El componente conceptual de la competencia matemática se asocia con los procesos matemáticos de las fases de modelización, que fueron integrados de los componentes: procesos matemáticos y fases de la modelización que están por separado en la propuesta de Solar (2009), porque los procesos matemáticos surgen en cada fase del proceso de modelización.

De otra parte, en la dimensión procesos matemáticos de las fases de modelización asociadas al componente conceptual de la competencia matemática se consideran dos categorías: la función cuadrática y las fases del proceso de modelización. En la función cuadrática se considera la descripción cualitativa de la variación y la cuantificación de la variación. Las fases del proceso de modelización se asumen de (2006) y se ubican en el componente conceptual porque a partir de él se relacionan los conceptos matemáticos para interpretar situaciones y fenómenos de la realidad social del estudiante.

Las tareas son otro componente esencial en la caracterización de la competencia matemática modelizar debido a que articulan los componentes de este modelo: la función cuadrática, las fases del proceso de modelización y los niveles de complejidad. Estas tareas se convierten en un instrumento para analizar los desempeños de los estudiantes y ajustar el modelo teórico funcional propuesto para la competencia matemática modelizar.

Los niveles de complejidad tienen dos funciones: primero como niveles de complejidad de las tareas y segundo como herramienta de análisis de los desempeños esperados de los estudiantes.

También introducimos el componente metacognitivo de la competencia matemática modelizar de la propuesta de (2006). En este componente consideramos dos categorías: la *Metacognición declarativa* que contiene el conocimiento de diagnóstico acerca del propio pensamiento, el pensamiento para juzgar acerca de las tareas y el conocimiento estratégico sobre las formas de llevar a cabo cada fase del proceso de modelización, y la *Metacognición procesal* que contiene la planificación para examinar y juzgar, lo que significa el control de las propias acciones.

METODOLOGÍA

La perspectiva metodológica de esta investigación se consolida en el enfoque cualitativo interpretativo, desde el cual el método usado es el estudio de caso al tener como propósito la caracterización de la competencia matemática modelizar para el caso de la función cuadrática en un grupo estudiantil particular concreto y focalizado de noveno grado de la Educación Básica Secundaria de la Institución Educativa Juan Bautista la Salle del municipio de Florencia, departamento del Caquetá, a partir de un modelo teórico funcional no acabado de la competencia matemática modelizar, que da la posibilidad de visibilizar descriptores emergentes en la práctica de aula, para cada categoría de los componentes del modelo. Esto hace de la investigación un estudio descriptivo exhaustivo, una narración e interpretación y un análisis en profundidad, sobre la problemática objeto de estudio.

El diseño de la investigación contempla las siguientes etapas:

1. La construcción de una aproximación a un modelo teórico funcional de competencia matemática modelizar basado en el marco teórico.
2. El diseño de tareas matemáticas que involucran la función cuadrática como objeto matemático escolar emergente, en distintos niveles de complejidad, como componente estructural del modelo teórico de competencia matemática modelizar.
3. El diseño de una matriz de competencia matemática modelizar como instrumento de análisis que identifica tareas, niveles de complejidad, fases del proceso de modelización y la metacognición.
4. Implementación de las tareas matemáticas para la recolección de datos a partir de grabaciones en audio y vídeo, fichas de observación no participante, protocolos, portafolios y registros de procesos.
5. Caracterización empírica de la competencia matemática modelizar para el caso de la función cuadrática, elaboración de resultados y conclusiones.

ANÁLISIS DE DATOS

No se tienen aún resultados empíricos de la investigación, y los resultados tangibles corresponden a las aproximaciones al modelo de competencia matemática modelizar, la matriz de competencias y las tareas matemáticas con diferentes niveles de complejidad en la clasificación de Solar (2009).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

D´Amore, B., Godino, J., Fandiño, M., (2008).*Competencias y matemáticas*, Bogotá, Magisterio.

García, L., (2011). *Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir geogebra en el aula.* Universidad de Almería, Almería, España

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas. Lineamientos Curriculares.* MEN. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanías*. Bogotá.

Maaß, K. (2006). What are Modelling Competencies? *ZDM, 38(2), 113-142.* Marcos, G., (2008). *Un modelo de competencias matemáticas en un entorno interactivo.* Universidad de la Rioja. España

OCDE. (2006). *PISA marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura*. España: Santillana.

Solar, H., (2009). *Competencias de modelización y argumentación en interpretación de gráficas funcionales: propuesta de un modelo de competencia aplicado a un estudio de caso*. Universidad Autónoma de Barcelona. Bellaterra.

Sol, M.; Giménez, J. & Rosich, N. (2007). *Competencias y proyectos matemáticos realistas en la ESO*. *Uno*, 46, 43-60.

Villa, J. A. (2007). *La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo*. *Tecno Lógicas*, pp. 63-85. Descargado el 10 de Mayo del 2012 de http://funes.uniandes.edu.co/959/

¿Pensamiento variacional en los libros de texto?: una pregunta que nos permite aprender como docentes

Julián Ricardo Gómez[*]
José Luis Orozco[**]
Germán Darío Realpe[***]
Gloria Benavides[****]
Ninfa Navarro[*****]
Edgar Alberto Guacaneme[******]

RESUMEN

A través del estudio de tareas propuestas en libros de texto que usamos cotidianamente en el proyecto de formación "Juega y construye la Matemática", hemos reconstruido aspectos de nuestro conocimiento didáctico del contenido matemático relacionado con el pensamiento variacional e identificado elementos, asociados al desarrollo del razonamiento covariacional, no necesariamente presentes de manera explícita en las teorías que lo abordan. Esta comunicación expresa algunos de estos aspectos y elementos, como una invitación a los profesores de matemáticas, colegas nuestros, a configurar equipos de estudio y avanzar en su desarrollo profesional.

Palabras clave: pensamiento variacional, formación de profesores, razonamiento, análisis de tareas.

[*] Colegio Champagnat. Dirección electrónica: juliangomez@colegiochampagnat.edu.co
[**] Colegio Champagnat. Dirección electrónica: joseluisorozco@colegiochampagnat.edu.co
[***] Colegio Champagnat. Dirección electrónica: germanrealpe@colegiochampagnat.edu.co
[****] Colegio Champagnat. Dirección electrónica: gloriabenavides@colegiochampagnat.edu.co
[*****] Colegio Champagnat. Dirección electrónica: ninfanavarro@colegiochampagnat.edu.co
[******] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica:guacaneme@pedagogica.edu.co

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Desde hace más de dos décadas y media la Comunidad de Hermanos Maristas ha estado comprometida de manera singular con la educación en matemáticas, a través del desarrollo del proyecto "Juega y Construye la Matemática"; los trabajos de investigación e innovación liderados por el profesor Jorge Castaño por un poco más de tres lustros y el trabajo editorial, de incorporación de lo tecnológico y de formación docente coordinado en la última década por el profesor Arbey Grisales, constituyen dos evidencias de ello.

Recientemente, los profesores de matemáticas del Colegio Champagnat de Bogotá hemos emprendido un ejercicio colectivo de aprendizaje a partir de reflexionar y estudiar lo que gestionamos a través de nuestro quehacer docente. En esta dirección, inicialmente hemos hecho un balance de nuestras visiones acerca de la puesta en acto del proyecto y hemos planteado unas hipótesis sobre las que estamos trabajando, algunas de las cuales son: (i) puede existir una brecha entre el trabajo realizado en primaria y secundaria, en razón a que en primaria el juego tiene una expresión concreta, y en secundaria el juego tiende más al trabajo con objetos inmateriales (por ejemplo, los símbolos); (ii) la organización curricular que regía como política hasta antes de los *Lineamientos* (MEN, 1998), aún mantiene un nivel de incidencia en el currículo de matemáticas que poco favorece la construcción de una identidad asociada al proyecto; (iii) las tareas propuestas en las cartillas, que expresan el currículo propuesto del proyecto, no han sido estudiadas desde las directrices curriculares actuales (MEN, 1998, 2006), particularmente como expresión de los diferentes tipos de pensamiento matemático, expresados en tales directrices.

Precisamente para abordar la última de las hipótesis hemos emprendido inicialmente la identificación y análisis de las tareas presentes en las cartillas, que pueden propender por el desarrollo del pensamiento variacional; sin embargo, esta tarea nos implicó en el estudio de las directrices curriculares en torno a este tipo de pensamiento y en la apropiación significativa de un marco que describe el razonamiento covariacional (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2003). La presente comunicación, exhibe algunos avances en esta dirección.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

En sentido estricto, el trabajo de análisis desarrollado cuenta con dos insumos de referencia: el contenido de las disposiciones curriculares para las matemáticas escolares en Colombia (MEN, 1998, 2006) y lo relativo al razonamiento covariacional (Carlson et al. 2003).

Más allá de detallar lo relatado en las disposiciones, a continuación esbozamos algunas ideas que nos han sido particularmente significativas. Reseñemos, entonces, que entendemos que el pensamiento variacional: (i) no es un contenido ni un procedimiento matemático que se ubique en un grado escolar; (ii) su desarrollo se constituye en un horizonte de sentido para el currículo de las matemáticas escolares; (iii) es uno de los tipos que configura el pensamiento matemático, pero se articula con los demás tipos de pensamiento; (iv) convive en estrecha relación con el aprendizaje de temas matemáticos relacionados con el estudio de la variación y el cambio; (v) debe ser objeto/objetivo de trabajo en cada uno de los grados o ciclos escolares y, en este sentido, se configura como un asunto trasversal y un continuo *in crescendo* del currículo.

Por otra parte, se ha asumido una perspectiva teórica sobre el razonamiento covariacional, entendido como "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra" (Carlson et al., 2003, p. 124). De este consideramos pertinente reseñar, de manera supremamente sintética, los niveles de razonamiento, a través de una tabla tomada casi textualmente (Carlson et al., 2003, p. 129).

NIVELES DEL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL

El marco conceptual para la covariación describe cinco niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación. Estas imágenes de covariación se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas por cada imagen.

Nivel 1 (N1). Coordinación

En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable.

Nivel 2 (N2). Dirección

En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra.

Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa

En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra.

Nivel 4 (N4). Razón promedio

En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada.

Nivel 5 (N5). Razón instantánea

En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario.

METODOLOGÍA

La estrategia de identificación y estudio de las tareas en las cartillas ha sido relativamente simple, pues, organizados en pequeños equipos, nos hemos encargado de leer las cartillas de algunos grados y de rastrear las tareas que parecieran movilizar el pensamiento variacional. Una vez identificadas, las resolvemos y reflexionamos sobre las mismas, dándonos la posibilidad de reconocer maneras de potenciarlas aún más a favor del desarrollo del pensamiento variacional y, en este sentido, haciendo unos ejercicios de diseño curricular puntual y, por ahora, especulativo. En el siguiente apartado ilustramos algunos momentos de este proceso.

ANÁLISIS DE DATOS

Tomemos una de las tareas (*Actividad N.° 29*) que identificamos en la cartilla para el grado quinto (Vera, Rodríguez & Ríos, 2012, p. 49); en esta se trabaja con los números triangulares. Inicialmente se presenta el dibujo de la figura 1 y se pide que el estudiante "estudie las disposiciones de puntos" y se hacen consideraciones y preguntas acerca de la manera de *construir* más números triangulares. Posteriormente se presenta la información de la figura 2 y se invita al estudiante a que diseñe y use un *método* para encontrar números triangulares sin recurrir a hacer un dibujo de los mismos.

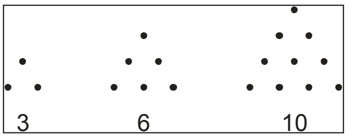


Figura 1

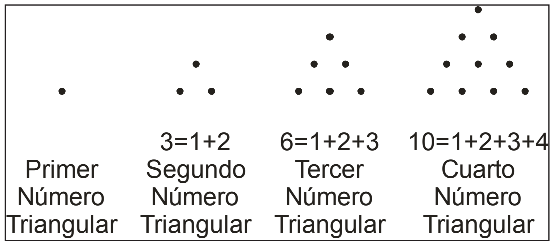


Figura 2

Al respecto, la tarea se refiere a la identificación de la misma en relación con el pensamiento variacional; debemos señalar, entre otras observaciones, que:

1. Si bien es suficientemente claro que a través de esta se está procurando el reconocimiento de un patrón de cambio, no es tan diáfana la existencia de dos magnitudes que varían de manera coordinada. De hecho, desde nuestra perspectiva, en la figura 1 una de las "magnitudes" está implícita y la otra se explicita a través de dos registros de representación diferentes (figural y numérico); por su parte en la figura 2 la misma "magnitud" se explicita a través de la verbalización de los ordinales (i. e., primero, segundo, tercer, cuarto). Esto sucede en la mayoría de las situaciones que presentan secuencias gráficas (verbigracia, las que otrora se usaban en los exámenes ICFES para evaluar lo que entonces se llamaba razonamiento abstracto). Desde esta perspectiva consideramos que antes que el estudiante pueda coordinar el cambio de una variable con respecto al cambio de la otra (N1), debe reconocer las magnitudes que varían; por lo tanto, vemos necesario incluir un Nivel 0 (N0) Reconocimiento de las variables en el listado de niveles propuestos por Carlson et al. (2003).

2. Las consignas y preguntas propuestas para las situaciones expresadas en las figuras 1 y 2 aluden fundamentalmente al Nivel 3 (N3) Coordinación cuantitativa. En efecto, el estudiante debe lograr ver la variación entre una y otra figura de la secuencia, pero no basta que observe que la cantidad de puntos aumenta, sino que debe cuantificar cada uno de los cambios. En la figura 1 este reconocimiento se puede hacer en el registro figural o en el registro numérico y connota operaciones matemáticas distintas: conteo en el primer caso y resta en el segundo. Para la figura 2 este reco-

nocimiento se puede hacer, adicionalmente, a través de la comparación de las expresiones que presentan las sumas de los números. En ambos casos (figuras 1 y 2) no se exige explícitamente la cuantificación de la magnitud que se refiere al número de orden de cada uno de las disposiciones. Lo anterior nos permite suponer que la coordinación cuantitativa pasa por la cuantificación de los cambios de cada una de las variables involucradas, aunque ocasionalmente uno de ellos quede suficientemente oculto (quizá debido a su aparente banalidad). Asimismo, nos permite sospechar que la cuantificación del cambio o variación de una de las variables depende del tipo de registro en el que se presente la información de los valores a comparar.

3. La Actividad N.° 29 podría complementarse para abordar el Nivel 4 (N4) Razón promedio y asumirse como caso particular de una situación para el Nivel (N5) Razón instantánea. En efecto, creemos que si se enfatizara en la relación que existe entre el número asociado al dibujo de la secuencia (i. e. a la variable que hemos señalado aparece implícita o que solo se explicita verbalmente) y el número triangular respectivo, podría disponerse de una relación funcional explícita (inicialmente de ⌉ en ⌉ y posteriormente de | en |), no lineal ni afín, en la cual se exploren condiciones sobre la razón de cambio promedio (para la función de variable natural) e incluso se aborde, en los grados de la Educación Media, el estudio de la razón instantánea (para la nueva función de variable real).

CONCLUSIONES

El estudio del conocimiento escolar que como colectivo hemos emprendido nos ofrece una posibilidad de aprendizaje individual y colectivo que definitivamente configura acciones concretas de desarrollo de nuestro conocimiento personal. Sin embargo, debemos reconocer que este se potencia cuando asumimos como marco de referencia los planteamientos esbozados en la normativa curricular, y en documentos y teorías resultantes de la investigación en didáctica de la matemática. Asimismo, advertimos que somos capaces de proponer hipótesis que si bien pueden ser investigadas rigurosamente en el campo de la educación matemática, constituyen hipótesis de trabajo en nuestro quehacer docente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA 8* (2), 121-156.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Vera, J., Rodríguez, A., & Ríos, A. (2012). *Juega y construye la matemática. Quinto Grado*. Bogotá: Editorial Kimpres Ltda.

Decisiones didácticas del profesor en una secuencia didáctica que integra un AGD respecto a la proporcionalidad en grado séptimo

*Diana Ximena Ortiz Collazos**
*Luis Fernando Espinosa Sanclemente***

RESUMEN

Esta conferencia recoge algunos de los avances del proyecto que se viene adelantando en la Maestría en Educación Matemáticas de la Universidad del Valle, en donde se profundiza sobre las decisiones didácticas del profesor, cuando pone en escena una secuencia didáctica que integra AGD. Tal secuencia toma en consideración aspectos de la teoría de la orquestación instrumental y la teoría de situaciones didácticas (TSD), alrededor de la noción de proporcionalidad en grado séptimo.

Palabras clave: teoría de situaciones didácticas, orquestación instrumental, decisiones didácticas del profesor, ambientes de geometría dinámica.

* Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle. Institución Educativa Jorge Robledo-Vijes. Dirección electrónica:dixiorco@hotmail.com

** Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle. Colegio Inglés de los Andes-Cali. Dirección electrónica: luisfernando.512@hotmail.com

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El foco de interés de este trabajo son las decisiones que toma el profesor en el transcurso de su práctica educativa. Margolinas (2005) nos plantea que el acto de decidir, ya sea en el nivel macro o en el micro, la toma de decisiones, representa una actividad muy importante del maestro. Además, desde las investigaciones en didáctica de las matemáticas, se resalta el papel del profesor en el diseño y elaboración de su material de trabajo, ya que en esta actividad el maestro toma una serie de decisiones en pro de alcanzar los objetivos propuestos.

De este modo, el profesor es el principal gestor del acto educativo, y sus pensamientos, creencias y vivencias personales influyen en las decisiones y acciones de los mismos, determinando sus prácticas educativas; en muchos momentos estas decisiones pueden ser conscientes o inconscientes. He ahí la importancia de esta propuesta, ya que lo que se intenta es que el profesor rememore los pensamientos sobre lo sucedido en el aula y su reacción ante ello, recopilando información sobre las propias experiencias y, a partir de ahí, aplique estrategias de intervención o cambio.

Ahora bien, Margolinas propone un modelo de análisis de la actividad del profesor, el cual será un referente fundamental para esta propuesta; en él, se hace explícito el nivel de plan de lección, en donde se caracteriza la actividad del profesor en la planeación de la lección; en este nivel se tomará en consideración una secuencia didáctica que integra referentes teóricos de la teoría de situaciones didácticas (TSD). Acosta M, menciona que este referente teórico provee un modelo de aprendizaje en el que el software de geometría dinámica puede considerarse como un medio adecuado para que la interacción de los estudiantes produzca efectivamente un aprendizaje, posibilitando al profesor el utilizar las experiencias personales de los estudiantes para darle sentido al saber que desea enseñar.

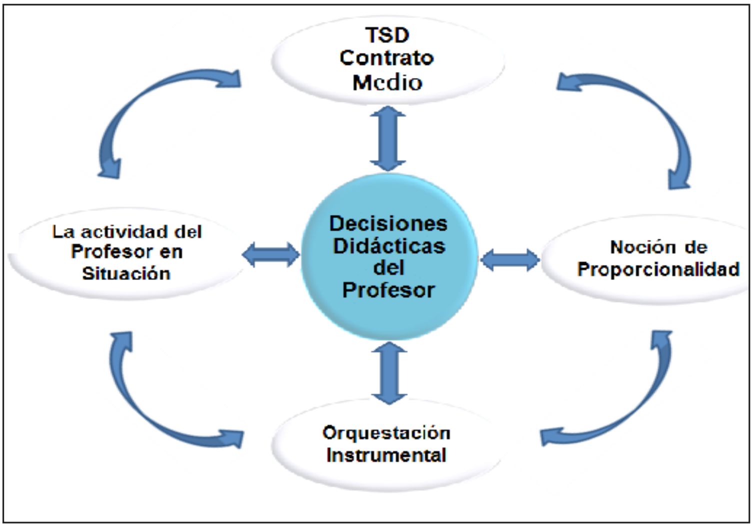
En esta secuencia, también se integran aspectos fundamentales de la orquestación instrumental, ya que como lo plantea Trouche (2002), la orquestación instrumental se entiende como una categoría que permite articular la concepción, el diseño y la puesta en escena de secuencias didácticas concebidas desde una mirada instrumental. En consecuencia, estas consideraciones permitieron formular el siguiente interrogante.

¿Cuáles son las decisiones didácticas del profesor cuando pone en escena una secuencia didáctica sobre la proporcionalidad que integra un ambiente de geometría dinámica?

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

La contextualización del problema, permitió identificar las categorías de análisis que sustentan el trabajo, en primera instancia y como eje central se encuentra la dimensión cognitiva soportada bajo la teoría de la actividad del profesor en los niveles descritos por Margolinas (2003) La intención de este marco teórico es categorizar las decisiones que toma el profesor en relación con la dimensión didáctica y matemática.

La dimensión didáctica usa como referencia la teoría de Trouche (2004) ya que conceptualiza la orquestación instrumental como la acción por el cual el profesor se encarga de organizar sistemáticamente e intencionalmente los procesos que están presentes en la enseñanza – aprendizaje y de la configuración y manipulación de los artefactos que están en disposición en el medio de enseñanza, con la intensión de guiar la génesis instrumental que va desarrollando el estudiante.



Para tal fin, también se incorpora la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), en donde de ella se retoma la noción de contrato didáctico y de medio, los cuales son elementos que se articulan con las decisiones del docente y permite a su vez, establecer conexión con el objeto matemático puesto en juego en la secuencia que el docente previamente diseña en el nivel de planeación y es llevada al aula en el nivel de ejecución y sirve como medio para crear un proceso de devolución con el estudiante.

METODOLOGÍA

Para elaborar el referente metodológico que inspira este trabajo, se determinó utilizar el paradigma de investigación cualitativo con un acercamiento a un estudio de caso en el enfoque de sistematización de una experiencia de aula. Este paradigma, proporciona elementos teóricos que nos permiten dar cuenta de la caracterización de las Decisiones Didácticas del profesor cuando concibe y pone en escena una secuencia didáctica.

En este sentido, Borjas (2008) aporta argumentos que dan cuenta de la sistematización de experiencias de aula, donde plantea que; *lo que resulta interesante es poder recoger lo que has hecho en el aula, ordenarlo, darle un sentido y explicar por qué no seguiste la ruta planificada y dar a conocer los resultados y aprendizajes que obtuviste. Este proceso se ha llamado "sistematización de la experiencia de aula".*

En el proceso de sistematización de las experiencias de aula, están implícitas una serie de decisiones que toma el profesor. Estas decisiones pueden ser analizadas y caracterizadas, bajo un acercamiento a un estudio de caso; que para efectos de este trabajo consiste en analizar a un profesor cuando concibe y pone en escena una SD. Esto fue pensado bajo los parámetros de Stake (1998), quien menciona que el estudio de caso *es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad es circunstancias concretas.*

Ahora bien, este trabajo contempla un estudio de caso con un carácter cualitativo, ya que tiene como objetivo caracterizar y describir las prácticas de profesor en los niveles de planeación, ejecución y devolución, con la intención de reflexionar sobre la práctica pedagógica en el aula.

ANÁLISIS DE DATOS

La experiencia dio cuenta de las decisiones que asume el profesor cuando se pone en acto la SD, las cuales en muchos casos generan perturbaciones cognitivas en los estudiantes, cambio de manera de proceder en sus estrategias o replanteamiento de ellas. Estas decisiones tienen una intencionalidad didáctica y se desarrollan en torno al saber, a través de la regulación del contrato y de las producciones de los estudiantes.

Ahora bien, el profesor tomo decisiones que no estaban contempladas en los análisis a priori. Por ejemplo al inicio de la fase de validación el profesor dividió el grupo en dos, con la finalidad de que cada grupo utilice medidas arbitrarias para demostrar que sus estrategias son válidas.

Esto simplemente constata que cualquier profesor al poner en escena una SD, realiza posibles cambios que quizás no estaban contemplados en los análisis a priori de la misma, y por ellos las decisiones que se tomen tendrán una "Adaptación" según la intencionalidad didáctica del profesor.

En cuanto al medio previamente configurado se evidencio que no era necesario que los estudiantes tuvieran un manejo previo de Cabri, porque para el desarrollo de la SD solo era indispensable la herramienta arrastre, la cual se convirtió en un medio de verificación y comparación de las longitudes de los lados de las canchas. Además los estudiantes asociaron fenómenos de visualización para contrastar sus hipótesis.

El tiempo estipulado desde los análisis *a priori* para cada fase, no correspondió al tiempo real, dado el profesor tomo la decisión de finalizar cada una de las fases, en la medida en la que se evidenciaban sus avances. Además en la fase de formulación el profesor hizo que todas las parejas salieran al tablero a exponer sus estrategias sin importar que la estrategia tuviera similitud a otras planteadas. En conclusión en cada una de las fases el tiempo fue más amplio del contemplado en *los a priori.*

CONCLUSIONES

Se considera que en la construcción de la secuencia didáctica se debe evidenciar la integración de teorías mencionadas en el marco teórico, las cuales permitirán ser el eje para el estudio de las decisiones didácticas del profesor cuando se pone en juego dicha secuencia en el aula de clases. Tales decisiones serán el insumo para establecer la importancia que tiene una decisión por parte del profesor en el proceso de la enseñanza y aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIGRÁFICAS

Borjas, B. (2006). Orientaciones para sistematizar experiencias. *Propuesta didáctica para la enseñanza de la lectura y la escritura*.

Brousseau G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Guacaneme, E. (2001) Estudio didáctico de la proporcionalidad: *Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas*. Universidad del Valle. Tesis de Maestría.

Guacaneme, E. (2002). Una mirada al tratamiento de la Proporcionalidad en textos Escolares de Matemáticas. *Revista EMA*, 7 (1), 3-42

Margolinas, C. (2009) La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas. Bucaramanga: Ediciones Universidad Industrial de Santander.

Mercer, N. (1997). La construcción guiada del conocimiento. *El habla de profesores y alumnos*. Barcelona: Paidós.

Rabardel, P. (2001) From Artifact to instrument mediatedlearning. Helsinki: University of Helsinki.

Sfard, A. (2008). Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional. Cali: Universidad del Valle, *Colección Libros de Investigación*.

Trouche, L. (2002) Genèses instrumentales, aspects individuels et collectifs. En: GUIN, D. y TROUCHE, L. (Ed) Calculatrices symboliques. Transformer un outilen un instrument du travail informatique: un problème didactique. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

Vergnaud, G. (1993). Teoria dos campos conceituais. In Nasser, L. (Ed.) Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. p. 1-26.

¿Puede la conmensurabilidad cerrar el cerco a la inconmensurabilidad?

Edwin Yesyd Parra[*]
Erica Senid Vargas[**]
Edgar Alberto Guacaneme[***]

RESUMEN

La idea de los pitagóricos de expresar diferentes relaciones entre cantidades de magnitud geométrica a través de números los condujo a intentar expresar la relación entre la cantidad de longitud de la diagonal y la del lado de un cuadrado, cuestión que abrió la puerta al problema de la inconmensurabilidad. La perseverancia del pensamiento humano encuentra entonces en los pitagóricos una expresión sin igual, al construir métodos geométricos que originan sucesiones de parejas de números naturales cuya razón se aproxima secuencial y alternantemente a la relación en cuestión. La demostración de la inconmensurabilidad del lado y la diagonal del cuadrado y los métodos aludidos para tales objetos geométricos son el objeto de este trabajo.

Palabras clave: inconmensurabilidad, razón y proporcionalidad, relación geométrica, sucesión.

[*] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: edwinyesyd@gmail.com
[**] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica:evargas379@gmail.com
[***] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica:guacaneme@pedagogica.edu.co

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

En el marco del desarrollo del Trabajo de grado titulado "La teoría de las proporciones en la escuela pitagórica", llevado a cabo en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, hemos estudiado aspectos del trabajo de dicha escuela, en tanto hito en la evolución de la teoría de las proporciones, y hemos centrado la atención en dos métodos (adición sucesiva y sustracción sucesiva) a través de los cuales los pitagóricos encontraron una aproximación a la razón entre la diagonal y el lado de un cuadrado. La presentación de la comprensión que sobre los mismos hemos logrado es el objeto de esta comunicación.

METODOLOGÍA

En el desarrollo del trabajo de grado citado antes, hemos procurado el estudio de documentos que refieren información sobre la *antanairesis* y *antipairesis* (Filep, 1999; Gardies, 1988; Thorup, 1992); por esta vía encontramos los métodos de adición y sustracción sucesiva, entendidos como métodos pitagóricos para aproximar la razón de magnitudes inconmensurables. Ligado al estudio de los métodos, hemos debido comprender el problema de la inconmensurabilidad (de Guzmán, 1986) y valorar la genialidad pitagórica expresada en tales métodos. En este sentido, en lo que sigue, primero abordamos tres maneras de enunciar el concepto de conmensurabilidad y, por ende, de inconmensurabilidad; esta última la ilustramos a través del estudio de la relación entre la diagonal y el lado de un cuadrado. Posteriormente hacemos una descripción de los métodos de adición y sustracción sucesiva, probablemente ideados por los pitagóricos para aproximarse a la relación en cuestión, a través de razones entre números naturales. Finalmente establecemos algunas reflexiones a propósito del trabajo realizado y de sus resultados.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

La noción de conmensurabilidad podemos enunciarla (o entenderla) de tres maneras diferentes, aunque interrelacionadas. La primera consiste en partir de dos magnitudes distintas A y B, y construir múltiplos de cada una de ellas (mA, nB; m y n números naturales) hasta encontrar una tercera magnitud C tal que $C = mA = nB$; en la figura 1 se ilustra esta manera de entender la conmensurabilidad para el caso de los segmentos A y B. Si bien en esta primera manera se privilegia la suma de las magnitudes, en la segunda se hace uso de sustracciones sucesivas. Así, dadas dos magnitudes D y E se procura encontrar una tercera magnitud F, tal que $rF=D$ y $sF=E$ (r y s números naturales); ello se consigue restando siempre la magnitud menor de la mayor, hasta el momento en que el resto sea cero. En la figura 2 hemos considerado los segmentos iniciales D y E, siendo $D>E$ y luego de restar dos veces E de D se obtuvo el resto C; posteriormente de E se restó C, obteniendo F, que se logró restar cuatro veces de C.

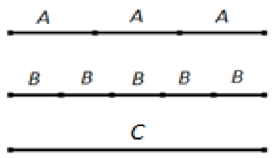


Figura 1. En este caso $C = 3A = 5B$

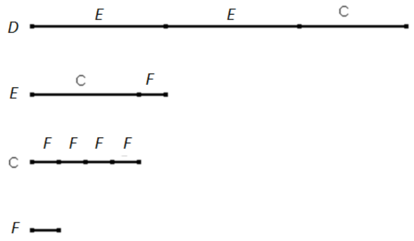


Figura 2. En este caso $14F=D$ y $5F=E$; C es el resto entre D y $2E$

La tercera y última manera involucra proporciones entre las magnitudes y los números que aparecen en las dos primeras maneras, $\frac{A}{B}=\frac{m}{n}$ o $\frac{E}{D}=\frac{s}{r}$ de modo que dos magnitudes son conmensurables si existen tales números con los cuales configurar una proporción. Si la relación entre dos magnitudes no se puede expresar con ninguna de las tres maneras anteriores (es decir que no podemos encontrar los números n y m o r y s) las magnitudes son inconmensurables.

Como es bien conocido, un ejemplo particular de magnitudes inconmensurables son las representadas por el lado y la diagonal de un cuadrado. No tan conocida es la deducción de la inconmensurabilidad entre estos objetos, veamos:

Sea el cuadrado $ABCD$ (ver figura 3). Supongamos que la diagonal y el lado son conmensurables. Existe entonces un segmento $\overline{HK}$ tal que divide a $\overline{BC}$ (lado) y $\overline{AC}$ (diagonal). Sea ahora $\overline{FC}$ congruente con $\overline{BC}$ y determínese E como corte de la perpendicular a $\overline{AC}$ con $\overline{AB}$.

Así, como $\sphericalangle AFE$ y $\sphericalangle CBE$ son rectos, $\overline{FE}$ y $\overline{BE}$ no son solo tangentes a la circunferencia con centro en C y radio $\overline{FC}$, sino que además son congruentes. Los ΔEFA y ΔCBA comparten el $\sphericalangle FAE$ y cada uno tiene un ángulo recto, luego estos son semejantes y se puede establecer que $\frac{FE}{BC}=\frac{AF}{AB}=\frac{AE}{AC}$

. Así se puede decir que como ΔCBA es isósceles, el ΔEFA también lo es, luego $\overline{AF}$ es congruente con $\overline{FE}$. Como se estableció que $\overline{HK}$ divide a $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ es decir, que $\overline{HK}$ cabe un número finito de veces en $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, además, $AC = AF + FC$ o, lo que es equivalente, $AC = AF + BC$, entonces $\overline{HK}$ también cabe un número entero de veces en $\overline{AF}$, del mismo modo como $AB = AE + EB$, lo cual equivale a $AB = AE + FA$, así también $\overline{HK}$ cabe un número entero de veces en $\overline{AE}$.

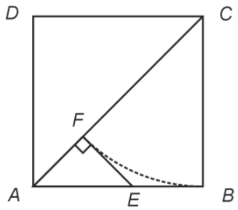


Figura 3. Construcción usada para deducir la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado de un cuadrado

Como los triángulos $\Delta\, EFA$ y $\Delta\, CBA$ se comportan de la misma manera y tienen características semejantes, el proceso anterior se continúa indefinidamente, es decir, siempre existirá el segmento $\overline{HK}$ que divide a los lados y las diagonales de los cuadrados que se generan. El $\overline{HK}$ siempre será menor que el lado, lo cual es imposible ya que si este divide el lado llegará el momento en el que sean iguales.

Ante esta evidencia de imposibilidad de existencia de dos números cuya relación fuera la misma que la existente entre la longitud de la diagonal y el lado de un cuadrado (entre otros fenómenos de inconmensurabilidad), los pitagóricos construyeron dos originales métodos para encontrar sucesiones de parejas de números cuya relación se aproxima secuencialmente a la relación entre las cantidades de magnitud geométrica en cuestión.

Método de adición sucesiva. En suma, el método consiste en formar cuadrados cada vez más grandes a partir de un cuadrado de lado 1, sumando al lado *a* la diagonal *d* y a la diagonal dos veces el lado (ver figura 4) y posteriormente calcular el valor de la razón entre la diagonal y el lado, bajo la consideración de que $d = 1$ (ver la tabla 1; en ella hemos usado notación moderna).

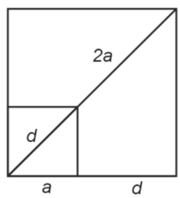


Figura 4. El cuadrado de lado a+d se construye a partir del cuadrado de lado a

d	$d=1$	$d_1=2a+d$	$d_2=4a+3d$	$d_3=10a+7d$	…	$d_n=2a_{n-1}+d_{n-1}$
a	$a=1$	$a_1=a+d$	$a_2=3a+2d$	$a_3=7a+5d$	…	$a_n=a_{n-1}+d_{n-1}$
Razón	$\frac{1}{1}=1$	$\frac{3}{2}=1,5$	$\frac{7}{5}=1,4$	$\frac{17}{12}=1,4166$	…	$\frac{d_n}{a_n}\approx\sqrt{2}$

Tabla 1. Relación entre el lado y la diagonal usando el método de adición sucesiva

La sucesión de las razones se aproxima alternadamente a lo que hoy conocemos como $\sqrt{2}$.

Método de sustracción sucesiva. En resumen, el método consiste en tomar un cuadrado de lado *a* y sustraerlo de la diagonal *d*; posteriormente, construir un cuadrado sobre el lado resultante (residuo) y para este hacer el mismo proceso (ver figura 5). Finalmente, se calcula el valor de la razón tomando $a=1$ y $d=1$ (ver la tabla 2; en ella hemos usado notación moderna).

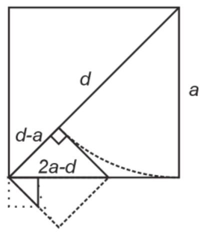


Figura 5. El segundo cuadrado se construye a partir del cuadrado del resto de d-a

d	$d=1$	$d_1=\|2a-d\|$	$d_2=\|3d-4a\|$	$d_3=\|10a-7d\|$	…	$d_n=\|2a_{n-1}-d_{n-1}\|$
a	$a=1$	$a_1=\|d-a\|$	$a_2=\|3a-2d\|$	$a_3=\|5d-7a\|$	…	$a_n=\|-a_{n-1}+d_{n-1}\|$
Razón	$\frac{1}{1}=1$	$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}=1$	$\frac{3}{2}=1,5$	…	$\frac{d_n}{a_n}\approx\sqrt{2}$

Tabla 2. Relación entre el lado y la diagonal usando el método de sustracción sucesiva

Ahora, si observamos el valor que toma la diagonal luego del *n*-ésimo paso impar ($n\geq 3$), este resulta ser negativo. Algo similar ocurre con los valores del lado luego del *n*-ésimo paso par ($n\geq 4$). Dado que en el contexto geométrico no podemos involucrar magnitudes negativas, posiblemente los pitagóricos optaron por restar el menor valor del mayor en cada uno; por tanto, al emplear la notación moderna para encontrar los valores de a_n y d_n, tomamos el valor absoluto de las magnitudes involucradas. De esta manera, aquí también, la sucesión de las razones se aproxima alternadamente a lo que hoy conocemos como $\sqrt{2}$; de hecho, a partir del tercer término, coincide con la del método de adición sucesiva.

CONCLUSIONES

Al observar y analizar los resultados de cada uno de los métodos encontramos que ambos generan, en esencia, *una misma* sucesión de lo que hoy llamaríamos números racionales, a través de los cuales se va *cerrando el cerco* y capturando la inconmensurabilidad (o si se prefiere, la irracionalidad); sin embargo, hay que advertir que uno de los métodos la genera dirigiéndose hacia lo infinitamente grande, en tanto que el otro lo hace transitando hacia lo infinitamente pequeño. No deja de sorprendernos que esta condición de tratamiento diferenciado conduzca al mismo resultado y no podemos menos que imaginar un espacio que se extiende infinitamente en dos direcciones antípodas para cerrarse sobre sí mismo y finalmente encontrarse. Esta visión, que más parece una fantasía, nos revela un halo de misterio que, por un lado, rescata el carácter estético de las matemáticas, a veces tan esquivo a la mayoría de humanos y, por otro lado, nos deja entrever el aspecto mitológico que parecía envolver la cosmovisión pitagórica mediada por las matemáticas mismas. Todo lo anterior emerge como un resultado supremamente valioso para nuestra condición de maestros de matemáticas en formación, pues más allá de suministrarnos un poco más de erudición (y con ello atacar nuestra infinita ignorancia), nos ofrece un panorama para redimensionar la belleza de las matemáticas y para comprender potenciales bases desde las cuales escolarmente se aborde el problema de los números irracionales y su profunda relación con los números racionales (o viceversa).

REFERENCIAS

De Guzmán, M. (1986). Los Pitagóricos.

Filep, L. (1999). Pythagorean side and diagonal numbers. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, 15*, 1-7.

Gardies, J.-L. (1988). *L'Héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide. Un essai de reconstitution*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Thorup, A. (1992). A pre-euclidean theory of proportions. *Archive for History of Exact Sciences, 45*(1), 1-16.

Caracterización del proceso de generalización en Primaria

Diana Paola Piedra Moreno[*]

RESUMEN

La disciplina de las matemáticas trata con entidades abstractas, y la herramienta que permite comprender lo abstracto es el razonamiento; este implica el desarrollo, la justificación y el uso de las generalizaciones. Por ello desde la misma esencia de las matemáticas la generalización constituye un proceso de gran importancia que debe ser estudiado en el campo de la educación, reconociendo como primordial su desarrollo en la escuela, incluso desde los primeros grados de escolaridad. A estos planteamientos se agrega la necesidad y preocupación por comprender dicho proceso; de esta manera, las implicaciones para la elaboración de una caracterización del proceso de generalización en primaria desde una propuesta teórica de etapas de aprendizaje es el objeto central de este estudio.

Palabras-clave. Generalización, razonamiento, proceso de enseñanza–aprendizaje, educación primaria, construcción social del conocimiento.

[*] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. – Semillero Crisalida - LEBEM (Crisálida). Dirección electrónica: dppiedram@correo.udistrital.edu.co

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Desde los planteamientos de la Ley General de Educación (Congreso de la república de Colombia, 1994), la Educación Primaria tiene como uno de sus objetivos el desarrollo del conocimiento matemático necesario para manejar y usar procesos lógicos. La generalización se estructura de procesos lógicos y por esto se afirma que desde las políticas implementadas en el país es necesario su trabajo desde la Educación Primaria; adicionalmente, para autores como Kieran (1989, citado en Trujillo, Martínez, & Molina, s.f) la no experiencia de los estudiantes en trabajos relacionados con la búsqueda de patrones desde sus primeros años de escolaridad prolonga dificultades relacionadas con labores algebraicas en la Educación Secundaria. Siguiendo con lo anterior, es necesario que el trabajo con la generalización sea una realidad dentro de las aulas. El problema, según Mason, J. (1999), es que la generalización está como tópico dentro del currículo, pero no se le ve su importancia y el reto está en asegurar que los niños acepten la invitación de usar sus capacidades para conjeturar, como aspecto clave de la actividad matemática.

Para algunos docentes trabajar con procesos de generalización es un asunto que se contempla en bachillerato y no en primaria. Para Cambriglia, V. (2006), este hecho puede explicarse por la interpretación de lo generalizable como proceso estrictamente formal; pese a esto según esta autora la generalización debe trabajarse en la Educación Primaria, contemplando la dimensión social de la construcción del conocimiento, y la mayoría de trabajos que se encuentran abordan y caracterizan dicho proceso desde una postura ajena a la formación de niños. Siguiendo con esta idea se requiere caracterizar el proceso de generalización con una visión acerca de qué etapas están inmersas en el proceso de aprendizaje en primaria contemplando la dimensión social de la construcción del conocimiento.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

La generalización se contempla como un proceso (no como producto) ante alguna interacción patronal. Esto está en concordancia con una de las caracterizaciones de la generalización como el proceso de *"extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos"* (Kaput, 1999, citado en

Trujillo, Martínez, & Molina, s. f, pág. 2). Siguiendo con esta idea, existe primero lo general (similitud entre casos) y luego lo generalizado (comunicación más allá de los casos); estos serían elementos primordiales a la hora de hablar de fases de generalización. Según Radford (1991) hablar de un paso de la generalidad a la generalización es un proceso que está ligado con el pensamiento algebraico, en el cual el simbolismo y la geometría tienen un papel importante: el símbolo por representar lo desconocido con un carácter de variabilidad formando un lenguaje discursivo propio del álgebra, y la geometría por ser herramienta manipulativa, intuitiva, deductiva y analítica en la que existen magnitudes desconocidas asociadas con el lenguaje discursivo. Entonces desarrollar pensamiento algebraico no se realiza únicamente en bachillerato ya que está implícito un proceso, que se puede iniciar desde los primeros grados de escolaridad.

Para complementar esta idea, Mason, J. (1999) dice que los estudiantes, desde su ingreso en la escuela, pueden detectar patrones y expresar su generalidad; además, que la actividad de hallar un significado a partir del uso de las capacidades naturales hace real el disfrutar las matemáticas, ya que se permite abrir un proceso mental, para darle sentido al mundo general y numérico. Uno de los procesos involucrados en la actividad de generalizar es el razonamiento matemático.

Para Russell, S. (1999), el razonamiento es la herramienta para entender lo abstracto, es decir, pensar propiedades de los objetos para desarrollar generalizaciones; de este modo el razonamiento seria la capacidad de desarrollar, justificar y usar las generalizaciones. Para Piaget (citado por Russell 1999) los niños de 2 a 11 años están en una etapa de operaciones concretas, en la cual existe un aferramiento al objeto y nunca una abstracción; es indudable que se puede aprovechar la geometría para el paso de lo concreto a lo formal, durante el desarrollo del proceso de generalización que debe darse desde los primeros grados de escolaridad. También se reconoce que el proceso de generalizar, según Cambriglia, V. (2006), contempla la dimensión social ya que para ella la constitución de prácticas de generalización requiere de procesos de intercambio y discusión en el aula, permitiendo por medio de la validación (la autora asume la teoría de situaciones didácticas de Brousseau) que se refuten o se aprueben conjeturas formuladas por los mismos estudiantes. Adicionalmente, para Vygotsky (1978), en la formación de un concepto se liga el símbolo de la palabra a un atributo general; por esto es importante que los estudiantes formulen conjeturas verbales sobre el fenómeno que transcurre en una secuencia.

METODOLOGÍA

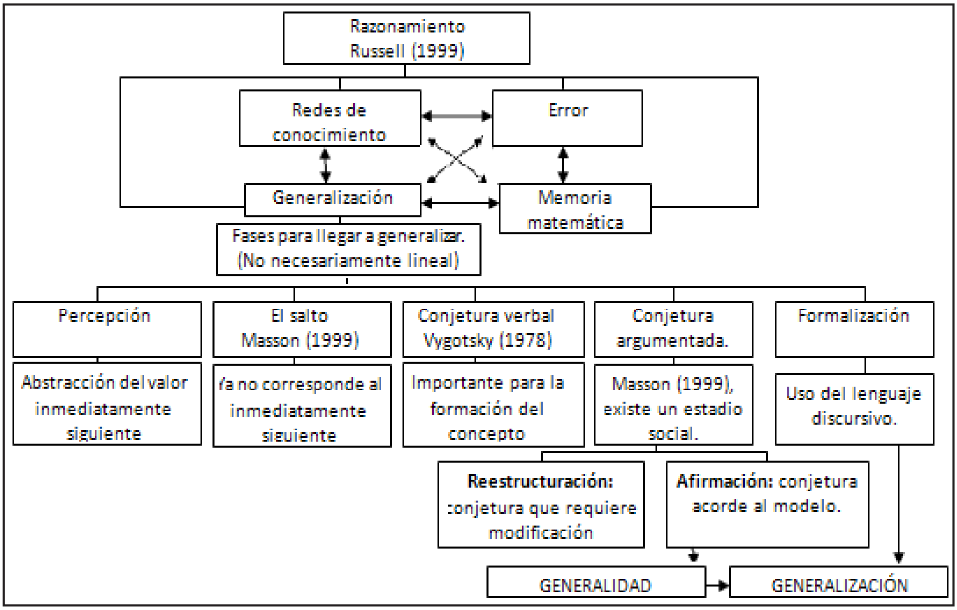


Ilustración 1. Posturas propias y documentales

Para caracterizar el proceso de generalización en primaria desde las etapas de aprendizaje, se recurrió a un análisis teórico para conformar una triangulación de información, que cruzara posturas de diferentes autores frente a la generalización. Finalmente se usó un mapa para consolidar las posturas de autores y las nuevas propuestas, esto puede apreciarse en la ilustración 1 cuya explicación se encuentra en el análisis de los datos.

ANÁLISIS DE DATOS

Tras analizar los documentos de los autores consultados que ya fueron sustentados en el presente marco teórico, se prosiguió a hacer cruces y construcción teórica de las etapas del proceso de generalización; esto se presenta a continuación. Con lo documental se llegó a que el razonamiento puede emplearse como herramienta para generalizar y esto forma parte de un proceso y por ello se pueden proponer unas fases en las que se evidencia una serie de elementos para llegar a la generalización en primaria, destacando que dichas fases no se desarrollan necesariamente de forma lineal:

Fase 1 "percepción": aquí el estudiante se vale de sus capacidades para encontrar el valor inmediatamente siguiente que adquiere una secuencia, haciendo uso de su percepción, es decir, que realiza por medio de sus sentidos una abstracción de la secuencia; cabe destacar que para primaria, es importante el uso de la percepción visual, del tacto o de un contexto significativo; por ello se puede hacer uso del lenguaje natural-cotidiano del niño o de la geometría como herramienta visual y manipulativa. En el ejemplo 1, un estudiante en esta fase diría que la rana avanza 10 metros, abstrae el patrón inmediatamente siguiente.

Fase 2 "el salto": para esta fase, el niño, aparte de realizar la abstracción del patrón inmediatamente siguiente, logra por medio de un salto obtener nuevamente un componente de la secuencia, que ya no corresponde al inmediatamente siguiente; dicha abstracción ya lo está incitando a encontrar una regla con la cual puede obtener cualquier componente de la secuencia. En el ejemplo 2 un niño en esta fase diría que la rana avanza en el quinto salto 10 metros, y en el quinceavo salto 30 metros; abstrae el patrón inmediatamente siguiente y uno correspondiente a un salto.

Si la rana salta 1 vez, avanza 2 metros. Si la rana salta 2 veces, avanza 4 metros. Si la rana salta 3 veces, avanza 6 metros. Si la rana salta 4 veces, avanza 8 metros. Si la rana salta 5 veces, avanza (¿?) metros. Si la rana salta 15 veces, avanza (¿?) metros.
Ejemplo 1. Fase de percepción

Fase 3 "conjetura verbal": según Vygotsky (1978), en la formación de cualquier concepto se liga el símbolo de la palabra a un atributo general de cualquier objeto; por esto es importante que los estudiantes realicen conjeturas verbales sobre el fenómeno que transcurre en una secuencia. Un estudiante en esta fase diría, con su lenguaje verbal, que para obtener los metros que salta la rana, se puede multiplicar por dos el número del salto.

Fase 4 "conjetura argumentada": aquí el niño pone a prueba su conjetura verbal; como lo menciona Mason (1999) un individuo hace una conjetura y reta a otros para que digan si están o no de acuerdo. Durante este proceso pueden existir dos caminos: uno cuando los sujetos retados están de acuerdo con la conjetura y logran argumentarla, o cuando no existe un desacuerdo y el sujeto que realizó la conjetura debe reestructurarla. A continuación se explican las dos sub-fases.

Sub fase "reestructuración": nuevamente usando aportes de Mason (1999), se encuentra que el propósito de hacer una conjetura es ponerla fuera de uno mismo, de manera que los demás aporten y ayuden a encontrar cosas que antes no se habían observado y realizarle una modificación si es necesario; dicha modificación se efectúa cuando gracias a los aportes de otros sujetos, se entra a un problema cognitivo, en el cual se realizan adaptaciones a un problema.

Sub fase "afirmación": esta fase también requiere de un aporte social, pero que sirve para garantizar que la conjetura que se hizo es acertada también para los demás, entonces se está listo para una fase de formalización. Cabe destacar que es en esta fase en la que se logra llegar a la generalidad, pero aún no se consigue llegar a una expresión generalizada.

Fase 5 "formalización": gracias a esta fase, se puede pasar de un lenguaje verbal a un lenguaje formal característico de las matemáticas. Reconociendo la letra como variable y número generalizado, ya que, como menciona Socas (1989), estas dos interpretaciones de la letra están ligadas porque cuando se logra generalizar un patrón, se está teniendo en cuenta su variabilidad dentro de un conjunto numérico. Entonces se puede decir que en esta fase se logra efectuar una representación simbólica generalizada, ya que se escribe con un lenguaje discursivo propio de las matemáticas, usando un lenguaje matemático para concretar las generalidades encontradas.

CONCLUSIONES

Caracterizar el proceso de generalización en primaria a partir de las fases o etapas de aprendizaje desde una metodología teórica es una labor que puede ser complementada por medio de la práctica misma del profesor de matemáticas; es por ello que se afirma que lo presentado es un trabajo no concluido, pero incitador a sumergirse en una de las líneas de investigación centradas en el álgebra cuyo enfoque es el de la generalización de relaciones y estudio de patrones, que puede ser enfocado a la Educación Primaria. A modo de conclusión también se puede incluir que pensar en las fases de percepción, salto, conjetura verbal, conjetura argumentada y formalización permite abarcar la dimensión social de la construcción del conocimiento, partiendo de una etapa en la cual el estudiante usa su percepción desde una operación concreta que puede estar en el contexto matemático, en el geométrico o en el cotidiano, permitiendo que el proceso de generalización en primaria pueda llegar a ser una realidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cambriglia, V. (2006). *Procesos de generalización en matemática en la transición primaria – media.* Recuperado el 17 de Enero de 2012, de http://www.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_22/pro_Cambriglia_tra.pdf

Congreso de la República de Colombia. (1994). *Ley General de Educación (Ley 115 de Febrero 8 de 1994).* Bogotá.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente.* Barcelona: Labor.

Radfor, L. (1991). *The roles of geometry and aritmetic in the development of algebra: historical remarks from a didactic perspective.* Recuperado el 15 de Octubre de 2010, de http://www.laurentian.ca/NR/rdonlyres/9154827D-20AB-4FD3-B0DE-2987C25D7C46/0/LuisRadfordTherolesofGeometryandArithmetic.pdf

Russell, S. (1999). *Razonamiento matemático en los primeros grados.* Massachusetts.

Socas, M. (1996). *Iniciación al álgebra.* Síntesis.

Trujillo, P., Martínez, E., & Molina, M. (s.f). *El proceso de generalización : un estudio con futuros maestros de primaria.* Recuperado el 15 de septiembre de 2011, de http://funes.uniandes.edu.co/1587/1/PAOLA-Trabajo_completo.pdf

Vygotsky, L. (1978). *Pensamiento y Lenguaje.* Madrid.

Aproximación de curvas en R^2 y R^3 a partir del plegado de superficies planas

Carlos Mario Pulgarín Pulgarín[*]
Carlos Mario Jaramillo López[**]

RESUMEN

El carácter discreto y continuo de las matemáticas se pone en evidencia al generar algunos tipos de curvas en y por medio del doblado de papel. Esta actividad hace que el concepto de Suma de Riemann, en el que se encuentra encubierto el concepto de infinito y los métodos clásicos para hallar el área bajo ciertas curvas, pueda fundamentarse y visualizarse a través de la axiomática de Huzita-Hatori formulando otra perspectiva en la iniciación al estudio del cálculo diferencial e integral.

Palabras clave: superficies, sumas de Riemann, aproximación de curvas

[*] Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: cpulgarin@ayura.udea.edu.co
[**] Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: cama@matematicas.udea.edu.co

INTRODUCCIÓN

La generación de curvas en tres dimensiones puede involucrar serias dificultades para su enseñanza y aprendizaje cuando no se tienen al alcance software o aplicativos virtuales que puedan contribuir a la construcción de modelos matemáticos simples para la comprensión de diversos conceptos geométricos y algebraicos. Sin embargo, el pliegue de superficies permite relacionar fácilmente conceptos del cálculo y la geometría, a la vez que estimula múltiples aspectos motrices por medio de la generación de figuras en dos y tres dimensiones.

Se presenta de este modo, a continuación, una alternativa didáctica para el docente y un elemento modelador en la geometría y las matemáticas para el estudiante, en el cual se tomará como punto de partida el plano, región donde se introduce la axiomática de Huzita-Hatori para brindar un formalismo y principios básicos en el pliegue de superficies y la construcción de elementos teóricos necesarios en la geometría plana, que luego dan paso a un estudio más profundo en el campo matemático relacionando la geometría analítica y el cálculo. Es así como se pone en evidencia el carácter discreto y continuo de las matemáticas al igual que saltan a la vista conceptos tales como límites, diferenciales y sumas infinitas, los cuales se pueden analizar desde otra perspectiva que potencie los modelos mentales y conceptuales del estudiante por medio de material concreto.

AXIOMAS DE HUZITA-HATORI

La axiomática de Huzita-Hatori surge como referente teórico y punto de partida en el formalismo y construcción de los diversos modelos de plegado. Consta de siete axiomas que se enuncian a continuación:

$[A_1]$ Dados dos puntos p_1 y p_2, hay un doblez único que pasa por ambos puntos.

$[A_2]$ Dados dos puntos p_1 y p_2, hay un doblez único que coloca p_1 sobre p_2.

$[A_3]$ Dadas dos líneas l_1 y l_2, hay un doblez que coloca l_1 sobre l_2.

$[A_4]$ Dado un punto p_1 y una línea l_1 hay una única perpendicular al doblez l_1 que pasa a través del punto p_1.

$[A_5]$ Dados dos puntos p_1 y p_2 y una línea l_1, hay un doblez que coloca p_1 sobre l_1 y pasa a través de p_2.

$[A_6]$ Dados dos puntos p_1 y p_2 y dos líneas l_1 y l_2, hay un doblez que coloca p_1 sobre l_1 y p_2 sobre l_2.

$[A_7]$ Dados un punto p_1 y dos líneas l_1 y l_2, hay un doblez que coloca p_1 sobre l_1 y es perpendicular a l_2.

GENERACIÓN DE CURVAS EN $\boldsymbol{R}^2$

Es posible construir polígonos regulares tomando como base un cuadrado. El perímetro del polígono generado puede aproximar una curva bien definida y, además, pueden obtenerse cálculos muy precisos de longitudes de arcos.

Si se considera la longitud del lado del cuadrado como a unidades puede relacionarse dicha medida con las del triángulo equilátero formado en su interior, y haciendo uso de sus habilidades algebraicas y geométricas podrá obtener las medidas del perímetro y área en función del lado del cuadrado base. Construcciones como esta, en las cuales se toman como punto de partida el mismo cuadrado, pueden elaborarse para un mayor número de lados en un polígono regular. Los resultados de algunos polígonos regulares puede verlos en la tabla 1.

Tabla 1. Comparativo de magnitudes para polígonos de 2^n lados, siendo n entero positivo par

Polígono de 4 lados	Polígono de 8 lados	Polígono de 16 lados
Lado: $R\sqrt{2}$	Lado: $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$	Lado: $R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
Perímetro: $R.2^2\sqrt{2}$	Perímetro: $R.2^3\sqrt{2-\sqrt{2}}$	Perímetro: $R.2^4\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
Apotema: $R\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	Apotema: $R\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	Apotema: $R\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$
Área: $R^2.2$	Área: $R^2.2\sqrt{2}$	Área: $R^2.2^2\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Generación de polígonos de $2n$ lados. Una forma alternativa de obtener polígonos de $2n$ lados que permiten generar con mayor detalle la aproximación a una curva es a partir del plegado reiterativo de bisectrices y perpendiculares a ciertos dobleces dentro una región plana de papel, como se muestra en la **Fig. 1**.

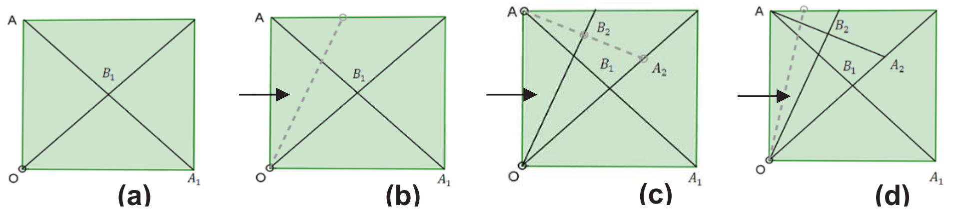


Fig. 1. Forma sucesiva de obtener polígonos de 2n lados tomando como base un cuadrado[1] Todos los cálculos y deducciones matemáticas hasta ahora vistos pueden tomar como punto de partida el pliegue de superficies de papel, pero dichos pliegues no solo son para el caso de una circunferencia, sino que es posible generalizarlos para cualquier tipo de curva.

Al analizar los resultados de la **tabla 1** y establecer una generalización para el caso de la longitud del lado de dichos polígonos se obtiene que: $l = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$ Asimismo, se ponen en evidencia resultados de radicales jerarquizados que al generalizarse para cualquier valor n (siendo n entero positivo) arrojan la siguiente expresión:

$$\sqrt{n(n-1)-\sqrt{n(n-1)+\sqrt{n(n-1)+\ldots}}}$$

Surge entonces una forma alternativa de aproximar el valor de π por medio de límites:

$$\pi = \lim_{k\to\infty} 2^k \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}$$

Siendo k: Número de raíces cuadradas involucradas[2]

Todos los cálculos y deducciones matemáticas hasta ahora vistos pueden tomar como punto de partida el pliegue de superficies de papel, pero dichos pliegues no solo son para el caso de una circunferencia, sino que es posible generalizarlos para cualquier tipo de curva.

[1] Algunas construcciones han sido extraídas del texto: Geometric Exercises in Paper Folding de Sundara Row.

[2] Dicha expresión es llamado algoritmo iterativo. Fue usado por el matemático Liu Hui para calcular π partiendo de polígonos inscritos en un círculo. Para mayor ampliación ver: http://es.wikipedia.org/wiki/Radicales_jer%C3%A1rquicos

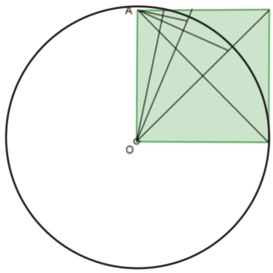


Fig. 2. Aproximación a la longitud de arco de la circunferencia por medio de los polígonos generados en la Fig. 1

Cualquier función diferenciable puede ser aproximada en el nivel local por una función lineal; entonces, en algunos casos las funciones lineales son las más importantes y de la misma forma podría decirse que las formas diferenciales son los más importantes integrandos.

Al aplicar dobleces en forma reiterativa a una superficie de papel y limitándose a un intervalo $[a,b]$ se obtiene una aproximación a la curva dada por la **Fig. 3**. Ahora, considere una función f en el intervalo $[a,b]$ que es rectificable, es decir, f' es continua en $[a,b]$. De tal función se dice que su gráfica en $[a,b]$ es una curva suave. Bajo las anteriores condiciones y tomando como punto de partida las construcciones elaboradas en la Fig. 2 y Fig. 3 se extraen las siguientes deducciones:

Sean:

$\Delta x = x_i - x_{i-1}$

$\Delta y = y_i - y_{i-1}$

De donde:

$$S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

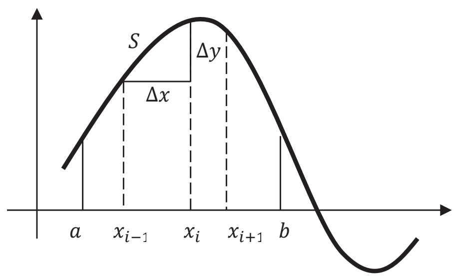
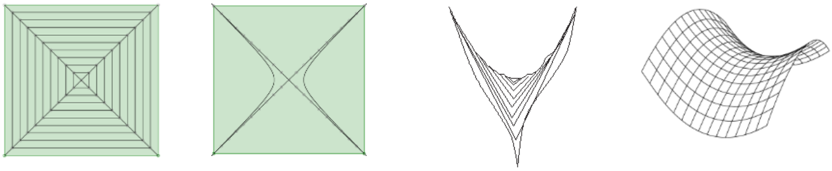


Fig. 3 Curva suave en un intervalo $[a,b]$ con particiones regulares

Se ha llegado así a una forma de relacionar el pliegue de superficies con el concepto de límites, derivadas y más allá, aún, la construcción del concepto de sumas infinitas.

GENERACIÓN DE CURVAS EN $\boldsymbol{R}^3$

Las curvas generadas por el pliegue de superficies son muy diversas y la profundidad de los conceptos y expresiones matemáticas que se estudian pueden llegar a ser de muy alto nivel a tal punto que el pliegue de superficies se traslada a áreas tales como la computación, y la arquitectura. Es decir, dentro de todas estas matemáticas se encuentran muchas ciencias aplicadas a las cuales se puede llegar desde otra perspectiva en la enseñanza de las Matemáticas.



Para $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cada doblez define un límite sobre el cual se intersectan dos planos, de este modo si se lleva ese pliegue de superficies de papel a una región tridimensional puede llegar a generarse una función de dos variables que consiste en utilizar un campo escalar en el que se asigna al punto (x, y) el escalar $z = f(x, y)$. Un campo escalar queda caracterizado por sus curvas de nivel (o líneas de contorno) a lo largo de las cuales el valor de $f(x, y)$ es constante.

En la figura 4 se muestra la representación gráfica de la ecuación $z = y^2 - x^2$ también conocido como paraboloide hiperbólico o "silla de montar".

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Bachman, D. (2000). *A Geometric Approach to Differential Forms.* United States of América. Boston: Birkhäuser.

[2] Eisenhart, L. (1947) *An Introduction to Differential Geometry with use of the tensor calculus.* Princeton: Princeton University Press.

[3] Huzita, H. (1989) *Axiomatic development of origami geometry.* En Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, New York.

[4] Larson, R. y Hostetler R. (1999) *Cálculo y Geometría Analítica, 6ª edición.* México: Mc Graw Hill.

[5] Leithold, Louis. (1998). *El cálculo. 7ª edición.* México: Oxford University Press.

[6] Monsalve, Orlando y Jaramillo, C. (2003) *El placer de doblar papel. Mostraciones y algunas aplicaciones matemáticas. En: Revista Educación y Pedagogía. 15*(35), 11-25.

[7] Row, T. (1966) *Geometric Exercises in Paper Folding.* New York: Dover.

[8] Santa Z. M. y Jaramillo, C. (2010). *Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. Revista Virtual Universidad Católica del Norte,* (31). Recuperado de:http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php?option=com_content&task=view &id=169&Itemid=1

[9] Demaine E. *exhibitions.* Recuperado de: http://erikdemaine.org/

Razonamiento abductivo en una tarea con números 4-estelares

Lucero Antolínez Quijano[*]
Miller Palacio Núñez[**]
María Nubia Soler[***]

RESUMEN

Esta ponencia presenta los avances y algunos resultados en un trabajo de grado de la Maestría en Docencia de la Matemática, el cual tiene como propósito caracterizar los razonamientos desarrollados por un grupo de estudiantes de primer semestre de universidad al resolver una tarea relacionada con los números 4-estelares. El referente teórico considerado en relación con los razonamientos abductivo, deductivo e inductivo es la teoría de Peirce en la segunda etapa de desarrollo. El análisis de los razonamientos logrados por los estudiantes se hace a partir del modelo de Toulmin sobre argumentación. Entre los resultados encontrados se observa que cada razonamiento abductivo se basa en una ruta que depende del nivel de dificultad de la expresión general encontrada.

Palabras clave: argumentos, razonamientos abductivos, Modelo de Toulmin, números 4-estelares.

[*] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: luceroaq@gmail.com
[**] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: milpal252000@yahoo.es
[***] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: nsoler@pedagogica.edu.co

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

De acuerdo con los estándares básicos de competencias en matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional -MEN- (1998), existen cinco procesos generales en la actividad matemática que se deben desarrollar en la clase de matemáticas: formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. En relación con el proceso de razonar explican que este se hace evidente en la actividad matemática al percibir regularidades, hacer predicciones, formular conjeturas, validar o refutar esas conjeturas y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones. Además, los estándares también hacen explícita la necesidad de propiciar los razonamientos inductivos, abductivos y deductivos en las situaciones de aprendizaje.

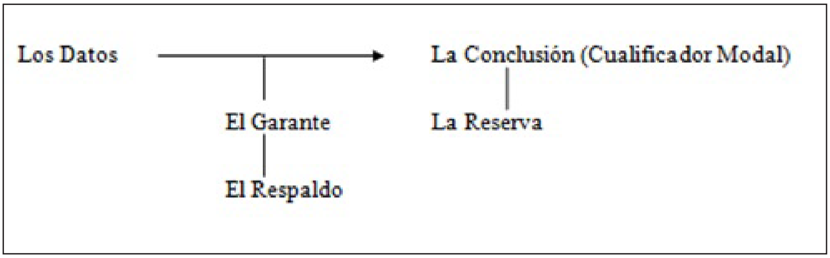
En nuestra práctica docente, hemos evidenciado la dificultad que tienen los estudiantes de realizar actividades asociadas al proceso de razonar; en particular, se ha evidenciado que estudiantes de primer semestre de Educación Técnica tienen problemas al pasar de patrones o regularidades observadas en el estudio de algunos casos, a expresiones generales que los describen. El trabajo de grado pretende contribuir al mejoramiento de este proceso en los estudiantes, a partir del diseño de una tarea y del análisis del desarrollo de la misma. Esto último con el fin de identificar las características de la tarea que permiten el desarrollo de dicho proceso.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

La teoría de Peirce en su segunda etapa de desarrollo define el razonamiento abductivo como la adopción de una hipótesis (conjetura) a partir de unos hechos o datos para explicar una relación observada (Peirce, 1901).

Este razonamiento puede expresarse en términos del modelo de Toulmin, el cual plantea que cualquier argumento contiene los siguientes elementos: la conclusión, que es una afirmación o aserción que se hace con base en unos hechos observados; los datos, los cuales corresponden a la evidencia en la cual se fundamenta la afirmación; el garante, brinda un soporte legítimo para la transición de los datos a la conclusión, y el respaldo, es el apoyo que valida el garante y le da soporte al argumento (Toulmin 2003).

En el modelo de Toulmin, el garante de un razonamiento abductivo está dado por los patrones o regularidades que se observen en los datos, y la conclusión corresponde a la expresión general que describe los patrones o regularidades observados. En la tarea propuesta se busca que los estudiantes razonen de forma abductiva. Este razonamiento se estructura así:



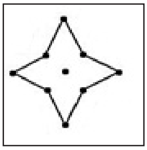
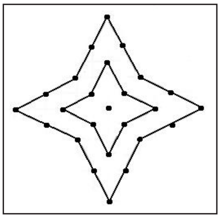
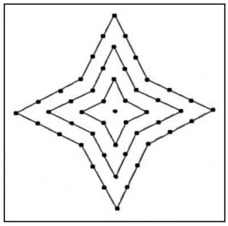
Los datos corresponden a las primeras posiciones de un número 4-estelar, el garante evidencia los patrones encontrados por los estudiantes y la conclusión está dada por una expresión general que permite encontrar la cantidad de puntos de un número 4-estelar en cualquier posición.

METODOLOGÍA

Este proyecto de grado se enmarca dentro de la investigación cualitativa y para el diseño de la tarea, inicialmente se consideraron los números p-estelares, pero fue necesario modificarla por el grado de dificultad que estos números involucran. Luego, se planteó con los números 6-estelares, sin embargo, su representación gráfica no es fácil de construir sobre una hoja cuadriculada. Y por último, se diseñó con números 4-estelares que son más fáciles de representar gráficamente y que generan números impares elevados al cuadrado. Para el diseño de la tarea se tuvieron en cuenta las etapas del proceso que mencionan Mason (1985) y Mora & Soler (2010) para llegar a una generalización, dado que en estas etapas se evidencia el razonamiento abductivo.

Para la recolección de la información, se diseñó una tarea relacionada con los números 4-estelares que involucra procesos de generalización y posteriormente se elaboraron unas entrevistas semiestructuradas para complementar la información obtenida.

En cuanto a la tarea, tiene como propósito que los estudiantes encuentren una expresión general para calcular la cantidad de puntos de un número 4-estelar en cualquier posición. La tarea está conformada por cinco puntos. Los tres primeros tienen la intención de familiarizar a los estudiantes con los números 4-estelares y algunas formas de contar la cantidad de puntos de cada estrella (ver el patrón), el cuarto punto pretende que los estudiantes justifiquen las relaciones encontradas (decir el patrón) y el quinto punto, le presenta a los estudiantes la necesidad de llegar a una generalización para encontrar la cantidad de puntos de un número 4-estelar en cualquier posición (registrar el patrón) al intentar encontrar la cantidad de puntos en una posición grande, como lo es la posición 18. A continuación se muestran las tres primeras posiciones de un número 4-estelar:

		
Posición 1	Posición 2	Posición 3

Para el análisis de la información se tuvo en cuenta el siguiente proceso: primero se hizo una relatoría de la clase en la que se aplicó la tarea para identificar los momentos en los cuales los estudiantes argumentaban los procesos y soluciones obtenidas para cada punto. Luego, se hizo la transcripción de lo sucedido en esos momentos, la cual permitió encontrar los razonamientos abductivos logrados. Y finalmente, se aplicaron unas entrevistas semiestructuradas por parejas para complementar las expresiones generales obtenidas y así complementar todos los elementos que requiere un argumento según el modelo de Toulmin.

ANÁLISIS DE DATOS

Hasta el momento se tiene una versión inicial del análisis de una de las formas de conteo utilizada por los estudiantes. En lo que sigue se presenta la ruta para la forma de conteo #3 identificada.

La fase 1 se refiere a la implementación de la tarea en la clase de Matemáticas 1 (asignatura de primer semestre de la Tecnología en Ingeniería Industrial). En esta fase los estudiantes se relacionaron con los números 4-estelares, con las diferentes formas de conteo e identificaron un patrón que les permitiría contar fácilmente la cantidad de puntos de cada estrella.

El patrón encontrado se presenta en la figura 1.

La fase 2 corresponde a una entrevista semiestructurada que se aplicó a cuatro parejas de estudiantes. En esta fase, inicialmente los estudiantes formularon una conjetura (usando el lenguaje natural) para encontrar cualquier posición de un número 4-estelar a partir del patrón encontrado. La expresión general encontrada se presenta en lenguaje natural y la expresan los estudiantes de la siguiente manera:

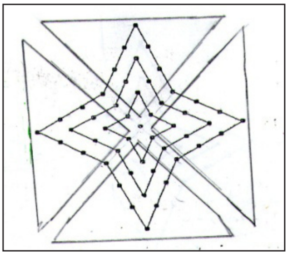


Figura 1. Forma #3 de conteo por puntas de la estrella.

"Total de puntos = (puntos de la punta número de puntas) + (número de puntos de la diagonal entre los triángulos cuatro) + 1"

Luego, los estudiantes verificaron la conjetura en las primeras posiciones de la estrella (ver figura 2).

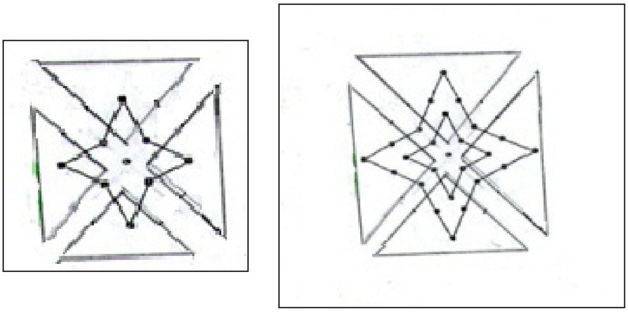


Figura 2. Forma #3 de conteo en las posiciones 1 y 2 de un número 4-estelar

Finalmente, los estudiantes representaron la conjetura por medio del lenguaje algebraico, así:

$$\text{“Total de puntos de la estrella } = \left(x^2 \times 4\right) + (x \times 4) + 1\text{”}$$

CONCLUSIONES

En todo el proceso de implementación de la tarea y aplicación de las entrevistas, es necesario resaltar la importancia que tienen las figuras que representan las diferentes posiciones de un número 4-estelar para identificar el patrón que conduce a la conclusión, que en este caso corresponde a la conjetura.

También, es importante señalar que cada forma de conteo contiene su propia ruta de análisis conformada por diferentes fases, ya que algunas formas de conteo pueden construir su conjetura en la primera fase, mientras que las formas de conteo que son más elaboradas requieren más fases para la construcción de su conjetura.

En el proceso de la elaboración de conjeturas (razonamiento abductivo) se evidenciaron algunos razonamientos inductivos que les permiten a los estudiantes verificar las conjeturas planteadas por medio de la experimentación con estrellas más pequeñas e incluso con las posiciones grandes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. & Gowar, N. (1988). *Rutas y raíces hacia el álgebra* (Cecilia Agudelo, Ed. y Trad.). Tunja, Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá. Magisterio.

Mora, L. & Soler, M. (2010, octubre). *Estudiar álgebra desde la generalización: ejemplos para la formación de profesores*. Ponencia presentada en el 11 Encuentro Colombiano de Matemática Educativa "Aprendizaje y Evaluación en Matemáticas", Bogotá, Colombia.

Peirce, C. S. (1901). Reasoning. En J. Baldwin, & Smith (Ed.). *Dictionary of Philosophy and Psychology* (S. Barrena, Trad.). Glousester.

Toulmin, S. (2003). *The uses of Argument*. New York: Cambridge University Press.

Algunas consideraciones para el diseño de rutas de aprendizaje del concepto límite

Erick Antonio Quintero Chitiva[*]
Angélica Lisette Sánchez Celis[**]

RESUMEN

La presente comunicación busca poner de manifiesto algunas consideraciones que se pueden tener en cuenta a la hora de diseñar rutas de aprendizaje en torno al concepto de límite. En este sentido, el documento se estructura por medio de dos preguntas cuyas respuestas coinciden con las dos principales consideraciones resultado de este trabajo; dichos interrogantes (*para qué* de la enseñanza del límite, y *cómo* lograrla) permiten evidenciar la comprensión del concepto límite como un proceso que da lugar al desarrollo de procesos de profundización, con los cuales se alcanza la forma más pura de la competencia matemática.

Palabras clave: enseñanza, concepto de límite, comprensión, competencia matemática.

[*] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: Eantonio.quintero@gmail.com.

[**] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: Angelika.lsanchez@gmail.com

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Dificultades en la planeación de rutas de aprendizaje para el concepto de límite. Cuando un docente de matemáticas realiza reflexiones que desembocan en el diseño de rutas de aprendizaje del concepto de límite, hay una tendencia a formular situaciones empobrecidas que atienden solamente al rigor y la formalización del concepto (Espinoza & Azcarate, 2000), y esto denota un problema que radica en la omisión de todo el contexto de descubrimiento (Sierpinska, A. & Lerman, S., 1996). Además, al encontrar que el concepto límite es un constructo científico muy importante para las conceptualizaciones consolidadas en el cálculo diferencial e integral, y que en el ámbito de la enseñanza y aprendizaje de este se integra una serie de capacidades de abstracción y generalización que complejizan los modelos mentales del educando hasta lograr llevarlo a lo que Tall llama pensamiento matemático avanzado, es preciso plantear algunas consideraciones con la cuales se posibilite ampliar las perspectivas de los docentes a la hora de estructurar las rutas de aprendizaje para dicho concepto.

De esta manera, las consideraciones planteadas en este artículo buscan ser respuesta de dos preguntas, a partir de las cuales un profesor puede articular y orientar su práctica profesional. Estas son: ¿para qué? y, ¿cómo hacerlo?

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

¿Para qué? Esta pregunta va directamente relacionada con otra que en el apartado anterior tuvo una leve respuesta: ¿qué se busca? En este sentido, el qué se busca con la enseñanza del concepto límite lleva al enseñante a reflexionar sobre el complejo y atractivo sistema que representan las matemáticas en la sociedad, ya que forman parte de la cultura porque, sin lugar a dudas, surgen como una respuesta a diversos interrogantes que el ser humano se formuló con base en las eventualidades que vivía (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 1998); es decir, el aprendizaje del concepto de límite permite que se desarrolle el pensamiento matemático avanzado, a la par de una serie de capacidades que, integradas con otros aspectos, componen la respuesta al *para qué* de la enseñanza del concepto tratado: la competencia matemática.

En este punto, es preciso profundizar un poco en lo que significa la competencia y las implicaciones que esta tiene en el campo de la educación matemática, ya que cuando el MEN (2006) establece que formar al individuo para ser competente requiere dotarlo de un "*... conjunto de conocimientos,* *habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio afectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores…"* (p. 49), también esclarece una serie de fundamentos con los que se abarca un sentido más amplio que el netamente práctico.

Es preciso aclarar que al ser global este significado de competencia, en el sentido de que puede ser contrastado con diversas disciplinas, se hace necesario explorar sobre su interpretación en la educación matemática; esto, a través de la comprensión, la cual posee una profunda relación con la temática en cuestión (Godino, 2003), y puede ser concebida, según Skemp (1976, mencionado por Godino, 2003), como: la comprensión instrumental (que hace referencia al aprendizaje de reglas que pueden ser aplicadas en la resolución de cierta situación, y que no tienen un significado en cuanto al porqué de su aplicación), y la comprensión relacional (que enmarca las argumentaciones, definiciones y propiedades que construyen un objeto matemático).

En este sentido, la formación para ser competente hace necesaria una relación entre las comprensiones mencionadas, y evidencia que uno de los principales objetivos de la educación radica en la comprensión. Una teoría que aglomera lo mencionado para el campo de la educación matemática es la que Sierpinska (1994) propone con el nombre de la comprensión de matemáticas, en la cual se define la comprensión como los cambios que se generan a un modelo mental por la disfuncionalidad que presenta en situaciones cuyo contexto no se identifica con el de las que propiciaron las experiencias productoras del estado de comprensión latente en el individuo.

Dichas situaciones generan obstáculos epistemológicos que al ser superados producen conocimiento, y que determinan la presencia de un conocimiento con el cual se logra dar respuesta a problemas que poseen condiciones inexistentes en otros. Así, la superación de estos se da gracias a procesos que Sierpinska (1994) establece como.

1 La identificación: que se evidencia al tomar conciencia de la existencia un objeto de estudio.

2 La discriminación: que consiste en la diferenciación por propiedades entre este y otros objetos similares.

3 La generalización: en donde se realiza una ampliación del campo de acción en el que el objeto tiene funcionalidad.

4 La síntesis: la cual enmarca la integración de tal objeto a un conjunto de conocimientos.

METODOLOGÍA

¿Cómo hacerlo? Ahora bien, considerando que es por medio de la búsqueda de compresión que se logra desarrollar competencia matemática, es apropiado articular la misma con el concepto límite por medio de la caracterización de cuatro obstáculos epistemológicos que Sierpinska (1985)[1] postula. Tomando como referencia el documento "Un análisis de contenido de los Lineamientos Curriculares en Matemáticas y Estándares Básicos de Competencias Matemáticas en Colombia: El caso del límite" (Quintero, Sánchez & Bello, 2012), en el que se aplica la metodología de análisis de contenido para dicho análisis, a continuación se presenta una tabla en la que se sintetiza lo que los autores del documento encuentran, y se evidencia la relación existente entre los obstáculos epistemológicos y la historia de consolidación del límite:

Obstáculos	*Autor*	*Problemas*	*Descriptores*
Horror al infinito	Arquímedes Eudoxo	Determinar magnitudes de área en figuras curvilíneas, y de volumen en sólidos geométricos.	La inscripción y circunscripción de polígonos regulares, cuyas magnitudes son conmensurables, y con los cuales se busca la exhaución del área de una figura curvilínea.
Geométrico	Kepler	Determinar las magnitudes vectoriales que caracterizan los movimientos planetarios.	La división del continuo, que se representa en figuras y cuerpos geométricos, en infinitas partes infinitamente pequeñas de igual dimensión al objeto estudiado, que al ser sumadas determinaran la totalidad del mismo, bien sea el área o el volumen.
	Cavalieri	Medidas de áreas, volúmenes y cuerpos de revolución	La comparación entre continuos, representados en figuras y sólidos geométricos, a partir de su composición mediante indivisibles (cortes paralelos a una de las componentes de la forma), los cuales mantienen una relación de proporcionalidad con los indivisibles de la otra.

1 Quien postula cinco, de los cuales solo se consideran cuatro por su intervención directa en la educación básica media.

Obstáculos	*Autor*	*Problemas*	*Descriptores*
Función	Fermat	Máximos y mínimos en una curva.	Dicho proceso plantea la implementación de la adigualdad a partir del establecimiento de un incremento que disminuye hasta hacerse cero; este es utilizado algebraicamente sobre expresiones que modelan cantidades interpretadas en su forma absoluta (solo se toma en consideración la variable dependiente).
	Barrow	Recta tangente a una curva.	Establecimiento de un incremento (en la variable independiente) que producen otro, con el cual determina una razón, dada por semejanza entre triángulos, que se estudia cuando los mismos se acercan a cero sin tocarlo.
Simbólico	Newton	Síntesis de todos los problemas previos, por medio de la definición de fluentes, y fluxiones.	Las nociones de límite se ven cuando los incrementos (múltiplos de los fluentes) son razones que nacen de la nada y tienden a anularse sin hacerlo, ya que determinan cantidades que se acercan a algo que según Newton nunca se alcanza, ni se sobrepasa.
	Leibniz	Recta tangente a un punto de la curva. Área de bajo de la curva (cuadratura de la curva).	El concepto de diferencial es en donde se puede evidenciar la noción del límite, ya que estas determinan una diferencia infinitesimal con la cual se describe una cantidad infinitamente pequeña que nunca desaparece.

Esta tabla será objeto de análisis en el siguiente apartado, por lo que para culminar este epígrafe bastará con decir que lo planteado hasta el momento puede articularse con metodologías constructivistas como lo es la teoría de situaciones didácticas de Guy Brousseau (1986).

ANÁLISIS DE DATOS

Teniendo en cuenta que el objetivo principal de este artículo es presentar una posible articulación entre la competencia matemática referente al concepto de límite, y los aspectos a tener en cuenta para diseñar rutas de aprendizaje en torno al mismo, es importante resaltar que aunque la tabla muestra una forma lineal de la consolidación del concepto límite, dichos obstáculos pueden presentarse de manera discontinua al punto de hacer necesario plantear, como docente, rutas de aprendizaje en las que estos se relacionen indistintamente para lograr fomentar, más que una formalización del concepto, una abstracción que permita su interpretación y entendimiento mediante el enfrentamiento de situaciones que posibiliten su redescubrimiento, es decir, que le den su verdadero significado.

Plantear lo anterior implica que para el diseño de rutas de aprendizaje en torno a este concepto, es preciso considerar como objetivo el lograr su comprensión por medio de situaciones que se adecuen al contexto de descubrimiento que lo caracteriza. Aquí, es vital aclarar que el lograr la comprensión de un concepto es la apertura al desarrollo de procesos de profundización que integrados construirán, en su sentido más puro, la competencia matemática.

CONCLUSIONES

Las consideraciones que pueden ser tenidas en cuenta para la consolidación de una ruta de aprendizaje para el concepto de límite están determinadas por metas sociales que en la actualidad denotan competencias matemáticas cuya interpretación en la enseñanza de la matemática se particulariza a la comprensión. De esta manera, pensar en la enseñanza del concepto límite hace necesario adoptar una postura derivada de la línea de investigación histórico-epistemológica (Gómez, 2003), en cuanto que existe una ligadura, imposible de omitir, entre el proceso de aprendizaje de dicho concepto y el de su consolidación histórica.

Finalmente, con la consideración de la ligadura mencionada en el párrafo anterior, se puede ampliar la perspectiva docente al momento de diseñar rutas de aprendizaje para el concepto en cuestión, independientemente de la forma en la que se formule. Es decir, lo planteado en el presente artículo busca manifestar un preámbulo sobre el cual se logren llevar a cabo complejizaciones que permitan llevar la enseñanza del límite en contraste con sus contextos de descubrimiento y justificación (Sierpinska, A. & Lerman, S., 1996).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brousseau, G. (1986) Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. Recherches En *Didactique De Mathe Matique*, Vol. 7 N.° 2, Pp. 33-155

Espinoza, L., Azcárate, C. (2000),. Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de límite de función: Una propuesta metodológica para el análisis, Enseñanza de las Ciencias, 18(3), 355-368.

Gómez, B. (2003). La investigación histórica en didáctica de la matemática: *Séptimo simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Universidad de Valencia. Valencia. España. Recuperado el 4 de mayo de 2011, de la página: http://www.uv.es/gomezb/22Lainvestigacionhistorica.pdf.

Ministerio de Educación Nacional. (1998) *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá, Colombia

Ministerio de Educación Nacional. (2006) Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá, Colombia

Quintero, E., Sánchez, A., Bello, J., (2012) *Un análisis de contenido de los Lineamientos curriculares en matemáticas y estándares básicos de competencias matemáticas en Colombia: El caso del límite*. Universidad Autónoma de Occidente. Cali, Colombia.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologieques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 6 (1)

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. The Falmer Press Ltda. London.

Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En: A. J. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, A. P. [Traducción de Juan D. Godino]

Diseño de una prueba diagnóstica en matemáticas para estudiantes que ingresan a primer semestre a la Corporación Universitaria Minuto de Dios - Sede Bogotá

*Marco Antonio Ramírez Porras**

*Frey Rodríguez Pérez***

RESUMEN

El presente artículo da cuenta del proceso investigativo generado frente a la construcción e implementación de una prueba diagnóstica dirigida a los estudiantes que ingresan a primer semestre a UNIMINUTO con el ánimo de establecer su nivel de desempeño en el campo del pensamiento geométrico y variacional. El instrumento se construyó teniendo en cuenta otras pruebas ya validadas y soportadas en los niveles de Van Hiele, y en el manejo de la variable real, se aplicó con el apoyo de un ambiente en moodle a un total de 630 estudiantes pertenecientes a 11 programas. El desempeño de los estudiantes fue básico con mayor dificultad en el campo de la geometría y un mejor desempeño en el uso de la incógnita.

Palabras clave: diagnóstico, Instrumentos de evaluación, álgebra, geometría.

* UNIMINUTO. Dirección electrónica: mramirez@uniminuto.edu

** UNIMINUTO. Dirección electrónica: frodriguez@uniminuto.edu

PROBLEMÁTICA Y JUSTIFICACIÓN

Para el Departamento de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería de la Corporación Universitaria Minuto de Dios, UNIMINUTO, Sede Bogotá, es fundamental garantizar la permanencia y continuidad de los estudiantes que ingresan a la Institución. Para el logro de este objetivo se han implementado acciones como: cursos introductorios, horas de tutorías, clases de refuerzo, entre otras; además, la Oficina de Primer Semestre y la División de Bienestar Universitario han ahondado esfuerzos de acompañamiento y consejería para esta población. Pero dichas estrategias al parecer no han sido suficientes, dado el alto índice de pérdida que se presenta en asignaturas como Precálculo (55%), Matemáticas Empresariales (45%) y Geometría (43%) pertenecientes al primer semestre. De otra parte, los docentes de CCBB, de acuerdo con el informe de coordinación de asignatura Precálculo 2011-1, mencionan entre las causas del bajo rendimiento académico las siguientes: dificultades en el desarrollo de las habilidades matemáticas básicas, ninguna o poca experiencia con la geometría euclidiana, errores en el manejo de preconceptos, poco desarrollo en el pensamiento lógico-matemático, problemas de lecto-escritura, carencia de técnicas de estudio y falta de asesoramiento para definir aptitudes frente a su formación profesional, entre otras. Cabe agregar que en UNIMINUTO no existe ninguna prueba de selección o clasificación que se aplique a los estudiantes a la hora de ingresar a la Institución y solamente se exige un mínimo de 45 puntos, nivel básico, en cada uno de los núcleos comunes en los resultados de las pruebas Saber Pro Once.

El Departamento de Ciencias Básicas CCBB y la Vicerrectoría Académica VAC de la Sede Bogotá de UNIMINUTO decidieron buscar estrategias que permitieran contar con un panorama que diera cuenta del nivel con que los estudiantes ingresan a la Institución desde el campo de las matemáticas, y para tal fin se sugirió elaborar una prueba diagnóstica que indagara no respecto a las competencias y habilidades de pensamiento matemático genérico que se evalúan en la prueba Saber Pro Once sino en las mínimas para afrontar los cursos de matemáticas fundamentales que se dictan en primer semestre. Por lo tanto, se estableció como pregunta de investigación ¿Qué elementos deben involucrarse en la construcción de un instrumento diagnóstico que permita establecer el nivel de desarrollo en las habilidades asociadas al pensamiento variacional y geométrico de los estudiantes que ingresan a primer semestre a UNIMINUTO Sede Bogotá? Para responder a ella se propuso como objetivo general diseñar y validar una prueba diagnóstica y como objetivos específicos: definir los componentes clave desde el pensamiento variacional y geométrico que se requieren como prerrequisitos para el aprendizaje delprecálculo y la geometría euclídea, diseñar un instrumento a partir del contraste entre las propuestas evaluativas teóricas ya existentes y las intenciones formativas de CCBB, proponer una clasificación de los estudiantes frente a los resultados de la prueba, validar la prueba y recomendar algunas estrategias para que los estudiantes logren los niveles básicos requeridos por el CCBB.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

El pensamiento variacional. Hace referencia al tratamiento y estudio de la variación y el cambio en situaciones propias de ser matematizadas. Cuando se habla de variación, surge el manejo de la variable como herramienta para establecer patrones y regularidades, representar un valor o valores que involucran procesos algebraicos y analizar funciones (Manso, 1999).

El pensamiento geométrico.Investigaciones frente al desarrollo del pensamiento geométrico indican que este sigue una evolución muy lenta desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales (Gardner,1995), y es precisamente el modelo de Van Hiele la propuesta que parece describir con bastante exactitud esta evolución. Dicho modelo propone cinco niveles de desarrollo del pensamiento geométrico que muestran un modo de estructurar el aprendizaje de la geometría. El nivel de visualización o familiarización, el de análisis, el de clasificación, el de razonamiento deductivo en donde el estudiante les da sentido a los axiomas, las definiciones y los teoremas, y el de rigor, en donde razonan formalmente sobre sistemas matemáticos.

Evaluación de pruebas diagnósticas. Teniendo en cuenta la intención de la prueba diagnóstica de CCBB se optó como marco de validación los criterios de análisis de Carey ML (2005) que son: dificultad de los ítems, discriminación del ítem y el distractor.

METODOLOGÍA

Ya que no se contaba con información específica respecto al desempeño de los estudiantes en pensamiento geométrico y variacional se sugirió un estudio cuantitativo de corte exploratorio en seis fases. En la primera, se hizo una revisión del estado del arte frente a pruebas de ingreso a Educación Superior en matemáticas; en la segunda, se seleccionaron dos referentes teóricos en cuanto a pruebas ya validadas y aplicadas; en la tercera, se diseñó el instrumento con ocho variables (5 para geometría y 3 para variacional) y se propuso una escala de clasificación; en la cuarta, se aplicó el instrumento a

630 estudiantes pertenecientes a 6 programas profesionales y 6 tecnológicos que ingresaron a primer semestre para el 2012-1 utilizando una serie de cuestionarios dispuesto en moodle; en la quinta se analizaron los resultados de desempeño, por programa y jornada; y en la sexta se validó la prueba utilizando los criterios de análisis de Carey y se sugirieron recomendaciones a partir de los resultados.

Para la construcción de la escala de clasificación se tuvo en cuenta la investigación de Bohórquez y Franchi (1999), quienes afirman que la mayoría de los estudiantes en geometría llegan a los niveles 1, 2 y 3 (reconocimiento, análisis y clasificación); y para el caso del precálculo, Trigueros y otros (2000) mencionan que la mayor dificultad se da frente al manejo de la variable en relación con la función por lo que se decidió dar a esta variable el mayor puntaje 4 en este grupo. Como se observa en la tabla 1, el puntaje de los estudiantes variaría entre 0 y 90 puntos; así distribuyendo los puntajes en tres grupos de manera proporcional se tendrían como rangos de desempeño: Básico (0 – 30), Medio (30,1 – 60) y Alto (60,1 – 90)

Campo de pensamiento	*Variable*	*No. Preguntas**	*Puntaje/pregunta*	*Puntaje máximo*
Geometría	Reconocimiento	3	1	3
	Análisis	3	2	6
	Clasificación	3	3	9
	Deducción	3	4	12
	Rigor	3	5	15
Precálculo	Generalización	5	2	10
	Ecuación	5	3	15
	Función.	5	4	20

Tabla 1. Propuesta de escala de valoración prueba diagnóstica 2012-1.

Fuente: Los autores

En la tabla 2 se presenta un resumen del número de estudiantes que presentaron la prueba por programa y jornada, también el puntaje promedio por programa, el puntaje máximo, el puntaje mínimo y el coeficiente de variación. Se pudo determinar que el grupo de Tecnología en Costos tiene la mayor variación y el de menor es Ingeniería Agroecológica.

Programa	*Mañana*	*Noche*	*Tarde*	*Total Estudiantes*	*Puntaje Promedio*	*Puntaje Mínimo*	*Puntaje Máximo*	*C. de Variación*
Administración de Empresas	45	57		102	19	50	2,5	0,4
Contaduría	24	57	23	104	21	43	1	0,4
Ingeniería Agroecológica			15	15	20	38	8	0,36
Ingeniería Civil		46	37	83	21	45	5	0,4
Ingeniería de Sistemas		3	19	22	21	41	7	0,43
Ingeniería Industrial	32	30	15	77	20	43	4	0,43
Tecnología en Costos y Auditoria		28		28	18	44	7	0,48
Tecnología en Electrónica	22	14		36	22	41,5	5	0,38
Tecnología en Gestión de Mercadeo	23	47	6	76	19,5	43	1	0,46
Tecnología en Informática	31	31	8	70	20	46,5	2,5	0,42
Tecnología en Logística	14	14		28	18,5	34	6	0,39
Tecnología en Redes y Seguridad	16	19		35	20	43	4	0,4
Totales	207	346	123	676	20			0,41

Tabla 2. Tabla resumen resultados prueba ingreso matemáticas 2012-1
Fuente: Los autores

En la figura 2 se muestra el comportamiento de los estudiantes en cada programa a través de un diagrama de cajas y bigotes. Allí es posible observar que todos los programas estuvieron por debajo del límite del puntaje BÁSICO ya que el promedio general fue de 20,15. Por programas, el promedio más alto lo obtuvo Tecnología en Electrónica, y el más bajo, Tecnología en Costos y Auditoría. De otra parte, se evidencia gran heterogeneidad en los puntajes obtenidos en todos las carreras, ya que el rango entre los puntajes altos y bajos es un valor considerable.

Respecto a la validación de la prueba, es posible afirmar que, de acuerdo con los índices de discriminación (coeficiente d y biserial puntual) con los que se evaluó esta, los ítems fueron adecuados para clasificar los estudiantes. Todas las preguntas tuvieron índice de discriminación d positivo y muy pocas tuvieron valores cercanos a cero (2 de ellas), por lo que se puede concluir que en general discriminan muy bien entre los subgrupos de calificaciones superiores e inferiores. Con el coeficiente biserial puntual, que es más local que el anterior, todas las preguntas de geometría presentaron índices negativos por lo que se puede afirmar que la mayoría de estudiantes del subgrupo de puntajes bajos contestaron correctamente cada ítem con mayor proporción que los estudiantes con puntajes superiores; eso puede dar muestras de estar adivinando la respuesta; en los demás ítems de álgebra se puede observar que hay coincidencia en lo positivo de los ítems por lo que se puede afirmar que las preguntas discriminan de muy buena manera a los estudiantes.

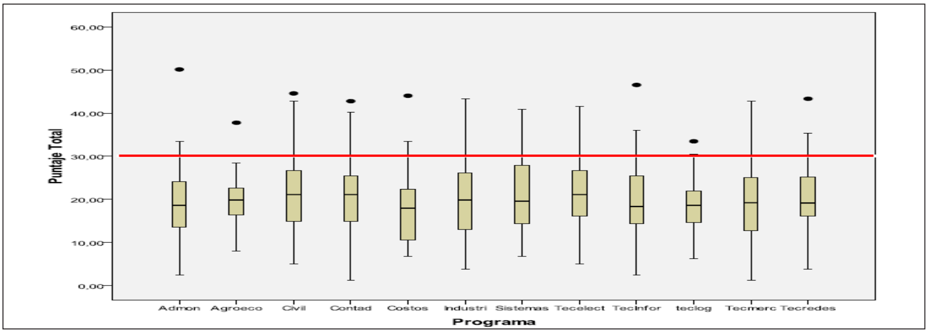


Figura 2. Diagrama de barras y bigotes por programa prueba 2012-1 (Fuente: Autores)

CONCLUSIONES

- El desempeño general en la prueba de matemáticas de la población de estudiantes que ingresaron a UNIMINUTO sede Bogotá. 2012-1 es básico.
- Aunque la prueba demostró ser consistente en sus criterios, las preguntas de geometría, incluidas las de visualización, resultaron ser de alta complejidad para los estudiantes.
- Frente a las preguntas asociadas al precálculo, hubo un mejor desempeño en relación con el manejo de la variable como incógnita que como generalidad o en una relación funcional.
- Se recomienda ajustar la prueba de geometría, ya que fue en donde se obtuvieron los puntajes más bajos debido a la falta de acercamiento de los estudiantes a esta rama de las matemáticas durante su formación secundaria. La enseñanza de la geometría debería incluirse en todos los programas, y no solo en ingeniería, ya que como herramienta disciplinar es fundamental en el desarrollo del pensamiento espacial y la medida.

- Al ingreso a la Institución se recomienda disponer a los estudiantes cursos de apoyo al desarrollo de sus habilidades matemáticas más que herramientas conceptuales y teóricas.

REFERENCIAS BIBLIGRÁFICAS

Bressan, A. (2003). El modelo de desarrollo del pensamiento geométrico de Dina y Pierre Van Hiele. Recuperado de http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/internas_model.pdf

Carey, L. & Carey, J. (2005). The systematic design of instruction. USA:Person. Triguero. Reyes, L., Ursini W, Uintero J (2005) Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. Recuperado de http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/21465/93436.

Implementación de una secuencia de enseñanza para propiciar la comprensión de la función lineal y cuadrática

Dora Isabel Ramírez Romero[*]

RESUMEN

En el presente artículo se hacen explícitas las necesidades y problemáticas que giran alrededor de la noción de función, de la desconexión e incomprensión de sus diversos registros de representación semiótica (verbal, tabular, algebraica y gráfica) por parte de los estudiantes de grado noveno, dada la usual enseñanza basada en contenidos y no en procesos del pensamiento matemático. Al respecto se hace un despliegue de documentación didáctica, teórica y legal que fundamenta la propuesta y, a su vez, le da prioridad al tratamiento y conversión, como los medios por los cuales es posible generar la comprensión de los aspectos de las funciones lineal y cuadrática.

Palabras clave: sistemas de representación, función lineal, función cuadrática, teoría de situaciones didácticas.

[*] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: diramirezr@correo.udistrital.edu.co

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El aprendizaje del concepto de función no se genera de manera espontánea, tal como señala Duval (1999) "al determinar que su puesta en juego no resulta automáticamente de los aprendizajes clásicos centrados en los contenidos de enseñanza" (p. 17). A pesar de esto los estudiantes usualmente están limitados a que las diversas formas de representar las funciones se les den como contenidos y no como procesos para la construcción del objeto matemático. Esto se debe a que la mayoría de alumnos no están preparados para hacer conexiones, entender el valor y el sentido de lo que se les enseña, pues los métodos tradicionales de enseñanza les han facilitado memorizar, repitiendo una y otra vez la misma información.

Por tanto, no basta un anclaje entre las diversas formas de representar una función en particular, y más aún donde la sencillez de esta (función lineal) muestra una tipología banal en comparación con el amplio margen que contiene la noción de función como tal. De manera que interiorizar las representaciones de un tipo de función y generar la contradicción entre las representaciones de otro tipo de función (en este caso, la función cuadrática) ha de generar el reacomodo cognitivo y posibilitar el asentamiento de las concepciones aceptadas en matemáticas (Dolores & Cuevas, 2007). Lo anterior se encuentra estrechamente relacionado con la dificultad de linealidad de los estudiantes, quienes asumen que toda función es una función lineal (Markovits, 1989)

En este orden de ideas ¿Qué aspectos y cómo se manifiesta la comprensión sobre las funciones lineal y cuadrática en un grupo de estudiantes de noveno grado, al implementar una secuencia de actividades que se fundamenta en la coordinación entre distintos registros de representación?

Adicionalmente, investigaciones realizadas por Dolores (2007) reflejan que la existencia e interconexión de situaciones significativas desde una perspectiva integral y sistemática, en las cuales se deje de lado el uso común de ejercicios, posibilita la comprensión de la noción de función. De lo contrario, las dificultades conceptuales que respectan a la construcción y análisis de funciones facilitan que expresiones tales como tengan escasa comprensión por parte de los estudiantes (Duval, 1999). Por lo tanto, es crucial e indispensable potenciar la comprensión de los parámetros de la función lineal y la función cuadrática, a partir del diseño, gestión y validación de una secuencia didáctica para estudiantes de grado noveno de una Institución Educativa Distrital.

MARCO TEÓRICO

Para minimizar las anteriores circunstancias disponemos de los siguientes elementos teóricos que orientaron nuestra propuesta y han dado la base necesaria para sustentar cada una de nuestras acciones dentro del aula.

En primera instancia es necesario recalcar la importancia que existe, para la comprensión en matemáticas, de no confundir el objeto matemático función con sus diversas representaciones ya que, como puntualiza Duval (1999), tal desconcierto desencadenará a mediano o largo plazo una pérdida de comprensión, y los conocimientos adquiridos pronto llegarán a ser inútiles fuera de su contexto de aprendizaje.

Es la pluralidad de sistemas semióticos lo que permite una diversificación de las representaciones de un mismo objeto, al aumentar las capacidades cognitivas de los sujetos, y por tanto sus representaciones mentales. Aun cuando es necesario no confundir un objeto con su representación, sí es fundamental que deba ser reconocido en cada una de ellas.

Según Duval (1999), para que un sistema semiótico (entendido como el conjunto de signos y reglas que representan objetos, donde los signos son unidades elementales del sistema y las reglas ordenan las asociaciones de signos) pueda ser un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis: (1) la formación de una representación identificable como imagen de un registro dado, (2) el tratamiento de una representación a través de un proceso interno, que implica sus transformaciones en el mismo registro donde ha sido formado, y (3) la conversión de una representación que conlleva su cambio –externo al registro de partida– hacia una de otro registro, conservando la totalidad o solo parte del contenido de la representación inicial.

De este modo, toda representación es parcialmente cognitiva respecto a lo que representa. Lo que implica que de un registro a otro no son los mismos aspectos del objeto lo que se representa; de ahí que los distintos registros sean complementarios.

En contraste, Azcarate y Deulofeu (1996) definen el objeto matemático función como: dado un dominio, un conjunto de llegada y una regla tal, a cada elemento del dominio le corresponde un elemento único del conjunto de llegada.

Respecto a cada una de las formas de representar una función (donde cada una permite expresar un fenómeno de cambio o una dependencia entre dos variables), se tiene: *(1) la descripción verbal*, utiliza el lenguaje común para dar una visión descriptiva y generalmente cualitativa de la relación funcional, *(2) la tabla de valores*, la cual da una visión cuantitativa, fácilmente interpretable desde la óptica de una correspondencia, *(3) la gráfica* de una función, permite definir la función dando una visión geométrica de ella, y *(4) la fórmula o expresión algebraica*, permite obtener una visión general y completa de la función estudiada, tanto cualitativa como cuantitativa (aunque aproximada en el caso de la gráfica), proporcionando mayor y mejor información que los lenguajes anteriores.

El aprendizaje de las funciones pasa, en primer lugar, por un conocimiento de cada uno de estos lenguajes de representación y posteriormente traducir de uno a otro. [Tabla de Janvier (1978), variedad de traducciones]

Desde/Hacia	*Descripción verbal*	*Tabla*	*Gráfica*	*Fórmula*
Descripción verbal	-	Medida	Boceto	Modelo
Tabla	Lectura	-	Trazado	Ajuste
Gráfica	Interpretación	Lectura	-	Ajuste
Fórmula	Interpretación	Computo	Gráfica	-

De esta manera las gráficas cartesianas son un excelente instrumento para expresar la dependencia entre dos variables; sin embargo, para la adquisición de dichos instrumentos, se observan en los primeros niveles ciertos errores que en algunos casos se mantienen en edades superiores. Entre ellos se destacan: (a) errores en la graduación de los ejes, (b) inversión en el eje de las coordenadas, (c) errores en la lectura y representación de puntos de coordenadas racionales, (d) concepción discreta de los puntos de una recta o de un segmento.

Dichas formas de representar una función están muy ligadas al tipo de situación que se presente, la cual ha de cumplir con las condiciones para fundamentar el proceso de enseñanza-aprendizaje que se pretende implementar en el aula de clase.

En otra instancia, se encuentra la teoría de situaciones didácticas que propone Brousseau (1986, citado en Parra y Saiz, 1998) que establece que implícitamente dentro del aula de clase hay un contenido a-didáctico y proceso de devolución, y explícitamente una situación fundamental, una situación de acción, de formulación, de validación e institucionalización, lo cual implica el manejo de algunas variables didácticas, que fortalezcan el trabajo dentro del aula.

Respecto a comprensión se tiene la idea (Perkins, 1997) de que se presenta cuando las personas pueden pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que sabe.

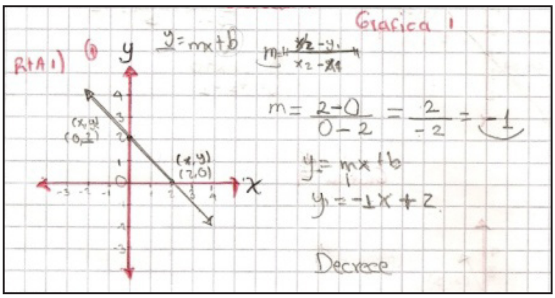
MARCO METODOLÓGICO

La metodología de investigación que se usó en este proyecto es de carácter cualitativo; de igual manera, la información o datos obtenidos al respecto involucraron las grabaciones de las discusiones en un grupo de cuatro estudiantes (de grado noveno), los trabajos escritos correspondientes a las soluciones de las situaciones y diarios de campo elaborados por las docentes, todo lo anterior mediado por una secuencia de actividades que se implementaron durante el segundo bimestre del presente año, en la Institución Educativa Distrital Juan del Corral.

Ante lo anterior es indispensable señalar que la situación fundamental fue: *Una papelería desea variar el área de un papel para personalizar su servicio, manteniendo el material, la forma rectangular y el perímetro de 24 cm. De acuerdo con esto determinar los distintos valores que pueden tomar simultáneamente la base y la altura de cada arreglo rectangular.* 4.

ANÁLISIS DE DATOS

Teniendo en cuenta los instrumentos de recolección de datos, se establece la triangulación de datos como el método para validar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por lo tanto, las transcripciones de las grabaciones, los cuadernos de los estudiantes y los diarios de campo han de sustentar la pertinencia de la secuencia didáctica, la intervención del docente y el saber puesto en juego (función lineal y cuadrática), con el fin de determinar qué y cómo aprenden los estudiantes dicha noción matemática.



Sobre los aspectos de la noción de función que comprenden los estudiantes, se logró determinar al culminar la intervención, que los estudiantes:

- Identifican los parámetros de la noción de la función lineal: usando la ecuación de la pendiente, para determinar el valor y el comportamiento de la recta, y reconociendo que el parámetro , corresponde al corte de la recta con el eje .
- Discriminan las diferencias entre la función lineal y cuadrática, aunque en el caso de la expresión algebraica de esta última, aún hay falencias tales como suponer que cualquier ecuación donde la variable independiente va elevada al cuadrado es una función cuadrática.

Cómo manifiestan los estudiantes la comprensión de estos aspectos de la noción de función. Los estudiantes avanzaron en la comprensión de los aspectos de la función como cantidades variables, la proporción y el álgebra, síntesis del concepto de función y representaciones al finalizar la intervención. De igual manera se observó que los estudiantes demuestran su comprensión por medio de las estrategias que involucran al enfrentarse con la situación fundamental. En tanto, cada tratamiento de las diferentes representaciones evocó dificultades, producto de aprendizajes anteriores, que se usaron como elementos forjadores para reestructurar y consolidar las construcciones que se estaban generando (plano cartesiano, operaciones con los números reales, correspondencia entre variables y ecuaciones).

CONCLUSIONES

El tratamiento y conversión entre representaciones permite involucrar varios elementos del pensamiento matemático que se pueden fortalecer mediante una pertinente intervención docente, lo que implica un trabajo reflexivo respecto a los aspectos de la comprensión de la noción de función, y continuo desarrollo en el aula de la teoría de situaciones didácticas, la cual resultó ser una herramienta rica en posibilidades, para que los estudiantes construyeran un aprendizaje significativo en lo concerniente a las nociones de función lineal y cuadrática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1996). *Funciones y gráficas*. Madrid. Síntesis.

Dolores, C. y Cuevas, I. (2007, Marzo). Lectura e interpretación de graficas socialmente compartidas. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa [Revista en línea], 10. Recuperado el 18 de enero de 2011, de http://www.clame.org.mx/relime.htm

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Traducción al español a cargo de M. Vega, realizada en la Universidad del Valle, Colombia, del original francés del mismo título publicado por P. Lang, Suiza en 1995.

Parra, C. y Saiz, I. (1998). Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones. Recuperado el 29 de abril de 2011, de http://www.instituto20.com.ar/archivos/Didactica%20de%20matematicas%20-%20Aportes%20y%20reflexiones.pdf

Aleatoriedad, nociones previas en estudiantes de educación media[1]

Edison Alexander Restrepo Gil[*]

RESUMEN

El presente escrito reporta un estudio llevado a cabo para investigar las ideas de aleatoriedad de un grupo de estudiantes de décimo grado cuando resuelven problemas de naturaleza aleatoria. La investigación se realizó en el marco de la clase de Matemáticas durante cinco sesiones de hora y treinta minutos cada una en las que se desarrolló una unidad didáctica. La información fue recogida mediante observaciones de clase, interacciones de estudiantes, entrevistas semi-estructuradas y artefactos documentales con la producción de los estudiantes. Los principales resultados revelan que los estudiantes tienen ideas sobre aleatoriedad que van desde explicaciones ingenuas hasta explicaciones sustentadas.

Palabras clave: aleatoriedad, educación estadística, ciclo investigativo.

[*] Institución Educativa José Miguel de Restrepo y Puerta, Copacabana (Ant.), Colombia. Direcciones electrónicas: earestrepog@unal.edu.co, edisonarg15@hotmail.com

[1] Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Enseñanza de las Ciencias. Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Los estudiantes llegan al salón de clase con una gran cantidad de ideas previas sobre aleatoriedad adquiridas durante toda su vida. Algunas son desarrolladas por la influencia de contextos cercanos, otras por experiencias personales, por la información dada en los medios de comunicación, otras surgen de los gustos e intereses particulares y otro tanto se originan en la educación anterior. Las ideas previas son un asunto que los profesores no pueden desconocer. Ellas están allí y no abandonan a los estudiantes en las clases de matemáticas, de hecho, determinan el referente con el cual interpretan las ideas que aparecen en la clase, referente que quizá no coincide con el del profesor.

La literatura en educación estadística carece de una clara comprensión de las ideas previas de los estudiantes en torno a la aleatoriedad. Un conocimiento de estas ideas podría constituir un insumo importante para entender su origen y orientar actividades de aprendizaje que desarrollen nociones cada vez más refinadas. Esta afirmación se fundamenta en la idea de que cuando se enseña algo nuevo los estudiantes construyen el nuevo conocimiento conectando la información más reciente con la asumida previamente por ellos como correcta (Serrano, Batanero, Ortiz & Cañizares, 2001; Shaughnessy, 1992, citado en Barragués & Guisasola, 2006). Lo anterior lleva a plantear el siguiente interrogante: ¿Cómo se acercan los estudiantes de grado décimo a la noción de aleatoriedad cuando resuelven problemas estadísticos en contextos de incertidumbre?

MARCO TEÓRICO

Para dar respuesta al problema es crucial, en primer lugar, tener una idea lo más clara posible de las distintas concepciones de aleatoriedad surgidas a través de la historia y, luego, describir el modelo que sustenta la estrategia de indagación sobre las nociones previas de aleatoriedad.

Noción de aleatoriedad. La aleatoriedad ha experimentado una evolución histórica usualmente asociada con las diferentes concepciones sobre la probabilidad. En un primer período histórico la aleatoriedad fue relacionada con acontecimientos ajenos a la voluntad humana que obedecían a caprichos o fuerzas sobrenaturales. La ocurrencia de tales sucesos se atribuía al azar. En un segundo período, la aleatoriedad estuvo fuertemente ligada a los juegos de azar y su concepción se desarrolló a la par con el cálculo de probabilidades. En un siguiente período los fenómenos considerados aleatorios se desplazan hacia fenómenos del mundo físico y natural que suscitaban el interés de los científicos del momento. Finalmente la aleatoriedad se relaciona con una variedad de eventos de la cotidianidad de orden social, educativo, tecnológico, científico, entre otros.

El Ciclo investigativo. La manera como se actúa y se razona durante el desarrollo de una investigación estadística o en la búsqueda de solución a un problema puede ser descrita en cinco etapas interconectadas que constituyen el modelo PPDAC: Problema, Plan, Datos, Análisis y Conclusiones. Cada etapa implica diferentes acciones y todas en conjunto conforman el Ciclo investigativo adaptado por Wild y Pfannkuch (1999).

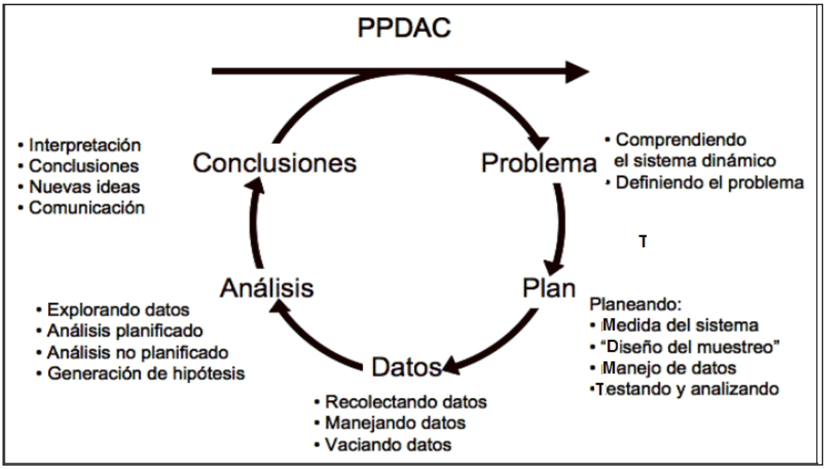


Figura 1. El ciclo investigativo (Wild y Pfannkuch,1999, traducción de Serradó, Azcárate y Cardeñoso, 2009, p. 50)

La aplicación del modelo PPDAC (Wild & Pfannkuch, 1999) en la solución de un problema estadístico real supone el diseño y ejecución de un plan estratégico y sistemático. Este plan involucra el desarrollo de ciertas habilidades generales para el manejo, comprensión y comunicación de datos estadísticos, más que el manejo de conceptos y técnicas descontextualizadas; implica comprensiones más o menos amplias, aunadas a otro tipo de competencias y otros factores como las actitudes y creencias (Batanero, 2002).

METODOLOGÍA

El estudio es de tipo interpretativo y fue orientado desde un enfoque hermenéutico. El trabajo de campo se desarrolló en el aula de clase durante cinco sesiones y contó con la participación de treinta y cinco estudiantes de décimo grado. Las nociones de aleatoriedad se analizaron a partir de las soluciones (en producciones escritas) propuestas por los participantes a una serie de problemas estadísticos planteados en dos guías de trabajo. Las guías de trabajo fueron diseñadas y aplicadas atendiendo las pautas del ciclo investigativo. La información recogida con las producciones escritas se corroboró y profundizó con observaciones directas y entrevistas semi-estructuradas. Las explicaciones de los participantes para cada uno de los problemas planteados se tomaron como las unidades de estudio. Estas fueron sometidas a procesos de análisis e interpretación en donde los tipos de argumentos encontrados constituyeron el criterio de comparación.

ANÁLISIS DE LOS DATOS

Con el análisis de los datos se halló que los participantes del estudio, cuando se les enfrentó a problemas dominados por la indeterminación o la ausencia de información, recurrieron a diversas explicaciones. En esas explicaciones se acercaron a nociones de aleatoriedad a través de uno o varios de los siguientes tipos de argumentos, clasificados en tres categorías: explicaciones ingenuas, explicaciones subjetivas y explicaciones sustentadas.

Explicaciones ingenuas. Se observó en los participantes la tendencia en asociar la aleatoriedad únicamente con la suerte, despreciando cualquier otra causa. En sus explicaciones, los participantes reflejaron juicios ingenuos y poco pensados al suponer la suerte como un asunto ajeno a ellos, incontrolable y determinante en la imprevisibilidad en los resultados de los problemas que se les plantearon. Cuando a los estudiantes se le preguntó si aceptarían la invitación de apostar en una polla de fútbol, se obtuvieron respuestas como las siguiente "No aceptaría jugar porque en el fútbol no hay seguridad de quién va a ganar, todo depende de la suerte".

Explicaciones subjetivas. En esta categoría se consideran las explicaciones basadas en creencias, gustos, convicciones, deseos, ilusiones o expectativas personales. Estas preconcepciones subjetivas generan en los participantes cierto nivel de confianza para tomar decisiones cuando se enfrentan a situaciones dominadas por la incertidumbre. Aunque en este tipo de explicaciones los participantes reconocen la imprevisibilidad de los resultados de un evento, propiedad básica de la aleatoriedad, presentan una fuerte tendencia hacia alguno de los posibles resultados. Ante la propuesta de jugar en la polla también fueron recurrentes respuestas como, "Sí aceptaría porque juega mi equipo favorito y confío en que va a ganar".

Explicaciones sustentadas. Esta categoría agrupa las explicaciones sustentadas en información suministrada en las guías de trabajo, en datos experimentales o en razonamientos profundos. Las decisiones tomadas por los participantes no son fruto de intuiciones, impulsos o caprichos subjetivos. Existe un análisis de cierta información disponible, a partir de la cual los participantes identifican regularidades, patrones o niveles de repitencia de resultados determinantes en sus decisiones. Uno de los problemas planteados a los estudiantes consistía en adivinar la decisión que tomaría un compañero que recién llega a clase frente a la propuesta de participar de la polla del fútbol. De esta situación surgieron repuestas como esta: "Según la tabla la mayoría de sus compañeros están jugando, entonces él también lo hace".

CONCLUSIONES

El conocimiento de las nociones previas de aleatoriedad y el lenguaje utilizado por los estudiantes en la comunicación de sus ideas son claros puntos de partida para emprender con rigor el diseño de unidades de aprendizaje, orientadas al desarrollo de la noción de aleatoriedad, noción indispensable para la formalización del conocimiento probabilístico.

Es recomendable que los problemas planteados a los estudiantes sean minuciosamente pensados de tal manera que promuevan ciclos de investigación y puedan ser abordados con el modelo PPDAC (Wild & Pfannkuch, 1999) o con modelos que estimulen habilidades similares a las promovidas por este. En este estudio se observó que el modelo representa un valioso recurso didáctico cuando se pretende guiar a los estudiantes en la solución sistemática de problemas y hacia el desarrollo de ideas y nociones fundamentales de la probabilidad y la estadística.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barragués, F. J., & Guisasola, A. J. (2006). La introducción de los conceptos realtivos al azar y la probabilidad en libros de texto universitario. Enseñanza de las Ciencias , 24 (2), 241 - 254.

Batanero, C. (2002). "Los retos de la cultura estadística: Conferencia inaugural." Documento presentado en las jornadas Internacionales de Enseñanza de la Estadística. Buenos Aires.

Serradó, A., Azcárate, P., & Cardeñoso, J. (2009). "Numbers: Zona cero" (I): Método científico de investigación estadística. Revista Eureka sobre enseñanza y divulgación de las ciencias , 6 (1), 47 - 62.

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J., & Cañizares, M. (2001). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre modelos probabilísticos en las secuencias de resultados aleatorias. Suma (36), 23 - 32.

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. International Statistical Review (67), 223-248.

Una aproximación al teorema de Pitágoras en el contexto de van Hiele

Ubaldo Restrepo Castrillón[*]
Sandra Milena Zapata[**]
Carlos Mario Jaramillo López[***]

RESUMEN

El propósito de nuestra investigación es determinar los descriptores de los niveles de razonamiento de los estudiantes de grado quinto, mediante un acercamiento al teorema de Pitágoras, a través del concepto de área. El estudio se enmarca en el modelo educativo de van Hiele, que según los lineamientos curriculares en matemáticas del Ministerio de Educación (MEN, 1998, p. 56), describe con bastante exactitud la evolución del pensamiento desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales. En este sentido, la caracterización que buscamos retoma elementos como el lenguaje, la visualización y la entrevista socrática, para identificar en qué nivel razonan los estudiantes, además, lograr el diseño de una propuesta metodológica que les permita avanzar en su nivel de razonamiento.

Palabras clave: teorema de Pitágoras, área, niveles de van Hiele, entrevista de carácter socrático, visualización.

[*] Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: Ubaldor1998@hotmail.com
[**] Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: szapata00@gmail.com
[***] Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: cama@matematicas.udea.edu.co

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Uno de los objetivos de las investigaciones en educación matemática es conocer los procesos de razonamiento de los estudiantes, con el fin de poder ofrecer a los profesores propuestas efectivas para desarrollar en las aulas una labor pertinente.

En el campo de la educación matemática, muchas investigaciones han corroborado que el estudio del componente geométrico centra su interés en la conceptualización de área, desde su concepción, en cuanto a la unidad de medida, su conservación, y el cálculo de la misma. Otros estudios revelan que la enseñanza de este concepto lleva a que el alumno tenga una fuerte tendencia a recurrir a procesos meramente numéricos, limitándose al uso de unidades de medida de área y al uso de fórmulas para el cálculo de las mismas. Corberán (1996), en su investigación, manifiesta la incomprensión por parte de los estudiantes acerca del concepto de área, afirmando que:

> Todos los investigadores que han realizado algún tipo de estudio sobre el área coinciden en llamar la atención sobre el elevado grado de incomprensión de este concepto por parte de los alumnos, y considera como causa fundamental de ello la insuficiente dedicación y el incorrecto modo que se realiza la enseñanza. (p.350).

Por lo tanto, desde nuestra experiencia como docentes, hemos observado un rezago en la enseñanza de la geometría en lo que se refiere a los conceptos de área y superficie de una figura plana y una percepción pobre del teorema de Pitágoras como una fórmula en la que hay que remplazar ciertos valores para obtener un resultado, muchas veces carente de sentido, dando lugar a una mecanización de reglas y uso rutinario de cálculos aritméticos.

La investigación se desarrolla en un colegio del municipio de Apartadó, el cual tiene una planta física que cuenta con 10 aulas, un aula de informática, un comedor escolar, una placa polideportiva ubicada en el patio. Tiene un promedio de población escolar de 45 estudiantes.

Planteamiento del problema. Los estudiantes del grado quinto presentan dificultades en la comprensión del área de las figuras geométricas planas. Los estudiantes exhiben habilidades algorítmicas, pero carecen de conocimiento básicos de la geometría y, por lo tanto, de un análisis visual geométrico, que les pueda mejorar su nivel de razonamiento. Mediante el concepto de área, haremos un acercamiento al teorema de Pitágoras, con el fin de hacerlo más interesante, significativo y comprensible.

Pregunta de investigación. ¿Cuáles son los descriptores de niveles de razonamiento que exhibe un estudiante de grado quinto, en cuanto a una aproximación al teorema de Pitágoras, mediante la construcción del concepto de área?

Objetivo general. Caracterizar los procesos de razonamiento de algunos estudiantes, mediante la construcción de unos descriptores que permitan evidenciar el nivel de comprensión para una aproximación al teorema de Pitágoras, desde del concepto de área.

Objetivos específicos.

- Diseñar una entrevista semi-estructurada de carácter socrático para el acercamiento a la comprensión de teorema de Pitágoras, que permita identificar los descriptores y poder clasificar al entrevistado en algunos de los niveles.
- Hipotetizar un conjunto de descriptores de nivel para determinar el razonamiento de los estudiantes, en cuanto a una aproximación a la comprensión del teorema de Pitágoras, a través del concepto del área.
- Definir los elementos teóricos que orientarán el diseño de un test que permita determinar el nivel de razonamiento de un estudiante, en cuanto a la conceptualización del teorema de Pitágoras, a través del concepto de área.
- Diseñar un test fundamentado en la entrevista socrática acerca del concepto de área como una forma de aproximación a la comprensión del teorema de Pitágoras, donde el estudiante confronte, corrobore y avance en su razonamiento.

MARCO REFERENCIAL CONCEPTUAL

El modelo educativo de van Hiele llevado a cabo por los esposos van Hiele fue una propuesta desarrollada en el año 1957, en el campo de la geometría; no obstante, en las últimas décadas se han presentado trabajos de investigación que han permitido extender el modelo, logrando importantes avances en otros campos matemáticos. Entre algunos de estos trabajos de investigación están: "*Aplicación del modelo de van Hiele al concepto de aproximación local", de* José Luis Llorens Fuster; "*La noción de continuidad desde la óptica del modelo de van Hiele", de* Pedro Campillo Herrera; "*La modelación del espacio y el tiempo", de* Andrés de la Torre; "*Diseño de una entrevista socrática para la* *construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas*", desarrollado por Carlos Mario Jaramillo López, René Alejandro Londoño Cano y Flor María Jurado Hurtado; "*Módulo de aprendizaje para la comprensión del concepto de series de términos positivos",* por Sandra Milena Zapata y Edison Sucerquia V., entre otros investigaciones.

El modelo de van Hiele contempla tres aspectos fundamentales; uno de ellos es el aspecto descriptivo, dado por los niveles de razonamientos que son características que permiten saber cómo y en qué están razonando los estudiantes con respecto al objeto matemático, a partir de una actividad; el aspecto perscriptivo, dado por las fases de aprendizajes, que son una serie de pasos que debe seguir un estudiante para mejorar y subir al siguiente nivel de razonamiento, que se da a partir de unas actividades propuestas; otro aspecto es la percepción o insight, que consiste en que un estudiante hace una actuación competente en los hechos requeridos en una nueva situación o cuando hace una aplicación intencional de un método que resuelve la situación. Un estudiante entiende lo que está haciendo, cómo lo está haciendo y por qué lo está haciendo.

Los cinco niveles de razonamiento por los cuales pasa un estudiante, según J. Llorens (1994), son:

Nivel 0. Predescriptivo. Es el nivel básico: el estudiante reconoce los elementos básicos de estudio para comprender un concepto particular.

Nivel I. De reconocimiento visual: el estudiante reconoce las figuras por su apariencia general, no identifica elementos ni propiedades.

Nivel II. De análisis: el estudiante puede relacionar las partes o elementos constitutivos de las figuras, encuentra algunas propiedades, pero se le dificulta relacionarlas con otras.

Nivel III. De clasificación: el estudiante relaciona unas propiedades con otras, es capaz de desarrollar secuencias de proposiciones para conjeturar que una propiedad se deriva de otra; el estudiante es capaz de clasificar figuras geométricas teniendo en cuenta el ordenamiento de sus propiedades y hace definiciones de un concepto geométrico.

Nivel IV. De deducción formal: el estudiante logra comprender la estructura axiomática, definiciones y teoremas de las matemáticas, empleando la deducción formal. El estudiante no hace razonamiento abstracto.

El teorema de Pitágoras es un concepto que permea el currículo matemático desde los distintos pensamientos y sistemas matemáticos. Por lo tanto, tiene que ver con el pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento espacial y sistema geométricos, y pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. En ese sentido, el teorema de Pitágoras es un tema que a abordamos a partir del grado octavo de la secundaria, según los *Estándares básicos de competencias en matemáticas*, del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2003, p. 86).

Así que el teorema de Pitágoras está inmerso en muchas temáticas que el estudiante en su vida escolar debe abordar; por un lado, el estudio de área de figuras planas como el rectángulo, el triángulo rectángulo y el cuadrado, así como la identificación de sus elementos constitutivos y propiedades de las figuras anteriores, como la altura, las diagonales, los ángulos, la perpendicularidad y paralelismo, entre otros; por otro lado, la resolución de triángulo rectángulo, deducción de las funciones trigonométricas, la ley de seno y coseno, la elipse, el círculo, y la distancia entre dos puntos. También tiene su aplicación en el campo de la física.

METODOLOGÍA

El trabajo de investigación se aborda desde una perspectiva cualitativa, donde la producción de sus hallazgos está centrada en los fenómenos como la vida de la gente, las experiencias vividas, los comportamientos, emociones y sentimientos, así como el funcionamiento organizacional, los movimientos sociales, los fenómenos culturales e interacción entre las naciones (Strauss & Corbin, 2002).

Tipo de estudio. De acuerdo con el paradigma cualitativo, el tipo de estudio que se desarrollará en esta investigación es el estudio de caso, que según Stake, R. E (1999*)* permite el estudio de la particularidad y la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes.

ANÁLISIS DE DATOS

Lo haremos a partir de la transcripción, lectura, análisis e interpretación de algunas observaciones que tendrán como objetivo seleccionar cinco estudiantes para el estudio de casos; la revisión del material como resultado de una entrevista grupal de carácter socrático se hará con el fin de garantizar la comprensión de algunos conceptos necesarios para el acercamiento del teorema de Pitágoras, a partir del concepto de área.

Luego, haremos una revisión exhaustiva de la transcripción, lectura y análisis e interpretación de las entrevista de carácter socrático a cada una de los cinco estudian tes, pero en forma individual, es decir, se analizará primero una, con el fin de refinar las actividades y descriptores hipotéticos para ser más efectivo en la segunda entrevista. Estas informaciones y sus posibles conclusiones nos orientarán a la caracterización de los niveles de razonamiento.

CONCLUSIONES

Los avances del presente estudio permiten precisar las siguientes conclusiones:

- La validez de los descriptores de nivel que permiten establecer cómo razonan los estudiantes seleccionados, en relación con una aproximación al teorema de Pitágoras, a través del concepto de área.
- La aplicación de una entrevista semi-estructurada de carácter socrático, para una aproximación a la comprensión del teorema de Pitágoras, posibilita identificar los niveles en los que se encuentran los estudiantes con respecto al objeto de estudio.
- El diseño de un test fundamentado en la entrevista socrática, acerca del concepto de área, se constituye en componente que, para la presente investigación, posibilita la comprensión del teorema de Pitágoras.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Corberán, R. (1996). *Análisis de concepto de área de superficie plana. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde la primaria a la universidad.* Tesis doctoral. Universitat de Valencia. España.

Llorens, J. (1994). *Aplicación del modelo de Van Hiele al concepto de aproximación local.* Tesis doctoral. Valencia, España.

Ministerio de Educación Nacional. (2003). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Editorial Magisterio. Bogotá, D. C., Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares: matemáticas*. Magisterio, Bogotá, Colombia.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata.

Strauss, A. & Corbin, J. (2002). *Bases de investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar teoría fundada*. Medellín: Ediciones Universidad de Antioquia.

¿Es posible hacer evidentes los procesos de metacognición en la resolución de problemas?

Daniel Alejandro Santos Ballén[*]
Gustavo Adolfo Lozada Cuervo[**]

RESUMEN

La experiencia como investigadores en el campo educativo nos ha mostrado que regularmente se centra la atención en la manera en la que el docente enseña, pero se obvia la manera en que este aprende. Para nosotros dicho aprendizaje incide en el proceso educativo y creemos que el espacio propicio donde se hace evidente es la resolución de problemas. Por esta razón se presenta parte de la resolución de un problema y su respectivo análisis desde un enfoque metacognitivo, intentando identificar los procesos de metacognición que se logran hacer evidentes del inicio de la resolución de un problema.

Palabras clave. Resolución de problema, metacognición, análisis metacognitivo.

[*] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: das1032@gmail.com
[**] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: gustavio90@hotmail.com

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En nuestra formación como docentes de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas ha sido fundamental indagarnos por los aspectos que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, específicamente, la relación existente entre la construcción del conocimiento, el contexto donde se desarrolla y las situaciones que se proponen, desde la perspectiva del docente-estudiante. Es por ello, que de un sinnúmero de cuestionamientos surge el que en esta oportunidad se desea estudiar, el cual está enfocado a la construcción del conocimiento como acto de autorregulación. Dicho interés surge debido a que, usualmente, se hace énfasis en la manera en que el docente enseña, pero se obvia la manera en que este aprende, esencialmente los procesos y razonamientos que se generaron referentes a la metacognición. Este interés parece importante porque, teniendo en cuenta nuestra posición como educadores, según Jorba y Santamaría (Citado por Jiménez, 2004) "sería poco imaginable que una persona dedicada a generar conocimiento científico pudiera llegar a desarrollarlo sin representarse adecuadamente qué está buscando". Teniendo en cuenta que se da como supuesto una manera de representarse, surge la pregunta de investigación enfocada a esta afirmación: ¿Cuáles acciones metacognitivas se logran hacer evidente en la resolución de un problema por estudiantes para maestro? El centro de estudio es el proceso metacognitivo realizado por los investigadores.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Teniendo en cuenta los dos aspectos fundamentales de esta investigación: la resolución de problemas y la metacognición, es necesario establecer diferencias y relaciones entre metacognición, resolución de problemas y análisis metacognitivo. Por un lado, la metacognición y la resolución de problemas se pueden relacionar a partir de tres dimensiones mencionadas por Ríos (citado en Jiménez, 2004) y las fases (abordaje, ataque y revisión), y procesos mencionadas por Mason, Burton y Stace (1989). Tales dimensiones son: planificar, monitorizar y evaluar; estas se muestran como vitales para las pretensiones de este estudio, ya que los momentos que se tienen planeados (trabajo individual de la resolución del problema, reuniones en grupo sobre los avances y estrategias del problema y análisis metacognitivo) se vinculan y ajustan a ellas.

La conciencia de pensar y reflexionar antes de atacar un problema o comenzar una tarea específica, sobre un determinado camino o ruta de ataque, es lo que se determina como una acción metacognitiva, que muestra la reflexión como el componente clave en el proceso metacognitivo que se quiere vincular en la resolución de problemas y más específicamente en un proceso grupal de análisis metacognitivo. En relación con las funciones metacognitivas Ríos (citado en Jiménez, 2004) menciona que la metacognición comprende estos como momentos del pensamiento reflexivo y presenta los indicadores de dichos componentes, entendiendo estos como las acciones metacognitivas que se hacen a fin de lograr un objetivo cognitivo, las cuales se presentan en forma de pregunta, como: ¿Qué se debería hacer primero? ¿A dónde se quiere llegar? ¿Cuáles ayudarán en la particular tarea?, entre otras. Estas siendo parte del primer componente, planificación. Al igual, las otras dos restantes componentes incluyen una serie de preguntas, las cuales se pueden diferenciar por el objetivo que en ellas se busca.

METODOLOGÍA

El estudio se ubica en un enfoque cualitativo, ya que se pretende describir y analizar la realidad tal y como sucede a partir del proceso llevado por los investigadores, y de esta manera, interpretar y dar sentido a la información obtenida. En la primer fase del enfoque cualitativo, epistemológica, se define como objeto de estudio la descripción y análisis metacognitivo del proceso de resolución de un problema, por esta razón se involucran en el marco teórico los aspectos más relevantes. Para la fase de estrategia general se definen cuatro momentos que se darán de manera cíclica: resolución individual, reunión de los resolutores, recolección de la información y análisis de la información. En el momento de la resolución individual, cada uno de los resolutores realiza de manera individual la resolución del problema, plasmando en el cuaderno "resolutor" los procesos generados en esta y capturando en grabaciones de audio y video los razonamientos. REVISIÓN En la resolución individual, el resolutor debe hacer una descripción de su proceso de resolución y/o de las actividades que se dan en cada una de las fases; esta descripción, a su vez, es una primera recolección de información. En la reunión de los resolutores se presenta cada uno de los procesos, se observan los aspectos comunes y se centra la atención en los procesos que se consideren más relevantes (en pro de la resolución) o que generan mayor dificultad (Atasco); para recoger la información de las socializaciones se hace un acta donde se registran las discusiones y conclusiones obtenidas. Esta se hace al finalizar el proceso de resolución o al terminar una fase, y se dispone el espacio para identificar de manera grupal las diferentes acciones metacognitivas llevadas durante este.

Luego de contar con las herramientas conceptuales y tener claridad en los aspectos metodológicos, se crean tres categorías para llevar a cabo el análisis; sin embargo, para los fines de este estudio solo se presenta la categoría 1 referente a la fase de planificación/ abordaje. Categoría 1 (planificación/ abordaje): REVISE Planea el curso de la acción cognitiva, organiza y selecciona las estrategias que llevan a alcanzar el objetivo.

Acciones: Interioriza y define el problema, reconociendo a dónde quiere llegar; reflexiona reglas y condiciones; delibera frente a qué se debería hacer primero; se cuestiona por cuáles acciones ayudarían en la tarea; busca representaciones y formas de organizar la información mediante símbolos, diagramas, tablas o gráficos; intenta anticipar las consecuencias de las acciones y define un plan de acción.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En este apartado se presenta el análisis de la resolución del problema en cuanto a la fase de abordaje por parte de los dos resolutores, luego de hacer la recolección de los datos en la fase de estrategia general, por medio de las evidencias recolectadas en las grabaciones y el cuaderno resolutor, que permiten encontrar relación entre la acciones metacognitivas realizadas y su incidencia en algún momento de la resolución del problema, permitiendo así, realizar una correspondencias entre las preguntas metacognitivas en relación a algún acción metacognitiva. CONFUSO

Análisis con base en las categorías: acciones metacognitivas del resolutor 1. Interioriza. Al preguntarse por las condiciones y requerimientos del problema para generar su entendimiento y relación con situaciones anteriores, intenta asimilar el problema, con el fin de lograr un acercamiento al mismo, que le permita situarlo en condiciones viables que generen realizar diversas acciones en relación con la resolución.

Caracterizar. Al preguntarse por cuáles de las curvas permiten familiarizarse con el problema, está analizando las características de las diferentes curvas para elegir la de menor complejidad y mayor dominio. Al indagarse por cuál de las transformaciones empezar a estudiar, está analizando sus características para elegir la de menor complejidad.

Hipotetizar. Luego de realizar unas determinadas acciones que lleven a cierta creencia acerca del comportamiento de una determinada situación del problema, hipotetiza al creer que es posible establecer relación entre las propiedades de las transformaciones, pretendiendo encontrar comportamientos similares o iguales en cada espacio.

Acciones metacognitivas del resolutor 2. Interiorizar. Al indagar sobre posibles relaciones del plano cartesiano con el del curvo, se intenta establecer conexiones y criterios que permitan comprender las nuevas situaciones e investigar sobre el comportamiento de las mismas.

Caracterizar. Al buscar condiciones particulares de eventos conocidos, estableciendo atributos en común, asociando los planos curvos con aspectos matemáticos conocidos (parábola), se generan acciones de comparación y clasificación según un grado de dificultad subjetivo dado por experiencias tenidas.

Proponer. Investigando sobre una ruta viable y trascendente, analizando la incidencia en la resolución del problema, aceptando la construcción de los ejes curvos como base de las transformaciones a realizar.

Hipotetizar. Contrastando la construcción en el comportamiento de los planos respecto a la ubicación de los puntos, hipotetiza al momento de creer que el comportamiento de las ordenadas es diferente en los dos espacios.

CONCLUSIONES

Al lograr una mayor conciencia en el proceso de aprendizaje, se logra analizar y reflexionar con mayor trascendencia los procesos de resolución, lo cual podría generar un mayor dominio de los conocimientos, es decir, si se es consciente en un momento o en todos que debe detenerse y preguntarse por la resolución; se genera la conciencia de comprender sus acciones, lo que propicia el aprehender de los conocimientos que puede generar la situación problema, lo cual muy posiblemente influya en la gestión del docente, en cuanto a la planeación y anticipación de las acciones de los educandos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Jiménez, V (2004) Metacognición y comprensión de la lectura: evaluación de los componentes estratégicos (procesos y variables) mediante la elaboración de una escala de conciencia lectora (Escola) (Tesis Doctoral). Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.

Mason, Burton & Stacey (1989) Pensar matemáticamente. Madrid, España: Editorial Labor.

Algunas observaciones de la intervención de los tipos de representación en la enseñanza y aprendizaje de la función lineal

Milton Sady Riveros Castellanos[*]
Paula Tatiana Rojas Moya[**]

RESUMEN

La presente investigación en curso tiene como objetivo fundamental aportar elementos matemáticos y didácticos, que ayuden a fundamentar nuevas propuestas para la enseñanza y aprendizaje de la función lineal y el abordaje que se hace de las representaciones, a partir de un análisis de datos obtenidos por medio de una investigación documental, de libros de texto, trabajos de grado y experiencias de aula debidamente clasificados. Las observaciones que se están construyendo se generan con base a las investigaciones desarrolladas por Raymond Duval frente a los cambios dentro y entre registros de representación, el aprendizaje y comprensión de los mismos, así como los formalizados por Carmen Azcárate y Jordi Deulofeu, concretamente sobre funciones y lenguaje de las gráficas.

Palabras clave: Función lineal, sistemas de representación, investigación documental

[*] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: tatiana15_89@hotmail.com

[**] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: mimilton88@gmail.com

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de un objeto matemático creemos indispensable tener en cuenta dos aspectos importantes: el primero de ellos se relaciona con comprender que un objeto matemático tiene distintas representaciones y se puede identificar de diferentes maneras; en este orden de ideas, cada tipo de representación pone de manifiesto características específicas de él; el segundo aspecto tiene que ver con la importancia de comprender la equivalencia entre las diferentes representaciones y poder lograr un correcto tránsito entre ellas para obtener la comprensión del objeto matemático como tal.

Sin embargo, estos aspectos no son tenidos en cuenta en el contexto escolar: por una parte, esto se ha evidenciado desde nuestra experiencia como aprendices al analizar la ruta de aprendizaje o forma de abordar los problemas en los que intervenía la función lineal, que fue a través de registros de representación vistos de manera independiente; el diagrama sagital como primer paso de abordaje evidenciaba características como el dominio y rango de una función y, de manera implícita, la variación y covariación entre magnitudes. Sin embargo, transitar desde este tipo de representación hacia la simbolización se dificultaba, ya que no había un aprendizaje adecuado de lo que hoy conocemos como variación entre magnitudes; esta ruta aún se presenta en algunos libros de texto.

Al respecto, Ruiz (1998) evidencia este tipo de debilidades señalando que "*existe inconsistencia en el reconocimiento de una misma función (por ejemplo, la constante, o la circunferencia) en forma gráfica y algebraica*" (p. 245). Tampoco se utilizaba un contexto adecuado para tratar este tipo de nociones, lo que dificulta el tránsito de registros, teniendo en cuenta las características que contiene cada uno.

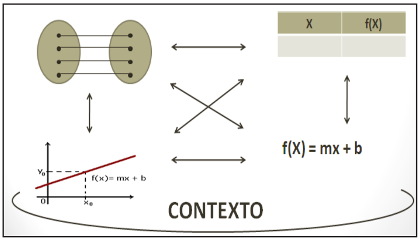
Por otra parte, en nuestra práctica docente encontramos poca importancia de colectar distintos registros; estos solo se ven como una tarea más; también se evidencia ausencia de contextos para poner de manifiesto este tipo de relaciones en situaciones problema; por lo tanto, carecen de utilidad los registros de representación en la resolución de problemas de la vida cotidiana; esto genera un bajo interés por parte de los estudiantes y obstaculiza el aprendizaje adecuado de la noción de función. Estas prácticas usuales conducen a que los estudiantes no se generen interrogantes con relación a las características que cada registro de representación suministra en el proceso de aprendizaje, y dificultan el tránsito entre registros de representación; no adquirir un adecuado significado de la variación durante la enseñanza básica se convierte en un obstáculo para el aprendizaje del concepto de función lineal.

Teniendo en cuenta lo anterior, es posible abordar como problema los cambios de registro en la enseñanza y el aprendizaje de la noción de función lineal y es necesario dar importancia al tránsito entre registros de representación que se genera durante estos procesos para la construcción de esta noción; creemos importante estudiar la producción que se encuentra con el fin de aportar elementos para el diseño e implementación de secuencias didácticas en el tema.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

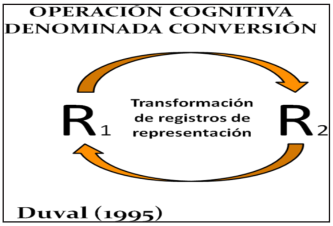
Los aspectos que intervienen en nuestra investigación se toman de algunas teorías importantes en el ámbito educativo. Encontramos como base la teoría de Duval (1995) acerca de los registros de representación, comprensión y aprendizaje. Este autor señala que todos los fenómenos relativos al conocimiento matemático tienen que ver con actividades de representación. Algo particular que ocurre con los registros de representación es, que son referentes a un sistema particular de signos y que al ser cambiados a otro tipo de registros de representación, entre ambos contienen características equivalentes del objeto, situación o información que se representa, sin embargo, para el sujeto que utiliza los dos sistemas puede tomar significaciones distintas.

En la siguiente gráfica se muestran algunas de las relaciones entre tipos de representación de la noción de función lineal.



Al respecto, Duval (1995) afirma que la conversión también se entiende como la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro, en una representación de este mismo objeto, esta misma situación o de la misma información en otro registro; asimismo, las operaciones usadas con los términos "traducción", "ilustración", "transposición", "interpretación", "codificación" etc., son operaciones que hacen corresponder una representación dada en un registro con otra representación en otro registro.

La siguiente grafica muestra la interpretación que hacemos de la propuesta que hace Duval para el cambio de registro de representación:



Por otra parte, para abordar los distintos temas que se involucran dentro de nuestra investigación hemos encontrado autores como Carmen Azcárate y Jordi Deulofeu, quienes, en su trabajo de investigación publicado por Síntesis en el texto *Funciones y gráficas* (1996), muestran distintas perspectivas acerca de la noción de función, en nuestro caso, acerca de los cambios entre los registros simbólicos; para esto citan la siguiente tabla:

Hacia *Desde*	*Descripción verbal*	*Tabla*	*Gráfica*	*Fórmula*
Descripción verbal	----	Medida	Boceto	Modelo
Tabla	Lectura	----	Trazado	Ajuste
Gráfica	interpretación	Lectura	----	Ajuste
Fórmula	Interpretación	Cómputo	Gráfica	----

Esta caracterización es propuesta por Janvier (1978) y muestra la variedad de las posibles traducciones de los registros simbólicos que interactúan en la enseñanza y aprendizaje de la función. En la tabla es posible ver también a través de qué proceso se relaciona cada tipo de registro; según Duval (1995) es posible encontrar dificultades en estos cambios o transiciones.

Entretanto, Azcárate afirma que las representaciones que intervienen en el aprendizaje de la noción de función son el modelo físico o simulación, descripción verbal, tabla de valores, fórmula o ecuación, y gráfica, y que cada una de estas representaciones permite expresar un fenómeno de cambio, una dependencia entre variables.

METODOLOGÍA

Este trabajo se lleva a cabo por medio de una investigación documental, que pretende buscar el estado del arte de la función lineal específicamente con los tipos de representación que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje y cómo se da el tránsito entre estas. Finol y Nava (1996) definen la investigación documental como investigación bibliográfica, que se caracteriza por el manejo y procesamiento de materiales bibliográficos, en nuestro caso libros de texto, trabajos de grado de pregrado y posgrado, y experiencias de aula presentadas en eventos de educación matemática, todos en un rango no mayor a 5 años atrás.

La elaboración del estado del arte tiene como propósito identificar, asimilar el cuerpo y determinar el estado del conocimiento teórico, que existe sobre una temática específica, seleccionada por el investigador, en este caso, la función lineal.

Las fases metodológicas utilizadas son las propuestas por Finol y Nava (1996); estas son: fase preparatoria, fase descriptiva, fase interpretativa, construcción teórica global y fase de publicación; cada una de estas da cuenta del proceso llevado a cabo. Al finalizar estas fases, se quiere tener un análisis cualitativo que puede ser utilizado como referencia para la construcción teórica de nuevas investigaciones y la elaboración de secuencias de actividades relacionadas con el objeto matemático estudiado.

ANÁLISIS DE DATOS

Dentro de la fase interpretativa de la presente propuesta se requiere una selección y evaluación de los documentos en virtud de la explosión de información que existe. Teniendo en cuenta el análisis, debe precisarse el significado de los datos en función de la validez y la confiabilidad de la información. En la recolección, se hace el registro de los datos, consistente en la descripción completa de los elementos más importantes del documento seleccionado y evaluado. Este proceso proponemos hacerlo mediante fichas bibliográficas, descriptivas y sinópticas que posteriormente serán analizados. En este momento, la investigación se encuentra en el proceso de recolección y clasificación de los datos.

De igual manera, se propone diseñar una tabla en la que se observe la transversalidad entre los diferentes tipos de representación y cada uno de las tipologías de textos seleccionados (experiencias de aula, trabajos de grado y libros de texto), así como encontrar falencias y fortalezas en la enseñanza y aprendizaje de la función lineal en cuanto a los registros de representación.

CONCLUSIONES

Dentro de los documentos que hasta el momento se han revisado es posible encontrar rutas de enseñanza y aprendizaje que segmentan los registros de representación y no se observa el tránsito entre estos. De igual manera, en algunos trabajos de grado encontrados, en los que se realizan propuestas de enseñanza de la función lineal teniendo en cuenta sus tipos de representación, se evidencia un tratamiento adecuado; sin embargo, estas propuestas no han permeado los procesos de enseñanza de la noción de función lineal.

Asimismo, es importante afirmar que para llegar al concepto de función lineal se debe pasar por una red de conceptos previamente vistos como la proporcionalidad, razones entre magnitudes, entre otros. Cada una de estas nociones previas aporta a la comprensión de las características que muestra cada tipo de representación; por tanto, es necesario indagar acerca del tratamiento previo que se da a la noción de función lineal.

Por otro lado, por medio de las gráficas y las expresiones algebraicas, es posible expresar las dependencias entre dos variables; la capacidad para leer, interpretar y construir gráficas cartesianas permite establecer la relación existente entre las dos magnitudes representadas, pero al mismo tiempo su conocimiento es un instrumento a través del cual pueden construirse nuevos conceptos, como por ejemplo la idea de variación. Dicho lo anterior, se evidencia que la transición entre registros de representación debe mostrar la equivalencia entre las características de cada registro, para aportar a la construcción de la idea de variación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azcárate, C. & Deulofeu, (1996). *Funciones y gráficas.* Madrid: Ed Síntesis,

Duval, R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprenttissajes intelletuels*. Suisse: Peter Lang.

Finol, T & Nava, H (1996). *Procesos y productos en la investigación documental*. Zulia: Editorial de la Universidad del Zulia,

Ruiz, L. (1998) *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico.* Jaén: Universidad de Jaén.

Paradoja de las pelotas de tenis: Construcción del infinito como un proceso iterativo infinito y un objeto trascendente

Solange Roa Fuentes[*]

RESUMEN

En este trabajo se analizan las construcciones que sobre el infinito evidencian estudiantes (entre 14 y 16 años) que pertenecen a programas de enriquecimiento en matemáticas, al tratar con la paradoja de las pelotas de tenis. A partir de los elementos de la teoría APOE (Acrónimo de Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas) se describe, mediante una descomposición genética, la construcción del infinito como un proceso iterativo infinito (concepción dinámica) y como un objeto trascendente (concepción estática). Con base en el análisis teórico se discuten las concepciones primarias que los individuos desarrollan y el rol fundamental del conjunto de los números naturales en la construcción del infinito como una totalidad.

Palabras clave: procesos iterativos infinitos, teoría APOE, números naturales, desarrollo de pensamiento matemático, talento matemático.

[*] Universidad Industrial de Santander, Grupo de Investigación Educación Matemática EDUMAT-UIS. Dirección electrónica: sroa@matematicas.uis.edu.co

INTRODUCCIÓN

El infinito matemático es una noción que ha sido ampliamente estudiada desde diferentes perspectivas teóricas en nuestra comunidad. Belmote (2009) hace un análisis detallado de las investigaciones que sobre el infinito se han desarrollado desde 1979 hasta 2008. Esta línea de tiempo parte de los trabajos sobre los modelos intuitivos tácitos propuesto por Fischbein (1987, 2001) hasta los trabajos recientes que desde la teoría APOE se han planteado sobre la construcción del infinito a partir de procesos iterativos infinitos (Brown, McDonald & Weller, 2010; Dubinsky, Weller, Stenger & Vidakovic, 2005a, 2005b; Weller, Brown, Dubinsky, McDonald & Stenger, 2004). En este último marco, hemos desarrollado la investigación que presentamos en este escrito.

Dubinsky y otros (2005a, 2005b) discuten la dicotomía entre el infinito potencial y actual a partir de dos constructos cognitivos diferentes que responden a una concepción-proceso y a un objeto. La primera, una mirada dinámica del infinito, y la segunda, una estática. Siguiendo con esta idea, Brown y otros (2010) estudian en una situación específica relacionada con el conjunto de partes de los naturales, cómo este tipo de estructuras pueden ser logradas por los individuos. En particular, dicho trabajo propone la necesidad de una nueva estructura dentro de la teoría APOE, *un objeto trascendente.* Partiendo de estas ideas, nos interesa determinar en un contexto de paradojas cómo un individuo logra la construcción de un proceso iterativo infinito y qué mecanismo mental debe establecerse para construir el objeto trascendente.

A continuación describiremos en términos generales los aspectos teóricos que tomamos como base para el desarrollo de nuestra investigación.

ASPECTOS TEÓRICOS

La teoría APOE es una teoría constructivista que busca explicar cómo un individuo puede construir conceptos y tópicos matemáticos, mediante la descripción de las estructuras y los mecanismos mentales que logra establecer al abordar una situación matemática.

Para empezar, este acercamiento teórico contempla la aplicación de acciones sobre objetos preexistentes. Las acciones se caracterizan por realizarse paso a paso y estar condicionadas por estímulos externos; estos pueden relacionarse con el contexto de la situación o la realización de algoritmos sobre casos particulares. Por ejemplo, en la construcción del concepto transformación lineal, una acción se refiere a verificar la preservación de las operaciones, dados una función y un caso particular de vectores y escalares. Cuando un individuo repite y reflexiona sobre dichas acciones, decimos que la acción ha sido interiorizada en un proceso. El proceso se diferencia de la acción en cuanto es una estructura mental sobre la cual el individuo tiene control. Un proceso puede dar lugar a un nuevo proceso mediante la coordinación con otro, o ser encapsulado en un objeto. Por ejemplo, en el caso de la transformación lineal, es necesario coordinar los procesos de las operaciones, suma vectorial y producto, por un escalar en un único proceso. Esto se logra mediante el conector lógico "y" (. Este nuevo proceso se establece cuando las propiedades no se conciben como aisladas sino más bien se ven juntas, al considerar que, dada una función, debe preservar combinaciones lineales para ser transformación lineal. Un proceso puede ser encapsulado en un objeto. El objeto se caracteriza por ser una estructura estática sobre la cual se pueden aplicar nuevas transformaciones. En el caso de la transformación lineal, es necesario que un individuo reconozca las transformaciones lineales fundamentalmente como funciones. Y considere, por ejemplo, que una transformación lineal es un vector de un espacio vectorial (para más detalle consultar Roa-Fuentes & Oktaç, 2010; 2012). Finalmente, los esquemas son una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas, todos relacionados con un tema particular.

Cuando un individuo logra la construcción de una estructura, diremos que tiene una *concepción* de dicha estructura (McDonald, Mathews & Strobel, 2000). A continuación describimos el ciclo de investigación que fundamenta los resultados de este trabajo.

MÉTODO: CICLO DE INVESTIGACIÓN DE LA TEORÍA APOE

La teoría APOE propone un ciclo de investigación que contempla el desarrollo de tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de la enseñanza y observación, análisis y verificación de datos (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 1996). El objetivo del análisis teórico es diseñar un camino cognitivo denominado por la teoría una *descomposición genética*. En él se describen las construcciones y los mecanismos que debe seguir un individuo para construir un concepto o tópico matemático. Inicialmente este análisis es hipotético, por lo que se busca validar y refinar mediante la aplicación de las otras dos componentes. La segunda componente contempla el diseño y desarrollo de un modelo de enseñanza que siga el camino propuesto en el análisis teórico. Finalmente la tercera componente busca determinar la viabilidad del análisis propuesto mediante la aplicación de entrevistas didácticas. Una vez se aplica el ciclo completo con un grupo de individuos, la descomposición genética se valida, al contemplar cuáles de las estructuras y los mecanismos pensados inicialmente se evidenciaron realmente en el trabajo de los estudiantes. También es posible que se encuentren evidencias diferentes y se tengan que agregar nuevos elementos al análisis teórico.

En esta investigación hemos desarrollado la primera y la tercera componente del ciclo mediante el diseño de una descomposición genética genérica del infinito, de la cual presentamos un análisis particular para el caso de la paradoja de las pelotas de tenis. La tercera componente la desarrollamos con estudiantes de programas de enriquecimiento en matemáticas en México (Fundación Telegenio y Olimpiadas Matemáticas) y Colombia (Escuela Precoz Glen Doman y Proyecto Semicírculo). Tomando como base el modelo propuesto por Mora, Casas & González (2009) sobre el talento matemático en un contexto sociocultural, ubicamos nuestro trabajo en los programas mencionados donde entrevistamos estudiantes con edades entre 14 y 16 años buscando determinar la viabilidad de la descomposición genética genérica. A continuación describimos el análisis cognitivo que dará fundamento a los datos obtenidos en las entrevistas.

La paradoja de las pelotas de tenis: un análisis cognitivo

La versión de la paradoja de las pelotas de tenis que utilizamos en nuestra investigación es una adaptación de la presentada en Dubinsky, Weller, Stenger & Vidakovic (2010).

> Imagina que tienes tres botes con una capacidad ilimitada. Dos de los botes están vacíos, y están etiquetados con las letras T y A. El otro, el bote contenedor, tiene una cantidad infinita de pelotas de tenis numeradas de la siguiente manera: 1, 2, 3,… Imagina que realizas el siguiente experimento: Sacas del bote contenedor las pelotas número 1 y 2 y las colocas dentro del bote T e inmediatamente sacas la pelota de menor denominación, la pelota número 1, y la colocas en el bote A. Después sacas del bote contenedor las pelotas número 3 y 4 y las colocas dentro del bote T e inmediatamente después sacas la pelota de menor denominación, la pelota número 2, y la colocas dentro del bote A. Después sacas las pelotas 5 y 6 del bote contenedor y las colocas dentro del bote T e inmediatamente después sacas la pelota número 3 y la colocas en el bote A. Siguiendo con el experimento, ¿Cuál es el contenido de los botes T y A cuando el bote contenedor esté vacío?

Analizando cada paso es posible concluir que una vez el bote contenedor esté vacío, los botes T y A contendrán la mitad de las pelotas. Pero, por otra parte, si nos preguntamos por la posición de la pelota número *n*, podemos ver que en el paso *n* dicha pelota pasó al bote A. Luego es posible pensar que cuando el bote contenedor esté vacío, el bote T estará vacío y todas las pelotas estarán en A. La primera respuesta corresponde a una mirada dinámica de la situación donde las características de los pasos intermedios determinan la totalidad del proceso. La segunda es una visión estática del mismo, donde, al analizar la totalidad del proceso, es posible determinar un estado resultante que no se parece a los estados que lo preceden.

Esta diferencia del análisis total de la situación es lo que Brown y otros (2010) han denominado *objeto trascendente*, un objeto que no se genera de manera directa del proceso que lo precede. En nuestro análisis teórico hemos planteado la necesidad de construir un proceso iterativo infinito para dar lugar a este tipo de objetos. Estos procesos se caracterizan por la coordinación con el conjunto de los números naturales y una transformación sobre dicho conjunto determinada por el contexto de cada situación.

La transformación que identificamos en la paradoja es el movimiento, un proceso P_M que debe coordinarse con el conjunto de los números naturales P_N. En cada iteración, hay tres pelotas que se mueven a través de los tres botes: las pelotas $2n$ y $2n-1$ entran al bote T y la pelota n entra al bote A. Como analizaremos en la presentación de este trabajo, un asunto fundamental es construir este proceso como único. Los datos muestran cómo algunos estudiantes analizan esta transformación de movimiento como dos procesos independientes, para explicar la imposibilidad de vaciar el bote contenedor por tener un número infinito de pelotas. Ahora, una vez se logra el proceso P_2 es necesario aplicar un mecanismo que permita ver el proceso como un todo. En nuestra investigación hemos caracterizado este mecanismo y lo hemos llamado *completez*.

REFLEXIONES FINALES

Los principales resultados de nuestro trabajo se relacionan con el estudio y análisis de datos empíricos que fundamentan la necesidad de construir procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes determinados por el contexto en donde el infinito emerge. En este camino, proponemos la necesidad de diseñar modelos de clase en donde los estudiantes transformen sus concepciones primarias sobre el infinito al abordar diferentes situaciones mediante la construcción de procesos como el descrito para la paradoja de las pelotas de tenis. En la presentación de este trabajo profundizaremos sobre los datos empíricos, analizando el tipo de construcciones que los estudiantes logran sobre el infinito tomando como base la descomposición genética propuesta. Además, discutiremos las características de las concepciones primarias, que obstaculizan la construcción de un proceso iterativo infinito como un objeto trascendente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education, II*. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.) CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1 – 32.

Belmonte, J. (2009). Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Salamanca. Salamanca, España.

Brown, A., McDonald, A. & Weller, K. (2010). Step by step: Infinite iterative processes and actual infinity. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 16, 115-141.

Dubinsky, E., Weller, K., Stenger, C. & Vidakovic, D. (2008). Infinite iterative processes: The tennis ball problem. *European journal of pure and applied mathematics* 1(1), 99-121.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-Based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics* 58, 335-359.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005b). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 2. Educational *Studies in Mathematics* 60, 253-266.

Fischbein, E. (2001). Tacit models of infinity. *Educational Studies of Mathematics* 48(2/3), 309-329.

Fischbein, E. (1987).Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach. Holanda: Reidel.

McDonald, M., Mathews, D. & Strobel, K. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. Research in Collegiate Mathematics Education IV, *CBMS Issues in Mathematics Education* 8, 77-101.

Mora, L., Casas, A. y González, M. (2009). La diversidad en el aula, un ejemplo: el talento en matemáticas. *Revista Pedagogía y Saberes* 30, 131-151.

Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: Un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 15(2), 199-232.

Roa-Fuentes, S. (2010). El infinito: Un análisis cognitivo de niños talento en matemáticas. Documento predoctoral, Programa de Doctorado en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, México.

Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13(1), 89 – 112.

Weller, K., Brown, A., Dubinsky, E., McDonald, M. & Stenger, C. (2004). Intimations of Infinity. *Notices of the AMS* 51(7), 741–750.

Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2012). Paradoja de las pelotas de tenis: Construcción del infinito como un proceso iterativo infinito y un objeto trascendente. Memorias del 13 Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Octubre 11, 12 y 13. Medellín: Colombia.

Recursos pedagógicos y conocimientos geométricos[1]: concepciones de los maestros que participan en el Premio Compartir al Maestro

Laura Rodríguez[*]

[*] Universidad del Valle. Dirección electrónica: laraurq@gmail.com

[1] Este trabajo de grado se realizó en el marco del Proyecto: Caracterización de los vínculos entre los Recursos Pedagógicos y el Conocimiento Matemático en la Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Básica. Proyecto COLCIENCIAS, Cód.1106-489-25213, Contrato Nº. 364 - 2009. Diego Garzón Castro, Myriam Belisa Vega Restrepo, Gloria Castrillón Castro, Jorge Arce Chaves, y. Octavio Augusto Pabón. Universidad del Valle, Cali, 2009.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Durante la última década, los recursos pedagógicos han sido la médula de estudios realizados en didáctica de las matemáticas, los cuales indagan sobre la labor del maestro en escenarios de enseñanza, específicamente de las matemáticas (Gueudet, Pepin & Trouche 2012). De tales estudios, se ha concluido que la implementación en el aula de este tipo de recursos origina importantes repercusiones en la labor del maestro en cuanto a su gestión didáctica (Trouche, 2007). La re-conceptualización que desde la última década se viene realizando de recursos pedagógicos va más allá de considerar las características materiales, ya que estos son estudiados dentro de una situación de enseñanza, por lo cual se indaga sobre las condiciones del maestro dentro y fuera de clase que limitan las maneras de planear el uso de recursos pedagógicos y de organizar el desarrollo de una clase en los que estos intervengan. Incluso, hay investigaciones en donde señalan que la cultura y las prácticas sociales de cada país influyen sobre la manera como los maestros idean los recursos pedagógicos y planifican sus clases con ellos.

Está investigación documental estudió la manera como los maestros que se Presentan al Premio Compartir al Maestro conciben los recursos pedagógicos en relación con el conocimiento geométrico escolar, la problemática que los maestros reconocen en el aula de clase y las propuestas de solución, así como la manera como los maestros describen el escenario, el tiempo y el tipo de problemas que utilizan en relación con los recursos pedagógicos que proponen, según lo explican en sus propuestas pedagógicas; para ello se consideraron los estudios provenientes de la perspectiva instrumental y documental (Gueudet, Pepin & Trouche, 2012), de donde se detectó que los recursos afectan la estructura de la situación de enseñanza, la actividad del maestro y la manera como se re-contextualizan las matemáticas escolares. Así, pues, la investigación profundizó en cómo son pensados, planeados o creados los recursos pedagógicos en las prácticas de los maestros que enseñan geometría y cómo los maestros han documentado ello, a través de una situación de enseñanza que ha sido implementada y realizada, empleando un conjunto de recursos pedagógicos. Así pues, la pregunta eje de este estudio fue: ¿Qué concepciones sobre recursos pedagógicos tienen los maestros que enseñan geometría y participan en el Premio Compartir al Maestro?

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

El marco teórico del trabajo desarrolla tres aspectos teóricos predominantes en el estudio documental. En primer lugar, se caracterizó la geometría escolar desde cuatro contextos. El primero se ubica en la Geometría de Euclides con el fin de caracterizar la geometría elemental a partir de dos problemas abordados en *Los elementos,* de Euclides: la forma y la semejanza de figuras geométricas. El segundo escenario se halla en los *Lineamientos curriculares de matemáticas* (MEN, 1998) y en *los Estándares básicos de competencias en matemáticas* (MEN, 2006), en donde la geometría escolar se caracteriza en función de los sistemas geométricos y el desarrollo del pensamiento espacial. El tercer contexto se sitúa en los estudios TIMSS 2007(Mullís, Martin, Foy, & Et.al, 2008), los cuales se usaron para identificar los conceptos geométricos que son enseñados en la escuela y están referenciados en las propuestas curriculares de Colombia. Finalmente, se describe el contexto en donde se desarrolla la geometría origámica, porque gran parte de las propuestas pedagógicas que se elaboraron en geometría y se postularon al Premio Compartir al Maestro proponen el origami como recurso para la enseñanza de geometría. Tal caracterización de la geometría en los cuatro contextos mencionados se hizo con el fin de reconocer qué tipo de conocimientos geométricos se propusieron abordar los maestros a través de sus propuestas pedagógicas.

En segundo lugar, se exploraron algunas de las investigaciones que estudian las concepciones de los maestros de matemáticas sobre la enseñanza o aprendizaje de las matemáticas, o bien sobre aspectos curriculares o didácticos estudiados en didáctica de las matemáticas, con el propósito de precisar el término concepciones. Así, pues, en este trabajo se asumió como *concepciones* a aquellos constructos mentales que guían las actuaciones del maestro en el aula y, por ende, las decisiones didácticas del maestro y, por supuesto, sus criterios para la selección de recursos y la manera como construye o idea una propuesta pedagógica con ellos (Ponte, 1994b, pp. 195 y 1996, citado por Martínez Silva, 2003, p. 54).

En tercer lugar, en esta investigación documental se retomó una de las trayectorias teóricas en la que se desarrolla una re-conceptualización de recurso pedagógico: la perspectiva instrumental que se extiende a la perspectiva documental y es desarrollada por Trouche & Et.al (2012) y su grupo de investigación, de donde se asumieron los recursos pedagógicos como artefactos (Garzón Castro & Vega Restrepo, 2011). En concreto, un artefacto es un objeto mental o físico dispuesto para realizar una actividad humana que tiene un objetivo específico claramente definido (Gueudet & Trouche, 2009); de allí que los recursos pedagógicos se consideran como una variedad de artefactos y son usados, en este caso, por los maestros de matemáticas para llevar a cabo sus prácticas profesionales; de manera que la evaluación de un estudiante, una discusión con un colega, una pieza de software, incluso el lenguaje o un gesto de un estudiante son considerados como recursos pedagógicos para el maestro.

METODOLOGÍA

La investigación inició con una revisión global de las propuestas pedagógicas que estaban registradas en la base de datos de la Fundación Compartir, a partir del año 1999 hasta el año 2011. En la revisión global se caracterizó el número de propuestas postuladas al premio por año al área de matemáticas, la participación de los maestros por género, los sectores y las modalidades escolares de participación. Para el estudio de casos particulares, se seleccionaron las propuestas pedagógicas desarrolladas en geometría, de siete maestros que se postularon al área de matemáticas del concurso en el período de los años 2009-2011. Para procesar la información se diseñó un código de identificación del maestro; el código indica características de la propuesta, del maestro y de la institución donde este labora, consta de siete caracteres y cada uno está conformado por dos letras mayúsculas o dos dígitos. Para el procesamiento y análisis de la información se diseñaron dos instrumentos. El primer instrumento diseñado fue una **ficha descriptiva de la propuesta pedagógica**, que muestra las características primordiales de la propuesta, como: objetivos de la propuesta, problemática, temáticas de estudio, artefactos propuestos. Esta ficha se utilizó para realizar un pre-análisis: "se trata de realizar una lectura superficial del material (a veces sólo hojearlo, organizarlo, controlarlo) y llevar a cabo una primera aproximación a los indicadores en los que se apoyará la investigación" (Porta & Silva, 2004); los indicadores que se utilizaron en la ficha corresponden a factores elementales que pueden identificar un recurso pedagógico de acuerdo a Joab, Guin, & Trouche (2003). El segundo instrumento fue una **rejilla de análisis**, en la cual se organizaron las dimensiones, categorías y subcategorías que permitieron procesar las propuestas pedagógicas y obtener las unidades de análisis. La rejilla fue usada para clasificar las ideas de los maestros referidas a los recursos pedagógicos, a la situación y a su gestión.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

A los datos se les hizo un análisis de contenido a través del cual se encontró que los maestros mantienen la tendencia de concebir los recursos pedagógicos como recursos materiales. Además, las situaciones que comúnmente utilizan los maestros para dar sentido/significado a los recursos pedagógicos consisten en problemas de construcción, y hacen más énfasis en el algoritmo de construcción, que en tratar de demostrar la propiedad que subyace al algoritmo. Asimismo, los maestros tienden a utilizar no solo sus conocimientos geométricos para dar sentido/significado a los recursos pedagógicos, sino también sus conocimientos sobre los diferentes artefactos propuestos; así, por ejemplo, los maestro para utilizar el origami tienen que conocer la técnica para modelar figuras geométricas en el papel, pero los maestros utilizan la técnica de doblado de papel desde la parte artística, sin fundamentarse en los principios y teoremas de la geometría origámica. De otro lado, en relación con el conocimiento curricular, se encontró que el desarrollo del pensamiento geométrico y el desarrollo de competencias son dos aspectos curriculares consideradas por los maestros que, según lo expresado por ellos, se posibilitan a través de los diferentes artefactos que emplean para la enseñanza de la geometría. Por otra parte, el modelo Van Hiele es usado por tres maestros para estructurar las actividades en que intervienen los recursos pedagógicos, más que desde un modelo de enseñanza. Es preciso señalar que los maestros no logran definir un problema de tipo didáctico como tal; pero la mayoría de los maestros estudiados considera que la falta de motivación e interés por las matemáticas de los estudiantes es uno de los factores que ocasionan que los procesos de aprendizaje no se desarrollen eficazmente, y es asumido por ellos como un problema, lo que es frecuente en las propuestas pedagógicas que se postulan al Premio Compartir al Maestro al área de matemáticas, y también lo fue en el caso de las siete propuestas estudiadas aquí, y la motivación no representa un elemento lo suficientemente fuerte para estudiar las competencias profesionales del los maestros cuando gestionan un conjunto de actividades en clase para dar solución a un problema didáctico (Carulla de Rojas, 2005).

CONCLUSIONES

De este estudio se origina la necesidad de realizar actividades en los programas de formación docente, relativas a la documentación de experiencias pedagógicas significativas, ya que se hace evidente que hay un vacío en la competencia profesional de formulación e identificación de problemas didácticos relativos al conocimiento escolar, a un conjunto de acciones de didácticas realizadas por el maestro para su solución y a un conjunto de artefactos que les permitan a los alumnos construir activamente el conocimiento escolar, durante una actividad diseñada por el maestro para ser implementada en clase. Además, se manifiesta que una experiencia pedagógica significativa que es sistematizada, potencialmente, se convierte en un recurso pedagógico que puede ponerse a disposición de una comunidad de docentes, que tienen la posibilidad de adaptarla e implementarla en otro contexto distinto para el que inicialmente fue diseñada. Finalmente, debe recalcarse que al documentar una experiencia pedagógica, es necesario usar referencias al momento de citar, pues son importantes para estudiar las ideas en las que se fundamentan los maestros para la sistematización de una experiencia pedagógica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Garzón Castro, D., & Vega Restrepo, M. B. (2011). *Los recursos pedagógicos en la enseñanza de la geometría*. XIII CIAEM-IACME. Recife. Recuperado Marzo 5, 2012, de http/www.cimm.ucr.ac.cr/.../220-5718-1-SP.pdf

Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche (Eds.), L. (2012). *From Text to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development*. New York: Springer.

Gueudet, G., Trouche, L. (2009), Towards New Documentation Systems for Teachers? *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 199-218, DOI 10.1007/s10649-008-9159-8

Martínez Silva, M. (2003). *Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del maestro* (tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona. Bellaterra. Recuperado Abril 23 del 2012, de http://www.tesisenred.net/bitstream/handle/10803/4703/mma1de3.pdf?sequence=1

MEN. (2006). *Estándares básicos en competencias matemáticas*. Bogotá: MEN.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas*. Bogotá.

Mullis, I. V., Martin, M. O., Foy, P., & et al. (2008). *TIMSS 2007 International Mathematics Report: Findings from IEA´s Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades*. Boston: TIMSS & PIRLS International Study Center.

Porta, L., & Silva, M. (2004). "*La investigación cualitativa: el análisis de contenido en la investigación educativa*". Recuperado marzo 19, del 2012, de www.uccor.edu .ar/paginas/REDUC/porta.pdf

Trouche, L. (2007). *Instruments du Travail Mathématique et Dispositif d´enseignement dans les Environnements Informatisés. Quelles Ressources pour l`enseignement des Mathématiques?* (pp. 37-42). Lyon: Université Lyon 1.

Universidad del Valle-COLCIENCIAS, Arce, J., Castrillón, G., Garzón, D., Pabón, O., & Vega, M. (2009). Proyecto: *Caracterización de los vínculos entre los recursos pedagógicos y el conocimiento matemático en la enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica*. Proyecto COLCIENCIAS, Cód.1106-489-25213, Contrato Nº. 364 – 2009. Cali: Universidad de Valle.

Funciones racionales en el desarrollo de pensamiento variacional

Ronald Andrés Noreña Gallego[*]

RESUMEN

Constantemente existen preguntas de los docentes y alumnos sobre los procesos de aprendizaje y de enseñanza en los cuales están inmersos; ante esto, la siguiente investigación intenta estudiar un hecho crucial en dichos procesos de formación como es la formación de pensamiento variacional en los estudiantes de grado noveno. **Para ello, se intenta realizar un acercamiento al estudio de las funciones racionales como medio potenciador en la formación de pensamiento variacional en dicho grado, a partir de la articulación de conceptos y nociones relacionadas como son: dominio, dependencia, asíntotas y equivalencia de funciones.**

Para el estudio, se consideraron tres ejes investigativos: a) **Cognitivo:** bajo la teoría de **registros semióticos de representación (RSR)** de Duval (1999) en los registros gráficos y algebraico; b) **Matemático:** análisis y articulación de los conceptos y nociones relacionadas a las funciones racionales; c) **Curricular:** desde las exigencias políticas que regulan la actividad escolar estipulada por el MEN.

Palabras clave: función racional, pensamiento variacional, registro semiótico de representación, aprendizaje significativo.

[*] Universidad del Valle Cali – Colombia. Dirección electrónica: roanno@gmail.com

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

A través de los años se ha dado como tendencia que la actividad matemática promovida para los alumnos centre su atención en **la manipulación y adquisición de algoritmos matemáticos los cuales actúan como medio para dar solución a un problema particular, dejando de esta manera de lado la construcción y análisis de los aspectos conceptuales de los objetos mismos**. Es así, que uno de los conceptos más relevantes en el estudio y madurez del pensamiento variacional en la escuela es el concepto de función, y para el caso particular de estudio las de tipo racional, ya que en estas, se pueden visualizar y explorar diversos tipos y formas de variación a las cuales están expuestas las funciones, y se evidencian a través de la dependencia y características globales de las funciones como son: la concavidad, los intervalos de crecimiento, contextualización de las mismas bajo características interdisciplinares.

Para promover el estudio del pensamiento variacional, es necesario contemplar la implementación y estudio de los *sistemas algebraicos* como medio para la formación de este, ya que es el más ligado con los procesos de variación. De esta forma, una alternativa para potenciar el pensamiento variacional en los procesos de enseñanza y de aprendizaje en la escuela colombiana es a partir del empleo y análisis de diversos **RSR**[1], ya que ante la diversidad de representaciones en torno a un mismo objeto matemático, el estudiante puede identificar ciertas características conceptuales del mismo en un registro, las cuales no son perceptibles o evidentes en otro tipo de representación. Además, el uso de estos tipos de sistemas de representación ayuda a dar respuesta a una de las necesidades expuestas por el MEN, como es el reconocimiento y estudio conceptual del *pensamiento variacional*:

> Tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. (MEN, 2006, p. 66)

De esta manera, los **RSR** en los procesos de enseñanza y de aprendizaje son una herramienta potente, en la medida que a partir de estos se puede instaurar una relación de orden cognitivo entre las diversas ideas y representaciones mentales que viven en cada uno de los sujetos inmersos en el proceso escolar, ya que estos registros de representación semiótica se convierten en el medio del cual nos valemos para identificar y caracte-

[1] Para el caso particular de investigación solo se empleara el registro algebraico y gráfico.

rizar los objetos matemáticos que se estudian en los diferentes niveles de escolaridad.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

La formación de pensamiento variacional en los estudiantes no se da por un fin caprichoso de las entidades educativas o de los profesores, sino que, por el contrario, vive en el marco de las diversas políticas institucionales que regulan el avance y finalidad de la educación en Colombia. El MEN, en sus estándares básicos de competencias, promulga los requisitos que debe cumplir un estudiante para ser promovido de grado octavo a noveno; según estos estándares, los estudiantes deben: *identificar relaciones entre las propiedades de las gráficas y de las ecuaciones algebraicas, uso de procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas, identificar la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan, entre otras* (MEN 2006, p. 87).

Es así como el empleo de **RSR** en los procesos de enseñanza y de aprendizaje se convierte en un medio potente en los procesos de aprehensión de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes, ya que como lo menciona Duval (1999) es ante la capacidad que tenga un estudiante de representar un mismo objeto en diversos registros como se divulga lo que este realmente aprendió, mostrando la capacidad de distinción que ha concebido entre el objeto y las representaciones del mismo.

Vale destacar que los **RSR**, además de ser importantes como un medio de comunicación, también son necesarios para el desarrollo de la actividad matemática misma, puesto que según el **RSR** utilizado se genera el conjunto de elementos que serán manipulados y tratados por los estudiantes en sus situaciones de aprendizaje, manipulación que se da a través de dos operaciones cognitivas como son la **conversión** o la **coordinación de registros** (Duval 1999, Pp. 77-78), donde cada una de estas provee sus propias características en el "modo de operar" (Diagrama 1), así como en las expectativas a llegar por los docentes.

De esta manera, las funciones racionales, al ser tratadas bajo estas operaciones, permiten en el estudiante la diversificación de registros y la articulación de características propias del objeto las cuales se pueden percibir en más de un registro de representación. Pero, ante la diversa naturaleza de los registros, potencia competencias diferentes en él (estudiante).

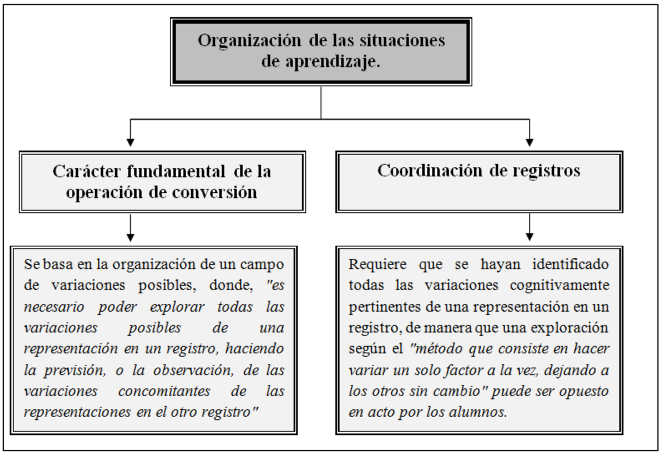


Diagrama 1. Organización de las situaciones de aprendizaje

METODOLOGÍA Y ANÁLISIS DE DATOS

Esta es una *investigación de metodología cualitativa*, puesto que se pretende identificar y caracterizar situaciones problemáticas, reflexionar sobre ellas y proponer hipótesis y posibles soluciones. Se intenta identificar algunas actividades y contextos apropiados para abordar la noción de función racional como medio para potenciar el pensamiento variacional, determinando las características o propiedades conceptuales de este tipo de funciones que pueden ser abordadas por medio de los **RSR**, al igual que la selección de contextos pertinentes para desarrollar dicha actividad.

CONCLUSIONES

El empleo de **RSR** promueve un aprendizaje basado en la reflexión y distinción del **objeto representado** con respecto a la **representación de este objeto** y ofrece ventajas tanto a docentes como a estudiantes ante la posibilidad de ver diversas representaciones de un mismo objeto en diversos registros, los cuales permiten, desde la naturaleza de cada uno, efectuar tratamientos diferentes que permiten la exploración de propiedades que son más potentes en un registro que en otro.

Los **RSR** promueven la aprehensión de las diversas unidades significantes de los objetos matemáticos, descentralizando su estudio a partir de la manipulación eficaz y sin sentido de los algoritmos representativos de él.

La importancia de un cambio de registro está en que, justamente, se pueden efectuar tratamientos totalmente diferentes en un registro distinto a aquel en el que fueron dadas las representaciones iniciales. (Duval, 1999. p. 55)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azcárate, C. & Deulofeu, P. (1990) *Funciones y gráficas*. En: Matemáticas: Cultura y Aprendizaje (26). Editorial Síntesis

Cantoral, R. & Montiel, G. (s.f.) *Visualización y pensamiento matemático*. Recuperado el día 01 de noviembre de 2011, del sitio web: http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/(Cantoral-Montiel2003)-ALME16-.pdf

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano, Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (Vega, M. Trad.) Universidad del Valle, Instituto de Educación Matemática. Colombia. (Trabajo original publicado en 1995).

Lacasta, E. & pascual, J. (s.f.) *Las funciones en los gráficos cartesianos*. Madrid, España: Síntesis, S.A.

MEN. (2006) *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Imprenta Nacional de Colombia: Santafé de Bogotá. Recuperado el 12 de marzo del 2011 de http://www.mineducacion.gov.co

Valoyes, L. & Malagon, M. (2006). *Formación de pensamiento álgebraico en la educación escolar* (2da Ed.). Cali, Colombia: Merlín.

Automatización de decisiones didácticas con el software Cabri elem

Marisol Rueda Puentes[*]
Ángel Miguel Niño Navas[**]
Martín Acosta Gempeler[***]

RESUMEN

Esta es una investigación de tipo ingeniería didáctica, en la cual tratamos de adoptar actividades de matemática recreativa por medio del software Cabri Elem, intentando automatizar las decisiones didácticas que debe tomar el docente en una intervención durante la clase como una reacción a una acción. Para realizar esta investigación nos apoyamos en la teoría de "las situaciones didácticas" de Guy Brousseau.

Palabras clave: matemática recreativa, software dinámico, automatización de decisiones didácticas, análisis didáctico.

[*] Universidad Industrial de Santander. Grupo EDUMAT – UIS. Dirección electrónica: mruedapu@matematicas.uis.edu.co

[**] Universidad Industrial de Santander. Grupo EDUMAT – UIS. Dirección electrónica: alfarzan77@hotmail.com

[***] Universidad Industrial de Santander. Grupo EDUMAT – UIS. Dirección electrónica: martin@matematicas.uis.edu.co

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Las investigaciones pedagógicas muestran que los alumnos aprenden y retienen mejor lo que tocan y manipulan. Por eso el software interactivo tiene un impacto positivo en el aprendizaje porque permite a los alumnos manipular en la pantalla del computador objetos que corresponden a conceptos teóricos, pero que al mismo tiempo adquieren una realidad perceptible. De esta manera, el software se convierte en un puente entre el mundo real que rodea al alumno y el mundo abstracto de las matemáticas.

Por otra parte, según los planteamientos de la matemática recreativa, uno de los factores que incide positivamente en el aprendizaje es el modo de intervención del profesor, que busca una mayor implicación de los estudiantes fomentando la identificación de errores, la búsqueda de comprensión y la comunicación de procesos. Estas intervenciones son el fruto de decisiones didácticas del profesor.

En esta investigación pretendemos automatizar esas decisiones didácticas en el software Cabri Elem de manera que los alumnos reciban retroalimentaciones que buscan que identifiquen sus errores y mejoren la comprensión de sus procesos.

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos formular nuestro problema de la siguiente manera: ¿Cómo identificar diferentes decisiones didácticas derivadas de la metodología de Matemática Recreativa y Semillero Matemático del grupo Edumat Uis y cómo automatizarlas en el software Cabri Elem para lograr un impacto positivo en el aprendizaje y el empoderamiento Matemático de los estudiantes de Secundaria?

REFERENTES TEÓRICOS

Utilizamos la teoría de las situaciones didácticas para analizar las actividades de Matemática Recreativa y Semillero Matemático con el fin de identificar las decisiones didácticas. Los conceptos clave son los de *devolución* y *validación*, según los cuales el estudiante asume la responsabilidad de resolver una situación problema y está en capacidad de decidir si el resultado es correcto; de lo contrario, debe corregirlo.

Por otra parte, la teoría de las situaciones didácticas nos dará argumentos para automatizar las decisiones didácticas a través del software CABRI ELEM. Una decisión didáctica es una intervención del profesor durante la clase como reacción a una acción, una pregunta o una reflexión del alumno con el fin de lograr un mejor aprendizaje. Al combinar las actividades de Matemática Recreativa con el software y aplicando la TSD pensamos que debemos obtener una nueva herramienta que mejore la enseñanza de las Matemáticas.

METODOLOGÍA

Utilizamos la metodología de ingeniería didáctica, que comprende tres fases: diseño, experimentación y validación.

Población

Trabajamos con un grupo de estudiantes del colegio Las Américas, correspondiente a niños del grado quinto.

Toma de datos

Registro en vídeo de dos parejas de estudiantes y notas de campo de los observadores.

ANÁLISIS DE DATOS Y CONCLUSIONES

Como nos encontramos en la etapa de experimentación y recolección de datos aún no podemos presentar un análisis ni conclusiones, pero en octubre esperamos ya contar con ellos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Mora, A., Lucena, Angi Juliana. (2008) "*Conceptualización de la traslación con la mediación del programa Cabri LM*". Trabajo de grado. Escuela de matemáticas. Universidad Industrial de Santander.

De Guzmán, M. (1984). Juegos matemáticos en la enseñanza. En Actas de las IV JAEM. Tenerife (pp. 49-85)

Margolinas, C. (2009) *La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas*. Traducido por Martín Eduardo Acosta & Jorge Fiallo. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander, UIS.

Competencia matemática pensar y razonar: El caso de la razón y la proporción

Jesús Torres Castro[*]
César Augusto Bornachera Yanguas[**]
Albeiro Giraldo Ospina[***]

RESUMEN

Este es un avance de una investigación en curso, que se adelanta en el marco de la Maestría en Educación con Énfasis en Didáctica de la Matemática, en la línea de investigación: Competencias Matemáticas, adscrita al proyecto macro: Formación y Desarrollo de Competencias Matemáticas, perteneciente al grupo de investigación Desarrollo Institucional Integrado de la Universidad de la Amazonia de Florencia, Caquetá, Colombia. Este reporte presenta un diseño previo de un modelo de competencia con el cual se pretende ***caracterizar la competencia matemática pensar y razonar***, en el estudio de la razón y proporción a partir de tareas propuestas en una secuencia didáctica a los estudiantes del grado séptimo (7°) de la Institución Educativa Siglo XXI de la ciudad de Florencia, Caquetá, y que permitirá establecer el nivel de competencia que alcanzan los estudiantes. Dicho modelo previo toma como base el modelo de competencia de Solar (2009) y se complementa con otros componentes de la competencia como la metacognición y la tendencia a la acción, ya que de esta forma se integran los componentes ser, saber y saber hacer.

Palabras clave: Competencia, competencia matemática, modelo de competencia, caracterizar, razón y proporción.

[*] Estudiante de Maestría en Educación, catedrático de Matemáticas, Universidad de la Amazonia. docente Matemáticas y Física, Institución Educativa Ciudadela Siglo XXI, Florencia - Caquetá. Dirección electrónica: jestoc36@yahoo.es

[**] Estudiante de Maestría en Educación, Universidad de la Amazonia. Docente de Matemáticas y Física, Institución Educativa Los Pinos, Florencia - Caquetá. Dirección electrónica: caby784@hotmail.com

[***] Docente Catedrático de Matemáticas, Universidad de la Amazonia; Director de tesis de Maestría. Docente Matemáticas y Física, Institución Educativa Jorge Eliecer Gaitán, Florencia-Caquetá. Integrante del grupo de investigación Desarrollo Institucional Integrado, línea de investigación Competencias Matemáticas, maestría en Ciencias de la Educación con énfasis en Didáctica de las Matemáticas. Dirección electrónica: albeiro70@gmail.com

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Durante más de 15 años los investigadores de la presente investigación en curso, han sido profesores de matemáticas en diferentes niveles de Educación Básica y Media Vocacional; en el transcurso de este tiempo han observado que al planteárseles situaciones problémicas a los estudiantes, para cuya solución se requiere la utilización de la razón y la proporción, proceden a utilizar algoritmos de manera mecánica, carentes de significado, es decir, sin exhibición alguna de razonamiento proporcional; investigaciones en educación matemática sobre este aspecto corroboran los hechos observados por ellos:

> En la fase inicial de un programa de enseñanza sobre la razón y la proporción, y en lo referente a la resolución de problemas, se les aplicó un cuestionario a 29 niños mexicanos de 11 años de edad, pertenecientes a un grupo de sexto grado de educación elemental. Los resultados del cuestionario, evidenciaron un manejo algorítmico de un modo mecánico, en el proceder de varios de estos niños y de elaboraciones carentes de sentido en su pensamiento proporcional cuantitativo. (Ruiz y Valdemoro, 2006).

De otra parte, Ochoa, et al. (2007) resaltan que existe una marcada tendencia a realizar procesos escolares centrados en el desarrollo de contenidos matemáticos; sin embargo (actualmente), y para la comunidad internacional, el aprendizaje de las matemáticas debe ir más allá del aprendizaje de contenidos, apuntando a la formación de ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos, que les permita identificar y entender el rol que juegan las matemáticas en el mundo (OCDE, 2003). Esta nueva perspectiva educativa se denomina enfoque por competencias.

El desarrollo de competencias en el estudiante es el elemento central en este enfoque; no obstante, como lo señala Solar (2009), hay un desequilibrio entre la abundancia de innovaciones sobre las competencias matemáticas y las investigaciones empíricas que las estudien desde la perspectiva de la didáctica de las matemáticas. De hecho, no se han encontrado antecedentes donde el interés sea indagar el desarrollo de la competencia pensar y razonar en el tópico de la razón y la proporción.

Para los investigadores de la Educación Matemática, las competencias no son independientes de los contenidos matemáticos. En efecto, se desarrollan desde un contenido matemático, cumpliendo estos, un papel fundamental en el desarrollo de las mismas.

De acuerdo con los argumentos expuestos, deseamos saber:

¿Cómo se desarrolla la competencia pensar y r*azonar en el objeto matemático razón y proporción?*

Debido a la complejidad de factores (cognitivo, actitudinales y procedimentales) involucrados en la competencia, su concepto se asumirá desde los referentes de D'Amore, B., Godino, J. y Fandiño, M. (2008) al asumir la competencia como un concepto complejo y dinámico (p.11). Lo primero, por cuanto ser competente en un determinado conocimiento, además del saber disciplinar "dominio" (elaboración cognitiva, interpretativa y creativa) requiere la parte funcional (uso) de ese conocimiento, es decir, que el estudiante se salga del contexto escolar y asuma su rol de ciudadano crítico y reflexivo que piensa matemáticamente en la solución de los diferentes problemas de su cotidianidad. En cuanto al concepto dinámico, hace referencia a la magnitud de alcance del término competencia por cuanto ser competente, además del uso y dominio anteriormente explicados, requiere también factores metacognitivos (aceptación del estímulo, el deseo de hacerlo), afectivos (actitud positiva del saber y el saber hacer), y la tendencia de acción evidenciada en su persistencia, entrega, dedicación y continuidad de observar el mundo con unos lentes matemáticos. En igual sentido, compartimos la visión de PISA (2006), al entender las matemáticas como un conjunto de procesos que proporcionan respuestas a problemas en situaciones usuales de la vida cotidiana, con un gran énfasis en la parte funcional del aprendizaje matemático, es decir, el uso de la competencia, que le da una orientación funcional al currículo de matemáticas; en este mismo marco referencial asumiremos tres niveles de complejidad de la competencia en los problemas matemáticos y en las competencias demandadas por los estudiantes: reproducción, conexión y reflexión.

Por otra parte, en este estudio se comparte que una de las funciones de la educación es "educar a los estudiantes para ser ciudadanos críticos, que puedan pensar, cuestionar, tomar riesgos y creer que sus acciones pueden transformar la sociedad" (Skovsmose, 1999 p.46) para lo cual en el desarrollo de las prácticas educativas se deben establecer escenarios de aprendizaje en los cuales: se involucre al estudiante en las actividades del aula (Valero 2006), se reconozca el contexto económico, social, cultural y político en el que viven los estudiantes, de tal manera que le den significado no solamente a sus tareas educativas individuales, sino a la relación entre las actividades de aula, su mundo y en particular sus posibilidades futuras de vida (Skovsmose et al., 2007;Bishop 1999), y así, la educación matemática pueda contribuir de manera significativa a la democratización social (García et al: 2008); como lo expresa Valero (2006): "esto significa que el conocimiento no es abstracto y descontextualizado, sino que siempre estará condicionado por la situación donde este tuvo lugar.

En lo concerniente a la estructura de la competencia matemática se utilizará el modelo de competencia de Solar (2009) y la relación entre competencia matemática, tareas matemáticas, procesos matemáticos de la competencia, contenidos matemáticos, y niveles de complejidad. Compartimos la visión de Rico y Lupiáñez (2008), al considerar que las tareas y competencias matemáticas poseen características comunes en el sentido de que ambos expresan lo que se espera que logren, desarrollen y utilicen los estudiantes, y demandan un incremento de la riqueza cognitiva de los estudiantes, y se basan en conocimientos, procesos y acciones. La relación entre tareas y competencias tiene una implicación de cara a la actuación del profesor cuando planifica sus clases; las tareas tienen tanto un carácter específico relativo a un contenido, como de un conjunto de acciones sobre un contenido matemático concreto; las competencias, en cambio, integran y aplican diversos conocimientos, movilizan una mayor riqueza cognitiva del estudiante, incluyendo actitudes, y se ponen en juego al abordar tareas complejas en situaciones complejas.

METODOLOGÍA

En el desarrollo de esta investigación en curso, se adoptará como método de investigación, el estudio de caso con observación participativa, basada en una experiencia de aula donde se producirán datos. Mediante una intervención en el aula, se recogerá información a través de diferentes instrumentos (rejillas, vídeos, observaciones participativas, producción del estudiante, cuadernos de apuntes del investigador, etc.), cada uno con su propia estrategia de análisis, de los cuales se obtendrán datos y se caracterizarán, con la intencionalidad de describir cómo se desarrolla la competencia matemática pensar y razonar en el tópico de la razón y la proporción.

Este estudio se focalizará en seis (6) estudiantes participantes de 7º grado de Educación Básica Secundaria, de la Institución Educativa Ciudadela Siglo XXI del sector oficial, del municipio de Florencia, Caquetá, Colombia, cuyas edades oscilan entre los 11 y los 14 años, de estratos socioeconómicos bajo. El grupo focalizado se distribuirá en tres grupos, y se diseñarán tareas, cada una de las cuales se subdividirá en cinco fases (diagnóstico, diseño del modelo de competencia, diseño de instrumentos, trabajo de campo y anális*is* de la información).

REFERENCIAS BIBIOGRÁFICAS

Bishop, A. J. (1999) *Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Ediciones Paidós.

D'Amore, B; Godino, J; Fandiño, M. (2008) *Competencias y Matemática.* Bogotá. D. C.: Magisterio.

OCDE. (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003: Conocimientos y destrezas en Matemáticas, lectura, ciencias y solución de problemas*. Paris: OCDE.

OCDE. (2006).*PISA marcos de la evaluación. Conocimientos y habilidades en ciencias, matemáticas y lectura*. España: Santillana.

Ochoa, et. Al. (2007). *Situación, tendencias y perspectivas de la educación matemática en la Media Vocacional en el departamento del Caquetá.* Proyecto de investigación. Digital: Colombia

Rico, L. & Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Alianza: España

Ruiz, L. & Valdemoro, M. Vínculo entre el *Pensamiento Proporcional Cualitativo y Cuantitativo*: El caso de Paulina. **Relime** [online].2006, Vol.9, n.2, pp. 299-324.

Solar, H. (2009). *Competencia matemática modelizar y argumentar en interpretación de gráficas funcionales: Un estudio de caso.* Tesis doctoral. Universidad de Barcelona.

Valero, P. (2006). *De carne y hueso. La vida social y política de las competencias matemáticas*. En Ministerio de Educación Nacional de Colombia (Ed.), *Memorias del Foro Educativo Nacional de Colombia- Competencias Matemáticas*. MEN: Bogotá

Concepciones y prácticas pedagógicas de los profesores de matemáticas sobre la teoría de las situaciones didácticas

Belki Yolima Torres Rueda[*]

RESUMEN

El presente trabajo de investigación se está desarrollando con la participación de los docentes de secundaria de dos instituciones educativas del área metropolitana de Bucaramanga, Santander, y hacen parte del grupo de Tecnologías de EDUMAT-UIS. Tiene por objetivo general, caracterizar la forma como los profesores están pensando e implementando el marco conceptual de la teoría de las situaciones didácticas asumido en el proyecto institucional de geometría dinámica. Para cumplir este objetivo se ha profundizado en el estudio de la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau. Hasta ahora se ha aplicado el cuestionario y se han hecho las observaciones en el aula. Esto permite llegar a una conclusión preliminar en la que se observa que los docentes tienen diferentes grados de apropiación conceptual de la teoría de las situaciones didácticas y esto se ve reflejado en su práctica pedagógica.

Palabras clave: teoría de las situaciones didácticas, geométrica dinámica.

[*] EDUMAT-UIS. Dirección electrónica: belkytorres@gmail.com

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En el año 2000 el Ministerio de Educación Nacional inició el proyecto titulado: Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. En Santander el proyecto se implementó en seis. Para darle continuidad al proyecto iniciado por el Ministerio de Educación Nacional, y que en el año 2007 estaba prácticamente olvidado, se plantea el Proyecto Institucional de Geometría Dinámica, dirigido a dos colegios que habían trabajado el proyecto anterior: el Colegio Las Américas y el Colegio Vicente Azuero. Este nuevo proyecto continúa con el uso de las TIC, se basa en el marco conceptual de la teoría de las situaciones didácticas y recibe el apoyo institucional de la UIS y de los dos colegios antes mencionados. Ya han transcurrido cuatro años desde que se inició el Proyecto Institucional de Geometría Dinámica y se hace necesario dar una mirada reflexiva, crítica y sistematizada al mismo, de manera que se puedan evidenciar los avances logrados por el proyecto. Por esta razón el presente trabajo de investigación pretende dar respuesta a la pregunta: ¿Cómo piensan e implementan los profesores del proyecto institucional de geometría dinámica del grupo EDUMAT UIS, la teoría de las situaciones didácticas? Asimismo, se plantean preguntas directrices que van a orientar el desarrollo de dicha investigación: ¿Cuál es el pensar y sentir de los profesores sobre el proyecto institucional de geometría dinámica? ¿Cómo están implementando los profesores, en su clase, el proyecto institucional de geometría dinámica? Y ¿Cuáles son los mayores aciertos y dificultades que se les presentan a los docentes en la aplicación del proyecto?

Esta investigación tiene como objetivos generales y específicos los siguientes:

Objetivo general. Caracterizar la forma como los profesores están pensando e implementando el marco conceptual de la teoría de las situaciones asumido en el proyecto institucional de geometría dinámica.

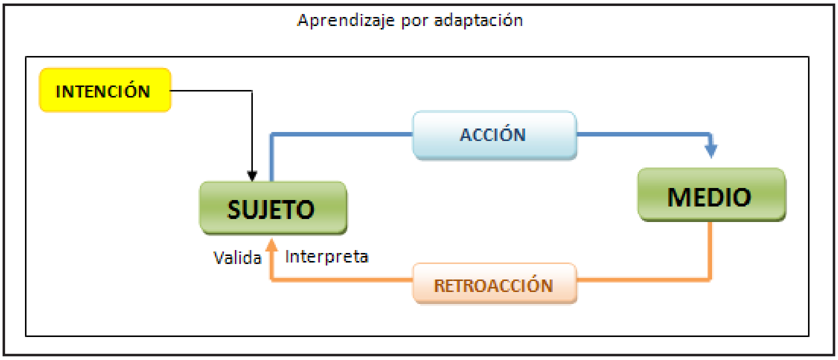
Objetivos específicos. Identificar la forma como los profesores están pensando y apreciando el proyecto; Describir la manera como se ve reflejado el marco conceptual de la teoría de las situaciones en la práctica pedagógica de los profesores participantes en el proyecto; Desvelar los aciertos y dificultades que se les presentan a los docentes en la aplicación del proyecto.

Marco de referencia conceptual. Para el desarrollo de la presente investigación se requiere abordar conceptos como concepciones y práctica pedagógica; y la teoría de las situaciones didácticas propuesta por Brousseau.

Concepciones y prácticas pedagógicas. Según Giordan (1999) las concepciones son aceptadas y entendidas como "un proceso personal, por el cual un individuo estructura su saber a medida que integra los conocimientos. Este saber se elabora, en la gran mayoría de los casos, durante un período bastante amplio de la vida, a partir de su arqueología, es decir, de la acción cultural parental, de la práctica social del niño en la escuela, de la influencia de los diversos medios de comunicación y, más tarde, de la actividad profesional y social de adulto" (p. 109). Bien, parece por lo anterior que las concepciones y las prácticas pedagógicas están íntimamente relacionadas, ya que los maestros realizan sus prácticas teniendo como cimiento las concepciones o creencias que tienen arraigadas sobre la enseñanza y sobre el área de especialidad. Para esta investigación se analizará cualitativamente si las prácticas en el aula de la aplicación del proyecto tienen coherencia con la teoría de las situaciones didácticas, sustento teórico del proyecto.

Teoría de las situaciones didácticas. Los estudios del investigador francés Guy Brousseau en la década de los 80 dieron origen a un nuevo paradigma de didáctica de las matemáticas llamado la teoría de las situaciones didácticas el cual está cimentado en los conceptos del aprendizaje por adaptación e ingeniería didáctica.

El aprendizaje por adaptación. La concepción de aprendizaje de Brousseau (2007) está definida por la concepción de aprendizaje por adaptación, según la cual: "el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Ese saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por las respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje"[1].

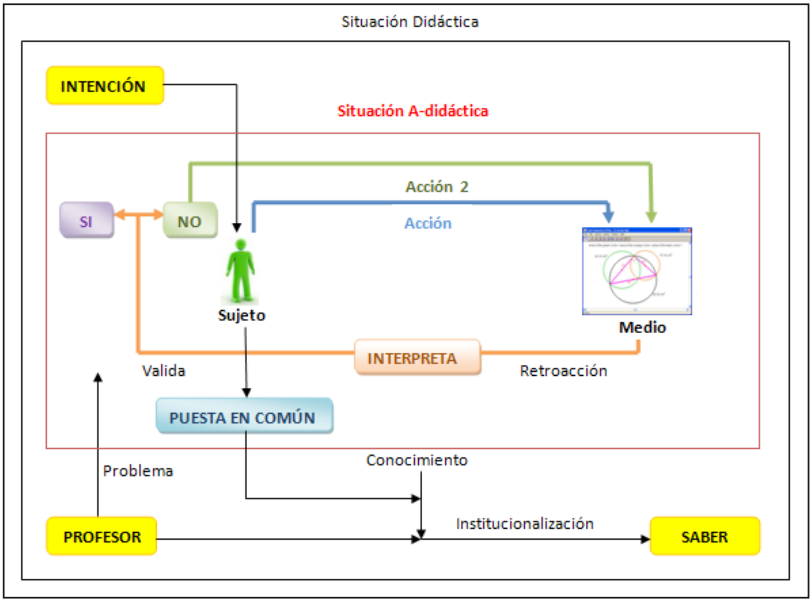


[1] Margolinas, C. (2009). La importancia de lo verdadero y falso en la clase de matemáticas. Traducción: Martín Acosta & Jorge Fiallo. Bucaramanga, Colombia: División Publicaciones UIS.

La situación a-didáctica. Es una situación diseñada por el profesor que se pone en marcha en el aula y tiene como objetivo producir aprendizaje por adaptación. Margolinas (2009) afirma que una situación a-didáctica es una situación que puede ser vivida por el alumno como investigador de un problema matemático. Al mismo tiempo Brousseau (2007) la describe de la siguiente manera:

> El alumno sabe perfectamente que el problema fue escogido para hacerle adquirir un conocimiento nuevo, pero debe saber también que ese conocimiento está totalmente justificado por la lógica interna de la situación y que él puede construirlo sin apelar a razones didácticas. No sólo puede, sino que también debe, porque no habrá adquirido verdaderamente este conocimiento hasta no ser capaz de utilizarlo en situaciones que encuentre fuera de todo contexto de enseñanza y en ausencia de cualquier indicación intencional (p. 31).

Es importante aclarar que una **situación didáctica** se da en el aula de clase entre el profesor y sus alumnos en torno a un saber que debe ser enseñado; se rige por un contrato didáctico y las intenciones de la enseñanza aprendizaje son claras. Entre tanto, una **situación no didáctica** se da en la vida personal del sujeto y no es organizada para generar un aprendizaje.



Cabri Geometry II Plus como medio. En el Proyecto Institucional de Geometría se utiliza el programa Cabri Geometry II Plus como medio en las situaciones a-didácticas; Acosta (2010) afirma, al referirse al Cabry Geometry II Plus: "nosotros consideramos el software de geometría dinámica como un medio adecuado para el aprendizaje por adaptación de la geometría, pues su programación garantiza que todos los fenómenos asociados con la construcción y la manipulación de figuras geométricas correspondan a la teoría de la geometría euclidiana".

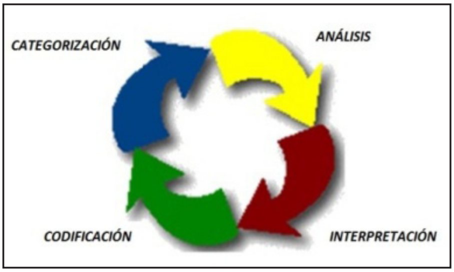
METODOLOGÍA DEL PROYECTO

La presente investigación se realizó bajo el enfoque cualitativo con diseño etnográfico, dado que este diseño "se interesa por lo que la gente hace, cómo se comporta, cómo interactúa. Se propone descubrir sus creencias, valores, perspectivas, motivaciones y el modo en que todo eso se desarrolla o cambia con el tiempo o de una situación a otra"[2]. Las técnicas utilizadas para la recolección de datos fueron el cuestionario, la observación no participante de docentes y estudiantes y las entrevistas semi-estructuradas (p. 18).

El contexto en el cual se desarrolla la investigación es El Proyecto Institucional de Geometría Dinámica liderado por el subgrupo de Nuevas Tecnologías del grupo de Educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander, EDUMAT-UIS. Los docentes participantes de la investigación son todos los que hacen parte del proyecto mencionado anteriormente.

ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Como se observa en el gráfico, el proceso de análisis de la información se da desde el inicio de la investigación, debido a que es un proceso cíclico, es decir, a partir de la primera observación o entrevista se va haciendo el proceso de análisis que va configurando una realidad existente.



2 WOODS, Peter. La escuela por dentro, la etnografía en la investigación cualitativa. Barcelona: Ediciones Paidós.

CONCLUSIÓN

El proyecto de investigación se encuentra en la fase de recolección y análisis de los datos hasta la fecha recogidos. Una de las primeras conclusiones a las que se ha podido llegar es que los docentes participantes del Proyecto Institucional de Geometría Dinámica tienen distintos niveles de apropiación conceptual de la teoría de las situaciones didácticas y que estos niveles se ven reflejados en sus discursos escritos, verbales, y en la práctica pedagógica, es decir, cuando los profesores están implementando el proyecto con sus estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta, M. (2010). Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica. Llevado a cabo en el *11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Bogotá, Colombia.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Traducción: Dilma Fregona. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Giordan, A., & De Vecchi, G. (1999). *Los orígenes del saber, de las concepciones personales a los conceptos científicos*. Sevilla, España: Editores.

Margolinas, C. (2009). *La importancia de lo verdadero y falso en la clase de matemáticas*. Traducción: Martín Acosta & Jorge Fiallo. Bucaramanga, Colombia: División Publicaciones UIS.

Woods, Peter. *La escuela por dentro, la etnografía en la investigación cualitativa*. Barcelona: Ediciones Paidós.

Utilización del conteo y demandas cognitivas en memoria de trabajo

Diego Fernando Guerrero López[*]
Alexander Tovar Aguirre[**]
Angélica Avalo Azcárate[***]

RESUMEN

Estudios muestran menor desempeño matemático de sujetos no oyentes en comparación con sus pares oyentes. La literatura indica que la estructura de la lengua de señas es un factor que genera parte de las diferencias entre ambas poblaciones, y en términos de recursos cognitivos, dicha estructura representa una sobrecarga para la memoria de trabajo, un sistema cognitivo asociado al desempeño matemático en niños y adultos. La presente investigación compara dos grupos de sujetos en tareas de memoria que involucran conocimiento numérico básico (conteo en rango numérico 1 a 9) discutiendo los resultados a la luz del modelo de Baddeley y Hitch (1974). Al final se presentan algunas consideraciones para los procesos pedagógicos.

Palabras clave: sordos, conteo, procesos cognitivos, diseño curricular.

[*] Universidad del Valle. Dirección electrónica: diego.guerrero@correounivalle.edu.co
[**] Universidad del Valle. Dirección electrónica: alextovar2@gmail.com
[***] Universidad del Valle. Dirección electrónica: angelicaavalo@gmail.com

PROBLEMA

En la literatura especializada es recurrente encontrar que los niños sordos presentan un desempeño menor con respecto a sus pares oyentes en tareas que implican el uso de un conocimiento matemático (Leybaert & Van Cutsem, 2002; Zafarty, Nunes & Bryan 2003). La condición de sordera, más allá de generar un déficit cognitivo, somete a los niños a una limitación socio-cultural que dificulta el aprendizaje informal de los conceptos matemáticos (Nunes & Moreno, 1998). Sumado a esto la modalidad viso-manual en la que se representa la información numérica para los sordos parece generar dificultades adicionales a las que experimentan los oyentes en la construcción de conocimiento matemático básico como el conteo (Leybaert & Van Cutsem, 2002; Gonzales, 2010).

Uno de los mecanismos cognitivos que podría explicar parte de estas diferencias es la memoria de trabajo, la cual en los sordos podría experimentar sobrecargas debido a que esta población debe codificar, procesar, almacenar y recuperar la información en un mismo formato, es decir, viso-espacial. El presente estudio busca determinar cómo incide en la memoria de trabajo la estructura y la modalidad de los numerales.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

En términos cognitivos, uno de los mecanismos más comprometido con el desempeño matemático es la memoria de trabajo (Baddeley & Hitch, 1974), la cual es considerada como una habilidad que permite el "almacenamiento temporal de información mientras otra tarea cognitiva está siendo ejecutada" (Siegel & Ryan, 1989, p.973). El modelo de Baddeley & Hitch (1974) presenta un mecanismo compuesto por tres subsistemas: uno denominado ejecutivo central encargado del control atencional y la regulación de los subsistemas a través de los cuales se codifica y almacena la información; el bucle fonológico que codifica y procesa información fonológica, y se compone de un mecanismo de repaso (lazo articulatorio) y uno de almacenamiento (buffer fonológico), y la agenda viso-espacial la cual codifica información de tipo visual y espacial. Una de las hipótesis vinculadas a este mecanismo en general es que la amplitud de memoria está relacionada con la velocidad de articulación del lazo articulatorio, es decir, a mayor velocidad, mayor amplitud de memoria.

Diferentes estudios señalan que las bajas puntuaciones en tareas de memoria de trabajo se correlacionan con bajas puntuaciones en tareas matemáticas, y que los niños con dificultades matemáticas presentan menores medidas de memoria de trabajo (Hitch & McAuley, 1991; Siegel & Ryan, 1989; Valérie, Barrouillet & Fayol, 2001). En este sentido es válido considerar que uno de los mecanismos que podría estar influyendo en el desfase observado entre sordos y oyentes es la memoria de trabajo.

Con base en los estudios de Wilson & Emmorey (1997a, 1998, 2003) se infiere que la memoria de trabajo no difiere, estructuralmente hablando, entre sordos y oyentes; sin embargo, funcionalmente hablando, uno de los componentes de esta memoria, el bucle fonológico, presentaría sobrecargas durante el proceso de codificación en los sordos, ya que la lengua de señas implica almacenar en una misma representación mental un código fonológico y uno visual (Emmorey, 2002). Adicionalmente, los estudios en memoria de trabajo han mostrado correlaciones positivas entre la amplitud de memoria y la velocidad de articulación de las palabras; en este sentido, Emmorey (2002) ha indicado que la velocidad de articulación de las señas es menor que en lenguaje verbal; incluso, Guerrero (2008) indicó que en lengua señas ciertos numerales como 6, 7, 8 y 9 son más complejos de articular que otros como 1, 2, 3, 4 y 5.

Con base en lo anterior se esperaría que la menor velocidad de articulación en lengua de señas genere menor amplitud de memoria, y que esto, a su vez, explique las diferencias en los desempeños entre sordos y oyentes en una tarea de memoria de trabajo que incluya conocimiento matemático básico, en este caso, el conteo.

METODOLOGÍA

Para evaluar la incidencia de la memoria de trabajo en el desempeño matemático, 20 oyentes y 20 sordos entre 15-21 años realizaron una tarea de velocidad de articulación (contar de 1 a 10) y una tarea de memoria en conteo viso-espacial. Ya que esta última tarea tiene demandas viso-espaciales, de memoria y de conocimiento numérico, tres tareas de memoria adicionales fueron presentadas para evaluar el impacto de esas demandas en el desempeño: conteo táctil (aísla demandas viso-espaciales), retención de etiquetas (aísla demandas de conteo) y amplitud de dígitos (aísla demandas de procesamiento concurrente y conocimiento matemático). Cada tarea fue presentada en dos rangos numéricos para evaluar el impacto de la estructura de los numerales sobre la memoria de trabajo: 1-5 y 6-9 (debido a que la velocidad de articulación en los sordos puede variar de un rango numérico a otro). Se propuso un diseño 2 (modalidad: sordos-oyentes) x 2(rango numérico: 1-5 / 6-9) con dos variables dependientes: la velocidad de articulación medida en segundos, y la amplitud de memoria (número de ítems recordados correctamente). Los datos obtenidos fueron sometidos a estadística descriptiva (media, DE) e inferencial (ANOVA 2x2, Análisis de regresión).

Análisis de datos

El grupo de sordos presenta la amplitud de memoria más baja en todas las tareas. La velocidad de articulación, aunque presenta diferencias relacionadas con la condición auditiva y el rango numérico, no se presenta como una variable predictora del desempeño en las tareas de memoria.

Los resultados muestran que la mayor demanda cognitiva se relaciona con el conocimiento numérico y no con la modalidad de presentación de la tarea, pues el menor desempeño aparece cuando los sujetos necesariamente tienen que utilizar el conteo como estrategia de resolución. Cuando la tarea no exige de este conocimiento, el desempeño tiende a mejorar.

Una explicación alternativa a la hipótesis de la velocidad de articulación considera que la información de las tareas se representa como numérica, no como fonológica, y esto genera diferencias no solo entre grupos, sino entre rangos para los sordos, es decir, debido a la modalidad de la lengua de señas la representación numérica puede estar asociada con representaciones visuales y motoras que obligan a los sordos a manipular simultáneamente la información visual de la representación y la información viso-lingüística de la seña, concurrencia que consumiría más recursos de memoria (posiblemente atencionales vinculados al ejecutivo central) generando no solo interferencia en el recuerdo, sino también fallas en el procedimiento de conteo, algo común en el grupo de sordos.

CONCLUSIÓN

Los resultados del estudio indican que la mayor demanda cognitiva en una tarea de conteo es de orden numérico y, pese a que la velocidad de articulación no explica el desempeño, es posible que la medida tomada sea inadecuada. Posiblemente la menor amplitud de memoria observada en los sordos está asociada a una sobrecarga en el tipo y cantidad de representaciones que deben ser manipuladas. En la vía de Nunes y Moreno (1998), este estudio indica que es la modalidad viso-manual de la lengua de señas y no la sordera en sí misma lo que genera las diferencias entre grupos. En esta medida, la modalidad aportaría demandas cognitivas a un sistema que, si bien no varía con la condición auditiva, debe procesar la información de la tarea bajo un mismo formato de presentación.

En este sentido, el presente estudio permite pensar que la sobrecarga en memoria podría dificultar el aprendizaje; por lo tanto, el tipo de material didáctico que se le propone a los estudiantes sordos debe ajustarse de manera coherente con sus particularidades de procesamiento de información de la tarea; en este sentido, el diseño curricular debe contemplar no solo el contenido o la vía de enseñanza sino también las características propias de cada grupo de estudiantes. Por otra parte, el estudio de Alsina (2001) muestra que intervenir los componentes de memoria mejora no solamente las medidas de la misma sino que tiende a mejorar el desempeño en las tareas matemáticas evaluadas; por lo tanto, debería evaluarse en el contexto local cómo la intervención orientada a mejorar la memoria de trabajo incide en el desarrollo del conocimiento matemático.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, A. (2001). La intervención de la memoria de trabajo en el aprendizaje del cálculo aritmético. Universitat Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Baddeley, A. & Hitch, G. (1974). Working memory. In Bower, G. (Ed.), The Psychology of Learning and Motivation, (pp. 47–89). Academic Press.

Emmorey, K. (2002). Memory for Sign Language: Implications for the Structure of Working Memory. En Emmorey, K. (Ed), Language, Cognition, and the Brain. Insights From Sign Language Research (pp. 227-241). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

González, J. (2010). Relación entre la secuencia numérica convencional en el lenguaje de señas colombiano y la comprensión numérica en niños no oyentes. Universidad del Valle, Palmira, Colombia.

Guerrero, D. (2008). Trascodificación numérica, en niños no oyentes. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Hitch, G. & McAuley, E. (1991). Working memory in children with specific arithmetical learning difficulties. British Journal of Psuchology, 82, 375-386.

Leybaert J., & Van Cutsem M. (2002). Counting in sign language. Journal of Experimental Child Psychology, 81, 482–501.

Nunes, T. & Moreno, C. (1998). Is hearing impairment a cause of difficulties in learning mathematics? En Dolan, C. (Comp.), The development of mathematical skills (pp. 227-254). United Kingdom: Taylor and Francis Group.

Siegel, L. & Ryan, E. (1989). The development of working memory in normally achieving and subtypes of learning disabled children. Child Development, 60, 973-980.

Valérie, C., Barrouillet, P. & Fayol, M. (2001). Does the Coordination of Verbal and Motor information Explain the Development of Counting in Children? Journal of Experimental Child Psychology, 78, 240–262.

Wilson, M. & Emmorey, K. (1997). Visuospatial "phonological loop" in working memory: evidence from American Sing Language. Memory & Cognition, 25 (3) 313-320

Wilson, M. & Emmorey, K. (1998). A "word length effect" for sign language: further eviden for the role of language in structuring working memory. Memory & Cognition, 26 (3), 584-590.

Wilson, M., Bettger, J., Niculae, I. & Klima, E. (1997). Modality of language shape working memory: evidence from digit span and spatial span in ASL signers. Oxford University Press.

Zafarty, Y., Nunez, T., & Bryant, P. (2004). The performance of young deaf children in spatial and temporal number task. Journal of Deaf Studies and Deaf Education, 9 (3), 315-326.

Procesos de reflexión de profesores sobre los recursos que seleccionan, diseñan o usan para promover actividad

*Claudia Johanna Tristancho**
*Sandra Evely Parada Rico***

RESUMEN

En esta investigación se trabajó con el Modelo R-y-A de Parada (2009 y 2011) como directriz del marco teórico y del diseño metodológico de la misma, siendo la esencia del modelo la reflexión constituida por un proceso de diferentes etapas: reflexión para la acción, reflexión en la acción y reflexión sobre la acción; proceso que permitió –en mayor o menor grado– que la profesora caso de nuestro estudio fortaleciera su práctica pedagógica a través de la observación de su trabajo, del análisis objetivo de sus metodologías y de las orientaciones que resultaron de las herramientas construidas para propiciar la reflexiones sobre los recursos seleccionados y usados en sus clases.

Palabras clave: reflexión, actividad matemática, recursos pedagógicos, pensamientos matemáticos

* Universidad Industrial de Santander. Dirección electrónica: johannatris@hotmail.com
** Universidad Industrial de Santander. Dirección electrónica: sparada@matematicas.uis.edu.co

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Cada día el enseñar y aprender resulta ser motivo de permanente análisis en las instituciones educativas; es por ello que los docentes necesitan actualizarse para ser partícipes de dichos cambios y poder hacer uso efectivo de las innovaciones tecnológicas más recientes en nuestras aulas de clase. Desde nuestra experiencia como profesoras agregamos a esto que las instituciones educativas, en muchas ocasiones, cuentan con dotación suficiente de recursos pero los docentes no los usan por diferentes circunstancias, tales como: el desconocimiento de su uso; el temor a la novedad que representa la tecnología, y, en mayor grado, porque cuando los docentes intentan vincular recursos "innovadores" al aula necesitan reaprender los contenidos que se aprendieron a través de una formación de carácter metodológico tradicional, en el cual los únicos recursos fueron el lápiz y papel, pero al verse ante esa primera reflexión —y lo que implica en el accionar— se desmotivan por el trabajo personal (o quizá individual) que esto encierra. Una manera de atender esta problemática es promoviendo procesos de reflexión en los profesores no solo *antes* sino **durante y después** de la clase para lograr alternativas pedagógicas y metodológicas que conduzcan a gestionar el desarrollo de la actividad matemática esperada en los estudiantes con los diferentes recursos con los que cuentan las instituciones. Por recurso se entienden, según Parada (2011), todos los materiales que el maestro emplea para promover la actividad matemática en el aula; entre ellos: los problemas, preguntas, hojas de trabajo, materiales didácticos (manipulables y observables) y las tecnologías digitales (TD) –software, hardware, calculadoras, etc.–, los libros de texto, el lenguaje matemático y todas las formas de comunicación que use el maestro para acercar los contenidos matemáticos a sus estudiantes. Es importante saber de qué manera los docentes pueden utilizar la tecnología como herramienta de enseñanza y aprendizaje, sin dejar de lado los procesos básicos y las herramientas tradicionales para la apropiación del conocimiento y la puesta en escena del mismo en diferentes situaciones de la vida cotidiana. Esta investigación que acá se resume es una muestra de lo que puede lograrse o no con el apoyo de diferentes recursos que el medio provee para formar jóvenes competentes y docentes con un alto nivel pedagógico.

Aspectos teóricos. El modelo teórico R-y-A fue propuesto por Parada (2011), y pretende aportar herramientas teóricas y prácticas que le ayuden al profesor a analizar su quehacer docente, yendo permanentemente entre sus reflexiones y acciones. Se enfatiza en promover los procesos de reflexión en los profesores *antes*, *durante* y *después* de la clase para favorece el desarrollo de su pensamiento reflexivo, el cual se descompone en: i) pensamiento matemático escolar, ii) pensamiento pedagógico y didáctico del área, iii) pensamiento orquestal.

Se entiende como *pensamiento matemático escolar,* según Vega (1990), cuando el docente necesita hacer uso de sus conocimientos del contenido matemático escolar del que es responsable, como proponer tareas, seleccionar, usar y diseñar recursos, comunicarse en el aula y evaluar. El *pensamiento pedagógico y didáctico* se da cuando este se cuestiona sobre las diferentes maneras de acercar los conocimientos matemáticos a los estudiantes, buscando las formas más útiles de representar los contenidos mediante analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones, y demostraciones que permitan hacerla más comprensible a los alumnos. Y el *pensamiento orquestal* se da cuando el maestro hace uso de los recursos que ha decidido incorporar en la clase, porque en ese momento el maestro necesita ser como un director de una orquesta para poder poner en escena, de la mejor manera, la diversidad de recursos con los que cuenta, o no, en la complejidad de situaciones de su práctica.

Metodología. Este estudio fue realizado en cuatro etapas básicas para la optimización del desarrollo investigativo, en donde cada una de ellas arrojó respuestas y nuevos procesos que van de la mano con el buen desempeño de los que participaron en el mismo.

Etapa No. 1. Se observó la manera como el profesor desarrolló su pensamiento reflexivo, es decir, cómo reflexiona sobre las matemáticas que enseña, la manera como enseña y los recursos que incorpora en el aula. Según las ideas de Dewey (1989) y Schön (1992), para la reflexión del docente se tienen tres procesos: *Reflexión para la acción en el cual* se solicitó a la profesora elaborar y presentar una planeación de clase. Aquí no se intervino, con el fin de ver si la profesora tenía como práctica hacer la planeación y si era así, saber cómo la hacía y, además, verificar qué recursos emplea y por qué; *Reflexión en la acción*: se grabó en vídeo con el propósito de detallar la metodología con la cual la profesora interactúa con los estudiantes en el desarrollo de la clase en torno a dudas o reacciones con respecto al tema. Además, para observar la "orquestación" de los recursos que incorporó a la clase, para dar explicaciones o responder a las situaciones de aula. *Reflexión sobre la acci*ón: posterior a la clase se hizo una primera entrevista a la profesora donde permitió recoger las reflexiones sobre la selección y uso del recurso, así como lo que ella cree que impacta en la actividad matemática de los estudiantes.

Etapa No. 2: En esta etapa se tuvo en cuenta la construcción de las herramientas para orientar los procesos de reflexión de la profesora; se realizó una ruta cognitiva[1] que permitió comparar la actividad matemática planeada por la profesora y la actividad matemática lograda por los estudiantes. También se hizo un análisis detallado del vídeo de clase señalando los momentos que a criterio de las investigadoras ameritaban la reflexión del profesor. La selección de estos momentos constituye un recurso para guiar la reflexión sobre la actividad matemática que la profesora orquesta durante la clase mediante el lenguaje que utilizó, las justificaciones que les dio a sus estudiantes cuando le hicieron preguntas, y los recursos que llevó a la clase como apoyo de la actividad matemática

Etapa No 3: Se presentaron a la profesora los resultados del análisis de la primera experiencia, como herramienta para la reflexión y los eventos seleccionados. Con la observación y reflexión se usó una **guía de preguntas** que inducían a la profesora a reflexionar objetivamente sobre aspectos puntuales de su práctica docente, ayudándola a analizar las formas como reaccionó frente a cada situación que se dio en la clase. Además, se le presentaron las rutas cognitivas de lo que planeó y lo que logró con el fin de que analizara la forma como condujo la actividad matemática en la clase.

Etapa No. 4: En esta etapa se observó cómo la profesora se apropió del proceso realizado y las herramientas utilizadas para reflexionar sobre su quehacer docente. Para hacer esta indagación se le propuso a la docente que planeara nuevamente otra clase correspondiente a sus planes y programas para llevarla a cabo y finalmente escribiera sus reflexiones personales con relación al logro de la actividad matemática que habían previsto y al aprovechamiento de los recursos seleccionados.

EL MODELO APLICADO EN EL CASO DE MARÍA

María es una profesora en el área de física, realiza su práctica docente en un colegio de Bucaramanga en los grados octavo, décimo y undécimo; para ella es importante desarrollar, en los estudiantes, habilidades para resolver problemas de manera lógica para que den respuestas coherentes.

Desde el pensamiento matemático escolar se percibió poca atención sobre el contenido matemático que se iba a estudiar en la clase, pues María quiso llevar al aula, tres actividades matemáticas el doblar una hoja de papel, el cálculo

[1] Rutas cognitivas fueron inspirada por las ideas de Robert y Rogalski (2005) se caracterizan de la manera como se basan en la actividad matemática que el profesor propone a los estudiantes y son un medio que esboza la estructura de los contenidos matemáticos que se proponen estudiar.

y volumen del cubo y la división celular, sin hacer una reflexión cuidadosa sobre la selección del problema. María usó, como estrategia de enseñanza, la proposición de ejercicios de aplicación en los que pudieran manipular el material real, buscando que posteriormente los estudiantes establecieran relaciones que les permitieron llegar a la definición de la potenciación. Para realizar la actividad, utilizó como recursos una hoja de papel, el cubo mágico, el libro de trabajo de los estudiantes, el tablero y el lápiz.

En cuanto al pensamiento pedagógico y didáctico es claro que para la docente María el libro es su herramienta para conducir la clase, lo que permite llevar a los estudiantes a la investigación del tema que se va a estudiar. Por su formación académica, ella escoge el libro como su apoyo para orientar la clase, y este el que le dice al estudiante lo que tiene que hacer.

Desde el pensamiento orquestal se presentaron tres momentos: *la actividad del doblado de una hoja de papel*; aquí la profesora María no pudo orquestar correctamente, pues se presentaron varias dificultades cuando enunció y escribió la propiedad de la potenciación "todo número distinto de cero elevado a la cero es igual a uno". Además, no les explicó a los estudiantes cómo dedujo esta expresión $2^1:2^2:2^3:2^4\ldots$; debido a esto los estudiantes no pudieron lograr establecer la relación entre el número de dobleces y el número de divisiones. Otro momento fue *la presentación física del cubo* en el cual tampoco logró orquestar porque se desvió del tema de la potenciación explicando las características del cubo; esta actividad la tenía contemplada el libro de manera clara, donde busca identificar los términos de la potenciación. Por último, e*l trabajo con el texto* tampoco tiene buena orquestación, pues el manejo del texto no es el más adecuado; no tiene en cuenta las competencias ni el logro. Por tanto, la profesora María no pudo orquestar con ninguna actividad matemática que había planeado para sus estudiantes.

En la segunda etapa, con el apoyo de la herramienta, la docente se cuestiona sobre la actividad que llevó a clase y cómo la condujo; aclara que su formación es en Física y en este momento está estudiando para acreditar su carrera en Pedagogía; es importante resaltar donde comenta que los estudiantes aprenden de diferentes formas, cuando escribe y dice un error matemático. Además, comenta que se debe analizar detenidamente la actividad matemática que se quiere llevar a sus estudiantes y prever las dificultades que se les puedan presentar. En cuanto al manejo del libro, reflexiona que debe revisar el contenido del texto, ya que este es el único recurso de trabajo para la clase. Este proceso le permitió realizar una introspección de su quehacer pedagógico.

Reflexiones de María en la nueva experiencia. La planeación fue más organizada, da una pequeña explicación de lo expuesto los días anteriores para ayudarlos a llevar una continuidad de forma lógica, involucró a los estudiantes en el desarrollo de la clase, haciendo que ellos participaran de manera voluntaria en la investigación de los conceptos asignados. Respondió de manera oportuna las preguntas de los estudiantes. Resolvió ejercicios de cada proceso matemático y tuvo en cuenta las competencias que maneja cada uno de ellos; le explicó qué quería cada competencia con ese ejercicio. Son de resaltar los cambios que se presentaron en tan poco tiempo. Sin embargo, este proceso de reflexión debe ser constante en el maestro para encontrar una mejora en el aprendizaje de los estudiantes y en él mismo.

CONCLUSIONES

Este proceso permitió a la profesora asumir este ejercicio de reflexión no como un señalamiento o enjuiciamiento sino como una oportunidad para mejorar su práctica profesional, como el tener presente el lenguaje matemático que va impartir en los estudiantes. También la llevó a enfrentarse con sus responsabilidades y a asumir su trabajo de una manera crítica y renovada con el fin de favorecer su quehacer matemático y el aprendizaje de sus estudiantes, y a valorar la planeación a través de una organización de contenidos y recursos que conducen gradualmente a los estudiantes a los objetivos trazados para cada clase.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo.* Barcelona: Paidós.

Miranda, L. & Parada, S. (2011) ¿Están preparados los profesores de matemáticas para implementar las tecnologías digitales en sus prácticas? *XIII Inter American Conference on Mathematics Education*, Recife, Brazil, June 26-30, 2011.

Parada, S. (2011) *Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional.* Tesis de doctorado no publicada. Centro de investigaciones y Estudios Avanzados del IPN, México.

Robert, A. & Rogalski, J. (2005). A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class. *Educational Studies in Mathematics* 59:269–298.

Schön, D. (1992). *La formación de profesionales reflexivos.* Buenos Aires: Paidós

Vega, M. de (1990). Introducción a la psicología cognitiva. Madrid: Alianza

El proceso de objetivación del concepto de área en estudiantes sordos desde el uso de artefactos

*Uriel José Solano Sánchez**
*Gonzalo Alonso Jaraba Caldera***

RESUMEN

En el presente trabajo de investigación se muestran los avances del proyecto de investigación que se adelanta en el marco de la Maestría en Educación, línea Educación Matemática, bajo la orientación del grupo de investigación Matemática, Educación y Sociedad (MES) de la Universidad de Antioquia. En este estudio se pretende analizar el proceso de objetivación del concepto de área en estudiantes sordos desde el uso de artefactos. Esta investigación es realizada a la luz del paradigma cualitativo, bajo un enfoque crítico-dialéctico desde una investigación participante, y para el análisis de las producciones de los estudiantes se utiliza el estudio de casos.

Palabras clave: Teoría de la actividad, educación matemática, área, figuras planas, TIC.

* Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: urieljose3@yahoo.es.
** Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: gonzalojarabac@hotmail.com.

INTRODUCCIÓN

El problema de investigación surgió, en primer lugar, a partir de algunas reflexiones de nuestras prácticas docentes; en segundo lugar, de nuestras posiciones teóricas con respecto a la educación matemática; y, en tercer lugar, la pertinencia mirada desde la educación matemática, la comunidad educativa y las políticas educativas.

Las prácticas de aula que dieron lugar a la realización de esta investigación tienen lugar en la Institución Educativa Escuela Normal Superior del Bajo Cauca (IEENSBC), la cual es de carácter público y está ubicada en la zona urbana del municipio de Caucasia (Antioquia); como docentes de esta Institución Educativa se tienen vivencias en cuanto a la formación de maestros refiere.

Del grupo de nuevo ingreso para el año 2009 al programa de formación complementaria, de la IEENSBC, hacían parte tres estudiantes sordos quienes iniciaron su proceso de formación pedagógica como maestros en formación. En el segundo semestre del 2009, se encontraban tomando un curso de Fundamentos Conceptuales de Matemáticas, con el docente Gonzalo Jaraba, quien tenía la intención de realizar actividades que convirtieran el aula en un ambiente de aprendizaje participativo donde se propiciaran diálogos y discusiones que posibilitaran en sus estudiantes un pensamiento crítico-reflexivo, que los llevara a la apropiación de los aportes compartidos, sobre la realización de operaciones básicas con los números naturales. El docente les indicó a sus estudiantes la manera en la cual se abordaría la temática a desarrollar con la intención de que voluntariamente surgieran estudiantes deseosos de asumir el reto de esta nueva experiencia y socializar con sus compañeros el tema propuesto mediante el uso de artefactos.

La iniciativa del maestro, para que sus estudiantes participaran y colaboraran con el aprendizaje de sus compañeros de aula, tuvo eco en los estudiantes sordos del grupo, quienes al momento de preparar la clase tuvieron la idea de utilizar el ábaco, que es un artefacto presente en la historia y en la cultura del ser humano, buscando con esto mediatizar el pensamiento y el conocimiento de sus compañeros. Al momento de pensar la actividad y mostrársela al docente, los estudiantes sordos proponen abordar la temática desde la implementación de las nuevas tecnologías por medio del uso de un applet (ábaco virtual) en el cual se mostraba la forma (procedimiento) como se realizaban la suma y la resta de números naturales, para que luego cada estudiante manipulara un ábaco físico con la finalidad de que solucionaran situaciones problema de su contexto, en donde se evidenciara el conocimiento adquirido por medio de la explicación e implementación del ábaco virtual. Esto nos incitó a reflexionar en la forma en que los estudiantes sordos utilizaban medios no verbales a la hora de comunicarse, enseñar y aprender a(de) sus congéneres, ya que los procesos de aprendizaje de los estudiantes sordos ocurren en la interacción y comunicación entre estudiante sordo-docente, estudiante oyente-docente, y estudiante sordo-estudiante oyente.

Con respecto a nuestras posturas teóricas, construidas a partir de lecturas realizadas, encontrábamos cómo en el aprendizaje de la geometría, en la historia y en el transcurrir de la humanidad, han estado presentes los conceptos de perímetro y área, como lo indican Del Olmo, Moreno y Gil (1993), quienes afirman que el hombre primitivo, para demarcar su territorio, hacía uso del concepto de perímetro y área (o superficie) para que los demás supieran que esa porción de tierra les pertenecía. En la actualidad, estos conceptos están presentes en el contexto de un sinnúmero de actividades del diario vivir de cada ser humano. Sin embargo, desde las prácticas docentes, veíamos cómo los estudiantes, al considerar el área como solo una multiplicación del valor numérico de un lado por otro, para una figura rectangular, reducen a simples cuentas el concepto de perímetro y área, hecho que conduce a que se confunda el perímetro con el área de las figuras, y se olvide que estos conceptos pertenecen al mundo geométrico y aritmético, reduciéndolos solo al cálculo por medio de algoritmos o fórmulas que en ocasiones no tienen sentido para los estudiantes. Por ello, apoyados en lo que Del Olmo, Moreno y Gil (1993) indican, pero desde el uso de artefactos propios en el medio cultural y de interacción social de los estudiantes participantes en la investigación, se deben desarrollar actividades que involucren situaciones del contexto para que ellos interactúen con el concepto de área con la intención de lograr, en ellos, la objetivación del concepto de área.

En este trabajo la objetivación será vista a la luz de Radford(2004), quien afirma que:

> La idea de objetivación está íntimamente relacionada con la naturaleza de los objetos conceptuales (es decir, con la ontología) y con la relación epistémica entre sujeto y objeto: dada la idealidad de dichos objetos, la única manera de hacer referencia a estos es a través de signos (p. 13).

La objetivación del saber, es vista por Radford, como el paso de la cosa matemática al concepto que de ella se tiene. Este paso tiene lugar dentro de la actividad misma, y está circunscrito tanto por los sistemas culturales semióticos de significación como por los medios de mediación semiótica.

Cabe resaltar que a la luz de Radford (2004), debemos hablar de objetivación cultural del saber y no de objetivación del saber, ya que "La objetivación se realiza a través de signos cuyo modo de funcionamiento está regido por reglas culturales (no necesariamente codificadas de manera explícita). Estas reglas pertenecen a los Sistemas Semióticos Culturales de significación" (p. 18). Se entiende, entonces, que la objetivación del saber es un punto de encuentro entre la experiencia personal y el saber cultural.

Este trabajo es pertinente para la comunidad educativa, ya que en él se pretende acercar a los estudiantes sordos al conocimiento geométrico; en este se brindarán (crearán) espacios para la adquisición del conocimiento geométrico, en particular la objetivación del concepto de área de figuras poligonales, desde un trabajo participativo, utilizando artefactos, con la intención de posibilitar otras formas para que los estudiantes sordos aprendan, lo que está de acuerdo con las políticas de la educación colombiana que proponen realizar trabajos con poblaciones vulnerables.

Estos puntos de vista en torno a la pertinencia de la enseñanza del concepto de área, a nuestra posición teórica respecto al conocimiento, a la forma como se ha venido abordando el concepto de área con estudiantes sordos y aunados con miras a propender un aprovechamiento de los recursos tecnológicos en donde se dé participación activa al estudiante sordo, en términos de otras oportunidades al momento de acercarse a un conocimiento matemático desde su contexto, nos posibilitaron plantearnos la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo es el proceso de objetivación del concepto de área en estudiantes sordos desde el uso de artefactos?

MARCO DE REFERENCIAS

Nos fundamentamos en los conceptos de artefacto y objetivación desde Radford (2006), la teoría de las actividades orientadoras de enseñanza a la luz de Moura (2010), el área desde la mirada de Corberán (1996) y Del Olmo et al. (1993).

Las concepciones de los autores de cada uno de los términos mencionados anteriormente y con las cuales nos moveremos en nuestro trabajo de investigación las enlistamos a continuación:

- Los artefactos (objetos, instrumentos, sistemas de signos, etc.), parafraseando a Radford (2006), no son meras ayudas al pensamiento sino partes constitutivas y consustanciales que mediatizan y materializan el pensamiento. Es decir, los artefactos son parte integral del pensamiento, por lo que se piensa con y a través de los artefactos; por ello el ser humano es afectado profundamente por el artefacto al entrar en contacto con éste, "(...) el ser humano reestructura sus movimientos y forma capacidades motrices e intelectuales nuevas, como la anticipación, la memoria, la percepción" (Radford, 2006).

- Objetivación o toma de conciencia subjetiva del objeto cultural es definida, en palabras de Radford (2006), como el proceso social de toma de conciencia progresiva de algo frente a nosotros; ese algo puede ser una figura, una forma, etc., cuya generalidad notamos gradualmente, al mismo tiempo que la dotamos de sentido.

> Es ese notar que se desvela en el gesto que cuenta o que señala, notar que se descubre en la intención que se plasma en el signo o en el movimiento kinestésico que mediatiza el artefacto en el curso de la actividad práctica sensorial, algo susceptible de convertirse en acción reproducible, cuyo significado apunta hacia ese patrón eidético fijo de acciones incrustadas en la cultura que es el objeto mismo (Radford, 2006).

- Para Leontiev, 1987 (citado por Moura, 2010), la actividad es vista como la razón por la que el sujeto está dispuesto a actuar ante una necesidad; es por eso que propone el concepto de actividad a partir de dos elementos centrales: orientación y ejecución. "En cuanto a la orientación, la actividad incluye las necesidades, motivaciones, objeto y funciones, en términos de ejecución, la actividad está constituida por las acciones y operaciones". (Moura, 2010). Cabe resaltar que, aunque es la necesidad la primera condición de toda actividad, la necesidad no puede determinar la orientación de una actividad específica, es solo en el objeto de la actividad donde se encuentra su determinación. Por lo tanto el objeto se convierte la razón (lo que estimula) de la actividad. En palabras de Moura, (2010).

> (...) la dinámica de la actividad significa comprenderla como un sistema. Del mismo modo las acciones que se habían convertido en las actividades, actividades cuando pierden su razón, se convierten en acciones, y las acciones, se convierten en los procedimientos para lograr una meta, se caracterizan por las operaciones.

Partiendo de situaciones de la vida cotidiana en las que se presenta el área, Del Olmo, Moreno y Gil (1993) presentan diferentes aproximaciones a este concepto. Estas aproximaciones parafraseando a Del Olmo, Moreno y Gil (1993) son:

Repartir equitativamente. Ocurre en situaciones en las que dado un objeto hay que repartirlo; este hecho se resuelve: aprovechando regularidades, por estimación (por ejemplo, se utiliza para partir una cuartilla entre partes iguales, se superponen las tres posibles partes y se van equilibrando hasta conseguirlo), por medida (consiste en medir la cantidad a repartir, dividir el resultado de esa medida entre el número de parte que se desea, y medir cada una de las partes).

Comparar y reproducir. Se presenta en situaciones en las que hay que comparar dos superficies y también aquellas otras en las que hay que obtener una reproducción de una superficie con una forma diferente a la que tiene. Esta comparación y reproducción pueden realizarse: por inclusión (si la superficie está contenida en otra), por transformaciones de romper y rehacer (consiste en descomponer una superficie en diversas partes y reorganizarla posteriormente obteniendo formas diferentes que tienen la misma área), por estimación (suele utilizarse en muchos casos como cuando vamos a comprar un retal para hacer una falda), por medida (para comparar dos superficies lo más habitual es recurrir a medir).

Las diferentes actividades orientadoras de enseñanza que abordaremos en nuestra investigación, desde la propuesta de Moura (2010), nos posibilitarán la utilización de artefactos con la intención de que los participantes en nuestra investigación se acerquen a los conceptos de perímetro y área, dándoles sentido y significado a estos en su interpretación.

OBJETIVO DEL PROYECTO

Analizar el proceso de objetivación del concepto de área en estudiantes sordos desde el uso de artefactos.

METODOLOGÍA PROPUESTA

El abordaje de la investigación lo haremos bajo el paradigma de investigación cualitativa, ya que se trata de analizar el proceso de objetivación del concepto de área en estudiantes sordos desde el uso de artefactos; nuestra atención está fijada en la participación activa de los integrantes del proceso investigativo. En este sentido Hernández, Fernández y Baptista (2006) afirman que este proceso es iterativo o recurrente, y las acciones sirven para adentrarnos más en el problema de investigación, en la tarea de recolección y análisis de datos en forma permanente; las participaciones son concebidas desde las interpretaciones de los participantes en la investigación respecto de sus propias realidades, realidades que van modificándose conforme transcurre el estudio.

En nuestro proyecto, trabajaremos el enfoque crítico dialéctico, bajo la mirada de Sánchez (1998), quien menciona que el investigador debe tomar conciencia de la relación que hay entre el objeto de la investigación y el investigador. Estamos de acuerdo con el autor, en relación a que nosotros como investigadores no somos sujetos neutros o aislados del objeto de la investigación, sino sujetos activos en la investigación, que interactúan con el objeto de estudio, en su contexto. Además, el objeto de investigación, en palabras de Sánchez, es el punto de partida que nos sirve como elemento mediador entre los sujetos y los pone frente a una realidad, que les es común y que les desafía a ser conocida y transformada. La construcción de la realidad en el sentido epistemológico, que compartimos con Sánchez, nos permite aproximarnos al objeto de conocimiento, que en nuestro caso, es el proceso de objetivación del área.

La investigación participante, según Shong (1995) y De Witt y Gianotten (1988), promueve la participación de los integrantes de la comunidad, para el beneficio de los participantes de la investigación, propendiendo por desarrollar la comprensión de uno mismo, de su contexto y de cómo se aprende, con la intención de convertir a las personas en alumnos autosuficientes capaces de evaluar el conocimiento que otros generan.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICAS

Corberán, R. (1996). Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad. (Tesis Doctoral). Valencia: Universitat de Valéncia. Dialnet .

De Witt, T., & Gianotten, V. (1988). Investigación participativa en un contexto de economía campesina (Holanda). La Investigación participativa en América Latina. CENAPRO. Crefal , 2-8.

Del Olmo R., M. A., Moreno C., M. F., & Gil C., F. (1993). Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas? Madrid, España: Síntesis S. A.

Hernández Sampieri, R., Fernández C., C., & Baptista L., P. (2006). Metodología de la investigación (Cuarta Edición ed.). Mexico D. F: Editorial McGraw-Hill.

Ley 324 de 1996. (11 de Octubre de 1996). Por la cual se crean algunas normas a favor de la población sorda Presidencia de la República de Colombia. Recuperado el 19 de Febrero de 2012, de La Secretaría General de la Alcaldía Mayor de Bogotá D.C: http://www.alcaldiabogota.gov.co/sisjur/normas/Norma1.jsp?i=349

Ley 982 de 2005. (2 de Agosto de 2005). Por la cual se establecen normas tendientes a la equiparación de oportunidades para las personas sordas y sordociegas y se dictan otras disposiciones. Recuperado el 19 de Febrero de 2012, de El Abedul: http://www.elabedul.net/San_Alejo/Leyes/Leyes_2005/ley_982_2005.php

Moura, M. O. (2010). A Atividade Pedagógica na Teoria Histórico-cultural. (U. J. Solano Sánchez, Trad.) Brasília-DF: Liber Livro.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 103-129.

Radford, L. (2004). Semiótica cultural y cognición. Recuperado el 31 de Marzo de 2012, de http://www.activitephysique.laurentienne.ca/NR/rdonlyres/808730CD-2FF4-45A3-AB1B-06BAFF87B51B/0/Tuxtla3.pdf

Sánchez G., S. (1998). Fundamentos para la investigación educativa. Santa Fe de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Sohng S., L. (1995). Enfoques de Investigación participativa: Algunos Conceptos Funtamentales. Investigación y Desarrollo Participativo para la Agricultura y el Manejo Sostenible de Recursos Naturales (Vol. 1). Perú: Thes One.

Wood, D. (1983). mathematical abilities of deaf school leavers. British Journal of Developmental Psychology, 1, 63-73.

La construcción de espacios educativos significativos como estrategia de intervención con maestros[1]

*Viviana Varón Vega**

RESUMEN

En el presente documento se describe un proceso de intervención en el que participaron maestras de preescolar y primero de primaria de la ciudad de Cali. La propuesta está orientada a ofrecer un espacio de reflexión de la práctica docente que permita generar procesos educativos que favorezcan la comprensión del conocimiento matemático de los niños en el aula. Se evidenciaron transformaciones en las concepciones de las maestras en relación con los ambientes de aprendizaje, las competencias de los niños y la enseñanza de las matemáticas.

* Universidad del Valle. Dirección electrónica: vivivar21@gmail.com.

1 Esta comunicación es producto del proyectos de "Intervención con actividades lúdicas y cotidianas en el aula de transición y primero de primaria para la construcción de conocimiento matemático", financiado por Colciencias, Programa Jóvenes Investigadores e Innovadores Virginia Gutiérrez de Pineda de 2009. La experiencia se encuentra sistematiza en Varón, V., y Otálora, Y., (2012).

PROBLEMA

Se describe un proceso de intervención con nueve maestras de Preescolar y primer grado de Básica Primaria de escuelas públicas de la ciudad de Cali, Colombia, en el que se propone como estrategia de formación docente un conjunto de herramientas para el diseño, análisis e implementación de espacios educativos significativos con el propósito de ofrecer un espacio de reflexión de la práctica docente que permita generar procesos educativos que favorezcan la comprensión del conocimiento matemático de los niños.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

La educación recibida durante la primera infancia tiene un impacto importante en el desarrollo subsiguiente de las personas en todas las dimensiones de la vida (Ministerio de Educación Nacional [men], 2007). Por esta razón, el mejoramiento de la calidad de la educación inicial y de los procesos educativos implicados en el paso de los niños de Preescolar a primero de Básica Primaria constituye uno de los propósitos que justifica la implementación de propuestas novedosas de formación de maestros que trabajen con niños en estos grados escolares.

Es preciso señalar dos premisas que pueden orientar el diseño de programas de formación de maestros. En primer lugar, los programas de formación deberían implicar el conocimiento sobre los niños, es decir, deben llevar a los maestros a conocer cuáles son las competencias de los niños, a qué edades se desarrollan y a que sean capaces de reconocerlas en la actividad diaria de sus alumnos, en sus desempeños y respuestas a las demandas de la vida cotidiana. En segundo lugar, los programas de formación docente deberían promover un trabajo reflexivo en los agentes educativos acerca de su acción pedagógica (Carranza, 2007, citado por García et ál., 2008) y de la forma en que sus prácticas de enseñanza afectan el desarrollo y el aprendizaje de los niños.

Un programa de formación docente debe proporcionar criterios claros, coherentes y aplicables sobre el tipo de ambientes de aprendizaje que proponen. Otálora (2010) ha propuesto un conjunto de criterios concebidos como esenciales para que un ambiente de aprendizaje se constituya en un espacio educativo significativo para el desarrollo y el aprendizaje infantil. Un espacio educativo significativo debe reunir situaciones estructuradas alrededor de objetivos de aprendizaje, situaciones intensivas que exigen la solución de problemas relacionados con metas culturales, situaciones extensivas que permitan manipular niveles de complejidad, situaciones que favorecen los contextos de interacción entre pares y con el agente educativo, y finalmente, situaciones generativas que exijan múltiples competencias.

METODOLOGÍA

Diseño. Se utiliza un diseño cuasi experimental pre-test y post-test con un solo grupo. Las maestras son observadas en su salón de clase mientras realizan con sus alumnos una clase de matemáticas planeada por ellas mismas.

La intervención propuesta como estrategia de formación de las maestras y que es realizada entre el pre-test y el post-test tiene dos modalidades: 1) formación conceptual y metodológica de los agentes educativos que se enfoca en mostrar la manera como los niños desarrollan competencias matemáticas y el tipo de situaciones de aula que permitirían evidenciarlas, y 2) acompañamiento in situ para el diseño de ambientes de aprendizaje, que está orientado a ofrecer un espacio de reflexión sobre las prácticas pedagógicas, a través del acompañamiento en el diseño, análisis e implementación de espacios educativos significativos y análisis de las modalidades de intervención que garanticen el desarrollo de competencias matemáticas en los niños.

Instrumentos. Para caracterizar los ambientes de aprendizaje se diseña un Instrumento de Caracterización de Ambientes de Aprendizaje (icaa) (ver figura 1), que es implementado en el pre-test y en el pos-test. El instrumento mide dos áreas: 1) actividades del agente educativo y 2) artefactos culturales de intervención, que a su vez, se subdividen en cuatro sub-áreas: procesos cognitivos, competencias matemáticas que la actividad permite trabajar, formas de intervención de la maestra para promover el aprendizaje y formas de participación de los niños en la actividad.

	Áreas	
	Actividades del agente educativo	Artefactos culturales de Intervención
Sub-áreas	Procesos cognitivos que exige la actividad	Formas de intervención de la maestra para promover el aprendizaje
	Competencias matemáticas que la actividad permite trabajar	Formas de participación de los niños en la actividad

Figura 1. Áreas y sub-áreas del ICAA.

Fuente propia

Análisis de datos. Para la caracterización de los ambientes de aprendizaje se identifican segmentos de interacción1 durante el desarrollo de las actividades escolares, en los que se señalan categorías en función de cada sub-área del icaa.

RESULTADOS

Procesos cognitivos que exige las actividades propuestas por la agente educativa. Se identifican 4 categorías de procesos básicos cognitivos: de percepción, atención, memoria, habilidades grafomotoras y psicomotoras (pb); reproducción de procedimientos numéricos (rp); procesos de análisis, relación, interpretación y evaluación (ai) y procesos de argumentación (ar) (ver figura 2).

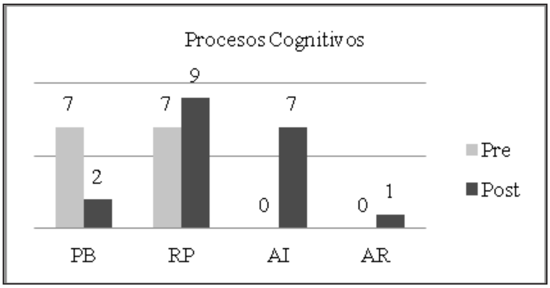


Figura 2. Tipo de procesos cognitivos

Fuente propia

Competencias matemáticas que permite trabajar las actividades propuestas por la agente educativa. Se identifican quince categorías: A) grafo-motora; B) memoria; C) cuantificación; D) identificación y uso de formatos de representación numérica; E) relaciones de orden; F) transformación de las cantidades; G) razonamiento aritmético; H) manejo del sistema de notación en base diez; I) manejo de algoritmos; J) identificación de atributos susceptibles de medir; K) uso de técnicas y herramientas para medir; L) reconocimiento de figuras geométricas; M) ordenamiento de figuras geométricas; N) relaciones de dirección, distancia y posición en el espacio; O) organización de datos de acuerdo con cualidades y atributos presentes en tablas (ver figura 3).

Formas de intervención de la maestra para promover el aprendizaje. Se identifican siete categorías: Decir, recordar o modelar aspectos de la consigna o dar instrucciones (dc); explicar o sintetizar de manera expositiva conceptos o procedimientos (es); indagar por aspectos específicos que permiten el

[1] Se entiende por segmentos de interacción un conjunto de intercambios entre agente educativa y niños, necesarios para llegar a un acuerdo respecto al desarrollo o consecución de la meta de la actividad escolar (Sánchez et ál., 2008).

desarrollo de la actividad (ie); indagar por aspectos amplios que promueven que los niños presenten explicaciones y argumenten sus puntos de vista (ia); retroalimentaciones que no amplían los aportes de los niños (re); retroalimentaciones que amplían los aportes de los niños (ra); intervenciones que promueven que los niños revisen los procedimientos de otro, sea el maestro o un compañero (rp) (ver figura 4).

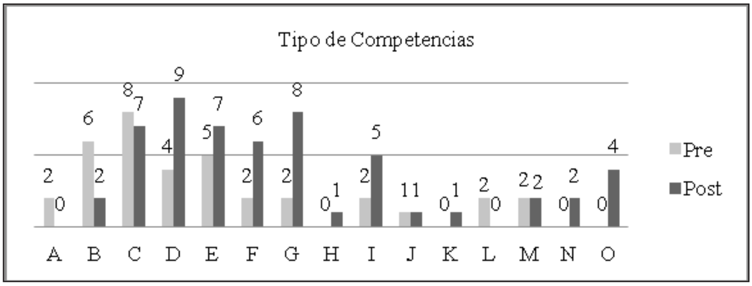


Figura 3. Tipo de competencias matemáticas

Fuente propia

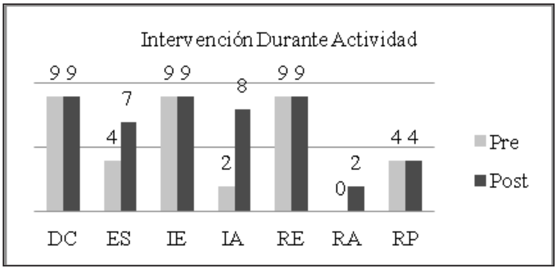


Figura 4. Intervencion de agente educativa durante la actividad

Fuente propia

Formas de participación de los niños en la actividad. Se identifican tres categorías: seguir instrucciones (si); presentar razones o argumentos (ra) y participación en trabajo conjunto (pc) (ver figura 5).

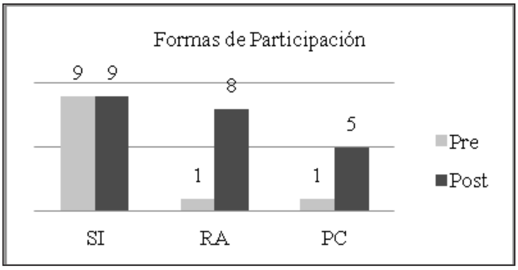


Figura 5. Formas de participación en la actividad

Fuente propia

CONCLUSIONES

Después de la intervención se observan transformaciones en los ambientes de aprendizaje relacionanadas con la complejidad cognitiva y estructuración de las situaciones, la pertinencia de las modalidades de intevención de las maestras y las oportunidades de participación activa de los niños. Se evidencia así un cambio en la concepción de las maestras respecto a los ambientes de aprendizaje, principalmente, un reconocimiento de criterios de las actividades y formas de intervención que favorecen la construcción de nuevos significados.

El diseño, el análisis y la implementación de espacios educativos significativos como estrategia de formación docente, logran integrar los conocimientos, habilidades y actitudes de las maestras en el trabajo cotidiano en el aula, con las nuevas herramientas conceptuales y metodológicas, para lograr así el desarrollo de nuevas estrategias de enseñanza y aprendizaje. Dirigir el análisis y reflexión de las maestras hacia las competencias evidenciadas por los niños, las prácticas de enseñanza que proponen, y su propia acción durante el desarrollo en la clase permiten, como lo propone Saleme (1985, p. 160, citado en Lorenzatti, s.f.) que desarrollen algunas estrategias tendentes a modificar su relación con el conocimiento y con los alumnos, al tiempo que modifican su concepción del mundo suscitando nuevos modos de pensar a partir de incorporar, al rol, el ejercicio de una conciencia crítica aplicada a las modalidades de su tarea, la estructura del saber impartido y la caracterización del alumno.

Aunque se puede suponer el inicio de cambios en las concepciones de las maestras sobre la forma como los niños aprenden matemáticas, las competencias que han desarrollado durante la infancia y las vías como las matemáticas podrían ser enseñadas, no se evidencia, sin embargo, un abandono de sus concepciones iniciales. Killen (1989, citado en Latorre, 1992) sugiere que la enseñanza reflexiva es un medio muy eficiente y eficaz para producir cambios significativos en la conducta de los profesores en clase, pero una única experiencia de ese tipo es difícil e improbable que genere profesores reflexivos críticos. Para que los cambios sean estables y significativos y se abandonen las viejas concepciones, se requieren procesos de formación centrados en el acompañamiento in situ durante largos periodos de tiempo, que favorezcan el fortalecimiento de procesos reflexivos y metacognitivos de los agentes educativos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

García, B., Loredo, J., & Carranza, G. (2008). Análisis de la práctica educativa de los docentes: pensamiento, interacción y reflexión. Revista Electrónica de Investigación Educativa, Especial. Recuperado el 29 de junio de 2010 de http://redie.uabc.mx/NumEsp1/contenido-garcialoredocarranza.html

Ministerio de Educación Nacional (2007). Documento Conpes Social 109. Política pública nacional de primera infancia "Colombia por la primera infancia". Recuperado 2 de marzo de 2011 de http://www.mineducacion.gov.co/primerainfancia/1739/articles-177828_archivo_pdf_conpes109.pdf

Latorre, M. (1992). La reflexión en la formación del profesor. Reflexión y formación del profesorado. Disertación doctoral, Universitat de Barcelona. Recuperado el 2 de marzo de 2011 de http://www.tdx.cat/TDX-1015109-104612

Lorenzatti, M. C. (s.f.). Estudiantes, maestros y profesores: adultos en procesos formativos. Recuperado el 2 de marzo de 2011 de http://www.alfabetizacion.fundacionsantillana.org/archivos/seminarios/Estudiantes,%20maestros%20y%20profesores%20adultos%20en%20procesos%20formativos.pdf

Otálora, Y. (2010). Diseño de espacios educativos significativos para el desarrollo de competencias en la infancia. Revista CS. 5, 71-96.

Sánchez, E., García, R., Rosales, J., Sixte, R., & Castellano, N. (2008). Elementos para analizar la interacción entre estudiantes y profesores: ¿qué ocurre cuando se consideran diferentes dimensiones y diferentes unidades de análisis? Revista de Educación, 346, 105-36.

Varón, V., & Otálora, Y. (2012). Estrategias de intervención con maestros centradas en la construcción de espacios educativos significativos para el desarrollo de competencias matemáticas. Avances en Psicología Latinoamericana, 30 (1), 93-107.

Efecto de los formatos y el tipo de información sobre las respuestas al resolver un problema binario de probabilidad condicional

*Gabriel Yáñez Canal**

*Ana Rátiva Hernández***

*Diana Lozano Rodríguez****

RESUMEN

Este trabajo presenta algunos de los resultados de una investigación dirigida a estudiar el efecto de los formatos y el tipo de información sobre las respuestas y estrategias que utilizan los estudiantes para resolver un problema binario de probabilidad condicional. Para esto se realizó un estudio en el que participaron 240 estudiantes de diversas carreras de la Universidad Industrial de Santander (UIS) en Bucaramanga, Colombia. Los resultados obtenidos mostraron que para problemas en los que se da información condicional hay efecto tanto del formato como del tipo de información, sin embargo, para aquellos que no contienen información condicional el formato no tuvo un efecto significativo.

Palabras clave: Problema binario de probabilidad condicional, formato de presentación, frecuencias naturales, tipo de información.

* Universidad Industrial de Santander (UIS). Dirección electrónica:gyanez@uis.edu.co.

** Universidad Industrial de Santander (UIS). Dirección electrónica:mayuyao_4@hotmail.com.

*** Universidad Industrial de Santander (UIS). Dirección electrónica:dianalozano28@hotmail.com.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

La probabilidad condicional, un tema en general complicado para quienes lo conocen, es un concepto fundamental de la probabilidad que muestra el efecto que puede tener un evento sobre la ocurrencia de otro. Su comprensión y aprendizaje encierran muchas dificultades porque su cálculo requiere tomar como nuevo espacio muestral el evento condicionante y calcular las probabilidades de los eventos ajustadas a este nuevo espacio. Este ajuste a un nuevo espacio muestral conlleva la identificación plena de eventos marginales y condicionados, además de eventos conjuntos.

Atendiendo a esto último, Yáñez (2001) presenta una clasificación de los problemas binarios de probabilidad condicional en consonancia con la cantidad de probabilidades condicionales presentes en la parte informativa y un análisis de cada una de las representaciones utilizadas para resolverlos (árbol, tablas y álgebra) indicando la pertinencia de cada una de ellas para resolver los diferentes tipos de problemas. Se habla de problemas binarios porque solo se consideran dos eventos: A y B, junto con sus complementos.

Entre los estudios que abordan el efecto que ciertas estrategias pueden producir para superar estas dificultades, se destaca el trabajo de Gigerenzer & Hoffrage (1995) quienes realizaron una investigación del razonamiento involucrado en los problemas que contienen probabilidades condicionales, más exactamente los que implican el uso del teorema de Bayes, y llegaron a que dicho razonamiento mejora cuando a las personas se les presenta la información en formato de frecuencias naturales. En su investigación Gigerenzer & Hoffrage (1995), tratan un solo tipo de problema (Tipo 7) según la clasificación realizada por Yáñez (2001), en el cual se encuentra una clara correspondencia entre la información del problema y el diagrama de árbol, lo que produce éxito en la solución del mismo. Por esta razón, es de interés analizar si el éxito descrito por Gigerenzer & Hoffrage (1995) con las frecuencias naturales se extiende a problemas de otro tipo.

Motivados por estos antecedentes y ante la importancia del tema, nos propusimos realizar una investigación que diera respuesta a las siguientes preguntas: si se cambia el tipo de problema usado por Gigerenzer & Hoffrage (1995): ¿qué efectos tiene sobre las respuestas el formato de presentación del problema? y estos efectos ¿son simplemente por el formato de presentación y el tipo de problema, o hay otros elementos que influyen? ¿Cuáles? En este trabajo presentamos las respuestas a la primera pregunta.

A continuación describimos la metodología utilizada para resolver estas preguntas, luego se presentan los resultados y se realiza una discusión alrededor de ellos; finalmente se presentan las conclusiones y las referencias citadas a lo largo del trabajo.

Metodología

Los problemas objeto de estudio fueron de los casos 2 y 5, según la clasificación de Yáñez (2001) que se presentan cuando se da como información:

Caso 2: Dos intersecciones y una marginal (nivel 0, pues no presenta condicionales en su información)

Caso 5: Dos intersecciones y una condicional (nivel 1, presenta una condicional en su información)

El objetivo fue cuantificar el efecto del formato y del tipo de información en el éxito de la solución a un problema de probabilidad condicional. La muestra estuvo conformada por 240 estudiantes de Ingeniería y Ciencias de la Universidad Industrial de Santander (UIS) en Bucaramanga, Colombia. Para esta fase se elaboraron 4 problemas, todos del mismo contexto y con una misma pregunta, pero diferente tipo de información y formato de presentación, de la siguiente manera:

Problema 1: Caso 5 en formato de frecuencias

En un salón de clase con 50 estudiantes, 15 de ellos aprobaron Biología y español, 18 estudiantes aprobaron biología y no aprobaron español. Se sabe, además, que de los que no aprobaron español 10 no aprobaron biología. Calcule la probabilidad de que, elegido un estudiante al azar de los que no aprobaron biología, este haya aprobado español.

Problema 2: Casos 5 en formato de probabilidades

En un salón de clase la probabilidad de que al seleccionar aleatoriamente un estudiante este haya aprobado biología y español es de 0.3, y la probabilidad de que haya aprobado biología y no haya aprobado español es de 0.36. Se sabe, además, que si se selecciona aleatoriamente un estudiante entre los que no aprobaron español la probabilidad de que este no haya aprobado biología es 0.357. Calcule la probabilidad de que elegido un estudiante al azar de los que no aprobaron biología este haya aprobado español.

Problema 3: Caso 2 en formato de frecuencias

En un salón de clases con 50 estudiantes, 33 aprobaron biología. 15 aprobaron biología y español. 7 aprobaron español y no aprobaron biología. Calcule la probabilidad de que elegido un estudiante al azar de los que no aprobaron biología este haya aprobado español.

Problema 4: Caso 2 en formato de probabilidades

En un salón de clases la probabilidad de que al seleccionar un estudiante al azar este haya aprobado biología es 0.66. La probabilidad de que haya aprobado biología y español es 0.3. Se sabe, además, que la probabilidad de que un estudiante haya aprobado español y no haya aprobado biología es de 014. Calcule la probabilidad de que elegido un estudiante al azar de los que no aprobaron biología este haya aprobado español.

Cada estudiante debía resolver uno de estos problemas; la asignación del problema a cada estudiante fue aleatoria y el tiempo de aplicación fue de 10 minutos

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para estudiar el efecto de los formatos y el tipo de información sobre las respuestas de los estudiantes, se decidió hacer pruebas de proporciones con los datos obtenidos al aplicar las pruebas individuales con el fin de realizar análisis objetivos de los datos que condujeran a deducciones válidas respecto al problema de estudio. En la tabla 1 se muestran las proporciones de respuestas correctas obtenidas para cada uno de los problemas clasificados de acuerdo con el caso al cual corresponde y con el formato de presentación.

Una primera observación que se puede hacer a los resultados de la tabla 1 es la baja proporción de respuestas correctas: únicamente 31 estudiantes resolvieron el problema correctamente (13%). Una prueba t permite inferir que *el formato de presentación del problema* no tuvo un efecto significativo (valor p=0.28) sobre el éxito al resolver el problema en ninguno de los dos tipos (frecuencias naturales y probabilidades).

Tabla 2. Proporción de respuestas correctas, según tipo de información y formato.

Formato *Caso*	*Frecuencias naturales*	*Probabilidaes*	*Total*
Caso 2	12/60	14/60	26/120
Caso 5	5/60	0/60	5/120
Total	17/120	14/120	31/240

Lo contrario sucedió con el tipo de información (caso 2 y caso 5); es así que se aprecian diferencias entre las proporciones de respuestas correctas (valor p<0.0001), lo que permite decir que el caso 2 produce una proporción de respuestas correctas mayor que la que produce el caso 5. Este resultado está en la dirección planteada por el mismo Yáñez (2001) cuando afirma que la dificultad de un problema de probabilidad condicional es mayor cuanto mayor sea el número de probabilidades condicionales que contiene en su parte informativa.

Para ver la interacción que se da entre formato y tipo de información, se elaboró el gráfico 1, en el cual se puede ver que los problemas de caso 2 son refractarios al cambio de formato, en tanto que los problemas de caso 5 sí son sensibles a este cambio, siendo las frecuencias naturales mejores para este tipo de información. En conclusión, cuando la información contiene datos con probabilidades condicionales las frecuencias naturales producen mayor proporción de respuestas correctas que las probabilidades.

Haciendo una prueba para comparar las dos proporciones de respuestas en el caso 5, se obtuvo una diferencia significativa (valor p = 0.0113), es decir, que los problemas de tipo 5 presentados en formatos de frecuencias producen más respuestas correctas que los de el mismo tipo, pero en formato de probabilidades.

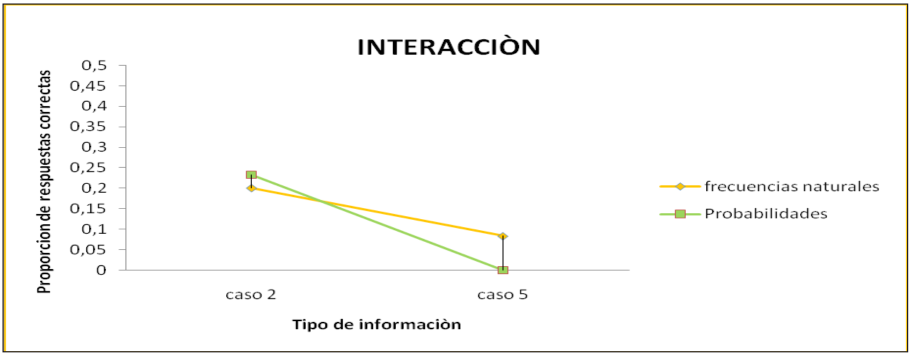


Gráfico 1. Interacción entre formato y tipo de información

CONCLUSIONES

En este estudio se encontró que para los problemas de caso 2 y caso 5 presentados en formatos de frecuencias naturales y probabilidad, el tipo de información tiene un efecto significativo sobre las respuestas, produciendo mayor proporción de respuestas correctas aquellos en los que la información no presenta datos condicionales (caso 2). De esta forma, los logros hallados por Gigerenzer & Hoffrage (1995), se puede afirmar, parecen limitarse solamente al tipo de problemas donde la información contiene probabilidades condicionales, es decir, los efectos que puedan tener las frecuencias naturales (formato de presentación) no son independientes del nivel del problema que se proponga (tipo de información); más aún, este formato solo es mejor cuando existe alguna información sobre probabilidades condicionales.

Finalmente, hay que decir que la discusión alrededor de las frecuencias naturales dada por Gigerenzer & Hoffrage (1995), Martignon & Wassner (2002) y los demás, ahora debe ser ampliada considerando no solo problemas que en su información presenten dos condicionales y una marginal, sino también problemas que den información sobre otros eventos, pues, como se dijo, el tipo de información tiene un efecto mayor que el que puede tener el formato de presentación para problemas que no presentan condicionales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency format. *Psychological Review, 102,* 684-704.

Martignon, L. & Wassner, C. (2002). *Teaching Decision Making and Statistical Thinking With Natural Frequencies.* VI International Conference on Teaching Statistics. En B. Phillips (Ed.). Ciudad del Cabo, Sur África, p. 1-4.

Yáñez, G. (2001). El álgebra, las Tablas y los Árboles en Problemas de Probabilidad Condicional. *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro.* En Gómez, P., y Rico, L. Granada, España, p. 355-37.

13° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa

CONFERENCIAS

Una utopía, factor esencial en la formación como educador matemático

Carlos Mario Jaramillo López[*]

La utopía está en el horizonte. Camino dos pasos y ella se aleja dos pasos. Camino diez pasos y ella se corre diez pasos más allá. Por mucho que yo camine nunca la alcanzaré. ¿Para qué sirve la utopía? Para eso… para caminar.

EDUARDO GALEANO

RESUMEN

Las autoridades educativas, regionales, nacionales e internacionales, además, profesores, padres de familia, entre otros, se encuentran actualmente preocupados por el bajo rendimiento en matemáticas y la alta deserción de los alumnos en esta disciplina. El sistema educativo debe responder acertadamente a los retos de la formación de mentes racionales, discursivas, reflexivas y críticas que puedan asumir el desarrollo de las ciencias y la tecnología moderna, que si bien es cierto pueden mejorar la calidad de vida de la sociedad, también pueden deteriorarla.

[*] Profesor Instituto de Matemáticas. Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: cama@matematicas.udea.edu.co

PREÁMBULO

Constituye un honor la invitación que me hace ASOCOLME[1] de participar como conferencista en este importante evento, por lo tanto, acepto el reto con agrado y entusiasmo.

Sea esta, entonces, una oportunidad para compartir con ustedes, los maestros y maestras que enseñan matemáticas en la Educación Básica, Media y Superior del país, un espacio de reflexión sobre ciertas realidades complejas que vivimos en nuestro ejercicio docente para consolidar propuestas académicas pertinentes que redunden en beneficio de nuestros estudiantes.

Los problemas que enfrentamos, hoy día, son nuevos, por lo tanto, las respuestas deben ser igualmente novedosas. Estoy convencido que la única manera de consolidar propuestas originales y efectivas es a partir de la reflexión conjunta con ustedes, los maestros y maestras, directos protagonistas y hacedores de la educación matemática. Debemos asumir un serio compromiso con nosotros mismos para que nuestra relación con la educación sea renovada, próspera y a la vez transformadora de saberes.

Les ruego poner en duda las ideas que a continuación les quiero compartir, someterlas a un método de depuración. Imaginemos un procedimiento alquímico: en primer lugar, pasarlas por un proceso de decantación y luego colocarlas en un crisol a fuego lento, para que sufran así un proceso de purificación; quizá, sea la única manera de averiguar y convencernos de si lo que hacemos en nuestro ejercicio docente está bien o son equivocaciones o, peor aún, nos lleva a asumir actuaciones que pueden ser contraproducentes, tanto para nosotros mismos como para nuestros alumnos.

TENSIONES

Existe un verdadero conflicto en el ámbito mundial sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Observemos a nuestros alumnos discutiendo acerca de los últimos modelos de teléfonos inteligentes; ellos conocen a fondo sus características, sus aplicaciones, las sutilezas y las diferencias de estos modernos dispositivos, por lo tanto, aprecian el estilo, la forma, la estética y el alcance de cada uno de ellos. En general, todos nuestros alumnos viven en un entorno rodeado de artefactos y equipos de comunicación de toda clase. Se asombran de los logros de la ciencia (era espacial, armamento bélico, me-

[1] Asociación Colombiana de Matemática Educativa. 13º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (ECME-13). Octubre 2012.

dios de comunicación, redes sociales, videojuegos interactivos, computadores personales con Internet inalámbrico, iPhones, entre otros).

Al mismo tiempo, los alumnos están preocupados por los desastres humanos que suceden a diario, tales como las guerras, accidentes aéreos, fabricación de fármacos, carros bomba, la guerra del petróleo, la ecología, entre otros, en los que la tecnología y la sociedad de la informática juegan un papel importante. Las multinacionales generan pobreza, hambre y desolación debido a la codicia. Todo ello les genera inseguridad, ya que parece ser que el futuro no es halagador.

Nuestros alumnos se encuentran caminando sobre la cuerda floja, y algunos de ellos están entusiasmados, inspirados y optimistas, pero otros están preocupados, frustrados, angustiados y confundidos. El interés por participar activamente en su formación profesional disminuye cuando escuchan en los medios de comunicación sobre la problemática económica mundial y las dificultades que deberán enfrentar para ejercer tal o cual profesión.

La educación debería propugnar por aclarar el horizonte de nuestros alumnos, en particular la Educación Matemática, ya que las matemáticas están en la raíz de la actual tecnología y otros campos del saber. No existe duda alguna de que esta disciplina cobra su real interés en el desarrollo de la tecnología que es promovida por los educadores, padres de familia y la sociedad en general, incluso, los mismos alumnos lo reconocen.

Existen ingentes esfuerzos por promover la comprensión de las matemáticas, pero ¿cuáles son los resultados de todos estos esfuerzos? Cómo responder a la usual inquietud de nuestros estudiantes: ¿para qué sirven las matemáticas? ¿Cómo crear y recrear propuestas interesantes para nuestros alumnos? Hay muchas más preguntas que debemos resolver.

Los alumnos siguen creyendo que las matemáticas son importantes pero que también son difíciles, imposibles para muchos, misteriosas, sin sentido y aburridas. Provocan sentimientos de inseguridad, de temor, de falta de confianza, de odio, generan estados de ansiedad, es decir, provocan crisis de estrés en la vida del alumno. Culpan a los maestros de generar todo este tipo de cosas, debido a los malentendidos y limitada comprensión que genera el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, el cual lo encuentran carente de sentido.

Pero, lo peor de todo es que los gobiernos han venido perpetuando la idea de que el estudio de las matemáticas es un saber importante e indispensable, que debe abordarse en el currículo escolar, pero han fallado porque crearon la necesidad de estudiarla, pero no han sido capaces de satisfacerla. En esta perspectiva, los docentes somos los responsables directos de diseñar propuestas pertinentes y adecuadas que mejoren el proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y lograr resultados satisfactorios en el contexto social y local. Esta es una encrucijada que cotidianamente vivimos en nuestras aulas de clase y que algunas veces nos agobia, en tanto que las soluciones que planteamos suelen generar otro tipo de problemas, lo que constituye una paradoja.

¿Por qué participar?

Hemos venido dependiendo en un alto grado de nuestros propios esfuerzos individuales. ¡Basta de esfuerzos individuales!, es hora de consolidar nuestras relaciones para que florezcan propuestas creativas que respondan a las enormes necesidades y problemas que hoy día enfrenta nuestra educación en todas sus dimensiones, en particular la educación en matemáticas.

¡Qué grato saber que no estoy solo y que somos muchos los que creemos que es posible transformarnos para transformar nuestras clases de Matemáticas! Que no es posible continuar ejerciendo una docencia ineficiente, sin sentido y carente del deseo de aprender. Que nos une un anhelo común, el firme deseo de hacer de nuestras clases escenarios de reflexión y de crítica y por lo tanto, lograr que nuestros alumnos sean críticos, creativos y desarrollen un razonamiento que les permita comprender, no solo las matemáticas como parte vital de su formación académica, sino tomar conciencia de lo que significa estar en la escuela para que cada uno de ellos asuma el compromiso de educarse y edificarse a sí mismo como ciudadano.

Si aceptamos el binomio "educación-matemática", ambas inseparables, estrechamente ligadas pero claramente diferenciadas, entonces uno de nuestros objetivos es lograr que nuestros alumnos brinden respuestas eficaces al maremágnum de dificultades de tipo social, cognitivo, psicológico, entre otras, por las que atraviesan en su proceso de formación como personas. Además de hacer parte de un mundo académico que les permite culturizarse, ellos deben, también, contribuir a la construcción de la equidad social soñada, porque de lo contrario es perpetuar una educación estéril, manipuladora y carente de sentimientos.

Hoy, más que nunca, necesitamos de una reforma del pensamiento en la que las políticas gubernamentales nos permitan consolidar una propuesta educativa acorde a las necesidades, prioridades, intereses y problemas de cada población y, por lo tanto, el conjunto de docentes sean capaces de responder a las exigencias del contexto social de la población en la que se encuentra.

NOCIONES BÁSICAS DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

Es importante comprender algunas ideas esenciales y básicas cuando se aborda el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, entre las cuales están:

- Los objetos matemáticos de naturaleza abstracta, que permiten el desarrollo conceptual y teórico de esta disciplina.
- Los materiales concretos, utilizados en el proceso enseñanza aprendizaje de la matemática, son objetos reales y sensibles cuyo propósito es que el alumno comprenda la abstracción de los conceptos matemáticos. El punto matemático es algo abstracto, pero la huella que deja la punta de un lápiz es una burda representación concreta del mismo. Un triángulo de cartulina motiva a la comprensión abstracta de la forma de la figura, sus características y sus propiedades, entre otras.
- Los nombres, las palabras, dibujos o símbolos de cualquier tipo, utilizados para referirnos a los objetos matemáticos. El lenguaje matemático se construye a partir de gráficas y de registros escriturales con el propósito de comunicar los conceptos abstractos necesarios para los distintos campos teóricos de esta disciplina. Es imperante la conexión de la mente del alumno con el símbolo matemático respectivo para comunicar una idea o concepto asociado al mismo.

Los seres humanos difieren de los animales por su capacidad de comunicación y su deseo de crear símbolos y sistemas de símbolos de todo tipo. La simbolización matemática, en particular, nos permite comunicar conceptos abstractos. El conjunto de símbolos conforman el lenguaje matemático y el empleo de este, acompañado de técnicas matemáticas, requiere del cultivo de unas aptitudes determinadas para el razonamiento e, incluso, de desplegar los propios procesos de pensamiento de carácter discursivo.

El lenguaje representa un aspecto importante desde el punto de vista del desarrollo de las matemáticas: su capacidad para conectar el discurso de maneras ricas y variadas, además, permite señalar la unidad que subyace en la variedad de estructuras. Desde el punto de vista de la EM, se ha dedicado mucha atención a los "conectores lógicos" de un lenguaje que permiten combinar proposiciones y oponerlas, extenderlas, restringirlas, ejemplificarlas, desarrollarlas, etc. Estos conectores permiten la formación de proposiciones complejas y enlazarlas para obtener cadenas de proposiciones coherentes, posibilitando la elaboración de las demostraciones, que son una serie de afirmaciones vinculadas entre sí y que proporcionan la explicación potente y especial de teoremas, definiciones, entre otros.

El lenguaje ha permitido crear la tecnología simbólica de que se valen las matemáticas para representar los conceptos matemáticos, es así como hasta el momento las matemáticas han desarrollado su propia tecnología simbólica para continuar desarrollándose. El racionalismo es el interés por el razonamiento deductivo como único método válido para alcanzar explicaciones y conclusiones. Racionalizar es intentar fraguar una conexión lógica entre ideas que hasta el momento pueden haber estado desconectadas o conectadas mediante una incongruencia. Es importante recalcar que las matemáticas se ocupan de abstracciones inferidas, a su vez, de otras, y dedican un esfuerzo enorme por desarrollar, crear y recrear el pensamiento abstracto.

DISEÑO DE PROPUESTAS DIDÁCTICAS

Recientemente, se han venido desarrollando investigaciones en las cuales se evidencia la importancia de integrar el conocimiento impartido en el contexto de las matemáticas a partir de su didáctica. Estos estudios se centran en el análisis de la didáctica y de su evolución como saber científico, que aporta desarrollos teóricos importantes para mirar de cerca los procesos de enseñanza y aprendizaje que se deben abordar cuando se imparte conocimiento en matemáticas.

Algunos estudios señalan que la didáctica como disciplina científica ha sufrido una evolución, que partiendo de las necesidades e intereses del docente y pasando por el punto de vista clásico en didáctica, se sistematiza y se generaliza. Han existido diferentes concepciones acerca de lo que significa la didáctica de una ciencia en particular. En el caso de las matemáticas, emergió la didáctica fundamental, a partir de un estudio epistemológico experimental, acerca de lo que se comprendía en su momento por "teoría de las situaciones didácticas"[2].

El anterior estudio analiza dos enfoques clásicos de la didáctica, a saber: el enfoque del aprendizaje y el pensamiento del profesor, que no necesaria-

[2] Gascón, Josep. Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 18/1, nº 52, pp. 7-33, 1998.

mente son temporalmente sucesivos, pero sí complementarios. El primero se centra en el aprendizaje del alumno y su evolución; para ello se cita a Ausubel (1968) que hace un desarrollo teórico alrededor del aprendizaje significativo. El segundo, aunque centrado en la actividad docente, comparte la idea de la instrucción del alumno y considera aspectos relativos al profesor y a su formación profesional, lo que hace más compleja la problemática de la didáctica. Esto se refleja en la pregunta: "¿Qué conocimientos (en el sentido amplio de saber y saber hacer) debe tener el profesor para favorecer un aprendizaje efectivo de los alumnos?" (Gil, Carrascosa, Furio & Martínez, 1991).

La esencia fundamental del segundo enfoque es el pensamiento del profesor, que incluye su conocimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje de un área específica de las ciencias y su experiencia docente. Por lo tanto, se trata de un conjunto de conocimientos profesionales cuya construcción y justificación requiere de un conjunto de disciplinas (psicología educativa, sociología, historia de las ciencias, pedagogía y epistemología de las ciencias, las tecnologías de la información y la comunicación (TIC), entre otras).

Se debe avanzar en la generación de espacios para el uso de la Web 2.0 y las redes sociales en el ámbito educativo. En la actualidad, es inevitable ignorar la "Sociedad de la información" en los procesos de la vida diaria en relación directa con la formación académica de los individuos, en la cual, los dispositivos electrónicos (iphone, ipad, computadores, DVD, entre otros) están popularizados y juegan un papel fundamental en el campo educativo.

Además, se resalta que lo importante de este punto de vista clásico es que los saberes que utiliza la didáctica no son problemáticos en sí mismos, ni forman parte de la problemática de las ciencias. Los saberes "sólo pueden ser aplicados para describir e interpretar los hechos didácticos, pero nunca pueden ser modificados como consecuencia de dicha aplicación" (Gil et al., 1991).

Existen muchas propuestas y marcos teóricos que intentan remedar o determinar con cierta certeza lo que le ocurre a la mente de un individuo cuando se enfrenta al aprendizaje de un concepto matemático; de esto depende o no el éxito de la investigación: obtener respuestas sobre cómo razona y aprende un alumno y cómo llega a la comprensión del concepto objeto de estudio; este es el reto que se debe asumir y, por lo tanto, algunas veces se convierte en una utopía.

En diferentes estudios relacionados con la didáctica de las matemáticas, se puede apreciar que no existe un consenso sobre qué modelos son más eficaces en el aula de clase. Esto se debe, en parte, a que las propuestas son de carácter eminentemente teórico, pero que desde distintas miradas han aportado notablemente a describir las dificultades que se presentan en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de este campo de conocimiento, influenciados, en parte, por distintos cambios sociales y tecnológicos que emergen con rapidez. Algunos teóricos de la didáctica de las matemáticas la describen de diversas formas:

a. Para Freudenthal (1991) la didáctica es la organización de los procesos de enseñanza y aprendizaje relevantes para tal materia. Los didactas son organizadores: desarrolladores de educación, autores de libros de texto, profesores de toda clase, incluso los estudiantes que organizan su aprendizaje individual o grupal.

b. Para Brousseau (citado por Kieran, 1998) la didáctica es la ciencia que se interesa por la producción y comunicación del conocimiento. Saber qué es lo que se está produciendo en una situación de enseñanza es el objetivo de la didáctica.

c. Debido a la complejidad de los procesos presentes en toda situación de enseñanza y aprendizaje, Schoenfeld (1987) postula una hipótesis básica consistente en que, a pesar de la complejidad, las estructuras mentales de los alumnos pueden ser comprendidas y que tal comprensión ayudará a conocer mejor los modos en que el pensamiento y el aprendizaje tienen lugar.

d. En la actualidad, algunos autores asumen la didáctica como una disciplina encargada de evidenciar los planteamientos de los teóricos mediante estrategias prácticas que dinamizan y consolidan el proceso de enseñanza y aprendizaje, en el cual están involucrados: docente, estudiante, contexto y currículo.

A pesar de ciertas dificultades y confusiones para la consolidación de propuestas didácticas en matemáticas, sí se puede afirmar que se ha logrado en la actualidad un desarrollo bastante amplio, dado el gran número de aportes que se han hecho como producto de proyectos de investigación; por lo tanto ha conseguido un reconocimiento desde un punto de vista institucional a escala internacional, aunque no homogénea en las diversas regiones y países. Además, existe una gran diversidad en las agendas de investigación y confusión en los marcos teóricos y metodológicos disponibles, situación propia de una disciplina emergente. Tampoco se debe desconocer que existe un divorcio fuerte entre la investigación científica que se está desarrollando en el ámbito académico y su aplicación práctica a la mejora de la enseñanza de las matemáticas.

Pero ¿por qué investigar en Educación Matemática? No pretendo dar respuesta a la pregunta, pero sí insistir en aspectos fundamentales relacionados con los reportes de investigación. Abundan estudios en Educación Matemática cuyas pretensiones son onerosas, pero cuyos resultados son irrisorios. Es el momento de reflexionar para llegar a un consenso sobre qué queremos abordar en el campo de la investigación y cómo lograr que nuestras investigaciones trasciendan de lo académico y se reflejen en nuestras prácticas docentes. Aunque tampoco debemos olvidar que es necesario elaborar propuestas académicas resultado de indagaciones serias sin pretender garantizar resultados, porque carecer de ellas es sinónimo de mediocridad.

Además, teniendo en cuenta que muchas de ellas producen ideas, identifican problemas y sugieren posibilidades, pero no generan soluciones prácticas ni siquiera en el contexto local en el que el estudio se desarrolla, me permito, en aras de hallar una respuesta a la pregunta, sugerir el artículo "Towards basic standards for research in Mathematics Education" (Djordje Kadjevich, 2005).

El autor mencionado aborda el tema de la calidad de la investigación que hoy día se está desarrollando en el campo de la educación matemática, se menciona allí que Guy Brousseau estima que el 80% de la investigación en educación matemática "consiste en reorganizar, reformular y problematizar el trabajo que ya se ha hecho". En esta perspectiva, el autor se ocupa de establecer criterios que se deben tener en cuenta para lograr una alta calidad en las investigaciones que se vayan a desarrollar, es decir, afirma que es necesario que las investigaciones cumplan con unos estándares óptimos; por lo tanto, propone tres estándares: relevancia, significancia y rigor, y algunos indicadores característicos de cada uno de estos estándares.

El diseño de metodologías en didáctica de las matemáticas, de propuestas de investigación, la participación en eventos académicos, las publicaciones, el ejercicio de la docencia, entre otros, son factores esenciales para cualificar nuestra labor, es decir, esta debe ser nueva y próspera, y a la vez, transformadora de saberes, en tanto la complejidad de lo que significa el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en los distintos niveles educativos.

Es importante anotar que una propuesta que aborde un proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que transcurra en un ambiente que ignore las interpretaciones, las intuiciones, las conexiones y significados personales que los alumnos construyen da una visión errónea de lo que significa comprender conceptos matemáticos y hace de la clase de matemáticas un espacio aburrido carente de sentido.

También, con el fin de contribuir, de reflexionar sobre la urgente necesidad de cambio personal y de mejorar nuestro ejercicio docente, quiero compartir una de las tantas ideas de Alain Badiou, y quiero decirlo con vehemencia: él concuerda con la necesidad de una transformación, quizá despreciando lo que existe, pero en nombre de lo que puede haber; además, categóricamente, Badiou (2007) afirma que: "Cualquiera que trabaje para la perpetuación del mundo que hoy nos rodea, aunque fuera bajo el nombre de filosofía es un adversario, y debe ser conceptuado como tal".

OBSERVACIONES

La urgente necesidad de desarrollar y consolidar en el alumno un pensamiento crítico, una habilidad para exponer argumentos y un buen nivel de comprensión lectora es clave para que él pueda comprender cualquier disciplina, logre solucionar problemas, la habilidad de comunicación escrita, y la capacidad de entender y respetar los puntos de vista de los demás.

Así que a medida que pasa el tiempo, nos vemos rodeados de tecnología avanzada y nuestro entorno se vuelve complejo; todo esto hace que exista la necesidad de una educación matemática sólida, coherente y eficaz para poder responder a las exigencias que el mundo moderno nos plantea.

Pero, nuestras intenciones y propuestas se ven frenadas por estructuras institucionales y mentales esclerosadas; por esto se requiere, prioritariamente, una reforma de nuestra manera de pensar para abarcar en su complejidad "lo que está entretejido" (palabra latina complexus) los supuestos de lo que significa el cambio o el salto que debemos dar para lograr una sociedad más justa y equitativa.

Es necesario consolidar nuestras relaciones académicas para que florezcan propuestas creativas que respondan a las enormes necesidades y problemas que hoy día enfrenta nuestra educación en todas sus dimensiones, en particular la educación en matemáticas.

Finalmente, quiero sugerir la lectura de un importante documento divulgado en el año 2011, por el instituto Alberto Merani, de la ciudad de Bogotá, titulado: Movimiento Pedagógico y Social por una Educación de Calidad: Hacia un Gran Acuerdo Nacional, el cual nos convoca a fortalecer un lazo de solidaridad para emprender el cambio educativo necesario y digno de nuestro país porque las circunstancias sociales lo ameritan.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ausubel, D. (1968). Educational psychology: a cognitive view. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Bishop, A. J. (1999). Enculturación matemática. Barcelona: Paidós.

Freudenthal, H.(1991). Revisiting Mathematics Education. China Lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. Recherches en Didactique des Mathèmatiques, 18(1), 7-34.

Gil, D., Carrascosa, J., Furio, C. & Martínez, J. (1991). La enseñanza de las ciencias en la educación secundaria. Barcelona: Horsori/ICE de la Universidad de Barcelona.

Godino, J. D. (2008). Presente y futuro de la investigación en didáctica de las matemáticas. Educación matemática, (19), 1-24.

Kadjevich, D. (2005). Towards basic standards for research in Mathematics Education. The teaching of mathematics. 8(2), 73–81.

Kieran, C. (1998). Complexity and Insight. Journal for Research in Mathematics Education, 29(5), 595-601.

Morin, E. (1999). Los siete saberes necesarios para la educación del futuro. Bogotá: Magisterio.

Resnick, L. & Ford, W. (1998). La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Barcelona: Paidós.

Schoenfeld, A. (1987). Cognitive Science and Mathematics Education. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associated, Inc.

Skemp, R. (1980). Sicología del aprendizaje de las Matemáticas. Madrid: Morata.

Van Hiele, P. (1986). Structure and Insight. A theory of Mathematics Education. London: Academic Press.

Cibergrafía

Instituto Alberto Merani. (2001). Movimiento Pedagógico y Social por una Educación de Calidad.

Aportes didácticos en el contexto del análisis, desde algunos referentes históricos

René Alejandro Londoño Cano[*]

RESUMEN

El propósito de la conferencia es compartir estrategias didácticas para la comprensión de algunos conceptos del análisis, tales como el paso al límite, derivada, integral, la idea de proceso infinito, entre otros, que surgen, de un lado, de la experiencia como docente mediante la puesta en escena de ciertos momentos históricos o períodos de evolución histórico-epistemológica, por otro lado, de la experiencia como investigador mediante la participación en algunos estudios enmarcados en teorías para la comprensión de conceptos matemáticos, que han encontrado metodologías alternativas e innovadoras para su enseñanza, basados en la visualización matemática.

[*] Universidad de Antioquia Direcciones electrónicas: rene2@une.net.co london@matematicas.udea.edu.co

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, la comprensión de los conceptos matemáticos, en particular, del análisis matemático, continúa siendo objeto de interés por parte de los investigadores en educación matemática, dados múltiples factores como la alta deserción del sistema educativo, la desmotivación de los estudiantes generada por las ideas abstractas que solo pueden percibirse con el *ojo de la mente,* la idea de infinito, entre otros, que obligan a crear soluciones para la enseñanza y aprendizaje de algunos conceptos.

Algunas investigaciones en el campo de la educación matemática han reflexionado sobre este hecho y proporcionan estudios en el ámbito pedagógico, didáctico, histórico y epistemológico que posibilitan cada vez más el acceso de las matemáticas a los aprendices. Un buen ejemplo es la teoría de los obstáculos epistemológicos (Bachelard, 1938). Bachelard indica que los obstáculos epistemológicos ocurren en el desarrollo histórico del pensamiento científico y en la práctica educacional. Para él, los obstáculos epistemológicos tienen dos características esenciales:

- Son un constitutivo inevitable y esencial del conocimiento para ser adquirido.
- Están basados, por lo menos en parte, en el desarrollo histórico del concepto.

Otros autores se han interesado también en los obstáculos epistemológicos. Guy Brousseau define un obstáculo epistemológico como un conocimiento que funciona bien en un cierto dominio de actividad y, por consiguiente, comienza bien establecido, pero este falla para trabajar satisfactoriamente en otros contextos donde funciona mal y lleva a contradicciones. Por eso comienza la necesidad de destruir la insuficiencia original, el conocimiento mal formado, para remplazarlo con nuevos conceptos que operan satisfactoriamente en el nuevo dominio. El rechazo y la claridad de tal obstáculo son una parte esencial del conocimiento en sí mismo. La transformación no puede ser realizada sin desestabilizar las ideas originales colocándolas en un nuevo contexto donde claramente fallan. Esto de este modo requiere un gran esfuerzo de reconstrucción cognitiva.

Se trata entonces de exhibir algunos referentes históricos de algunos conceptos del análisis en particular, que permiten la consolidación de estrategias didácticas en las aulas de clase y los laboratorios de matemáticas, con el fin de propiciar la comprensión matemática en los estudiantes.

LA IMPORTANCIA DE LOS REFERENTES HISTÓRICOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO EN LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Indudablemente, la idea de infinito ha permeado todas las etapas de la evolución histórica de las matemáticas: desde el siglo V a. C. con el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables en un intento afortunado por demostrar la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con respecto al lado, pasando por el método de exhaución de Arquímedes en el siglo III a. C., la idea de *sumación continua* para calcular una distancia bajo el grafo velocidad-tiempo de Oresme en el Medioevo, los indivisibles de Cavalieri, hasta llegar a los infinitesimales de Newton. De hecho, todos los enfoques geométricos de los griegos, desde la llamada época del *horror al infinito* y el progresivo avance de las técnicas aritméticas posteriores, permiten que la idea de infinito sea aceptada y modificada por Newton y algunos de sus antecesores y predecesores, para dar paso así a lo que hoy se conoce como el análisis matemático.

Considerando que el infinito es la idea más trascendental y poderosa en las técnicas del análisis matemático, que hace que los antiguos procesos geométricos y aritméticos artificiosos sean fácilmente computables, surge desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas una seria dificultad, la cual se formula en el sentido de que los algoritmos y las técnicas operativas usualmente encubren ciertas nociones matemáticas importantes que dificultan la comprensión del concepto en cuestión. Dicho de otra manera, las técnicas infinitesimales por sí solas, aunque permiten acceder al resultado deseado de forma óptima, desde el punto de vista didáctico, en muchas ocasiones, no vinculan los entes matemáticos puestos en escena con los procedimientos algorítmicos ejecutados.

Se logra así identificar en las prácticas educativas las aulas de clase, cómo muchos estudiantes calculan derivadas, pero no las comprenden como la pendiente de un recta tangente o una razón de cambio (de hecho muchos no comprenden la idea de recta tangente como un concepto de aproximación local); calculan integrales, pero no las comprenden como el límite de una suma de áreas infinitas o aplican el teorema fundamental del cálculo, pero no alcanzan a percibir la relación extraordinaria que exhibe entre las cuadraturas y las tangentes. Mucho más grave aún es que nuestra realidad actual evidencia cómo un gran porcentaje de los docentes de matemáticas evalúa precisamente la aplicación de los algoritmos con resultados favorables, pero estudios posteriores sobre los mismos estudiantes indican una baja comprensión de los conceptos.

Dicho lo anterior, ¿cuál podría ser la importancia que los referentes históricos tienen en las consideraciones de tipo didáctico en el análisis matemático?

Veamos algunas consideraciones al respecto:

> Los conceptos y las ideas matemáticas que se tratan en la enseñanza secundaria, son presentados a los alumnos de una forma cerrada y acabada. Se olvida que han surgido después de un largo proceso de gestación, en las que las intuiciones más fecundas con otras estériles, han configurado sus presentaciones sucesivas. A lo largo de la historia, estas ideas han sido generadas por diversos tipos de problemas, prácticos o teóricos, pertenecientes a la propia matemática o a otras disciplinas. El conocimiento de estos problemas, y el estudio de la evolución de su tratamiento y de los nuevos problemas que han generado, proporciona los fundamentos para la comprensión de las ideas y conceptos que de ellos han resultado (Nolla, 2001).
>
> La matemática presentada como un sistema de verdades, acabado y ordenado, sin referencia al origen y propósito de sus conceptos y teorías tiene su encanto y satisface una necesidad filosófica. Pero esta actitud introvertida en el campo de la ciencia no es adecuada para los estudiantes que buscan independencia intelectual más que adoctrinamiento. Menospreciar las aplicaciones y la intuición lleva al aislamiento y a la atrofia de la matemática (Courant & Jhon, 1974).
>
> Los maestros, estudiantes, y los amantes del estudio en general, que quieran comprender realmente las fuerzas y las formas de la ciencia, han de tener alguna comprensión del estado presente del conocimiento como un resultado de la evolución histórica. De hecho la reacción contra el dogmatismo en la enseñanza científica ha despertado un interés creciente hacia la historia de la ciencia. Durante las décadas recientes se han hecho grandes progresos en la investigación de las raíces históricas de la ciencia en general y de la matemática en particular (Boyer, 1949).
>
> [...] Este principio [biogenético], creo yo, debiera ser seguido también, al menos en sus líneas generales, en la enseñanza de la matemática lo mismo que en cualquiera otra enseñanza; se debería conducir a la juventud, teniendo en cuenta su natural capacidad y disposición, lentamente hasta llegar a las materias elevadas y, finalmente, a las formulaciones abstractas, siguiendo el mismo camino por el que la humanidad ha ascendido desde su estado primitivo a las altas cumbres del conocimiento científico [...]. Un inconveniente fundamental para la propagación de tal método de enseñanza, adecuado al alumno y verdaderamente científico es, seguramente, la falta de conocimientos históricos que se nota con sobrada frecuencia. Para combatirlo gustosamente me he detenido en consideraciones históricas [...];

> así ha podido verse cuán lentamente han ido formándose todas las ideas matemáticas, cómo han surgido en forma confusa, pudiera decirse que de procedimientos, y sólo después de un largo desarrollo han llegado a tomar la fuerza rígida y cristalizada de la exposición sistemática (Klein, 1927).

Es evidente que las anteriores consideraciones respaldan que desde el punto de vista didáctico, la naturaleza del aprendizaje de las matemáticas, en particular para lo que nos concierne en el análisis, presenta sus formas iniciales en la intuición de los estudiantes (en la historia, en la intuición de los matemáticos) con el uso de visualizaciones matemáticas mediante gráficos, para luego pasar a la formalización; tales intuiciones pueden ser estudiadas y comprendidas en el campo de la educación matemática usando como herramienta fundamental el rastreo de referentes históricos que permitan caracterizarlas y así, finalmente, consolidarlas como aportes didácticos .

LA IMPORTANCIA DE LA VISUALIZACIÓN MATEMÁTICA

El mecanismo de la visualización matemática ha sido fundamental a través de la evolución histórica de los conceptos matemáticos, desde las formas iniciales intuitivas del concepto, y ha sido objeto de estudio en el desarrollo de varias propuestas de investigación en educación matemática, dadas las ventajas que ofrece al momento de aplicar las intervenciones en las aulas con los estudiantes, más aún cuando se trata de abrir las puertas hacia la formalización en matemáticas.

De acuerdo con Guzmán, la visualización en matemáticas no es lo mismo que lo que algunas corrientes de psicólogos llaman visualización. Para ellos la visualización es una técnica, entroncada en el análisis transaccional iniciado por Eric Berne (años cincuenta), que pretende una reestructuración de ciertos aspectos del subconsciente. Tiene mucho más que ver con componentes afectivos que con componentes propiamente cognitivos. Con la visualización matemática se pretende otra cosa. Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas en el campo de estudio (De Guzmán, 2001).

Una gran parte de la visualización usada en investigaciones en educación matemática se ha desarrollado mediante la capacidad de imaginación y representación con instrumentos convencionales como lápiz, papel, tiza o tablero. La fidelidad y exactitud de tales representaciones debe estar en función del tipo de trabajo de visualización que se requiere. No tiene objeto utilizar compás y regla cuando con un dibujo a mano suficientemente claro queda sugerido en la medida en que se quiere presentar, como es el caso en la mayor parte de los problemas del análisis matemático en los que una visualización sea suficiente. Pero es claro que, en la actualidad, se dispone de un instrumento extraordinariamente potente, el computador, cuya influencia sobre el quehacer matemático se va dejando sentir en muchos aspectos y uno de ellos es, obviamente, la visualización.

En lo que se refiere, en particular, al análisis matemático, la existencia de programas matemáticos, tales como DERIVE®, MAPLE®, MATHEMATICA®, CABRI®; GEOGEBRA®, entre otros, con capacidades de representación extraordinariamente versátiles e interactivas, aplicables en todos los campos imaginables de la matemática actual, está cambiando ya nuestra forma misma de practicar tanto las actividades de investigación como las de la interacción enseñanza-aprendizaje a todos los niveles.

LA CONSOLIDACIÓN DE ALGUNAS ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS

A continuación, se describen tres estrategias didácticas, producto de trabajos de investigación para la comprensión de conceptos matemáticos (Londoño & Jurado, 2005), (Lodoño, 2011), cuyos referentes históricos atañen al Medioevo y al siglo XVII, respectivamente. En ellas, previamente a su descripción, se detalla el título, el concepto objeto de comprensión, los conceptos que son tratados de manera encubierta, el mecanismo[1], el objetivo de la intervención y, finalmente, la descripción de la estrategia.

Estrategia n.° 1

Título: La estrategia de las escaleras

Concepto: Convergencia de una serie de términos positivos

Conceptos encubiertos: Sucesión, serie, límite, suma parcial

Mecanismo: Áreas de escaleras

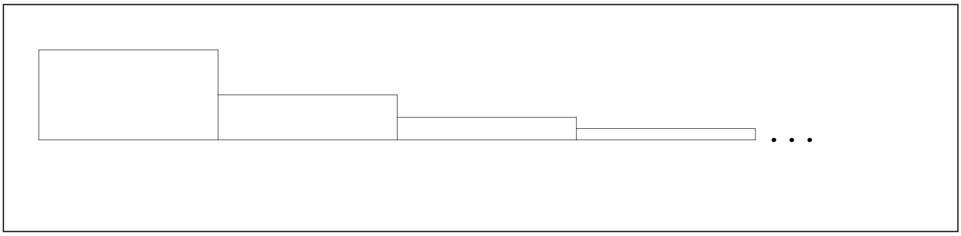
Objetivo: Comprender la convergencia de una serie de términos positivos, como una de las manifestaciones de la noción de límite, mediante la visualización geométrica de una escalera infinita.

De todas las posibles manifestaciones de la noción de límite, se ha elegido

[1] El mecanismo, hace referencia a la visualización matemática que se construye, a partir de la estrategia didáctica.

el concepto de convergencia de una serie de términos positivos, visualizada bidimensionalmente como el área de una superficie geométrica, asociando la noción de término de una serie al área de una superficie y la noción de suma de una serie al área total de la figura geométrica (si la tiene, en el sentido de la definición de convergencia), desarrollando el mecanismo de sumar áreas y comprobar si el área existe mediante escaleras.

La visualización elegida y el mecanismo utilizado están inspirados en un problema propuesto por Sherman y Barcellos (1996), que muestra la manera en la que "Oresme, alrededor del año 1360, sumó la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i}$ mediante el esquema de la escalera sin fin que se muestra a continuación:



En esta escalera cada escalón tiene 1 unidad de ancho y duplica la altura del escalón inmediatamente a su derecha. Al observar la escalera de dos formas se pretende demostrar que $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots$". Antes de proceder a analizar el problema y generalizar algunos resultados, se definirán algunos términos necesarios que permitirán crear un lenguaje adecuado para alcanzar el objetivo de esta investigación.

Se llamará **escalera** a la disposición de rectángulos de izquierda a derecha, de forma tal que cada rectángulo tenga igual base y esté uno contiguo al otro en forma horizontal. Si cada rectángulo tiene mayor altura que el inmediatamente anterior se denominará **escalera creciente**; si se compone de infinitos rectángulos, **escalera infinita creciente**. Si, por el contrario, cada rectángulo tiene menor altura que el inmediatamente anterior, se denominará **escalera decreciente**; si se compone de infinitos rectángulos, **escalera infinita decreciente**. Asimismo, se llamará **área de una escalera** a la suma de las áreas de los rectángulos que la conforman.

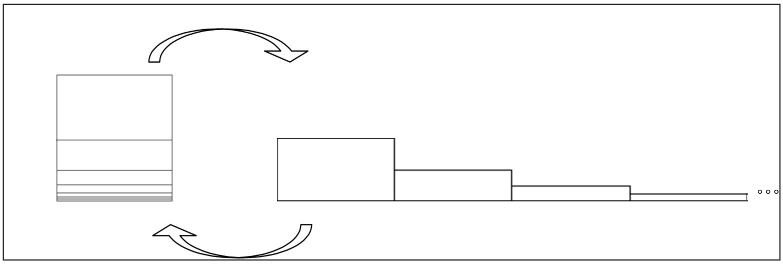
Un concepto implícito en el mecanismo es el de razón. La **razón de una escalera** será el cociente entre las áreas de un rectángulo y el inmediatamente anterior. Por ejemplo, se dirá que la escalera usada por Oresme en el problema anterior es de razón $\frac{1}{2}$.

También el término de escalera aparece en el libro *Proofs without words* de Roger B. Nelson, con las cuales se realizan muchas demostraciones para la convergencia o divergencia de series infinitas. En otros libros de cálculo como el de Leithold, Stewart o Edwards y Penney, las escaleras son usadas para realizar algunas demostraciones de series, aunque usan la expresión de disposición de rectángulos y no la de escalera.

Las escaleras tienen características interesantes, especialmente si se tiene en cuenta la forma de su construcción y la conexión que tienen con los conceptos de superficie y área. Entendiendo como superficie lo que se refiere a la forma y área lo que se refiere a la cantidad de superficie encerrada, ¿tendrán todas las escaleras infinitas una superficie finita?, ¿tendrán todas las escaleras infinitas área finita? Para el cálculo del área de una escalera (cuando el área exista) se requiere del diseño de un mecanismo para sumar infinitas cantidades, lo cual arrojará un resultado finito o no, dependiendo de la forma en que la escalera fue construida. En el proceso de comprensión que se lleva a cabo, el estudiante se moverá en el contexto de escaleras y no de series, haciendo mucho más inteligible y sencilla la obtención y la demostración de resultados, en lo que a series de términos positivos se refiere.

El ámbito histórico ha mostrado que el razonamiento acerca de procesos infinitos cuyo resultado puede ser finito, presenta grandes dificultades para su comprensión. Sin embargo, la representación geométrica bidimensional de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$, visualizada inicialmente como un rectángulo, dividido a su vez en varios rectángulos y luego como una escalera, le permitirá conjeturar al entrevistado, con mayor facilidad, que la suma de las áreas de infinitos rectángulos produce área finita.

La figura muestra dos disposiciones de rectángulos: un rectángulo dividido en varios rectángulos (y la posibilidad de que sea infinitamente divisible) y una escalera infinita decreciente. En ambas, cada rectángulo que la conforma tiene la mitad de la altura del inmediatamente anterior. El entrevistado no tendrá dificultad en afirmar que ambas disposiciones tienen área y podrá aseverar que es la misma. Si se le presenta la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ tendrá dificultades para afirmar que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$, aún más, si solo se le presenta la escalera infinita decreciente, tendrá dificultades para hacer la misma afirmación.



Estrategia n.° 2

Título: La estrategia del doble plano de Barrow

Concepto: La relación inversa entre cuadraturas y tangentes (TFC)[2]

Conceptos encubiertos: Pendiente, tangente, derivada, integral

Mecanismo: Doble semi-plano cartesiano simétrico

Objetivo: Comprender la relación inversa entre cuadraturas y tangentes, mediante la interpretación geométrica de las pendientes y ordenadas de una función en un punto, y el área bajo la curva de la función derivada en un intervalo, para dar paso a la formalización del TFC.

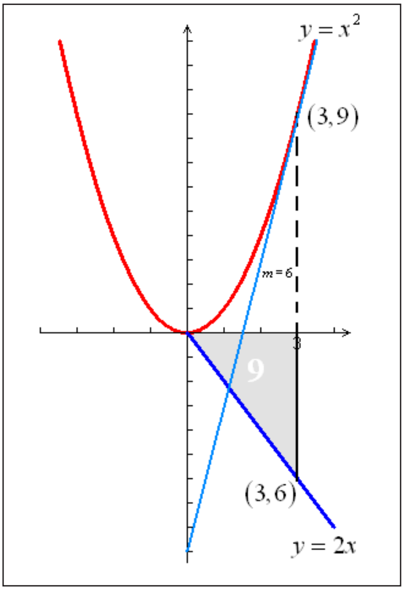
Es una estrategia visual-geométrica inspirada en los trabajos geométricos de Barrow para el TFC, la cual consiste en un *doble semiplano cartesiano simétrico,* esto es, dos semiplanos cartesianos con un eje x común y, encima y debajo de este, dos semi-ejes y positivos con un mismo origen, lo cual implica que ambos semi-ejes quedan sobre una misma recta y solo contengan a los cuadrantes I y II.

En el semiplano superior se grafican las funciones y en el semiplano inferior se grafican las respectivas derivadas.

Esta visualización exige el empleo de figuras simétricas con respecto a un eje (para graficar las derivadas en el semiplano inferior), sin embargo, facilita observar la relación entre las pendientes en la función y las ordenadas en la derivada, al igual que el área bajo la derivada y las ordenadas en la función (El TFC).

La visualización está restringida inicialmente solo para funciones positivas, dada la naturaleza de la construcción inicial expuesta por el ingenioso Isaac Barrow.

2 TFC abrevia Teorema Fundamental del Cálculo.

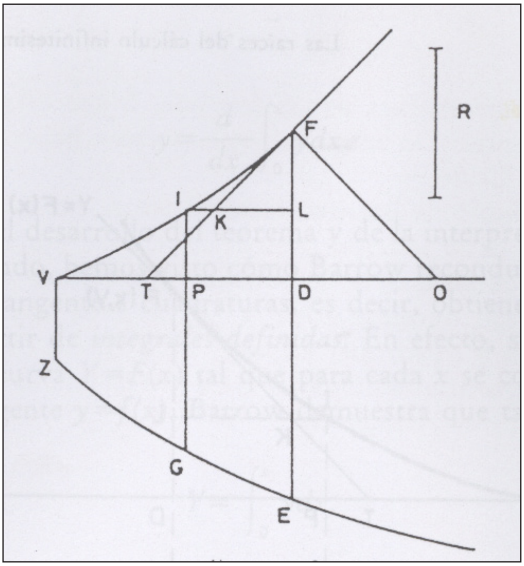


Desde el punto de vista histórico, después de los trabajos sobre cuadraturas y tangentes de Oresme en el Medioevo y los posteriores de Wallis, Fermat, Torricelli, entre otros, la situación era propicia para la unión de las técnicas acerca de *tangentes* y áreas. Sin lugar a dudas, fue Isaac Barrow (1630-1677), quien fuera profesor de Isaac Newton (1642-1727) en Cambridge, el matemático que con mayor precisión formuló el problema de la relación inversa entre cuadraturas y tangentes. Ya en su *Lectura I* enuncia el principio de Oresme y Galileo, y en su *Lectura X* enuncia y demuestra, con un razonamiento impecable, una relación importante entre cuadraturas y tangentes.

Con referencia a la figura de la página siguiente, Barrow describe (Edwards J. T., 1982):

Sea ZGE una curva cuyo eje es VD. Consideremos las ordenadas $(VZ, \quad PG, \quad DE)$ perpendiculares al eje y continuamente creciendo desde la coordenada inicial VZ; sea VIF una línea tal que si una línea recta EDF es trazada perpendicular al eje VD y cortando a las curvas en los puntos EIF, el rectángulo determinado por DF y una longitud dada R es igual al espacio interceptado $VDEZ$; sea un punto T en el eje VD tal que $DE : DF = R : DT$ y unimos (T con F). Entonces TF cortará a la curva (la cual es la tangente a curva[3]).

[3] La tangente *TF* era concebida como la tangente a una circunferencia y no en términos del



Tomemos un punto I en la curva VIF (primeros del lado de F hacia V) y, a través de él, tracemos IG paralelo a VZ e IL paralelo a VD, cortando las líneas dadas como se muestra en la misma Figura; entonces, $LF : LK = DF : DT = DE : R$, es decir, $RxLF = LKxDE$.

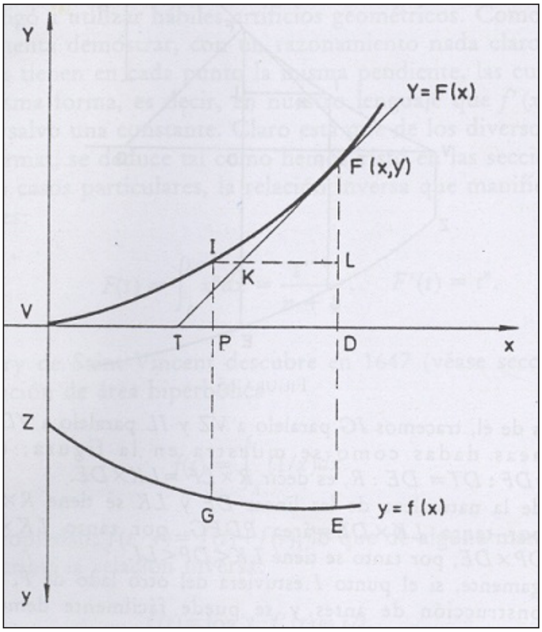
Pero de la naturaleza de las líneas DF y LK se tiene $RxLF = \acute{a}rea \quad PDEG$, por tanto $LKxDE = \acute{a}rea \quad PDEG$, por tanto $LKxDE = \acute{a}reaPDEG < DPxDE$, por tanto se tiene $LK < DP < LI$.

Análogamente, si el punto I estuviera del otro lado de F, se haría la misma construcción de antes y se puede fácilmente demostrar que $LK > DP > LI$.

De aquí se deduce que es bastante claro que toda la línea TKF permanece en o debajo de la curva $VIFI$.

Resultados análogos se obtienen si las ordenadas VZ, PG y DE decrecen continuamente; la misma conclusión se obtiene mediante un argumento similar; solo una particularidad ocurre, a saber: en este caso, al contrario que en el otro, la curva VIF es cóncava respecto al eje VD.

Cálculo Infinitesimal actual (no como concepto de aproximación local).



Corolario. Obsérvese que $DExDT = RxDF = \acute{a}rea \quad VDEZ$."

Veamos ciertas conclusiones fundamentales que podemos inferir del resultado de Barrow. Dada una curva $y = f(x)$, donde f es una función creciente y orientada hacia abajo, como lo muestra la siguiente figura, se construye una curva $Y = F(x)$ con la condición de que la ordenada genérica $Y = DF$ representa el área determinada por la curva $y = f(x)$ y las ordenadas $F(o) = VZ$ y $f(x) = DE$, es decir: $Y = \int_0^x ydx.$ [4]

Para construir la tangente a la curva $Y = F(x)$ en el punto $F(x,Y)$, Barrow, partiendo del punto $D = (x,o)$, elige sobre el eje x el punto T , tal que se tenga la relación $DT = \frac{Y}{y} = \frac{DF}{DE}$, y demuestra que la recta TF es la tangente. Ahora bien, como se tiene $\frac{DF}{DT} = DE = y$, el resultado es equivalente a $\frac{dY}{dx} = y$, es decir, $y = \frac{d}{dx}\int_0^x ydx.$ [5]

A través del desarrollo del teorema y de la interpretación que del mismo se ha dado, hemos visto cómo Barrow reconduce el problema inverso de la tangente a cuadraturas, es decir, obtiene *integrales indefinidas* a partir de

[4] Notación usada en la actualidad.

[5] Notación usada en la actualidad.

integrales definidas. En efecto, si se quiere determinar una curva $Y = F(x)$ tal que para cada x se conoce la dirección de la tangente $y = f(x)$, Barrow demuestra que tal curva es $Y = \int_0^x ydx$, ya que tomando el punto T de modo que $DT = \frac{Y}{y}$, TF es la tangente a la curva $y = f(x)$, que como se sabe es única. Lo que no resuelve Barrow es el problema de obtener *integrales definidas* a partir de *integrales indefinidas*, es decir, no resuelve cuadraturas por medio del teorema de inversión, a base de expresarlas en términos de antiderivadas, que es la aplicación esencial del teorema fundamental del cálculo.

Además, el enfoque de Barrow es estrictamente geométrico (Bobadilla, 2008) y solo asegura y prueba que la recta TF es tangente a la curva $Y = F(x)$ en el sentido clásico griego de *la línea recta que toca en un único punto a la curva.* De manera que Barrow, autoimponiéndose un estático lenguaje geométrico, aborta la visión clara y práctica de la interrelación entre los problemas de cuadraturas y tangentes, que en el ámbito cinemático tan claramente aparecían como inversos. Al no sustituir el ente geométrico tangente por el correspondiente ente analítico (derivada), Barrow cercena la posibilidad de generalización y algoritmización que encerraba su magnífico teorema. Barrow descubre un hecho fundamental que vincula las cuadraturas con las tangentes, pero no alcanza a calibrar la trascendental importancia que tiene.

Claro está que Barrow no había reducido a un algoritmo universalmente válido su método de tangentes, y es evidente que la importancia del carácter recíproco de la derivación y la integración queda puesta de manifiesto solo cuando se dispone de un método general para la obtención analítica de las derivadas o geométricamente para construir tangentes. De haber sido así, Barrow hubiera sido el descubridor del cálculo.

Pero fue finalmente Isaac Newton, quien advirtió el inmenso alcance de la relación inversa entre cuadraturas y tangentes. Cuando llegó a Cambridge en 1661, y durante los años 1665 y 1666, pasados en la granja de su familia para evitar la plaga, fue capaz de sustraerse del purismo geométrico euclidiano de su maestro, desplegando toda la instrumentalización analítica necesaria para reconvertir y desarrollar las ideas geométricas de Barrow, dando a luz un algoritmo automático para la resolución de los problemas de cuadraturas y tangentes: *el teorema fundamental del cálculo* (Stein S. , 1995).

Estrategia n.° 3

Título: La estrategia de la brocha

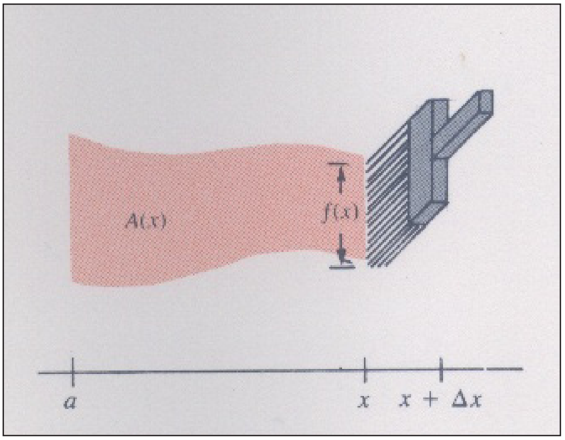
Concepto: El primer TFC

Conceptos encubiertos: Función acumulación, derivada, integral

Mecanismo: El teorema de la brocha

Objetivo: Comprender el aspecto geométrico de la derivada y la integral como operadores inversos.

Se destaca el "teorema de la brocha" como una estrategia visual-geométrica que permite establecer la relación que puede existir entre un área barrida y una longitud (valor de la función). Los textos que exponen esta estrategia son los de (Purcell & Varberg, 2007), (Stein S. , 1995) y (Edwards & D, 2008).



Al respecto, Stein señala:

El primer TFC debe tener sentido para cualquiera que haya pintado una pared con una brocha. Cuanto más ancha sea la brocha, mayor es la longitud del área que se puede cubrir. Supóngase que la brocha se mantiene como se muestra en la Figura y que se desplaza una distancia Δx . El área barrida es aproximadamente "el ancho de la brocha por Δx ". Sea $f(x)$ el ancho de la brocha (a medida que se presiona la brocha, $f(x)$ puede aumentar). Luego, $\Delta A \approx f(x)\Delta x$, o bien, $\frac{\Delta A}{\Delta x} \approx f(x)$. Y si $\Delta x \to 0$, se obtiene $\frac{dA(x)}{dx} = f(x)$.

Puesto que $A(x) = \int_a^x f(t)dt$, se tiene $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$, que es el Primer TFC (Judith Grabiner llama a esto el "teorema del limpiaparabrisas).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bachelard, G. (1938). *la formation de l'esprit scientifique.* Paris: Editions J.

Bobadilla, M. (2008). El teorema Fundamental del Cálculo: Una perspectiva histórica. *Unicauca CIENCIA , 12*, 63-79.

Boyer, C. (1949). *Histroy of the Calculus and its conceptual development.* New York: Dover.

Courant, R., & Jhon, F. (1974). *Introducción al cálculo y al análisis matemático.* México: Limusa.

De Guzmán, M. (2001). *El rincón de la pizarra: Ensayos de visualización en análisis matemático, elementos básicos del análisis.* Madrid: Pirámide.

Edwards, H., & D, P. (2008). *Cálculo con trascendentes tempranas* (7 ed.). México: Pearson, Prentice Hall.

Edwards, J. T. (1982). *The Historical Development of the Calculus.* New York.

Klein. (1927). *Matemática elemental desde un punto de vista superior* (Vol. I). Madrid: Biblioteca Matemática.

Londoño, R. (2011). *la relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de pirie y Kieren.* Tesis de doctorado, Medellín.

Londoño, R., & Jurado, F. (2005). Diseño de entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie, vía áreas de figuras planas. Medellín.

Nolla, R. (2001). Recuperado el Febrero de 2011, de http://www.xtec.es/sgfp/llicencies/200001/resums/molla.htm

Purcell, E., & Varberg, R. (2007). *Cálculo.* México: Pearson Education.

Stein, S. (1995). *Cálculo y geometría analítica* (5 ed., Vol. 1). Bogotá, Colombia: Mc Graw Hill Interamericana S.A.

Stein, S., & Barcellos, A. (1996). *Cálculo y geomtería analítica.* México: Mc Graw Hill.

Explorando la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático: el caso de la derivada y de los profesores de bachillerato en formación inicial

Walter Fernando Castro G.[*]

RESUMEN

La formación matemática y didáctica de los futuros profesores constituye un campo de investigación que reclama atención por parte de la comunidad de investigadores en matemática educativa y de las administraciones educativas. La principal razón es que el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas de los alumnos depende de manera esencial de la formación de sus profesores.

Una de las problemáticas que más ha interesado es la de determinar cuál es el conocimiento didáctico-matemático requerido para enseñar matemáticas. Las reflexiones y recomendaciones de Shulman (1986) y las investigaciones de Ball (2000), Ball, Lubienski y Mewborn (2001), Hill, Ball y Schilling (2008) suponen avances en la caracterización de los componentes del complejo de conocimientos que un profesor debería tener para desarrollar eficazmente su práctica y facilitar el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, como señala Godino (2009), los modelos de conocimiento matemático para la enseñanza, elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías demasiado globales, por lo que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva de las matemáticas. Además, si se quiere profundizar en la trama de conocimientos que el profesor requiere para enseñar matemáticas, es necesario centrarse en tópicos concretos, por ejemplo, el conocimiento requerido por el profesor de bachillerato para enseñar el objeto derivada (García, Azcárate & Moreno, 2005; Badillo, Azcárate & Font, 2011).

En esta conferencia se presentan algunos resultados obtenidos de la implementación de un cuestionario que, con base en el modelo para la evaluación y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático propuesto por Godino (2009), hemos diseñado con el fin de explorar, concretamente, la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de futuros profesores de bachilleratoo.

[*] Universidad de Antioquia. Direcciones electrónicas: wfcastro82@gmail.com, wcastro@ugr.es

Caracterización de elementos del desarrollo profesional del profesor de matemáticas de secundaria

Élgar Gualdrón[*]

RESUMEN

El estudio del desarrollo profesional del profesor de matemáticas de secundaria ha sido propuesto en diferentes agendas de investigación en encuentros de investigadores en educación matemática alrededor del mundo. Indiscutiblemente se le reconoce como un componente importante en la evolución favorable de la práctica del profesor. En nuestro caso concreto, hemos usado la noción de *trayectoria de desarrollo profesional* (involucrando constructos tales como: conocimiento profesional, práctica situada, reflexión sobre la práctica) como medio para analizar la práctica de un profesor de matemáticas de secundaria y así determinar una caracterización de su desarrollo profesional. La conferencia pretende mostrar el modelo usado en dicha caracterización y mostrar ejemplos del proceso llevado a cabo para tal fin. Uno de los resultados de nuestro estudio sugiere que la amplia experiencia profesional de un profesor no necesariamente implica que su desempeño profesional sea óptimo. Su práctica, a pesar de la amplia experiencia, está determinada por sus creencias y concepciones, que son, en últimas, las que determinan las condiciones propicias para que se dé un proceso de enseñanza y de aprendizaje con resultados favorables.

[*] Universidad de Pamplona. Dirección electrónica: elgargualdron@yahoo.es

Unidad cognitiva entre los procesos de argumentación y demostración en trigonometría

Jorge Fiallo[*]

RESUMEN

Con el objetivo de analizar la unidad o ruptura cognitiva como una herramienta que permita, entre otras cosas, identificar las dificultades y los avances que se presentan en los procesos de argumentación y de demostración en el contexto de aprendizaje de las razones trigonométricas en un sistema de geometría dinámica, presentamos algunos ejemplos del análisis de la existencia de unidad o ruptura cognitiva presente en la resolución de varios problemas de trigonometría. Analizamos, detallamos y explicamos cada uno de los elementos del sistema de referencia y de la estructura para proponer cinco casos de unidad o ruptura cognitiva de acuerdo con nuestra caracterización de los términos argumentación y demostración. Planteamos algunas hipótesis que surgen como nuevos aportes a la investigación del estudio de la unidad cognitiva y al proceso de demostración.

[*] Universidad Industrial de Santander. Direcciones electrónicas: edumat@ciencias.uis.edu.co, jfiallo@uis.edu.co

Desarrollo profesional de profesores de matemáticas y participación en comunidades de práctica

Sandra Evely Parada R.[*]

RESUMEN

En el XIII Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (ECME-13) presentaré algunos resultados de una investigación que tuvo como objetivos: i) Proponer un modelo teórico y metodológico para promover procesos de reflexión en comunidades de práctica de educadores matemáticos, como complemento o alternativa a su desarrollo profesional. ii) Analizar cómo la participación de profesores de matemáticas en comunidades de práctica que usan dicho modelo influencia el desarrollo de su pensamiento reflexivo, el cual se descompone en: i) pensamiento matemático escolar, ii) pensamiento pedagógico y didáctico del área, iii) pensamiento orquestal.

Con el modelo R-y-A de Parada (2011) se busca promover procesos de reflexión en los profesores sobre la actividad matemática que suscitan en sus aulas, actividad matemática entendida como matematización en términos de Treffers (1987). La reflexión puede facilitarse a través del uso de algunas estrategias o acciones que permitan identificar factores que llevan, o no, al desarrollo efectivo de una actividad matemática propuesta; por ejemplo, la planeación de clase, esquemas de los procesos matemáticos esperados y logrados, así como la revisión de vídeos de clase. Los procesos de reflexión a los que nos referimos se caracterizan a partir de las ideas de Dewey (1989) y de Schön (1992), y los hemos definido como: reflexión-para-la acción (antes), reflexión-en-la acción (durante) y reflexión-sobre-la acción (después).

[*] Universidad Industrial de Santander. Dirección electrónica: saevpa@hotmail.com

Elementos integradores en didáctica de las matemáticas

Pedro Vicente Esteban Duarte[*]

RESUMEN

En la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se conjugan múltiples aspectos, que deben ser tenidos en cuenta, para que se dé una apropiación adecuada, por parte de los estudiantes, de los conceptos expuestos en el aula de clase. De un lado, desde la didáctica de las matemáticas, con diversos marcos teóricos, se desarrollan experiencias de aprendizaje que buscan facilitar el acercamiento a los conceptos matemáticos a sectores más amplios de los círculos estudiantiles. Por otro lado, la utilización de la tecnología por sectores más amplios de la sociedad, ha llevado al diseño de software especializado en matemáticas, que permite la visualización de conceptos matemáticos. Este software puede ser ejecutado en diversos componentes, que van desde computadores de escritorio a teléfonos móviles.

Con diseños didácticos innovadores y ayudas tecnológicas al alcance de una amplia población estudiantil, se espera que los resultados académicos en matemáticas mejoren en el transcurso del tiempo. Pero esto contradice los resultados que se obtienen en las diferentes pruebas nacionales realizadas en los distintos niveles de escolaridad, en los que en el área de matemáticas los informes muestran resultados cada vez más bajos. Esta realidad debe movilizar a los entes gubernamentales encargados de las políticas educativas, a las instituciones y los profesores mismos a encontrar formas que permitan dar un salto cualitativo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Desde la didáctica de la matemática, se deben diseñar experiencias de aprendizaje que partan de la realidad en la que ocurre el aprendizaje, que tengan en cuenta las experiencias del docente, las necesidades e intereses de los estudiantes y que integren la tecnología como elemento de exploración y apropiación de los conceptos matemáticos. En la exposición se compartirá con los asistentes experiencias de trabajo de aula exitosas de integración entre didáctica de las matemáticas y tecnología.

* Universidad EAFIT. Direcciones electrónicas: pesteban@eafit.edu.co, pedrovicente@gmail.com

Mosaicos: donde el arte y la geometría se hacen uno

Horacio Arango Marin[*]

RESUMEN

Desde épocas ancestrales el hombre ha usado formas modulares que al aplicarles diversos movimientos en el plano (traslaciones, rotaciones, simetrías) constituyen manifestaciones artísticas de gran belleza, tanto estética como matemática. En la actualidad esta parte de las matemáticas dedicada al estudio de las transformaciones en el plano o en el espacio, tanto sobre formas modulares periódicas (grupos de transformaciones isométricas) como a-periódicas (grupos de Penrose), ha tenido un gran desarrollo en los últimos años dando notables impulsos a disciplinas como la arquitectura y el diseño. La conferencia mostrará un recorrido por ese mundo de las manifestaciones humanas, matemáticas y artísticas, que va desde el estudio de los grupos de transformaciones en el plano hasta los grupos de Penrose, mostrando no solo las formas matemáticas presentes, sino las formas de conexión del hombre con el mundo a través de las matemáticas

* Dirección electrónica: *harangom@une.net.co*

Investigar una aula de matemática

João Pedro da Ponte[*]

RESUMEN

Nesta conferência procuro mostrar que, em termos curriculares, as explorações e investigações matemáticas podem ser integradas no dia a dia da sala de aula de Matemática em vez de constituírem um trabalho periférico. Para isso, começo por analisar o que distingue as tarefas de exploração e investigação de outros tipos de tarefas matemáticas. De seguida, com base em episódios relativo à aprendizagem inicial dos números racionais no 5.º ano e à aprendizagem da linguagem algébrica no 7.º ano, procuro mostrar como tarefas deste tipo podem ser apresentadas aos alunos tendo em atenção a necessária interpretação, proporcionar momentos significativos de trabalho autónomo, e conduzir a discussões coletivas muito participadas. Deste modo, são tarefas que proporcionam um funcionamento da sala de aula com características inovadoras em relação ao ensino convencional baseado na exposição de conceitos e procedimentos, apresentação de exemplos e prática de exercícios, e com resultados muito mais positivos em termos de aprendizagem. Na parte final, analiso quais as implicações que este tipo de trabalho na sala de aula traz ao trabalho dos professores e as possíveis estratégias de formação a usar para preparar os professores para a realização desta prática letiva.

* Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Didática e prática de ensino para educar com a matemática

Manoel Oriosvaldo de Moura[*]

RESUMEN

Aprender a ensinar matemática é uma atividade do formar-se para educar com a matemática. Essa tese será defendida a partir de uma concepção histórico-cultural do desenvolvimento dos conceitos matemáticos, que são compreendidos como produtos e produtores das necessidades surgidas nas atividades humanas. Deste modo, a história do conceito é a história do desenvolvimento humano que se faz, também, pela apropriação da cultura matemática como modo específico de humanizar-se. Nessa perspectiva, aprender a ensinar é inerente aos processos humanos de se constituir como comunidade, no que se inclui a tarefa de propiciar a inclusão de novos sujeitos nessa comunidade. A Didática e a Prática de Ensino - como partes desse esforço humano para o aprimoramento dos processos de aprendizagem do homem - possuem um conhecimento que é, também, histórico e cultural, ao incluir o que fomos compreendendo sobre os processos de aprendizagem, as concepções de criança e seu modo de aprender. Nesse sentido, cada conceito existente em uma concepção sobre o educar constitui-se em instrumento que mune os sujeitos para apropriarem-se da cultura produzida pela humanidade sobre a ação de ensinar. É neste mesmo movimento que se inserem Prática de Ensino e Didática; como partes do desenvolvimento de uma comunidade que acredita ser sempre possível modificar as formas de fazer com que os seus membros tenham acesso a uma melhor maneira de se apropriarem de instrumentos simbólicos capazes de lhes proporcionar condições para se desenvolverem plenamente. Dizemos que aprender a ensinar matemática é a atividade de aprender a educar com matemática porque é no educar que fica evidente a intencionalidade da ação de ensinar. Essa intencionalidade, ao objetivar a formação dos sujeitos em sintonia com suas condições objetivas, requer planejamento, ação coordenada, modos de executá-la e a avaliá-la, qualidades essenciais para o modo permanente de humanizar-se.

Palavras-chave: Didática; Pratica de Ensino; Atividade de Ensino de Matemática; Educar com a Matemática.

[*] Faculdade de Educação – USP, Grupo de Estudos e Pesquisas sobe a Atividade Pedagógica - GEPAPe

Qué es una demostración matemática? (en qué matemáticas?)

Luis Moreno Armella[*]

RESUMEN

La demostración es una actividad básica del pensamiento matemático. Pero no es la única y posiblemente dentro de las metas escolares, no sea la más relevante, si por demostración entendemos lo que nos muestran los libros "rigurosos". Esta idea tradicional de demostración se basa implícita y/o explícitamente en una concepción de los objetos matemáticos que viene de muy lejos: de la epistemología platónica. Mostraremos cómo la noción de dominio de abstracción permite diseñar una especie de exocerebro matemático que arroja luz sobre un puente que puede tenderse entre dos universos confrontados: el universo rígido, atemporal y formal del conocimiento ideal; el otro, el universo orgánico, fluido e imperfecto del conocimiento humano. Este último es un universo donde la intuición, la emoción y la razón son inseparables. Allí, se abre, para los estudiantes, un espacio de entendimiento nuevo. Pretendemos sustanciar la tesis: La demostración (en la educación matemática) es cualquier actividad que aumente el grado de coherencia de los conocimientos de los estudiantes.

[*] CINVESTAV, México

Papel del análisis didáctico en el diseño de planes de formación de profesores de matemáticas

Pedro Gómez[*]
María J. González[**]

RESUMEN

Diversos programas de formación de profesores de matemáticas que se realizan en España y Colombia se basan en el modelo del análisis didáctico. El análisis didáctico es un procedimiento sistemático con el que se espera que los profesores en formación analicen un tema concreto de las matemáticas escolares, de tal forma que la información que surja de ese análisis les sea útil para diseñar una unidad didáctica, fundamentar y justificar dicho diseño, llevarlo a la práctica y evaluarlo. En este documento presentamos las principales ideas que fundamentan el diseño de planes de formación de profesores de matemáticas que se basan en ese modelo, y presentamos un ejemplo de un plan de ese tipo.

El análisis didáctico se ha venido utilizando desde hace varios años como fundamento para el diseño de planes de formación de profesores de matemáticas en España y Colombia. Remitimos al lector a las diversas descripciones y ejemplos que existen en la literatura sobre este procedimiento (p. ej., Gómez, 2007, 2012). En este documento, nos basamos en una posición acerca del aprendizaje del análisis didáctico para mostrar cómo ese procedimiento y esa visión de su aprendizaje permiten fundamentar planes de formación de profesores de matemáticas. El documento se divide en tres partes. En la primera, describimos nuestra posición sobre el aprendizaje del análisis didáctico y los organizadores del currículo. En la segunda, presentamos las principales ideas que guían el diseño de los planes de formación basados en ese modelo. En la tercera, describimos las principales características de un plan de formación de profesores de matemáticas de secundaria que sigue esas ideas.

[*] Universidad de los Andes. Dirección electrónica: argeifontes@gmail.com
[**] Universidad de Cantabria. Dirección electrónica:gonzalelm@unican.es

APRENDIZAJE DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO

El análisis didáctico es un procedimiento cíclico que se organiza en cuatro análisis: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación. Cada análisis está compuesto de varios organizadores del currículo. Un organizador del currículo (a) es una noción que forma parte del conocimiento disciplinar de la educación matemática y (b) permite analizar un tema de las matemáticas escolares con el propósito de producir información sobre el tema que sea útil en el diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas (Rico, 1997, pp. 45-46).

El análisis didáctico permite establecer el conocimiento didáctico que se espera desarrollar en los planes de formación. Es el conocimiento necesario para realizar un ciclo del análisis didáctico. El conocimiento didáctico, además de involucrar el conocimiento teórico de los organizadores del currículo, también implica el conocimiento técnico necesario para analizar un tema con los organizadores del currículo y el conocimiento práctico que permite usar la información que surge de esos análisis con un propósito didáctico. Por consiguiente, el conocimiento didáctico no es un conocimiento que se pueda aprender con base en un esquema de transmisión y recepción de información. Por estas razones, asumimos una posición sociocultural del aprendizaje (Gómez & Rico, 2007) en virtud de la cual supondremos, de aquí en adelante, que los profesores aprenden cuando (a) trabajan en grupo, sobre un tema matemático concreto; (b) negocian significados y llegan a acuerdos para presentar el resultado de su trabajo a los compañeros periódicamente; (c) interpretan y reaccionan a los comentarios de los formadores; y (d) comparan su trabajo con el de los demás grupos, negocian significados con ellos, y comentan y critican esos trabajos.

Nosotros esperamos que, con el propósito de desarrollar su conocimiento didáctico y en relación con un tema de las matemáticas escolares para el que diseñarán una unidad didáctica, los profesores en formación sean capaces de (a) analizar el tema con cada organizador del currículo a efectos de producir información sobre el tema que sea útil para otros análisis o para el diseño, implementación y evaluación de la unidad didáctica; (b) usar la información producida por otros organizadores del currículo en nuevos análisis o en el diseño de la unidad didáctica; y (c) organizar y relacionar la información recogida para proponer un diseño fundamentado y justificado de la unidad didáctica, y para ejecutar los protocolos de implementación y evaluación previstos. Estos aspectos establecen tres tipos de conocimiento que un profesor en formación puede desarrollar en relación con un organizador del currículo:

(a) conocer alguna descripción teórica del organizador del currículo de tal forma que, por ejemplo, sea capaz de distinguir instancias de esa noción con respecto a un tema de las matemáticas escolares; (b) conocer las técnicas necesarias para usar el organizador del currículo como herramienta de análisis de un tema de las matemáticas escolares y producir información relevante sobre el tema; y (c) conocer las técnicas necesarias para usar la información obtenida sobre el tema para tomar decisiones a la hora de analizarlo con otro organizador del currículo o para el diseño de la unidad didáctica. Llamamos a estos tres tipos de conocimiento *significado*, *uso técnico* y *uso práctico* de un organizador del currículo (Gómez & González, 2009; González & Gómez, en revisión). Corresponden, dentro del contexto que nos ocupa, a las tres categorías aristotélicas —*episteme*, *techne* y *frónesis*— (Aristóteles, 1984), que han sido adoptadas y adaptadas por diversos autores para referirse al conocimiento del profesor y para explorar la dualidad entre la teoría y la práctica en la formación de profesores (Back, 2002; Saugstad, 2005). Describimos a continuación estos tipos de conocimiento del profesor en formación.

Significado. El significado de un organizador del currículo es específico a un programa de formación. Se refiere al conocimiento disciplinar relacionado con esa noción que los formadores de ese programa han seleccionado —porque lo consideran útil para la planificación— como opción dentro de aquellos disponibles en la literatura. El significado de un organizador del currículo se presenta en términos de sus propiedades y sus relaciones con otros conceptos. Estas ideas clave caracterizan el significado del organizador del currículo como conocimiento teórico y lo diferencian de los significados que el término puede tener por fuera de la educación matemática o en el lenguaje común.

Uso técnico. El análisis de un tema con un organizador del currículo requiere que se ponga en juego su significado. En general, este proceso implica instrumentalizar las ideas clave que lo caracterizan, configurando técnicas que permitan producir información sobre el tema. Estas técnicas deben entonces satisfacer dos condiciones: (a) estar basadas en el significado del organizador del currículo y (b) dar lugar a la producción de información sobre el tema analizado que pueda ser usada en la planificación. Entre la variedad de técnicas que satisfacen estas condiciones, los formadores escogen y proponen aquellas que consideran más eficaces y eficientes para el análisis del tema. Las técnicas que caracterizan el uso técnico de un organizador del currículo dependen del organizador del currículo y del tema. Es decir, el uso técnico es un conocimiento orientado hacia la producción, variable y dependiente del contexto.

Uso práctico. La información que surge del uso técnico de un organizador del currículo ha de ser útil en la planificación. Llamamos uso práctico de un organizador del currículo al conjunto de técnicas que satisfacen las siguientes condiciones: (a) usan la información que surge del uso técnico y (b) permiten tomar decisiones acerca de la planificación. Estas decisiones tienen lugar, ya sea cuando se analiza el tema con otros organizadores del currículo, o cuando se analizan y seleccionan tareas para la planificación. Entre la variedad de técnicas que satisfacen estas condiciones, los formadores escogen y proponen aquellas que consideran más eficaces y eficientes para el proceso de planificación. Como el uso técnico, el uso práctico es un conocimiento de tipo práctico. En este caso está orientado a la acción: se trata de tomar decisiones para la planificación con base en la información que surge del uso técnico.

Se podría pensar que los profesores en formación deben primero desarrollar el significado del organizador del currículo, para después ponerlo en juego en el análisis del tema y utilizar la información que surge en otros análisis. No obstante, las indagaciones preliminares que hemos hecho nos muestran que este proceso "canónico" sucede rara vez en la práctica (Gómez, 2007; González & Gómez, 2008, en revisión). El proceso dinámico en el que los profesores en formación desarrollan de una manera simultánea e interdependiente su significado, uso técnico y uso práctico se encuentra en la base de algunas de las pautas para el diseño de planes de formación de profesores de matemáticas que abordamos a continuación.

ENSEÑAR ANÁLISIS DIDÁCTICO. DISEÑO DE PROGRAMAS

En este apartado, establecemos algunas ideas que pueden guiar el diseño de programas formación, basados en el modelo del análisis didáctico. En el siguiente apartado, describiremos cómo hemos puesto en práctica estas ideas en el diseño de un programa particular de formación. Abordamos la problemática del diseño de programas atendiendo a las dimensiones del currículo: expectativas de aprendizaje, contenidos, metodología y evaluación.

EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE

Las expectativas de aprendizaje tienen en cuenta que el conocimiento didáctico es una amalgama de conocimiento teórico, técnico y práctico. Esta característica del conocimiento didáctico, como expectativa de aprendizaje, orienta el contenido, la metodología y la evaluación de los programas.

CONTENIDO

La estructura del análisis didáctico sugiere una forma natural de organizar el contenido de los programas de formación. Esta es la función principal del análisis didáctico en el diseño de programas de formación que describimos a continuación.

Una vez que se ha realizado la contextualización, los contenidos del programa siguen, de manera secuencial, la lógica de los cuatro análisis del análisis didáctico: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación. Esta lógica se basa en la idea de que, dentro de este orden, la realización de uno de los análisis requiere de la información que surge de los análisis previos (Gómez, 2002). En el interior de cada análisis, el contenido se organiza de acuerdo con los organizadores del currículo que lo configuran.

Los formadores encargados del diseño del programa deben, de las posibilidades disponibles en la literatura, escoger una opción para el significado de cada organizador del currículo. Ese será el significado de la noción que se espera que los profesores en formación desarrollen en el plan de formación. Los formadores deberán basarse en las ideas clave que caracterizan ese significado para diseñar y seleccionar las técnicas que propondrán dentro del plan de formación para el uso técnico y el uso práctico de cada organizador del currículo.

METODOLOGÍA

Consideramos que los profesores en formación aprenden

1. al poner en práctica los organizadores del currículo para analizar un tema matemático concreto;
2. al trabajar a lo largo de todo el programa sobre un mismo tema de las matemáticas escolares;
3. al trabajar en grupo y tener que llegar a acuerdos, con motivo de la obligación de presentar los resultados de su trabajo a sus compañeros;
4. al tener que contribuir individualmente al trabajo del grupo;
5. al reaccionar sistemática y periódicamente a los comentarios de formadores a los borradores y las versiones finales de sus trabajos;
6. al observar el trabajo de otros grupos sobre temas matemáticos diferentes, pero usando el mismo organizador del currículo;

7 al tener que comentar y criticar el trabajo de otros grupos; y

8 al tener que presentar un trabajo final que recoja la experiencia global e identifique sus fortalezas y debilidades, con el propósito de mejorarla.

Nuestra experiencia y algunas de las investigaciones que hemos realizado (Gómez, 2007; Gómez & Restrepo, 2010) muestran que estas pautas metodológicas promueven el interés y el compromiso de los profesores en formación y los grupos por el trabajo que deben realizar y contribuyen al desarrollo de su conocimiento didáctico.

EVALUACIÓN

Nos centramos en la evaluación formativa de los programas de formación. Como hemos resaltado en el apartado anterior, los estudiantes y los grupos aprenden al abordar tareas profesionales que involucran los organizadores del currículo y al interactuar con compañeros, y formadores en la realización de esas tareas. La interacción con formadores configura entonces una parte importante de los procesos de evaluación. Esta interacción tiene lugar usualmente en cinco ámbitos del diseño metodológico del programa:

1. En clase, cuando el formador introduce el organizador del currículo, y los estudiantes y los grupos realizan ejercicios relacionados con su tema u otro tema.

9 Durante el tiempo en el que los grupos trabajan produciendo borradores o versiones finales del análisis de su tema con un organizador del currículo.

10 En las reacciones formales de los formadores a los borradores y versiones finales del trabajo de los grupos.

11 En la discusión que tiene lugar cuando los grupos presentan su trabajo a los demás grupos.

12 En la producción y revisión del documento final.

En todos estos ámbitos tiene lugar el mismo proceso: los grupos tienen una tarea que deben realizar y para la que deben presentar un resultado; los grupos producen propuestas de solución a la tarea, y los formadores estudian estas propuestas y reaccionan a ellas. La actuación de los formadores es naturalmente variada en forma y contenido. Los formadores pueden constatar cuestiones que consideran relevantes del trabajo de los grupos; sugerir cambios o estrategias para mejorar el trabajo; complementar o aclarar información; o valorar el trabajo de los grupos (Arias & Gómez, 2011). No obstante, esta actuación se concreta en un propósito central: aprovechar la tarea para contribuir al aprendizaje de los profesores en formación a través de promover el desarrollo del significado, el uso técnico y el uso práctico de los organizadores del currículo.

MAD. EJEMPLO DEL DISEÑO DE UN PROGRAMA

Hemos puesto en práctica estas ideas para el diseño de un programa de formación permanente de profesores de matemáticas de secundaria. Describimos en este apartado sus características principales. En Gómez et al. (2010) y Gómez & Restrepo (2010) se encuentran descripciones más detalladas de este programa.

MAD (Maestría en Análisis Didáctico) es un programa de maestría de profundización, en el contexto de la maestría en educación de la Universidad de los Andes (Bogotá, Colombia). En él participan formadores de la Universidad de los Andes y de las universidades españolas de Almería, Cantabria y Granada. Está enfocado a profesores de matemáticas de secundaria en ejercicio, tiene una duración de dos años y centra su atención en la autonomía que los profesores colombianos tienen para diseñar y desarrollar el currículo (Gómez & Restrepo, 2011; Restrepo & Gómez, 2011).

OBJETIVOS

Los objetivos del programa siguen las pautas presentadas en el apartado anterior. El programa pretende contribuir al desarrollo del conocimiento didáctico de los profesores en formación, al proporcionarles oportunidades para que, al realizar un ciclo de análisis didáctico, puedan

- avanzar en la constatación y la comprensión de la complejidad inherente a las matemáticas escolares,
- identificar y organizar los múltiples significados del tema,
- hacer una previsión de las actuaciones de los escolares al abordar tareas,
- diseñar una unidad didáctica,
- diseñar los instrumentos de observación que permitan evaluar el aprendizaje y la enseñanza,
- implementar el diseño curricular propuesto en su centro,
- evaluar la relevancia y eficacia de la planificación realizada y
- producir un informe sobre la experiencia.

CONTENIDO

El programa consta de ocho módulos distribuidos en cuatro semestres, cuyo contenido se describe en la tabla 1.

Tabla 1
Contenido del Programa

Módulo	*Contenido*
Semestre 1	
1. Currículo	Introducción al programa Introducción al análisis didáctico La noción de currículo en matemáticas El currículo de las matemáticas de secundaria en Colombia y España Realidad curricular del profesor de matemáticas en Colombia
2. Análisis de contenido	La noción de contenido en las matemáticas escolares Estructura conceptual Sistemas de representación Fenomenología
Semestre 2	
3. Análisis cognitivo	Expectativas de aprendizaje (competencias, estándares, objetivos, capacidades) Limitaciones de aprendizaje (errores y dificultades) Hipótesis de aprendizaje (caminos de aprendizaje)
4. Análisis de instrucción	Noción de tarea en matemáticas: diseño, análisis y selección Agrupamiento, organización e interacción Materiales y recursos, resolución de problemas Secuenciación de tareas: diseño, análisis y selección
Semestre 3	
5. Análisis de actuación	Evaluación para el aprendizaje Diseño de instrumentos para la observación del aprendizaje y la enseñanza Secuencia de evaluación Diseño de una unidad didáctica Puesta en práctica de la planificación
6. Análisis de datos	Diseño de la evaluación de la experiencia en el aula Instrumentos y procedimientos para la recolección y codificación de la información Instrumentos y procedimientos para el análisis de datos sobre el aprendizaje y la enseñanza

Tabla 1 Contenido del Programa	
Módulo	*Contenido*
Semestre 4	
7. Evaluación de la planificación	Resultados del análisis de la puesta en práctica Revisión de la planificación Balance estratégico de los resultados
8. Informe	Producción del informe Presentación del trabajo final Perspectivas Conclusiones

METODOLOGÍA

La metodología de MAD sigue las directrices que presentamos en el apartado anterior. Como se describe en la tabla 1, el programa tiene una duración de cuatro semestres. En cada semestre se cursan dos módulos consecutivos y cada módulo tiene una duración de nueve semanas. El contenido de cada módulo se refiere, ya sea a un análisis o aspecto del análisis didáctico, o al análisis de la implementación de la unidad didáctica.

Los profesores en formación se organizan en grupos de 4 o 5 personas. Cada grupo trabaja en un tema matemático concreto[1]. Cada grupo tiene asignado un tutor que lo acompaña a lo largo de todo el programa. Su función es comentar el trabajo del grupo guiándolo en cada una de las actividades. Los grupos reciben también el apoyo permanente del coordinador local quien está a cargo de la gestión del programa.

Los temas se seleccionan en función de las asignaturas que los profesores en formación esperan dictar en el segundo año, con el fin de llevar a la práctica su propuesta de diseño curricular. Cada grupo realiza un ciclo de análisis didáctico sobre su tema a lo largo de los dos años del programa. Al final de los primeros cinco módulos, los grupos producen un diseño de la unidad didáctica. Los tres últimos módulos se centran en la implementación de la unidad didáctica, la recolección y análisis de la información con motivo de esta implementación y la producción del informe de la experiencia global.

En la primera semana de cada módulo, con motivo de la visita del formador español encargado del mismo, los estudiantes tienen clases presenciales todos

[1] En la promoción 2010-2011, los temas fueron números enteros, noción de variable, sistemas de ecuaciones lineales y funciones trigonométricas.

los días. En estas sesiones, el formador presenta las ideas clave el módulo, y establece las actividades que los grupos deberán realizar en el resto del módulo. Durante las siguientes ocho semanas, los estudiantes se reúnen en la Universidad de los Andes, viernes en la tarde y sábado en la mañana.

Cada módulo se configura alrededor de cuatro actividades en las que los grupos interactúan con formadores y tutores en la realización de su trabajo. El trabajo de los estudiantes y los grupos en las dos semanas de una actividad se organiza como se muestra en la tabla 2. Al final de la sesión del sábado de la semana anterior, los grupos organizan su trabajo para la actividad. Del lunes al jueves de la primera semana, los miembros de cada grupo trabajan individualmente e interactúan virtualmente. A cada estudiante se le ha asignado un grupo, que trabaja sobre un tema matemático diferente al suyo, al cual debe reaccionar sistemática y periódicamente al observar su trabajo final. Al comienzo de la sesión del viernes de la primera semana, cada estudiante introduce en un foro virtual sus comentarios y críticas a la presentación de la actividad anterior del grupo que le fue asignado. Durante el resto de esta sesión y la mayor parte de la sesión del sábado, los grupos preparan su borrador de la actividad, que envían a su tutor y al formador encargado del módulo. Al comienzo de la semana siguiente, cada grupo recibe los comentarios de su tutor al borrador enviado. Los estudiantes trabajan individualmente de lunes a jueves a partir de estos comentarios y el viernes se reúnen para preparar su presentación. El sábado cada grupo hace una presentación de diez minutos a todos sus compañeros y al coordinador local. Los formadores españoles pueden asistir virtualmente a estas presentaciones o ver posteriormente el video de las mismas.

<table>
<tr><td colspan="7">Tabla 2
Dos semanas de una actividad</td></tr>
<tr><td>Sem. anterior</td><td colspan="3">Semana 1</td><td colspan="3">Semana 2</td></tr>
<tr><td>sábado</td><td>lunes a jueves</td><td>viernes</td><td>sábado</td><td>lunes a jueves</td><td>viernes</td><td>sábado</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td rowspan="4">Trabajo individual</td><td rowspan="2">Envío comentario individual en foro actividad i-1</td><td rowspan="3">Trabajo en grupo</td><td rowspan="4">Trabajo individual</td><td rowspan="4">Trabajo en grupo</td><td>Envío actividad i a tutor y formador</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Presentación y discusión</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Trabajo en grupo</td></tr>
<tr><td>Organización trabajo actividad i</td><td>Envío borrador a tutor</td><td>Organización trabajo actividad i+1</td></tr>
</table>

EVALUACIÓN

El tutor produce un documento con comentarios al borrador de su grupo en cada una de las actividades. El grupo se basa en estos comentarios para mejorar su presentación. Adicionalmente, el tutor produce, para cada actividad, un comentario de evaluación del borrador y la presentación de su grupo. Cada grupo recibe, al final de la actividad, estos comentarios, junto con los comentarios del coordinador local, y los comentarios y la nota asignada por el formador encargado del módulo. Este documento y la interacción entre el tutor y el grupo constituyen la base de la evaluación formativa dentro del programa.

La evaluación sumativa de los grupos en cada actividad tiene en cuenta los siguientes aspectos:

- borrador de la actividad,
- documento final sobre la actividad y
- presentación de la actividad al grupo de clase y los formadores.

La evaluación individual tiene en cuenta la evaluación del grupo para las cuatro actividades del módulo, junto con los comentarios individuales del estudiante al trabajo del grupo que tiene asignado para cada una de las actividades.

ANÁLISIS DIDÁCTICO EN LA PRÁCTICA: LOS TRABAJOS DE LOS GRUPOS

El producto del trabajo de los grupos a lo largo de los dos años del programa es un informe final sobre el diseño, implementación y evaluación de la unidad didáctica. Estos documentos son ejemplos del análisis didáctico en la práctica. Presentan, de manera detallada, un ciclo completo del procedimiento, incluyendo la implementación y la evaluación del diseño curricular. A manera de evaluación del programa, a continuación describimos las principales características de estos documentos[2].

Los documentos comparten una estructura similar compuesta de tres partes. En la primera parte, se fundamenta, describe y justifica el diseño de la unidad didáctica. Para ello, los grupos atienden a las características curriculares, socioeconómicas y académicas del contexto institucional en el que prevén que van a implementar la unidad didáctica; realizan el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis de actuación de su tema; con base en la información que surge de esos análisis proponen el diseño de su unidad didáctica; y justifican ese diseño mostrando, de manera sistemática, que el diseño se adapta a los contextos previamente establecidos y que la secuencia de tareas propuesta puede contribuir eficientemente al logro de las expectativas de aprendizaje previstas. En la segunda parte, los grupos describen la implementación de la unidad didáctica, indicando aquellas modificaciones que, sobre la marcha, realizaron al diseño original. En la tercera parte, los grupos evalúan el diseño e implementación de la unidad didáctica y, con base en esa evaluación, proponen un nuevo diseño. En la figura 1 describimos este proceso.

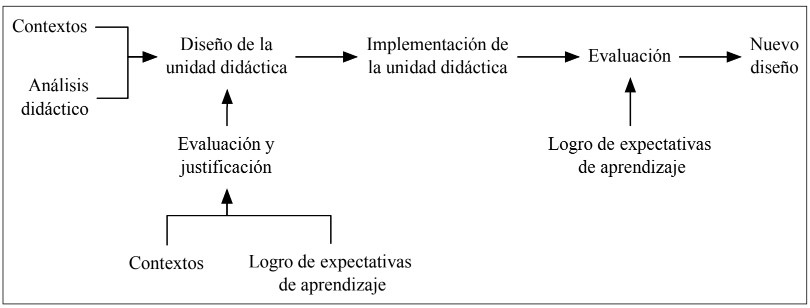


Figura 1. Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas

[2] Los documentos forman parte de una publicación que se encuentra disponible en Internet (Arenas, Becerra, Morales, Urrutia y Gómez, 2012; Becerra, Buitrago, Calderón, Gómez, Cañadas y Gómez, 2012; Bernal, Castro, Pinzón, Torres y Romero, 2012; Cifuentes, Dimaté, Rincón, Velásquez, Villegas y Flores, 2012; Mora, Nieto, Polanía, Romero y González, 2012; Serrano, Moreno, Santoyo, Hernández, Gutiérrez y Lupiáñez, 2012).

Aunque la evaluación del diseño y la implementación de la unidad didáctica implican diversos criterios y procedimientos, en la figura 1 hemos destacado el énfasis que se aprecia en los trabajos en relación con las expectativas de aprendizaje. Este énfasis sigue la propuesta de John (2006) en la que "el núcleo [de la planificación] está fijado por los propósitos y objetivos del plan" (p. 491). Los grupos utilizaron los caminos de aprendizaje para establecer en qué medida el diseño de la unidad didáctica atendía a los objetivos de aprendizaje que habían establecido (Suavita, 2012). Para ello, se basaron en la información que recogieron en el análisis de contenido e identificaron las capacidades que caracterizaban los objetivos, junto con los errores en los que los escolares podían incurrir y las dificultades que daban lugar a esos errores. En el análisis de instrucción, analizaron las tareas con base en estos elementos, pudiendo identificar sus cualidades y deficiencias, a efectos de mejorarlas. Y en el análisis de actuación, se basaron en estas ideas para diseñar los instrumentos con los que iban a recoger y analizar la información que surgiera de la implementación. La evaluación de la implementación se fundamentó en la comparación entre lo que los grupos previeron en su diseño (los caminos de aprendizaje previstos) y aquello que constataron a partir de la información que recogieron y analizaron en la práctica.

Algunas de las tareas que se encuentran en las propuestas de los grupos son innovadoras. Otras lo son menos, en el sentido de que son adaptaciones de tareas que se encuentran en los libros de texto o en Internet. No obstante, los trabajos de los seis grupos son innovadores en otro sentido más importante. Sus propuestas no son sencillamente el fruto de la intuición o de la experiencia no justificada. Estos documentos son el fruto de un trabajo sistemático en el que los grupos analizaron en profundidad su tema, se basaron en esa información para fundamentar, diseñar y justificar su unidad didáctica, y recogieron y analizaron la información que surgió de la implementación para evaluarla y mejorarla. El carácter innovador de estas propuestas se encuentra en mostrar cómo, en la práctica, el análisis didáctico puede fundamentar un conocimiento teórico, técnico y práctico que le permite al profesor en ejercicio abordar su práctica docente de manera eficaz y eficiente.

DISCUSIÓN

En este capítulo nos propusimos abordar la problemática del diseño de programas de formación de profesores de matemáticas basados en el modelo del análisis didáctico. Este tipo de reflexión es relevante en la coyuntura actual en España, cuando se están diseñando e implementando los nuevos grados y másteres de profesorado. También es relevante en países latinoamericanos como Colombia en los que las políticas de autonomía curricular revierten en el profesor la mayor parte de las responsabilidades de diseño y desarrollo curricular. Abordamos esta problemática con base en dos fundamentos: una reflexión sobre las principales características del análisis didáctico en el contexto de la formación de profesores y una conceptualización parcial de los procesos de aprendizaje que tienen lugar en programas de formación basados en el modelo del análisis didáctico. En la reflexión sobre el análisis didáctico profundizamos en la caracterización de la noción de organizador del currículo. Esto nos permitió establecer los tres tipos de conocimiento que se espera que los profesores en formación desarrollen en los planes de formación. Esta conceptualización nos llevó a destacar el papel de las técnicas del uso técnico y el uso práctico en la enseñanza y a establecer el conocimiento didáctico como amalgama de conocimiento teórico, técnico y práctico. Con base en estas ideas y en una posición socio-cultural del aprendizaje, propusimos unas pautas para el diseño de planes de formación, que ejemplificamos con un programa específico. En este último apartado enumeramos algunas de las múltiples cuestiones que se encuentran abiertas en relación con el análisis didáctico como fundamento para el diseño e implementación de programas de formación de profesores de matemáticas.

Se han realizado diversos estudios sobre el aprendizaje de los profesores en formación en programas basados en el análisis didáctico (e.g., Bedoya, 2002; Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009; Ortíz, 2000). Algunos de ellos se han aproximado, con diferentes interpretaciones, al aprendizaje desde la perspectiva de los tres tipos de conocimiento de un organizador del currículo (Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009). También se han propuesto esquemas metodológicos para establecer la evolución del conocimiento didáctico (Gómez, 2007; Gómez & Rico, 2004) y se han detectado algunas de las dificultades de los profesores en formación en su proceso de aprendizaje de los organizadores del currículo. No obstante, estos estudios se han centrado sobre todo en el desarrollo del significado de los organizadores del currículo por parte de los profesores en formación y no han profundizado, por ahora, en la problemática del aprendizaje de las técnicas del uso técnico y el uso práctico. Esta es una cuestión abierta que tiene que ver tanto con el aprendizaje, como con la enseñanza del análisis didáctico que estamos comenzando a abordar (Gómez y Cañadas, 2011; Polo, González, Gómez y Restrepo, 2011; Suavita, 2012).

La enseñanza de las técnicas del uso técnico y el uso práctico requiere, como primer paso, que se tengan disponibles esas técnicas para su inclusión en los programas de formación. Este es un trabajo que se encuentra en proceso. Se inició con el ejemplo clásico de los listados para la estructura conceptual (Rico, Marín, Lupiáñez & Gómez, 2008) y se ha venido desarrollando en MAD. Pero, como lo hemos mencionado anteriormente, no se debe pensar que existe un conjunto ideal de técnicas para cada organizador del currículo. Cada programa de formación propone las técnicas que considera relevantes y eficientes dentro de su contexto y de acuerdo, tanto con el significado seleccionado para cada organizador del currículo, como con las visiones de los formadores acerca del aprendizaje de ese organizador del currículo. Por lo tanto, el diseño de las técnicas para el uso técnico y el uso práctico es un área de trabajo abierta en el diseño de los programas de formación.

La enseñanza de las técnicas también genera una variedad de preguntas que se relacionan con la forma en que los profesores en formación pueden usarlas y aprenderlas. En la figura 2 presentamos las opciones que hemos identificado en relación con las técnicas del uso técnico que los profesores en formación pueden poner en juego a la hora de analizar un tema de las matemáticas escolares (González & Gómez, en revisión).

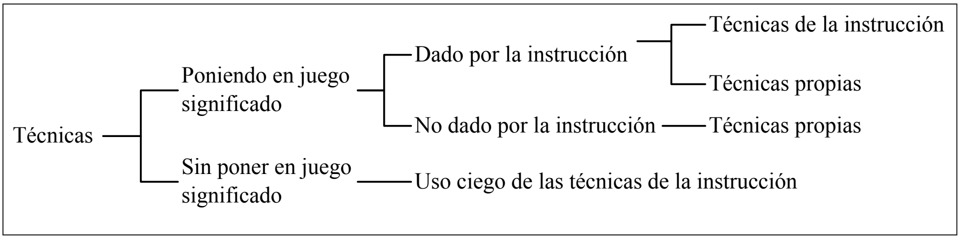


Figura 2. Puesta en juego de técnicas del uso técnico

Las técnicas que los profesores en formación utilizan en sus análisis pueden o no poner en juego el significado del organizador del currículo que han desarrollado hasta ese momento. Cuando ese significado corresponde al significado propuesto por la instrucción, ellos pueden usar las técnicas propuestas por la instrucción, o desarrollar técnicas propias acordes con ese significado. En caso de que pongan en juego aspectos del significado del organizador del currículo que no correspondan con lo propuesto por la instrucción, entonces ellos crean técnicas propias. Por el otro lado, los profesores en formación pueden sencillamente seguir las pautas dadas en la actividad y usar ciegamente las técnicas dadas por la instrucción. En este caso, las técnicas se deslindan del significado del organizador del currículo. Existe por consiguiente el riesgo de que el trabajo con las técnicas no contribuya al desarrollo del significado. El diseño de los programas de formación debe tener en cuenta estos riesgos.

Cuando nos centramos en las técnicas del uso práctico, la problemática es aún más compleja y estamos apenas comenzando a explorarla (Polo et al., 2011). Tiene que ver con el uso coordinado de la información que surge del uso técnico de los organizadores del currículo en otros análisis o en el diseño de la unidad didáctica. En este caso las técnicas son variadas y dependen de la tarea profesional que se esté realizando. La caracterización de estas técnicas, de los procesos de justificación del diseño de la unidad didáctica con base en la información que surge de los organizadores del currículo y el estudio de su aprendizaje es un trabajo que está por realizarse.

Estamos realizando y tenemos previsto realizar diversos proyectos de investigación que buscan evaluar el impacto de MAD. Por ejemplo, en una tesis de maestría de la Universidad de Granada, se caracterizó la actuación de los tutores al comentar los borradores de sus grupos (Arias & Gómez, 2011). Hemos realizado dos proyectos que exploran y caracterizan el aprendizaje de los grupos con respecto a organizadores del currículo específicos —fenomenología (Gómez & Cañadas, 2011) y caminos de aprendizaje (Suavita, 2012)— y estamos realizando otro sobre errores y dificultades. Hemos venido analizando el impacto del programa en los procesos curriculares de los colegios a los que pertenecen los estudiantes de MAD (Restrepo & Gómez, 2011). Y esperamos realizar un proyecto que evaluará el impacto del programa en términos del rendimiento de los escolares en las pruebas de Estado. Estos proyectos buscan evaluar el programa desde la perspectiva de las opiniones y el aprendizaje de los participantes, el impacto en la institución y los efectos en el aprendizaje de los escolares.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arenas, F., Becerra, M., Morales, F., Urrutia, L. & Gómez, P. (2012). Razones trigonométricas. En P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1* (pp. 342-414). Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1895/

Arias, M. & Gómez, P. (2011). *Actuación de tutores en un programa de formación de postgrado para profesores de matemáticas.* Tesis de maestría no publicada, Universidad de Granada, Granada. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1771/

Aristóteles. (1984). Ética a Nicómaco (P. S. Abril, Trad.). Barcelona, España: Ediciones Orbis.

Back, S. (2002). The Aristotelian challenge to teacher education. *History of Intellectual Culture, 2*(1), 2-4.

Becerra, O. J., Buitrago, M. R., Calderón, S. C., Gómez, R. A., Cañadas, M. C. & Gómez, P. (2012). Adición y sustracción de números enteros. En P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1* (pp. 19-75). Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1890/

Bedoya, E. (2002). *Formación inicial de profesores de matemáticas: enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras gráficas.* Tesis de PhD no publicada, Universidad de Granada, Granada, España.

Bernal, M. L., Castro, D. P., Pinzón, Á. A., Torres, Y. F. & Romero, I. (2012). Método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2x2. En P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1* (pp. 200-260). Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1893/

Cifuentes, Á. P., Dimaté, L. E., Rincón, A. M., Velásquez, J. R., Villegas, M. P. & Flores, P. (2012). Ecuaciones lineales con una incógnita. En P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1* (pp. 76-141). Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1891/

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/444/

Gómez, P. (2012). Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1. Descargado, 2012, de http://tinyurl.com/7blb2nf

Gómez, P. & Cañadas, M. C. (2011). La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación, 2*(Especial), 78-89. Disponible en http://vys.uniandes.edu.co/index.php/vys/article/view/89/215

Gómez, P., Cañadas, M. C., Flores, P., González, M. J., Lupiánez, J. L., Marín, A., et al. (2010). Máster en Educación Matemática en Colombia. En M. T. González, M. Palarea & A. Maz (Eds.), *Seminario de Investigación de los Grupos de Trabajo Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Educación Matemática de la SEIEM* (pp. 7-25). Salamanca, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/646/

Gómez, P. & González, M. J. (2009). Conceptualizing and exploring mathematics future teachers' learning of didactic notions. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación, Monografía XII*, 223-235. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/431/

Gómez, P. & Restrepo, A. (2011). *Procesos de planificación en matemáticas y autonomía escolar*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1592/

Gómez, P. & Restrepo, Á. M. (2010). Organización del aprendizaje en programas funcionales de formación de profesores de matemáticas. En G. García (Ed.), *11º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 22-32). Bogotá, Colombia: CENGAGE Learning. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/644/

Gómez, P. & Rico, L. (2004). *Didactical knowledge development of preservice secondary mathematics teachers*. Trabajo presentado en 28th Conference oh the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Noruega. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1734/

Gómez, P. & Rico, L. (2007). Learning within communities of practice in preservice secondary school teachers education. *PNA, 2*(1), 17-28. Disponible en http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Gomez2007Learning.pdf

González, M. J. & Gómez, P. (2008). Significados y usos de la noción de objetivo en la formación inicial de profesores de matemáticas. *Investigación en educación matemática XII*, 425-434. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1211/

González, M. J. & Gómez, P. (en revisión). *Conceptualizing and describing teachers' learning of pedagogical concepts*. Trabajo enviado para publicación. Disponible en http://tinyurl.com/bnlngs4

John, P. D. (2006). Lesson planning and the student teacher: re-thinking the dominant model. *Journal of Curriculum Studies, 38*(4), 483 - 498.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada, Granada, España.

Mora, M. F., Nieto, E. X., Polanía, D. L., Romero, M. L. & González, M. J. (2012). Razones trigonométricas vistas a través de múltiples lentes. En P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1* (pp. 261-341). Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1894/

Ortíz, J. (2000). *Modelización y calculadora gráfica en la formación inicial de profesores de matemáticas. Memoria de tercer ciclo.* Tesis de PhD no publicada, Universidad de Granada, Granada, España.

Polo, I., González, M. J., Gómez , P. & Restrepo, Á. M. (2011). Argumentos que utilizan los futuros profesores cuando seleccionan tareas matemáticas. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco & M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 491-502). Ciudad Real: SEIEM.

Restrepo, A. & Gómez, P. (2011). *Planes de área en matemáticas y autonomía escolar: un estudio de casos*. Trabajo presentado en III Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, Medellín, Colombia.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona, España: ICE-Horsori. Disponible en http://tinyurl.com/cyrkdrq

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. & Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma, 58*, 7-23. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/533/

Saugstad, T. (2005). Aristotle's contribution to scholastic and non-scholastic learning theories. *Pedagogy, Culture & Society, 13*(3), 347-366.

Serrano, A., Moreno, E., Santoyo, S., Hernández, Y., Gutiérrez, Y. & Lupiáñez, J. L. (2012). Ecuaciones lineales de primer grado con una incógnita. En P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1* (pp. 142-199). Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1892/

Suavita, M. A. (2012). *Aprendizaje de profesores sobre el organizador del currículo hipótesis de aprendizaje*. Tesis de master no publicada, Universidad de Granada, Granada. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1917/

La ausencia de una adecuada relación entre el conocimiento disciplinar y el pedagógico en programas de formación de profesores de matemáticas

*Cecilia Agudelo-Valderrama**

... algunas veces, el conocimiento disciplinar es considerado irrelevante en la formación del conocimiento pedagógico. Cuando esta actitud es asumida... el conocimiento pedagógico es visto como un anexo externo al conocimiento disciplinar (Dewey (1904/1964, p. 160).

RESUMEN

El problema de la separación entre el conocimiento disciplinar (i. e., matemático) y el pedagógico en la formación de licenciados fue subrayado por John Dewey hace más de un siglo; esta separación continúa haciéndose evidente, hoy, en programas de formación de licenciados, tanto en el nivel cognitivo (como lo plantea Dewey) como en el operacional; esto sucede a pesar de los urgentes y continuos llamados al cambio hacia una enseñanza que promueva la comprensión y el significado en el aprendizaje de las matemáticas escolares (e. g., Ministerio de Educación Nacional 'MEN', 1998; NTCM, 1989, 2000), y a pesar de los propósitos centrales que los mismos programas plantean, e. g., Formar Licenciados con pensamiento crítico e innovador, con las competencias para (i) construir el currículo en forma permanente, (ii) para identificar problemáticas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares y proponer formas de abordar dichas problemáticas. Ofrezco ilustraciones y explicaciones sobre la separación subrayada, en los niveles que he llamado cognitivo y operacional, en los programas de formación de licenciados, así como implicaciones pertinentes.

* Universidad del Tolima. Dirección electrónica: agudelo.cecilia@gmail.com

El *qué* y el *cómo* de la matemáticas en la formación de los licenciados

Siguiendo los planteamientos de Dewey en la cita presentada, en la formación matemática de estudiantes de Licenciatura, el *qué* de las matemáticas enfocadas en los diferentes cursos del programa es también el *cómo*. En otras palabras, para estudiantes que están formándose para enseñar matemáticas, lo *que* están aprendiendo es también *como* lo están aprendiendo. Las formas en que les son enseñadas las matemáticas –"el método" en palabras de Dewey– se vuelven parte del *qué* de la formación matemática de los licenciados, como se muestra más adelante. La creencia de que en un aula los estudiantes aprenden contenidos matemáticos y en otra los métodos de enseñanza de dichos contenidos está apoyada en una concepción *objetivista* del conocimiento; el estatus epistemológico del conocimiento que está detrás de estas concepciones ha sido razón de serias críticas a las categorizaciones del conocimiento del profesor, propuestas por Shulman (1986, 1987), en "conocimiento del contenido" y "conocimiento pedagógico del contenido" (ver, por ejemplo, Fenstermacher, 1994; McEwan & Bull, 1991).

En muchos programas de formación de licenciados en matemáticas, en nuestro país, el conocimiento matemático –como componente *fundamental* de formación– es asociado con una lista de contenidos de tipo académico y formalista que promueve *formas específicas de saber* matemáticas. La inclusión de estos cursos y sus contenidos en los programas obedece a establecimientos de la tradición, ya que desde el período clásico este era el requerimiento para los profesores de matemáticas escolares (Liljedahl, 2009). Las muchas evidencias de la investigación en el contexto colombiano (*e. g.*, Agudelo-Valderrama, 2000, 2002, 2004; Agudelo-Valderrama y Vergel, 2009; Díaz, Solarte y Arce, 1997; González y Pedroza, 1999) y en otros contextos internacionales (*e. g.*, Stigler y Hiebert, 1999) señalan que en la enseñanza de las matemáticas escolares persiste un patrón:

1. Presentación, por parte del profesor, de definiciones de términos/conceptos/algoritmos procedimentales matemáticos (*i. e.*, de los formalismos)
2. Explicación de un problema/ejercicio por parte del profesor
3. Mecanización de procedimientos explicados (trabajo que exigen bajo nivel de pensamiento)
4. Asignación de tarea sobre el uso del mismo tipo de procedimiento

No hay objeción a los formalismos, como tales, pues estos constituyen parte importante de las matemáticas, sino a las concepciones de las matemáticas que estos patrones de enseñanza-aprendizaje promueven —resaltando las matemáticas como las formalizaciones solamente— y a los elementos pedagógicos implicados en éstas que influyen poderosamente en las imágenes y actitudes matemáticas de quienes más adelante se convierten en profesores de matemáticas (Agudelo-Valderrama, 2008; Agudelo-Valderrama, Clarke & Bishop, 2007; Bishop, 1988; Ernest, 1989; Jaworski, & Gellert, 2003). Como lo han resaltado numerosos estudios sobre las concepciones de profesores de matemáticas escolares (ver, por ejemplo; Agudelo-Valderrama, 2002, 2004, 2007; Cooney & Wiegel, 2003; Jaworski & Gellert, 2003), la experiencia de atender a clases de matemáticas donde se muestra un enfoque formalista de las matemáticas lleva a los estudiantes a tomar ese modelo de enseñanza como un modelo ejemplar, *i. e.,* un modelo a seguir en sus futuras prácticas como docentes. Estos son los modelos que se promueven en las matemáticas universitarias (Freudenthal, 1973). Sin embargo, los propósitos declarados de muchos programas de formación de licenciados hacen énfasis en el desarrollo de competencias, capacidades y valores en los futuros licenciados, que los empoderen para "formar ciudadanos críticos y productivos" —como se enfatiza en Ley General de la Educación— con pensamiento crítico y creativo, y con una comprensión profunda de las matemáticas. Los programas también subrayan el propósito de 'formar profesores para que puedan identificar problemáticas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares, y proponer formas innovadoras para abordarlas' —propósitos de formación que hacen eco a las recomendaciones de la comunidad nacional e internacional de educadores matemáticos y que son consistentes con los "Lineamientos curriculares de matemáticas" (MEN, 1998).

La enseñanza de las matemáticas escolares requiere del diseño y la organización de ambientes de aprendizaje que promuevan el establecimiento de significado y el desarrollo de comprensión conceptual, por parte de los alumnos. Para el alcance de estos propósitos, en la educación matemática escolar, es necesario que el profesor centre la atención en los procesos de pensamiento de los alumnos, a medida que se desarrolla la actividad matemática propuesta para tomar decisiones sobre la enseñanza; es decir, se requiere que el profesor ponga en juego sus capacidades como constructor permanente del currículo –lo que es posible si el profesor cuenta con un conocimiento profundo y "especializado de las matemáticas para su enseñanza" (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Ball, Thames & Phelps, 2008; Ponte & Chapman, 2003).

¿En qué medida y de qué maneras las experiencias de aprendiz*aje de las matemáticas universitarias, de los futuros profesores, contribuyen al desarrollo de las capacidades que la enseñanza de las matemáticas escolares requiere de ellos?*

Ésta es una pregunta crucial que, en forma inaplazable, necesitamos enfocar como educadores matemáticos, formadores de profesores.

SEPARACIÓN EN EL NIVEL COGNITIVO: SE CONCIBE EL CONOCIMIENTO PEDAGÓGICO COMO ALGO EXTERNO AL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

La descripción del panorama anterior evidencia una tensión considerable entre la naturaleza de los cursos de matemáticas de los estudiantes de Licenciatura y la naturaleza de las experiencias de enseñanza-aprendizaje que los practicantes y futuros profesores necesitan poner en acción en el contexto escolar –centro de su práctica profesional. Esta tensión, en términos de las concepciones de la naturaleza del conocimiento y consecuentemente de los elementos pedagógicos implicados, desvelada por Dewey hace más de un siglo, actualmente está siendo re-enfocada por la comunidad internacional de educadores matemáticos (ver, por ejemplo, The 15th ICMI Study1, 2005). La tensión —que en esta ponencia es señalada como "la ausencia de una adecuada relación"— entre las formas de saber matemáticas y los principios pedagógicos que guían la enseñanza de las matemáticas escolares también es identificada por los mismos egresados de los programas de Licenciatura, tanto principiantes como no principiantes en nuestro país. A continuación se presentan unos apartes de las declaraciones de un profesor de matemáticas, que en el año 2002 —cuando participó en un estudio centrado en las concepciones de profesores sobre sus propias prácticas de enseñanza del álgebra escolar, realizado en Bogotá (ver Agudelo-Valderrama, 2004) — se encontraba en su tercer año de trabajo como profesor de matemáticas en secundaria:

> . . . . Uno sale del bachillerato creyendo que las matemáticas son todo eso que uno hacía mecánicamente . . . en la universidad se ven otras matemáticas, pero eso no cambia. Cuando uno sale de la universidad, y empieza a enseñar, uno no tiene la menor idea sobre cómo enfrentar situaciones de enseñanza . . . . Cuando empecé [como profesor] en este colegio traté de hacer lo mismo que hacía cuando yo estudiaba en el colegio… Me preguntaba, ¿Cómo era que se hacía esto? 'Ah, con tal fórmula o multiplicando'. ¡Mecánico! Uno se da cuenta que eso no está funcionando al enseñar, pero uno no sabe otra forma de hacerlo… (Alex, Entrevista 2, mayo, 2002).

[1] The 15th ICMI Study: The Education and Professional Development of Teachers of Mathematics, Brazil, 2005.

Ahora es claro que para mejorar mi práctica de enseñanza necesito analizar y clarificar por qué lo que estoy enseñando es importante para la formación de los alumnos. Pero muchas veces uno no sabe; por ejemplo, el año pasado . . . enseñando el teorema de Pitágoras, un estudiante me preguntó:' ¿por qué tengo que aprender esto, es que esto me va a salvar la vida o qué?'. ¡Y yo no supe qué contestar! Hay muchos profesores que no saben, por ejemplo, ¡por qué hay que enseñar álgebra!... (Alex, Entrevista 3, Sep., 2002).

Como Alex, muchos otros profesores (principiantes, y no principiantes) declaran no encontrarse preparados para enfrentar las actuales demandas de la enseñanza de las matemáticas escolares. Las evidencias recolectadas en mi trabajo, durante el período 2006-2010, con diferentes cohortes de profesores de matemáticas que realizaban programas de posgrado, mostraban que su forma de saber álgebra escolar (*i. e.*, matemáticas) era netamente instrumental (Skemp, 1976), compartimentada y formalista, centrada en el uso de fórmulas y la obtención de respuestas correctas; la gran mayoría reportaba prácticas de aula guiadas por los textos guía disponibles, y basadas en la *transmisión* y *repetición mecánica* de algoritmos procedimentales *dados*. En los diarios de reflexión que elaboraron, a medida que se desarrollaba el trabajo del programa, los profesores empezaron a identificar la razón de ser del álgebra y a subrayar la desconexión existente entre sus formas de saber matemáticas y los principios pedagógicos que puede sugerir la teoría (e. g., el constructivismo social, aprendizaje significativo, currículo por procesos) que habían estudiado en sus cursos de la Licenciatura.

La evidencias sobre las inadecuaciones del conocimiento matemático de los profesores escolares —cuando el propósito del trabajo de aula es, por ejemplo, apoyar el establecimiento de conexiones entre conceptos— es abundante y robusta (*e. g.*, Agudelo-Valderrama, 2002, 2004; 2005: Perry, Guacaneme, Andrade & Fernández, 2003; Agudelo-Valderrama & Vergel, 2009).

SEPARACIÓN EN EL NIVEL OPERACIONAL: ¿CONSECUENCIA DE LA SEPARACIÓN EN EL NIVEL COGNITIVO?

Es cierto que el conocimiento pedagógico para la enseñanza de las matemáticas abarca una variedad de componentes — *e. g.*, conocimiento curricular, identificación de las inadecuaciones de las secuencias de trabajo matemático sugerido en textos guía, comprensión de procesos que los estudiantes pueden seguir en su aprendizaje, conocimiento de principios y fines de la educación— para nombrar solo algunos; pero todos estos conocimientos que se desarrollan en continua reflexión sobre la práctica real del aula, adquieren relevancia y sentido en la medida en que se puedan conectar con la *forma de saber* el contenido matemático, en la medida en que el grado de comprensión conceptual matemática lo permita. Esta ponencia está centrada en el componente pedagógico implicado en el conocimiento de las matemáticas que un profesor pueda tener (*i. e.*, su forma de saber matemáticas).

El conocimiento matemático de los profesores juega un papel *crucial* en los enfoques de enseñanza que privilegian. No es fácil poner en acción un trabajo de aula que apoye, por ejemplo, el establecimiento de conexiones entre conceptos a través de actividades diseñadas con este propósito en mente —y que, además, sean de acceso fácil para la variedad de capacidades de desempeño que se observa en un aula de clase– cuando el profesor concibe las matemáticas escolares como una lista de ítemes de contenido que deben ser organizados y enfocados en forma compartimentada y jerárquica. Dificultades como éstas evidencian la ausencia de una adecuada relación entre las formas de saber matemáticas de los profesores y el conocimiento categorizado como *pedagógico* en los programas de Licenciatura; este conocimiento pedagógico que no es integrado al conocimiento de las matemáticas para su enseñanza se convierte en un "anexo externo al conocimiento disciplinar" (Dewey, 1904). Ésta era la tensión, y la dificultad, resaltada por los profesores, estudiantes de posgrado, citados en la sección anterior.

La separación entre el conocimiento matemático y el pedagógico está presente en la conceptualización del currículo "como intención" (el currículo planeado) para la formación de licenciados, que se refleja y se refuerza, luego, en la estructura organizacional que lo pone en acción (el currículo *real*). El currículo hace separaciones entre áreas de conocimiento que viven en diferentes facultades, departamentos y/o escuelas de la institucional universitaria –lo que muchas veces no favorece la interacción intencional de sus cuerpos colegiados ni, mucho menos, el trabajo en equipo: pedagogía, didáctica, humanidades, matemáticas, etc. El problema de la separación entre conocimiento matemático y pedagógico en programas de formación de profesores de matemáticas, en universidades de Brasil, ha sido descrito por Firer (2005), quien resalta "La estructura 3 +1… 3 años de estudios en matemáticas seguidos de 1 año de disciplinas con énfasis pedagógico" (p. 1), y sostiene que esta estructura alimenta y, al mismo tiempo, es fruto de "una profunda incomprensión y disociación entre los profesionales de las áreas de matemáticas y de educación".

La incomprensión no emerge solamente de prejuicios, que son mutuos, entre comunidades de matemáticos y comunidades de pedagogos; también emerge de la dificultad de promover el encuentro y el diálogo entre dos enfoques [y preocupaciones] diferentes... (p. 2). Los matemáticos están preocupados con el *qué* enseñar y los pedagogos únicamente con el *cómo* enseñar [mi énfasis en cursiva] (p. 3)

Como ya enfaticé, lo *que* enseñamos en el aula de matemáticas, y *cómo* lo enseñamos hacen parte del mismo foco de aprendizaje para los estudiantes de Licenciatura, y si la preocupación de los pedagogos está en *cómo* enseñar, este "cómo" debe estar anclado en un contenido (en este caso) matemático; de otra manera, el conocimiento pedagógico se queda en el nivel de conocimiento *declarativo* (*i. e.*, pura teoría) que no entra a ilustrar lo que se plantea, ni a crear oportunidades para el establecimiento de significado o el desarrollo de creatividad por parte de los estudiantes, es decir, se queda como un "anexo externo" al conocimiento matemático.

La separación entre el conocimiento matemático y el pedagógico, además de crear incoherencias en los procesos de aprendizaje de los estudiantes de Licenciatura, divide el conocimiento en porciones. ¿Existe la esperanza de que los futuros profesores a través de su práctica profesional desarrollen las clarificaciones y hagan las integraciones necesarias? La investigación ha demostrado en forma contundente que esto no tiene lugar, y que lo que prevalece en las aulas de clase de matemáticas escolares es la enseñanza de una lista de formalismos (*i. e.*, algoritmos y técnicas procedimentales dadas), esto es, prevalece un currículo que Bishop (2005) denomina "el currículo de la técnicas". La persistencia de esta situación en la formación inicial de profesores de matemáticas es preocupante ya que nos conecta directamente con el panorama del desempeño de estudiantes del nivel escolar en matemáticas; en este panorama sobresalen los muy bajos índices de comprensión conceptual y de motivación por el aprendizaje de las matemáticas escolares, de gran parte de los estudiantes colombianos (ver, por ejemplo, los resultados de SABER, 2009; TIMSS, 2007; PISA, 2006).

DISCUSIÓN E IMPLICACIONES PARA LOS PROGRAMAS DE FORMACIÓN DE LICENCIADOS EN MATEMÁTICAS

Muchos estudios que han enfocado las concepciones de estudiantes de Licenciatura, antes y durante el desarrollo del programa, han mostrado que las concepciones instrumentalistas y formalistas que los estudiantes traían al programa tienden a resistir el cambio (ver, por ejemplo, Lampert & Ball, 1998; Jaworski & Gellert, 2003). Visualicemos ahora la situación en el contexto de un programa de Licenciatura en el que los cursos de matemáticas refuerzan las concepciones que traen los estudiantes al programa, como lo declaró Alex.

De acuerdo con Freudenthal (1973), para el matemático, el propósito de la educación matemática es formar matemáticos; el matemático busca identificar los estudiantes con mayor capacidad para las matemáticas, y ya se subrayó la predominancia de enfoques formalistas en estas matemáticas. La orientación que necesitan quienes se están formando para ser profesores de matemáticas es diferente, pues los profesores necesitan desarrollar conocimiento matemático de una *forma tal* que apoye su función de atender a todos los alumnos de un grupo escolar con sus diferentes necesidades de aprendizaje y capacidades de desempeño para, así, apoyar su progreso. Uniéndome a Davis, Simmt y Sumara (2005), quiero hacer hincapié en que los cursos de matemáticas para profesores deben enfocar tanto "las matemáticas establecidas", esto es, las formalizaciones, como los procesos o maneras en que esas formalizaciones se establecen.

El reconocimiento de la naturaleza del "conocimiento de las matemáticas para su enseñanza" que los profesores necesitan, como un conocimiento *especializado* —"profundo" (Ma, 1999), "que evidencia conexiones entre conceptos matemáticos centrales, y con situaciones del mundo real" (Agudelo-Valderrama, 1996, 2004), "descomprimido, y con una comprensión que es única" (Ball, Bass, Sleep & Thames, 2005)— plantea implicaciones muy serias, y de urgente atención, para los currículos de los programas de formación de profesores, y para todos los profesionales involucrados en la formación de profesores que, obviamente, incluye a quienes son responsables de los cursos de matemáticas. Necesitamos enfocar y analizar cuidadosamente los inconvenientes, aquí señalados, de muchos programas de formación de licenciados en matemáticas.

Tomando en consideración la naturaleza del "conocimiento de las matemáticas para su enseñanza", Cooney & Wiegel (2003) proponen tres principios a tener en cuenta en la formación matemática de los profesores, que resaltan la clase de experiencias matemáticas que pueden apoyar un enfoque de enseñanza abierto y centrado en los procesos matemáticos:

En los programas de formación, los futuros profesores deben:

1) Participar en experiencias de aprendizaje de las matemáticas de una manera pluralista;
2) estudiar las matemáticas escolares y reflexionar, de manera explícita, sobre éstas;

3) experimentar un aprendizaje de las matemáticas de tal forma que apoye el desarrollo de un enfoque de enseñanza centrado en el proceso" (p. 806).

Para los programas de formación de licenciados, estos principios plantean la necesidad de diseñar, y poner en acción, currículos que creen amplios espacios de aprendizaje orientados hacia el desarrollo, en los futuros profesores, de capacidades y competencias como las que han sido invocadas en los mismos proyectos educativos de los programas, mencionadas en la primera sección de este escrito. Esto significa que el espacio y las estrategias de enseñanza orientadas a enfocar el conocimiento de las matemáticas escolares, y la forma de saber estas matemáticas, de los futuros profesores, deben constituirse en una preocupación de primer orden en la formación de profesores. En este punto vienen a la mente programas de trabajo que, en contextos de formación inicial y continuada de profesores, han sido desarrollados e investigados por equipos de educadores matemáticos en diferentes partes del mundo. Varios estudios reportan el trabajo en equipo y la co-enseñanza, involucrando "educadores matemáticos" y "matemáticos" (*e. g.*, Ball, et al., 2005; Simon & Blume, 1994).

El propósito general de estos programas ha sido involucrar activamente a los estudiantes en procesos de re-aprendizaje de las matemáticas escolares, integrando el desarrollo de comprensión conceptual matemática y pedagógica a través de la resolución de problemas. Los ambientes de aprendizaje se crean de tal manera que ofrezcan oportunidades para que los estudiantes se involucren activamente en procesos de exploración e indagación matemática auténticos, apoyándose el desarrollo de procesos de pensamiento matemático que incluyen, por ejemplo, la conjetura, la verificación, la comunicación efectiva y la validación de resultados de los estudiantes (*e. g.*, Amato, 2004; Walter y Gerson, 2007); varios autores reportan que, con el ánimo de re-estructurar los programas de formación inicial de profesores, se han incluido en estos, e investigado, secuencias de cursos con estos enfoques y propósitos (*e. g.*, Beckmann, Wells, Gabrosek, et al.; McGowen, 2001).

Otros ambientes de aprendizaje han apoyado el desarrollo de comprensión conceptual involucrando activamente a los estudiantes, específicamente, en la exploración de situaciones-problema que requieren la identificación y expresión de regularidades, el reconocimiento y representación (en diferentes formas) de relaciones matemáticas presentes en la situación, y la comunicación verbal y escrita de los procesos de pensamiento que acompañan el trabajo desarrollado. El desarrollo de la capacidad de enfocar y comunicar los procesos de pensamiento que tienen lugar en el trayecto de un trabajo de indagación matemática –que también incluyen las dificultades– es *crucial* en la formación matemática de los profesores ya que de esta manera se hacen evidentes, y se resaltan, elementos importantes de la actividad matemática que luego se convierten, para los profesores en formación, en aspectos integrales del diseño de la actividad para el aula y, consecuentemente, de la evaluación del trabajo de los estudiantes –aspectos como: el planteamiento de preguntas, el uso de estrategias, el razonamiento matemático, la reflexión y la comunicación.

Las evidencias de mi trabajo en programas de formación (inicial y continuada) de profesores de matemáticas señalan que cuando los profesores se involucran activamente en el desarrollo de procesos de indagación matemática –a partir de una situación-problema que ha sido diseñada intencionalmente, ya que es informada por el conocimiento de las concepciones de los profesores (estudiantes)– ellos/ellas logran establecer significado para los conceptos matemáticos enfocados, a través de la identificación de una razón de ser de las ideas matemáticas implicadas y del establecimiento de conexiones de éstas con otros conceptos matemáticos que antes consideraban separados, lo cual es muestra de una mayor comprensión conceptual; como consecuencia, empiezan a hacer un escrutinio de sus formas iniciales de saber matemáticas y de los enfoques de enseñanza asociados a éstas, evidenciándose el desarrollo de las capacidades de reflexión y comunicación.

Ver y entender las matemáticas como una malla de conceptos interrelacionados, en cambio de una lista de temas por compartimentos lleva en sí un componente pedagógico *potente* que se convierte en un marco referencial para la toma de decisiones en la enseñanza. Ya que este componente pedagógico específico es complementado con otras dimensiones del conocimiento pedagógico que entran en juego en la *práctica real* de la enseñanza de las matemáticas, como se recalcó en la Sección 3, el proceso de aprendizaje de las matemáticas para su enseñanza debe tener *gran anclaje* en los contextos *reales* de la práctica pedagógica de los futuros licenciados; de aquí surge la necesidad de integrar las experiencias de la práctica docente de los estudiantes con otros componentes específicos del programa de formación, como las didácticas –para nombrar solo uno– de tal manera que se privilegie el aprendizaje del futuro profesor "en la acción" y se apoye el desarrollo de la capacidad de "reflexionar sobre la acción" (Schön, 1983).

Este reconocimiento llama a la búsqueda del diálogo entre los diferentes actores involucrados en la formación de profesores para organizar un trabajo *en equipo*. Más aun, se requiere de la creación de *alianzas estrechas* entre las facultades de educación y las instituciones educativas donde los estudiantes realizan las prácticas pedagógicas, que impulsen la conformación de *comunidades de aprendizaje* (Krainer, 2003), integrando a los docentes universitarios con los profesores asesores de práctica, de los colegios, y con los estudiantes de Licenciatura. De esta manera se pueden crear y mantener oportunidades de enseñanza-aprendizaje en donde el conocimiento matemático y el pedagógico se enfocan *unificadamente* en procesos de aprendizaje "situado" o "contextualizado" (Putnam y Borko, 2000). Finalmente, considero necesario que *la efectividad* de estas estrategias de trabajo se convierta en un foco de investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agudelo-Valderrama, C. (2008). The power of Colombian mathematics teachers' conceptions of social/institutional factors of teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *68*(2), 37-54.

Agudelo-Valderrama, C. (2007). La creciente brecha entre las disposiciones educativas colombianas, las proclamaciones oficiales y las realidades del aula de clase: Las concepciones de profesores y profesoras de matemáticas sobre el álgebra escolar y el propósito de su enseñanza, *Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 5*(1), 43-62.

Agudelo-Valderrama, C. (2005). Explicaciones de ciertas actitudes hacia el cambio: las concepciones de profesores y profesoras de matemáticas colombianos(as) sobre los factores determinantes de su práctica de enseñanza del álgebra escolar, *Revista EMA*, *10*(2)- *10*(3), 375-412.

Agudelo-Valderrama, C. (2004). *Explanations of Attitudes to Change: Colombian Mathematics Teachers' Conceptions of their Own Teaching Practices of Beginning Algebra.* Ph.D. thesis, Monash University, Melbourne, Australia. (Ver http://arrow.monash.edu.au)

Agudelo-Valderrama, C. (2002). Promoción del pensamiento algebraico en la escuela primaria: una propuesta que cobra sentido de acuerdo con nuestras concepciones sobre el conocimiento matemático. *Aula Urbana*. N.° 37.

Agudelo-Valderrama, C. (2000). *Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebraico*. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Agudelo-Valderrama, C. (1996). Improving mathematics education in Colombian schools: "Mathematics for all'. *International Journal of Educational Development, 16*(1), 15-26.

Agudelo-Valderrama, C., Clarke, B. & Bishop, A. (2007). Explanations of attitudes to change: Colombian mathematics teachers´ conceptions of the crucial determinants of their teaching practices of beginning algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(2), 69-93.

Agudelo-Valderrama, C., & Vergel, R. (2009). Informe final del Proyecto PROMICE. *Promoción de un enfoque interdisciplinario y de resolución de problemas en el inicio del trabajo algebraico escolar: integrando contextos de ciencias y el uso de tecnología digital*. Bogotá: Centro de documentación, Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico, IDEP, Secretaría de Educación Distrital.

Amato, S. (2004). Improving student teachers' attitudes to mathematics. In M. J. HØines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference, 2*, 25–32.

Ball, D. Lubienski, S. & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 433-456). N. Y.: McMillan.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Ball, D., Bass, H., Sleep. L., & Thames, M. (2005). A theory of mathematical knowledge for teaching. Paper presented at the 15th ICMI Study: *The Education and Professional Development of Teachers of Mathematics*. Águas de Lindóia. Brazil.

Beckmann, C. E., Wells, P. J., Gabrosek, J., Billings, E. H., Aboufadel, E. F., Curtiss, P., Dickinson, W., Austin, D., & Champion, A. (2004). Enhancing the mathematical understanding of prospective teachers: Using standards-based, grades K-12 activities. In R. R. Rubenstein & G. W. Bright (Eds.), *Perspectives on the teaching of mathematics* (pp. 151–163). Reston, VA: NCTM.

Bishop, A. J. (2005). *Aproximación sociocultural a la educación matemática*. Cali: Universidad del Valle.

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Cooney, T. J. & Wiegel, H. G. (2003). Examining the mathematics in mathematics teacher education. En A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y F.K.S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 795-828). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Davis, B., Simmt, E., & Sumara D. (2005). Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics teacher (need to) know). Paper presented at the 15th ICMI Study: *The Education and Professional Development of Teachers of Mathematics*. Águas de Lindóia. Brazil.

Dewey, J. (1964). John Dewey on Education (R. Archambault, Ed.). Chicago: University of Chicago Press. (Original publicado en 1904).

Díaz, C., Solarte, E., & Arce, J. (1997). Colombia. En D. F. Robitaille (Ed.), *National contexts for mathematics and science education. An encyclopaedia of the educa-*

tion systems participating in TIMSS (pp. 82-90). Vancouver: Pacific Educational Press.

Ernest, P. (1989). The knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher: A model. *Journal of Education for Teaching, 15*(1), 13-33.

Fenstermacher, G. D. (1994). The knower and the known: The nature of knowledge in research on teaching. *Review of Research in Education, 20*, 3–56.

Firer, M. (2005). Writing ddactical activities as a formative element for mathematics teachers. Paper presented at the 15th ICMI Study: *The Education and Professional Development of Teachers of Mathematics*. Águas de Lindóia. Brazil.

Freudenthal H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, the Netherlands: D. reidel Publishing Company.

González, M., & Pedroza, G. (1999). Reflexiones sobre aspectos claves del algebra escolar. Revista *EMA - Investigación e innovación en educación matemática, 5*(1), 87-91.

Jaworski, B., & Gellert, U. (2003). Educating new mathematics teachers: Integrating theory and practice, and the roles of practising teachers. En A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F.K.S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 829–875). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Krainer, K. (2003). Teams, Communities and Networks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *6,* 93-105.

Lampert & Ball, (1998). *Teaching, multimedia, and mathematics*. New York: Teachers College Press.

Liljedahl, P. (2005). Components of mathematics teacher training. En R. Even & D. Ball (Eds). The professional education and development of teachers of mathematics, (pp. 25-33). The Netherlands: Springer.

Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Lawrence Erlbaum Associates.

McEwan, H. and Bull, B.: 1991, 'The pedagogic nature of subject matter knowledge', *American Educational Research Journal,* 28(2), 316-334.

McGowen, M. (2001). Improving the undergraduate experience of future Teachers: Challenges and Issues. *MAA CRAFTY Report of the Conference on the Mathematics Preparation of Preservice Teachers.*

Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: Magisterio.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston VA.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston VA.

Perry, P., Guacaneme, E.; Andrade, L., & Fernández, F. (2003). Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: un hueso duro de roer. Bogotá: Una empresa docente, Universidad de los Andes.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 223-261). New York: Routledge.

Putnam, R. & Borko, H. (2000). What Do New Views of Knowledge and Thinking Have to Say about Research on Teacher Learning? *Educational Researcher*, 29(1), 4–15.

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner*. USA: Basic Books.

Shulman, L.: 1986, 'Those who understand: Knowledge growth in teaching', *Educational Researcher,* 15(2), 4-14.

Shulman, L.: 1987, 'Knowledge and teaching: Foundations of the new reform', *Harvard Educational Review,* 57(1), 1-22.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic teacher*, November, pp. 9-15.

Stigler, J. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: the Free Press.

Walter, J. & Gerson, H. (2007). Teachers' personal agency: making sense of slope through additive structures. *Educational Studies in Mathematics*, 65*(2)*, 203-233.

Análisis de la comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría "APOE"

Eliécer Aldana Bermúdez[*]
Mª Teresa González Astudillo[**]

RESUMEN

En esta investigación se ha identificado cómo realizan los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas la comprensión del concepto de integral definida. Para ello se hizo un estudio de libros de texto que permitió identificar los elementos matemáticos que configuran el concepto, y establecer una descomposición genética del concepto de integral definida. Se ha utilizado el marco teórico "APOE" de Dubinsky (1991). La recogida de datos se realizó utilizando: un cuestionario, una entrevista y un mapa conceptual. Estos datos se analizaron a partir de las relaciones lógicas que se establecen entre los elementos matemáticos en diferentes sistemas de representación. El análisis permitió caracterizar los niveles y subniveles (INTRA 1, INTRA, INTER 1, INTER y TRANS), en los que se encuentra cada sujeto.

[*] Universidad del Quindío. Dirección electrónica: eliecerab@uniquindio.edu.co.
[**] Universidad de Salamanca, España. Dirección electrónica: maite@usal.es.

IDENTIFICACIÓN DE PROBLEMA

El concepto de integral definida es uno de los conceptos fundamentales del análisis matemático. Se incluye en el currículo de diferentes carreras y, en concreto, aparece en el plan de estudios de la Licenciatura de Matemáticas; por tanto, resulta de interés realizar un estudio acerca de su comprensión. La comprensión de un concepto matemático es básica para la construcción del conocimiento; al respecto, Dreyfus (1991) manifiesta que comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante y es el resultado de una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurre e interactúa una gran cantidad de procesos mentales.

El aprendizaje del concepto de integral definida, de acuerdo con nuestra experiencia y los resultados obtenidos en diversas investigaciones, presenta dificultades para los estudiantes que se manifiestan mediante la utilización mecánica, algorítmica y memorística de su definición; no logran establecer una conexión entre el pensamiento numérico, algebraico, geométrico y analítico; tienen problemas para calcularlas áreas bajo curvas cuando la gráfica de la función pasa de ser positiva a ser negativa o presenta discontinuidades; en otros casos, piensan la integral solo asociada al concepto de área pero aislada de otros contextos, y demuestran dificultades para aplicar las propiedades de la integral definida.

Para conocer mejor la forma como se ha venido presentando este concepto hicimos un estudio de los libros de texto y pudimos concluir que los elementos matemáticos más habituales en los libros de texto y que configuran el concepto de integral definida se pueden agrupar en cinco bloques temáticos que hemos denominado: el área como aproximación, (ACA); el área como límite de una suma, (ALS) la integral definida, (LID); las propiedades de la integral definida, (PID), y los teoremas fundamentales y del valor medio, (TFV), (Aldana, 2011, p: 36).

Los resultados que se han obtenido en el estado del arte acerca de este concepto(Aldana y González, 2009) reflejan una ausencia de comprensión por parte de los alumnos. Así, en una de las investigaciones pioneras en torno a este concepto (Orton, 1983) se señala que los alumnos son capaces de realizar cálculos algebraicos en los que intervienen las integrales pero no son capaces de comprender el papel que juega el límite en la definición de este concepto y no son capaces de dotar de significado a los símbolos que se utilizan en estos cálculos. Mundy (1984) por otro lado presenta el análisis de un cuestionario en el que los alumnos debían evaluar diferentes integrales como $\int_{-3}^{5} |x+2|\, dx.$ seleccionando la respuesta correcta entre varias opciones, pero obtuvo un número muy reducido de respuestas correctas. Por su parte, Calvo (1997) en un cuestionario pasado a estudiantes de primer curso de Cálculo observa que los alumnos identifican la integral definida con el cálculo de áreas, por lo que si la integral es negativa tienden a cambiar el signo.Rasslan y Tall (2002), exploran la imagen del concepto (Vinner, 1991) de integral definida que tienen los estudiantes de bachillerato a través de un cuestionario, y concluyen que muy pocos alumnos responden correctamente a las preguntas, por lo que sugieren introducir este concepto a partir de experiencias previas de los alumnos. Para otros investigadores como Czarnocha et al. (2001) es esencial la coordinación entre el esquema visual de la suma de Riemann y el esquema de los límites de la secuencia numérica para el desarrollo de una comprensión del concepto de integral definida. Para decidir y distinguir si los estudiantes llegan a una verdadera comprensión de la definición del concepto de integral definida en lugar de tener solo una percepción empírica de la integración,Paschos et al. (2006)desarrollaron un estudio de caso con una estudiante universitaria sobre la abstracción reflexiva en la construcción del concepto de integral definida.

A partir del conocimiento de estas dificultades y de los mecanismos de construcción del concepto se han realizado diferentes propuestas de enseñanza del concepto de integral como la de Turégano (1994) que propone como alternativa enseñarla utilizando la génesis histórica del concepto, comenzado con el concepto de integral de forma independiente de la diferenciación y como primera introducción al límite. Partiendo de un análisis epistemológico del concepto de integral, y de las aportaciones de matemáticos tales como Cavalieri, Wallis y Roberval, Czarnocha, et al. (2000) diseñan una instrucción para estudiantes universitarios concluyendo que los estudiantes muestran una visión diferente que la desarrollada por la instrucción habitual. Depool (2004)utiliza las nuevas tecnologías para desarrollar la comprensión del concepto de integral definida de estudiantes universitarios y definir un modelo de competencia cognitivo de la integral definida. En este mismo sentido, Camacho et al. (2008) utilizan software en un curso de ingeniería para ayudar a los alumnos a comprender los conceptos de partición, refinamiento, aproximación y límite. A partir del diseño de una ingeniería didáctica González-Martín (2006) para los primeros cursos universitarios en torno al concepto de integral impropia trata de mejorar la comprensión de este concepto por parte de los estudiantes.

Las dificultades en la comprensión y construcción de los objetos matemáticos y, más concretamente, las dificultades encontradas en el aprendizaje del concepto de integral definida, la forma como lo presentan los diferentes libros de texto, y cómo algunos de ellos hacen mayor énfasis en los procedimientos algorítmicos y algebraicos, antes que en el significado analítico del concepto y los aportes encontrados en distintos estudios por algunos investigadores, nos han llevado a formular el siguiente problema de investigación: ¿Cómo adquieren los estudiantes el concepto de integral definida? Para poder hacer un acercamiento a la respuesta de esa pregunta, a lo largo de este estudio intentamos responder a las siguientes preguntas más específicas: ¿Cómo podemos caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de integral definida? ¿Qué relaciones y qué elementos matemáticos se manifiestan en cada nivel de desarrollo de la integral definida? ¿Cómo podemos caracterizar el paso de un nivel de desarrollo al siguiente?

Los objetivos planteados en esta investigación van dirigidos a profundizar en la comprensión que tienen los estudiantes de Licenciatura de Matemáticas del concepto de integral definida. Así, el objetivo general de esta investigación esestudiar el desarrollo del esquema del concepto de integral definida que tienen los estudiantes universitarios en el marco teórico APOE. Este objetivo general se concreta en los siguientes objetivos específicos:

- Identificar el grado de comprensión del concepto de integral definida en estudiantes de Licenciatura de Matemáticas mediante la tríada de la teoría APOE
- Describir el tipo de relaciones que establecen los alumnos entre los elementos matemáticos que constituyen el concepto de integral definida
- Establecer las formas de representación usadas por los alumnos para resolver tareas relacionadas con el concepto de integral definida y la síntesis entre dichas formas de representación.

MARCO TEÓRICO

El marco teórico en el que se ha fundamentado esta investigación es la teoría "APOE", desarrollada por Dubinsky (1991) y un grupo de investigadores Research in UndergraduateMathematicsEducationCommunity (RUMEC), basada en la noción de abstracción reflexiva (Piaget & García, 1982) y modificada para ser aplicada al pensamiento matemático avanzado. Desde esta perspectiva teórica del conocimiento matemático, Dubinsky (1991, 2000) y Asiala et al. (1996) consideran que los sujetos realizan ciertas construcciones mentales para comprender los conceptos matemáticos. Estas construcciones mentales se denominan: acciones,procesos, objetos y esquemas, y se logran mediante diferentes mecanismos como: interiorización,coordinación,inver sión, encapsulación,desencapsulación, y tematización (Dubinsky, 1991). El refuerzo de la teoría APOE con los tres niveles de desarrollo del esquema propuestos por Piaget y García (1982) ha llevado a mejorar la comprensión y explicación del concepto de esquema (Dubinsky & MacDonalds, 2001). De-Vries (2001) caracteriza los niveles de desarrollo de un esquema como: intra, cuando solo se identifican aspectos individuales aislados; ínter, se caracteriza por la construcción de relaciones, y trans, se adquiere cuando se tiene construida una estructura completa; las relaciones descubiertas en el ínter son comprendidas dando coherencia al esquema. El primer paso para llegar a comprender un concepto matemático tiene que ver conla descomposición genética, descrita en la teoría APOE de Dubinsky (1996) & Asiala et al., (1996).

METODOLOGÍA

Esta investigación se realizó en Armenia, en la Universidad del Quindío, tratando de caracterizar el desarrollo del esquema de integral definida de los estudiantes que cursan tercer año de Licenciatura de Matemáticas y que estudian por primera vez el concepto de integral definida.

Para diseñar los instrumentos utilizados en la recogida de la información, inicialmente se llevó a cabo una revisión de diferentes libros de texto que incluyen el concepto de integral definida, lo que permitió determinar los elementos que configuran este concepto matemático y establecer una descomposición genética previa de dicho concepto. Posteriormente, se diseñó un precuestionario que fue revisado por expertos españoles en Didáctica del Análisis y aplicado de forma experimental. A partir del informe de los expertos y de los resultados de los alumnos, se hizo el cuestionario definitivo que constaba de ocho tareas y que fue contestado por once estudiantes. Posteriormente se diseñó el guion de una entrevista semiestructurada (Ginsburg et al., 1983) con el objetivo de que nos permitiera obtener información para describir y explicar el nivel de desarrollo del esquema de integral sefinida de cada alumno. Dichas entrevistas fueron audiograbadas. Finalmente, los alumnos realizaron un mapa conceptual, sobre el concepto de integral definida.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

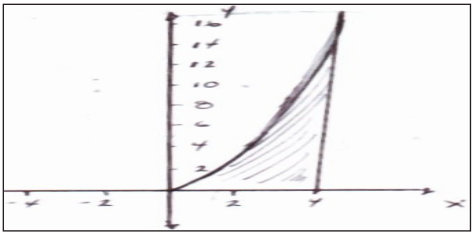
El análisis de los datos se realizó utilizando conjuntamente los tres instrumentos: cuestionario, entrevista y mapa conceptual. Desde el marco teórico

APOE, consideramos que el desarrollo del esquema pasa por tres niveles, determinados por las relaciones lógicas que un sujeto es capaz de establecer, y por el número de elementos matemáticos gráficos (G), algebraicos (A) y analíticos (AN) que utiliza en la resolución de las tareas. Esto nos ha permitido caracterizar los diferentes niveles de desarrollo del esquema de integral definida en cada alumno. Para cada uno de los niveles, se describen las características que lo determinan y se muestra cómo los sujetos manifiesta dichas características en la resolución de las tareas.

Nivel intra 1. Este subnivel de desarrollo del esquema se caracteriza porque los alumnos no son capaces de establecer ninguna relación lógica entre los elementos matemáticos, recuerdan los elementos matemáticos de memoria y se muestran incapaces de utilizarlos en la resolución de las tareas; utilizan elementos matemáticos solo en las formas de representación G y A, donde muestran algunas concepciones erróneas, y resuelven algunas tareas de forma incorrecta. Por ejemplo A5, en la tarea 3.

Sea R la región entre la gráfica de la función $f(x)=x^2$ y el Intervalo [0,4]
-Utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región R.
-Justifica tu respuesta.

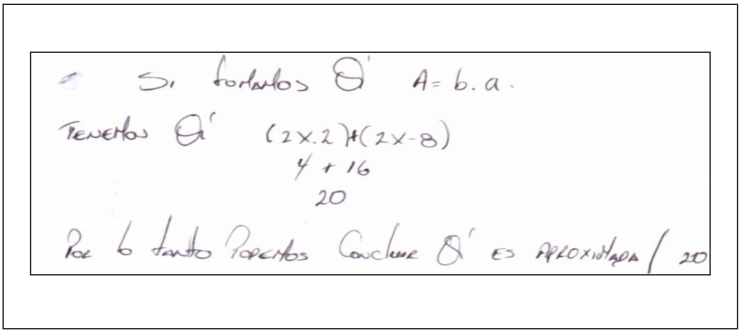
Este alumno representa de forma G la función:



A5, representación G de la tarea 3 del cuestionario

Aunque hay un intento de utilizar el elemento matemático ACA de forma G porque dibuja la función, no logra hacer ningún tipo de aproximación utilizando este elemento matemático. Recurre a un cálculo algebraico utilizando el elemento matemático ACA, para obtener unos valores aproximados.

Para ello, subdivide el intervalo en dos subintervalos de longitud de la base 2 unidades cada uno y, para cada uno de ellos, calcula el área aplicando la fórmula del área de un rectángulo, uno de ellos de altura 2 y otro de altura 8. No hay coordinación entre los cálculos algebraicos y la representación gráfica, puesto que las alturas no se corresponden con ninguna figura geométrica que haya representado en la gráfica y tampoco se corresponden con los puntos por los que pasa la curva. Durante la entrevista, cuando se le pregunta por los cálculos que realizó en el cuestionario, no es capaz de establecer un razonamiento lógico que los justifique.

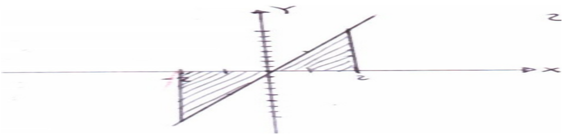

Si formamos Θ' A = b.a.
Tenemos Θ' (2x.2)+(2x-8)
4 + 16
20
Por lo tanto Podemos Concluir Θ' es aproximada / 20

A5, resolución A de la tarea 3 del cuestionario

Nivel intra. En este nivel, los alumnos suelen realizar algún intento de conjunción lógicaentre elementos matemáticos, recordar elementos matemáticos inconexos de forma aislada y utilizarlos en la resolución de las tareas y no tener sintetizados los modos de representación, especialmente el AN. Por ejemplo A4, en la tarea 2:

Sea R, la región encerrada por el gráfico de la función *(f(x)*=4x y el eje *x*, en el intervalo [–2,2].
a. Dibujar la gráfica.
b. Calcular gráficamente el área de la región R.
c. Calcular la $\int_{-2}^{2} 4x\,dx$.
d. ¿Son iguales los dos resultados anteriores? Justificar cada paso.

Esta alumna representa gráficamente la función y utiliza esta representación para calcular gráficamente el área que se le pide.



El Área de la Region graficomente es de 8Um. pero como son dos entonces es 16Um².

A4, representación G de la tarea 2 del cuestionario

Ha utilizado el elemento matemático ACA de forma G, porque traza la gráfica de la función, forma dos triángulos rectángulos simétricos, uno sobre el eje x y el otro bajo el eje x, calcula el área de un triángulo y como los triángulos son iguales la duplica y obtiene el área total. Cuando se le plantea calcular la integral, esto es lo que hace:

$$\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$$ → Segundo Teorema fundamental del Calculo.

$$\int_{-2}^{2} 4x\,dx = \left[2x^2\right]_{-2}^{2} = 2(2)^2 - 2(-2)^2 = 8 + 8 = 16\text{Um}$$

$$\int_{-2}^{0}(-2+4x) + \int_0^2 (4x+2) = \left[-2+2x^2\right]_{-2}^{0} + \left[2x^2+2\right]_0^2$$

$$= 4 + 8 = 12$$

A4, resolución A de la tarea 2 del cuestionario

Justifica el procedimiento afirmando que aplica el elemento matemático TFV y luego hace otro cálculo de la integral de forma errónea aplicando el elemento LID, concretamente la integración de funciones positivas y negativas, puesto que suma incorrectamente a cada integrando los extremos del intervalo [–2,2] de integración. En el protocolo de la entrevista explica cómo resolvió la tarea:

> A4:…..le di valores a la x, para poder hallar la recta y dibujarla….
>
> I: ¿Cómo ha calculado el área gráficamente?

A4: El área del triángulo es base por altura sobre 2, luego tengo de base 2 y de altura 8, entonces dos por ocho 16 y dividido entre 2, ocho. Como tengo otra figura igual, es solo multiplicar por 2 y obtengo las 16 unidades de medida cuadrada.

I: ¿El área que está bajo el eje OX es igual que la que está por encima del eje OX?

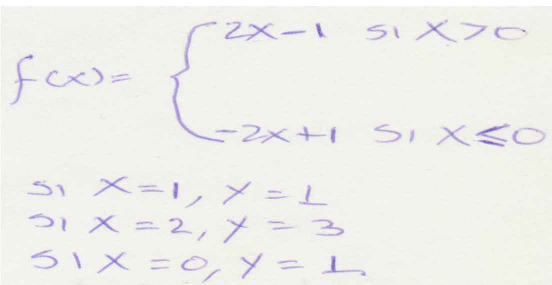
A4: No, porque es igual pero con signo contrario. Las áreas deben ser siempre positivas.

Demuestra que es capaz de calcular correctamente el área de forma G a partir del área de dos triángulos rectángulos de los que conoce fácilmente sus dimensiones pero, cuando se le pregunta si el área que está por encima del eje OX es igual al área que está por debajo del eje OX son iguales, se contradice porque dice que son iguales, pero de signo contrario, y afirma que las áreas deben ser positivas.

Nivel ínter 1.En este subnivel de desarrollo del esquema del concepto de integral definida, es característico que el sujeto sea capaz de usar la conjunción lógica (y lógica) de forma correcta entre elementos matemáticos dados en el mismo sistema de representación; recordar algunos elementos matemáticos gráficos, algebraicos y/ o analíticos, y tener un esbozo de síntesis de los sistemas de representación gráfico y algebraico. Por ejemplo, A7, en la tarea 4.

Calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=\|2x-1\|$, en el intervalo [0,2] y el eje x Justificar la respuesta.

Para representar la función, este alumno analiza los valores que toma según que sea positiva o negativa la función $2x-1$, aunque en el planteamiento se confunde entre las abscisas y las ordenadas y considera los casos en que x sea positivo o negativo.

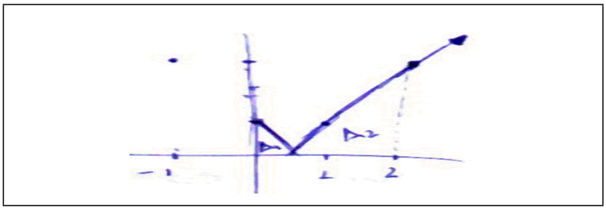


A7, representación A de la tarea 4 durante el cuestionario

Esto mismo lo expresa durante la entrevista. Está trasfiriendo directamente lo que recuerda del valor absoluto de x, al valor absoluto de $2x-1$.

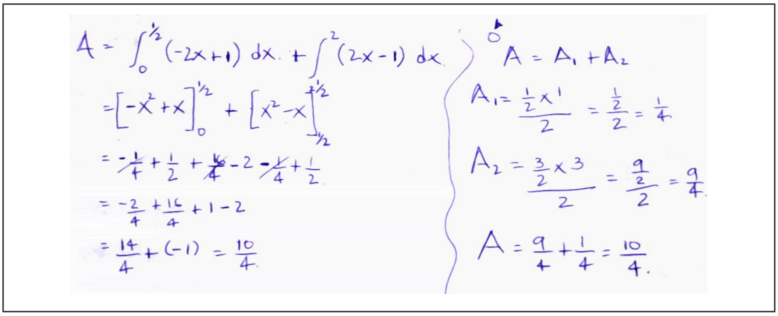
A7: El valor absoluto de esa función habría que redefinirlo como la función va a valer $2x-1$, si x es mayor que 0 y va a valer $-(2x+1)$, si x es menor o igual a 0.

Para representar gráficamente la función, da valores a x para obtener los valores correspondientes de y, obteniendo la siguiente gráfica.



A7, representación G de la tarea 4 del cuestionario

Posteriormente calcula el área limitada por la gráfica de la función.



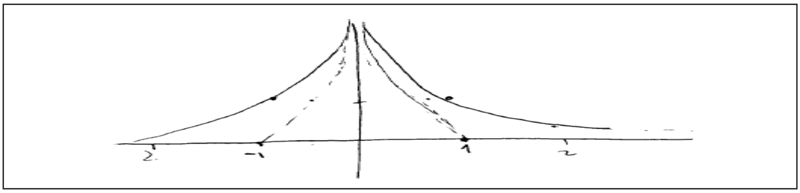
A7, representación A de la tarea 4 del cuestionario

Para ello relaciona varios elementos matemáticosde forma A y establece una conjunción lógica entre los elementos matemáticos ACA,LID, PID y TFV.

Nivel ínter. En este nivel de desarrollo del esquema de integral definida hay un aumento del tipo de relaciones lógicas que los sujetos establecen entre los elementos matemáticos gráficos, algebraicos y analíticos, y lo hacen con más frecuencia. Los sujetos usan diferentes relaciones lógicas entre elementos matemáticos de forma correcta, salvo alguna excepción (generalmente en el mismo sistema de representación), recuerdan los elementos matemáticos necesarios en la resolución de una tarea en varios sistemas de representación (gráfico, algebraico y/o analítico), y tienen esbozo de síntesis de los sistemas de representación gráfico, algebraico y/o analítico.Por ejemplo, A2, en la tarea 7c.

Decidir si la afirmación es verdadera o falsa. En caso de ser falsa, explicar por qué o mostrar un contraejemplo. $$\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$$

El alumno realiza una representación G de la función:



A2, representación G de la tarea 7c durante la entrevista

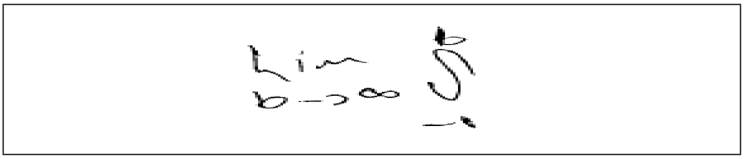
Esto le permite visualizar cuándo la función es discontinua:

I: ¿Cuál es el razonamiento que hace acerca de la proposición 7c?

A2: Es discontinua. En cero. No se puede aplicar.

I: ¿Por qué, qué haría entonces?

A2: Se resolvería como una integral impropia, porque la integral es impropia. Porque presenta una discontinuidad infinita, si es impropia. Uno de sus límites es infinito o el integrando presenta una discontinuidad de tipo infinito.



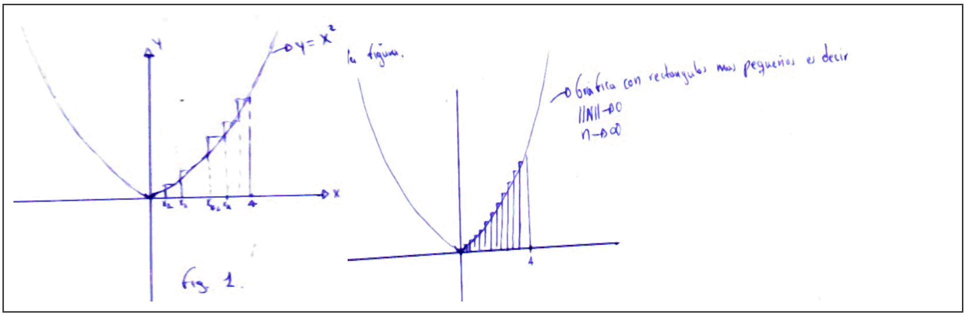
A2, representación A de la tarea 7c durante la entrevista

Este alumno comprende los elementos matemáticos necesarios implícitos para tomar una decisión sobre el valor de la proposición, responde y justifica correctamente el valor de falsedad de la afirmación, establece una relación de conjunción lógica entre los elementos matemáticos LID y TFV cuando considera que la función es discontinua, y por eso no cumple las condiciones necesarias para poder aplicar la regla de Barrow. Además, intenta plantear una integral impropia de forma AN para mostrar cómo se podría calcular la integral presentada en la tarea.

Nivel trans. En el nivel de desarrollo trans del esquema de integral definida, el sujeto suele usar diferentes relaciones lógicas (conjunción lógica, condicional y la contraria de la condicional) entre los elementos matemáticos de forma correcta; suele recordar los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tarea usando los significados implícitos para tomar decisiones, y muestra tener síntesis en los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.Por ejemplo, A11, en la tarea 3:

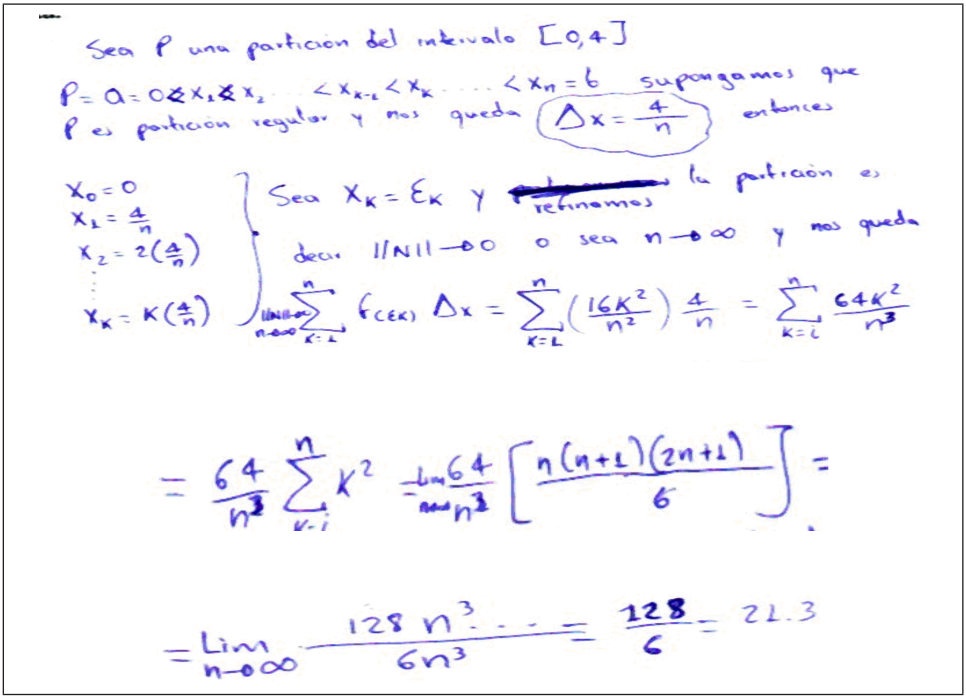
Sea R la región entre la gráfica de la función f(x)=x2 y el intervalo [0,4]
-Utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región R.
-Justifica tu respuesta.

Este alumno trata de rellenar el área por medio de rectángulos de forma G:



A11, representación G de la tarea 3 del cuestionario

Divide gráficamente el intervalo mediante una partición regular, por lo que está utilizando el elemento matemático ACA de forma G. En la figura de la izquierda, traza 5 rectángulos superiores, y en la figura de la derecha, traza bastantes rectángulos superiores para aproximar el área, afirmando que “la gráfica representarectángulos más pequeños y la norma de la partición tiende a cero, entonces n tiende a infinito”, por lo que se podría deducir quetiene la intuición de indivisibles en relación con el área de la figura de la derecha. Luego resuelve la tarea de la siguiente forma:



Sea P una partición del intervalo [0,4]

$P = a = 0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{k-1} < x_k \ldots < x_n = 6$ supongamos que P es partición regular y nos queda $\Delta x = \frac{4}{n}$ entonces

$x_0 = 0$

$x_1 = \frac{4}{n}$

$x_2 = 2(\frac{4}{n})$

$\vdots$

$x_k = k(\frac{4}{n})$

Sea $x_k = \varepsilon_k$ y ~~…~~ refinamos la partición es decir $\|N\| \to 0$ o sea $n \to \infty$ y nos queda

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\,\Delta x = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{16k^2}{n^2}\right)\frac{4}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{64k^2}{n^3}$$

$$= \frac{64}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 \quad \lim_{n\to\infty}\frac{64}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{128n^3\ldots}{6n^3} = \frac{128}{6} = 21.3$$

A11, resolución A y AN de la tarea 3 del cuestionario

El alumno establece una relación entre la representación G y los sistemas de representación A y AN de los elementos ACA y ALS porque, a partir de las gráficas anteriores, calcula las sumas de Riemann, y calcula el límite para obtener el valor del área.

> I: ¿Sabría comentarme cómo ha resuelto la tarea?
>
> A11: Me piden que utilice particiones, entiendo por partición como coger un intervalo y dividirlo en un conjunto de $n-1$ puntos, donde esos puntos van a ser mayores que el extremo izquierdo, pero menores que el extremo derecho del intervalo, entonces lo que hice fue suponer que los puntos van a ser x_1 , x_2 y que todos estos valores eran mayores que "a", que era en este caso cero, que era el extremo izquierdo del intervalo y que todos esos puntos eran menores que "b", eso es lo que entendía como particionar, por comodidad tuve en cuenta que iba a particionar esto con una cosa que se llama la partición regular, que es que la longitud de cada intervalo sea la misma. Después de eso lo que hice fue aplicar la definición de integral definida y la suma de Riemann.

A partir del esquema general de aproximación, utiliza las sumas de Riemann y les aplica el límite para establecer conexión con el elemento matemático la LID. Establece relación entre los elementos matemáticos ACA y LID, porque relaciona el concepto de área como una aproximación y el concepto de integral definida.

El análisis y los resultados mencionados en el apartado anterior, nos permitieron caracterizar a cada estudiante en un determinado nivel de desarrollo del esquema del concepto de integral definida por la forma como había resuelto todas las tareas a lo largo del cuestionario, por la manera de justificar los procedimientos de resolución durante la entrevista, y por la representación de dicho concepto matemático por medio de un mapa conceptual. El establecimiento del nivel de desarrollo para cada alumno se hizo asignando el mayor de los subniveles que demostró utilizar en la resolución de las tareas. Esto se hizo a pesar de que para algunas situaciones mostrara un nivel de desarrollo inferior. Además, se ha demostrado que el desarrollo del esquema del concepto de integral definida está ligado al de otros conceptos como el de función, límite, continuidad o derivabilidad. El dominio de estos otros esquemas determina, en gran medida, el grado de adquisición del concepto de integral definida.

CONCLUSIONES

En un comienzo de desarrollo del esquema, en el nivel INTRA 1, el estudiante no es capaz de establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos que utiliza en la resolución de las tareas y, muchas veces, cuando se produce un indicio de relación lógica lo hace de forma incorrecta. En el nivel INTRA se evidencian las primeras apariciones de un intento de conjunción lógica, aunque sigue siendo de manera aislada o inconclusa. De forma creciente y progresiva en los niveles ÍNTER 1, ÍNTER y TRANS se van incrementando las relaciones lógicas, ya no solo se establece la conjunción lógica, sino que aparece, además, la condicional, y en algunos casos, la relación del contrario de la condicional.

Dentro de las relaciones lógicas hemos identificado que la conjunción lógica se establece siempre entre dos o más elementos matemáticos que generalmente están coordinados de modo gráfico y algebraico, y en algunos casos se utiliza también el registro analítico; la condicional o implicación lógica es una relación que se establece vinculada a las propiedades de la integral definida, y la relación del contrario de la condicional es una relación que aparece asociada a la condición suficiente de existencia de la integral definida.

En cuanto a los sistemas de representación, algunos alumnos tienen dificultades con la representación gráfica de algunas funciones como es el caso de la función valor absoluto. En otras situaciones, para determinar el área de los rectángulos superiores o inferiores, necesitan establecer no solo la base sino también la altura; para ello deben coordinar el sistema gráfico y el algebraico, pero no son capaces de identificar la altura de los rectángulos a partir de la gráfica y de la expresión algebraica que representa la función, y como no coordinan el registro gráfico con el algebraico, aunque dibujan rectángulos inferiores, las áreas las calculan para rectángulos superiores.

De las consideraciones anteriores surgen ciertos interrogantes que desde una perspectiva de futuro podrían ser motivo de investigación: ¿cómo debe organizarse la enseñanza a partir de los resultados de esta investigación para mejorar el aprendizaje de este concepto matemático? ¿Cómo podemos ayudar a los alumnos a superar aquellas dificultades y/o concepciones erróneas que tienen en relación con los elementos matemáticos que constituyen el concepto de integral definida? Dado que el elemento matemático el "área como límite de una suma" es aquel en el que los alumnos muestran más dificultades por no tener encapsulado el concepto de límite como un objeto matemático ¿cómo podríamos profundizar en su aprendizaje? Este estudio se ha hecho con alumnos de licenciatura de Matemáticas, ¿cambiaría significativamente la caracterización del esquema de integral definida si los alumnos fuesen de otras titulaciones? ¿Cómo planear un diseño curricular que permita construir los conceptos previos y adquirir un aprendizaje duradero de aquellos elementos matemáticos que configuran el concepto de integral definida? Nuestro trabajo se ha basado en el desarrollo de la comprensión del concepto de la integral definida, mediante un estudio descriptivo y explicativo de los resultados obtenidos, a partir de los elementos matemáticos y de las relaciones lógicas establecidas entre dichos elementos matemáticos. De acuerdo con esta descripción del grado de comprensión que muestran los alumnos sobre la integral definida ¿cómo lograr que los alumnos adquieran una construcción/comprensión de forma consciente de este concepto matemático?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aldana, E. (2011). Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría "APOE". Tesis doctoral. Salamanca:Universidad de Salamanca España.

Aldana, E., & González, M. T. (2009). Comprensión del concepto de integral definida, el caso de un alumno universitario. (CD). XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación Matemática (SEIEM). Santander (España).

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Development in Ungraduate Mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education, 2, 1-32.

Calvo, C. (1997). Bases para una propuesta didáctica sobre integrales.Tesis de Maestría.Universitat Autónoma de Barcelona

Camacho, M., Depool, R. & Sabrina, G. (2008). Integral definida en diversos contextos. Un estudio de casos. Educación Matemática, 20, 3, 32-57.

Czarnocha, B., Dubinsky, E., Loch, S., Prabhu, Vrunda. & Vidakovic, D. (2000). Conceptions of Area: In Students and in History. College Mathematics Journal, 32, 2, 99-109.

Czarnocha, B., Dubinsky, E., Loch, S., Prabhu, Vrunda. & Vidakovic, D. (2000). Conceptions of Area: In Students and in History. College Mathematics Journal, 32, 2, 99-109.

Depool, R. A. (2004). La enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un programa de cálculo simbólico (PCS). Tesis Doctoral. La Laguna: Universidad de La Laguna.

DeVries, D. J. (2001). RUMEC / APOS TheoryGlossary. Georgia Collage & State University.Milledgeville.http://www.cs.gsu.edu/~rumec/Papers/glossary.html. [Disponible el 18 de agosto de 2008]

Dreyfus, T. (1991). Advanced in Mathematical Thinking Processes. En D. Tall. (Ed.).Advanced in Mathematical Thinking (pp. 25-41). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, En D. Tall. (Ed.). Advanced Mathematical Thinking (pp. 95-123).Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetana a la educación matemática universitaria. Educación Matemática, 8, 3, 24-41.

Dubinsky, E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 3, 1, 47-70.

Dubinsky, E. & MacDonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduated Mathematics Education Research. En D. Holton (Ed.),The teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study. 7 (pp. 273-280). Dordrecht: Kluwer Academia Publisher.

González-Martín, A. S. (2006). La generalización de la integral impropia desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y aprendizaje. Tesis doctoral. La Laguna: Universidad de la Laguna.

Ginsburg, H. P., Kossan, N. E., Schwartz, R. & Swanson, D. (1983). Protocol Methods in Research on Mathematical Thinking. En H. P. Ginsburg (Ed.): The Development of Mathematical Thinking. New York: Academic Press.

Mundy, J. (1984).Analysis of Errors of First Year Calculus Students. En A. Bell, B. Low, & J. Kilpatrick (Eds.). Theory Research and Practice inMathematics Education. Proceedings, ICME 5.Adelaide, Working group reports and collected papers, Shell Center. Nottingham.170-172.

Orton, A. (1983). Students' Understanding of Integration.Educational Studies in Mathematics.14, (1), 1-18.

Paschos, Th. & Faumak, V. (2006).The reflective abstraction in the construction of the concept of the definite integral. A case study. En J. Novotna; H. Moraova; M. Kretke; N. Stehlikova (eds.) Proceedings of the 30th Conference of Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education, (Vol. 4, pp. 337-344). Prague: Czech Republic.

Piaget, J.; García, R. (1982). Psicogénesis e historia de la ciencia. México, España, Argentina, Colombia. (Madrid): Siglo XXI.

Rasslan, S. & TalL, D. (2002). Definitions and Images for the Definite Integral Concept.Proceedings of the 26th PME. 4, 89-96.

Turégano, P. (1994). Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo infinitesimal. Tesis Doctoral. Valencia: Universitat De València.

Vinner, S. (1991).The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En D. Tall. (Ed.). Advanced Mathematical Thinking, 66-81. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dime qué preguntas y te diré que promueves en la clase de Estadística

*Lucía Zapata Cardona**

RESUMEN

La presente conferencia expone algunas reflexiones con respecto a las preguntas que los profesores exhiben en la clase de Estadística de los diferentes niveles del sistema educativo colombiano. Estas reflexiones se contrastan con las demandas de la última reforma curricular que promueve el desarrollo del pensamiento estadístico de los estudiantes desde los primeros grados de educación. Se finaliza describiendo la tipología de las preguntas que priman en la clase de Estadística y estudiando las implicaciones prácticas de dichas preguntas.

Palabras clave: educación estadística, documentos curriculares, desarrollo del profesor, análisis y reflexión sobre la enseñanza.

* Universidad de Antioquia, Colombia. Grupo de Educación en Ciencias Experimentales y Matemáticas - GECEM. Dirección electrónica: luzapata@ayura.udea.edu.co

INTRODUCCIÓN

Existe evidencia empírica de que el conocimiento del profesor y las acciones que emprende en la clase influencian el aprendizaje de los estudiantes (Hill & Ball, 2004). Algunos trabajos en investigación en educación matemática se han interesado por la formación académica y la experiencia del profesor, mientras que otros han estudiado el uso que el profesor le da a eso que sabe. Se trata de las habilidades del profesor para comprender y utilizar el conocimiento de la materia para llevar a cabo la enseñanza. En otras palabras, cómo las habilidades en la materia se usan para exhibir representaciones específicas, explicaciones y análisis de las soluciones de los estudiantes, y para diseñar tareas, gestionar la discusión y formular preguntas que estimulen el aprendizaje.

Una investigación terminada recientemente (Zapata-Cardona & Rocha, 2012) estudió diferentes aspectos que dan cuenta del conocimiento estadístico para la enseñanza tales como las explicaciones y las representaciones que usa el profesor, el tipo de ejemplos, las formas de abordar las dificultades de los estudiantes, el diseño de las clases, la evaluación, y el tipo de preguntas que se hacen en la clase. Cualquier salón de clase de Estadística está determinado por la interacción entre los actores que intervienen el proceso educativo. Pues el salón de clase es un espacio social con formas particulares de comunicación donde el discurso tiene una estructura específica. En algunos contextos socioculturales, la interacción es mínima pero en el contexto educativo colombiano la dinámica de la clase de estadística se caracteriza por la abundancia de los episodios de interacción entre estudiantes y profesor. Esta interacción es crucial en el aprendizaje de los estudiantes y está marcada por diferentes eventos: el tipo de problemas que se proponen, la asignación de los turnos en la participación de los estudiantes, el tipo de preguntas que se hacen en la clase y el control de las interacciones. A pesar de los diferentes eventos que pueden tener lugar en esta interacción, en esta conferencia se da especial importancia a las preguntas que el profesor propone en la clase, ya que el estudio profundo de estas preguntas es un indicador clave de lo que se promueve en el aula de clase. En esta conferencia discutiremos y reflexionaremos sobre las preguntas que los profesores plantean a sus estudiantes en la clase de Estadística. En la clase tienen lugar varias preguntas las cuales atienden a diferentes intenciones. Por ejemplo, hay preguntas que el profesor hace para verificar el dominio de hechos y datos bibliográficos por parte de los estudiantes, otras para hacer la clase activa y otras para estimular el pensamiento de los estudiantes. Las siguientes preguntas ilustran la discusión; observe cómo ellas tienen diferentes intenciones en la clase y promueven diferentes respuestas por parte de los estudiantes.

Pregunta 1: ¿Cómo se calcula la probabilidad de un evento?

Pregunta 2: Un juego se establece así: lanzar dos dados y sumar los puntos obtenidos. Jugador A obtiene un punto si la suma es menor que cuatro. Jugador B obtiene dos puntos si la suma es mayor que once. Se hace el juego 20 veces ¿Es el juego justo? ¿Por qué?

Pregunta 3: ¿Cuál es la población de la que estoy hablando aquí?

Pregunta 4: ¿Es la variable longitud cuantitativa o cualitativa?

La pregunta 1 indaga si el estudiante conoce un procedimiento; la pregunta 2 pone al estudiante en una situación que debe estudiar críticamente para tomar una decisión; la pregunta 3 sugiere que los preguntados tienen información anterior y se indaga por la comprensión de esa información dada previamente, y la pregunta 4 busca determinar si hay claridad en la clasificación de variables. Cada pregunta tiene un propósito diferente, genera respuestas diferentes en los estudiantes, y promueve aspectos diferentes en la clase. ¿Qué promueven las preguntas que se hacen en el salón de clase de estadística colombiano? Es la cuestión que orientará esta conferencia.

REVISIÓN DE LITERATURA

Las preguntas en la clase juegan un papel muy importante en la enseñanza y el aprendizaje. La pregunta efectiva revela el conocimiento del profesor sobre el tema y sobre el procesamiento de información de los estudiantes (Moyer & Milewicz, 2002). Las preguntas que el profesor hace son una muy buena manera de mirar la calidad de la clase. Estas preguntas son importantes en la conformación del clima de la clase, pues permiten el desarrollo del *pensamiento estadístico* de los estudiantes. Las preguntas que hace el profesor tienen diferentes intenciones. Algunas pueden ser utilizadas para estimular el pensamiento de los estudiantes, para estudiar cómo piensan, para iniciar las discusiones, y para revisión de material. Varios estudios se han centrado en las preguntas en el salón de clase. Algunos investigadores han clasificado y contado las preguntas en un esfuerzo por predecir el desempeño de los estudiantes (Adedoyin, 2010; Cotton, 1989; Hancock, 1995). Otros se han centrado en los diferentes tipos de preguntas y han estudiado si diferentes tipos de preguntas conducen a diferentes niveles de pensamiento. Algunos de estos estudios se han centrado en preguntas de orden superior (Brualdi,

1998) preguntas de hechos (Vacc, 1993), preguntas abiertas (Hancock, 1995; Vacc, 1993) y preguntas de prueba (Newmann, 1988).

El tipo de preguntas que hace el profesor en la clase se ha investigado a la luz de diferentes disciplinas. Se ha estudiado en formación de profesores (Çakmak, 2009), educación en ciencias (Chi, de Leeuw, Chiu, & LaVancher, 1994), inglés como segunda lengua (Brock, 1986) y educción matemática (Adedoyin, 2010), entre otros; y los resultados han demostrado que estas preguntas pueden ser consideradas como un dispositivo potente para dirigir, ampliar y controlar la comunicación en el aula. Cuando son bien usadas en la enseñanza, las preguntas pueden funcionar para activar el pensamiento. El profesor puede facilitar el desarrollo del pensamiento crítico, la toma de decisiones y la resolución de problemas. A pesar de los resultados de la investigación y las demandas de las reformas curriculares actuales, los profesores despliegan preguntas similares en la clase y desaprovechan el potencial de la pregunta como recurso didáctico.

En Colombia hemos pasado de un currículo de matemáticas que hacía hincapié en el componente numérico a un currículo integrado que apunta de manera uniforme a la aritmética, álgebra, geometría, estadística, y medición (MEN, 2003). En particular, el componente estadístico del nuevo currículo enfatiza más en las habilidades de interpretación, razonamiento, predicción, comparación, justificación, e inferencia que en la aplicación de algoritmos y conocimiento de hechos. En otras palabras, el nuevo énfasis del currículo en el componente aleatorio sugiere unas nuevas formas de emprender la enseñanza de la estadística que promueva esas habilidades. Es decir, la inclusión del componente aleatorio en el currículo debe orientar el desarrollo del *pensamiento estadístico*. Aunque hay abundante discusión con respecto a lo que se entiende por este constructo, Moore (1997) estableció una lista de componentes que debe tener este tipo de pensamiento: la necesidad de datos; la importancia de la producción de datos; la omnipresencia de la variabilidad; la medida y modelación de la variabilidad. Posteriormente, Snee definió *pensamiento estadístico* como "procesos de pensamiento que reconocen que la variación está a todo nuestro derredor y presente en todo lo que hacemos; todo trabajo es una serie de procesos interconectados, y el identificar, caracterizar, cuantificar, controlar y reducir la variación proporciona oportunidades de mejoramiento" (1990, pág. 118). Trabajos académicos más recientes han establecido que una persona que piensa estadísticamente comprende, explica, analiza e interpreta los resultados de procesos estadísticos. Reconocen también que la toma de decisiones no puede estar fundamentada en evidencia anecdótica, que es necesario encontrar formas de resumir y representar la información para que tenga sentido, y que es fundamental considerar siempre la presencia de la variabilidad (Batanero, 2002; Ben-Zvi & Garfield, 2004; Gal, 2002; Gal, 2003).

Por ende, enfocarse en las preguntas que hacen los profesores en la clase de estadística es crucial en este momento histórico en Colombia. Esta información nos da una idea de cómo la reforma curricular está siendo adoptada y da indicios de lo que se promueve en el aula de estadística.

METODOLOGÍA

En esta conferencia se tienen en cuenta resultados de un estudio recientemente terminado en el cual se investigaron las preguntas de los profesores en la clase de estadística (Zapata-Cardona & Rocha, 2012). En dicho estudio se recogió información de observaciones de dieciocho clases de Estadística de Educación Básica y Media, entrevistas a profesores antes y después de las clases (ocho profesores y diez profesoras), artefactos documentales usados por los profesores y debates en las comunidades de aprendizaje. En este contexto se entendió comunidad de aprendizaje como una agrupación de profesores en ejercicio, investigadores y profesores en formación reunidos en torno al estudio reflexivo de una clase de Estadística donde cada individuo desde su experiencia personal y profesional se involucra en reflexiones críticas sobre su práctica pedagógica. Se caracteriza por el trabajo colaborativo, y enfatiza que el aprendizaje se da a través de la interacción social (Wenger, 1998).

Las clases se grabaron en vídeo, y las entrevistas, en audio; clases y entrevistas fueron transcritas textualmente para facilitar el posterior análisis. La principal fuente de información fueron las observaciones aunque los hallazgos fueron cotejados con entrevistas y discusiones en las comunidades de aprendizaje. Se analizó la información con la ayuda del software Atlas.ti. Cada investigador, de forma independiente, revisó las videograbaciones de las clases; con la ayuda de las transcripciones, se codificaron los episodios en los cuales los profesores hicieron preguntas. Luego, los investigadores compararon los códigos y hubo acuerdo en la mayoría de ellos. Aquellos códigos en los que no hubo acuerdo fueron discutidos hasta encontrar un punto común. Una vez llevada a cabo la codificación, el equipo de investigación se reunió en la comunidad de aprendizaje para estudiar cada una de las preguntas hechas por los profesores y para construir las categorías de preguntas (como se sugiere en Hernández-Sampieri, Fernández-Collado, & Baptista-Lucio, 2008). La comunidad de aprendizaje incluyó el principal investigador, el co-investigador y los auxiliares de investigación, quienes además eran profesores en formación, y algunos de los profesores de Estadística en servicio que participaron en el estudio. Las preguntas de los profesores fueron clasificadas en cuatro categorías de acuerdo con el propósito de la pregunta y el nivel de conocimiento requerido por los estudiantes para responderlas.

Algunos resultados

Un total de 267 preguntas fueron formuladas por los dieciocho profesores de Estadística en ejercicio. La codificación, organización y análisis de las preguntas que tuvieron lugar en los salones parece ser indicativo de un patrón. Las preguntas dieron lugar a cuatro categorías que se explican a continuación:

Preguntas cerradas. Estas son las preguntas que el profesor hizo cuando estaba interesado en obtener una respuesta específica asociada con el conocimiento de hechos o con respuestas cortas que no requerían una elaboración profunda. La mayoría de las veces estas preguntas se iniciaban con expresiones tales como: ¿cuánto, cuál, qué es? De vez en cuando los profesores pedían específicamente definición de conceptos. Algunos ejemplos de preguntas en esta categoría son: ¿Cuántas tarjetas rojas hay en una baraja de cartas? ¿Qué es un espacio muestral? ¿Qué es probabilidad para usted? ¿Cómo podemos definir el azar? ¿Cuál es el valor más pequeño que puede conseguir en un cálculo de probabilidades?

Preguntas de procedimiento. A veces los profesores estaban interesados en examinar la forma de llevar a cabo una rutina algorítmica determinada. Ejemplos de estas preguntas son: ¿Cómo se puede encontrar la media aritmética? ¿Cómo podemos calcular la probabilidad? ¿Cómo podemos obtener el espacio muestral? La respuesta a este tipo de preguntas fue satisfactoria para los profesores cuando los estudiantes verbalizaban el procedimiento.

Preguntas de monitoreo. A veces los profesores utilizan estas preguntas para comprobar si los estudiantes siguen ciertas explicaciones. Estas preguntas están destinadas a examinar el ritmo de la clase, pero no necesariamente a estudiar la comprensión profunda de los estudiantes. Las *preguntas de monitoreo* podrían parecerse a las *preguntas cerradas*, pero una característica central para diferenciarlas es considerar que el propósito de las *preguntas de monitoreo* es comprobar si los alumnos están siguiendo la clase. Estas deben estar relacionadas con el discurso actual de la clase y vincular información que acaba de ofrecer. Algunos ejemplos de estas preguntas son: ¿Cuál es la muestra en este ejemplo? ¿Qué es lo que tenemos que encontrar en este ejercicio? ¿Alguien tiene alguna pregunta? ¿Cuál es la población de la que estamos hablando aquí?

Preguntas de análisis. Se trata de preguntas de orden superior, y diferentes versiones de ellas incluyen: demanda de los profesores por justificación, razonamiento, predicción o decisión. Los profesores exploran las razones que los estudiantes dan para ciertas acciones o decisiones, verifican la capacidad de los estudiantes en el uso de cierta información para sacar conclusiones, desafían a los estudiantes a razonar sobre la validez de cierta información, dan información y piden a los estudiantes tomar decisiones. Aunque este tipo de preguntas fue muy ausente en las observaciones de clase, se presentan algunos ejemplos: ¿Cuáles son las razones por las que tienen que decir que el jugador A tiene algunas ventajas sobre el jugador B? ¿Cuál sería la utilidad de conocer la probabilidad de un evento? ¿Qué piensa usted del razonamiento de su compañero? Lanzamos un dado, si se obtiene un múltiplo de tres yo lavo los platos, pero si se obtiene un múltiplo de dos usted lava los platos. ¿Es justa esta propuesta?

La tabla 1 muestra el porcentaje de preguntas de cada tipo hechas por los profesores. El porcentaje de las preguntas varió de profesor a profesor, pero los resultados parecen indicar que hay un patrón en el cual los profesores privilegian las *preguntas cerradas* y *preguntas de monit*oreo sobre las *preguntas de análisis*. Solo una profesora tuvo un patrón diferente en la densidad de las preguntas con una frecuencia uniforme para cada tipología, pero el porcentaje total revela que hay un fuerte privilegio de las *preguntas cerradas* y una marcada ausencia de *preguntas de análisis.*

Tabla 1: Porcentaje de preguntas de cada tipo desplegadas por los profesores

Profesor	*Grado*	*Tópico de la Clase*	*Tipo de preguntas*			
			Cerradas	*Procedimiento*	*Monitoreo*	*Análisis*
Carlos[1]	Sexto	Representación gráfica de los datos	55,6	11,1	33,3	0,0
William	Noveno	Probabilidad	91,7	8,3	0,0	0,0
Mosquera	Octavo	Representación gráfica de los datos	12,5	12,5	75,0	0,0
Susana	Noveno	Técnicas de conteo	12,5	50,0	25,0	12,5
Marta	Décimo	Medidas de dispersión	50,0	0,0	16,7	33,3

1 Los nombres de los profesores son seudónimos para proteger la identidad de los participantes.

Rodrigo	Décimo	Medidas de tendencia central	0,0	0,0	0,0	0,0
Gloria	Décimo	Probabilidad	50,0	25,0	16,7	8,3
Claudia	Octavo	Conceptos estadísticos	25,0	25,0	25,0	25,0
Pablo	Once	Probabilidad	44,4	25,9	11,1	18,5
Fredy	Décimo	Probabilidad	45,5	18,2	0,0	36,4
Diana	Noveno	Medidas de tendencia central	40,5	14,3	21,4	23,8
Oswaldo	Décimo	Representación gráfica de los datos	39,1	4,3	47,8	8,7
Ricardo	Séptimo	Medidas de tendencia central	83,3	16,7	0,0	0,0
Rosalba	Quinto	Representación gráfica de los datos	71,4	0,0	28,6	0,0
Marcela	Séptimo	Probabilidad y representación gráfica	63,6	13,6	9,1	13,6
Zoraida	Tercero	Recolección de datos	88,9	0,0	11,1	0,0
Carmen	Cuarto	Recolección de datos	100,0	0,0	0,0	0,0
Sonia	Décimo	Probabilidad	55,2	24,1	13,8	6,9
Porcentaje total			52,1	15,4	19,1	13,5

La clasificación demuestra que las *preguntas cerradas* se presentaron en las clases el 52,1% de las veces; *preguntas de procedimiento,* el 15,4%; *preguntas de monitoreo,* el 19,1%, y *preguntas de análisis* el 13,5%. Estos resultados hacen público que las preguntas que se despliegan en la clase de Estadística promueven un nivel de pensamiento básico, mientras que las preguntas que estimulan el pensamiento de orden superior en los estudiantes fueron ausentes. Además, estos resultados dejan claro que la clase de Estadística en Colombia queda corta para ser considerada en coherencia con la última reforma curricular que establece estimular el desarrollo del *pensamiento estadístico* de los estudiantes más que el aprendizaje de hechos y procedimientos.

Los resultados de este estudio se pueden explicar desde diferentes puntos de vista. En primer lugar, las preguntas de bajo nivel de pensamiento toman poco tiempo para prepararse, mientras que las preguntas de alto nivel de pensamiento son exigentes y requieren el conocimiento bien integrado del profesor sobre el tema, los estudiantes y la gestión de la clase. En segundo lugar, los profesores podrían no ser conscientes del nivel de pensamiento promovido a través de sus preguntas. La mayoría de los profesores participantes en el estudio se sorprendió cuando los resultados fueron socializados en la comunidad de aprendizaje. Los profesores concluyeron que ellos podrían no estar desafiando lo suficiente a sus estudiantes al privilegiar las preguntas de bajo nivel.

En tercer lugar, los profesores de Estadística podrían no sentirse cómodos con la disciplina que enseñan y ellos podrían preferir hacer preguntas en las que tienen el control total de la clase y no se arriesgan con respuestas inesperadas. Un estudio reciente reveló que el 20% de los profesores que tienen la responsabilidad de la enseñanza de la Estadística en Colombia nunca han tomado un curso de Estadística, y el 50% sólo han tomado un curso (Zapata-Cardona & Rocha, 2011). La interacción abundante en la que el profesor propone *preguntas cerradas* da cuenta de lo que se privilegia en la clase de Estadística. Las *preguntas cerradas* indagan por hechos concretos y definiciones; posiblemente esto es lo que valora el profesor en el aprendizaje de la Estadística. La cantidad de preguntas cerradas, de procedimiento y de monitoreo en el aula podría indicar la falta de confianza de los profesores en la materia que enseñan. Estas tres tipologías de pregunta dieron cuenta del 86.5% de las preguntas, lo cual revela un profundo privilegio que podría leerse como una forma de controlar lo que pasa en la clase para sentirse cómodo y seguro. Las preguntas abiertas y de análisis fueron escasas, tal vez debido al temor de enfrentarse a la imprevisibilidad de las respuestas de los estudiantes.

Por último, todos los profesores participantes en este estudio fueron conscientes de la reforma curricular y lo que hicieron en la clase se supone que debía atender al currículo; sin embargo, el tipo de preguntas que son estimuladas en el aula estuvieron lejos de ser consideradas promotoras del *pensamiento estadístico* solicitado en la reforma. Tal vez lo que hacen los profesores en la clase refleja la manera de interpretar la reforma curricular. Esto podría indicar que una adopción exitosa de una reforma requiere una fuerte participación de profesores reflexivos, no sólo como consumidores de la norma sino como creadores.

IMPLICACIONES

El uso eficaz de las preguntas en la clase despierta la curiosidad, estimula el interés y motiva a los estudiantes a buscar nueva información. Los estudiantes que se enganchan en el proceso de cuestionamiento se benefician de la aclaración de conceptos, la aparición de puntos clave, y la mejora de las habilidades de resolución de problemas. Al hacer preguntas, los profesores evalúan los conocimientos de los estudiantes, determinan las necesidades para centrar la enseñanza en puntos específicos, y animan a los estudiantes a pensar en niveles cognitivos superiores (Caram & Davis, 2005).

Una buena pregunta puede potenciar el aprendizaje del estudiante mediante el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico, refuerzo de la comprensión, modificación y acomodación de concepciones erróneas, suministro de retroalimentación útil y oportuna, y estimulación de la discusión en clase. Las preguntas sirven como una herramienta de enseñanza por la cual los profesores administran y dirigen el aprendizaje, evalúan la comprensión del estudiante e identifican áreas problemáticas. Son muchas las razones por las cuales es necesario promover preguntas de alta calidad en la clase de Estadística; sin embargo, esta no es una habilidad que se desarrolla espontáneamente.

Los resultados de este estudio sugieren que la reflexión docente es necesaria. Los profesores podrían no ser conscientes del nivel de pensamiento promovido en su salón de clases por medio de sus preguntas si alguien no les ayuda a ver las implicaciones prácticas de sus acciones. Los profesores pueden mejorar sus habilidades para hacer preguntas si se familiarizan con diferentes tipologías de preguntas que ayuden a los estudiantes a pensar críticamente. Los profesores deben recibir una formación reflexiva en el desarrollo de sus habilidades para formular preguntas. Hay evidencia de que la formación continua puede contribuir al desarrollo de las habilidades del profesor para hacer preguntas que estimulen el pensamiento de alto nivel de los estudiantes en el aula (Brock, 1986). Una buena pregunta es una poderosa herramienta de enseñanza y los profesores deberían estar en condiciones de saber cómo utilizarla para enseñar con eficacia. Hacer una buena pregunta también requiere de conocimientos técnicos.

Los resultados presentados también sugieren que en Colombia los profesores de Estadística en servicio usan preguntas en el salón de clases por razones diferentes, pero *animar a los estudiantes a pensar* es una de las razones menos valorada. La mayoría de las preguntas propuestas por los profesores de Estadística se centró en preguntas de bajo nivel, las cuales solo buscan confirmar los conocimientos de los estudiantes en hechos o en procedimientos y no necesariamente los alientan a usar esos conocimientos en contextos reales. Los estudiantes deben ser desafiados con preguntas que no solo estén apuntando a verificar su conocimiento sino que ofrezcan oportunidades para ir más allá de respuestas a preguntas cerradas de hechos o de procedimientos. El nuevo currículo demanda el desarrollo del *pensamiento estadístico* y los estudiantes deben estar en condiciones de proponer sus propias preguntas, conjeturar, criticar y argumentar ideas estadísticas. La argumentación es una habilidad que debe ser estimulada a muy temprana edad. Varios autores (Balacheff, 2000; Fischbein, 1982) han evidenciado la dificultad que los estudiantes tienen al argumentar, y las preguntas cerradas no contribuyen al desarrollo de esta habilidad.

Contar con técnicas apropiadas para hacer preguntas son habilidades favorables en los profesores; sin embargo, el desarrollo del *pensamiento estadístico* en los estudiantes requiere también un conocimiento del área bien desarrollado y bien integrado por parte del profesor. Tal vez los programas de desarrollo profesional para los profesores sean mucho más complejos de lo previsto y estos deberían enfocarse en la formación integral y no solo en aspectos aislados de la enseñanza.

La elección de las preguntas del profesor en la clase podría ser un indicador de sus creencias respecto a la enseñanza de la Estadística. Por ejemplo, el hecho de favorecer las preguntas cerradas y de procedimientos por encima de las preguntas de análisis podría traducirse en la creencia de que la Estadística se aprende cuando se dominan hechos y procedimientos. Además, la marcada ausencia de preguntas de análisis podría reflejar un débil énfasis en la interpretación y argumentación para la promoción del *pensamiento estadístico*. Este resultado es un indicador clave para sugerir que los programas de formación inicial y continua de profesores podrían incluir un componente en términos de la reflexión sobre las preguntas que ellos mismos formulan en su práctica docente. Estas preguntas podrían constituirse en una herramienta de reflexión para estudiar el alcance de las preguntas y para confrontarlos con sus propias creencias sobre la enseñanza de la Estadística.

Promover las preguntas cerradas y el aprendizaje de procedimientos va en contra de la actitud investigativa que se debe desarrollar en los estudiantes y que es también promovida por el currículo colombiano cuando establece que el objetivo de la Estadística en la enseñanza preuniversitaria es el desarrollo del *pensamiento estadístico*. La actitud investigativa en los estudiantes se desarrolla cuando se enfrentan a la solución de preguntas desafiantes, fundamentadas la mayoría de las veces en problemas reales, y el profesor puede promover esto si desde las preguntas que se formulan en la clase se simula un ciclo investigativo similar al propuesto por Pfannkuch y Wild (2000). Este ciclo investigativo consiste en enfrentar al estudiante a una situación problemática en un contexto real, en la cual deba pasar por las etapas que los estadísticos profesionales atraviesan cuando resuelven problemas reales. Esto es, plantear un problema, diseñar un plan de solución, recoger unos datos y analizarlos, y finalmente sacar conclusiones.

La investigación estadística se usa para expandir el cuerpo del conocimiento en "contexto". Por lo tanto, el objetivo fundamental de la investigación estadística es el aprendizaje en la esfera del contexto. El aprendizaje es mucho más que recolectar información: involucra la síntesis de ideas e información nuevas con ideas e información existentes en una comprensión mejorada (Wild & Pfannkuch, 1999, pág. 225).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adedoyin, O. (2010). An investigation of the effects of teachers'classroom questions on the achievements of students in mathematics: Case study of Botswana community junior secondary schools. *European Journal of Educational Studies, 2*(3), 313—329.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. .* Bogotá, Colombia: Una Empresa Docente.

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística: Conferencia inaugural. Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística. Buenos Aires.http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/CULTURA.pdf.

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges. En D. Ben-Zvi, & J. Garfield, *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (págs. 3–15). The Netherlands: Dordrecht.

Brock, C. A. (1986). The effects of referential questions on ESL classroom discourse . *TESOL Quarterly, 20*(1), 47—59.

Brualdi, A. (1998). Classroom questions. *Practical Assessment, Research and Evaluation. ERIC/AE Digest, ED422407, 6*(6).

Çakmak, M. (2009). Pre-service teachers' thoughts about teachers' questions in effective teaching process. *Elementary Education Online, 8*(3), 666—675.

Caram, C. A., & Davis, P. B. (2005). Inviting student engagement with questioning. *Kappa Delta Pi Record*, 19–23.

Chi, M., de Leeuw, N., Chiu, M., & LaVancher, C. (1994). Eliciting self-explanations improves understanding. *Cognitive Science, 18*, 437—477.

Cotton, K. (1989). *Classroom questioning.* Northwest Regional Educational Laboratory: School Improvement Research Series (SIRS).

Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof . *For the Learning of Mathematics, 3*(2).

Gal, I. (2002). Adults´ statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*, 1–25.

Gal, I. (2003). Expanding conceptions of statistical literacy: An analysis of products from statistics agencies. *Statistics Education Research Journal, 2*, 3–21.

Hancock, C. L. (1995). Enhancing, mathematics learning with open-ended questions. *The Mathematics Teacher, 88*(6), 496—499.

Hernández-Sampieri, R., Fernández-Collado, C., & Baptista-Lucio, P. (2008). *Metodologia de la investigación*. México: McGrawHill.

Hill, H. C., & Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's Mathematics Professional Development Institutes. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 330—351.

MEN. (2003). *Estándares básicos de matemáticas.* Santa Fe de Bogotá: Centro de Pedagogía Participativa.

Moore, D. (1997). New pedagogy and new content: The case of statistics. *International Statistical Review, 65*, 123–165.

Moyer, P. S., & Milewicz, E. (2002). Learning to question: Categories of questioning used by preservice teachers during diagnostic mathematics interviews. *Journal of Mathematics Teacher Education*(5), 293–315.

Newmann, F. (1988). A test of higher-order thinking in social studies: Persuasive writing on constitutional issues using NAEP approach. *Social Education, 54*(4), 369–373.

Pfannkuch, M., & Wild, C. (2000). Statistical thinking and statistical practice: Themes gleaned from professional statisticians. *Statistical Science, 15*, 132–152.

Snee, R. (1990). Statistical thinking and its contribution to quality. *The American Statistician, 44*, 116–121.

Vacc, N. (1993). Implementing the professional standards for teaching mathematics: Questioning in the mathematics classroom. *Arithmetic Teacher, 4*(2), 88–91.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice learning, meaning and identity* . Cambridge: Cambridge University Press.

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223–248.

Zapata-Cardona, L., & Rocha, P. (2011). Actitudes de profesores hacia la estadística y su enseñanza. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* Recife: Brasil.

Zapata-Cardona, L., & Rocha, P. (2012). *Qué es y que debe ser en Educación Estadística.* Bogotá, Colombia: Investigación apoyada por COLCIENCIAS — Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación — contrato 782 de 2009 Codigo 1115-489-25309.

Aprender es participar.
El caso de la demostración en geometría euclidiana

*Leonor Camargo Uribe**

RESUMEN

Expongo una conceptualización de aprendizaje desde la teoría de la práctica social que se concreta en una propuesta sobre cómo ver el aprendizaje de la demostración en geometría euclidiana plana. Las ideas se ilustran con fragmentos de la actividad académica realizada por estudiantes de segundo semestre de Licenciatura en Matemáticas. La conferencia está dirigida a futuros profesores, profesores de matemáticas de secundaria y formadores de docentes.

* Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: lcamargo@pedagogica.edu.co

INTRODUCCIÓN

En la introducción de su libro *Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad*, Wenger (1998) nos invita a reflexionar sobre el supuesto según el cual aprender es un proceso individual, separado del resto de nuestras actividades y resultado directo de una enseñanza. Bajo este supuesto se han organizado tradicionalmente las instituciones educativas; en ellas es común observar a los estudiantes tomar notas sobre lo que dice un profesor, ejercitarse individualmente resolviendo problemas tomados de un texto y presentar evaluaciones individuales en donde se considera que pedir o prestar colaboración es hacer trampa. Wenger se pregunta qué tipo de comprensión acerca de cómo se produce el aprendizaje y qué cambios se darían en las aulas, si adoptamos un supuesto diferente y miramos el aprendizaje como un proceso social de participación impregnado de nuestras experiencias como seres humanos. Su teoría de la práctica social es un intento por desarrollar esa perspectiva.

En esta conferencia pretendo esbozar la teoría de la práctica social, propuesta por Wenger, con el propósito de invitar a profesores en formación y en ejercicio a profundizar en ella, pues la veo como una alternativa para comprender y estimular el aprendizaje de las matemáticas y como una vía para fundamentar experiencias investigativas en Educación Matemática. Aunque no considero que la teoría de la práctica social sustituya a otras teorías de aprendizaje, veo que presenta un enfoque y aporta un conjunto de supuestos que proporcionan una base conceptual útil para analizar de una manera diferente a la usual: el aprendizaje de las matemáticas y particularmente de la demostración.

Inicialmente presento algunos fundamentos en los que se apoya la teoría. Después me refiero a los principales presupuestos de esta. Finalmente describo algunos de los componentes más importantes, ejemplificándolos con fragmentos de la actividad matemática de estudiantes de segundo semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE LA PRÁCTICA SOCIAL

La teoría de la práctica social, desarrollada por Wenger (1998), se deriva de la teoría sociocultural propuesta por Lave & Wenger (1991). A su vez, esta última se fundamenta en principios generales de la aproximación sociocultural al aprendizaje, desarrollada por Vygotsky (1978), algunos de los cuales sintetizo a continuación:

Los procesos cognitivos individuales tienen sus raíces en la interacción social, a través de la comunicación que se lleva a cabo en las actividades culturales en las que los individuos participan colectivamente. El aprendizaje sucede mediante un proceso de interiorización en el cual los fenómenos sociales se transforman en fenómenos psicológicos que se llevan a cabo en el plano mental (Goos, 2004). En particular, las clases pueden ser vistas como espacios de interacción social en las cuales los individuos participan en actividades colectivas, discuten acerca del significado de dichas actividades y de cómo se llevan a cabo y por esta vía aprenden.

Las acciones humanas, tanto en el plano individual como en el plano social, están mediadas por herramientas y signos (Goos, 2004; Mariotti, 2000). Este es un principio central de la aproximación sociocultural en el ámbito educativo. Al usar mediadores en diseños didácticos cuidadosamente planeados, estos permiten desplegar una rica actividad experimental, fuente de ideas y conjeturas y, a la vez, contribuyen a generar vías de acceso al conocimiento a través de la comunicación.

La contribución de una persona más experimentada, como guía durante el aprendizaje, es fundamental; esta persona debe brindar apoyo gradual según se van desarrollando las competencias del aprendiz. La interacción entre el individuo que está aprendiendo y la persona más experimentada activa funciones mentales que no han madurado en el aprendiz, pero que yacen en una región intermedia entre los niveles potencial y real de su desarrollo (Blanton & Stylianou, 2003). Mediante la relación con un experto, el aprendiz inicia un proceso que le permite acercarse o llegar a la condición de experto a través de su participación en actividades compartidas (Forman, 1996). En el ámbito educativo este principio cobra gran importancia, pues es el profesor, como miembro experto en la clase, quien introduce a los estudiantes en los estándares del conocimiento 'oficial', a través de la coordinación entre las ideas que los alumnos son capaces de producir y aquellas admitidas por la comunidad académica de referencia, a las que potencialmente los estudiantes pueden acceder.

A pesar de compartir los tres principios, la teoría formulada por Lave y Wenger (1991) se distancia un poco de la idea del aprendizaje como un proceso de interiorización de información externa para crear una representación interna, sugerida por Vygotsky (1978). Según Lave & Wenger, este proceso puede confundirse con un proceso de transmisión o asimilación de conocimiento. Por esta razón, los autores evitan establecer una dicotomía entre fenómenos psicológicos internos y externos. En lugar de ello, ven el aprendizaje como participación en actividades de una comunidad que incluso puede existir fuera o dentro de una institución educativa. Desde ese punto de vista, por ejemplo, el aprendizaje de las matemáticas se considera como el acceso a prácticas significativas cercanas a las de comunidades de profesionales que producen matemáticas o las usan (Forman, 1996).

PRESUPUESTOS DE LA TEORÍA DE LA PRÁCTICA SOCIAL

Wenger (1998) parte de cuatro presupuestos sobre la naturaleza del conocimiento y del aprendizaje:

(i) somos seres sociales y este es un aspecto esencial del aprendizaje;

(ii) el conocimiento es un asunto de competencia en relación con ciertas actividades valoradas socialmente (entre las cuales podríamos considerar el descubrir y validar hechos científicos);

(iii) conocer es cuestión de participar de manera activa en la consecución de empresas conjuntas;

(iv) el producto del aprendizaje es el significado, visto como nuestra posibilidad de experimentar el mundo en el que vivimos y nuestro compromiso con él (Wenger, 1998).

Estos presupuestos llevan al centro de interés de la teoría: el aprendizaje como participación en prácticas valoradas por comunidades sociales y la construcción de una identidad con relación a dichas comunidades. En ese sentido, al adoptar este enfoque es posible aceptar que aprender a demostrar es un proceso de participación en una práctica que es valorada por comunidades que producen y usan matemáticas.

COMPONENTES DE LA TEORÍA DE LA PRÁCTICA SOCIAL

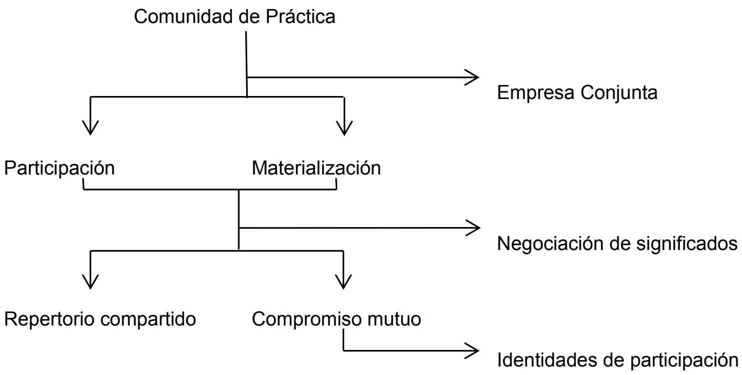
En lo que llama un inventario inicial, Wenger se refiere a los siguientes componentes que considera necesarios para poder caracterizar el aprendizaje como un proceso de participación:

Significado: considerado como el producto negociado del aprendizaje y entendido como la posibilidad que tenemos, individual y colectivamente, de considerar el mundo, nuestras experiencias y nuestra vida como algo que tiene sentido y es valioso, *Práctica:* vista como el conjunto de recursos, sistemas de referencias, perspectivas histórica y socialmente compartidas y actuaciones que permiten asumir un compromiso mutuo en la acción,

Comunidad: reconocida como la configuración social en donde nuestras empresas se definen como valiosas y nuestra participación se reconoce como competente,

Identidad: puntualizada como el efecto del aprendizaje en quiénes somos y en la creación de una historia personal en el interior de las comunidades a las que pertenecemos.

Desde el punto de vista de Wenger (1998), estos componentes están profundamente interrelacionados y se definen mutuamente de tal forma que no es tarea fácil usarlos como herramientas analíticas tal como los describe el autor. Para favorecer una lectura comprensiva inicial propongo un esquema de relaciones entre los componentes, procurando no tergiversar la teoría (figura 1).



Parto del componente 'comunidad', para referirme a la noción de comunidad de práctica, en el interior de la cual se desarrolla una 'práctica' con el objeto de llevar a cabo una 'empresa conjunta'. En el devenir de dicha práctica sucede una permanente 'negociación de significados', gracias a procesos de 'participación' y 'materialización' en un 'repertorio compartido' de experiencias que produce 'identidades de participación' diferenciadas, según el 'compromiso mutuo' asumido por los participantes. A continuación, voy a referirme a cada uno de estos componentes, ilustrando las ideas con algunos ejemplos sacados de fragmentos de una clase de geometría plana que sirvió de base para un experimento de enseñanza en el que se pretendía que los estudiantes aprendieran a demostrar (Camargo, 2010).

Comunidad de práctica

La unidad primaria de análisis del aprendizaje en la teoría de la práctica social no es el individuo sino la configuración social en donde este puede llevar a cabo, junto con otros, una empresa de su interés. En la interrelación con los demás, las personas ajustan la empresa a fines comunes, modifican su relación con los demás y ganan una identidad en relación con la configuración social. Wenger (1998) usa la expresión 'comunidad de práctica' para referirse a esta configuración. En una comunidad de práctica, compuesta por expertos y novatos, las personas experimentan una historia de aprendizaje compartido que supone la existencia de unos principiantes que se incorporan a la comunidad de miembros activos y comienzan un proceso de participación en el que van ganando legitimidad para ser tratados como miembros periféricos o activos y posteriormente miembros plenos de ella. Pero también supone miembros experimentados, o expertos, que lideran y organizan el acceso de los novatos a la práctica y otorgan legitimidad a esta según lo que la comunidad considera una práctica competente. Por tanto, la existencia de una comunidad de práctica no depende de la permanencia fija de sus miembros ni de que estos cumplan siempre la misma función. Una comunidad de práctica sugiere un organismo vivo a donde llegan nuevos miembros, los que ya están dedican parte de su tiempo a iniciar a los principiantes en las prácticas de la comunidad y eventualmente los miembros veteranos son remplazados por nuevos miembros que asumen la dirección de la comunidad hacia la consecución de una empresa conjunta.

Según Goos (2004) con el constructo 'comunidad de práctica' Wenger logra integrar algunos elementos de teorías de la estructura social –que dan primacía a las instituciones, normas y reglas– con varios elementos de teorías de la experiencia situada –que privilegian las dinámicas de la existencia diaria y la construcción local e interpersonal–. Para Cobb et al. (2003) y Stylianides (2007), en el caso de la enseñanza de las matemáticas, cuando se concibe una clase como una comunidad de práctica, el constructo también incluye lo que los miembros toman como garantía de verdad en el curso de las interacciones que transcurren en ella, que se relaciona con lo que la comunidad de profesionales de las matemáticas considera como aceptado, verdadero o válido. Este señalamiento cobra especial relevancia si se está aprendiendo a demostrar.

Generalmente, una comunidad de práctica se conforma libremente y por el tiempo que se requiera para llevar a cabo la empresa que se propone, pero también puede existir en una organización social institucionalizada. En el segundo caso, probablemente se adapta a condicionantes de la institución, tales como los tiempos de iniciación y terminación, la inclusión de nuevos miembros solo en ciertos momentos o la definición de la empresa por agentes externos. No obstante, preserva características que permiten definirla como una comunidad de práctica, como por ejemplo: la redefinición local o renegociación de la empresa, el establecimiento de su propia dinámica de relaciones y responsabilidades entre los miembros, la emergencia de actividades no planeadas y la evolución en forma autóctona en función de su propia dinámica. (Wenger, 1998). Para poder considerar una organización institucional como una comunidad de práctica, interesa, por lo tanto, capturar la riqueza de las interacciones sociales y actividades no necesariamente predeterminadas que se despliegan libremente en su interior, más allá de la simple estructura prefigurada.

Considerar que cualquier clase de matemáticas es una comunidad de práctica es una decisión polémica que genera discusión entre los investigadores. Por ejemplo, Boylan (2005) considera que, en la mayoría de los casos, la naturaleza de las clases de matemáticas se aparta de la descripción de una comunidad de práctica y, por lo tanto, el uso generalizado de la denominación tergiversa el significado de esta y se pierde el valor analítico de la teoría. Para sustentar su planteamiento afirma, entre otras cosas, que las relaciones de poder en una clase son determinantes de la participación de los estudiantes en ella, lo que no ocurre en una comunidad de práctica en otro ámbito; en ese sentido, los estudiantes se someten a las prácticas, más que contribuir a crearlas y conformarlas. Esta idea es señalada también por Lerman (2001) al referirse a la naturaleza coercitiva generalizada de la participación de los estudiantes en una clase.

De otra parte, la clasificación de los miembros de una clase en expertos y novatos también es cuestionada por investigadores como Adler (1998) y Lerman (2001), quienes señalan que es difícil establecer la correspondencia de dicha clasificación con los roles usuales de profesor y estudiantes porque no es claro a qué comunidad de expertos representa el profesor -si a la comunidad de profesionales en matemáticas o a la comunidad de profesores de matemáticas- y, además, porque la mayoría de los estudiantes no participan de la clase para volverse profesores de matemáticas o matemáticos. Esto hace que conceptos de la teoría de Wenger (1998) como participación periférica legítima[1] no se apliquen fácilmente al contexto educativo.

[1] Este concepto, acuñado por Lave y Wenger (1991) será explicado más adelante.

Adicionalmente, Adler (1998), Graven y Lerman (2003) y Krainer (2003) ponen de presente que en comunidades de práctica no institucionales el interés central del experto está en alcanzar las metas que se propone la empresa de la comunidad, y, por vía indirecta, a través de su participación en las prácticas de la comunidad, el novato aprende. En cambio, en los contextos educativos el principal interés del profesor es el aprendizaje *per se* de los estudiantes. En ese sentido, el aprendizaje está mediado por esfuerzos específicos de enseñanza y este hecho condiciona la práctica que se lleva a cabo y genera una práctica específica, alejada de una práctica real.

Las consideraciones anteriores han llevado a algunos investigadores a matizar la expresión 'comunidad de práctica' cuando describen algunas clases de matemáticas que podrían concebirse como tales, en el sentido establecido por Wenger (1998). Clark (2005) se refiere a ellas como 'comunidades de práctica de clase', Goos (2004) las denomina 'comunidades de práctica inquisitiva', Rogoff (1997) las llama 'comunidades de aprendices' y Winbourne y Watson (1998, citados en Boylan 2005) les dan el apelativo de 'comunidades locales de práctica matemática'. Estos autores se refieren a dichas comunidades como ámbitos en donde los estudiantes pueden considerarse a sí mismos capaces de producir matemáticas y hay un reconocimiento público a la posibilidad de desarrollar competencias matemáticas a través de actividades conjuntas y de los roles asumidos. Los estudiantes reconocen el valor de trabajar colectivamente hacia el logro de significados comunes, comparten vías de comportarse, lenguajes, hábitos, valores y herramientas; las clases se llevan a cabo con la participación activa de los estudiantes y, por momentos, se ve que todos están comprometidos en la misma actividad. En ese sentido, describen rasgos distintivos de una comunidad de práctica en el sentido descrito por Wenger (1998) y el constructo sigue siendo válido para analizar el aprendizaje que tiene lugar en una clase de matemáticas.

Desde mi punto de vista, Wenger (1998) hace una contribución importante al desarrollo de perspectivas socioculturales sobre el aprendizaje, al ofrecer herramientas analíticas útiles para estudiar el aprendizaje por medio de la participación y la formación de identidades. Por ello, veo factible adoptar el constructo 'comunidad de práctica' como unidad de análisis del aprendizaje. Sin embargo, los cuestionamientos que he señalado en los párrafos anteriores me llevan a atender la recomendación de Boylan (2005) cuando pide asumir una postura reflexiva y vigilante en la aplicación de la teoría asumida, para no correr el riesgo de hacer una caracterización a la ligera de clases de geometría como las que propongo como ejemplo de constitución de una comunidad de práctica.

Una versión del curso Geometría Plana, de segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, en donde pusimos en juego, junto con la profesora del curso y el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, una enseñanza experimental, fue considerada por mí como una comunidad de práctica de clase. Dado que el diseño y el desarrollo del curso se hicieron modificando el estilo usual de trabajo en un curso de ese nivel, en busca de la participación de los estudiantes en la actividad demostrativa[2], me pareció pertinente suponer el surgimiento de una comunidad de práctica en el interior del escenario educativo institucional. Sin embargo, dado que la naturaleza de las clases era claramente diferente a la naturaleza de las comunidades que sirvieron de base a Wenger (1998) para la construcción de la teoría, consideré más apropiado emplear el término acuñado por Clark (2005), 'comunidad de práctica de clase', y caracterizar a qué me refiero con este.

En primer lugar, identifiqué una configuración social en donde la profesora y los estudiantes llevaron a cabo una empresa de su interés. A través de la participación y el deseo de sacar adelante la empresa ocurrió el aprendizaje de los estudiantes como un efecto de la práctica. Aunque el objetivo principal de los estudiantes era aprender, y el de la profesora era lograr que sus estudiantes aprendieran, fue posible proponer a los estudiantes la consecución de una empresa conjunta, diferente a la de aprender, y organizar la clase en función de esta, buscando con ello hacer partícipes a los estudiantes de sacar adelante dicha empresa. En ese sentido, aunque los estudiantes no se agruparon inicialmente motivados por contribuir en una empresa que se les propuso, terminaron involucrándose en sacarla adelante. Por ello, la profesora redefinió la meta del curso Geometría Plana invitando a los estudiantes a hacer parte activa de la construcción de una porción de un sistema teórico. Veamos cómo la profesora introdujo este propósito el primer día de clase:

---

[2] Adopto la definición de 'actividad demostrativa' sugerido por el grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría' como aquel que involucra los procesos de conjetura y justificación, relacionados entre sí por el hecho de que se justifica lo que se conjetura. El proceso de conjeturar tiene por meta la formulación de conjeturas, es decir, enunciados de carácter general, fundamentados en la observación o el análisis de indicios, cuyo valor de verdad no lo tiene definido el sujeto pero este tiene un alto grado de certeza sobre su veracidad, razón por la cual son candidatas a entrar en un proceso de justificación que las valide dentro de un sistema teórico determinado. El proceso de justificar tiene por meta la producción de una argumentación de carácter deductivo que valide la conjetura formulada, es decir, la sustente como verdadera dentro de algún sistema de conocimiento (e. g., creencias, representaciones gráficas, sistema teórico).

P: El propósito del curso dice es iniciar la construcción de un sistema teórico de geometría euclidiana plana.

P: Nosotros vamos a comenzar a armar un sistema teórico. Dentro de este sistema tenemos varios elementos como los conceptos, o sea las definiciones, otros son postulados, otros son teoremas y también las reglas que vamos a usar para demostrar o para convencer a los demás. Vamos a tener ciertas reglas muy estrictas que son las que tenemos que seguir.

Ella no definió la meta del curso en función del aprendizaje sino del logro de una empresa. En ese momento, los estudiantes no sabían qué era un 'sistema teórico de geometría euclidiana plana', ni la profesora intentó explicarlo; ella esperaba que entendieran su significado a medida que participaban de la construcción de este. Sin embargo, la declaración de intenciones no es garantía de éxito. Para poder afirmar que el curso universitario de geometría plana se constituyó en una comunidad de práctica de clase hay que mostrar indicios de la construcción colectiva de la empresa conjunta y de cómo profesora y estudiantes avanzaron en el logro de ella.

En segundo lugar, incluyo como miembros de la comunidad de práctica de clase a la profesora y a aquellos estudiantes que participaron en las actividades que se propusieron y evidenciaron un compromiso abierto por sacar adelante la empresa sugerida. Dado que la agrupación de los miembros de una clase de matemáticas no es voluntaria y motivada no por el interés en participar de una empresa sino por la organización curricular propia de una institución educativa, opté por buscar indicadores de la constitución de esta en el tipo de participación y no en la razón inicial por la que las personas se agruparon. En la enseñanza experimental, dado que no hubo un estudiante marcadamente disidente que me permitiera catalogarlo como 'externo' a la comunidad, incluí en ella a la profesora y a todos los estudiantes del curso de Geometría, aunque este no es necesariamente el caso más usual.

En tercer lugar, en la comunidad de práctica de clase los estudiantes tuvieron la posibilidad de moverse desde una posición de novatos hacia la posición de expertos, gracias a las relaciones democráticas que intentó establecer la profesora. Ella hizo esfuerzos sistemáticos por aprovechar la relación asimétrica que sostenía con sus estudiantes para disminuir el efecto limitante de la estructura binaria de poder en la clase, en donde el profesor tiene la autoridad de la calificación y la participación de los estudiantes puede estar motivada por temor a obtener malas calificaciones y no por un interés genuino. La profesora promovió el desarrollo colectivo de ideas de los estudiantes sobre las que eventualmente ella misma no había pensado, lo que la puso, en ocasiones, en el mismo nivel de conocimientos de algunos estudiantes en la solución de algún asunto. En otras oportunidades, algún estudiante asumió una tarea como propia y adoptó el liderazgo de ella, haciendo que la profesora se supeditara a la organización que este promovió. En la medida en que estas situaciones, u otras similares, no fueron esporádicas sino elementos característicos de la interacción entre la profesora y los estudiantes, pude afirmar que las relaciones de poder se transformaron y encontré indicios de la conformación de una comunidad de práctica de clase.

Para ilustrar este tipo de eventos, veamos un fragmento de una interacción. Ocurre cuando, por inquietud de Juan, la clase está buscando una vía para demostrar que el punto D -de la altura CD correspondiente al lado AB del triángulo obtusángulo ABC que conforma, junto con el lado BC el ángulo obtuso $\angle B$-, no pertenece al lado AB (figura 2a). Leopoldo sugiere suponer que no se tiene la interestancia A-B-D lo que lleva al grupo a analizar las posibles opciones para descartarlas: A-D-B, D-A-B, A=D, B=D. Comienzan suponiendo A-D-B (figura 2b). En la interacción, Aníbal propone la idea principal, y la profesora, quien no se había planteado de antemano la situación, contribuye a su desarrollo, a medida que va interpretando lo que el estudiante dice.

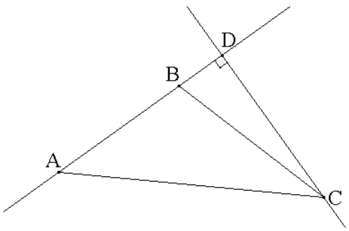


Figura 2 (a)

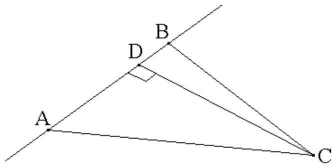


Figura 2 (b)

Aníbal:	Lo que pasa es que ese ángulo [∠ADC] es recto y ese ángulo recto sería externo al triángulo DBC.
P:	O sea que Aníbal sugiere que miremos el triángulo BDC y que el ángulo ¿qué?
Aníbal:	Y que el ángulo ADC es externo.
P:	Es externo y eso ¿qué consecuencia trae?
Aníbal:	Pues que como ese ángulo es externo, entonces tiene que ser mayor que el ángulo/[*]
P:	/entonces la medida del ángulo/
Aníbal:	/ADC es mayor que la medida del ángulo DBC/
P:	/y ahí llegamos a una contradicción porque este [∠B] dijimos que sería mayor que… es obtuso… y ya, bueno, es escribirlo así. Entonces dijimos: este caso [A-D-B] no puede suceder.

* Uso el signo / para señalar que la intervención es interrumpida por el siguiente interlocutor.

En síntesis, asumo la posición sugerida por Boylan (2005) según la cual una clase de Matemáticas puede llegar a constituirse en una comunidad de práctica, pero no todas las clases de Matemáticas lo son. Es decir, deben hacerse esfuerzos explícitos por lograrlo, particularmente referidos a la delegación de responsabilidades a los alumnos con relación a las prácticas matemáticas y sociales en la clase, de tal suerte que pueda llevarse a cabo una trayectoria de participación incluyente de los estudiantes.

La emergencia de comunidades de práctica de clase es fundamental en el aprendizaje de los estudiantes, puesto que el hacer matemáticas es una actividad social. En ese sentido, el aprendizaje está culturalmente determinado por una comunidad local de individuos y es estimulado cuando ellos se comprometen en el proceso de hacer matemáticas. Se puede complementar esta idea mencionando, como Wenger (1998) lo indica, que un buen funcionamiento de una comunidad de práctica es un contexto privilegiado para la construcción de conocimiento debido a que vivir experiencias de compromiso mutuo alrededor de una empresa conjunta –que implican un fuerte lazo de competencia conjunta a la vez que un profundo respeto por las experiencias particulares– es ideal para estimular la generación de nuevas ideas.

Aprender es participar

Según Wenger (1998), aprender es sinónimo de participar, es decir, del proceso de tomar parte activa en alguna actividad, empresa o misión social, situada en un contexto particular, al mismo tiempo que se establecen relaciones con otras personas. Estas relaciones sugieren simultáneamente acción y conexión. En interacción con el proceso de 'materializar'[3] –mediante el cual la experiencia se plasma en productos concretos que son puntos de enfoque en torno a los cuales se organiza la negociación de significados[4]– conforman una dualidad que da sentido a la práctica que se está llevando a cabo.

A manera de ejemplo, sostengo que es posible asumir el aprendizaje de la demostración en el sentido señalado por Wenger (1998) como sinónimo de participación en la actividad demostrativa que se despliega en el curso de Geometría Plana con la meta de construir colectivamente, profesora y

[3] El término 'materialización' es usado por Gómez (2007) para traducir la palabra 'reification' que se encuentra en la edición en inglés del libro de Wenger (1998). Sin embargo, en la traducción en español hecha por Sánchez (Wenger, 2001) se usa la palabra 'cosificación'. Nosotros preferimos el término usado por Gómez pues nos parece que expresa mejor la idea que se quiere dar con la palabra 'reification'.

[4] Explico el término más adelante.

estudiantes, una porción de un sistema teórico de geometría euclidiana plana. En articulación con este proceso, el producto de la actividad demostrativa se materializa en un conjunto de teoremas (Mariotti et al., 1997), es decir, enunciados con su correspondiente demostración matemática enmarcada dentro de un sistema teórico de referencia. A medida que los teoremas se incorporan al sistema este se amplía para abarcar no solo postulados, definiciones y teoremas iniciales, sino nuevos enunciados que se incluyen a medida en que se institucionalizan.

La participación en la actividad demostrativa conforma con la producción de demostraciones, o materialización de la actividad, una dualidad que da significado a la práctica que se lleva a cabo en el curso, concretando en productos observables la experiencia realizada. El resultado de la práctica en el curso universitario de Geometría Plana es un conjunto de postulados, definiciones y teoremas escritos de acuerdo con las normas establecidas en la clase. En ese sentido sostengo que la dualidad participación-materialización es análoga a la dualidad entre los polos proceso-producto de la demostración (Arsac, 2007). Ambas dan sentido a la actividad. Mediante la participación, la rigidez de la forma de una demostración matemática y el propósito de esta cobran significado para los estudiantes. A través de la materialización, se organiza e institucionaliza la práctica en un conjunto de enunciados del sistema teórico para poder comunicarlo, para tener una memoria colectiva que permita recordar decisiones y coordinar nuevas acciones. Como lo señala Wenger (1998), en comunidades cuya empresa busca la continuidad de ciertos significados –como es el caso de una comunidad de práctica de clase–, la participación y la materialización deben mantener una relación de complementariedad que permita la compensación de las limitaciones de una u otra. Si predomina la participación, y la mayoría de lo importante se deja sin materializar, no habrá productos suficientes para destacar lo específico de la práctica y coordinar presupuestos divergentes. Si lo que predomina es la materialización, y hay pocas oportunidades para la experiencia compartida y la negociación interactiva, puede que no se recupere un significado colectivo. Esta perspectiva tiene implicaciones pedagógicas para la enseñanza de conocimientos complejos –como la demostración– pues una insistencia excesiva en el producto sin los correspondientes niveles de participación o, a la inversa, la desatención al producto puede desembocar en una experiencia carente de significado.

En el esquema 1 ilustro, con un ejemplo, la dualidad participación-materialización, tal como fue concebida para el caso de la enseñanza experimental.

A raíz de un problema que se propone a los estudiantes, ellos se involucran en la actividad demostrativa, participan en acciones específicas relacionadas con el problema (parte izquierda del esquema) y en la producción de la demostración matemática del teorema que el problema da lugar (parte derecha del esquema).

Participación ⟷ Materialización

Problema: Dados tres puntos no colineales, A*, B, C*, construir un punto *D* tal que los segmentos *AB* y *CD* se bisequen.

- Exploran: Usan herramientas de Cabri para hacer la construcción, verificar con medidas y con el arrastre que la construcción está bien hecha.
- Conjeturan: Proponen un enunciado de la forma si-entonces, tal como: *si A, B, C son puntos no colineales, ellos determinan dos segmentos que se bisecan.*
- Definen: Establecen una definición para 'bisecar' aceptada por el grupo.
- Argumentan: Justifican deductivamente, la existencia del punto *D*.
- Demuestran: Producen una demostración matemática para la existencia del punto *D*.

Afirmaciones	Razones
1. Sean *A, B, C* tres puntos no colineales.	1. Dado.
2. Existe la recta $\overleftrightarrow{AB}$	2. Postulado P3[1].
3. Existe el segmento $\overline{AB}$	3. Definición D6, (2)
4. Sea *P* el punto medio de $\overline{AB}$	4. Teorema T7, (3)
5. Existe la recta $\overleftrightarrow{CP}$	5. Postulado P3, (1, 4)
…	

Esquema 1. Ilustración de la relación participación-materialización

Participación periférica legítima

Lave y Wenger (1991) usan la expresión 'participación periférica legítima' para referirse al proceso –característico del aprendizaje– mediante el cual los recién llegados a una comunidad se integran a esta. Cuando una persona comienza a hacer parte de una comunidad, y va incrementando su rango de participación en la práctica, se moviliza desde su posición de 'recién llegado' por diferentes posiciones y eventualmente llega a ser 'veterano' o 'experto' en la práctica. Por eso, con la expresión 'participación periférica legítima', sus creadores intentan explicar el desarrollo de una identidad personal, a la vez que se producen y reproducen comunidades de práctica. En el ámbito educativo, al considerar una clase como una comunidad de práctica, se puede usar la expresión para hacer referencia a la evolución en la participación personal de los estudiantes a medida en que avanzan colectivamente en las actividades matemáticas propuestas. Desde el punto de vista de Adler (1998) la expresión refleja el puente que se establece entre la persona y la comunidad de práctica, pues los individuos ganan una identidad inherente al conocimiento que desarrollan con la cual participan de las actividades de la comunidad y contribuyen en su conformación.

En la enseñanza experimental con la que ilustro los componentes de la teoría de la práctica social, a medida que los estudiantes avanzaron en la actividad demostrativa propuesta en la comunidad de práctica de clase, se dio una evolución en la participación. Para utilizar el constructo 'participación periférica legítima' analíticamente, decidí adaptar la propuesta de Fernández (2008) quien define estados de involucramiento en las acciones que se llevan a cabo en el cumplimiento de la empresa. Por ello me refiero a tres estados: *participación periférica legítima*, *participación legítima* y *participación plena*, que distingo por el papel que desempeña el profesor, de acuerdo con Fernández (2008), y por la calificación dada a la participación en términos de relevante (esencial y útil para el cumplimiento de la meta), genuina (con fundamento para lo que se dice o hace y con conciencia de la responsabilidad con la tarea que se lleva a cabo), autónoma (espontánea, por iniciativa propia y por un interés personal) y original (creativa, con ideas propias). En el esquema 2 describo las características particulares de cada estado, aclarando que no siempre es fácil calificar el grado de autonomía, relevancia y originalidad de la participación, por lo que la clasificación no es disjunta.

Participación periférica legítima	Los estudiantes, bajo la dirección y acompañamiento cercano del profesor, participan en la actividad demostrativa con los recursos disponibles, de manera poco autónoma, ni genuina, ni relevante ni original.
Participación legítima	Los estudiantes, con el apoyo del profesor, participan en la actividad demostrativa de manera genuina, relevante u original, pero no autónoma.
Participación plena Los estudiantes, en interacción comunicativa con el profesor, participan en la actividad demostrativa de manera genuina, autónoma, relevante y eventualmente original y son reconocidos como líderes por los demás miembros de la comunidad.	

Esquema 2: Estados de participación

Negociación de significados

Al referirme al aprendizaje de la demostración como una dualidad participación-materialización coincido con Wenger (1998) en afirmar que ella da significado a la práctica que se está llevando a cabo. Debo entonces aclarar a qué me refiero con el término 'significado' y lo que entiendo por 'negociación de significados'.

Con relación al 'significado', tal como lo sugiere Wenger (1998), con ese término no estoy aludiendo a acepciones filosóficas o semióticas sobre la relación entre un signo y un referente sino a una manera de expresar una experiencia determinante en la vida; esta experiencia modifica la identidad de los individuos, la manera como interactúan con los demás, y lo que aportan a las acciones colectivas, definiendo la naturaleza de la práctica que se lleva a cabo. En consecuencia, el significado no surge de la absorción pasiva de información o de la realización de procedimientos mecánicos o rutinarios sino de procesos de participación en las prácticas de la comunidad a la que se pertenece. Parafraseando a Wenger, afirmo que los estudiantes del curso de geometría plana adquirieron un significado de la demostración que es fruto de la interacción entre la participación en la actividad demostrativa, que el mismo grupo va configurando, y el proceso de materializar esa participación en la producción de definiciones y teoremas que alimentan el sistema teórico de referencia.

La naturaleza de la práctica que se lleva a cabo se configura en un proceso que Wenger denomina 'negociación de significados'. Esta expresión ha sido usada de manera similar por diversos investigadores en educación matemática (Richards, 1996; Gómez, 2007) para referirse al proceso de reorganizar las interpretaciones personales de las acciones o ideas, propias y ajenas, ante las acciones o ideas de los demás, en el curso de una interacción en clase. Yo adopto esa acepción y asumo, además, como lo señala Wenger (1998) que este proceso es motivado por las reacciones de unos y de otros, y no necesariamente es explícito. Generalmente se presenta a través de sutiles adaptaciones de las acciones de los participantes según se van ajustando al desarrollo de sus propias interpretaciones. La negociación no es sinónimo de acuerdo total respecto de alguna interpretación sino de un nivel de afinidad que permite el éxito de la comunicación y genera la cultura de la clase.

Para el caso del experimento de enseñanza afirmo que la organización deductiva que se logró, por ser el producto de la negociación de significados, tiene su sello propio, aunque la presencia de un experto dirija la empresa hacia la configuración de un producto cercano a aquel que es valorado culturalmente como contenido para un curso de ese nivel. Cuando los estudiantes del curso de geometría plana discutían la conjetura sugerida por una pareja de compañeros, o la demostración de un enunciado propuesta por alguno de los miembros de la clase, experimentaban un proceso de negociación de significados que configuró lo que para ellos es demostrar. Esta negociación sería imposible si el contenido del curso no fuera fruto de la construcción colectiva. Como lo señalan algunos investigadores (de Villiers, 1986; Hanna, 1990; Herbst, 2002), cuando las demostraciones son presentadas por el profesor a los estudiantes como un producto ya materializado, sin la participación de ellos en su producción, es muy probable que esto produzca una experiencia poco significativa.

Repertorio compartido

Una característica de la práctica como fuente de coherencia de una comunidad es el desarrollo de un repertorio compartido, compuesto por el conjunto de recursos que la comunidad produce o adopta durante su existencia, que pasan a formar parte de la práctica y que generan una producción local de significado (Wenger, 1998). El repertorio combina aspectos de la participación y de la materialización al constituir estilos propios de actuación y de discurso mediante los cuales los miembros expresan su afiliación y su identidad con la comunidad.

Como son el resultado de la historia de desarrollo de la comunidad, los recursos compartidos son intrínsecamente ambiguos, es decir, no pueden preverse completamente ni tienen una función establecida claramente de antemano, sino que se constituyen en elementos para la negociación y, por lo tanto, para posibilitar la construcción colectiva de significados. En ese sentido, la coordinación de perspectivas y el diseño de acciones están siempre en estado de revisión y abiertos a nuevos significados.

Con el término 'repertorio', Wenger se refiere al conjunto de rutinas, palabras, gestos, instrumentos, maneras de hacer y hablar, símbolos, relatos, conceptos, etc., que la comunidad produce o adopta en el curso de su existencia. Con el objeto de precisar el término para darle potencial analítico y usarlo para dar evidencias del aprendizaje de la demostración, yo hago referencia solo a algunos aspectos del repertorio, dejando de lado otros no menos importantes, pero que requieren dispositivos metodológicos complejos para dar cuenta de ellos. Además, los agrupo en dos: los 'modos de hacer' y los 'modos de decir' e incluyo otros aspectos como parte integral de estos dos (figura 3).

'Modos de hacer'	Instrumentos	'Modos de decir'	Palabras
	Rutinas		Símbolos
	Normas		Conceptos
Prácticas			Interacciones
Figura 3: Aspectos del repertorio compartido			

'MODOS DE HACER'

En el curso de Geometría Plana se constituyó un estilo propio de 'hacer' referido a la manera como profesora y estudiantes llevaban a cabo la actividad demostrativa. Los instrumentos de que disponían, las rutinas propias de la clase, las normas que se establecieron determinaron, junto con las prácticas que componen la actividad demostrativa, el 'modo de hacer'.

Al referirnos a los 'instrumentos', hago alusión principalmente al uso peculiar del programa informático de geometría dinámica, Cabri, que estaba a disposición de los estudiantes permanentemente; este determinó el acercamiento que ellos tuvieron a la demostración. De un lado, la participación en la actividad demostrativa se llevó a cabo simultáneamente con el proceso de aprender a usar el programa, y sacar provecho de este en el desarrollo de las tareas, hecho que llevó a que parte de las acciones consistieran en prestar atención al funcionamiento del programa y a cómo este permite o limita hacer explícitos aspectos importantes de la actividad demostrativa. De otro lado, el uso frecuente del programa hizo que la mayoría de los estudiantes lo convirtiera en un instrumento de apoyo en el análisis de situaciones, en la argumentación y en la producción de demostraciones, al hacer visibles aspectos de la práctica de la demostración que no se visibilizan tan fácilmente sin el recurso.

El término 'rutinas' generalmente hace referencia a actividades o acciones acostumbradas que la comunidad de la clase fue incorporando en la práctica cotidiana, fruto de la repetición de pautas de actuación. Algunas son propias de una clase cualquiera, como iniciar o interrumpir lo que estaban haciendo en el tiempo programado para la clase, hacer y entregar las tareas que la profesora solicitaba, llevar un cuaderno de apuntes con la síntesis de lo trabajado en clase, etc. Otras tenían que ver con el estilo propio con el que se desarrolló el curso de geometría. Uso el término rutina, preferencialmente, para referirme con este al conjunto de acciones que componen cada una de las actividades involucradas en la actividad demostrativa. Por ejemplo: identificar propiedades en una representación, establecer cuál definición conviene al sistema teórico, proponer una definición e identificar el papel que cumple una definición en una demostración, evaluar la aceptabilidad de una conjetura, establecer la concordancia entre la construcción hecho y la conjetura propuesta, argumentar, demostrar, etc.

Con respecto a las 'normas', me refiero a la regulación de las formas de participación que emergen y se establecen en la comunidad, con base en la negociación. Como Yackel y Cobb (1996) sugieren, diferencio normas sociales y normas sociomatemáticas. Las normas sociales regulan la estructura de la participación en clase y favorecen que esta se organice alrededor de las ideas de los estudiantes. A lo largo del experimento de enseñanza, se estableció que todas las ideas propuestas por los miembros de la clase eran útiles, sin importar que no estuvieran correctas o completas. Las normas sociomatemáticas regulan la actividad matemática favoreciendo vías de acción, de comunicación y de análisis de aspectos matemáticos de la actividad realizada. En el caso del experimento, estas normas regularon qué conjeturas se aceptaban, qué demostraciones eran válidas, qué formas de argumentar se reconocían como apropiadas, etc., es decir, qué tipo de práctica matemática se podía asociar a la actividad demostrativa y cuál no. Por ejemplo, una norma sociomatemática dominante en la clase era que las afirmaciones usadas en el proceso de argumentar una afirmación o en la producción de una demostración debían justificarse con enunciados extraídos del sistema que se estaba construyendo en el curso y no con información proveniente de otras fuentes, así todos la aceptaran como cierta.

‘MODOS DE DECIR’

Además de los modos de ‘hacer’, el repertorio compartido tenía que ver con los estilos discursivos, o modos de ‘decir’ propios de la clase, mediados por las experiencias que vivieron los estudiantes y por la gestión de la interacción comunicativa por parte de la profesora. Las palabras, los símbolos, los conceptos y el tipo de interacción, dependían en gran medida de los esfuerzos que ella hacía por conciliar las producciones espontáneas de los estudiantes con las formas de comunicación valoradas en la comunidad de profesionales de las matemáticas. Coincidimos con Martin et al. (2005) en señalar que las formas de hablar en una clase son un híbrido entre el lenguaje matemático estándar, el lenguaje específico del dominio matemático y los estándares comunicativos de la mayoría de los profesores con los estudiantes.

A medida que transcurrió el curso de Geometría Plana los estudiantes adquirieron un significado de ciertas ‘palabras’, según el contexto en el que se usaban.

Por ejemplo, ‘convencimiento’, ‘verdad’, ‘certeza’ y ‘validez’ se usaron para referirse a uno de los roles centrales de la demostración, y estaban ligadas a la validez de las justificaciones; pero también se usaban cuando se hacía una verificación de tipo experimental, como paso previo a la producción de una argumentación o una demostración. A pesar de los giros de significado, los estudiantes aprendieron a reconocer a qué se refería cada término en cada momento de la actividad demostrativa.

Otras palabras tales como ‘conformar’, ‘escoger’, ‘localizar’, ‘determinar’ y ‘formar’ también fueron adquiriendo un significado para el grupo, a medida que las iban incorporando en la comunicación. El grupo decidió que el término ‘conformar’ solo se usara cuando se hacía referencia a todos los elementos que constituyen un todo; por ejemplo, no se admitía afirmar que tres puntos ‘conforman’ una recta, pero sí se podía decir que una recta está conformada por puntos. Utilizaban ‘escoger’ para seleccionar un representante cualquiera de un conjunto dado, mientras que ‘localizar’ era sinónimo de detectar aquel con una característica especial. Las palabras ‘determinar’ y ‘formar’ se usaban como sinónimos de ‘constituir’, ‘dar lugar’ o ‘dar forma’.

Los lenguajes geométrico, de teoría de conjuntos y de lógica proposicional se mezclaron con el castellano, tanto en el momento de proponer una conjetura, como de justificarla o producir la demostración.

Los significados de ‘símbolos’, términos y expresiones matemáticas fueron objeto de negociación permanente, favorecida por el especial celo de la profesora por el correcto uso de estos. Por ejemplo, el cuantificador 'existe' se admitía en el consecuente de los teoremas en donde se solicitaba probar que hay al menos un objeto geométrico que tiene las propiedades señaladas, mientras que su uso al formular las afirmaciones o justificaciones que componen una demostración era desestimado para evitar confusiones.

Las letras se usaron como variables para hacer referencia a representantes de una clase de objetos geométricos, pero también para denominar puntos, rectas y ángulos específicos.

El repertorio de 'conceptos' matemáticos de la clase tenía que ver con temas usuales de geometría plana básica tales como punto, recta, plano, segmento, rayo, ángulo, triángulo, cuadrilátero, con los cuales se conformó el sistema teórico en la clase, a partir de la formulación de postulados, definiciones y teoremas alusivos a ellos.

Las 'interacciones' a las que me refiero son aquellas que los estudiantes tenían entre ellos cuando resolvían y discutían los problemas, ejercicios y tareas, y las que sucedían durante la socialización o el intercambio comunicativo de todos con la profesora. Una de las características primordiales de las últimas interacciones era que en ellas había una mediación permanente de la profesora, quien actuaba como interlocutora reaccionando a las intervenciones de los estudiantes, aunque solo fuera para manifestar que ella estaba atenta a lo que alguno decía, parafrasear lo dicho por alguien, otorgar el uso de la palabra o estimular el diálogo.

En síntesis, el repertorio de recursos compartidos determinó un estilo propio con el que los miembros de la clase llevaron a cabo la actividad demostrativa y produjeron demostraciones. Por ser el resultado de la dinámica específica de la comunidad, son de naturaleza ambigua y no pueden preverse completamente. Tampoco pueden atribuírseles funciones claramente establecidas sino que todos ellos constituyen elementos para la negociabilidad y, por lo tanto, para posibilitar la construcción colectiva de significados. El análisis de la participación en el repertorio de prácticas proporcionó elementos para caracterizar el curso como una comunidad de práctica de clase e ilustrar el potencial del estilo de enseñanza propuesto para favorecer el aprendizaje de la demostración, mostrando que los estudiantes vivieron una experiencia de participación genuina en la actividad demostrativa y asumieron responsabilidades importantes en el desarrollo de ideas matemáticas.

Compromiso mutuo e identidades de participación

Wenger (1998) señala que un ingrediente esencial y fuente de cohesión de una comunidad de práctica es el compromiso mutuo de sus integrantes por sacar adelante la empresa conjunta. Pertenecer a una comunidad no significa únicamente incorporarse a un conjunto de personas que comparten alguna característica o tarea en común. Afirmo, siguiendo a Wenger, que el compromiso mutuo se refiere a la generación de relaciones de participación conjunta en asuntos que son importantes, de acuerdo con una meta común.

No puedo asegurar que los estudiantes y la profesora del curso de Geometría Plana conforman una comunidad de práctica de clase solo porque se reunieron tres veces por semana en un salón. Fue necesario mostrar que crearon relaciones entre ellos, en función de sus rasgos personales y de la empresa que emprendieron. Este hecho no significa que siempre hubo armonía perfecta o coexistencia pacífica. Como en cualquier situación de compromiso interpersonal se dieron situaciones de tensión, desacuerdo o competitividad. Coincidimos con Boylan (2005) cuando señala que los conflictos en un salón de clase no son motivo para afirmar que no puede ser una comunidad de práctica, sobre todo si, a pesar de haberlos, se hace evidente un sentido compartido de pertenecer al grupo y de apoyo mutuo en las tareas de la empresa. Claro está, menciona Boylan, esto último no se logra si no se rompe con la tradicional naturaleza individualizada de la práctica matemática en las aulas, principalmente de nivel universitario.

Según Wenger (1998), el compromiso mutuo que caracteriza una comunidad de práctica no supone homogeneidad de los participantes o de las funciones que realizan. Cada miembro de la comunidad encuentra un lugar propio, asume ciertas tareas, genera cierto tipo de situaciones y ayuda a resolver problemas. Por esta vía adquiere lo que el autor denomina una ‘identidad’ que se va configurando a medida que desarrolla formas compartidas de hacer y de decir.

Las identidades de participación son maleables y dinámicas, son construcciones en curso que resultan de la participación en una experiencia vital. El vínculo entre práctica e identidad es uno de los aspectos característicos de la teoría de la práctica social (Wenger, 1998) en tanto enfatiza en la relación entre aprender a hacer y aprender a ser. Por eso, como lo sugieren Adler (1998) y Boylan (2005) la teoría defiende una visión de aprendizaje como proyecto de identidad.

Por poner dos ejemplos ilustrativos, decimos que Nancy, una estudiante del curso de Geometría Plana, se especializó en sacar provecho de algunos teoremas relacionados con el postulado de separación del plano. Así, los demás compañeros, e incluso la profesora, se dirigían a ella cuando se necesitaba hacer uso de dichos enunciados en la producción de algún argumento o demostración. De otro lado, María asumió el papel de controlar la norma de usar en las argumentaciones y demostraciones solo enunciados que se han institucionalizado en el sistema teórico que se estaba construyendo y llamaba la atención a los compañeros o a la profesora cuando se salían de la norma. Gracias a la participación, los estudiantes no solo ganaron conocimiento matemático sobre la demostración sino que desarrollaron una identidad como aprendices de matemáticas en dicho curso, de tal forma que se veían a sí mismos y eran vistos por los demás, como miembros valiosos de la comunidad.

Como indicadores de generación de identidad retomo dos de los señalados por Smith (2006) y Anderson (2007) desde la teoría de la práctica social: la afiliación a la empresa, es decir, la estrecha relación y sentido de pertenencia con el grupo, y la alineación, o sea el proceso de coordinar perspectivas, y acciones y encontrar una base común en la cual actuar, por medio de la negociación.

A MANERA DE CONCLUSIÓN

La teoría de la práctica social es un marco novedoso para analizar el aprendizaje de la demostración, que usualmente es visto desde el punto de vista cognitivo. Son varias las razones por las que propongo e impulso el uso de esta teoría.

Primero, considero que es tiempo, como lo señala Lampert (1992, citado en Stylianides, 2007), de prestar atención al conocimiento que puede ser considerado como compartido y usado públicamente por un grupo de manera confortable, en el interior de una clase. Por ello, es importante centrar la atención en un grupo de estudiantes y no en el aprendizaje individual, vista la clase como una comunidad en la que se realiza una práctica colectiva; y precisamente la unidad de análisis que propone Wenger es la ‘comunidad de práctica’.

Segundo, veo el aprendizaje de la demostración como un proceso de acercamiento de los estudiantes a una actividad demostrativa cercana a la de matemáticos profesionales; y Wenger plantea que las comunidades centran su acción en prácticas sociales y culturales de referencia hacia donde los expertos guían a los novatos.

Tercero, veo necesario tener siempre presente la dualidad proceso-Producto en el aprendizaje de la demostración; y precisamente Wenger define el aprendizaje como una dualidad participación-materialización.

Cuarto, veo fundamental identificar las finalidades de participación de los estudiantes en la 'actividad demostrativa' que se lleva a cabo en las clases de geometría; y Wenger se refiere al repertorio de prácticas compartidas por los miembros de una comunidad.

Por ello, termino la conferencia correlacionando dos marcos conceptuales muy potentes analíticamente en educación matemática: la teoría de la práctica social y una forma de entender la demostración (esquema 3).

La demostración en educación matemática	El aprendizaje en la teoría de la práctica social de Wenger
Naturaleza social de la demostración en tanto práctica regulada por la interacción social del colectivo de personas en donde se realiza.	Unidad de análisis: comunidad de práctica.
En el ámbito educativo los estudiantes deben llevar a cabo acciones similares a aquellas que realizan los matemáticos profesionales cuando justifican sus afirmaciones.	Existencia de una práctica social de referencia.
Dualidad proceso-producto.	Dualidad participación- materialización.
Actividad demostrativa: explorar, conjeturar, definir, argumentar, demostrar y sistematizar. Los enunciados, formas de razonar y formas de expresión deben ser aceptados como verdaderos, válidos o pertinentes y estar al alcance de la comunidad de la clase.	Repertorio de prácticas compartidas por los miembros de la comunidad: actividades, rutinas, acciones, lenguajes, símbolos, expresiones.
Esquema 3: Correlación de marcos teóricos	

La correlación entre estos dos marco teóricos se constituye en un fundamento interpretativo para el aprendizaje de la demostración que da relevancia a su dimensión social, mostrando una faceta de la actividad demostrativa como repertorio de prácticas compartidas en el seno de una comunidad en donde se aprende a demostrar.

Con esta conferencia, espero impulsar el uso de la teoría de la práctica social sugerida por Wenger (1998) para analizar el aprendizaje de otros conceptos y procesos matemáticos en donde se promueve la interacción entre los estudiantes y la construcción colectiva de conocimiento. La aproximación sociocultural promueve la identificación y caracterización de aspectos que han sido dejados de lado o desestimados por perspectivas psicológicas tradicionales que se han centrado en el desarrollo individual de los estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adler, J. (1998). Lights and limits: recontextualising Lave and Wenger to theorise knowledge of teaching and learning school mathematics. En A. Watson (Ed.), *Situated cognition and the learning of mathematics* (pp. 161 - 177). Oxford: Centre for Mathematics Education Research. University of Oxford. Department of Educational Studies.

Anderson, R. (2007). Being a mathematical learner: four faces of identity. *The mathematics Educator, 17(1),* 7 - 14.

Arsac, G. (2007). Origin of Mathematical Proof. History and Epistemology. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 27 - 42). Rotterdam: Sense Publishers.

Blanton, M.L., & Stylianou, D.A. (2003). The nature of scaffolding in undergraduate students' transition to mathematical proof. *Proceedings of the 27th PME International Conference, 2*, 113 – 120.

Boylan, M. (2005). *School classrooms: communities of practice or ecologies of practice?* http:// org.man.ac.uk/projects/include/experiment/mark_boylan.pdf-.

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria.* Tesis doctoral, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Valencia – España.

Clark, P. (2005). *The emergence of a classroom community of practice in a mathematical structures course.* Doctoral Dissertation. Department of Philosophy, Arizona State University.

Cobb, P., McClain, K., de Silva Lamberg, T., & Dean, C. (2003). Situating teachers' instructional practices in the institutional setting of the school and school district. *Educational Researcher, 32 (6),* 13-24.

De Villiers, M. (1986). *The role of axiomatization in mathematics and mathematics teaching.*http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/axiom.pdf.

Fernández, E. (2008). Rethinking success and failure in mathematics learning: the rol of participation. *Proceedings of the Fifth International Mathematics Education al Society Conference,* 1 - 11.

Forman, E.A. (1996). Learning mathematics as participation in classroom practice: implications of sociocultural theory for educational reform. En L, Steffe; P, Nesher; P, Coob; G, Goldin; B, Greer (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 115 - 130). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Disertación doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a Classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education, 35(4),* 258 - 291.

Graven, M., & Lerman, S. (2003). Wenger, E. (1998). Communities of practice: Learning, meaning and identity. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*, 185 - 194.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange, 21(1),* 6 - 13.

Herbst, P.G. (2002). Establishing a custom of proving in American school geometry: evolution of the two - column proof in the early twentieth century. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 283 - 312.

Krainer, K. (2003). Teams, communities & networks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6,* 93 - 105.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. Cambridge: University Press.

Lerman, S. (2001). A review of research perspectives on mathematics teacher education. En F.L. Lin, T. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education: Past, present and future* (pp. 33-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 25 - 53.

Mariotti, A., Bartolini Bussi, M.G., Boero, P., Ferri, F., & Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. *Proceedings of the 21th PME International Conference, 1*, 180 - 195.

Martin, T. S., Soucy McCrone, S. M., Wallace, M. L., & Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 95 - 124.

Richards, J. (1996). Negotiating the negotiation of meaning: Comments on Voigt (1992) and Saxe & Bermudez (1992). En Steffe, L., Nesher, P., Cobb, P., Goldin, G., & Greer, B. (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 69 – 75). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Rogoff, B. (1997). Los tres planos de la actividad sociocultural: apropiación participativa, participación guiada y aprendizaje. En Wertsch, J.V., del Río, P. & Álvarez, A. (Eds), *La mente sociocultural. Aproximaciones teóricas y aplicadas* (pp. 111 – 128). Madrid: Fundación Infancia y Aprendizaje.

Smith, T. (2006). Becoming a teacher of mathematics: Wenger' social theory oflearning perspective. *Proceedings of MERGA International* Congress. www.merga.net.au. /documents/symp32006.pdf.

Stylianides, A.J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38(3),* 289-321.

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society*. Harvard University Press, Cambridge, M.A.

Wenger, E. (1998). *Comminities of practice. Learning, meaming and identity*. Cambridge, Cambridge University.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458 - 477.

Una historia-ficción de la educación matemática en Colombia

*Carlos E. Vasco U.**

DISTINTAS ACEPCIONES DE "HISTORIA"

Estilos de hacer historia

Pensar en historia de muchas maneras: como contar historias, como hacer crónicas históricas, como hacer ciencia histórica, o como vivir la historia, o como sufrir la historia, o como hacer historia.

No hay una única historia. Hay muchas. La historia principal la escriben o la vuelven a escribir los ganadores desde su punto de vista, y por eso voy apenas a contar historias desde el punto de vista de los perdedores.

Yo sufrí esa historia como estudiante de los cinco a los 40 años, y procuré hacerla como asesor, formador e investigador de los 41 a los 75, pero sin ningún éxito.

Espero que al ir contando mis historias, cada uno de ustedes vaya encontrando en qué resuena y en qué disuena de su propia manera de contar las mismas historias, qué le falta y qué le sobra, qué valoraciones positivas o negativas, explícitas o implícitas comparte y cuáles no.

Solo le pido a cada uno que recuerde que toda historia contada es historia-ficción, y que por eso dice tanto sobre la historia del cuento como sobre la del que cuenta el cuento. Por eso le ruego que mantenga en suspenso el juicio final sobre esta historia, reavivando en cada episodio la duda de si la historia contra la que va juzgando episodio por episodio no es también otra historia-ficción como la mía.

Dice otra historia que solo vamos a saber cuál era la verdadera historia de todas las historias el día del juicio final después de misa.

* Universidad Distrital, Universidad del Valle, Universidad de Manizales y Cinde

Tipos de historia de las matemáticas

Una cosa es la historia de las matemáticas, otra la de las matemáticas escolares, y otra la de la educación matemática. Este es el plan del presente trabajo:

1. Historia de las matemáticas en Colombia
2. Historia de las matemáticas escolares en Colombia
3. Historia de la educación matemática en Colombia, en dos etapas:
    3.1. Una historia según la didáctica A,
    3.2. Una historia según la didáctica B.

1. LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN COLOMBIA

Una cosa es la historia de las matemáticas en el mundo, otra en la cultura europea, otra en Latinoamérica, y otra en Colombia. Voy a hacer primero una brevísima historia de las matemáticas en Colombia, pues las demás son muy largas. Esta última es muy corta. Muy corta en el tiempo, apenas dos siglos, y muy corta en historias porque todavía hemos escrito muy pocas.

Prácticamente no sabemos nada del siglo XIX, fuera de algunos cursos en la Escuela Militar y algunas cátedras de secundaria y de ingeniería con textos franceses.

En la primera mitad del siglo XX, Víctor Albis y Clara Helena Sánchez nos hablarían de Julio Garavito, de Indalecio Liévano, de Carlo Federici y Yu Takeuchi; de la Facultad de Matemáticas e Ingeniería de la Universidad Nacional de Bogotá y de la Facultad de Minas en Medellín.

En la segunda mitad del siglo XX se fundan muchas carreras de ingenierías con fuertes componentes matemáticos y de algunos centros o departamentos de ciencias básicas para cursos de servicios.

Fuera de algún esfuerzo de Takeuchi para escribir sus propios textos, los cálculos se han enseñado a partir de textos traducidos del inglés, y los textos para los cursos más avanzados ni siquiera se traducían.

La Revista de Matemáticas Elementales en 1952 en la Universidad Nacional.

Se fundan las carreras de matemáticas puras, y muchas licenciaturas. Hubo otros matemáticos extranjeros que promovieron las matemáticas más avanzadas en el país, como el Dr. Peter Paul Konder, que llegó en 1957 a la Universidad de los Andes y organizó intercambios con Alemania durante 40 años.

Podríamos hablar aquí de Henri Yerly y de John (o Jan) Horvath, quizá de Gustave Choquet, y también de la venida de Marshall Stone y Howard Fehr a Bogotá en 1961, pero ellos vinieron a promover la Matemática Moderna bourbakista ("New Math") para las escuelas y colegios, y por eso los volveremos a mencionar en la historia de las matemáticas escolares.

El profesor Gabriel Poveda dice que solo ha habido tres matemáticos que valdrá la pena recordar en la historia de Colombia, que son Julio Garavito Armero, Álvaro López Toro y Carlo Federici. Por supuesto, yo digo que el cuarto es Gabriel Poveda, y todavía me da pena decir en público el nombre del quinto.

En los setenta se funda la maestría en matemáticas puras en la Nacional, pero ni siquiera en ella nos pensábamos como productores de matemáticas sino como puros consumidores y transmisores de las matemáticas de otras latitudes.

Hoy veríamos que muchas de las contribuciones de Federici eran nuevas, pero él no quería ni dejaba publicarlas y no se conocieron fuera del país. Algunos piensan, además, que sus trabajos no estaban en la frontera de la investigación matemática, sino más bien en la retaguardia: en fundamentos de matemáticas, en sistemas lógicos y en sistemas numéricos elementales; en la sistematización de las geometrías euclidiana y no euclidiana y sus axiomatizaciones; en la frontera de las matemáticas y la física, como la cronología y la cronometría, la teoría de la medición de magnitudes y cantidades y el análisis dimensional.

Esas regiones de la investigación son poco apreciadas por la mayoría de los matemáticos y es difícil mostrar su relevancia directa para la investigación en las regiones de frontera de la disciplina, pero fueron las que me dieron a mí la confianza de que nosotros también podíamos hacer contribuciones desde aquí.

Ya se va empezando a estudiar más seriamente y a sistematizar la historia de las matemáticas en los últimos cuarenta años. Se puede hacer la lista precisa de quiénes vinimos con doctorado en los setenta y los ochenta, y en qué áreas de las matemáticas trabajamos; algunos llegamos con grados en los Estados Unidos como Guillermo Restrepo, Víctor Albis, Roberto Ruiz, Januario Varela y yo; luego llegaron los primeros doctores graduados en Francia, como Carlos Ruiz; o en la Unión Soviética, en Alemania y en el Brasil. También muchos se fueron o se quedaron fuera, a veces por "fuga de cerebros" y a veces por pura "fuga de estómagos".

Se recordará cómo y cuándo llegaron los fascículos de Bourbaki; la fundación de la Sociedad y la Revista Colombiana de Matemáticas, el Boletín las Lecturas, y las publicaciones en ella y en otras revistas internacionales.

Ya se podrá hacer en detalle la historia de los congresos nacionales, las conferencias invitadas y las ponencias, y de la fundación y expansión de los grupos de investigación, uno de los primeros conformado por Carlos Ruiz, Carlos Luque, Álvaro Duque y otros.

Desde las otras historias de las matemáticas escolares y la Educación Matemática será interesante dilucidar cuándo los congresos nacionales empezaron a acoger de nuevo conferencias y ponencias sobre estos temas, cuándo los grupos de matemáticos volvieron a investigarlos y a aportar a ellos, y ojalá alcance todavía yo a historiar un año en el que se pueda decir que la mayoría de los matemáticos ya seamos concientes de que si nos seguimos desentendiendo de ellos, estamos cortando nuestras propias raíces, podando el árbol de nuestro crecimiento demográfico y secándole la savia a nuestros sucesores.

Habrá una historia de cómo comenzó el primer doctorado y los primeros doctores graduados en Colombia, y se podrán reunir y digitalizar todas nuestras publicaciones en revistas internacionales indexadas; la más deprimente de todas las investigaciones cuantitativas será la de contar cuántos artículos en revistas internacionales indexadas citan artículos nuestros.

De todas maneras, veremos que en estos dos siglos es muy corta nuestra historia y que nuestras contribuciones en la frontera de la investigación matemática mundial han sido muy marginales, y en a campos ya muy bien establecidos internacionalmente. Pero esas son las que tenemos, y a partir de ellas seguiremos abriendo nuevos horizontes.

2. LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES EN COLOMBIA

Dijimos arriba que una cosa es la historia de las matemáticas en el mundo, otra en la cultura europea, otra en Latinoamérica, y otra en Colombia. Otra cosa es la historia de las matemáticas escolares en cada una de esas regiones, en particular, en Colombia. En el Brasil se ha avanzado mucho en este tipo de investigación histórica, pero aquí todo está por hacer.

Es muy difícil hacerlo por la falta de memoria histórica que tenemos los colombianos; no se guardan archivos; los apuntes manuscritos y cuadernos se queman cuando se hace un trasteo, o a más tardar, al morir su dueño; los libros de los colegios que no se sacan de las bibliotecas por un par de años se retiran de los anaqueles y se venden por kilos; ni siquiera las editoriales famosas como Stella, Bedout, Voluntad o Pax guardaron un ejemplar de cada edición de sus textos escolares; el Ministerio no tiene ya centro de documentación, y el que había desapareció sin dejar rastro; aunque se conservan los archivos con la correspondencia, las cartas remisorias y las copias de las respuestas, los archivos documentales de informes y anexos se destruyeron; no se encuentran ni siquiera los programas detallados anteriores al 9 de abril de 1948 y muy pocos de los posteriores, ni mucho menos los archivos del proceso de elaboración de ninguno de ellos.

El Archivo Pedagógico de la Universidad de Antioquia tiene algunos materiales que se han preservado casi por milagro, pero es muy frustrante tratar de hacer la historia de lo que se consideraba como matemáticas escolares dignas de enseñarse y aprenderse antes de 1950.

Después de 1950 habría que trabajarle mucho a escribir la historia de la entrada de la Matemática Moderna a Colombia.

Tenemos ya el trabajo de Ángel Ruiz en Costa Rica sobre la reforma de la matemática moderna en las Américas.

Está ya escrita una historia bastante completa del CIAEM/IACME en la página web de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/

Esperamos pronto la tesis doctoral de Maribel Anacona en Cádiz. Mientras tanto, estas son algunas insinuaciones para estudios sobre el tema:

La controversia entre si se debe decir "la Matemática" o "las Matemáticas". Atención al singular: la propuesta bourbakista se basa en la arquitectura de la matemática de Dieudonné. "New Math", "La Nueva Matemática" o "La Matemática Moderna", no "Las Matemáticas Modernas".

El grupo Bourbaki 1930-1940 y 1950-1980

"New Math" en EE. UU., de 1950 en adelante

SMSG "School Mathematics Study Group"

"Sputnik" y la revolución cubana

CIAEM: Comité Inter-Americano de Educación Matemática, Bogotá, 1961

Cuerpos de Paz del Presidente John F. Kennedy en Colombia.

Decreto 1710 de 1963 y Decreto 080 de 1974.

Programas curriculares de primaria y de bachillerato, como se llamaba antes la que hoy se llama "secundaria y media" de sexto a undécimo grado.

Los textos escolares que desarrollaron esos programas.

Si además quisiéramos hacer una historia más de fondo sobre la manera como de hecho se enseñaban esos programas y textos, qué escogían los maestros para enseñar, cómo lo hacían y cómo evaluaban lo aprendido; qué aprendían en realidad los estudiantes de cada grado, qué preguntas hacían, qué anotaban en sus cuadernos y qué resultados obtenían en las evaluaciones, eso sería misión imposible, precisamente por falta de memoria histórica.

Podríamos decir algo sobre las primeras innovaciones educativas, que todavía no eran propiamente "investigaciones", y que llamaremos "la Didáctica A". Pero esa historia nos lleva ya a la tercera parte.

3. LA HISTORIA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN COLOMBIA

Otra cosa distinta de la historia de las matemáticas y de la historia de las matemáticas escolares en Colombia es la historia de la Educación Matemática o Didáctica de las Matemáticas como disciplina académica basada en investigación.

La historia de esa didáctica comienza a finales de los años 60 en Estados Unidos como "Mathematics Education", no muy bien traducida "Educación Matemática", basada en el constructivismo piagetiano, y en los años 70 en Francia, como "Dadictique de la Mathématique", también basada inicialmente en Piaget y en la teoría del contrato social de Rousseau.

Paralelo de la historia con las didácticas A y B según Bruno D'Amore

En el seminario de énfasis en didáctica de las matemáticas en la Universidad Distrital, siguiendo el libro "Didáctica de la Matemática" de Bruno D'Amore (Bogotá: Magisterio, 2006), llamamos "didáctica A" al arte de enseñar matemáticas que viene desde los babilonios, egipcios y griegos hasta fines del siglo XX. Solo sabemos algo de la manera de enseñar de los pitagóricos en el sur de Italia, en Crotona, hacia el siglo VII o VI antes de Cristo, quienes ya tenían muy claro su currículo de matemáticas: aritmética, geometría, astronomía y música.

La didáctica A, desde los pitagóricos hasta la segunda mitad del siglo XX, ofrece buenos consejos de buenos profesores para enseñar mejor algunos temas. No es propiamente una disciplina académica con base investigativa, aunque podría decirse también que su método investigativo era el "ensayo y error", con mucha creatividad en inventar actividades, y tratando de validarlas en las aulas.

Este método empezó a refinarse después de la Segunda Guerra Mundial con la investigación cuantitativa basada en estadística inferencial, con los métodos llamados "experimentales y cuasi-experimentales" con grupo de tratamiento y grupo de control.

En 1979 se publica el primer "survey" o estado del arte de la investigación cuantitativa de todos los años 60 y 70 por parte de la MAA en un libro de Edward G. Beagle, Critical Variables in Mathematics Education.

Pero a esa didáctica que todavía no tenía una teoría específica ni una metodología investigativa todavía la vamos a considerar dentro de "la Didáctica A", y consideramos que "la Didáctica B" solo comienza en los años 70 y se consolida en Francia al comienzo de los 80.

Llamamos "Didáctica B" a la que empezó como una disciplina académica universitaria en Francia con la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau: el contrato didáctico, la transposición didáctica y del estudio de los campos conceptuales de Vergnaud.

Por estar la "B" después de la "A", y por la inicial de Brousseau, la llama Bruno D'Amore "la didáctica B" (pero dicen las malas lenguas que es por la "B" de "Bruno").

Por eso dividiré mi historia de la educación matemática en dos períodos, A y B, con base en esa división de las didácticas. Por supuesto, lo que podría ser la didáctica C lo dejamos para la reunión de Asocolme del año entrante.

El nombre de la disciplina

Desde la vertiente norteamericana la llamo "Educación Matemática" y desde la francesa, "Didáctica de las Matemáticas". Prefiero el plural, pero Bruno D'Amore prefiere el singular. No voy a profundizar en las diferencias entre el singular y el plural, y voy a considerarlas como expresiones sinónimas.

No incluyo al lado del nombre "Didáctica de las Matemáticas" y "Educación Matemática" el nombre escogido para nuestra asociación, "Matemática Educativa", pues este se debió a tensiones políticas de la segunda mitad del siglo pasado, cuando se pensó que nuestra investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares debería distanciarse de la

Educación Matemática como se practicaba en los Estados Unidos y de la Didáctica de las Matemáticas como se practicaba en Francia. Considero que esas tensiones están superadas.

Aunque aprendí mucho de Cantoral, Farfán y sus amigos y discípulos, y de ellos tomamos la idea del pensamiento variacional en los lineamientos y en los estándares de matemáticas, no me gusta el nombre "Matemática Educativa", pues parece insinuar que hay alguna matemática "deseducativa", la cual no creo que exista.

Pero hay quienes piensan que las matemáticas escolares como se han enseñado sí han sido deseducativas. Lo paradójico es que algunos piensan que las deseducativas son las de la "Nueva Matemática" de la lógica y los conjuntos, y que hay que volver a lo básico: "Back to Basics", y otros piensan que las deseducativas son las tradicionales; yo pienso que ninguna región de las matemáticas conceptuales, ni antiguas, ni tradicionales, ni modernas es ella misma deseducativa, sino que nosotros los profesores somos los deseducadores. Lo grave es que no lo queremos admitir.

3.1 Una historia de la Educación Matemática en Colombia desde la Didáctica A

Distingo dos fases en el período A: la primera, la fase A-1, desde 1903 hasta 1961, en la que se trataba principalmente sobre la formulación y revisión de los programas curriculares por contenidos y el desarrollo de los textos escolares respectivos, y la segunda, la fase A-2, de 1962 a 1977, orientada hacia la producción de los programas curriculares por objetivos al estilo de la Tecnología Educativa de la época, todavía sin investigación en didáctica de las matemáticas propiamente dicha, o didáctica B.

3.1.1. La Fase A-1 (1903-1961)

La Ley Uribe de 1903

Los programas como listados de contenidos

Desarrollo de textos escolares según los programas oficiales

Ya en los años 30, las ideas de Decroly, Montessori y Piaget se extendieron en preescolar y primaria, y muchos profesores de matemáticas de la educación básica se declararon "constructivistas", sin cambiar nada en su práctica diaria. Algunos ensayaron las regletas de Cuisenaire, los bloques lógicos de Zoltan Dienes, los bloques multibase y hasta el mini-computador binario de Papy.

El primer autor colombiano de didáctica A que encontré es Ramón Franco, un supervisor antioqueño que publicó dos libros de didáctica de las matemáticas en la Editorial Bedout de Medellín en los 60.

Ya señalé la venida de Marshall Stone y Howard Fehr a Bogotá en 1961. Ellos vinieron a promover la Matemática Moderna ("New Math") para las escuelas y colegios y a empezar el comité y la serie de conferencias CIAEM/IACME, el Comité Inter-Americano de Educación Matemática o la Conferencia respectiva. (Inter-American Committee [Conference] on Mathematics Education).

Vinieron Gustave Choquet y Laurent Schwartz, de Francia; Luis Santaló (Argentina), Leopoldo Nachbin (Brasil), Carlos Imaz (México).

En la primera, aquí en Bogotá en 1961, estuvo Ricardo Losada, y en ese año habíamos sido discípulos de Federici en la Universidad Nacional. También estuvieron Carlo Federici, Germán Zabala, Pablo Casas, Ramírez Montúfar y Schottborgh.

La segunda fue en Lima, la tercera, en Bahía Blanca, y la cuarta, en Caracas. Las conclusiones y recomendaciones las publicaba la Unesco y se enviaban a todos los Ministerios de Educación.

Ricardo y yo no sabíamos que en 1975 íbamos a presentar juntos una ponencia en el IV CIAEM de Caracas, Venezuela, con Mary Falk y Jairo Charris.

Carlo Federici, Germán Zabala y Hernando Silva empezaron a diseñar y experimentar el Método de Educación Integrada MEI.

Primeros "Grupos Federici": Clara Helena Sánchez, Fabiola Loboguerrero, Beatriz Farías

El Instituto Colombiano de Pedagogía ICOLPE y el Instituto de Ciencias.

Federici hace las primeras investigaciones sobre lógica y conjuntos en primaria.

Trabajo en cada fase de los tres períodos A, B y C que consideraré sobre un esquema de siete categorías: programas, currículo, didáctica, investigación, teoría de fondo, epistemología y papel del maestro.

Resumen de la Fase A-1 (1903-1961)

Programas por contenidos

Currículo es lo mismo que programa, y los programas son listas de contenidos bien graduados y secuenciados

Didáctica es una colección de consejos y trucos para enseñar contenidos difíciles, derivados de la experiencia

La investigación es por ensayo y error

La teoría de fondo es la filosofía escolástica y la cartesiana

La epistemología de las matemáticas es la platónica

El papel del maestro es el de enseñar.

3.1.2 La Fase A-2 (1962-1977)

Los Cuerpos de Paz del Presidente Kennedy

Los programas por objetivos del Decreto 1710 de 1963

Las Guías de OAPEC

Los programas del Decreto 080 de 1974

No se conocen los autores ni los marcos teóricos de los programas de 1963 ni de 1974.

No se explicitaba ni la filosofía, ni la historia ni la epistemología de las matemáticas.

La Renovación Curricular de 1976-1994

Alfonso López Michelsen (1974-1978)

Mejoramiento Cualitativo de la Educación

Dirección General de Capacitación y Perfeccionamiento Docente, Currículo y Medios Educativos

Grupos por áreas

Federici asesoró el de matemáticas y el de ciencias naturales de 1976 hasta finales de 1977. Primeros borradores de los programas curriculares de primero a tercer grado.

De esta fase de 1962 a 1977 se conservan las guías de OAPEC y las guías de la Misión Alemana, que explicaban a los maestros la manera de enseñar los programas de primaria del Decreto 1710 de 1963. Margarita Botero de Mesa fue una de las promotoras de las cartillas de la Misión Alemana.

Cuando el Dr. Federici y yo empezamos a asesorar la renovación curricular en 1976 no encontramos en las bibliotecas de los colegios y universidades de

Bogotá sino una traducción de un libro de Gastón Mialaret y de la didáctica de Emma Castelnuovo, además de algunos documentos traducidos del inglés durante la época de los Cuerpos de Paz de 1962 a 1974, y los programas curriculares de 1963 y 1974.

Pero esos programas tenían apenas una selección de contenidos, con objetivos específicos, pero no propiamente una didáctica de las matemáticas, sino algunas indicaciones de cómo enseñar algunos temas o cómo dirigir algunas actividades de aula.

Hasta el año 1976, en el Ministerio no había ninguna unidad, dirección o departamento encargado del currículo y los programas. Se hacían unas reuniones con supervisores, profesores y algún experto, y se corregían o rehacían los programas que salían sorpresivamente por decreto al final del año o a comienzos del año siguiente. Todavía no se sabe quiénes hicieron los programas de primaria de 1963 ni los de secundaria de 1974.

La única oferta teórica de 1961 en adelante era la de la Matemática Moderna bourbakista ("New Math"), promovida por el CIAEM. Los programas de 1963 la incorporaron tímidamente, y mucho más fuertemente los de 1974.

Las editoriales tenían que someter sus textos escolares a juicio del Ministerio, y cada nuevo programa que salía exigía una reescritura de los textos para que al menos pareciera que estaban de acuerdo con los programas oficiales. Eso empezó a generar alguna investigación didáctica, que se expresaba tímidamente en unos folletos que se regalaban a los maestros de los colegios que adoptaban el texto, llamados "Guía de Maestro", en donde los autores de los textos explicaban algunos conceptos difíciles, sugerían algunas actividades y daban las soluciones a los problemas, pues muchos de los maestros, sobre todo los de primaria, no podían resolverlos ellos mismos sin ayuda de las guías.

Habría que hacer un estudio inductivo de las pedagogías y didácticas implícitas en estas guías y en los recuadros y explicaciones de los textos mismos. Pero en ellos no hay una didáctica explícita, ni se proponen teorías psicológicas o didácticas coherentes para guiar la enseñanza y el aprendizaje. Eso solo se intentó con los programas de la renovación curricular de 1976 en adelante, y por eso comenzaré de allí algunas de mis historias.

Los programas de secundaria, entonces de primero a sexto de bachillerato (hoy de sexto a undécimo), emitidos en el gobierno de Pastrana en 1974 (Decreto 080 de 1974), apenas tenían unas páginas de introducción y los listados de contenidos y objetivos. Ni siquiera marco teórico ni propuestas de actividades.

En los Estados Unidos, por ese mismo tiempo, se desarrolló la didáctica B en la educación en ciencias, y comenzó en la educación matemática a partir de las ideas constructivistas de Piaget, con el constructivismo radical de von Glasersfeld, Kilpatrick y Steffe en la Universidad de Georgia. Allí se graduó Adalira Sáenz-Ludlow y posteriormente Vilma Mora.

La revista JRME Journal for Research in Mathematics Education

Se empezó en 1969 con algunas investigaciones con marco teórico piagetiano. Solo en 1976 salió un primer informe de Behr sobre la interpretación de la igualdad, que no se publicó y solo conocí en 1984 por el ERIC.

Lo más potente para el futuro:

¡La educación matemática puede hacer valiosos aportes a las matemáticas puras!

Para obtener una visión de conjunto sobre las publicaciones que ya son claramente de la didáctica B, miremos otras revistas:

La mejor revista europea, la revista ESM Educational Studies in Mathematics, que comenzó en 1969.

En Francia, la principal revista hasta ahora es la revista RDM Recherches en Didactique des Mathématiques

Apenas empieza en 1979 con un artículo de Brousseau sobre los decimales, que no conocí hasta 1984.

En Alemania se podría iniciar en 1972 con la fundación del Instituto de Didáctica de las Matemáticas IDM en la Universidad de Bielefeld, con Hans-Georg Steiner, Heinrich von Bauersfeld y Michael Otte, aunque había muchos otros investigadores aislados en Berlín, Nurenberg y Munich.

La revista ZDM Zeitschrift für Didaktik der Mathematik

Empezó en 1976 como parte de la base de datos MATHDI.

También habría que mencionar la mejor revista del Canadá, FLM For the Learning of Mathematics, fundada apenas en 1981.

Resumen de la Fase A-2 (1962-1976)

Programas curriculares por objetivos según la Tecnología Educativa: objetivos generales y específicos, indicadores de evaluación y actividades detalladas.

Currículo es todo lo que se planifica, implementa y evalúa; se concreta en los programas, y los programas son guías claras "a prueba de maestros".

La didáctica es una manera de enseñar el currículo prescrito; la manera de diseñarlo es el TEyDI y la manera de enseñarlo se indica en cada actividad.

La investigación es por métodos cuantitativos experimentales y cuasi-experimentales.

La teoría de fondo es el conductismo o Análisis Experimental de la Conducta.

La epistemología de las matemáticas es la empirista.

El papel del maestro es el de enseñar según las instrucciones del programa o del texto.

3.2. *Una historia de la Educación Matemática en Colombia desde la Didáctica B*

Tres fases: la primera, la fase B-1, de 1978 a 1994, orientada hacia la formulación de los programas para la Educación Básica Primaria y Secundaria de primero a noveno grado, con un marco teórico unificado que fue publicado en 1984. La segunda, la fase B-2, de 1994 a 2004, orientada por los listados de logros e indicadores de logro (publicados en la Resolución 2363 de 1996) y los lineamientos curriculares (publicados en 1998), con muchas direcciones investigativas, y la tercera, la fase B-3, de 2004 hasta hoy, orientada muy débilmente por los estándares (publicados en 2004), por las pruebas Saber e ICFES, ahora Saber-3, -5, -7, -9 y -11, y por los discursos sobre las competencias, con grupos, escuelas e investigaciones en muchas direcciones divergentes.

3.2.1. La Fase B-1 (1978-1994)

La formulación del marco teórico unificado y los programas para la Educación Básica.

Jubilación de Carlo Federici a fines de 1977

La U. Nacional me envía a asesorar al grupo de matemáticas con un cuarto de tiempo en marzo de 1978.

Llego al MEN en 1978, a conformar un equipo de profesionales técnicos para revisar los programas de primero a tercer grado ya elaborados de 1976 y 1977, y a formular los de cuarto y quinto primaria.

Teresa León, Cecilia Casasbuenas, Celia Castiblanco, Carmen Lucila Osorno, Gabriel Gutiérrez, Orlando Múnera, Virginia Cifuentes

Una teoría epistemológica estructuralista y una psicológica de tipo cognitivo: el constructivismo piagetiano

Un enfoque histórico heurístico: Psicogénesis y Sociogénesis como Ontogénesis y Filogénesis (Piaget y García).

Una teoría sobre las matemáticas: el enfoque de sistemas. Los sistemas concretos o familiares para los alumnos, de donde vendría la modelación, como paso a los sistemas conceptuales y a los sistemas simbólicos.

Un enfoque investigativo de diseño, formación de docentes, experimentación, evaluación y rediseño.

Por eso ya lo considero como parte de la Didáctica B, que apenas comenzaba.

Los programas de primaria se publicaron y establecieron por decreto en ese mismo año y se extendieron gradualmente de 1985 a 1993, y los de secundaria se publicaron y experimentaron de 1986 a 1993, pero no se publicaron oficialmente ni se establecieron por decreto.

En 1993-1994 elaboro la Teoría General de Procesos y la Teoría General de Sistemas para todas las ciencias fácticas y formales.

La Fase B-1 termina abruptamente con la aprobación de la Ley General de Educación en febrero de 1994.

Los 15 años de trabajo, de 1978 a 1993, se pierden totalmente.

Resumen de la Fase B-1 (1978-1994)

Programas curriculares detallados hasta 1993.

Currículo es todo, incluso el currículo oculto, y el explícito incluye diseño, gestión, evaluación y reflexión en cada etapa.

La didáctica es el arte de diseñar currículos, períodos, unidades, clases, pruebas, talleres, guías con base en la investigación.

La investigación utiliza métodos cualitativos, la ingeniería didáctica y los experimentos de enseñanza.

La teoría de fondo es el constructivismo psicológico.

La epistemología de las matemáticas es la piagetiana.

El papel del maestro es el de orientar la construcción y re-construcción de los saberes.

3.2.2. La fase B-2 (1994-2004)

Ley General de Educación en 1994. El Ministerio de Educación pierde la potestad curricular central, caso único en Latinoamérica.

La autonomía de los planteles para elaborar su PEI y sus currículos autónomos según su propio PEI.

La regulación del currículo se reduce a los indicadores de logro, los lineamientos generales de las áreas y los exámenes estatales. Podríamos llamar a esta fase "la Era de los Logros".

Elaboración de las listas de logros e indicadores de logro, de 1994 a 1996, orientada por Teresa León desde el MEN, con la participación de Fecode y expertos de algunas universidades. Los listados de logros e indicadores de logros se expiden por la Resolución 2343 de 1996.

La formulación de los lineamientos curriculares de 1995 a 1998 orientada por Celia Castiblanco desde el MEN, con la participación de grupos de expertos de algunas universidades, especialmente la UPN (Gloria García) y la U. de Antioquia (Gilberto Obando).

Los lineamientos generales del currículo se publican en 1998.

Los cinco tipos de pensamiento matemático: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional.

Para mí el principal es el pensamiento variacional como transversal a todos los demás.

Los cinco tipos de procesos matemáticos: formulación y resolución de problemas, razonamiento, comunicación, formulación, evaluación y ejecución de procedimientos y algoritmos y la modelación o modelización.

Para mí el principal es el proceso de modelación, que es el que permite la formulación y resolución de problemas.

La propuesta de trabajar desde las situaciones-problema.

Resumen de la Fase B-2 (1994-2004)

Programas curriculares autónomos según el PEI de cada IE.

Currículo incluye todos los procesos que se planifican: diseño, gestión, evaluación y reflexión cíclica.

La didáctica es la disciplina científica de diseñar e implementar currículos, programas, proyectos y situaciones didácticas con base en la investigación.

La investigación utiliza métodos cualitativos, ingenierías didácticas, experimentos de enseñanza, análisis del discurso, análisis de videos y otros.

La teoría de fondo es el constructivismo psicológico piagetiano en hibridación con la psicología cultural vygotskiana.

La epistemología de las matemáticas es una hibridación de algunos aspectos de Piaget, de Vygotsky y de los programas de investigación progresivos y regresivos de Lakatos.

El papel del maestro es el de diseñador y orientador de situaciones de aprendizaje.

3.2.3. La fase B-3 (2004-2012)

Ha estado orientada muy débilmente por los estándares (publicados en 2004), por las pruebas Saber e ICFES, ahora Saber-3, -5, -7, -9 y -11, y por los discursos sobre las competencias, con grupos, escuelas e investigaciones en muchas direcciones y con muy distintas teorías y metodologías, especialmente las Ingenierías Didácticas, los niveles de van Hiele, la TAD de Chevallard, Gascón y Bosch, el EOS de Godino, Batanero y Font, el Análisis del Discurso foucaultiano y bakhtiniano, y, últimamente, la Etnomatemática, las Teorías Críticas en educación y otras orientaciones posmodernas, como los Estudios Culturales, los poscoloniales, los estudios de género, G-L, Queer, LGBT, LGBTI y otros.

Yendo "contra la corriente", yo he trabajado en estos años con la Teoría General de Procesos, la Teoría General de Sistemas, enriquecida por la semiótica de Peirce y Duval, y la Teoría General de Modelos y Teorías, de la que hablé en la mesa temática de la mañana de hoy.

Resumen de la Fase B-3 (2004-2012)

Programas inexistentes o copiados de índices de textos escolares, pero que nadie sigue.

Currículo es un veneno que nos está dando el Banco Mundial y otros organismos multinacionales (sin "calidad" ni "calidez"):

El caos curricular

La didáctica es el arte de inventar trucos para sobrevivir ante la invasión de las TIC y la alienación de la juventud.

La investigación vuelve a ser de ensayo y error, talvez utilizando métodos de observación participante y no participante, y análisis de texto o análisis del discurso foucaultiano, bakhtiniano o vandijkiano.

La teoría de fondo es el construccionismo social, con sus variantes de la Teoría Antropológica de lo Didáctico TAD o de la Educación Matemática Crítica EMC.

La epistemología de las matemáticas es la posmoderna: las matemáticas son un lenguaje más y una actividad humana más: la de jugar ciertos juegos de lenguaje, más parecidos al ajedrez que al fútbol.

El papel del maestro es el de dialogar con los saberes previos de sus estudiantes y con los saberes populares y ancestrales, o mejor, intentar dialogar con ellos.

4. CONCLUSIÓN

Afortunadamente la historia no concluye sino que sigue. Cada uno de nosotros debería pensar ahora en cómo sigue, y si yo podría hacer algo por ella, así no valga la pena recordarme en el futuro.

Por eso todo lo que pueda decir como conclusión, o más bien como anticipación, es más bien pura imaginación. Sin embargo, mi conclusión de hoy también aspira a ser futurología y no solo "bolecristalogía".

Para mí, la imaginación proyectiva hacia el futuro se sitúa en los mismos módulos cerebrales de la memoria episódica. Es echar a andar la película de video con las teclas "fast-back" o "fast-forward" (de doble flechita) en mi modelo cerebral.

Trataré de echar a andar modelos mentales intuitivos muy personales y apenas a empezar a echar teorías sobre lo que podría prever para el futuro de Colombia, siendo optimista, aunque recuerdo a todos que Colombia es aquel país del mundo en donde es más difícil distinguir a los optimistas de los realistas.

Para mí, el futuro de las matemáticas, la educación matemática y la didáctica de las matemáticas en Colombia, sea A, B o C, está en la aceptación generalizada del juego analítico de subdividir procesos en subprocesos; del juego noético-semiótico de representar los subprocesos como sistemas "allá adentro" que se vuelven modelos mentales estructurados y dinámicos, y del juego dialéctico de modelos y teorías.

Este escenario futuro de juegos generalizados me permite imaginar una nueva etapa en la que se vayan extendiendo unas matemáticas modelo-teoréticas más ágiles, atractivas y apasionantes que atraigan a muchos niños, niñas y jóvenes a jugar estos juegos; una nueva etapa de la educación matemática en donde no se enseñen ya matemáticas sino en la que docentes y estudiantes jueguen juntos estos juegos matemáticos modelo-teoréticos cada vez más complejos, dinámicos y apasionantes, y una nueva etapa de la didáctica de las matemáticas, que llamo tentativamente "LADIDACTICACÉ", todavía sin dividir la palabra en dos, ni decir qué significa la "Cé".

Pero seguir echando teorías sobre ese modelo que no tengo nada claro todavía sería el tema del Encuentro de Asocolme del año entrante, si todavía estoy contando la historia.

El análisis cartesiano en la solución del problema de Pappus y la introducción de las curvas algebraicas

*Luis Carlos Arboleda**

INTRODUCCIÓN

En otra intervención en una mesa temática de este encuentro de Asocolme hacemos algunas consideraciones teórico-metodológicas sobre la historia de las matemáticas como recurso pedagógico. En particular nos referimos a la apropiación de la historia para desarrollar la capacidad del docente de saber-analizar su propia práctica de formación de pensamiento matemático sobre determinados objetos del currículo.

El planteamiento principal es el siguiente: hacer historia de las matemáticas es historiar, no tanto ideas o mentalidades, sino las razones de ser de los discursos formales, y su constitución en la actividad humana de razonamiento. Ello apunta a darle sentido a la historia según el ideal moderno de enseñanza de las matemáticas propuesto por Chevallard en la teoría de la transposición didáctica de los años 1980: "Descubrir el verdadero funcionamiento de la ciencia y remplazar la génesis ficticia característica de los sistemas formales por el conocimiento de la heurística de los procesos de su constitución".

En fin, en nuestra intervención de la mesa proponemos que uno de los casos de estudio para explorar las posibilidades pedagógicas de la historia de las matemáticas sea la solución del problema de Pappus y la consecuente introducción de la teoría de curvas algebraicas. De hecho, este es un momento muy significativo en la historia de las matemáticas de formación de un nuevo objeto matemático en tres fases (Giusti, 2000): a) resolución general de problemas (Pappus), b) introducción del objeto nuevo (curva-ecuación), c) estudio formal del objeto (teoría de curvas).

* Grupo de Historia de las Matemáticas. Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle

El propósito de la presente charla es, pues, el estudio de los procedimientos analíticos empleados en la solución del problema de Pappus por Descartes en (Descartes, 1954) (en adelante citada como *Geometría*). Se comenzará por distinguir las modalidades de análisis y síntesis en el pensamiento geométrico. ¿En qué radica que la geometría euclidiana sea sintética? ¿Por qué decimos que la geometría cartesiana es analítica? ¿Cómo se entiende desde esta perspectiva el uso corriente de la expresión: "Dado un objeto x, se afirma $P(x)$?".

Esto nos conduce a explicar las razones de Descartes para emplear la doble designación escritural cartesiana de lo dado y lo desconocido, mostrando que la naturaleza del problema cuya solución enfrentaba Descartes (Pappus) influyó en la introducción del lenguaje algebraico y en el cambio de registros de representación. Nos interesa entender por qué la escritura algebraica reduce lo geométrico euclidiano a su última expresión y con ello orienta el pensamiento de manera "más segura" con respecto a la representación figural.

Por último, se estudia la función cognitiva original que comporta el empleo del sistema de coordenadas en la algebrización del problema, y que permite explicar interrogantes como los siguientes: ¿Por qué la noción de relación entre variable e incógnita es esencial al carácter analítico de la curva? ¿Cómo surge la interpretación moderna de "lugar geométrico" como conjunto de parejas del producto cartesiano que cumplen determinada relación?

Las modalidades de análisis y síntesis en el pensamiento matemático

Nos representamos el carácter sintético de la geometría euclidiana en el hecho de que la verdad de un teorema se deduce como consecuencia de un sistema de axiomas. En la geometría cartesiana esta verdad es de naturaleza analítica, pues se basa en un principio.

Por ejemplo, Descartes "sabía" que para toda función polinómica P con coeficientes reales y grado impar existe, al menos, una raíz real, es decir, un a tal que $P(a)=0$. Para nosotros este teorema de existencia se basa en el principio del teorema del valor intermedio: para toda función continua que cambia de signo en un intervalo existe al menos un punto de intervalo en donde ella se anula. La existencia de la raíz está dada por el principio. Pero hay que identificar esa raíz de manera precisa. Bolzano sería el primero en hacerlo a través de la demostración del teorema del valor intermedio. Esta existencia se funda en la propiedad de completez de los reales.

Según Euclides, *Elementos*, Libro 13, el análisis consiste en tomar como acordado lo que se busca, para llegar por vía de consecuencia, a alguna cosa cuya verdad ya ha sido acordada. Por otra parte, en sus *Mathematicae Collectiones* (traducción de Comandino de 1589), Pappus definió el análisis como la vía que parte de lo que se busca, como si fuera acordado, para llegar, por las consecuencias subsiguientes, a algo que es acordado por la síntesis. Estudiemos este último punto de vista.

En el análisis, al suponerse que lo que se busca ya ha sido obtenido, examinamos aquello de donde procede y de nuevo las premisas de donde esto procede, hasta que remontamos de esta manera a algo ya conocido o que cumple la función de principio.

A la inversa, en la síntesis se supone ya obtenido lo que en el análisis se busca como último término. Colocando en el orden natural (deductivo) los antecedentes del análisis en lugar de consecuentes, y relacionando unos y otros, llegamos a la meta que es la construcción del objeto buscado.

Veamos la formulación lógica de las seis etapas del método de análisis y síntesis empleado por Descartes (Hintikka y Remes, 1974):

1. Enunciar aquello que nos es dado: D ($D^{'}, D''$ partes de D).
2. Enunciar aquello que se busca: z.
3. La etapa del Análisis: $D^{'} \Rightarrow (z \Rightarrow d)$.
4. La etapa de la Resolución: $d \Rightarrow D$.
5. La etapa de construcción: Fin del Análisis; inicio de la Síntesis.
6. Demostración por medio de la Síntesis: $D^{''} \Rightarrow (d \Rightarrow z)$.

Los resultados 6 y 3 permiten concluir que se llega a una equivalencia lógica entre z y d, cuando se parte de lo que nos es dado D o de sus partes $D^{'}$ y $D^{''}$. Observemos también que la etapa 3 del análisis se inicia cuando, a partir de una parte de lo dado y considerando lo buscado como dado, se deduce una afirmación que, en virtud de la resolución, se comporta como principio de lo dado.

En lo que sigue vamos a reconstruir el procedimiento analítico cartesiano de acuerdo con la lectura de los libros 1 y 2 de la *Geometría* que se encuentra en (Gardies, 2001). De hecho Gardies considera (capítulo 5) que Descartes utiliza dos modalidades de análisis. La primera consiste en aceptar como dado el lugar geométrico de los puntos que aportan solución al problema de Pappus, para remontarse, a partir de allí, a la ecuación general de segundo grado como principio. La segunda modalidad de análisis consiste en remontarse del principio (la ecuación general) a otros principios, las ecuaciones restringidas de cada uno de los lugares geométricos que representan la solución. No obstante, Descartes no aporta la deducción lógica de cada lugar geométrico a partir de su ecuación, limitándose a exhibirlo como dado mediante una construcción.

DESIGNACIÓN ESCRITURAL Y ANÁLISIS CARTESIANO

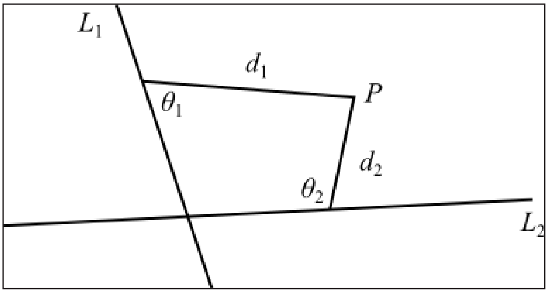
La innovación escritural cartesiana supera las ambigüedades de la geometría griega en el uso de figuras arbitrarias, pues no siempre se podían justificar todas las propiedades sobre las cuales debía apoyarse el razonamiento. Recordemos que según la clasificación de Proclo, la estructura deductiva de una proposición euclidiana tiene seis elementos: prótasis, ectesis, diorismo, construcción, demostración, conclusión.

Entre todos estos elementos, la construcción resume las condiciones que hacen posible y orientan la argumentación de la prueba. Pero hay construcciones que no se incluyen antes sino cuando se hacen necesarias en el curso de la demostración. Es lo que ocurre en el teorema de Pitágoras (proposición 47 del libro 1), con la introducción de dos segmentos necesarios para trasladar mediante una construcción los cuadrados correspondientes al área de los catetos en el cuadrado de la hipotenusa. A diferencia de Euclides que no representa como dados todos los segmentos, la escritura de Descartes permitía distinguir el estatuto exacto de lo dado y lo no dado en cualquier fase del procedimiento analítico. Inclusive cuando, en virtud de la etapa 4 de resolución antes mencionada, era necesario razonar sobre los segundos como si también fueran dados. Como dice Gardies (Gardies, 2001, p. 109):

En adelante se podían incluir en el razonamiento todos los elementos que estaban implicados, como si todos fueran dados, sin que esta unificación de tratamientos y procedimientos implicaran en ningún momento el menor riesgo de confusión en cuanto al estatuto exacto de cada uno de ellos.

EL PROBLEMA DE PAPPUS Y LA INTRODUCCIÓN DE LAS CURVAS ALGEBRAICAS

En el libro 1 de su *Geometría* Descartes muestra las características de su nuevo método aplicado a la solución general de un problema de la geometría griega que Pappus había presentado en la *Colección Matemática*, y que pertenece a la clase que hoy conocemos como problemas de *lugar geométrico* en cuanto su solución comporta la construcción de una curva (algebraica). En términos generales, se parte de que están dados un cierto número de rectas, un número determinado de ángulos, una razón y un segmento. Se propone entonces identificar la curva cuyos puntos satisfacen una relación específica que cumple la razón dada. En el caso elemental del problema de Pappus para dos rectas: se dan dos rectas (L_1, L_2), dos ángulos (θ_1, θ_2) y una razón β. Se designan por d_1 y d_2 las distancias oblicuas del punto *P* a L_1 y L_2 de acuerdo con los ángulos θ_1 y θ_2 . El problema consiste en encontrar los puntos *P* para los cuales $d_1 : d_2 = \beta$.



En la *Colección*, Pappus había presentado su solución para tres y cuatro rectas. Igualmente la solución para el caso de seis rectas obtenida por Apolonio en el contexto de su teoría de cónicas. Pero aún estaba pendiente la solución más general para el caso de *n* rectas. Y lo que es más importante (*Geometría*, p. 22):

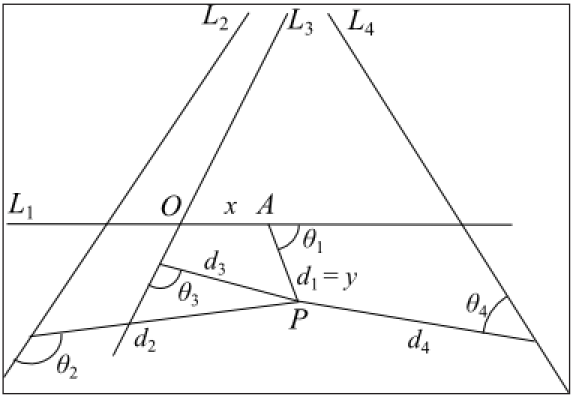
(Pappus) no se propuso determinar ni describir, como tampoco explicar, la naturaleza de la (curva) requerida cuando la cuestión involucra un número grande de líneas.

De ahí el título del libro 2: "Sobre la naturaleza de las líneas curvas". Descartes no solamente resuelve el problema de Pappus para el caso más general, sino que emplea un enfoque radicalmente nuevo que le permite introducir las curvas algebraicas y estudiar su naturaleza como objeto distinto a las curvas euclidianas. En donde la solución clásica del problema se reclamaba de una cónica, Descartes impone un nuevo objeto, la curva algebraica (Giusti, 2000). Apolonio y Pappus exhiben construcciones singulares para casos particulares, pero la solución general está fuera del alcance de la geometría clásica. Al resolver el problema de manera completa, Descartes renueva la idea de lugar geométrico. La solución cartesiana impone sustituir la curva como construcción por la curva como ecuación.

El objeto radicalmente nuevo que emerge de la solución del problema será estudiado inmediatamente en el marco de la teoría de curvas, en la cual se introduce, en particular, un método para encontrar la normal a una curva arbitraria en un punto dado, y la clasificación de curvas por géneros según los grados de sus ecuaciones. Esta clasificación está relacionada con la propiedad de las curvas geométricas de ser construibles punto a punto, característica que las distingue de la clase de curvas como la espiral o la cuadratriz, que Descartes denomina "mecánicas" y que corresponden a nuestras curvas trascendentes.

Descartes sabe que todos los puntos de una cónica se pueden construir por regla y compás. Cuando la curva geométrica es una cúbica o tiene grado cuatro se construyen punto a punto por la intersección de dos cónicas. Las de quinto o sexto grado son construibles mediante la intersección de su "parábola de segundo grado" con el círculo, y así sucesivamente. Esto le permite a Descartes generar una jerarquía de curvas reagrupando los grados por pares o géneros: las curvas geométricas de grado $2n-1$ y $2n$ se construyen por la intersección de un círculo y una curva de grado n.

Problema de Pappus generalizado a n rectas (Domdky, 2011, p. 19)



Dados: una recta L_i en el plano, n ángulos θ_i, una razón β, un segmento de recta a. Para un punto P en el plano, sea d_i la distancia oblicua entre P y L_i que forma el ángulo θ_i con L_i.

Problema: Encontrar el lugar de los puntos P tales que las razones siguientes son iguales a la razón dada β:

Para 3 rectas: $(d_1)^2 : d_2 d_3$

Para 4 rectas: $d_1 d_2 : d_3 d_4$

Para 5 rectas: $d_1d_2d_3 \ : \ ad_4d_5$

Para 6 rectas: $d_1d_2d_3 \ : \ d_4d_5d_6$

En general,

Para un número par $2k$ de rectas: $d_1 \cdots d_k \ : \ d_{k+1} \cdots d_{2k}$

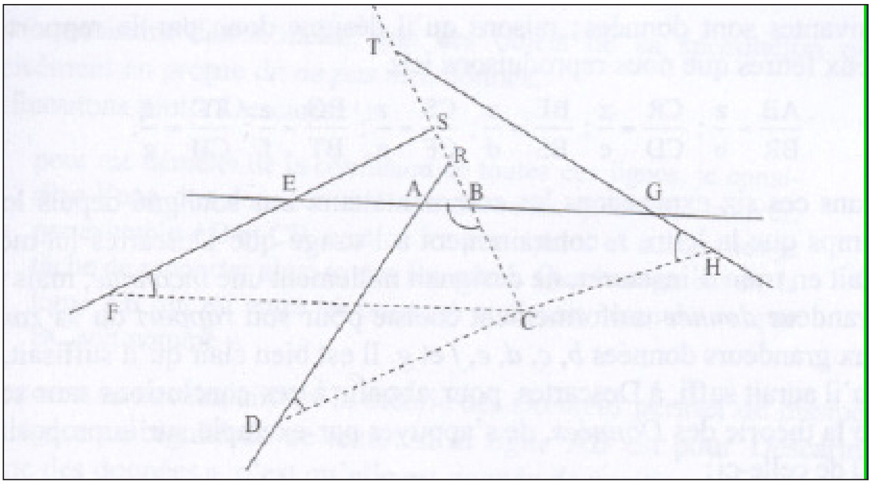
Para un número impar $2k+1$ de rectas: $d_1 \cdots d_{k+1} \ : \ ad_{k+2} \cdots d_{2k+1}$.

Análisis geométrico cartesiano del problema de Pappus para cuatro rectas

La formulación del problema en el libro 1 de la *Geometría* es equivalente a la siguiente (Gardies, p. 109):

Encontrar el lugar de los puntos tales que, si a partir de cada uno de ellos se trazan rectas que se cortan en ángulos dados, respectivamente con otras cuatro rectas dadas en posición, el producto de los dos segmentos que van desde el punto a dos de estas rectas, es igual al producto de los dos segmentos que van desde el punto a las otras dos.

El método analítico de Descartes se fundamenta en razonamientos sobre la figura. Empieza suponiendo que el problema está resuelto. Sea C el punto sobre la figura que representa la solución. Sean AB, AD, EF y GH las cuatro rectas *dadas en posición.* Sean CBA, CDA, CFE y CHG los cuatro ángulos *dados en magnitud.*



Por extensión, todos los ángulos representados sobre la figura están *dados en magnitud*. Los segmentos EA y AG (que Descartes designa, respectivamente, por *k* y *l*) están *dados en magnitud,* ya que están sobre una recta dada en posición y su longitud está determinada por los cortes con las otras tres rectas dadas en posición.

Descartes introduce un parámetro *z* bajo la siguiente consideración:

Puesto que todos los ángulos del triángulo ARB son dados, la proporción entre los lados AB y BR también lo es, y la designo como z *es* a *b* … Así mismo los tres ángulos del triángulo DRC son dados, y por consiguiente también lo es la proporción entre los lados CR y CD, que designo como *z* es a *c*.

Descartes considera entonces que las siguientes razones están *dadas*:

$$\frac{AB}{BR}=\frac{z}{b};\frac{CR}{CD}=\frac{z}{c};\frac{BE}{BS}=\frac{z}{d};\frac{CS}{CF}=\frac{z}{e};\frac{BG}{BT}=\frac{z}{f};\frac{TC}{GH}=\frac{z}{g}\ .$$

En consecuencia, la letra *z* no designa una incógnita sino una magnitud dada uniformemente, la cual se ha escogido por su razón con las magnitudes dadas *b, c, d, e, f* y *g*. Con respecto a la mención que hace Descartes a que "todos los ángulos del triángulo ARB son dados", observemos que el ángulo BAR está dado ya que está formado por dos rectas dadas en posición; ABR es el suplemento de CBA dado y BRA es el suplemento de los anteriores.

En cuanto a que "la razón entre los lados AB y BR también es dada", ello es consecuencia del siguiente principio ya conocido por Descartes: $AB : BR \because senARB : senBAR$.

El procedimiento anterior se reitera para el triángulo CRD, en el cual todos los ángulos son dados. Y así, sucesivamente, en los seis triángulos, considerando siempre el mismo parámetro z. En conclusión, se tienen los siguientes triángulos, dados a partir de los correspondientes ángulos dados:

CDR es dado: CDR es dado y DRB es igual a ARB encontrado.

EBS es dado: BES está determinado por dos rectas dadas en posición y EBS es igual a ABR.

CFS es dado: CFS es dado y FSB es igual a ESC

BGT es dado: BGT es dado y se conoce GBT

CHT es dado: CHT es dado y CTH es igual a BTG.

MODALIDADES DEL ANÁLISIS CARTESIANO EN LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE PAPPUS

El procedimiento analítico comienza en el momento en que la escritura permite distinguir, con respecto al dominio de lo dado, las magnitudes *no dadas* que es necesario encontrar. Dice Descartes (*Geometría*, p.28):

En primer lugar supongo la cosa ya hecha, y para aclarar la confusión entre todas estas rectas, considero una de las dadas y una de las que se deben encontrar, por ejemplo AB y CB, como las principales y a las cuales trato de referir todas las demás. Sea *x* el segmento de recta AB, entre los puntos A et B; y sea *y* el segmento BC…

Descartes hace dos observaciones: que AB está dado *en posición* pero CB no lo está, y que AB y CB no están dados en *magnitud*. Que CB no sea dado en posición podría explicar por qué al introducir el sistema de referencia Descartes no explícita el eje de las ordenadas.

Al designar AB por *x* y CB por *y*, es posible denotar el punto C que genera el lugar geométrico cuya existencia viene dada por la suposición de que el problema (la cosa) está resuelto. Descartes está listo entonces para dar inicio propiamente a la tercera etapa lógica del método del análisis en la cual: $D' \Rightarrow (z \Rightarrow d)$.

Como están dados los segmentos $EA = k,\ AG = l, AB = x, BC = y,$ se pueden hacer los correspondientes remplazos en las seis razones del comienzo. Se obtiene así una secuencia de igualdades en cadena deductiva que resultan del acto intencional de Descartes de remontarse al principio a partir del cual se pueda deducir la existencia del lugar geométrico en tanto solución. El carácter indiscutible de este principio se basa en el hecho de que interpreta la relación entre los productos de las distancias del punto C a las cuatro rectas dadas, mediante expresiones estrictamente formuladas en el sistema de representación xy. Esta es la lista de igualdades según la cadena de inferencias de la *Geometría* (Gardies, 2001; pp. 113-114):

$$RB = \frac{bx}{z}$$

$$CR = BC + RB = y + \frac{bx}{z}$$

$$CD = CR \times \frac{c}{z} = \frac{cy}{z} + \frac{bcx}{z^2}$$

$$EB = EA + AB = k + x$$

$$BS = EB \times \frac{d}{z} = \frac{dk + dx}{z}$$

$$CS = BC + BS = y + \frac{dk + dx}{z} = \frac{zy + dk + dx}{z}$$

$$CF = CS \times \frac{c}{z} = \frac{ezy + dek + dex}{z^2}$$

$$BG = AG - AB = l - x$$

$$BT = BG \times \frac{f}{z} = \frac{fl - fx}{z}$$
$$CT = BC + BT = y + \frac{fl - fx}{z} = \frac{zy + fl - fx}{z}$$
$$CH = CT \times \frac{g}{z} = \frac{gzy + fgl - fgx}{z^2}.$$

Estas igualdades ameritan varios comentarios. En términos modernos, Descartes dispone de los valores de los segmentos CB, CF, CD y CH en "función" de x y y. Esto es, las distancias de C a cada recta participan de la forma $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$. Observemos de nuevo el carácter inequívoco de la escritura que Descartes está introduciendo. El procedimiento analítico le permite expresar sin ambigüedades distancias que se suponen conocidas en términos de cantidades no conocidas x y y. Esta relación funcional se hará más evidente en lo que debería ser la etapa conclusiva del método de análisis y síntesis en el libro 2. En el proceso de construcción punto a punto de las cónicas a partir de su expresión particular en la ecuación general de segundo grado, Descartes señala que

> ... tomando sucesivamente un infinito número de diferentes valores para la línea y, podremos hallar otros tantos para x: de este modo, podremos también encontrar un número infinito de diversos puntos tales como el C, pudiendo describirse la línea curva exigida (Citado por Álvarez, 2000, p. 49).

En cuanto a la restricción de las cantidades negativas que resulta, por ejemplo, de asignarle al segmento CR el valor $y + \frac{bx}{z}$, ello tiene que ver con la posición arbitraria del punto C en la figura. Descartes aclara al respecto (*Geometría*, pp. 31-32): "el punto B está situado entre C y R; porque si R estuviera entre C y B, CR sería $y - \frac{bx}{z}$, y si C estuviera entre B y R, CR sería $-y + \frac{bx}{z}$". Esta triple posibilidad también se presenta en los casos de los segmentos EB y CS. Luego parece evidente que Descartes posee el concepto implícito de *sentido* asociado al de magnitud.

Retornemos al procedimiento analítico cartesiano. Puesto que el problema de Pappus se supone resuelto, Descartes dispone de la igualdad de los siguientes dos productos (rectángulos): CB x CF = CD x CH. Lo cual se traduce en la escritura cartesiana como:

$$y \times \frac{ezy + dek + dex}{z^2} = \left(\frac{cy}{z} + \frac{bcx}{z^2}\right) \times \frac{gzy + fgl - fgx}{z^2}.$$

Aplicando las correspondientes operaciones algebraicas Descartes llega a la siguiente ecuación:

- En la notación de la *Geometría:*

$$yy = \frac{\left.\begin{array}{r} -dekzz \\ +cfglz \\ \end{array}\right\} y \quad \left.\begin{array}{r} -dezzx \\ -cfgzx \\ +bcgzx \end{array}\right\} y \quad \left.\begin{array}{r} +bcfglx \\ -bcfgxx \\ \end{array}\right\}}{ezzz - cgzz}$$

- O su equivalente en notación moderna:

$$\left(cgz^2 - ez^3\right)y^2 - bcfgx^2 + \left(bcgz - cfgz - dez^2 - dez^2\right)xy + \left(cfglz - dekz^2\right)y + bxfglx = 0 .$$

La primera modalidad de análisis consiste, pues, en remontarse a partir de los datos del problema de Pappus en cuatro rectas, hasta un principio general que resume las condiciones de su solución: una ecuación de segundo grado en dos incógnitas. Señalemos de paso que esta ecuación, de la forma $Ay^2 + Bx^2 + Cxy + Dy + Ex + D = 0$, restringe la generalidad del análisis cartesiano puesto que su término independiente F es nulo.

Una vez determinada la ecuación del lugar geométrico de los puntos que cumplen la condición de Pappus, Descartes procede a interpretar esta curva algebraica en el mundo euclidiano. Lo que correspondería a una etapa lógica de síntesis (deducir de la ecuación cada una de las curvas algebraicas que representan el lugar geométrico), en verdad se reduce a una especie de segunda modalidad de análisis en virtud de la cual Descartes exhibe una cónica.

Esta solución en particular se obtiene al restringir la ecuación, es decir, cuando una de las variables se toma como dada. Por ejemplo, dados de una parte *b, c, d, e, f, g, k, l* y *z,* y de otra parte *x,* el problema de Pappus se reduce a construir una ecuación de segundo grado en una incógnita. Descartes construye la curva a través del procedimiento de regla y compás empleado a comienzos del libro 1. Lo analítico de este segundo procedimiento, reside en el hecho que, de lo dado (la ecuación de segundo grado en una variable), se llega al principio ya conocido (una cónica). Como señala Gardies (Gardies, 2001, p. 116):

Lo importante para Descartes era mostrar que al dar un valor cualquiera a una de las dos variables dependientes, todas las ecuaciones correspondientes al problema seguían siendo de segundo grado y solo se diferenciaban de la ecuación dada en los signos $+ o -$. En consecuencia sus soluciones podían construirse con regla y compás.

Con respecto al segundo sentido del análisis, Descartes es consciente de que no es riguroso, porque utiliza unos procedimientos de simplificación que lo llevan a sustituir la demostración de las secciones cónicas por la evidencia de su construcción. De nuevo: se constata la estrecha relación del procedimiento analítico cartesiano con la construcción.

Alrededor de la misma época en que aparece la *Geometría,* Fermat obtuvo un procedimiento analítico más preciso que el segundo de Descartes (Gardies, 2001, p. 127). De la propiedad general expresada por la ecuación de segundo grado con dos incógnitas desciende a todos los casos posibles, mostrando en cada uno de ellos la característica geométrica que expresa la ecuación particular. En su *Géométrie,* Descartes esboza ambos procedimientos, sin que pueda afirmarse propiamente que los haya realizado de manera completamente satisfactoria.

Para concluir, es importante señalar que el método analítico cartesiano apela fundamentalmente al teorema de Tales en el tratamiento de los segmentos como razones entre lados de los triángulos. Al sustituir en la igualdad CB x CF = CD x CH cada segmento por su respectiva expresión algebraica, poco importa que las rectas se corten en ángulos rectos. Aunque Descartes le confería un papel central en el análisis tanto al uno como al otro, el teorema de Pitágoras no interviene para nada en el análisis cartesiano de Pappus. Refiriéndose al hecho de que el análisis del problema de Pappus se reduzca a considerar razones de segmento a segmento en los triángulos dados, Gardies dice (p. 121):

> Una de las características más espectaculares del tratamiento cartesiano del problema de Pappus es que nos hace remontar hasta una especie de mínimo incompresible de saber geométrico previamente supuesto.

Recordemos que desde el propio inicio de la *Geometría* Descartes utiliza el teorema de Tales para sentar las bases de una teoría abstracta de magnitudes continuas como condición de posibilidad de su geometría algebraica (Álvarez, 2000, p. 37). Una innovación radical de Descartes es considerar un dominio abstracto de segmentos dotado de estructuras de orden y medida, en el cual define la extracción de raíz cuadrada, e interpreta las cinco operaciones fundamentales de la aritmética. Apoyándose en Tales y la propiedad de la cuarta proporcional, establece que estas operaciones, en particular la multiplicación, deben ser cerradas en el dominio. En este sentido, bien puede decirse que el teorema de Tales obra en la *Geometría* como principio de abstracción.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Álvarez, C. 2000. "Descartes lector de Euclides". En: Álvarez, C. y R. Martínez (ed.). *Descartes y la ciencia del siglo XVII.* Siglo XXI Editores, 2000, México; pp. 15-68.

Descartes, R. 1954. *Geometry.* With a facsimile of the first edition.Translated from the French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Lattan. Dover, New York.

Domski, M. 2011. "Descartes'Mathematics". *Stanford Encyclopedia of Philosophie.* Consultado el 21 de septiembre de 2012 en: http://plato.stanford.edu/entries/descartes-mathematics/

Gardies, J.-L. 2001. *Qu'est-ce que et pourquoi l'analyse?* Essai de définition. Vrin, 2001, Paris.

Giusti, Enrico (2000): *La naissance des objets mathématiques.* Ellipses, Paris.

Hintikka y Remes, 1974. *The Method of Analysis: Its geometrical origin and its general significance.* D. Reidel, Dordrecht and Boston.

13º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa

CURSOS

Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas de Educación Básica Secundaria y Educación Media

Gemad[1]

RESUMEN

En este curso, cinco grupos de profesores presentan el trabajo que realizaron en un programa de Maestría en Educación Matemática, al diseñar, implementar y evaluar unidades didácticas de matemáticas de Básica Secundaria y Educación Media. Los temas de las unidades didácticas fueron números enteros, ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y razones trigonométricas.

[1] Gemad es un grupo de profesores en ejercicio, formadores e investigadores en Educación Matemática afiliado a la Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia. Las unidades didácticas que se presentan en este curso fueron el producto del trabajo de las siguientes personas: Fredy Arenas, Oscar José Becerra, Mauricio Becerra, Mónica Liliana Bernal, Maritza Ruth Buitrago, Sonia Constanza Calderón, María C. Cañadas, Diana Paola Castro, Ángela Patricia Cifuentes, Luz Estela Dimaté, Pablo Flores, Rodrigo Armando Gómez, Pedro Gómez, María José González, María Fernanda Mora, Fredy Morales, Eliana Ximena Nieto, Álvaro Andrés Pinzón, Diana Lucía Polanía, Aura María Rincón, Isabel Romero, Marta Lilia Romero, Yerly Fernando Torres, Leonardo Urrutia, Javier Ricardo Velásquez y Miryan Patricia Villegas.

INTRODUCCIÓN

MAD 1 (Maestría en Análisis Didáctico), la primera promoción de la concentración en Educación Matemática de la maestría en Educación del Centro de Investigación y Formación en Educación (CIFE) de la Universidad de los Andes, se cursó entre enero de 2010 y diciembre de 2011. El principal propósito de esta maestría es ofrecer oportunidades para que los profesores en formación puedan complementar y profundizar en el conocimiento didáctico necesario para la planificación, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas de matemáticas (Gómez, Cañadas, Flores, González, Lupiáñez, Marín *et al.*, 2010). El programa está fundamentado en un modelo funcional de la formación de profesores de matemáticas, se estructura mediante el análisis didáctico y aborda el aprendizaje de los profesores en formación desde una perspectiva social del aprendizaje, con énfasis en los procesos de aprendizaje de los organizadores del currículo que configuran el análisis didáctico (Gómez y González, en prensa-a). En MAD, utilizamos el análisis didáctico como herramienta para que los profesores en formación analicen un tema de las matemáticas escolares de tal forma que este análisis les sea útil para justificar el diseño, implementación y evaluación de una unidad didáctica (para una descripción detallada del programa y de su fundamentación ver Gómez, en prensa; Gómez et al., 2010; Gómez y González, en prensa-a, en prensa-b; Gómez y Restrepo, 2010; González y Gómez, en revisión).

El programa se desarrolla en un esquema híbrido de aprendizaje (Gómez y Restrepo, 2010), dado que la mayoría de los formadores del programa son profesores de universidades españolas que visitan Colombia únicamente durante la primera semana del módulo a su cargo. Los ocho módulos de MAD están compuestos por cuatro actividades. Cada actividad dura dos semanas. El formador responsable introduce el contenido del módulo a su cargo durante una semana presencial al comienzo del módulo y presenta las actividades a realizar a lo largo del módulo. Tras esa semana, el formador continúa en contacto virtual con los estudiantes, tutores y coordinadores durante el resto del módulo. Un coordinador local de la maestría acompaña presencialmente a los profesores en formación durante todo el programa. Cada grupo tiene un tutor asignado, quien los orienta durante todo el programa en las cuestiones relacionadas con el tema matemático específico en el que trabajan. Además, cuentan con la posibilidad de consultar con el formador responsable del módulo. Una proporción importante de la interacción entre profesores en formación, grupos, formadores y tutores es de carácter virtual. Para cada actividad, los profesores en formación elaboran un borrador y lo envían a su tutor por correo electrónico al final de la primera semana de trabajo. El tutor reacciona al trabajo por la misma vía. Los profesores en formación mejoran su trabajo con base en esos comentarios, producen un documento final, y preparan y realizan una presentación al término de la segunda semana.

En MAD 1, participaron 26 profesores en ejercicio de colegios privados y públicos de Bogotá y Cundinamarca. La mayoría de ellos (77%) estaban trabajando en colegios públicos y más de la mitad (58%) estaban vinculados a colegios del departamento de Cundinamarca. Los profesores en formación se organizaron en cuatro grupos de cuatro personas y dos grupos de cinco personas. Cada grupo escogió un tema de las matemáticas escolares sobre el que realizó un ciclo de análisis didáctico a lo largo de los dos años del programa. Los temas escogidos fueron los siguientes: adición y sustracción de números enteros, ecuaciones lineales con una incógnita (dos grupos), método gráfico para resolver ecuaciones lineales 2x2 y razones trigonométricas (dos grupos).

El programa se desarrolló de acuerdo con el diseño previsto en tres fases consecutivas. En la primera fase, los grupos analizaron su tema con los organizadores del currículo de los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción. Con base en la información que recogieron y organizaron en esta primera fase, los grupos produjeron una primera versión del diseño de su unidad didáctica, que complementaron con la inclusión de instrumentos y criterios para la recolección y análisis de la información que podía surgir en la implementación. En la segunda fase, al menos un miembro de cada grupo llevó a la práctica el diseño curricular propuesto en su institución educativa y el grupo recogió y analizó la información que surgió con motivo de esta implementación. En la tercera fase, y con base en los análisis anteriores, el grupo evaluó el diseño y la implementación de la unidad didáctica y propuso un nuevo diseño. El producto del trabajo de los grupos se recogió en una publicación (Gómez, en prensa).

En este documento presentamos ejemplos del trabajo realizado por cinco de los grupos que participaron en MAD 1. Cada grupo ha puesto el foco en un aspecto particular de su trabajo y lo describe con el detalle que permite la extensión de este documento.

En el apartado *Recursos que pueden ser empleados en la enseñanza de la adición y sustracción de números enteros* el grupo 1 muestra cómo particularmente a través de dos tareas "Lucho, el ciclista" y "El minero" se contribuye al dominio del vocabulario matemático, la justificación de procedimientos y la resolución de problemas en situaciones contextualizadas. Se apoyan especialmente en el uso de tres recursos: recta numérica, sumadora de enteros y fichas bicolores.

En el apartado titulado *El Hands on Equations como material para la enseñanza de la solución de ecuaciones lineales*, el grupo 2 presenta cómo el uso del material *Hands on equations* permite establecer la relación entre el concepto de igualdad y la ecuación, resolver ecuaciones lineales a través del uso de la balanza como modelo icónico, aplicar la propiedad uniforme y relacionar diferentes sistemas de representación.

El grupo 4, en el apartado *Secuencia didáctica para la enseñanza del método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2x2*, muestra las bondades y aportes del diseño de una secuencia elaborada a partir de tres tipos de tareas: de transición, de aportes a los objetivos previstos y transversal.

En el apartado *Razones trigonométricas vistas a través de múltiples lentes*, el grupo 5 se centra en dos de los significados de la razón trigonométrica: uno relacionado con el triángulo y otro con la circunferencia. Las tareas que conforman esta unidad didáctica sobresalen por ser de tipo personal y por la inclusión de recursos con intencionalidades que van desde la autovalidación, hasta la obtención de multiplicidad de datos. Este diseño permite la puesta en juego de diversos sistemas de representación y la transición entre ellos.

Por último, el grupo 6, en el apartado *Razones trigonométricas*, presenta una unidad didáctica diseñada para promover la construcción de este concepto a partir de situaciones cotidianas del estudiante. Se hace un especial énfasis en el análisis de las capacidades y errores involucrados en cada una de las tareas propuestas con el objetivo de observar el progreso de los estudiantes en la construcción del conocimiento de las razones trigonométricas, y lograr una coherencia entre expectativas de aprendizaje, tareas y las actuaciones del profesor y el estudiante.

Recursos que pueden ser empleados en la enseñanza de la adición y sustracción de números enteros[1]

Como docentes, nos encontramos con dificultades frecuentes en el uso de algoritmos que permitan a los estudiantes dar solución a situaciones aditivas de números enteros, bien sea porque los estudiantes dan interpretaciones incorrectas a los enunciados propuestos por nosotros (profesores), o por

[1] El grupo 1 está compuesto por Oscar José Becerra, Maritza Ruth Buitrago, Sonia Constanza Calderón y Rodrigo Armando Gómez, con la tutoría de María C. Cañadas. Su trabajo se encuentra disponible en (Becerra, Buitrago, Calderón, Gómez, Cañadas y Gómez, en prensa).

concepciones erróneas relacionadas con el tratamiento de enteros negativos y positivos. Nuestro trabajo consistió en el diseño y aplicación de una unidad didáctica compuesta por una prueba diagnóstica, cinco tareas y un examen final. En este apartado, nos centraremos en los recursos empleados para dar solución a dos de las tareas propuestas: "Lucho el ciclista" y "El minero".

Los objetivos previstos para la unidad didáctica están basados en los estándares del Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). Teniendo en cuenta los documentos curriculares, formulamos tres objetivos que contribuyen al dominio del vocabulario matemático, la justificación de procedimientos y la resolución de problemas en situaciones contextualizadas.

Objetivo 1. Reconocer y utilizar el vocabulario empleado en un enunciado que involucre adición y sustracción de números enteros.

Objetivo 2. Explicar cada paso en la realización de una tarea matemática, teniendo en cuenta las relaciones y propiedades de la adición y sustracción de los números enteros.

Objetivo 3. Interpretar y resolver problemas en diferentes situaciones de la vida real que involucren la adición y sustracción de números enteros.

Cada tarea tiene un nivel de complejidad y corresponde a un objetivo. A partir de la distinción que establece Ponte (2004), clasificamos las tareas en problemas y ejercicios. Según su nivel de complejidad, la tarea *El minero* es un problema, mientras que *Lucho, el ciclista* es una tarea de ejercitación. *Lucho, el ciclista* fue la primera tarea implementada y contribuye al logro del primer objetivo. Esta tarea consiste en examinar cuatro recorridos que realiza un ciclista en sus entrenamientos y que pueden ser representados en la recta numérica. La tarea *El minero* fue la tercera tarea implementada y contribuye al logro del tercer objetivo. En esta tarea se mencionan los recorridos realizados por un minero en un día de trabajo. Con estos recorridos se pretende dar solución a una situación aditiva, mediante el planteamiento de una expresión aritmética que los involucre. Para dar solución a las dos tareas mencionadas utilizamos tres recursos: la recta numérica, la sumadora de enteros y las fichas bicolores.

Recta numérica. Es preciso aclarar que aunque la recta numérica puede ser tomada como un sistema de representación gráfico, en este caso se trabajó como un recurso para dar solución a la tarea *Lucho, el ciclista*.

La sumadora de enteros. Este recurso consiste en tres rectas numéricas paralelas, con una distancia específica entre ellas, de forma que si representamos números enteros en las rectas de los laterales y trazamos una recta que una a ambos números, esa recta corta a la recta numérica del centro en un número. Este número es el resultado de la adición de los números representados inicialmente en las rectas de los lados. Este recurso se empleó en la verificación de resultados.

Las fichas bicolores. Las fichas son de dos colores diferentes y tienen una determinada forma geométrica (por ejemplo, circulares como las fichas de damas chinas). Cada ficha tiene valor absoluto igual a 1. Un color indica que la ficha representa un valor positivo y el otro color indica valor negativo.

El manejo de estos recursos, de acuerdo con la información proporcionada por los estudiantes, favoreció el logro de las expectativas de aprendizaje propuestas en términos de competencias, objetivos y capacidades. Se trata de elementos que permitieron manipular las cantidades representadas, dando sentido a las situaciones. Los materiales y recursos, además de favorecer la comprensión de las situaciones expuestas, contribuyeron a la resolución de las tareas y tuvieron un alto grado de aceptación. Esto se puede constatar en la información recopilada en el diario del estudiante y en el cuestionario individual de evaluación.

El Hands on Equations como material para la enseñanza de la solución de ecuaciones lineales[2]

En este apartado, el grupo 2 focalizamos nuestra atención en el análisis de instrucción. Pretendemos mostrar la forma como analizamos, seleccionamos y diseñamos la tarea *La balanza*. Para ello, mostraremos los elementos que componen la primera parte de la tarea, los recursos y materiales seleccionados para ella, las condiciones de aplicación y la descripción de sus elementos.

Iniciamos describiendo el medio de enseñanza. Este medio tiene diversas cualidades y funciones. El *Hands on Equations*[3] es un material que permite establecer la relación entre el concepto de igualdad y la ecuación, resolver ecuaciones lineales a través del uso de la balanza como modelo icónico, aplicar la propiedad uniforme y relacionar diferentes sistemas de representación.

La finalidad de la tarea consiste en que los estudiantes cambien las fichas que representan las x de los platillos de la balanza hasta dejar una sola ficha,

[2] El grupo 2 está compuesto por Ángela Patricia Cifuentes, Luz Estela Dimaté, Aura María Rincón, Javier Ricardo Velásquez, Miryan Patricia Villegas, con la tutoría de Pablo Flores. Su trabajo se encuentra disponible en (Cifuentes, Dimaté, Rincón, Velásquez, Villegas y Flores, en prensa).

[3] http://tinyurl.com/bssvan6.

en uno de ellos; den valores a las variables; y encuentren un número y la operación que genera la segunda expresión. La primera parte de la tarea (30 minutos) se desarrolla en parejas. El profesor hace una intervención breve, explica la actividad, luego entrega el material, organiza, dirige y orienta. Al finalizar la primera parte, genera y modera las intervenciones de los alumnos sobre los resultados obtenidos.

REFLEXIÓN SOBRE LA COHERENCIA DE LA TAREA CON LA PLANIFICACIÓN PREVIA

El diseño de la tarea *La balanza* se fundamentó en la información que produjimos en el análisis de contenido y el análisis cognitivo de nuestro tema. Nos interesa describir el diseño final de la tarea en términos de esos análisis. La función de la tarea *La balanza* es ejercitar, elaborar y construir significados. La complejidad de esta tarea corresponde a un ejercicio de exploración, con respuesta cerrada y cuyo grado de dificultad es accesible. Los elementos de la estructura conceptual que aborda son los siguientes: equivalencias, reducción de términos semejantes, propiedad distributiva, propiedad uniforme, estimación de resultados, reconocimiento de diferentes formas de representación de una ecuación, reconocimiento de los métodos de solución de una ecuación y ecuaciones de la forma $ax = b,\ ax + b = c,\ a(bx + c) = d$ y $ax + b = bx + d$ entre otras.

La tarea La balanza permite interpretar y diferenciar los sistemas de representación. El sistema de representación simbólico, por ejemplo, se pone en juego cuando se identifican las formas de la ecuación lineal y cuando se hacen traducciones del lenguaje verbal al simbólico. El sistema de representación numérico se usa cuando se sustituyen valores en la variable. Esta tarea también admite relacionar la representación simbólica de una ecuación con la representación pictórica, cuando se manipula lo concreto (fichas del material *Hands on Equations*). La tarea se sitúa en contextos diversos. Su finalidad intrínseca es la utilización de las ecuaciones como herramienta para resolver problemas (álgebra).

Además de lo anterior, la primera parte de la tarea contribuye al desarrollo de las capacidades que caracterizan el objetivo 1, pues su camino de aprendizaje pone en evidencia que las acciones realizadas son: (a) establecer relaciones entre los datos presentes en una situación; (b) utilizar la balanza para ejercitar el equilibrio entre los miembros de una ecuación; (c) identificar datos e incógnita en el enunciado de un problema; (d) utilizar variables para expresar incógnitas; (e) reconocer la estructura de una expresión algebraica; (f) resolver operaciones; (g) aplicar las propiedades (uniforme, distributiva, conmutativa, clausurativa y asociativa) de los números reales en los casos que se necesiten; (h) operar a los dos lados de una igualdad de forma que quede equivalente; (i) reducir términos semejantes; (j) despejar una incógnita; (k) establecer relaciones entre los datos presentes en una situación; (l) sustituir un valor numérico en una expresión algebraica; (m) representar con material manipulable una ecuación lineal dada simbólicamente; y (n) realizar representaciones pictóricas de ecuaciones lineales con una incógnita. Por otro lado, esta tarea relaciona el primer objetivo con el segundo, convirtiéndose así, en una tarea de transición, pues permite hallar el valor de la incógnita sin conocer formalmente el algoritmo de la solución de la ecuación. La tarea se vinculó con diferentes procesos que el estudiante podría realizar. El análisis de las capacidades que se activan al abordar la tarea permite constatar que la competencia que esta tarea ayuda a desarrollar con mayor intensidad es la de utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones, ya que las capacidades abordadas en el camino de aprendizaje incluyen:

- descodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural;
- traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal;
- manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas; y
- utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.

Secuencia didáctica para la enseñanza del método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2x2[4]

Tradicionalmente, los procesos de enseñanza y aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales se han centrado en la aplicación de métodos algebraicos para su solución, dejando poco o ningún espacio para el método gráfico. Considerando esta realidad, el grupo 4 diseñó e implementó una unidad didáctica sobre este método para determinar cómo se pueden potenciar otras capacidades que los métodos algebraicos por sí solos no activan en los estudiantes. El diseño propuesto se basó en el desarrollo de las competencias del estudio PISA (OCDE, 2003), que se relacionan directamente con las competencias establecidas por el MEN en los *Estándares básicos de competencias* (MEN, 2006). Se hizo especial énfasis en el alcance de la competencia modelar por medio de la solución de sistemas de ecuaciones lineales mediante el método

[4] El grupo 4 está compuesto por Mónica Liliana Bernal, Diana Paola Castro, Álvaro Andrés Pinzón y Yerly Fernando Torres, con la tutoría Isabel Romero. Su trabajo se encuentra disponible en (Bernal, Castro, Pinzón, Torres y Romero, en prensa).

gráfico ya que este método permite establecer una relación funcional de las variables, y presentarlas de manera sintética en una gráfica.

Tomando como referente la experiencia docente de trabajo en el aula con estudiantes de grado noveno de Educación Básica, establecimos las expectativas de aprendizaje en términos de tres objetivos que están enmarcados en el estándar "Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales" (MEN, 2006, p. 87).

Objetivo 1: *Aplicar* el método gráfico para obtener puntos de corte entre rectas y solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Objetivo 2: *Comprender* la noción de solución de un sistema lineal relacionando la existencia de única solución, infinitas soluciones o ninguna solución con la posición relativa de las rectas en el plano.

Objetivo 3: *Modelar* gráficamente situaciones no rutinarias mediante sistemas de ecuaciones lineales estableciendo la relación funcional entre variables.

Además, se previó un conjunto de capacidades que evidencian habilidades o destrezas de los escolares que contribuyeron al alcance de los objetivos y, a su vez, fueron clasificadas en tres grupos que responden a procedimientos rutinarios algebraicos, gráficos y mixtos.

Lo anterior inspiró el diseño de una secuencia compuesta por tres tipos de tareas: (a) tareas de aporte a los objetivos previstos —elaboradas para trabajarlas en sesiones asignadas a cada uno—; (b) tareas de transición —diseñadas para aplicarse durante la finalización de un objetivo e inicio del siguiente—; y (c) una tarea transversal —diseñada para que los estudiantes la desarrollen a lo largo de toda la unidad—.

La figura 1 muestra la distribución de las sesiones de la secuencia didáctica, asociando cada objetivo de aprendizaje con las tareas. También se muestran las diferentes etapas, sesión a sesión, en las que se abre el espacio para trabajar la tarea transversal. La sesión 11 consiste en el cierre de la secuencia, donde se aplica un juego de ejercitación lúdica llamado Ecuacartas y un examen final.

Con los objetivos definidos, las tareas propuestas fueron dispuestas de tal manera que no se percibieran como aisladas; por esa razón, se articularon las actividades de transición y la transversal. Las tareas de transición (SE y ER) se construyeron con el fin de contribuir de manera efectiva a la activación de capacidades específicas, al alcance de objetivos y al desarrollo de competencias. Estas tareas permiten conectar las capacidades de un objetivo con las capacidades del siguiente. Por lo tanto, ellas requieren de dos sesiones, de modo que en la primera se dé cierre a un objetivo y, en la segunda, se inicie la activación de capacidades para el siguiente objetivo.

Sesiones →	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11
Objetivos →	APLICAR			COMPRENDER			MODELAR				Ecuacartas
Tareas →	FR		SE		RP	ER		BC	CO/HE	GP	
Partes de la tarea transversal →	GRAN PREMIO DE BRASIL										Examen
	MOTIV	P	E	E	E/R	R	R	R	R	R	
	Planteamiento (P)			Ejecución (E)				Resolución (R)			

Nota: FR = figuras con rectas; SE = sistemas equivalentes; RP = rectas en el plano; ER = encontrando rectas; BC = bus y carro; CO/HE = copias y heladería

Figura 1. Distribución de las sesiones de la unidad didáctica

La tarea transversal consiste en una situación problema contextualizada en el deporte Fórmula 1, llamada Gran premio de Brasil F1 (GP). Su objetivo principal es que los estudiantes modelen la situación y empleen procedimientos ejecutados en la solución de las demás tareas de la secuencia. Se abordó durante el transcurso de toda la secuencia didáctica dividiéndose en tres partes.

Parte 1. Identificar y relacionar la información presentada.

Parte 2. Establecer relaciones funcionales entre las variables identificadas.

Parte 3. Escribir ecuaciones que modelen el problema; representar rectas en el plano; determinar el punto de corte entre estas y relacionarlo con el punto de encuentro de dos móviles; y validar la estrategia y los resultados obtenidos.

El análisis realizado después de la implementación de la unidad didáctica arrojó resultados que evidenciaron las bondades del diseño. Destaca el cumplimiento de dos propósitos: primero, que las actividades tuvieran una continuidad respecto a las capacidades desarrolladas y complejidad de las tareas; y, segundo, que la tarea transversal permitiera al estudiante tener un referente constante de la utilidad de todo el conjunto de actividades. El análisis también mostró lo adecuado del diseño y el éxito que se puede obtener al implementar una secuencia con este tipo de tareas.

Por otra parte, se apreció que las tareas de transición consolidaron capacidades del objetivo previo y sirvieron para desarrollar capacidades adicionales para el siguiente objetivo. La tarea transversal permitió que los estudiantes dieran sentido a las otras tareas en tanto que plantearon sistemas de ecuaciones lineales, elaboraron tablas y aplicaron conceptos diferentes al foco de contenido. El diseño e implementación de la unidad didáctica logró replantear dinámicas en el proceso de enseñanza y aprendizaje. En particular, nos referimos a aquellas relacionadas con cambios de paradigmas respecto a situaciones matemáticas asociadas a una única solución, el rol del maestro como el único poseedor del saber y asociar el aprendizaje de las matemáticas como mecanización de algoritmos.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS VISTAS A TRAVÉS DE MÚLTIPLES LENTES[5]

La propuesta del grupo 5, conformada por cinco tareas *Escalera, Características, Rueda, Canicas y Altura del farol*, se encuentra centrada en dos de los significados de la razón trigonométrica: uno relacionado con el triángulo y otro relacionado con la circunferencia. La tercera tarea está centrada en la circunferencia y las demás en el triángulo.

Los objetivos, en general, se centran en generar una noción de razón trigonométrica desde estos dos elementos geométricos. Introdujimos en cada una de las tareas elementos de la estructura conceptual de nuestro tema. Este es un referente de valiosa importancia que facilita el énfasis en elementos que pueden resultar fundamentales para comprender algunas características del concepto o para evitar una concepción muy limitada y desconectada de otros conceptos matemáticos a abordar o ya abordados. También se incluyen conocimientos previos debido al poco trabajo en geometría con el que contaba el grupo en el que se aplicó (elementos de la circunferencia, pi, cálculo de arcos, entre otros).

Para lograr los objetivos consideramos indispensable la inclusión de recursos con intencionalidades que van desde la autovalidación (que puede rastrearse en cada una de las tareas propuestas) hasta la obtención de multiplicidad de datos. Precisamente, debido a la variedad de recursos de la que hacemos uso, decidimos titular a nuestro trabajo con el nombre "Razones trigonométricas vistas a través de múltiples lentes".

---

[5] El grupo 5 está compuesto María Fernanda Mora, Eliana Ximena Nieto, Diana Lucía Polanía, Marta Lilia Romero, con la tutoría de María José González. Su trabajo se encuentra disponible en (Mora, Nieto, Polanía, Romero y González, en prensa).

La inclusión de recursos se convierte en la vía para que el estudiante pueda ver, manipular y experimentar con cada uno de los conceptos involucrados, poniendo en juego diferentes tipos de representaciones. No es lo mismo la utilización de un material concreto, una circunferencia dibujada en papel, por ejemplo, que la utilización de un programa geométrico dinámico en el que el número de datos aumenta sustancialmente. Ambos tipos se incluyen en la propuesta: la primera, con recursos como canicas medianas, teodolitos hechos por los estudiantes y prismas en cartón, triángulos con imán; y la segunda, con recursos como GeoGebra y Cabri. En las figuras 2 y 3 mostramos algunos de los recursos utilizados.

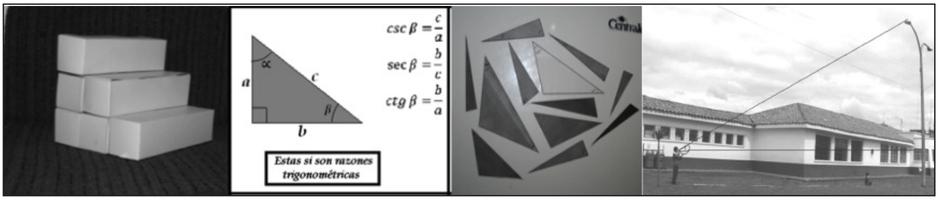


Figura 2. Prismas de base cuadrada (escalera). Guía para identificar criterios para referirse a la razón trigonométrica en triángulos (características). Triángulos en imán (características). Farol medido con un teodolito (altura del farol)

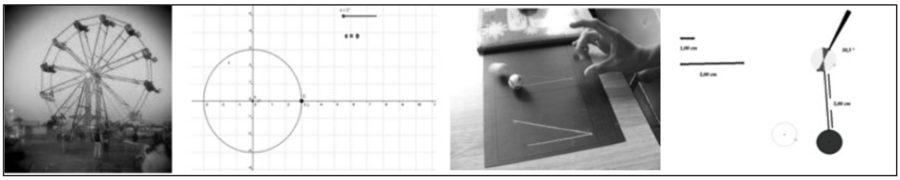


Figura 3. Imagen a partir de la cual se plantea la tarea de la rueda de Chicago. Construcción en GeoGebra (Rueda).Canicas medianas. Construcción en Cabri (tarea canicas)

Los programas de geometría dinámica promueven la organización de datos para la búsqueda de regularidades y, por tanto, a utilizar una tabla. Los recursos del primer tipo permiten entender la situación planteada. Se cuenta así con los elementos que se requieren para traducir la situación a representaciones pictóricas y gráficas. Esto implica un conocimiento más cercano a la situación planteada. También se utilizan para la validación de las diferentes hipótesis que hacen los estudiantes. Ambos recursos se complementan y terminan siendo importantes para el desarrollo de las capacidades de los estudiantes. Las capacidades que se buscan con la propuesta requieren sistemas de representación distintos que son motivados por los recursos utilizados. Hay que tener en cuenta, además, que varias de las capacidades están relacionadas con la conversión de una representación a otra; por ejemplo, la traducción del gráfico en el que se representa la situación de medida del farol a una expresión algebraica.

La constitución de las tareas se lleva a cabo buscando situaciones personales (cercanas al estudiante) y en las que tiene sentido el concepto. Se evita al máximo la utilización de situaciones en las que sea artificioso el evocar el concepto o incluso incorrecto (aspecto que es tan importante e incluso parece evidente en el diseño de tareas pero que hace parte de la complejidad de este ejercicio). Cada tarea apuntaba a dos significados (triángulo y circunferencia) con diferentes énfasis.

En relación con el triángulo, el énfasis se encuentra no solo en las situaciones convencionales de medida de lados. Este énfasis suele ser limitado al trabajo con gráficas y dibujos. Aunque lo incluimos en este trabajo y forma parte de la tarea *Altura del farol*, está complementado con mediciones reales que el estudiante debe hacer. También incluimos una situación en la que debe hallarse un ángulo con lo que buscamos dar sentido a los conceptos de arcoseno o arcotangente. De esta forma, hacemos viable, con los elementos puestos en la tarea, la estimación, la obtención de datos y la comprobación. Logramos estos propósitos gracias a la diversidad de recursos y de representaciones que se utilizan y promueven. Este trabajo se complementa con las tareas *Características* y *Escalera*, que ponen el énfasis en que los estudiantes constaten que estas razones son relaciones que se presentan exclusivamente en los triángulos rectángulos. También incluimos un trabajo especialmente enfocado en acuerdos en cuanto a nombres y vocabulario.

En relación con la circunferencia, la actividad que se plantea es la rueda de Chicago. En esta tarea, el dinamismo que proporciona GeoGebra permite la obtención de multitud de datos. Esto facilita que el profesor pueda hacer que los estudiantes realicen las tablas y lleguen a las conclusiones que se buscan a partir de la deducción de regularidades. Las conclusiones a las que se apunta se encuentran relacionadas con pi, radianes, medida de arcos, identidades de ángulos complementarios y suplementarios. Esta actividad les permite a los estudiantes hallar el seno y coseno de ángulos mayores de 90 grados utilizando fórmulas que suelen deducir sin asociar, en primera instancia, a un lenguaje simbólico.

En todas las tareas se miden ángulos o longitudes, ya sea directamente o con un programa de computador. En algunas tareas esos dos trabajos se complementan (Canicas y Rueda). En las tareas se busca que el profesor no deba dar la respuesta, sino que la tarea permita que cada estudiante realice la validación. Estas intencionalidades conducen a que los recursos tengan propiedades que permitan manipularlos y medirlos. Estas características permiten que los estudiantes sean conscientes de la presencia de las aproximaciones cuando se trata de medir. Se hace usual la utilización de reglas y goniómetros, que van desde transportadores sencillos hasta teodolitos realizados por los propios estudiantes.

Los recursos que planteamos en esta propuesta apuntan hacia capacidades relacionadas con cada uno de los significados de la razón trigonométrica y se inscriben en contextos que motivan y en los que el concepto tiene cabida de forma natural.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS[6]

El trabajo del grupo 6 tenía como propósito fundamental el desarrollo del conocimiento matemático a partir de las razones trigonométricas, como tema específico de las matemáticas escolares. Para abordar esta temática, establecimos dos problemáticas. La primera emerge de la práctica de muchos profesores en la enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas, en la que son usadas como una herramienta para solucionar ejercicios relacionados con la resolución de triángulos, aplicados en problemas, sin considerar su contexto ni el entorno propio del estudiante. La segunda se presenta en la implementación en el aula de los recursos o materiales para la enseñanza de la trigonometría, ya que se ha restringido al uso de la calculadora de funciones como una herramienta de cálculo para ángulos y longitudes en función de una razón trigonométrica particular. Teniendo en cuenta estas dos problemáticas, diseñamos, implementamos y evaluamos una unidad didáctica que promoviera la construcción del concepto razones trigonométricas a partir de situaciones con sentido para el estudiante y que hicieran uso de su contexto.

Fundamentamos el diseño de la unidad didáctica atendiendo a los contextos curriculares desde los *Lineamientos curriculares de matemáticas* (MEN, 1998), los *Estándares básicos de competencias en matemáticas* (MEN, 2006) y el Decreto 1290 (MEN, 2009); a los académicos, desde el plan de estudios del grado décimo del IED José Joaquín Castro Martínez; a los socioeconómicos, desde el estrato 1 y 2 con condiciones socioeconómicas bajas con problemas de inseguridad, violencia y pobreza; y al conocimiento didáctico, desde el

---

[6] El grupo 6 está compuesto Fredy Arenas, Mauricio Becerra, Fredy Morales, Leonardo Urrutia, con la tutoría de Pedro Gómez. Su trabajo se encuentra disponible en (Arenas, Becerra, Morales, Urrutia y Gómez, en prensa).

análisis didáctico propuesto por Gómez (2007) y actualizado en MAD 1. Estos fundamentos permitieron diseñar la secuencia de tareas que mostramos en la tabla 1.

Tabla1.Distribución de fases, objetivos y sesiones de clase de la unidad didáctica

Fase	*Objetivo*	*S.*	*Tarea*
Inicial	Halla la medida de ángulos y lados de un triángulo rectángulo usando las razones trigonométricas.	1	Diagnóstica: La medida de los triángulos (parte 1).
		2	La medida de los triángulos (parte 2).
Desarrollo	Reconoce elementos, relaciones y aplicaciones de las razones trigonométricas en un triángulo cualquiera, aplicándolas para resolver problemas.	3	La sombra: Parte 1
		4	La sombra: Parte 2
	Resuelve problemas reales usando las razones trigonométricas para el cálculo de distancias y ángulos.	5	La cometa
		6	
Cierre		7	Las moscas
		8	
	Evaluar los tres objetivos	9	Evaluación

Cada una de las tareas presenta una hipótesis de aprendizaje establecida desde el análisis cognitivo (Gómez, 2007), que se caracteriza desde el camino de aprendizaje que está sustentado en la secuencia de capacidades que los estudiantes activan al resolver la tarea. En la figura 4 presentamos, como ejemplo, el esquema del camino de aprendizaje que relaciona las capacidades (C), los posibles errores presentados por los estudiantes (E) y las actuaciones del profesor (A) de la tarea de *La sombra*. Estos elementos del análisis cognitivo se caracterizan y definen en Arenas et al. (en prensa). Esta tarea consiste en hallar la altura de un árbol a partir de la distancia de la sombra que proyecta y la medida de su ángulo de elevación.

Nuestra intención era contrastar este camino de aprendizaje hipotético (realizado desde el análisis didáctico) que los estudiantes podían desarrollar al realizar la tarea con el camino realizado en la implementación por los estudiantes, para caracterizar las capacidades no desarrolladas o activadas, los errores que se les presentan y las posibles actuaciones que el profesor puede desarrollar al encontrar las anteriores limitaciones. En la implementación se tuvo como resultado el esquema de la figura 5 que muestra el camino construido por los estudiantes en la solución de la tarea.

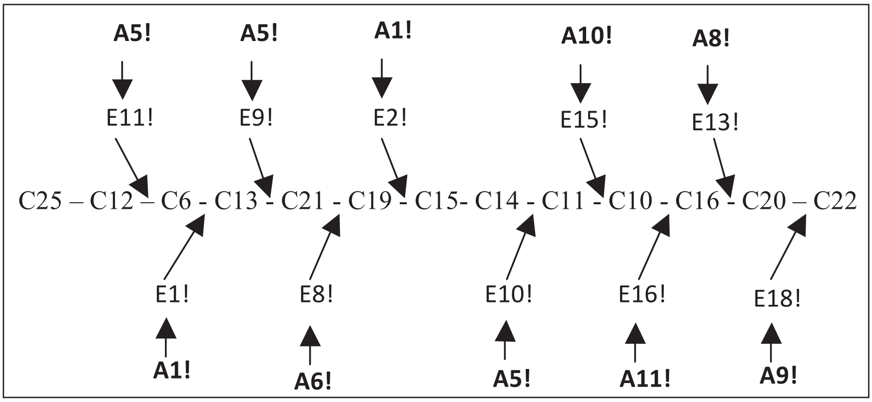


Figura 4. Camino de aprendizaje de la tarea La sombra

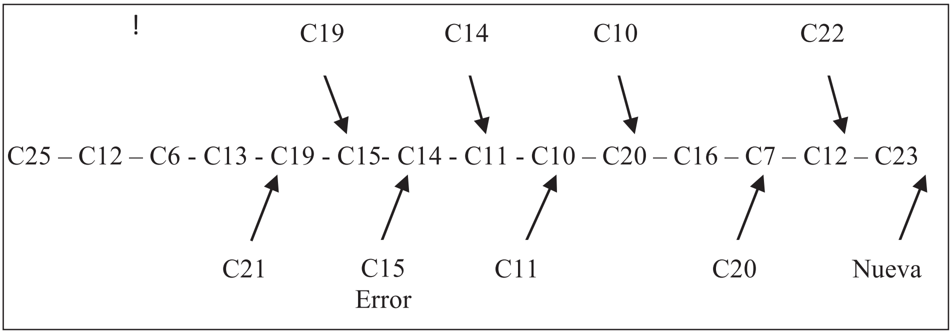


Figura 5. Camino de aprendizaje realizado por los estudiantes para la tarea La sombra

Resaltamos con las flechas diagonales sus diferencias con el camino de aprendizaje, previsto inicialmente. En este caso, los estudiantes activaron la capacidad C19 y no la C21 (prevista), ya que ellos no identificaron los ángulos de elevación y depresión de acuerdo con la información de la tarea (C21), pero sí identificaron los elementos del triángulo rectángulo a partir del reconocimiento del ángulo (C19). Pese a ello, los objetivos de aprendizaje no se vieron afectados. Esto debido a que estas dos capacidades están contenidas en el grupo que potencia directamente el conocimiento trigonométrico (C19 y C21). En la última parte del camino de aprendizaje, el estudiante presenta serios problemas en el desarrollo de las capacidades trigonométricas: él reconoce el valor numérico de las razones trigonométricas como longitudes de segmentos(C16), pero no usa los recursos tecnológicos (la calculadora) (C20) para interpretar los valores numéricos obtenidos; y en la solución de problemas trigonométricos (C22), pone el valor numérico en algún elemento del triángulo rectángulo (C7) al establecer la representación gráfica del problema (C12 y C23). Esto permite dar, en cierta medida, una solución del problema de forma gráfica, pero no desde la interpretación de los datos obtenidos de forma numérica.

En este caso, los estudiantes incurrieron en el error de no utilizar las herramientas tecnológicas para solucionar el problema (E13) y, a su vez, el de no interpretar ni relacionar correctamente los valores numéricos obtenidos en la solución del problema (E18). Para esto el profesor propuso ejercicios de refuerzo, en los que los estudiantes debían determinar los valores de las razones trigonométricas de diferentes ángulos, haciendo uso de la calculadora.

Este análisis de los caminos de aprendizaje de cada una de las tareas, nos permitió (a) observar el progreso de los estudiantes en la construcción de conocimiento sobre la estructura matemática de las razones trigonométricas y (b) lograr una coherencia entre los objetivos de aprendizaje, las tareas, las capacidades y las actuaciones del profesor y el estudiante en el aula.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arenas, F., Becerra, M., Morales, F., Urrutia, L. & Gómez, P. (en prensa). Razones trigonométricas. En P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1* (pp. 342-414). Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1895/

Becerra, O. J., Buitrago, M. R., Calderón, S. C., Gómez, R. A., Cañadas, M. C. & Gómez, P. (en prensa). Adición y sustracción de números enteros. En P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1* (pp. 19-75). Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1890/

Bernal, M. L., Castro, D. P., Pinzón, Á. A., Torres, Y. F. & Romero, I. (en prensa). Método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2x2. En P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1* (pp. 200-260). Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1893/

Cifuentes, Á. P., Dimaté, L. E., Rincón, A. M., Velásquez, J. R., Villegas, M. P. & Flores, P. (en prensa). Ecuaciones lineales con una incógnita. En P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1* (pp. 76-141). Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1891/

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/444/

Gómez, P. (en prensa). Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1. Descargado, 2012, de http://tinyurl.com/7blb2nf

Gómez, P., Cañadas, M. C., Flores, P., González, M. J., Lupiáñez, J. L., Marín, A., et al. (2010). Máster en Educación Matemática en Colombia. En M. T. González, M. Palarea & A. Maz (Eds.), *Seminario de Investigación de los Grupos de Trabajo Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Educación Matemática de la SEIEM* (pp. 7-25). Salamanca, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/646/

Gómez, P. & González, M. J. (en prensa-a). *Diseño de planes de formación de profesores de matemáticas basados en el análisis didáctico*. Trabajo enviado para publicación. Disponible en http://tinyurl.com/c89p9t5

Gómez, P. & González, M. J. (en prensa-b). Papel del análisis didáctico en el diseño de planes de formación de profesores de matemáticas. En *Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Medellín: ASOCOLME.

Gómez, P. & Restrepo, Á. M. (2010). Organización del aprendizaje en programas funcionales de formación de profesores de matemáticas. En G. García (Ed.), *11º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 22-32). Bogotá, Colombia: CENGAGE Learning. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/644/

González, M. J. & Gómez, P. (en revisión). *Conceptualizing and describing teachers' learning of pedagogical concepts*. Trabajo enviado para publicación. Disponible en http://tinyurl.com/bnlngs4

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá: Autor. Disponible en http://tinyurl.com/7t988s5

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor. Disponible en http://tinyurl.com/bljb3wd

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2009). *Decreto 1290. Por el cual se reglamenta la evaluación del aprendizaje y promoción de los estudiantes de los niveles de educación básica y media*. Bogotá: Autor.

Mora, M. F., Nieto, E. X., Polanía, D. L., Romero, M. L. & González, M. J. (en prensa). Razones trigonométricas vistas a través de múltiples lentes. En P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1* (pp. 261-341). Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1894/

OCDE. (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y solución de problemas*. París: OCDE.

Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Jiménez & L. S. y J. P. Ponte (Eds.), *La actividad matemática en el aula* (pp. 25-34). Barcelona: Graó.

Ambientes de aprendizaje mediados por tecnologías

Jaime Romero Cruz[*]
Martha Bonilla E.[**]
Pedro Javier Rojas Garzón[***]

RESUMEN

Se presenta una reflexión sobre las características que adquieren los ambientes de aprendizaje en los que se incorporan las tecnologías de la información y las comunicaciones, y que serán útiles para la formación inicial de profesores de matemáticas que, además, desean que todos los alumnos aprendan matemáticas. Se argumenta que incorporar tecnologías a un ambiente de aprendizaje puede transformarlo radicalmente dependiendo del potencial y la intencionalidad con la cual han sido construidas.

Palabras clave: Formación de profesores de matemáticas, ambientes de aprendizaje, uso de TIC.

[*] Grupo Matemáticas Escolares Universidad Distrital – MESCUD. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá-Colombia. Dirección electrónica: jhromeroc@gmail.com

[**] Grupo Matemáticas Escolares Universidad Distrital – MESCUD. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá-Colombia.

[***] Grupo Matemáticas Escolares Universidad Distrital – MESCUD. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá-Colombia.

INTRODUCCIÓN

Una cantidad de investigaciones en educación matemática de la década de los 80 detectó la necesidad de transformar los currículos de matemáticas procurando desplazar su interés centrado en la enseñanza de los contenidos de la matemática escolar hacia el aprendizaje de formas cercanas al hacer matemático (Lebem, 2010) y, consecuentemente con ello, procurar una enseñanza que se centre en el aprendizaje con sentido. Sin embargo, se ha detectado una escasa transformación de los currículos y la existencia de una cantidad de estudiantes excluidos de la formación matemática. En las dos últimas décadas la investigación en educación matemática configuró como uno de sus focos de interés al profesor de matemáticas y su formación (ver, por ejemplo, Gómez, 2005; Lebem, 1999); uno de los resultados más importantes de esta focalización señala que una parte de las cuestiones detectadas como causales de la poca transformación de los currículos escolares puede deberse a la inapropiada formación dada a los profesores para acoger estas propuestas.

Las demandas para superar esta situación apoyan la necesidad de que los profesores tengan habilidad para hacer las matemáticas escolares accesibles a todos los alumnos, constituyéndose en un reto que investigadores y formadores de profesores empiezan a abordar. En especial, el reto de conseguir una educación matemática incluyente, que asuma la diversidad como una oportunidad para propiciar experiencias de aprendizaje matemáticamente ricas –es decir, de participación en prácticas cercanas al hacer matemático–, ha llevado a la investigación y a la práctica de formación de profesores a incorporar las perspectivas socioculturales al análisis de los procesos por los que los estudiantes para profesor (EPP) aprenden, y como afirman Llinares, Valls & Roig (2008, p. 32):

> … subrayando el papel del discurso y la interacción con otros en el proceso de construcción del conocimiento necesario para enseñar planteándose cuestiones sobre (Hill et al., 2007; Putman & Borko, 2000):
>
> *a)* ¿Cuáles deben ser el conocimiento y las destrezas de los maestros y profesores de matemáticas para desenvolverse en las aulas?
>
> *b)* ¿Cómo adquieren este conocimiento y destrezas?
>
> *c)* ¿Qué características deben tener las oportunidades de aprendizaje diseñadas para los estudiantes para profesores y las oportunidades de desarrollo profesional de los profesores en ejercicio?

Así que el conocimiento necesario para enseñar es considerado un conocimiento práctico, situado, complejo y multidimensional vinculado a la práctica de enseñar matemáticas y, por tanto, articulado al sistema de actividades que organizan la enseñanza (Llinares et al., 2008). Este sistema de actividades incluye:

(1) el diseño de tareas matemáticas que sean interpretadas como *instrumentos de aprendizaje matemático* (Bonilla, Romero, Bohórquez, Narváez & Ordóñez, 2010),

(2) interpretar y analizar las producciones matemáticas de los alumnos y

(3) gestionar y dirigir el debate matemático y las interacciones que lo promueven.

Se considera importante que los profesores interpreten las producciones matemáticas de sus alumnos (Llinares et al., 2008), superando la perspectiva del error y la dicotomía de correcto/incorrecto, pero, dando cuenta de los significados y procedimientos que los alumnos estén utilizando.

Dichos cambios de interpretación y de su sentido necesitan considerar, entre otras cuestiones, el propio conocimiento matemático que tiene el profesor (estudiante para profesor) y la experiencia propia de participación en prácticas de resolución de situaciones problema, como las que se espera les proponga a sus alumnos. Estos aspectos los abordaremos desde la caracterización del conocimiento matemático necesario para enseñar (MKT) y el diseño de ambientes de aprendizaje en los que tal conocimiento pueda ser aprendido por los EPP considerando el uso sistemático de las tecnologías de la información y de las comunicaciones. Así, el reconocimiento de la heterogeneidad y la diversidad los deberá constituir en marcos de referencia de la acción educativa, y permitirá que los profesores promuevan que los alumnos aprendan matemáticas participando de la práctica matemática: una posibilidad es constituir comunidades de práctica (Bonilla, et al., 2010; Sanjuán, Romero & Bonilla, 2010).

EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO NECESARIO PARA ENSEÑAR

Las discusiones sobre el conocimiento matemático que los futuros profesores requieren para enseñar también ha sido motivo de discusión. Varias denominaciones han sido usadas: conocimiento de la materia (Shulman, 1987), conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) (Ball & Bass, 2000, 2003), conocimiento aplicado a la enseñanza (Stylianides & Stylianides, 2010), entre otras, pero todas ellas coinciden en aseverar que se trata del conocimiento matemático que es importante para que los profesores puedan gestionar el debate matemático, promover construcción de conocimiento matemático, comprender las producciones matemáticas de los alumnos, es decir, promover el aprendizaje matemático de otros.

Por su parte Sanjuán et al. (2010, 2008) y Bonilla et al. (2010) afirman que el conocimiento matemático útil para la enseñanza debe estar ligado a las actividades que definen la práctica matemática, vinculada a la resolución de problemas matemáticos a saber: conjeturar, modelar, justificar, argumentar, generalizar, demostrar.

EL DISEÑO DE AMBIENTES DE APRENDIZAJE PARA EPP

Al referirnos a ambientes de aprendizaje centramos la atención en las actividades de aprendizaje, y los contextos en los cuales se espera se produzca dicho aprendizaje. Para definir ello, es menester explicitar lo que entendemos por aprendizaje. El aprendizaje de los EPP es visto como la participación paulatina en una macro comunidad de práctica [constelación de comunidades de práctica de profesores de matemáticas] aunque experimentada de manera local en una micro constelación (clase) de micro comunidades de práctica (Wenger, 2001). En tal micro comunidad, la empresa negociada será la resolución de la situación problema propuesta por el formador de profesores. A partir de la práctica de resolución colectiva irán construyendo un repertorio común, manifiesto en representaciones, procedimientos, soluciones parciales, que irá generando y será generado por el compromiso mutuo. La dualidad participación//cosificación dará cuenta de la identidad que en esta micro comunidad y micro constelación va generando cada uno de los miembros y micro comunidades como resolutores de problemas matemáticos.

Participar en comunidad en procesos de resolución de problemas matemáticos, privilegiando la práctica de hacer matemáticas, permite a los EPP tener experiencia, vivencia con estas actividades, lo que hace más probable que puedan gestionar en sus clases asuntos relativos a la cosificación como mediadora de las producciones matemáticas y de los debates matemáticos. Se posibilita promover el vínculo de la práctica propia de resolutor de problemas matemáticos con la práctica del profesor.

EL DISEÑO DE AMBIENTES DE APRENDIZAJE QUE INCORPOREN LAS TIC

Incorporar tecnologías a un ambiente de aprendizaje ha de transformarlo y, tal como lo afirman Romero & Bonilla (2003, p. 9): "si las tecnologías modifican los entornos socioculturales (Moreno y Sacristán, 2002), los entornos escolares, socialmente construidos han de afectarse en presencia de instrumental proveniente de nuevas tecnologías". Lo harán dependiendo del potencial y la intencionalidad con la cual han sido construidas. Investigaciones sobre el potencial didáctico de la tecnología informática han mostrado que puede ser socia cognitiva del aprendiz de matemáticas en tanto instrumento de indagación y exploración "[...] con posibilidad dialógica, [...] tecnología encarnada (TEC), depositaria de intencionalidad que le es constituyente, portadora también de gramáticas con las que se puede dilucidar y enriquecer esa intencionalidad [...] de instrumento dialogante con el que se pueden construir unas ciertas matemáticas" (Romero & Bonilla, 2003, p. 9).

En parte, el aprendiz aprende dichas gramáticas con la ejecución del instrumento mientras se hace un buen ejecutor del mismo. La TEC formatea los ambientes de aprendizaje pues, como lo plantean (Romero & Bonilla, 2003, p. 9):

> [...] en ella hay por lo menos dos gramáticas incorporadas, la generada por la interconectividad de sus representaciones ejecutables y la incorporada en la construcción de un instrumento así. La primera obedece a la pretensión de poner en el mundo un instrumento capaz de permitir el vínculo de las personas desde sus conocimientos –formas de representación y de acción– con formas de representación y de acción más estructuradas (interacción aprendiz, experto) [...]
>
> Destacamos esta presencia pues es responsable de la posibilidad de reconstrucción de conocimiento matemático, por la movilización de pensamiento en la dirección de pensamiento matemático, porque incorpora signos y normas de su producción y posibilidades de validación y diálogo dentro del sistema de signos.

Es así que un ambiente de aprendizaje, en el cual se incorporan las tecnologías, con la intencionalidad de propiciar aprendizajes en EPP, debe preveer

a. las formas de interacción o comunicación, haciendo especial énfasis en las que serán estimuladas por las tecnologías,

b. los instrumentos conceptuales y técnicos a usar, en especial los conceptos, procedimientos, prácticas matemáticas y la mediación instrumental,

c. las normas de regulación y

d. el espacio-tiempo en donde se llevan a cabo las actividades propuestas. Por ejemplo la implementación de aulas virtuales y su relación con las aulas presenciales, cuando se selecciona un carácter bimodal.

UNA EXPERIENCIA

La experiencia que se reporta se desarrolló en un aula de formación de profesores, con estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (Lebem, 2010; Lebem, 1999), programa de formación inicial de profesores desarrollado en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá-Colombia.

Para asumir los planteamientos anteriormente mencionados, la clase se constituyó como micro constelación de micro comunidades de práctica (Wenger, 2001). Estas comunidades tuvieron como empresa común negociada problematizar y resolver una situación. Además, el proceso de negociación y la empresa debían presentarse a la constelación.

La situación. En clase, usando la herramienta *Pasos de construcción* de Geogebra, el profesor presentó una construcción, a la que llamó caracola. Durante la presentación puso en sincronía procesos de visualización euclidiano y cartesiano (figura 2).

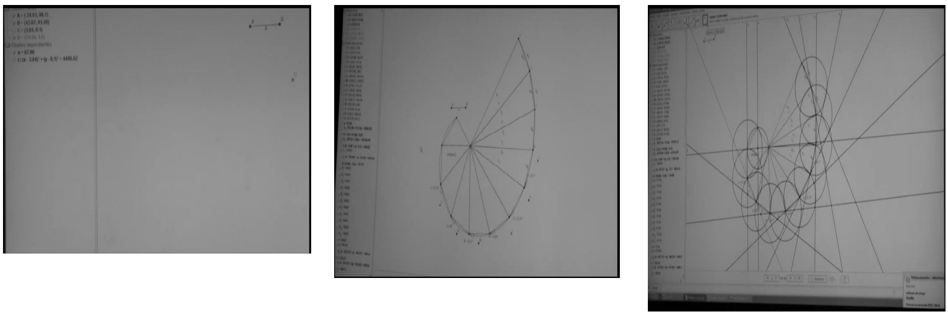


Figura 2

La comunicación y socialización de los procesos de resolución realizados por cada comunidad hacia las otras abordaron los traspasos de bordes y fronteras. Es decir, la clase se orientó hacia la constitución de la práctica y de la identidad brindando espacios de participación//cosificación y estimulando prácticas limitáneas (Wenger, 2001). Durante cuatro semanas las comunidades elaboraron sus significaciones cosificándolas en presentaciones para llevarlas a la constelación. Las evidencias dispuestas proceden de esas prácticas. Cada figura muestra parte de las producciones de sendas comunidades.

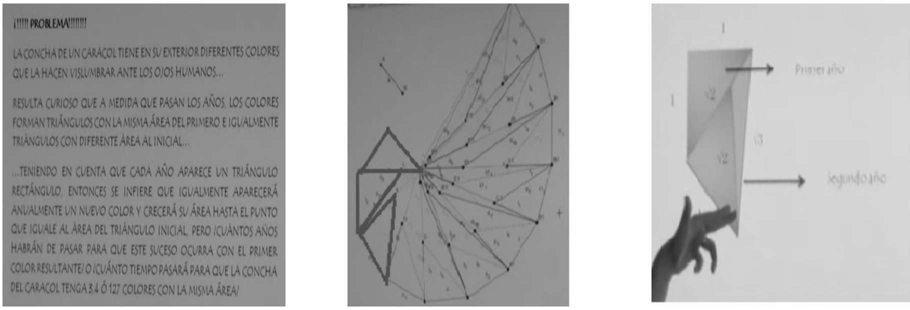


Figura 3

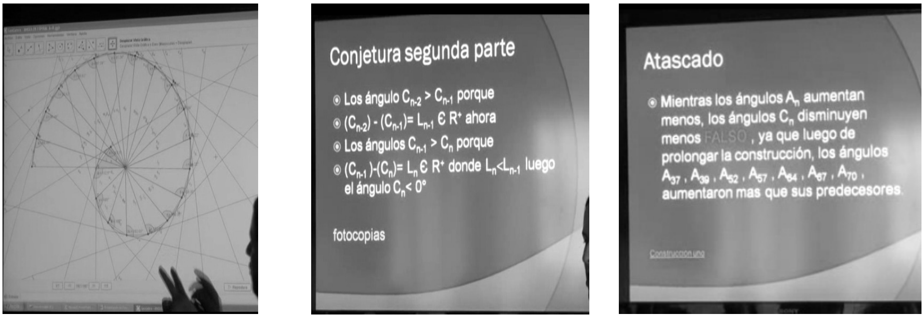


Figura 4

Puede observarse que el uso del Geogebra como instrumento (cosificación) de exploración, indagación y razonamiento, aunado a la configuración de comunidades de práctica que constituyen y negocian la empresa, conllevó una riquísima diversidad matemática, al tiempo que los estudiantes controlaban, modificaban y regulaban sus producciones.

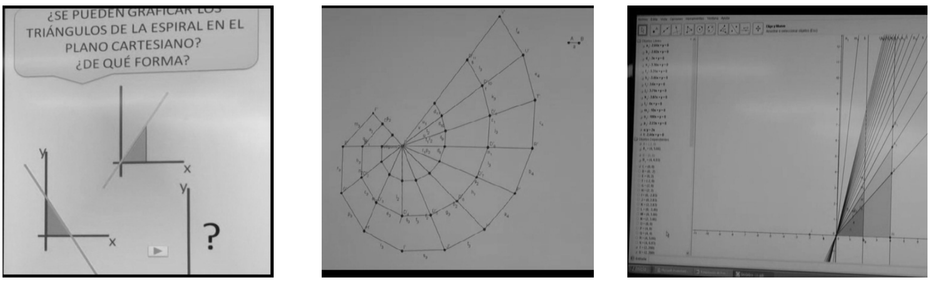


Figura 5

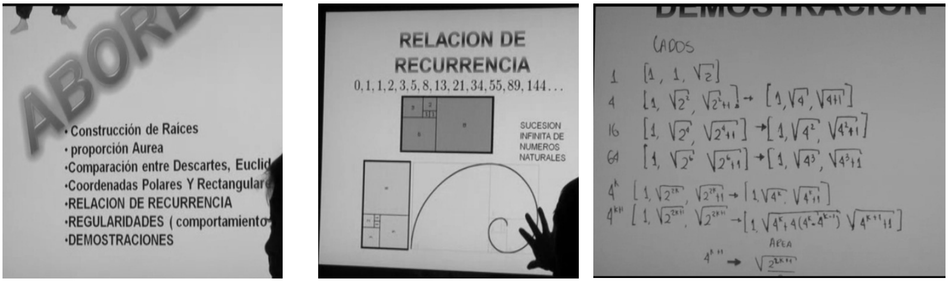


Figura 6

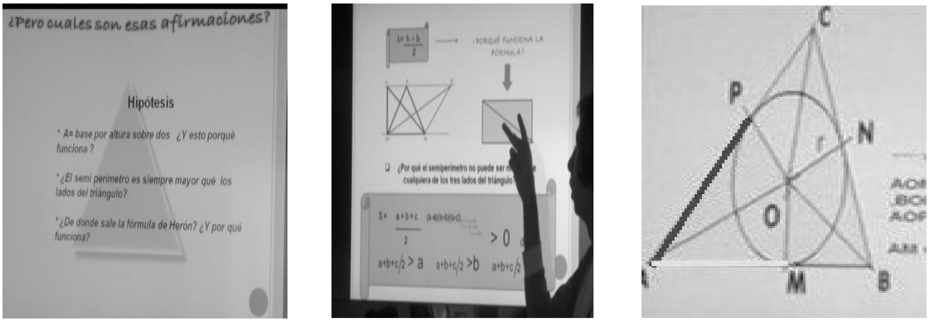


Figura 7

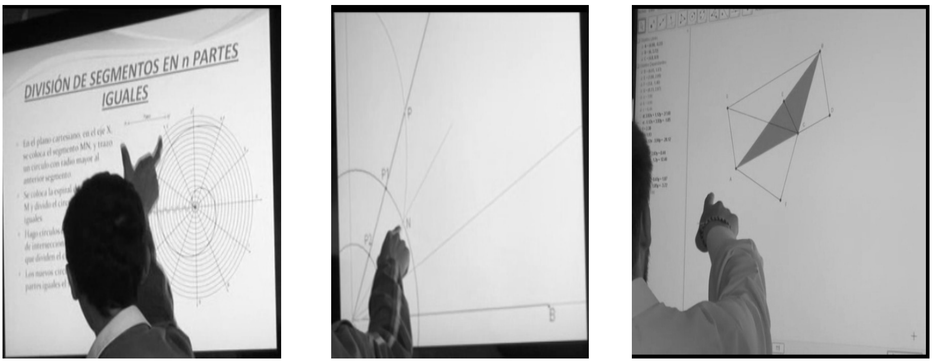


Figura 8

Por una parte, las figuras 4, 6, 7 y 8 dejan ver a los estudiantes usando formas de expresión matemática con las cuales exploran conjeturas y construyen procesos de generalización, refutación y prueba al más claro estilo lakatosiano, particularmente para elaborar explicaciones y argumentos.

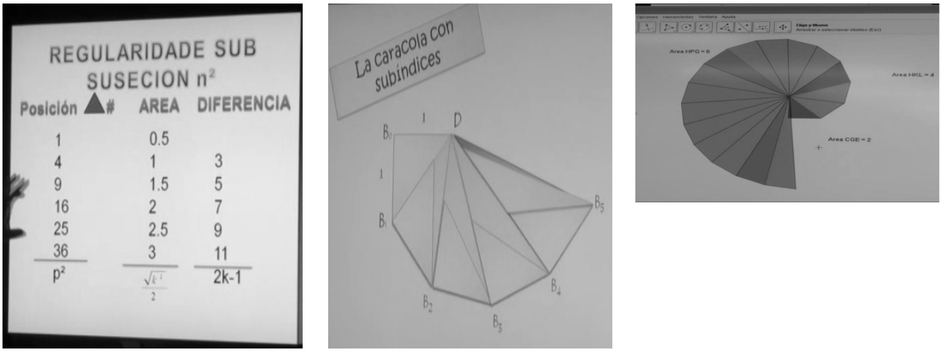


Figura 9

Los estudiantes usan la diversidad de representaciones dinámicas y ejecutables transformándolas y convirtiéndolas para sus propios fines. Por otra parte, las figuras 3, 5 y 9 consideran problemáticas ligadas a la conveniencia de expresiones matemáticas y a la enunciación de problemas como fuente de sentido para la actividad matemática. Es decir, en ellas se constata que la constelación está generando actividades que muestran su conciencia de afiliación a la macro constelación de profesores de matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ball, D. L. & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. En: Boaler, J. (Ed.). *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp.83-104). Westport: Ablex.

Ball, D. L. & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. En: Davis, B. & Simmt, E. (Eds.), *Proceedings of the2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.

Bonilla, M., Romero, J., Bohórquez, L., Narváez, D. & Ordóñez, C. (en prensa): Sobre el uso de instrumentos conceptuales y técnicos en el aula (Manuscrito presentado para publicación, 2010).

Gómez P. (2005). Diversidad en la formación de profesores de matemáticas: en la búsqueda de un núcleo común. *EMA, 10* (1), 242-293

Lebem (1999). *Documento de acreditación previa. Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM)*. Manuscrito sin publicar.

________________ (2010). *Documento de acreditación de alta calidad del proyecto curricular de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM) de la Universidad Distrital*. Bogotá. Recuperado de http://lebem.udistrital.edu.co

Llinares, S, Valls, J. & Roig, A-J. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática, 20*(3), 31-54.

Romero, J., Bonilla, M. (2003). La calculadora como rediseñadora de la finalidad del trabajo del profesor. En: MEN. *Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas* (pp. 87-96). Bogotá: MEN.

Sanjuán, A., Romero, J. & Bonilla, M. (2008). El proceso de demostración como instrumento de aprendizaje en la formación de profesores. Manuscrito no publicado.

________________ (en prensa). Resolución de problemas de Matemáticas. Manual del professor (Manuscrito presentado para publicación, 2010).

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard Educational Review*, 57*(1), 1-22.

Stylianides, G. J. & Stylianides, A. J. (2010). Mathematics for teaching: A form of applied mathematics. *Teaching and Teacher Education, 26,* 161--172.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica: aprendizaje, significado e identidad*. Barcelona: Paidós.

Artefactos culturales, mediación y procesos semióticos en la instrucción matemática

*Gabriel Tamayo Valdés**
*Álvaro de Jesús Solano Solano***

RESUMEN

Nuestros objetivos en el presente curso:

* Desarrollar una herramienta analítica de la cognición matemática, la teoría de las funciones semióticas (TFS), adaptada a las necesidades de la investigación en didáctica de las matemáticas.
* Aplicar la TFS, usando instrumentos de mediación, en el análisis de objetos matemáticos.

La actividad matemática humana en contextos históricos ha esta acompañada de artefactos. El término artefacto en el sentido general, incluye herramientas como compases, ábacos, software, calculadoras graficadoras, textos, idioma, teorías matemáticas.

La teoría de instrucción matemática significativa basada en el modelo ontológico-semiótico de la cognición matemática denominado teoría de las funciones semióticas (TFS) proporciona un marco unificado para el estudio de las diversas formas de conocimiento matemático y sus respectivas interacciones en el seno de los sistemas didácticos.

Palabras clave: gestión del aula, gestión y calidad (recursos informáticos: calculadoras, software).

* IE Manuel Germán Cuello Gutiérrez. Dirección electrónica: gtamayov@gmail.com
** Universidad Popular del Cesar. Dirección electrónica: alsolano13@gmail.com

MARCO TEÓRICO

La actividad matemática humana en contextos históricos ha estado acompañada de artefactos. El término artefacto, en el sentido general, incluye herramientas como compases, ábacos, software, calculadoras graficadoras, textos, idioma, teorías matemáticas (Wartofsky ,1979).

El uso individual y/o social de artefactos en el acompañamiento de actividades que involucra al mediador y lo mediado genera signos compartidos. Existe una información matemática "implantada" (sistema de signos) en los artefactos que potencia la construcción del conocimiento de los objetos matemáticos. Vigostky distingue entre la función de mediación de la herramienta técnica y la herramienta psicológica (signos o herramientas de mediación semiótica). "Las herramientas técnicas son orientadas externamente, los signos son orientados internamente. Reconstrucción interna de una operación externa. Un proceso interpersonal es transformado en un proceso intrapersonal" (Vigostky, 1996).

Para la cognición matemática en el marco de la Teoría de las Funciones Semióticas (TFS), se identifican las siguientes entidades básicas o primarias (categorías):

Extensivas, considerando como tales las situaciones-problema, aplicaciones, tareas, en general, las "entidades extensionales" que inducen actividades matemáticas.

Ostensivas, esto es, todo tipo de representaciones materiales "públicas" usadas en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, gráficas, tablas, diagramas, etc.), en general, "entidades notacionales",

Intensivas, ideas matemáticas, abstracciones (conceptos, proposiciones, procedimientos, generalizaciones matemáticas, teorías, esto es, "entidades intensionales") (Godino & Recio, 1998, citado por Font, 2000).

La génesis del conocimiento matemático es producida como consecuencia de la actividad del sujeto cuando enfrenta situaciones problemáticas haciendo uso de los elementos ostensivos e intensivos; por eso la entidad (categoría) **Actuativa** (acción del sujeto describiendo, operando, argumentando, generalizando) es relevante en el modelo" (Godino & Batanero, 2003).

Las funciones semióticas se expresan en la siguiente tabla:

	Ext	*Int*	*Not*
Ext	FS1	FS2	FS3
Int	FS4	FS5	FS6
Not	FS7	FS8	FS9

Métodos y procedimientos. En el marco de la metodología de curso corto se tendrán en cuenta: exposiciones, discusiones, plenarias y actividades prácticas.

Las actividades prácticas contemplan el uso del artefacto de mediación semiótica (calculadora TI-92 plus y/o Voyage 200, simuladores respectivos) para el estudio de los objetos matemáticos: variación lineal, continuidad en un punto, definición del límite de una función Cauchy-Weierstrass (ε-δ), sistema de ecuaciones lineal con dos variables.

Discusión. Para la instrucción matemática (en los diferentes niveles de educación) la implementación de artefactos (ambientes digitales dinámicos y mediadores semióticos) amplifica y reconstruye los desarrollos curriculares, como también la significación del objeto matemático por parte del estudiante en el marco de la TFS, y posibilita la "aparición" de ciclos didácticos contextualizados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bartolini B., María G. & Mariotti, María A. (2006). Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective. Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom, in *Handbook of International Research in Mathematics Education, second revised edition,* NJ, pp.746-805.

Contreras, A., & Font, V., (2002) ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica? *XVIII Jornadas del SI-IDM*, pp.1-23.

Font, V. (2000), Representaciones ostensivas activadas en prácticas de justificación en instituciones escolares de enseñanza media, Departamento de Didáctica de las CCEE y la Matemática de la Universidad de Barcelona. *International Newsletter on the teaching and learning of Mathematical proof*. pp. 1-22. (Font00.pdf).

Godino, J. D. (2003), *Teoría de las funciones semióticas en didáctica de las matemáticas*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada, pp. 1-19., (Teoría fs.pdf).

Godino, J. D. & Batanero, C. (2003). Semiotic Functions in Teaching and Learning Mathematics. *Educational Perspectives on Mathematics as semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*. Ottawa: LEGAS. (sf.pdf).

Lupiáñez, J. L. & Moreno A., L. (1999). *Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas*. CINVESTAV, IPN, México.

Vigotsky, Lev S. (1996). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. CRÍTICA. (Grijalbo Mondari, S. A.).

Wartofsky, M. (1979). Perception, Representation, and the forms of Action: Towards an historical Epistemology. IN: *Models, Representation and the Scientific Understanding*. D. Reidel Publishing Company: 188-209.

La formación matemática de los profesores de Educación Básica Primaria

Alfonso Jiménez Espinosa*

RESUMEN

El Proyecto para la Transformación de la Calidad Educativa (PTCE), que se está desarrollando en convenio entre el MEN y cinco universidades públicas entre las cuales está la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC), tiene entre sus objetivos "fortalecer las competencias profesionales de los docentes de Educación Básica Primaria para cualificar sus prácticas de aula, y contribuir al mejoramiento de los aprendizajes de los estudiantes en matemáticas…" (Proyecto PTCE, MEN).

Cuando se habla de calidad de la educación, necesariamente debe pensarse en aspectos como la calidad de los programas de formación inicial de profesores, el tipo de formación permanente y el acompañamiento que están teniendo los docentes, las condiciones en las que estudiantes y profesores desarrollan sus tareas educativas, los materiales didácticos de que disponen, entre otros (Jiménez, et al. 2012).

En la formación de los profesores es bien sabida la dicotomía existente entre el peso que deben tener los contenidos disciplinares matemáticos y los contenidos pedagógicos y didácticos, además de las discusiones en torno al momento en que deben darse cada uno de ellos y la forma más pertinente de hacerse. Al respecto, hay consensos en el hecho que cada una de las dos áreas debe hacer parte de la formación de los profesores (Ponte, et al. 1997).

En cuanto a la formación matemática de los profesores de Educación Básica, coincidimos con Azcárate (1998) en el sentido que no debe estar centrada en los contenidos científicos disciplinares de la matemática, sino que debe hacerse en profundidad en el conocimiento de la didáctica de la matemática. Una formación centrada en la didáctica, según esta autora, le permitirá al profesor, no solo dominar los conceptos estructurantes disciplinares, sino también conocer "los puentes con otras áreas y las prácticas sociales que sirven de referencia" (p. 136) a la matemática y su enseñanza.

El presente cursillo pretende desarrollar con los docentes algunas actividades matemáticas de las programadas en el marco del proyecto mencionado, y tiene la siguiente estructura: toda actividad comienza con una sección que llamamos de "aspectos para pensar", que puede ser a través de un cuestionario o una pequeña historia; a continuación se hace una "reflexión teórica" que permite contrastar lo que el docente piensa y lo que dice la literatura especializada. Luego se propone alguna "actividad de aula" y se cierra cada sección con una evaluación que le permita al profesor "(re)significar" sus saberes y sus prácticas (Jiménez, 2002).

* Profesor Titular Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Grupo de Investigación en Educación Matemática "Pirámide".

ASPECTOS TEÓRICOS

Formar profesores de matemáticas es un asunto complejo y tema de controversia, porque para los matemáticos es solo cuestión de enseñar contenidos matemáticos a los futuros docentes, en cuanto que para los educadores matemáticos, el eje de formación debe ser en profundidad la didáctica de la matemática (Azcárate, 1998). Una formación centrada en la didáctica, según esta autora, le permitirá al profesor, no solo dominar los conceptos estructurantes disciplinares, sino también conocer "los puentes con otras áreas y las prácticas sociales que sirven de referencia" (p. 136) a la matemática y su enseñanza.

En cuanto a la formación de profesores se tienen en cuenta referentes teóricos como Fiorentini (2000 y 2001), Tardif (2000), Zeichner (1993) y tesis de doctorado como Jiménez (2002) y Pinto (2000), entre otros, que entienden la formación continua de profesores como un proceso que debe partir de la reflexión sobre la práctica hasta llegar a (re)significarla (Jiménez, 2002).

METODOLOGÍA

El cursillo propone desarrollar sesiones prácticas de trabajo, que se convierten en lecciones que el profesor de Educación Básica puede desarrollar con sus estudiantes, una vez él lo haga. Cada actividad, que llamamos "situaciones de aula", destaca las competencias que se espera que los docentes alcancen, y luego, sus estudiantes. Cada situación de aula que se propone está acompañada de cuatro ítems: actividades para pensar, reflexión teórica, actividades de evaluación y (re) significación de las prácticas. Todos estos ítems tienen una intencionalidad pedagógica, como se expresa a continuación.

Las actividades para pensar quieren que usted, profesor, haga explícitas ideas y conceptos previos, respecto a diversos temas, tanto de la didáctica, de las matemáticas, como de las prácticas cotidianas de aula.

La reflexión teórica expone de forma muy breve y sencilla aspectos teóricos que generalmente pueden contrastar el pensamiento que hizo explícito en la actividad anterior. Con esto se busca que perciba que no siempre lo que se cree es lo más apropiado para desarrollar sus actividades y su tarea como profesor de matemáticas.

Las situaciones de aula lo invitan, inicialmente, a que realice las actividades propuestas para que luego diseñe otras, con el ánimo de que vea variadas alternativas para que sus estudiantes aprendan de una mejor forma la matemática que enseña.

La actividad de evaluación pretende examinar la forma como entendió toda la actividad y lo invita a que proponga situaciones similares en su práctica diaria.

La (re)significación pretende que haga explícito aquello que (de acuerdo con sus concepciones iniciales) logró replantear y darle un nuevo significado. Aquí el uso de valiosas estrategias de formación como los encuentros con otros colegas donde se comparten experiencias (Jiménez, 2005), la puesta en plataforma de pequeños escritos (narrativas) donde cuente e intercambie sus experiencias para que otros colegas las puedan leer y contrastar con lo que ellos hicieron se convierten en las herramientas básicas para cambiar la forma de ver toda su docencia en general, y la de ser profesor de matemáticas en ese nivel (Módulo pensamiento multiplicativo, PTCE, 2012).

Se debe destacar que, tanto las actividades para pensar, como las reflexiones teóricas se plantean sobre creencias de la propia matemática y sobre aspectos didácticos como la dinámica de la clase, la comunicación, la enseñanza, el aprendizaje o el uso de recursos didácticos (medios y mediaciones) en la enseñanza de las matemáticas.

ALGUNAS SITUACIONES DE AULA

Cada una de estas situaciones se desarrolla alrededor de un aspecto didáctico. A continuación se presentan algunas de las actividades a realizar (aquí solo se presentarán tres: una alrededor de la etnomatemática; otra alrededor del uso de la historia como recurso didáctico y otra sobre el uso del plegado en geometría elemental).

La etnomatemática

Aspectos iniciales para pensar

Lea con atención el siguiente texto que describe resultados de una investigación sobre el uso de las matemáticas:

En una investigación, en la cual intervinieron niños vendedores ambulantes que habían abandonado la escuela por su fracaso, los investigadores les piden que resuelvan el siguiente problema:

En una escuela hay 12 salones de clase, cada uno con 50 alumnos. ¿Cuántos alumnos tiene en total aquella escuela? (Carraher, Carraher & Schliemann, 2002, p. 42).

La solución de un niño fue la siguiente: 600.

Su explicación: 12 salones… 2 juntos…; 2 son 100 (alumnos); 4 son 200; 6 son 300; 8 son 400; 10 son 500; 12 son 600.

Obsérvese cómo el niño no recurre a solucionar el problema efectuando la multiplicación convencional 12 x 50. Los investigadores piden a estudiantes universitarios de pregrado y postgrado que resuelvan el mismo problema, para detectar semejanzas y diferencias en el modo de resolver el problema y encontraron, no sin sorpresa, que la forma como los estudiantes universitarios elaboraron la respuesta fue la misma que emplearon los niños de la calle.

¿CUÁL CREE QUE ES LA EXPLICACIÓN A LOS HALLAZGOS DE AQUELLOS INVESTIGADORES?

Reflexión teórica

De acuerdo con estos investigadores, el niño descompone la solución en vez de descomponer el problema. El niño agrupa porciones de la respuesta, con las que se siente cómodo (porque las usa) hasta obtener el total. Estas unidades y algoritmos de solución son generalmente los que, en este caso, se usan en el contexto del comercio, ya que los padres de esos niños (y ellos también) vivían a diario inmersos en actividades comerciales de vendedores en la calle. "Así, el niño descompone el problema global utilizando agrupamientos naturales" (Carraher, Carraher & Schliemann, 2002, p. 42) o usando la aritmética informal (Maza, 1991). De esta forma: "Sería ingenuo defender la idea de que el sistema de cálculo que se usa en las escuelas es superior al sistema usado por nuestros sujetos" (Carraher, Carraher y Schliemann, 2002), en este caso, sujetos ubicados en contextos naturales.

El fracaso escolar se ha entendido y estudiado alternativamente como fracaso individual (de cada niño que fracasa), fracaso de clase social (en general las clase bajas) o fracaso de un sistema social económico y político, interpretaciones que, según Poppovic (citado por Carraher, Carraher & Schliemann, 2002), dejan por fuera del debate a la institución escolar con sus valores, sus prácticas, su didáctica, sus métodos y su organización. En este sentido, pensar el fracaso desde la propia escuela es considerarlo como consecuencia de una mala interrelación entre la escuela y los alumnos que provienen de diversos medios sociales, cuando no se entiende su papel desde este contexto complejo, lo cual no niega que las diferencias entre clases, o explicaciones de naturaleza social, económica o política, incidan también en el fracaso. Del análisis de esta investigación, se concluye la altísima influencia que tienen los saberes matemáticos que los niños manejan desde antes de llegar a la escuela, y que D´Ambrosio (2002, p. 9) llama como "etnomatemática". La etnomatemática es la matemática practicada por grupos culturales, tales como comunidades urbanas y rurales, grupos de trabajadores, clases profesionales, niños de una cierta etapa de desarrollo, sociedades indígenas y tantos otros grupos que se identifican con objetivos y tradiciones comunes a su grupo en particular. El uso de la matemática que los niños ya saben (etnomatemática) se convierte en un recurso valiosísimo para la enseñanza, además de permitirle al niño entrar a los conceptos escolares dando sentido a sus prácticas y, con seguridad, disminuyendo el rechazo de los niños a la matemática y a la propia escuela.

Observe cómo la matemática que los niños aprendieron en el contexto donde viven (etnomatemática) se convierte en una valiosa medicación entre lo que ya saben y los conceptos nuevos que se desea que aprendan.

Identificación de competencias

- Resuelve problemas multiplicativos de comparación.
- Ahora usted, profesor, puede identificar otra(s) competencia(s) que puede desarrollar con sus alumnos en esta actividad.

A continuación encontrará una actividad relacionada con las formas de interpretar la multiplicación:

El profesor organiza un minimercado con frutas producidas en la región (o que se compran en el supermercado del pueblo o del barrio) y que los niños llevan para intercambiar en la hora del recreo. La regla para participar es que no se puede usar dinero (ni billetes, ni monedas), sino que los productos se deben intercambiar, dependiendo del valor real de cada producto en el mercado del pueblo o del barrio; así, por un banano se dan dos naranjas, por una naranja se dan cuatro fresas, por dos bananos se da una pera, por una pera dos granadillas, y por dos peras una manzana.

En la situación concreta a la hora del intercambio, algunas de las situaciones que se presentan son:

➢ Juanito llevó 4 naranjas y quiere un banano, ¿le sobran naranjas?; si le sobran, ¿cuántas naranjas le quedan aún para intercambiar?; ¿qué otras frutas puede coger?

- María llevó fresas y una pera. Después de ver sus posibilidades, resuelve coger granadillas y bananos. Lleva un banano y 2 granadillas. ¿Cuántas fresas llevó para el minimercado?
- Lo que llevó Andrea lo cambió por una pera y dos bananos, ¿qué había llevado Andrea?

Nota 1: profesor, de acuerdo con las frutas de la región donde está su institución educativa, es posible organizar el minimercado, basta solo tener en cuenta las equivalencias.

Nota 2: los estudios de la etnomatemática han encontrado que diferentes culturas, rurales y urbanas, e incluso profesionales, usan tipos de medidas que son diferentes a las convencionales de las matemáticas usadas en la escuela (D´Ambrosio, 2002). Es bueno hacer este tipo de indagaciones con los niños.

Nota 3: profesor, permita que los niños establezcan sus propias formas de hacer los intercambios, escúchelos y pídales que expliquen su solución y que argumenten por qué lo hicieron de esa forma. En estas actividades de situaciones multiplicativas, los niños amplían su significado a medida que las relacionan con situaciones de reparto, sin que sea necesario el manejo de operaciones numéricas explícitas.

ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN

- ✓ Proponga otras posibilidades de intercambio de productos según las condiciones específicas.
- ✓ Indague y discuta con sus estudiantes las formas en que en su comunidad se realiza el trueque; si no existe, en la escuela puede incentivarlo, con actividades similares.
- ✓ De ser posible, compare sus soluciones con las de sus colegas.

(Re)significación

- ✓ Respecto de la actividad que acaba de desarrollar, ¿qué aspectos de su práctica ha repensado o reorganizado?
- ✓ Las actividades desarrolladas en esta unidad invitan a conceptualizar la multiplicación en dos de las formas en que esta puede verse: como comparación y como combinatoria (Maza, 1991); la otra forma es como sumas repetidas.

- ✓ Después de desarrollar la actividad anterior con sus estudiantes y de tomar atenta nota de las actitudes, discusiones, respuestas dadas, y todo lo que le haya parecido interesante, escriba una pequeña reseña (historia) y dela a conocer a otros profesores. De ser posible colóquela en la red.

MEDIOS Y MEDIACIONES (EL USO DE LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA COMO RECURSO DIDÁCTICO)

Aspectos iniciales para pensar

En las siguientes afirmaciones, marque con una X el número que más se acomode a su forma de pensar, de acuerdo con la siguiente convención: si está en total desacuerdo, marque 1; si está en desacuerdo, marque 2; si no está ni de acuerdo ni en desacuerdo, marque 3; si está de acuerdo, marque 4; y si está totalmente de acuerdo, marque 5.

a) Cuando la institución educativa no tiene materiales didácticos es difícil enseñar matemáticas.

   1 2 3 4 5

b) En Educación Básica Primaria la historia de las matemáticas tiene poca utilidad.

   1 2 3 4 5

c) Cuando se habla de cultura nos referimos a las costumbres, la música, la danza, el idioma, las comidas, pero no a las matemáticas.

   1 2 3 4 5

d) Lo más importante en el desarrollo del pensamiento multiplicativo de los niños es que aprendan de memoria las tablas.

   1 2 3 4 5

En la medida de lo posible compare sus respuestas con la de otros colegas, discútanlas.

REFLEXIÓN TEÓRICA

Puede pensarse que las matemáticas son algo ajeno a las personas y que solo están reservadas para algunos pocos "iluminados, inteligentes o genios"; sin embargo, las matemáticas son algo inherente a cada ser humano, a cada sociedad y a cada cultura, como se puede constatar en relatos históricos de culturas antiguas como la griega, la egipcia, la babilónica, la maya o tantas otras. También puede pensarse que cuando se habla de recursos o materiales para la enseñanza de las matemáticas necesariamente se está pensando en materiales manipulativos como juegos, fichas, figuras geométricas o algún otro tipo de materiales, pero estas creencias carecen de validez, como se puede ver a continuación.

La naturaleza siempre ha inquietado e instigado a los seres humanos, quienes han intentado identificar los objetos de su entorno, con el propósito de conocer a fondo el propio ambiente. En esta búsqueda de hechos, la historia de las matemáticas puede ayudarnos a esclarecer ideas, situando en el tiempo esos procesos de construcción originados, en general, por preocupaciones de esas culturas en un determinado momento histórico, pero la historia también puede ser una herramienta valiosa para la enseñanza de las matemáticas, de alguna manera, recreando la forma de pensar de otras culturas.

Muchas civilizaciones reverenciaban los números y la geometría, y los asociaban a propiedades míticas, según ellos por la belleza que encarnaban; así, por citar un caso, los griegos asociaban atributos masculinos a los números impares, y femeninos a los pares, y de esta forma tenían una verdadera adoración por los números y los asociaban a su filosofía y modo de vivir. De acuerdo con Boyer (1994), los griegos de la escuela pitagórica creían que los números eran concebidos geométricamente como figuras y tamaños dotados de significación religiosa, definiendo el número como la esencia de todas las cosas, y el universo, como un sistema armonioso de números y de relaciones numéricas. Veamos, por ejemplo, el significado que le daban al número 10, al que llamaban Tetractys.

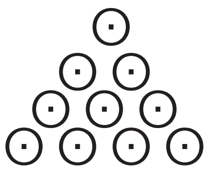
<table>
<tr><th colspan="2">Representación griega del número 10</th></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td>Cúspide – Unidad divina</td></tr>
<tr><td>Segunda línea – Expresión del espíritu</td></tr>
<tr><td>Tercera línea – El alma</td></tr>
<tr><td>Base – Expresión de la materia</td></tr>
</table>

Figura 1

Actividades para que usted, profesor, desarrolle y luego haga lo propio con sus estudiantes.

Identificación de competencias

- Compone y descompone aditiva y multiplicativamente un número.
- Describe, compara y cuantifica situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones.
- Ahora usted, profesor, debe identificar otra(s) competencia(s) que puede desarrollar con sus alumnos en esta actividad.

Como se observa en la figura anterior, la representación del número diez era una consecuencia de la preocupación que se tenía en relación con los números llamados figurales; así cada número era una figura; algunos de los más destacados fueron los números triangulares, por representar, justamente, arreglos de puntos en triángulos equiláteros. Veámoslos:

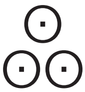
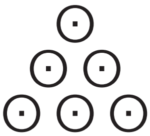
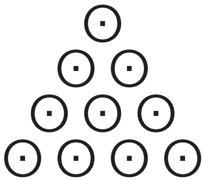
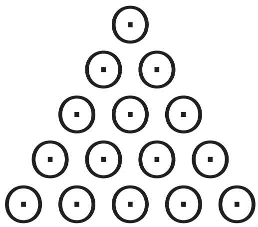
Números triangulares			
3	6	10	15…
			

Figura 2

Nota: piense en conseguir materiales con los cuales se pueda hacer la representación de números triangulares con sus estudiantes. ¡Claro!, pueden ser piedritas, tapas de gaseosa o cerveza. Se trata de poner a prueba su imaginación. Toda la actividad se puede hacer con sus alumnos.

Al observar cada número triangular en la figura anterior se puede constatar que:

$3 = 1 + 2$

$6 = 1 + 2 + 3$

$10 = 1 + 2 + 3 + 4$

$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

Escriba otros números triangulares y su descomposición en forma de adiciones.

Realice *arreglos*, los cuales no son otra cosa que el uso de las propiedades asociativa y conmutativa de la adición, a los sumandos de algunos números triangulares:

15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5   10 = 1 + 2 + 3 + 4   21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6

Usando paréntesis se tiene que:

10 = (1 + 4) + (2 + 3), es decir que 10 = 2 veces 5

15 = (1 + 5) + (2 + 4) + 3, es decir que 15 = (2 veces 6) + 3

21 = (1 + 6) + (2 + 5) + (3 + 4), es decir que 21 = 3 veces 7

28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7, es decir que

28 = (1 + 7) + (2 + 6) + (3 + 5) + 4

28 = (3 veces 8) + 4.

A continuación complete los espacios

36 = ____________________, es decir que 36 = ____________________

36 = ____________________

____________________ = 1 + 2 +3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9,

es decir que ____________________ = ____________________

55 = ____________________, es decir que 55 = ____________________

¿Podría generalizar una expresión para un número triangular cualquiera? ¡Inténtelo!

Comience con 3, luego con 6, con 66 y con el que sigue, hasta que identifique una propiedad que cumplen todos esos números llamados triangulares.

¿Considera el número uno (1) como triangular? Justifique su respuesta.

Formular este tipo de situaciones a los estudiantes exige de ellos aplicación de conocimientos previos (en este caso, estructuras aditivas), planteamiento de nuevas hipótesis, soluciones creativas, comprobación y justificación de argumentos, que no es otra cosa que enfrentarlo a situaciones problema que son enriquecedoras en la construcción de conocimiento matemático.

EL PLEGADO EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA ELEMENTAL

Aspectos iniciales para pensar: La naturaleza de las matemáticas

En las siguientes afirmaciones marque con una x el número que más se acomode con su forma de pensar; de acuerdo con la siguiente convención: si está en total desacuerdo marque 1; si está en desacuerdo marque 2; si no está ni de acuerdo ni en desacuerdo marque 3; si está de acuerdo marque 4; y si está totalmente de acuerdo marque 5.

a) Las matemáticas están formadas por un conjunto de conceptos o entes abstractos (definiciones, reglas y fórmulas). 1 2 3 4 5

b) Aprender matemáticas significa aprender a pensar y a resolver problemas. 1 2 3 4 5

c) Quien sabe matemáticas lo manifiesta en que expresa de memoria reglas (por ejemplo, las tablas de multiplicar o fórmulas de áreas y perímetros) y las usa para encontrar resultados. 1 2 3 4 5

d) Quien es bueno en matemáticas es porque nació con ciertas habilidades que otros no tienen, lo cual explica por qué unos alumnos aprueban y otros reprueban. 1 2 3 4 5

e) Los conceptos matemáticos son verdades fijas e inmutables. 1 2 3 4 5

REFLEXIÓN TEÓRICA

A lo largo de la historia se han manejado básicamente dos formas para explicar lo que son los objetos (conceptos) matemáticos, y para entender cuál es su naturaleza; una que los asume como objetos inmateriales, abstractos e inmutables sin relación con la vida de las personas; y otra que los relaciona con la cotidianidad de las personas, su cultura y con el mundo y el entorno en donde se vive y se practica (Ponte et al., 1997). La primera es una concepción platónica (los conceptos matemáticos existen "en el mundo de las ideas") y la segunda está centrada en una concepción sociocultural de la matemática (la matemática hace parte de la cultura tal como la música, las danzas o las comidas). Esta separación es drásticamente marcada por Stone (1978; 78) cuando afirma: "(...) las matemáticas son totalmente independientes del mundo físico... (...) no se cree hoy en día que las matemáticas tengan alguna relación con el mundo físico...". Aunque estas afirmaciones puedan ser consideradas válidas por algunos científicos que producen matemática, ¿podrá aceptarse por quienes enseñamos matemáticas en los niveles básicos y aún en la universidad? Si se piensa en las dificultades que tienen los estudiantes en su aprendizaje, esas afirmaciones carecen de validez, pues una matemática así no tiene sentido alguno para los niños y jóvenes (Jiménez, 2010; 139).

Para que la matemática que enseñamos en los niveles básicos tenga sentido para los niños, esta tiene que estar relacionada con lo que las personas y particularmente los niños hacen y viven diariamente, ya que los conceptos que intervienen, como numeración, medidas, operaciones, comparación de formas, están relacionados con cosas y hechos concretos y para nada abstractos e inmutables. Una de las grandes dificultades en estos niveles está en que se intenta describir y presentar los objetos matemáticos a través de definiciones (en lenguaje abstracto), como la de rectángulo, por ejemplo, lo cual debe evitarse a toda costa (Ídem). Es decir, es preferible que los niños tengan primero la posibilidad de manipular, explorar, comparar, clasificar y, en últimas, sí, por consenso, colocar un nombre, por ejemplo, para el caso de las figuras geométricas. En estas condiciones, todas las personas están en capacidad de aprender matemáticas y el objeto de enseñarla es que los niños aprendan a pensar matemáticamente, perfeccionen los usos que ya hacen de ella y saberla usar en la resolución de problemas en el contexto en que cada uno se desenvuelva.

Es de destacar que si consideramos la matemática como algo relacionado con las actividades diarias, el juego y la manipulación de objetos se convierten en excelentes estrategias para aprenderlas.

Situación de aula

A continuación encontrará actividades para que usted, profesor, las desarrolle y luego haga lo propio con sus estudiantes.

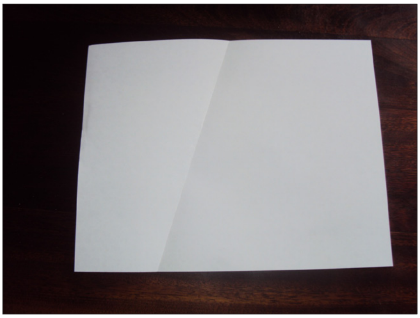
ACTIVIDAD 1

Identificación de competencias:

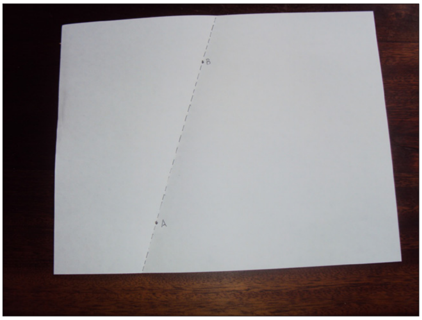
- Reconozco nociones de paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos.
- Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características.
- Ahora usted, profesor, debe identificar otra(s) competencia(s) que puede desarrollar con sus alumnos en esta actividad.

Nuestra experiencia nos muestra que la gran mayoría de los objetos de la naturaleza tienen formas irregulares; sin embargo, para efectos prácticos, el ser humano ha identificado formas regulares como cubos, cilindros, esferas o conos, en el espacio; o cuadrados, triángulos o polígonos, en el plano. A continuación vamos a jugar con hojas de papel (planos), a través del plegado para ver algunas de estas formas en el plano y sus componentes.

1. Cualquier doblez que se haga a una hoja, al regresarla a su estado inicial sobre la mesa (plano), deja una "huella" o "marca" que puede ser usada para introducir la idea de línea recta (Rodríguez, 1992). La huella que queda en la hoja, junto con la extensión en ambas direcciones indefinidamente (debe imaginarse) determina una **línea recta**. Es claro que cuando se deslizan los dedos sobre la huella dejada por el doblez se percibe lo que es una recta, lo cual es imposible conseguir a través de una definición.

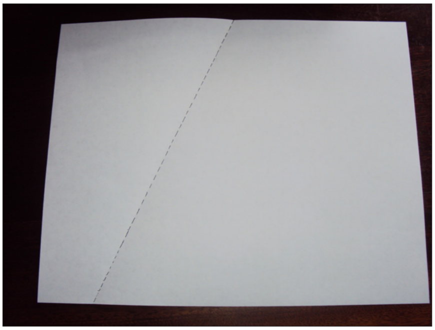


2. **Por dos puntos pasa una única recta**. Marque dos puntos cualesquiera A y B sobre un plano (en una hoja) y realice un doblez que pase exactamente por esos dos puntos. Observe que la recta queda seccionada en tres partes: antes del punto A; entre los puntos A y B, y después del punto B. A la porción de recta comprendida entre los puntos A y B se le denomina "segmento de recta".

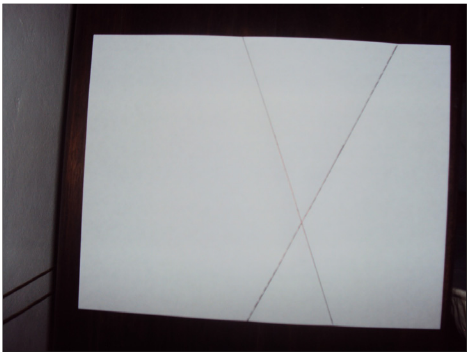


3. **Semiplano**. Cualquier doblez sobre una hoja, la divide en dos regiones o semiplanos.

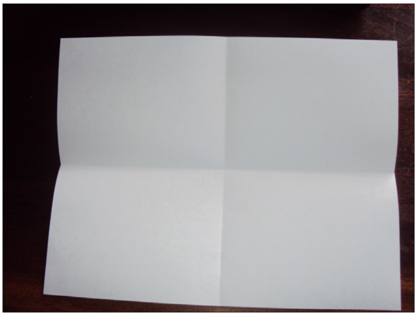
   NOTA: Profesor, no olvide que para que se pueda hablar de "semiplano", debe imaginar la hoja en reposo perfectamente extendida sobre el pupitre y suponer que se extiende indefinidamente en todas las direcciones.



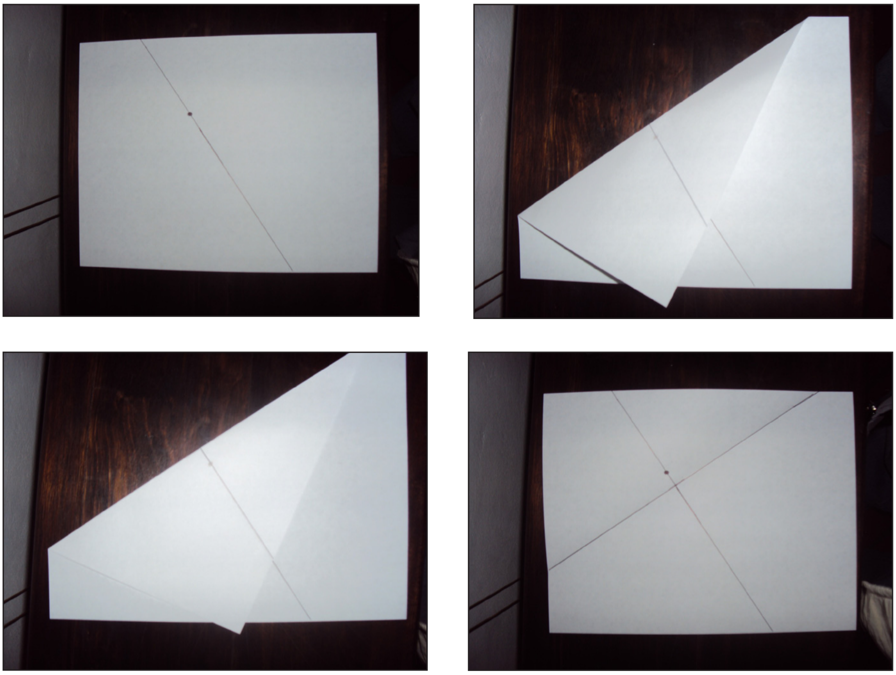
4. **Ángulo y región angular**. Con dos dobleces que se corten en algún punto se pueden identificar cuatro regiones angulares. Realice los dobleces e identifique los ángulos.



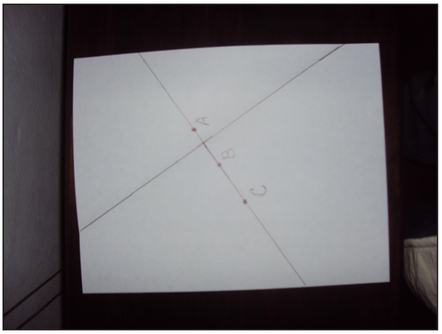
5. **Rectas perpendiculares.** Realice un doblez igualando previamente dos lados opuestos de la hoja, y luego desdoble la hoja; a continuación haga lo mismo igualando los otros dos lados opuestos de la hoja y extiéndala sobre la mesa. Podrá ahora percibir dos rectas (segmentos) que se cortan formando ángulos iguales (congruentes) y de noventa grados.

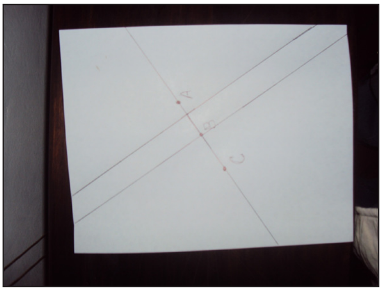


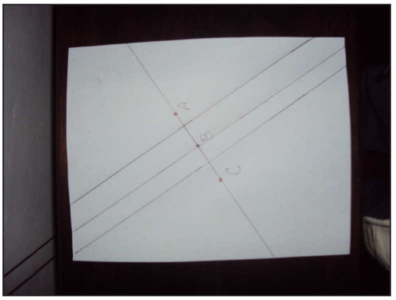
Otra forma de obtener rectas perpendiculares es la siguiente: realice un doblez a una hoja; marque un punto cualquiera sobre esta y luego doble la hoja haciendo coincidir perfectamente el punto marcado con alguno de la misma recta pero del lado contrario al punto marcado (Rodríguez, 1992). Observe luego las rectas perpendiculares.



6. Rectas paralelas. Para construir rectas paralelas se repite el procedimiento realizado para las perpendiculares. Sobre una de esas rectas se marcan varios puntos para luego hacer dobleces haciendo coincidir dos de esos puntos. Como podrá observar, por cada uno de esos puntos (también dobleces que pasan por ese punto) pasa una recta paralela a la recta que no contiene los puntos marcados.

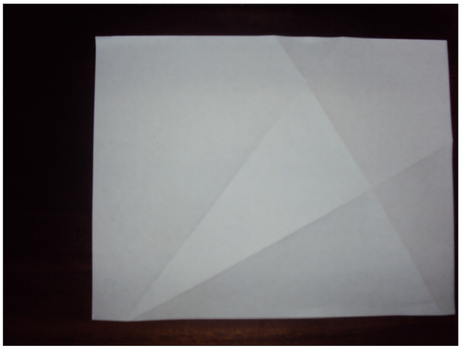






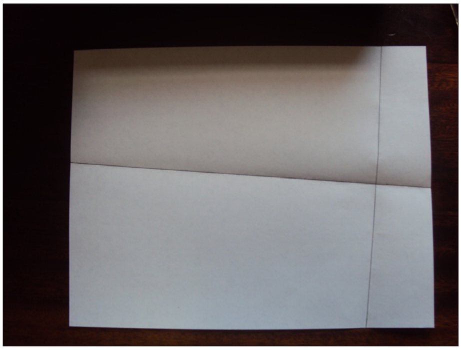
7. Polígonos

Realice tres dobleces en diferentes direcciones a una misma hoja, de tal manera que se corten, para obtener **triángulos**.

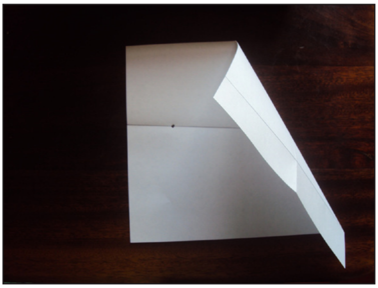


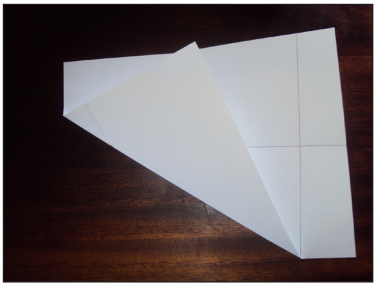
NOTA: Para clasificar triángulos de acuerdo con sus lados y de acuerdo con sus ángulos, los dobleces deben hacerse con una determinada intencionalidad.

- Así, para hacer triángulos equiláteros (lados congruentes, es decir, con la misma medida) realice un doblez y sobre este haga otro doblez que sea perpendicular al anterior (caso 5.).

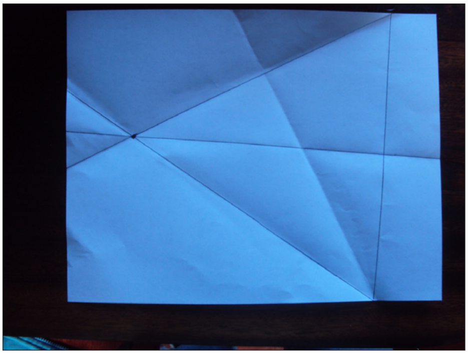


A continuación haga coincidir un extremo del primer doblez con algún punto de la perpendicular al primer doblez (márquelo) y realice ese doblez que pasa por el punto marcado y el otro extremo del primer doblez.





Luego realice otro doblez que pase por el punto marcado y el otro extremo del primer segmento, para completar el triángulo.



- Trazar triángulos isósceles es mucho más sencillo. Luego de realizar un primer doblez y trazar una perpendicular a este (caso 5), realice dobleces que vayan de los extremos del primer doblez a cualquier punto sobre la perpendicular. Identifique cuáles son los dos lados congruentes.

- Con los elementos trabajados hasta el momento puede trazar rectángulos, cuadrados, trapecios y todas las demás figuras. Es solo cuestión de intentarlo. En esto, los niños son muy creativos, permítales que lo hagan.

ACTIVIDAD 2

Identificación de competencias:

- Reconozco nociones de horizontalidad y verticalidad en distintos contextos y su condición relativa con respecto a diferentes sistemas de referencia.
- Ahora usted, profesor, debe identificar otra(s) competencia(s) que puede desarrollar con sus alumnos en esta actividad.

Esta actividad tiene como fin la identificación de propiedades geométricas y de objetos geométricos en el contexto escolar.

- En su salón de clase identifique: rectas, planos, rectas paralelas, rectas perpendiculares, ángulos, ángulos rectos, ángulos agudos, triángulos, cuadrados, rectángulos…, si los hay.
- Observe la gráfica del paisaje donde se muestra un lago y describa la forma que se percibe del agua en reposo. ¿Cómo se llama esa propiedad? ¿Y la línea que determina?
- Identifique otras superficies horizontales.
- ¿Cómo son las paredes de los salones con respecto al piso? En condiciones normales, ¿qué ocurriría a una construcción que no tenga paredes verticales?

Actividades de evaluación

1. A través del plegado en una hoja haga ver el conocido axioma "por un punto pasan infinitas rectas".
2. Proponga actividades de plegado para construir triángulos escalenos, rectángulos y obtusángulos.
3. Con el plegado se pueden trabajar también conceptos como bisectriz, mediana, mediatriz, altura de un triángulo, y otros sobre ángulos como, ángulos complementarios, ángulos suplementarios, ángulos opuestos por el vértice… Ponga a prueba su creatividad y la de los niños.
4. De ser posible indague más sobre el plegado, el cual a través del uso de técnicas sencillas se convierte en **Origami**, con el cual se pueden realizar

objetos de extraordinaria belleza, con el uso de una hoja de papel y de dobleces.

5. De ser posible, comente y compare sus soluciones con las de sus colegas de su institución o con las de otras instituciones.

(Re)significación

1. Respecto a la actividad que acaba de desarrollar, ¿qué aspectos de su práctica le ha permitido (re)pensar o reorganizar?

2. Seguramente ha podido constatar cómo los conceptos matemáticos no son entes abstractos alejados de la cotidianidad de las personas, a los que hay que "definir" con términos técnicos.

3. Después de desarrollar todas las actividades anteriores con sus estudiantes y de tomar atenta nota de las actitudes, discusiones, respuestas dadas, y todo lo que le haya parecido interesante, escriba una pequeña reseña (historia) de esa actividad y hágala conocer a otros colegas profesores. De ser posible colóquela en la red.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azcárate, Pilar. (1998). La formación inicial del profesorado de matemáticas: análisis desde la perspectiva del conocimiento práctico profesional; pp. 129 – 142. *Revista Interuniversitaria de formación del profesorado; N.º* 32, mayo/agosto.

Carraher, T., Carraher, D., & Schliemann, A. (2002). *En la vida diez, en la escuela cero.* Buenos Aires: Siglo XXI Editores. Séptima Edición.

Colombia: MEN; (2012). Programa para la transformación de la calidad educativa (PTCE).

D´Ambrosio, Ubiratan. (2002). *Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade.* Belo Horizonte: Autêntica Editora.

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática.* Bogotá: Corporación Editorial Magisterio.

Fiorentini, Dario (2000). Pesquisando "com" professores: reflexões sobre o processo de produção e ressignificação No. 45. dos saberes da profissão docente. In: *Investigação em Educação Matemática, Perspectivas e Problemas.* Matos, J. e Fernandes, E. (edt.). Lisboa: Associação de professores de Matemática de Portugal.

______________. (2001) De professor isolado ou plugado para professor conectado: novas perspectivas à formação do professor de matemática. In: Coletânea de trabalhos do PRAPEM – VII ENEM. Rio de Janeiro. Campinas: CEMPEM/PRAPEM –FE/UNICAMP.

Jiménez, E. Alfonso. (2002) Quando professores de Matemática da escola e da universidade se encontram: re-significação e reciprocidade de saberes. Tese de doutorado. Campinas (Sao Paulo - Brasil): FE/UNICAMP.

________________. (2005). *Formación de profesores de matemática: aprendizajes recíprocos escuela – Universidad*. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

________________. (2010). La naturaleza de la matemática, las concepciones y su influencia en el salón de clase. *Revista Educación y Ciencia, Vol. 13.* pp. 135 – 152. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, CIEFED-Facultad de Educación.

________________. (2011). *A pesquisa sobre comunicação em sala de aula de matemática. Pesquisa de pós-doutorado.* Universidade Estadual de Campinas UNICAMP, Faculdade de Educação. Supervisor: Professor Sérgio Aparecido Lorenzato.

________________. (2010). *La naturaleza de la matemática, sus concepciones y su influencia en el salón de clase*. Educación y Ciencia; Nº 13, pp. 135 – 150. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia: Centro de Investigación de la Facultad de Educación CIEFED.

________________. (2011). *A pesquisa sobre comunicação em sala de aula de matemática. Pesquisa de pós-doutorado.* Universidade Estadual de Campinas UNICAMP, Faculdade de Educação. Supervisor: Professor Sérgio Aparecido Lorenzato.

Jiménez et al. (2012). *Módulo Pensamiento multiplicativo y resolución de problemas*. Programa PTCE (MEN). Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Convenio MEN – UPTC.

Maza, C. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y la división*. Sevilla: Universidad de Sevilla.

Pinto, Renata. (2002). *Quando professores de matemática tornam-se produtores de textos escritos*. Tese de Doutorado. Campinas: Faculdade de Educação/UNICAMP.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da matemática*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Rodríguez, Yaneth. (1992). *El plegado: una estrategia en la enseñanza de la geometría*. IX Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística.

Tardif, Maurice. (2000) Os professores enquanto sujeitos do conhecimento: subjetividade, prática e saberes no magistério. In: *Didática, currículo e saberes escolares*. Candau, V. (org.). Rio de Janeiro: DP&A editora, 2000.

Wood, T. (2003). Complexity in teaching and children's mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education*. 30 (2); pp. 171-191.

Zeichner, Kenneth. 1998 Tendencias da pesquisa sobre formação de professores nos Estados Unidos. *Revista Brasileira de Educação*. Set/Out/Nov/Dez. N.° 9, pp. 76 – 87.

Lógica y geometría dinámica: su articulación para aprender a demostrar

Carmen Samper[*]
Patricia Perry[**]
Óscar Molina[***]
Armando Echeverry[****]
Leonor Camargo[*****]

RESUMEN

El propósito de este cursillo es sensibilizar a los asistentes con respecto al papel de la lógica matemática en el aprendizaje y la enseñanza de la demostración en geometría plana. Además de exponer y ejemplificar asuntos problemáticos en el desempeño de los estudiantes cuando construyen demostraciones, presentamos ejemplos de estrategias didácticas que pueden resultar útiles para el aprendizaje de la demostración, en las que la geometría dinámica juega un papel importante.

En la actualidad se percibe más claramente la problemática compleja en la que está inmersa la construcción de demostraciones por parte de estudiantes de Básica Secundaria y universidad. Un aspecto que ha sido objeto de discusión entre los investigadores que se han preocupado por los procesos de enseñanza y aprendizaje de la demostración es el papel de la lógica matemática en ellos. Específicamente, varios estudios (e. g., Epp, 2003; Selden y Selden, 2009) se han ocupado de determinar cuáles son los temas que se deben incluir y los énfasis que se deben hacer en cursos cuya intención es apoyar a los estudiantes en su transición desde la matemática enfocada en lo procedimental a aquella en la que la demostración juega un papel crucial. A ese respecto, la necesidad del estudio de la lógica matemática ha sido un asunto polémico.

Por otro lado, se reconoce ampliamente el potencial de la geometría dinámica para apoyar el aprendizaje de la demostración (Bartolini y Mariotti, 2008). Su uso para resolver tareas que buscan favorecer actividades matemáticas tales como la producción de conjeturas, el razonamiento argumentativo y la vinculación de este con la producción de demostraciones matemáticas apoya la participación real de los estudiantes en la actividad demostrativa.

El objetivo del cursillo es ilustrar a profesores de secundaria y universitarios cuál es el papel de la lógica matemática en el aprendizaje y la enseñanza de la demostración, y cuáles asuntos problemáticos asociados a ella se evidencian en el desempeño de los estudiantes cuando construyen demostraciones en geometría plana. Proponemos a los asistentes desarrollar algunos problemas que ejemplifican las estrategias didácticas con las que buscamos apoyar el aprendizaje de la demostración, en las que la geometría dinámica juega un papel importante para abordar problemáticas asociadas a la lógica matemática.

[*] Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia. Dirección electrónica: csamper@pedagogica.edu.co
[**] Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia. Dirección electrónica: pperryc@yahoo.com.mx
[***] Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia. Dirección electrónica: ojmolina@pedagogica.edu.co
[****] Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia. Dirección electrónica: aecheverri@pedagogica.edu.co
[*****] Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia. Dirección electrónica: lcamargo@pedagogica.edu.co

BREVE REVISIÓN DE LA LITERATURA

Existen posiciones encontradas con respecto a la inclusión del estudio de la lógica matemática en la formación de estudiantes de carreras que tienen un fuerte componente matemático (i. e., ingenierías, licenciaturas de matemáticas, matemáticas). Según Selden y Selden (2009) se deben trabajar con los alumnos conceptos, teoremas, tipos de demostraciones y aspectos de estas desde el punto de vista formal, lo cual implica abrir un espacio para abordar cuestiones de la lógica matemática, en el contexto del trabajo de los estudiantes, cuando ello contribuya a la comprensión de algún asunto problemático. En contraposición, Epp (2003) afirma que se debe trabajar la lógica elemental (e. g., conectivos, cuantificadores, esquemas de razonamiento) en una unidad inicial de un curso cuyo fin sea el desarrollo del razonamiento matemático, ligándola con el lenguaje y con situaciones cotidianas y matemáticas. Nuestra postura didáctica se acerca más a la de Selden y Selden.

En lo que sí coinciden los investigadores es en el reconocimiento de asuntos problemáticos estructurales que afectan el aprendizaje de la demostración. Consideramos como *asuntos problemáticos* las acciones de los estudiantes que no obedecen a conceptos o procedimientos matemáticos institucionales, o a las normas sociomatemáticas establecidas para el funcionamiento en el aula. Estas últimas son reglas implícitas, o que el profesor declara, relativas al tratamiento que se le dará a la matemática misma y con respecto a las cuales se espera una enculturación de los estudiantes.

A partir de nuestro análisis de las acciones de los estudiantes al construir una demostración, hemos podido agrupar las problemáticas en torno a cuatro asuntos estructurales, dos de los cuales son pertinentes para el tema que nos ocupa: el uso de la lógica matemática como guía y sustento del razonamiento requerido para producir una justificación, y la comprensión y el manejo del enunciado de un teorema (Perry, Camargo, Samper & Rojas, 2006). A partir del estudio cuidadoso de estas dificultades, diseñamos estrategias, es decir, planes de acción para seguir deliberadamente con el propósito de lograr la modificación del comportamiento de los estudiantes, a largo o corto plazo, respecto a un asunto problemático (Samper, Perry, Echeverry & Molina, 2008). En su diseño tuvimos en cuenta, entre otras cosas, que es necesario: aclarar la estructura lógica de las proposiciones; enfatizar en la realización de acciones de carácter heurístico para favorecer la construcción de conjeturas que establezcan relaciones de dependencia que dan significado a la condicional o de contraejemplos para entender esquemas de razonamiento como la Ley de de Morgan y Modus Tollendo Tollens, e identificar el papel que juegan las condicionales y el estudio de casos en la construcción de demostraciones formales y en los mecanismos para producir una cadena deductiva.

Durand-Guerrier (2003) propone usar reflexivamente la condicional abierta $Px \rightarrow Qx$ para ayudar a que los estudiantes tengan mejor comprensión de aspectos lógico-matemáticos y porque ello propicia el desarrollo del razonamiento plausible. Para una condicional abierta, se considera *ejemplo* cualquier caso en el que el antecedente y el consecuente son verdaderos, mientras que es *contraejemplo* cualquier caso en el que el antecedente es verdadero y el consecuente falso. Si se aceptan proposiciones contingentes (i. e., en las que no puede decidirse su valor de verdad) en los cursos de matemáticas, se abre un panorama rico en posibilidades de análisis. Esta consideración enriqueció nuestras estrategias.

Jones (2000) señala que la preparación para la demostración puede hacerse con actividades de enseñanza que lleven a los estudiantes a *tener consciencia de la dependencia entre propiedades* y agrega que ello hace que el razonamiento deductivo sea significativo. Olivero (2002) asegura que el aprendizaje de la demostración se favorece mediante procesos, apoyados en la geometría dinámica, que focalizan la atención de los estudiantes en hechos particulares de los cuales van emergiendo las conjeturas y los elementos para realizar una demostración. Reconoce, además, que el papel fundamental del programa de geometría dinámica es constituirse en instrumento con el cual el contexto interno del aprendiz (que incluye el conocimiento previo y su experiencia) se puede hacer explícito y puede ser compartido con los demás estudiantes.

ACTIVIDADES

En el cursillo se realizarán actividades de distinta índole con los asistentes: análisis de respuestas de estudiantes, análisis de problemas propuestos, y resolución de problemas con geometría dinámica. Todo apunta a la comprensión de la estructura lógica de la afirmación condicional y de la relación de dependencia entre las condiciones expresadas en el antecedente y aquellas del consecuente, así como a la comprensión de la conjunción de proposiciones y de la negación; se propicia el desarrollo del razonamiento plausible, y se destacan asuntos problemáticos que suelen surgir cuando se proveen

COMENTARIOS

Creemos que la lógica en la formación de los estudiantes se debe traer a colación en los momentos en que su uso ayuda a aclarar conceptos de la lógica misma, y también conceptos y procesos de la geometría. En particular, se puede estudiar la negación de una proposición en un contexto específico, hacer evidentes relaciones de dependencia lo cual posibilita acercarse a una concepción de la condicional, estudiar la relación entre la condicional y las proposiciones asociadas a esta, y mostrar por qué ciertos argumentos no son válidos. No es necesario planear una clase especial para abordar estos temas ni es indispensable usar la geometría dinámica como artefacto mediador; cualquier momento en que se evidencie algún asunto problemático es propicio para abordarlos. Estos suelen surgir en cualquier clase, con cualquier tema. Sin embargo, el uso de geometría dinámica se convierte en un instrumento para indicar errores o incomprensiones y puede convertirse en un elemento más que apoye el aprendizaje de los estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bartolini Bussi, M. G. & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 746-783). New York: Routledge.

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics, 53*(1), 5-34.

Epp, S. S. (2003). The role of logic in teaching proof. *American Mathematical Monthly, 110* (10), 886-899.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretation when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-3), 55-85.

Olivero, F. (2002). *The proving process within a dynamic geometry environment*. Tesis doctoral no publicada. University of Bristol, Graduate School of Education, UK.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C. & Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá: Fondo Editorial de Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, C., Perry, P., Echeverry, A. & Molina, Ó. (2008). *Aprendizaje de la demostración en geometría euclidiana con el apoyo de un programa de geometría dinámica*. Reporte de investigación no publicado. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

Selden, J. & Selden, A. (2009). Understanding the proof construction process. En F.L. Lin, F.J. Hsieh, G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (vol. 2, pp. 196-201). Taipei: National Taiwan Normal University.

La geometría del doblado de papel

Zaida Margot Santa Ramírez[*]
Carlos Mario Jaramillo López[**]

RESUMEN

A través de una hoja de papel, los estudiantes pueden hacer construcciones tan precisas como las elaboradas con regla y compás, pueden visualizar formas y estructuras geométricas, formular conjeturas, justificar procedimientos, elaborar definiciones e, incluso, hacer demostraciones. Por lo tanto, con el presente taller se pretende mostrar que es posible verificar visualmente conjeturas, y lograr la comprensión de algunos conceptos geométricos, con base en las construcciones hechas mediante el doblado de papel.

Palabras clave. Doblado de papel, conceptos geométricos, axiomas de Huzita-Hatori, conceptos primitivos.

[*] Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: zsanta@gmail.com
[**] Universidad de Antioquia.Dirección electrónica: cama@matematicas.udea.edu.co

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

La geometría es una de las ramas de las matemáticas más importante en el currículo escolar debido, en primer lugar, a que debe generar procesos de visualización, argumentación y formalización y, en segundo lugar, porque debería ser la más cercana a los contextos de los estudiantes. En este sentido, el MEN (2004) afirma que:

> El conocimiento geométrico es un componente matemático que ocupa un lugar privilegiado en los currículos escolares por su aporte a la formación del individuo. No solo se considera como una herramienta necesaria para describir el espacio circundante, comprenderlo e interactuar en él, sino que, como disciplina científica, descansa sobre importantes procesos de formalización que son ejemplo de rigor, abstracción y generalidad (p. 1).

Sin embargo, precisamente su carácter formal ha hecho que la geometría se vea como un cuerpo de conocimientos abstracto y descontextualizado, dentro de las aulas de clase colombianas. Este hecho se puede entender porque, normalmente, la geometría "se ha utilizado en el campo educativo como terreno natural para la introducción de la deducción" (MEN, 2004, p. 8). Incluso, investigaciones a escala internacional, como las de Balacheff (1982 y 1988), de Villiers (1993) y Galbraith (1979) afirman que "los alumnos concentran sus esfuerzos en imitar demostraciones que sus profesores escriben o extraídas de libros, en detrimento de la búsqueda de caminos a través de los cuales generar argumentaciones y demostraciones propias, significando dicha actividad" (citado por Molfino, 2006, p. 15), lo que indica realmente el carácter formal, abstracto y descontextualizado de las matemáticas y en particular de la geometría.

Para solventar dicha situación, las nuevas investigaciones geométricas se están centrando en el uso de las TIC como mediadoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría. De acuerdo con el MEN (2004), "los programas de geometría dinámica han revolucionado la manera de hacer matemáticas y la forma de enseñarlas, proporcionando contextos de aprendizaje con nuevas y potentes posibilidades de representación" (p. 3). Como consecuencia, el incremento de estos estudios ha generado que el uso de material concreto pase a un segundo lugar, centrando su atención en la interacción con la máquina. Pero en nuestro país, existen infortunadamente muchas instituciones educativas que no pueden disponer de dichas herramientas tecnológicas, ni mucho menos pueden sostener buena conectividad. En este sentido, el doblado de papel se podría constituir en un medio que permite que un grupo de estudiantes construya conceptos geométricos sin necesidad de disponer de las TIC.

Por lo tanto, con una hoja de papel, un estudiante puede hacer construcciones tan precisas como las elaboradas con regla y compás, puede visualizar, formular conjeturas, justificar procedimientos, comprender conceptos e, incluso, hacer demostraciones. En la misma línea, el MEN (2004) afirma que:

> La enseñanza de la geometría debe reflejar una preocupación por desarrollar actividades en las distintas dimensiones, buscando lograr en los alumnos una amplia experiencia y una perspectiva multifacética de lo que significa, elementos claves para ganar en conocimiento geométrico útil. Probablemente cualquier situación geométrica, por elemental que sea, permite una amplia gama de posibilidades de exploración, formulación de conjeturas y experimentación de situaciones con la idea de explicar, probar o demostrar hechos (p. 2).

Luego, si se proponen actividades que involucren construcciones hechas mediante el doblado de papel, es posible que los estudiantes desarrollen habilidades geométricas que les faciliten explorar, encontrar relaciones, explicar y finalmente probar. Sin embargo, es necesario que los maestros diseñen este tipo de situaciones, que permitan realmente que el estudiante desarrolle el pensamiento espacial. Incluso, desde el MEN (2004) se hace la invitación para que los docentes se involucren en la creación de herramientas que permitan aprender geometría:

> Para poder diseñar ambientes de aprendizaje ricos en actividades geométricas en las distintas dimensiones, los maestros de matemáticas debemos experimentar con diversas facetas del panorama geométrico. Entre más dimensiones y conexiones de la geometría conozcamos, podremos guiar con mayor éxito a nuestros alumnos en la experiencia de aprender a aprender geometría y les ayudaremos a sentar bases sólidas para ampliar el panorama en los siguientes años escolares y en la vida (p. 3).

BREVE HISTORIA DEL ORIGAMI

El origami es un antiguo arte japonés que tiene que ver con el doblado del papel. De hecho, su raíz ori significa doblez y gami o kami significa papel (Gallo, sitio web).

En su forma más pura, el origami puede ser definido como el arte de manipular una hoja de papel de forma cuadrada sin que sea cortada, añadida, pegada, decorada o mutilada de forma alguna; solo puede ser doblada. Esta regla tan estricta hace que el origami sea la más refinada de las artes que se refieren al doblado del papel. Este precisamente constituye el secreto de su belleza y atractivo.

Las primeras figuras de papel se remontan al período Heian (794-1183), se cree que en Japón, porque no hay pruebas que determinen que este arte haya iniciado en China.

> La historia de la papiroflexia comienza junto con la del papel, en China, allá por el siglo I o II, y llega a Japón en el siglo VI. En un principio, era un divertimento de las clases altas, pues eran las únicas que podían conseguir papel, que constituía un artículo de lujo. Los guerreros Samurai intercambiaban regalos adornados con noshi, trozos de papel doblados en abanicos de variadas formas, sujetos con cintas de carne seca (Royo, 2002, p. 1).

Más adelante, en el período Muromachi (1338-1573), el papel era un producto más accesible, y los adornos elaborados revelaban la clase social de cada persona. Sin embargo, finalizado este período este arte fue transmitido de generación en generación de madres a hijos (Royo, 2002).

En el período Tokugawa (1603-1867) se dio una gran explosión cultural al democratizarse la papiroflexia; apareció la base pájaro, que es la más popular en Japón, y surgieron dos textos que recogen las instrucciones más importantes del doblado: "Sembazuru Orikata (Cómo plegar mil grullas) y Kan No Mado (Ventana abierta a la estación de invierno)" (p. 2).

No solamente los japoneses doblaron papel; los musulmanes también practicaron esta arte, pero no tuvo mucha repercusión en nuestros días a causa de personajes como los Reyes Católicos y el Cardenal Cisneros (Royo, 2002).

Miguel de Unamuno fue uno de los grandes impulsores de la papiroflexia a principios del siglo XVII; con base en su afición de doblar pajaritas, nombrada por él cocotología, creó su propia escuela de doblado (Royo, 2002). Según Royo (2002), el padre de la papiroflexia moderna es el japonés Akira Yoshizawa; él es el creador de la simbología actual y de las instrucciones de doblado de modelos, algunos creados por él. Este creador considera que el origami es una relación dialógica entre artista y papel.

Royo (2002) afirma que en las últimas décadas, el origami ha experimentado una gran explosión de creatividad. Incluso, se han desarrollado dos escuelas: la japonesa, integrada por artistas no científicos, cuya filosofía consiste en "expresar, sugerir, captar la esencia de lo que se quiere representar con un mínimo de pliegues, aunque la figura resultante no sea anatómicamente perfecta" (p. 3); la segunda escuela es la occidental, conformada por matemáticos, físicos e ingenieros; su propósito es la "exactitud anatómica" (p. 3) de los objetos o animales que diseñan. Para lograrlo, se valen de métodos matemáticos, algunos de ellos de gran complejidad (Royo, 2002).

En 1893, el hindú Sundara Row escribió el libro Geometric exercises in paper folding, un tratado que combina el doblado de papel y la geometría euclidiana. Contiene 14 temáticas como el cuadrado, el triángulo equilátero, polígonos, secciones cónicas, entre otras. Este libro, fuente de consulta, se ha convertido en una excelente guía para promover la enseñanza de algunos conceptos geométricos y realizar construcciones geométricas complejas.

En la actualidad, el origami o papiroflexia, como se le ha denominado en España, es una técnica que no solo se utiliza para la creación de figuras, sino también para la enseñanza de la matemática. En la línea de Investigación de Geometría y doblado de papel, del grupo Educación Matemática e Historia (U. de A.-Eafit), hemos tomado la determinación de diferenciar origami y doblado de papel. Por origami, entendemos la creación de figuras con fines artísticos; por doblado de papel, entendemos la realización de dobleces y/o figuras con fines educativos, es decir, para facilitar la visualización geométrica. Esto ha permitido proponer y desarrollar talleres de capacitación, en los cuales el doblado de papel se convierte en una alternativa metodológica para la enseñanza de la geometría.

GEOMETRÍA DEL DOBLADO DE PAPEL

Introducción

Desde el año 2003, el Grupo de Investigación Educación Matemática e Historia (EDUMATH) se ha preocupado por fundamentar las bases de la nueva geometría del doblado de papel. Para lograr este cometido, ha participado en eventos locales, regionales y nacionales, en los que ha socializado su experiencia de enseñar geometría aprovechando las bondades de una hoja de papel. En este sentido, Santa y Jaramillo (2010) afirman que:

> … el doblado de papel se ha venido consolidando como una alternativa para mejorar el razonamiento en el área de la geometría, debido principalmente a su carácter visual y experimental, que le permite al estudiante no solo manipular una hoja de papel para hacer

> unos dobleces determinados, sino también para visualizar algunos conceptos geométricos, además, justificar de manera formal las construcciones elaboradas, usando un sistema axiomático (p. 340).

En el ámbito internacional, encontramos muchos autores que también justifican el uso del doblado de papel en la construcción y comprensión de conceptos geométricos. Geretschläger (1995), por ejemplo, afirma que:

> La conexión entre geometría y origami se hace muy notoria y muy obvia. Para muchas personas, el origami termina convirtiéndose en un simple arte, mientras que para otras (como el educador alemán Friedrich Fröebel) el origami se puede utilizar para enseñar formas elementales geométricas (p. 357).

En la misma línea, Royo (2002), concluye que: "El ejercicio de doblar papel se puede usar con fines pedagógicos para estudiar e ilustrar la geometría elemental plana. La clave radica en interpretar geométricamente qué se está haciendo cuando se dobla el papel" (p. 186).

Elegir el doblado de papel, como herramienta para facilitar la comprensión de conceptos geométricos, surgió gracias a las contribuciones de Monsalve y Jaramillo (2003), quienes argumentan que "el arte del origami es una disciplina que permite desarrollar aspectos como: memoria visual geométrica, memoria a corto y mediano plazo, coordinación visomotora, destreza manual, discriminaciones multisensoriales de tipo grueso, fino y refinado (psicomotricidad)" (p. 11).

También, estos autores afirman que,

> … el Origami nos enseña a hacer cosas con las manos desarrollando la capacidad de operar, resolver, crear, sintetizar, resumir, realzar, expresar y decir símbolos con menos palabras. Enseña así mismo el arte de construir para ser capaz luego de razonar y de deducir, relacionando, en suma, la teoría con la práctica. Y lo más importante, nos desarrolla la creatividad, entrenando la mente y el espíritu para, a partir de cero, saber ver de una manera nueva. DOBLAR es tener la oportunidad de modificar y adaptar la forma, promoviendo la capacidad de crear (p. 11).

Por otro lado, para que la geometría del doblado de papel sea un sistema axiomático, es necesario que se enuncien conceptos primitivos, axiomas (o postulados) y teoremas. De acuerdo con Santa y Jaramillo (2010), tanto los conceptos primitivos como los axiomas ya han sido desarrollados. Sin embargo, los teoremas aún no han sido establecidos. Por lo tanto, la geometría del doblado de papel no cumple con una de las características de un sistema axiomático, que es la suficiencia.

Conceptos primitivos

Santa y Jaramillo (2010), desarrollan en su artículo los siguientes tres conceptos primitivos para la geometría del doblado de papel:

> Doblez, de manera análoga a la recta, hecho en un pedazo de papel que aparece tanto al anverso como al reverso de este, se considerará como un concepto primitivo no definido, el cual está estrechamente relacionado con un segmento de línea recta, porque un pedazo de papel es limitado; pero se enfatizará que este doblez representa de manera abstracta una línea recta (p. 341).
>
> Punto: es un concepto no definido. Sin embargo, se establece una relación directa de manera natural con la intersección de dos dobleces o con las esquinas (ángulos) de la hoja de papel (p. 342).
>
> Hoja de papel: Una cara de la hoja de papel se puede tomar como una porción del plano. Por lo tanto, tiene límites y es finito, pero puede ser una representación abstracta de un plano infinito (p. 342).

Axiomas de Huzita-Hatori

En el año 1989 el ítalo-japonés Humiaki Huzita presentó en el Primer Encuentro Internacional de Origami, Ciencia y Tecnología 6 axiomas para la geometría del doblado de papel. Estos axiomas, llamados Axiomas de Huzita (Huzita, 1989), se relacionan con conceptos básicos de geometría euclidiana y algunos de ellos, con problemas del cálculo diferencial.

Posteriormente, el japonés Koshiro Hatori (2003) presentó un séptimo axioma y desde ese momento, los axiomas recibieron el nombre de Axiomas de Huzita-Hatori.

Teniendo en cuenta su traducción original, estos axiomas se enuncian de la siguiente manera:

Axioma 1: Dados dos puntos P_1 y P_2, se puede hacer un doblez que pasa a través de ellos (Lang, 1996 – 2003, p. 38).

Axioma $_2$: Dados dos puntos P_1 y P_2, se puede hacer un doblez que lleva a P_1 sobre P_2 (p. 38).

Axioma 3: Dadas dos líneas l_1 y l_2, se puede hacer un doblez que pone a l_1 sobre l_2 (p. 38).

Axioma 4: Dado un punto P_1 y una línea l_1, se puede hacer un doblez que pone a l_1 sobre sí misma y pasa por P_1 (p. 38).

Axioma 5: Dados dos puntos P_1 y P_2 y una línea l_1, se puede hacer un doblez que pone a P_1 sobre l_1 y pasa por P_2 (p. 38).

Axioma 6: Dados dos puntos P_1 y P_2 y dos líneas l_1 y l_2, se puede hacer un doblez que pone a P_1 sobre l_1 y a P_2 sobre l_2 (p. 38).

Axioma 7: Dados un punto P_1 y dos líneas l_1 y l_2, se puede hacer un doblez perpendicular a l_2 que ponga el punto P_1 sobre la línea l_1 (Lang, 1996 – 2003, p. 39).

Los autores Santa y Jaramillo (2010) notaron que algunos de los seis axiomas presentados por el ítalo-japonés Humiaki Huzita (1989) y el séptimo presentado por el japonés Koshiro Hatori (2003) tienen restricciones importantes, que es necesario mencionar en su formulación inicial, para poder establecer que el sistema axiomático de la geometría del doblado de papel cumpla con la condición de suficiencia. Por lo tanto, reformulan los axiomas de la siguiente manera:

Axioma 1: "Dados dos puntos distintos P_1 y P_2, existe un único doblez que pasa a través de ellos" (p. 343).

Axioma $_2$: "Dados dos puntos distintos P_1 y P_2, existe un único doblez que lleva a P_1 sobre P_2" (p. 343).

Axioma 3: "Dados dos dobleces distintos l_1 y l_2, existen dos dobleces o un doblez que pone a l_1 exactamente sobre l_2" (p. 344).

Axioma 4: "Dado un doblez l_1 y un punto P_1, existe un único doblez que pone a l_1 sobre sí misma y pasa por P_1" (p. 345).

Axioma 5: "Dados un doblez l_1 y dos puntos P_1 y P_2, se puede encontrar un doblez, dos dobleces o ningún doblez, si se lleva el punto P_1 sobre l_1 y se garantiza que el doblez pase por P_2" (p. 346).

Axioma 6: "Dados dos dobleces l_1 y l_2 y dos puntos P_1 y P_2 exteriores a l_1 y a l_2 respectivamente, se puede encontrar un doblez, dos dobleces, tres dobleces o ningún doblez, si se pone el punto P_1 sobre el doblez l_1 y a su vez, el punto P_2 sobre el doblez l_2" (p. 348).

Axioma 7: "Dados dos dobleces l_1 y l_2 y un punto P_1 exterior a l_1, se puede encontrar un doblez o ningún doblez, que sea perpendicular a l_2 y que ponga el punto P_1 sobre el doblez l_1" (p. 350).

Como se dijo en párrafos anteriores, los talleres desarrollados en encuentros locales, regionales y nacionales, con maestros y maestros en formación, ha permitido pensar en la posibilidad de utilizar los axiomas de Huzita-Hatori en la orientación de determinadas actividades, como un medio que permita que un grupo de estudiantes construya conceptos geométricos relacionados con dicha axiomática. En este sentido, se espera mostrar que la geometría del doblado de papel es un medio que permite la construcción de conceptos geométricos en un colectivo de humanos. Aunque es importante mencionar que autores como Santa (2011), por ejemplo, en su tesis para optar al título de Magíster en Educación, llegó a la conclusión que: "los estudiantes logran la comprensión de muchos conceptos geométricos con base en la visualización de construcciones que se pueden hacer de manera fácil y divertida, mediante el doblado de papel" (p. 275). A continuación se mencionarán algunos aspectos importantes de esta investigación.

RESULTADOS TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

Santa (2011) encontró que: "muchos estudiantes, de la interfase bachillerato- universidad, tienen dificultades para comprender los conceptos de las secciones cónicas como lugares geométricos, mientras que se les facilita la búsqueda algorítmica de sus ecuaciones" (p. 57). Para solucionar esta situación, diseñó:

> Unos descriptores hipotéticos de los niveles de razonamiento de Van Hiele para la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, basados en los postulados del modelo de Van Hiele, en la temática particular y en la experiencia docente en la enseñanza de la elipse. Estos descriptores se fueron refinando a medida que se avanzaba en el trabajo de campo (p. 269).
>
> Un guion de entrevista preliminar de carácter socrático, con preguntas inquisitivas basadas en la visualización de construcciones hechas mediante el doblado de papel y con aportes de información, para que nos permitiera caracterizar el proceso de comprensión de los estudiantes frente al concepto de elipse como lugar geométrico. Este guion de entrevista estaba diseñado de tal manera que las preguntas correspondieran con los descriptores hipotéticos antes planteados. Tanto la entrevista, como los descriptores fueron corregidos, ampliados o mejorados durante la fase de experimentación con los estudiantes del estudio de casos (p. 269).

Por lo tanto, en dicho trabajo de investigación, la autora se centró en la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, en el marco del Modelo de Van Hiele, a partir de construcciones hechas mediante el doblado de papel. En este sentido, esta investigación llegó a las siguientes conclusiones:

> Son muchos los conceptos, propiedades y relaciones de la geometría euclidiana que se logran mediante la geometría del doblado de papel y que están inmersos en nuestra entrevista: por un punto pasan infinitas rectas e infinitos dobleces; por dos puntos pasa una sola recta o un solo doblez; relación doblez segmento de recta; segmentos congruentes mediante el doblado; construcción de rectas perpendiculares mediante el doblado; la visualización de suma de segmentos también mediante el doblado; las construcciones de la mediatriz, la circunferencia y la elipse mediante el doblado. De hecho, abordar las construcciones de la circunferencia o de la elipse, mediante el doblado de papel, como envolventes de mediatrices, es el primer paso para hablar de haz de tangentes y de cálculo infinitesimal. Por lo tanto, esta forma de abordar la elipse trae muchos beneficios académicos para el estudiante (Santa, 2011, p. 274).
>
> En este estudio, hemos comprobado que los estudiantes logran la comprensión de muchos conceptos geométricos con base en la visualización de construcciones que se pueden hacer de manera fácil y divertida, mediante el doblado de papel. Incluso, nuestro aporte a la Educación Matemática en este sentido, se centra en el establecimiento de los conceptos primitivos de la geometría del doblado de papel, la reformulación de su axiomática y su aplicación a las secciones cónicas (p. 275).

Para finalizar, se puede afirmar que la geometría del doblado de papel se consolida como una propuesta didáctica alternativa para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Gallo, Patricia. Origami. La Plata – Argentina. Fecha de búsqueda: 15 de mayo de 2006. http://www.netverk.com.ar/~halgall/origami1.htm

Geretschläger, R. (1995). Euclidean Constructions and the Geometry of Origami. Mathematics Magazine, (5), pp. 357-371.

Huzita, H. (1989). Axiomatic development of origami geometry. En: Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, pp. 143-158.

Lang, R. (1996-2003). Origami and Geometric Constructions. Recuperado el 4 de Junio de 2006, de: http://www.langorigami.com/science/hha/origami_constructions.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2004). Serie Documentos: Pensamiento geométrico y Tecnologías Computacionales. Bogotá: Enlace Editores Ltda.

Molfino, V. (2006). Lugares geométricos: ¿Cuál es su rol en la enseñanza de la demostración en geometría? Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias en Matemática Educativa. México: Instituto Politécnico Nacional.

Monsalve, O., & Jaramillo, C. (2003). El placer de doblar papel. Mostraciones y algunas aplicaciones matemáticas. Revista Educación y Pedagogía, Vol. XV, 35, 11-25.

Royo, J. (2002). Matemáticas y papiroflexia. Sigma: Revista de Matemáticas, (21), pp. 175-192.

Santa, Z. & Jaramillo, C. (2010). Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. Revista Virtual Universidad Católica del Norte, (31). Recuperado el 15 de septiembre de 2010, de: http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php?option=com_contentytask=viewyid=169yItemid=1

Santa, Z. (2011). La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele. Trabajo de investigación para optar al título de Magíster en Educación. Medellín: Universidad de Antioquia.

Enseñanza de la estadística más allá de los conceptos y los procedimientos

Lucía Zapata[*]
Difariney González[**]

"La estadística no es solo un conjunto de técnicas, es una actitud mental para acercarse a los datos"
(The Cockcroft Report, 1982)

RESUMEN

El presente manuscrito exhibe un curso enfocado en la didáctica de la estadística en el cual los participantes se enfrentarán a la solución de un problema pasando por las etapas del ciclo investigativo. El curso inicia con una pregunta que debe resolverse: ¿cuáles son los factores determinantes en el tiempo de vuelo de un avión de papel? Los participantes hacen un diseño de experimento, un plan para la recolección de datos, recogen los datos, llevan a cabo el análisis de los datos (con el apoyo de software estadístico) y presentan un informe escrito que responda a la pregunta de interés. Esta forma de abordar la enseñanza de la estadística involucra a los participantes en un proceso investigativo en el cual actúan como científicos.

Palabras clave: estadística, recursos informáticos, enseñanza, análisis de datos.

* Universidad de Antioquia, Grupo-GECEM. Dirección electrónica: luzapata@ayura.udea.edu.co
** Universidad de Antioquia, Grupo-GECEM. Dirección electrónica:difariney@gmail.com

PRESENTACIÓN

El ciudadano actual debe tomar decisiones fundamentadas en la disponibilidad de información y como tal requiere de una sólida comprensión de estadística básica para ser exitoso en la toma de decisiones informadas. En otras palabras, necesita desarrollar su pensamiento estadístico. Para atender a este requerimiento, muchos países han empezado a incluir en sus currículos preuniversitarios la cátedra de Estadística. Ejemplos de estos países son Los Estados Unidos (NCTM, 1989; 2000), Inglaterra y Gales (DES, 1991), España (MEC, 1988a; MEC, 1988b) y Colombia (MEN, 2003)). Sin embargo, la sola inclusión de la estadística en el currículo no garantiza que la enseñanza de esta área esté promoviendo el desarrollo del pensamiento estadístico.

Por mucho tiempo, la enseñanza de la estadística preuniversitaria ha estado influenciada por una estructura en la cual el profesor explica un concepto, luego expone un algoritmo asociado al concepto, en seguida un ejemplo, y por último, es tarea de los estudiantes aplicar los procedimientos en problemas prácticos en los cuales los datos están dados. Esta forma de abordar la enseñanza de la estadística está muy lejos de atender una preocupación internacional en términos de promover pensamiento estadístico. El pensamiento estadístico requiere habilidades especializadas que le permita al ciudadano leer, interpretar, evaluar críticamente y apreciar información estadística del contexto en el cual está inmerso. Una persona que piensa estadísticamente comprende, explica, analiza e interpreta los resultados de procesos estadísticos. Además, reconoce que la toma de decisiones no puede estar fundamentada en evidencia anecdótica y que es necesario encontrar formas de resumir y representar la información para que tenga sentido, y considerando siempre la presencia de la variabilidad (Batanero, 2002; Ben-Zvi & Garfield, 2004; Gal, 2002; Gal, 2003). El fundamento del pensamiento estadístico es producir una mejor comprensión en un contexto particular (Wild & Pfannkuch, 1999) y este tipo de pensamiento es similar al de un individuo envuelto en un proceso investigativo. El pensamiento estadístico, según Garfield y Ben-Zvi (2007), es el modo por el cual las personas razonan sobre ideas estadísticas que produzcan significados para ellas. Es la habilidad de poder establecer conexiones entre un concepto y otro. "La síntesis de información de una amplia variedad de fuentes para que nos diga algo del sistema general es un elemento clave en el pensamiento estadístico" (Pfannkuch & Wild, 2000, pág. 138).

La demanda que la enseñanza de la estadística debe promover el pensamiento estadístico se fundamenta en el principio que la estadística no es una ciencia estática o determinista y que se aprende cuando es usada para resolver problemas. Los conceptos estadísticos se comprenden mucho más fácil si los datos y el contexto son reales (Mooney, 2010); y si hay un vínculo afectivo con el problema, es decir, si el problema es atractivo y de interés para quien lo resuelve, se constituye en un escenario apropiado para la comprensión.

DESCRIPCIÓN

El curso que se presenta apunta al objetivo de promover el desarrollo del pensamiento estadístico. Entendemos que el desarrollo del pensamiento estadístico se estimula cuando se abandona el paradigma de la clase de estadística estática que privilegia los procedimientos por encima de la comprensión y, por el contrario, se hace un fuerte énfasis en estimular las habilidades investigativas. Este curso es diseñado teniendo en cuenta las discusiones planteadas en la literatura con respecto a cómo son abordados los asuntos estadísticos por profesionales estadísticos y por profesionales que usan la estadística como herramienta en la investigación. Es importante saber qué hacen los estadísticos en su profesión y cómo ellos resuelven problemas, para tratar de llevarlo al aula de clase. Pfannkuch y Wild (2000) tienen un interesante artículo en el que revelan detalles asombrosos del pensamiento estadístico que es puesto en juego cuando los estadísticos de profesión resuelven problemas en su práctica cotidiana. Estos autores destacan que hay varias dimensiones del pensamiento que se activan en la solución de un problema.

Uno de los principios cuando se usa la estadística en la investigación es que se parte de un problema o de una pregunta estadística que se quiere resolver. Para el caso del presente curso nuestra pregunta es: ¿cuáles son los factores determinantes en el tiempo de vuelo de un avión? Por supuesto no modelaremos con aviones reales. Esa tarea la dejamos a los ingenieros aeronáuticos. En este curso modelaremos con aviones de papel. ¡Quién no ha hecho aviones de papel!

Para responder a esta pregunta estadística, el curso tendrá la estructura del ciclo investigativo sugerido por varios autores (Franklin, y otros, 2007; Naya, Ríos, & Zapata, 2012; Wild & Pfannkuch, 1999; Zapata-Cardona, 2011). Atendiendo a esta estructura, el problema es el punto de partida para estimular el pensamiento estadístico. Los participantes se ven enfrentados a un problema que deben resolver y en el cual deben explorar un diseño para la recolección de datos, unos criterios para la toma de datos, unos criterios de análisis y unos criterios para la escritura de un reporte en el que se responda a la pregunta estadística planteada inicialmente.

Una de las intenciones al enmarcar el curso en el escenario de los aviones de papel es dar un contexto particular al problema. Para un estadístico de profesión y para una persona que usa la estadística como herramienta en la investigación, el conocimiento estadístico y el conocimiento del contexto juegan un rol importante en la solución del problema. Estos dos componentes son esenciales para el diseño de un plan, para la recolección de datos y para extraer información importante de los datos (Pfannkuch & Wild, 2000). Además, la estadística requiere una forma diferente de razonar y, por supuesto, la enseñanza debe tomar en cuenta este aspecto. Los datos no son solo números, sino números en un contexto. En el análisis de datos, el contexto provee el significado (Franklin, y otros, 2007).

Muchas de las dimensiones que se tienen en cuenta en la investigación que usa la estadística como herramienta son ignoradas en los cursos de estadística regulares. Estas dimensiones se refieren a los elementos "obvios" como la comprensión de la dinámica de un sistema, la formulación de problemas, la medición y los aspectos no técnicos de la planificación de los estudios (Pfannkuch & Wild, 2000). El formato de la mayoría de cursos de Estadística no permite explorar estas dimensiones que favorecen el pensamiento estadístico. Generalmente se parte de un conjunto de datos que alguien más recogió. Bajo este formato, el problema ya está identificado, el diseño ya está hecho y los datos ya están tomados. Lo único que queda al estudiante es el análisis de los datos que otro recogió que en muchas ocasiones no tienen relevancia para él porque no estuvo involucrado en la operación de las variables ni en la toma de datos. Ni siquiera pudo anticipar las posibles dificultades en el muestreo ni el detalle para generar los datos, los cuales también son aspectos trascendentales para el desarrollo del pensamiento estadístico. Sentimos que reproducir la clase de estadística fundamentada exclusivamente en conjuntos de datos generados por otros es problemático porque desperdicia oportunidades para estimular otras dimensiones del pensamiento que surgen en el proceso investigativo.

Una vez establecida la pregunta que se quiere resolver y el escenario del vuelo de los aviones de papel, los participantes harán un diseño del experimento. Esto significa hacer una lista de las variables que tendrán en cuenta para responder la pregunta, las formas de recoger la información y el número de ensayos. El diseño también debe incluir los instrumentos que harán parte en la toma de datos.

Una vez discutidos los posibles diseños de experimentos se optará por alguno o algunos de los que tengan más adeptos y parezcan más llamativos.

Se procederá a la toma de datos. Es importante que los participantes estén involucrados en la toma de datos puesto que este es uno de los primeros acercamientos a la noción de variabilidad. Mediante el lanzamiento repetido del avión de papel, el participante podría tener una idea de que el resultado no será el mismo cada vez que corra el experimento. Además, la variabilidad es uno de los principios de la estadística y que pone en aprietos a muchos profesores, pues los estudiantes han sido formados en salones de clase donde no hay espacio para la variabilidad, y las respuestas esperadas son respuestas exactas. Behar (2007) ilustra jocosamente las consecuencias de ignorar la variabilidad en procesos estadísticos. Este momento particular de la experiencia ofrece una oportunidad interesante para controlar sobre algunos factores y podría ser necesario regresar a hacer ajustes sobre el diseño. En el proceso investigativo no es conveniente hacer ajustes al diseño cada vez que se encuentran dificultades. Un cambio en el diseño puede costar tiempo y dinero. Sin embargo, en nuestro caso particular el identificar fallas de diseño y ajustarlas solo nos tomará unos minutos más y unas cuantas hojas de papel; además, provee una ocasión para acercarse a las complejidades del diseño de investigación. En la investigación estadística todas las fallas se deben identificar antes de la recolección de los datos; he ahí la importancia del pilotaje.

Estimular a los participantes a que generen sus propios datos es un llamado a usar datos reales. El uso de datos reales en la clase de estadística está asociado con la importancia de la autenticidad de los datos, pero también con cuestiones relacionadas con la producción y recolección de datos, con la posibilidad de relacionar el análisis al contexto del problema y con la posibilidad de acercar a los estudiantes a conceptos estadísticos (Franklin, y otros, 2007).

Una vez se tengan los datos disponibles se procede al análisis. Para este componente se apoyará en la tecnología disponible. Se usará software tan simple como el Excel o tan sofisticado como el R (software libre en la web). Es común encontrar el uso de software en la clase de estadística exclusivamente para avanzar en los cálculos complejos de resúmenes estadísticos (ejemplo: desviación estándar. Quienes han hecho el cálculo manual de la desviación estándar saben que es un cómputo dispendioso y que un sólo error en un signo estropea el resultado). La tecnología debe ser usada para analizar datos enfatizando en la interpretación de los resultados, más que en los mecanismos computacionales; además, para ayudar a visualizar conceptos y entender las ideas abstractas mediante simulaciones. La tecnología en la clase de estadística es una oportunidad para ahorrar tiempo en cálculos pero principalmente para invertir más en el componente de la interpretación y la comprensión. Se recomienda el análisis exploratorio de los datos apoyado en gráficos antes de llegar al análisis inferencial. En repetidas ocasiones una profunda exploración gráfica puede ayudar a sospechar de conclusiones que se confirmarían con el análisis inferencial formal.

Por último los participantes escriben un reporte en el que dan cuenta de cómo resolvieron el problema presentado y algunas conclusiones básicas. El reporte escrito cobra importancia porque se constituye en un escrito académico. En el reporte no siempre describimos todo lo que sucede en el proceso investigativo pero es una oportunidad de estimular la comunicación académica y las competencias argumentativas. El participante sintetiza el proceso investigativo y resalta las conclusiones que ayudan a responder la pregunta con la cual inició la experiencia. Complementariamente, se puede hacer una discusión de otras preguntas estadísticas que se podrían plantear con los datos generados para esta experiencia.

Sentimos que al abordar la enseñanza de la estadística simulando un proceso investigativo se toma partido de las múltiples dimensiones del pensamiento que se ponen en juego en la resolución de problemas. El curso presentado en este manuscrito desafía la enseñanza estática de la estadística, y hace del participante un científico que toma decisiones y que soluciona dificultades en el proceso investigativo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística: Conferencia inaugural. Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística. Buenos Aires.http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/CULTURA.pdf.

Behar, R. (2007). La búsqueda del conocimiento y el pensamiento estadístico. Primer Encuentro Nacional de Educación Estadística. Bogotá: Colombia.

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges. En D. Ben-Zvi, & J. Garfield, The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking (págs. 3–15). The Netherlands: Dordrecht.

DES. (1991). Mathematics in the national curriculum. London: Department of Education.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & otros. (2007). Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A pre-K-12 curriculum framework. Alexandria, VA: American Statistical Association.

Gal, I. (2002). Adults´ statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. International Statistical Review, 70, 1–25.

Gal, I. (2003). Expanding conceptions of statistical literacy: An analysis of products from statistics agencies. Statistics Education Research Journal, 2, 3–21.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2007). How students learn statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics. International Statistical Review, 75(3), 372–396.

MEC. (1988a). Diseño curricular base para la enseñanza primaria. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

MEC. (1988b). Diseño curricular base para la enseñanza secundaria obligatoria. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

MEN. (2003). Estándares básicos de matemáticas. Santa Fe de Bogotá: Centro de Pedagogía Participativa.

Mooney, G. (2010). Reasoning, not Recipes: Helping your students develop statistical understanding and enjoy the experience! Australian Mathematics Teacher, 66(2), 22–24.

Naya, S., Ríos, M., & Zapata, L. (2012). La estadística en la enseñanza preuniversitaria. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 15(2).

NCTM. (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston: VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Pfannkuch, M., & Wild, C. (2000). Statistical thinking and statistical practice: Themes gleaned from professional statisticians. Statistical Science, 15(2), 132–152.

The Cockcroft Report. (1982). Mathematics counts: Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools . London : Her Majesty's Stationery Office 1982 .

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). International Statistical Review, 67(3), 223 – 265.

Zapata-Cardona, L. (2011). ¿Cómo contribuir a la alfabetización estadística? Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 33.

Sistematización de experiencias y Análisis Didáctico como estrategias de formación de docentes de matemáticas y desarrollo curricular en Educación Básica y Media

Evelio Bedoya Moreno
Yanjeline Trujillo Ortega
María Teresa Narváez
Carlos Arturo Muñoz
Cristian Andrés Hurtado
Laura Karola Salazar
Universidad del Valle

El Cursillo-Taller que proponemos tiene como objeto y propósito presentar a los profesores participantes una propuesta de contenidos y metodologías para la formación (autoformación y desarrollo profesional) permanente de docentes, el desarrollo y la innovación curricular, y la concreción didáctica en el aula, en relación con los tres tipos de conocimiento y procesos metodológicos mencionados. Esta presentación se hará e ilustrará mediante ejemplos concretos de sistematización de experiencias desarrolladas con base en conocimientos y análisis didácticos de contenidos matemáticos específicos, por parte de profesores de Educación Básica, Media y universitaria. De acuerdo con esto, el objetivo general consistirá en proporcionar a los profesores participantes la oportunidad de compartir y reflexionar sobre nuevos conocimientos, modelos, metodologías y medios curriculares y didácticos que fundamentan su formación y competencias profesionales como educadores matemáticos.

La constitución histórica de los números reales en la perspectiva de la formación de docentes

Luis Carlos Arboleda
Universidad del Valle

Uno de los aspectos que se discuten reiteradamente es la relación entre historia y educación matemática. Es conocido que al margen de las diferencias metodológicas, el conocimiento del proceso de constitución de las teorías y nociones matemáticas es un referente importante en los proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Concretamente, en este cursillo abordaremos uno de los problemas más significativos en el ambiente escolar y que tiene relación con el proceso de constitución de los números reales. En este sentido estudiaremos algunas etapas del proceso histórico de consolidación de los números reales como noción sintetizadora de las actividades de medir, contar y ordenar. Se trata de establecer secuencias de causalidad que fueron apuntando algunos períodos de refinamiento epistemológico y ontológico, hasta converger en la constitución de los números reales como objeto matemático.

Una trayectoria de formación de investigadores en educación matemática: la Maestría en Educación de la Universidad del Cauca

Yilton Riascos Forero
Ángel Hernán Zúñiga Solarte
Eruin Alonso Sánchez Ordoñez
Helmer Jesús Ruíz Díaz
Willington Algeri Benítez Chará
Erika Rosana Calambás Córdoba
Universidad de Cauca

La temática seleccionada por el ECME 13, la formación en educación matemática: tendencias, realidades, utopías, invita a considerar las distintas trayectorias que los investigadores del país consolidan a través del ejercicio sistemático de la reflexión de sus experiencias formativas con las matemáticas y de las esperanzas a futuro que su trabajo permite vislumbrar. En esta dirección, el propósito de este curso es socializar, ante la comunidad académica del ECME 13, el sentido y alcance de la trayectoria investigativa de los educadores matemáticos que constituyen el grupo de Educación Matemática de la Universidad del Cauca, como una realidad del proceso de formación para la investigación que como comunidad local ha construido, apoyándose en el intercambio académico, en las reflexiones fundamentadas en marcos teóricos y en el reconocimiento de necesidades que se evidencian de la actividad desplegada por estudiantes y profesores de la Educación Básica, Media y Superior de la región.

Geometría y coherencia a través del movimiento

Luis Moreno Armella
Cinvestav - México

La geometría dinámica añade a la geometría hecha sobre papel una nueva dimensión: el movimiento. Eso la transforma como campo de conocimiento.

En este taller desarrollaremos actividades de modelación geométrica que el profesor puede poner en marcha en el salón de clases con miras a disminuir la fragmentación del conocimiento matemático escolar. En gran medida, esta situación surge de una introducción inadecuada de los sistemas de representación tradicionales. Emergen dificultades artificiales para los estudiantes que ellos no pueden solventar. Un problema de geometría, por ejemplo, se aborda exclusivamente desde la representación analítica eludiendo un enfoque sintético que podría arrojar luz sobre el problema. Felizmente, las representaciones dinámicas permiten reorientar el enfoque tradicional e integrar lo que parecían fragmentos de conocimiento ajenos entre sí. La propuesta didáctica no se hace esperar: los objetos que tradicionalmente se han estudiado en las matemáticas escolares empiezan a adquirir facetas que los ubican en la frontera de nuevas exploraciones. La capacidad expresiva de los estudiantes aumenta. El conocimiento fluye por otros cauces y, asimismo, las líneas de pensamiento que exploran la coherencia del conocimiento. 1. La geometría del triángulo. 2. Teorema de Euler desde una perspectiva dinámica 3. Cónicas y tangentes. 4. El problema de Wittgenstein y otros lugares geométricos destacados. 5. Una versión dinámica de problemas de valores extremos

A iniciação ao pensamento algébrico

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

O pensamento algébrico, mais do que manipular expressões e resolver equações, envolve as capacidades de estabelecer generalizações e relações, interpretar situações e resolver problemas. Este minicurso de 4 horas dirigido a professores de grados 6-9 (alumnos de 11-14 anos), analisa o modo como se pode desenvolver o pensamento algébrico dos alunos através de tarefas de natureza exploratória. Os participantes terão oportunidade de resolver diferentes tarefas, discutir o modo como podem usadas na sala de aula, e analisar o trabalho realizado por alunos portugueses.

A atividade orientadora de ensino de matemática: unidade de formação do professor e do aluno

Manoel Oriosvaldo de Moura
Faculdade de Educação – USP
Grupo de Estudos e Pesquisas
sobe a Atividade Pedagógica - GEPAPe

Neste curso discutiremos o papel da elaboração e aplicação de atividades de ensino na formação do aluno e do professor. Tendo como referencial teórico a perspectiva histórico-cultural que fundamenta o que chamamos de atividade orientadora de ensino, procuraremos evidenciar processos constitutivos da formação dos que participam de atividades pedagógicas. A partir de exemplos de atividades orientadoras de ensino de matemática a serem vivenciadas no curso, discutiremos o modo do professor criar e executar a sua proposta pedagógica e a apropriação do conceito pelo aluno ao construir respostas que revelem o seu nível de compreensão dos conteúdos em discussão. Partiremos de uma breve apresentação dos fundamentos da Teoria da Atividade e sua contribuição para a Educação Matemática e de como as atividades orientadoras de ensino podem ser estruturadas tendo como referência essa concepção teórica. Os exemplos a serem apresentados têm por finalidade ilustrar os múltiplos aspectos a serem considerados na elaboração das atividades.

13o Encuentro Colombiano de Matemática Educativa

TALLERES

Área en unidades triangulares

Erika Iveth Acero Russi[*]
John Fredy Puentes Maldonado[**]
Zayda Andrea Rojas Sánchez[***]

RESUMEN

El presente trabajo está enmarcado en los pensamientos espacial y métrico propuestos por el MEN (2006). En él se presenta un taller relacionado con la construcción de una fórmula que permita hallar el área de figuras planas en unidades triangulares (utilizando como unidad de medida un triángulo equilátero de lado 1 centímetro). Este taller se estructuró gracias al trabajo realizado durante algunas de las sesiones de clase del espacio de formacion Didáctica de la Geometría, asignatura de quinto semestre del proyecto curricular Licenciatura en Educación Básica con Enfasis en Matemáticas dirigido por el docente William Jiménez, REPITE EN PÁGINAS 2 Y 3 además de tener en cuenta algunos referentes teóricos para su consecución.

[*] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: erikaceror@gmail.com
[**] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: johnfredypuentes@gmail.com
[***] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: zaydandrea@hotmail.com

PRESENTACIÓN

En Colombia los contenidos del área de matemáticas están sustentados en los estándares básicos de matemáticas propuestos por el MEN (2006), que se encuentran organizados en cinco pensamientos matemáticos. Este taller está enmarcado en los siguientes: pensamiento espacial y sistemas geométricos y pensamiento métrico y sistemas de medida; según el MEN (2006) algunos indicadores de estos pensamientos por ciclos son:

- Primer ciclo (primer a tercer grado): "analizar y explicar la pertinencia de usar una unidad de medida y un instrumento de medición" (p. 12).
- Segundo ciclo (cuarto a quinto grado): "describir y argumentar relaciones entre el perímetro y el área de figuras diferentes, cuando es constante una de la dimensiones" (p. 15).
- Tercer ciclo (sexto a séptimo grado): "calcular áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos" (p. 16).
- Cuarto ciclo (octavo a noveno grado): "generalizar procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y volumen de sólidos; seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados" (p. 18).

Estos indicadores permiten conjeturar que los estudiantes deben comprender verdaderamente el significado del concepto área y no solamente memorizar fórmulas y aplicarlas.

Según Del Olmo, Moreno y Gil (1993), el concepto de área se puede desarrollar a partir de la idea del recubrimiento de cuerpos planos; este es un medio para calcular cuánta superficie plana puede ser cubierta en términos de una unidad de medida. Además, Godino (2002) considera que la comparación de áreas a simple vista es muy complicada, incluso para los mayores; por ejemplo, al comparar un cuadrado, un triángulo y un pentágono que ocupan la misma porción del plano es difícil identificar que pueden tener la misma área. Es importante que los niños comprendan la utilidad del concepto área en la vida diaria; por ejemplo, al determinar cuántas baldosas deben comprar para recubrir el piso de una sala o cuántos ladrillos necesitan para hacer una pared que divida en dos un espacio, entre otros.

La intención de este es permitir a los participantes reflexionar sobre el cálculo de áreas de figuras planas, cuestionando el uso de las unidades cuadradas para el cálculo de dichas áreas y facilitando herramientas para desarrollar los conceptos de unidad de medida y área.

REFERENTES TEÓRICOS

Hay una cualidad de los objetos llamada área o superficie; en la actualidad está presente en gran número de actividades cotidianas. Algunos autores establecen diferencias entre estos dos términos, entendiendo "superficie" para designar dicha cualidad y "área" para su medida. Por lo general cuando se trabaja alrededor del concepto se realiza una primera aproximación al área sobre objetos bidimensionales en los que se pueden distinguir el largo y el ancho, y se generaliza posteriormente a figuras tridimensionales en las que ya no se pueden distinguir estos conceptos, como en la superficie de una esfera.

Freudenthal (1983), citado por Del Olmo, Moreno y Gil (1993), indica que en muchas situaciones, la superficie aparece ligada a un proceso de medida, ya sea para comparar, repartir o valorar. Además, plantea que este proceso de medida puede realizarse de varias formas. En presente trabajo se hace necesario resaltar la siguiente:

Rellenando el interior de la superficie a medir con unidades (de superficie) colocadas unas junto a las otras y no superpuestas, y en aquellas donde no quepan se recurre a llenar con unidades más pequeñas. Este proceso se continúa hasta que se recubra totalmente la superficie a medir o se considere que la porción no recubierta es despreciable para la actividad que estamos realizando. Esta técnica se utiliza por lo general para medir cualquier superficie irregular (p. 35)

CORRESPONDENCIA ENTRE UNIDADES CUADRADAS Y TRIANGULARES

La siguiente imagen representa el área de diferentes polígonos en unidades cuadradas; estas áreas se pueden calcular fácilmente usando las fórmulas para calcular el área de polígonos como triángulos, cuadrados y rectángulos. Esto significa contar el número de cuadros de lado uno que son necesaros para recibir la figura 1(haciendo alusión al método de Eudoxo).

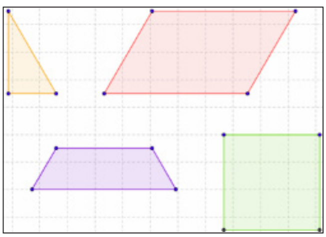


Figura 1. Polígono en una regilla cuadrada

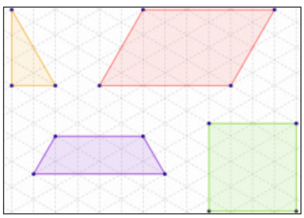


Figura 2. Polígonos en regilla isométrica

¿Pero que ocurre si esta representacion de área se da en unidades triangulares?, es decir, contar el número de triángulos equiláteros de lado uno que son necesarios para recubrir los polígonos (figura 2). ¿Cuáles propiedades cambiarán con respecto a las unidades cuadradas y cómo calcular esta nueva área?

Guiados por estas preguntas logramos hacer una correspondencia entre unidades cuadradas y triangulares. A continuación se presenta el proceso llevado a cabo. Inicialmente hallamos áreas de polígonos en unidades cuadradas utilizando en cada caso la fórmula correspondiente; dado que no encontramos una fórmula para hallar el área de un polígono en unidades triangulares, el algoritmo utilizado fue el conteo de los triángulos que los conformaban. Al ver que este algoritmo no funcionaba en todos los casos, decidimos hacer una funcion para pasar de unidades cuadradas a triangulares, y viceversa. Entonces, si tenemos un cuadrado de lado uno (figura 3), formamos un triángulo equilátero a partir de uno de sus lados, calculamos su altura y obtenemos: $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

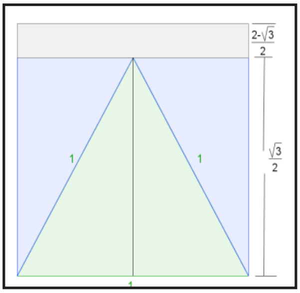


Figura 3. Triángulo equilátero de lado1 inscrito en un cuadrado de lado 1

La correspondencia entre unidades cuadradas y triangulares se hace tomando una unidad cuadrada (cuadrado de lado 1) y observando cuántas unidades triangulares (triángulos equiláteros de lado 1) pueden ser sobrepuestas en dicha unidad cuadrada; si se construye un triángulo equilátero en uno de los lados del cuadrado y se traza la perpendicular por el vértice que no pertenece a dicho lado, se obtiene una figura como la anterior, en la cual dos unidades triangulares (triángulo equilátero verde y triángulo equilátero formado por los dos triángulos azules) corresponden a una unidad cuadrada (u_c) menos el área de la parte gris, de tal forma que:

$$2Ut = 1Uc - \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)Uc = 1Uc - \frac{2}{2}Uc + \frac{\sqrt{3}}{2}Uc = \frac{\sqrt{3}}{2}Uc$$

$$1Ut = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}Uc = \frac{\sqrt{3}}{4}Uc$$

Ut: Unidades Triangulares.
Uc: Unidades Cuadradas.

Obteniendo así una función para pasar de unidades cuadradas a triangulares que permite hallar el área de cualquier polígono en unidades triangulares.

METODOLOGÍA DEL TALLER

Para la realización del taller se usará material manipulativo, puesto que según Kennedy (1986), el uso de material manipulativo permite a los estudiantes comprender mejor el significado de las ideas matemáticas como las aplicaciones de estas ideas a las situaciones del mundo real. El taller se realizará en dos sesiones cada una de hora y media, y se desarrollará de manera individual, para que cada participante experimente con material y conjeture acerca del cálculo de áreas en unidades triangulares.

Clasificación del recurso	*Función del recurso*	*Hipótesis de aprendizaje*
Material manipulativo tangible: polígonos, triángulos equiláteros y cuadrados de lado 1cm.	A través del uso de los cuadros y triángulos será más fácil recubrir cada uno de los polígonos.	Realizar recubrimiento de los polígonos teniendo en cuenta que no se deben sobreponer los triángulos y los cuadrados ni dejar espacios, para comprender el significado de las fórmulas matemáticas para hallar el área.
Material manipulativo gráfico-textual: hojas de registro.	En las hojas podrán realizar operaciones para hallar el área triangular de los polígonos.	Al recubrir los polígonos se podrán tener ideas sobre las fórmulas matemáticas para hallar el área de dichos polígonos.

ACTIVIDADES

Actividad 1: rellenar superficies poligonales con cuadrados de áreas menores a las superficies, colocando unos junto a los otros sin sobreponerlos, y calcular el área de estas teniendo en cuenta la unidad de medida (cuadrados de lado 1).

Actividad 2: descomponer superficies poligonales en polígonos regulares de menor área, y calcular el área de estas superficies teniendo en cuenta la unidad de medida creada.

Actividad 3: observar un trabajo realizado en Geogebra, en donde las áreas de distintos polígonos se presentan a partir de unidades triangulares y no cuadradas. Crear hipótesis relacionadas con lo trabajado acerca de unidades triangulares.

Actividad 4: explorar y crear fórmulas para calcular el área de un polígono en unidades triangulares.

Actividad 5: crear una función para pasar de unidades cuadradas a triangulares, y viceversa.

REFERENTES BIBLIOGRÁFICOS

Del Olmo M., Moreno M., Gil F., (1993). Superficie y volumen. Madrid: Editorial Síntesis.

Font V., Godino J. & D´ Amore B. (SF). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. Extraído 29 de mayo de 2011 en www.urg.upr.es/jgodino/funciones-semioticas/enfoque_ontosemiotico_representaciones.pdf

Godino J. (2004). Didáctica de las matemáticas para maestros. Universidad de Granada. Extraído 15 de febrero de 2011en http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

MEN (1998).Lineamientos curriculares para matemáticas. Bogotá, Colombia.

Usando espejos para construir el concepto de parábola

Martín Acosta Gempeler[*]

RESUMEN

Se busca construir el concepto de parábola por medio de una experimentación física y una modelación con Cabri, de la siguiente situación: dados diez rayos de luz paralelos, colocar diez espejos planos que reflejen los rayos sobre un objeto dado. Siguiendo la teoría de las situaciones didácticas, la experimentación física y la modelación permiten a los alumnos vivir una experiencia que permitirá darle sentido al saber correspondiente al concepto de parábola, tanto como lugar de todos los espejos que reflejan rayos paralelos sobre un mismo punto, como de lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de un punto y una recta.

Palabras clave: geometría, parábola, Cabri, construcción de conocimiento.

[*] Universidad Industrial de Santander. Dirección electrónica: maedu@hotmail.com

MOTIVACIÓN

Las parábolas tienen un amplio rango de aplicaciones en la tecnología moderna, tanto para las comunicaciones como para la iluminación. Sin embargo, la enseñanza del concepto de parábola desde el punto de vista algebraico o como lugar de puntos no permite comprender dichas aplicaciones. En la presente propuesta didáctica, partimos de un problema experimental que da sentido a las aplicaciones de la parábola, para pasar luego a su modelación en Cabri con el fin de identificar las propiedades geométricas fundamentales del problema, y de allí pasar a una generalización del mismo que llega a la construcción de la parábola como dos lugares geométricos equivalentes: el lugar de todos los espejos que reflejan rayos paralelos sobre un mismo punto, y el lugar de todos los puntos equidistantes de un punto y una recta.

MARCO TEÓRICO: TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS

Una de las preocupaciones fundamentales de la teoría de las situaciones didácticas es la construcción del sentido del saber matemático. Según esta teoría, el intento de transmitir de manera directa el saber produce su pérdida de sentido para los alumnos; aprenderán un discurso, o unos gestos que intentan imitar, pero sobre los cuales no tienen ningún control. Para construir el sentido del saber matemático, según la TSD, es necesario anclarlo en las experiencias personales de los alumnos, es decir, en su 'conocimiento'. Para la TSD, conocimiento y saber no son dos términos equivalentes: el conocimiento es personal y contextualizado (fruto de una experiencia), mientras que el saber es impersonal y descontextualizado. Las situaciones a-didácticas buscan propiciar una experiencia en los alumnos, por medio de la interacción con un medio didáctico para resolver un problema, con el fin de que los alumnos construyan conocimientos (personales y contextualizados) que puedan ser utilizados como claves de interpretación del saber (impersonal y descontextualizado). El profesor entonces no intenta transmitir de manera directa el saber (problema de comunicación de un mensaje), sino de manera indirecta, propiciando primero la construcción de conocimientos en los alumnos, para después, durante el llamado proceso de institucionalización, explicitar las relaciones entre el saber institucional y los conocimientos construidos en el contexto de la situación a-didáctica.

DESARROLLO

Simplificando de manera un poco extrema, podríamos decir que el modelo de enseñanza basado en la TSD busca precisar un medio y un problema adecuados para propiciar una experiencia de los alumnos, gracias a la cual construyan conocimientos que puedan ser relacionados con el saber institucional y utilizados como claves para darle sentido a dicho saber.

Para el caso que nos ocupa, del concepto de parábola, pensamos que un problema adecuado es el correspondiente a las antenas parabólicas: cómo concentrar rayos (de luz o de sonido) en un solo punto.

1. En un primer momento se pide a los estudiantes que utilicen un espejo plano para reflejar 10 rayos de luz (emitidos de manera paralela) sobre un objeto y que dibujen en una hoja de papel el objeto, el espejo, los rayos emitidos y los rayos reflejados. Los rayos deben ser paralelos, y cada espejo debe estar en contacto con el siguiente. Esta etapa de experimentación física les permite familiarizarse de manera perceptiva con algunos fenómenos relativos a las relaciones entre el espejo y los rayos de luz.

2. En un segundo momento se pide hacer la modelación en Cabri de la situación estudiada, con un espejo y un rayo, con el fin de que identifiquen la simetría axial como herramienta que garantiza las relaciones entre los rayos y el espejo.

3. En un tercer momento se pide hacer la modelación de los 10 rayos y los 10 espejos, con la condición adicional de que los rayos deben estar igualmente espaciados.

4. Luego se pone la condición de que la modelación debe resistir el arrastre del objeto, de los rayos y del punto de reflexión del primer rayo. Esta condición lleva a la necesidad de construir de manera exacta un primer espejo, y a partir de él determinar la posición de un espejo contiguo con él. Para la solución de este problema deben utilizarse propiedades de los ejes de simetría (el eje de simetría de dos puntos es la mediatriz, el eje de simetría de dos rectas es la bisectriz, la mediatriz es el lugar de puntos equidistantes de dos puntos dados, la bisectriz es el lugar de puntos equidistantes de dos rectas dadas).

5. Finalmente se pide considerar la posibilidad de reflejar infinitos rayos sobre infinitos espejos (de manera que cada espejo se reduce a un punto). Gracias a la modelación del punto anterior, puede llegar a utilizarse el hecho de la equidistancia del espejo con respecto al objeto y una recta auxiliar, es decir, la definición de parábola como lugar de puntos equidistantes de un punto y una recta.

NOTA

Esta situación, aunque inspirada en la TSD, no puede ser considerada estrictamente como situación adidáctica, pues requiere una fuerte intervención del profesor para articular la experiencia, los presaberes y las herramientas del software. Sin embargo, permite darle un doble sentido al concepto de parábola: como lugar de todos los espejos que reflejan rayos paralelos sobre un mismo punto, y como lugar de todos los puntos equidistantes de una recta y de un punto. La experimentación con espejos y rayos de luz reales y la experimentación con modelos geométricos de esa situación en Cabri dan oportunidad a los alumnos de emitir conjeturas y tratar de validarlas, y dan oportunidad al profesor de precisar los problemas en la base de esa modelación teórico-práctica, permitiéndole una devolución adecuada, y centrando los procesos de razonamiento en las propiedades geométricas de la parábola, propiedades que están en la base de las aplicaciones tecnológicas de dicho concepto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cadavid Muñoz, S. Y. & Restrepo Restrepo, C. A., (2011). El proceso de objetivación del concepto de parábola desde el uso de artefctos. Tesis de maestría, Universidad de Antioquia.

Margolinas, C. (2008). La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas. Bucaramanga, Colombia, Publicaciones UIS.

Juegos, lúdica y enseñanza: un acercamiento a la metodología del semillero matemático

Claudia Barajas Arenas [*]
Marcela Jaimes Muñoz [**]
Jorge Armando Ortiz Sánchez [***]

RESUMEN

El Semillero Matemático es un subgrupo del Grupo de Educación Matemática de la Universidad Industrial que se define como un espacio para que los niños y jóvenes se aproximen al conocimiento matemático a través de juegos, acertijos, rompecabezas, material didáctico, origami, resolución de problemas y uso de tecnologías computacionales. A través de este taller se quiere mostrar cómo, sin abandonar la rigurosidad de la actividad matemática, el uso de los juegos en clase puede fortalecer la dinámica del pensamiento matemático dado que la actividad dirigida exige que los estudiantes observen, conjeturen, generalicen, comprueben, entre otras procesos matemáticos propios de la actividad matemática que espera generarse en el aula.

Palabras clave: juego – lúdica – pensamiento matemático – Semillero Matemático UIS

[*] Universidad Industrial de Santander, Grupo EDUMAT-UIS. Dirección electrónica: claubaren28@hotmail.com

[**] Universidad Industrial de Santander, Grupo EDUMAT-UIS. Dirección electrónica: marcelitaz11@hotmail.com

[***] Universidad Industrial de Santander, Grupo EDUMAT-UIS. Dirección electrónica: jorgeortizsanchez@gmail.com

[1] A la fecha (octubre, 2012), docentes del Colegio Gimnasio Superior, Instituto San José de la Salle y Universidad Pontifica Bolivariana, respectivamente.

MARCO TEÓRICO

El Diccionario de la Real Academia Española señala el juego como *un ejercicio recreativo sometido a reglas, y en el cual se gana o se pierde*. Petrovski (Jaimes, 2008, p. 15) encuentra algunas diferencias del concepto de juego entre diferentes pueblos. Dice que para los griegos la locución "juego" significaba las acciones propias de los niños; entre los hebreos, la palabra "juego" correspondía al concepto de broma y risa; entre los romanos "ludo" significaba alegría, jolgorio; entre los germanos la antigua palabra "spilan" significaba placer. Así, "el concepto de juego es amplio y a menudo ambiguo; sin embargo, es absolutamente universal, plural, heterogéneo, flexible y necesario" (Jaimes, 2008. p. 15 citando a Gutiérrez, 2004), por lo que la palabra *juego* empezó a significar en todas estas lenguas un grupo numeroso de acciones humanas que no requieren un trabajo arduo y proporcionan alegría y satisfacción. Para el Semillero Matemático, en la revisión del concepto se tomaron las definiciones cuyo componente transversal es etimológico e indica que *juego* procede del latín "locum" (broma, diversión) y "ludus", lúdica que es el acto de jugar, además, se tomaron en cuenta las posiciones de autores como (ver Figura 1):

RUSSEL A (1970)	El juego es una actividad generadora de placer que no se realiza con una finalidad exterior a ella sino por si misma
J. BRUNER (1986)	El juego ofrece al niño la oportunidad inicial y más importante de atreverse a pensar, a hablar y quizás incluso a ser el mismo.
JACQUIN, GUY (1958)	El juego es una actividad espontánea y desinteresada, que exige una regla libremente escogida que cumplir o un obstáculo deliberadamente puesto que vencer.
HUIZINGA (1972)	El juego en su aspecto formal, es una acción libre ejecutada y sentida como situada fuera de la vida corriente, pero que a pesar de todo, puede absorber por completo al jugador, sin que haya en ella ningún interés material ni se

Figura 1. Definición de "juego" de algunos autores (Jaimes, 2008, p. 15)

Después de indagar, coincidimos en que "el juego" es toda actividad natural, aprendida y formada intuitivamente, es agradable, proporciona placer, felicidad en un momento y sitio determinados, que permite al individuo mostrarse tal como es, reafirmando su personalidad y autoestima, y de acuerdo con el propósito con que se utiliza, se logra evolucionar en diferentes campos como lo psicológico, afectivo, social, biológico, educativo y tecnológico. Así, el interés del Semillero Matemático es el uso educativo del juego como estrategia de enseñanza (y aprendizaje) razón por la cual se tomaron en cuenta las teorías que desde lo psicológico sustentan su uso como estrategia didáctica en el trabajo de Jaimes (2008, pág. 17-34) las cuales se sintetizan en la Figura 2 que sigue:

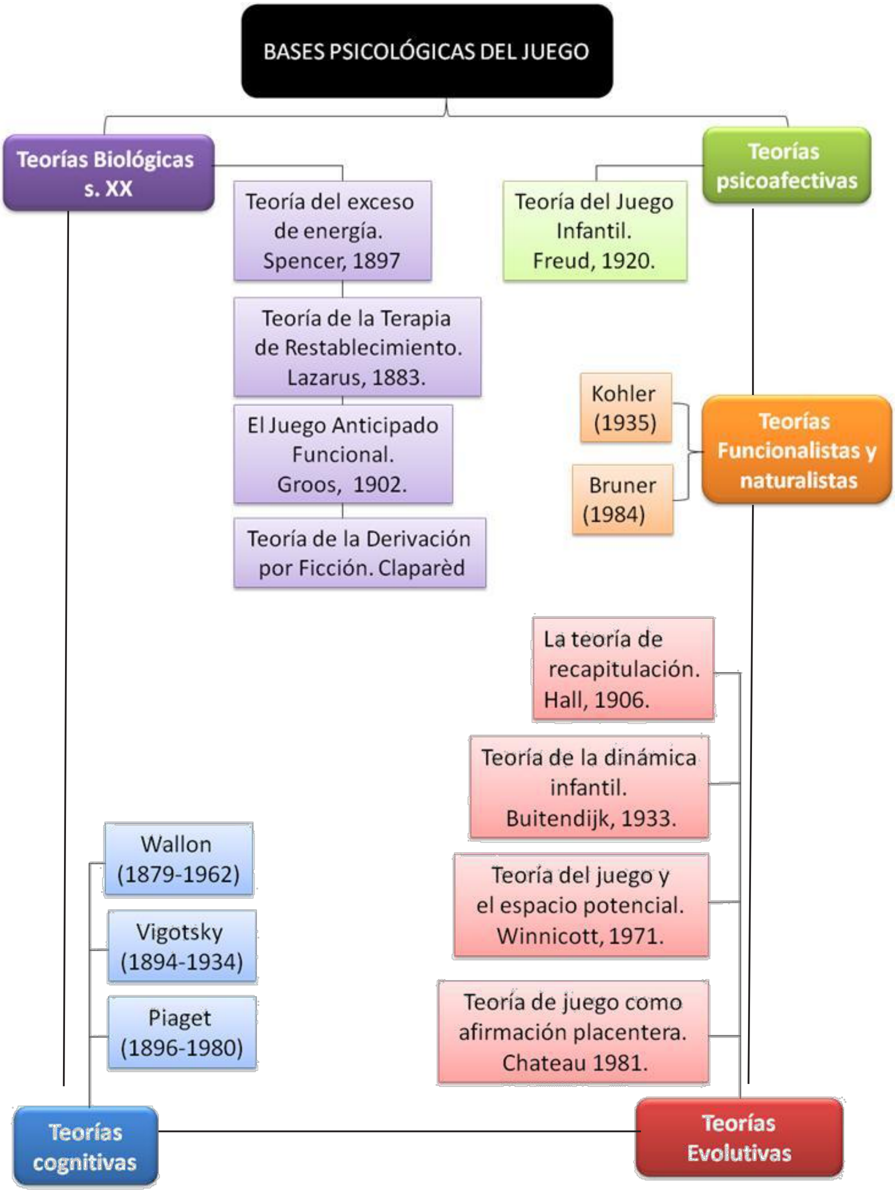


Figura 2. Teorías psicológicas que sustentan el juego como estrategia didáctica

La matemática y los juegos han entreverado sus caminos muy frecuentemente a lo largo de los siglos. Es frecuente en la historia de las matemáticas la aparición de una observación ingeniosa hecha de forma lúdica, que ha conducido a nuevas formas de pensamiento. Del valor de los juegos para despertar el interés de los estudiantes se ha expresado muy certeramente Martin Gardner (1983), el gran experto de nuestro tiempo en la presentación de juegos por muchos años:

> … la idea de «juego» conlleva muchos significados, enlazados entre sí; podemos decir que los «juegos matemáticos» o las «matemáticas recreativas» son matemáticas -no importa de qué tipo- cargadas de un fuerte componente lúdico […]. Aunque no puedo definir los juegos matemáticos más rigurosamente que la poesía, sí mantengo que […] proporcionan el mejor camino para captar el interés de los jóvenes durante la enseñanza de la matemática elemental. Y si el «juego» se elige y prepara con cuidado, puede llevarle casi insensiblemente hasta ideas matemáticas de importancia.

Otras bondades del juego que vale la pena tomar en cuenta desde lo pedagógico y lo psicológico (Jaimes, 2008, págs. 46-47) son:

- El juego infantil constituye un escenario psicosocial donde se produce un tipo de comunicación rica y variada que permite a los niños indagar en su propio pensamiento y pone a prueba sus conocimientos mediante el uso interactivo de objetos y conversaciones.
- Jugar es entrar en un mundo en el que, si uno se equivoca, no hay gran cosa que lamentar porque finalmente es solo un juego.
- El carácter de ensayo del juego, o de proceso revocable cuando no logra el éxito, se convierte en verdadero triunfo cuando se culmina de forma exitosa.
- Es esta una experiencia que proporciona al niño/a la seguridad necesaria para aprender a arriesgarse, creando situaciones nuevas, inventando recursos interesantes y evaluándose de forma tolerante y positiva.
- La naturaleza del juego se convierte en una forma de conceptualizar y comunicar conocimientos para que el profesorado los utilice como herramienta educativa.
- En los juegos se practica el complejo proceso de adecuar el pensamiento, la actitud y el comportamiento personal a las exigencias de los demás y de la situación social.

A continuación la importancia del juego en la matemática (ibídem, págs. 52-53):

- Contribuye a desarrollar el espíritu constructivo, la imaginación y hasta la facultad de sistematizar, tan necesaria en el aprendizaje matemático.

- Estimula el conocimiento y el descubrimiento personal.
- Favorece la interacción social y, de manera muy efectiva la motivación.
- Colabora en el desarrollo de habilidades para comprender conceptos y términos matemáticos, detectar analogías, diferencias y similitudes, identificar elementos críticos y seleccionar datos y procedimientos correctos y, además, cambiar la metodología de trabajo (estrategias del juego) cuando sea necesario.
- Proporciona bajo nivel de ansiedad y alta puntuación en autoestima con buenas relaciones con sus iguales.
- Favorece el desarrollo de la función simbólica cuando incluye el proceso de construcción de representaciones.
- Promueve el desarrollo de habilidades que favorecen la independencia intelectual del estudiante, la integración de temas, el trabajo grupal de investigación, el respeto de reglas y la utilización adecuada de la información

DEL TALLER Y SU METODOLOGÍA

El taller que aquí proponemos tiene como objetivo socializar algunas experiencias que se desarrollan en el subgrupo Semillero Matemático del Grupo EDUMAT-UIS. El Semillero desde su definición le apuesta a la lúdica como "un proceso activo (serie consecutiva de actividades o ejercicios) con el cual se busca llegar al aprendizaje o refuerzo de un concepto matemático, cuyo desarrollo genera en el individuo emociones gratificantes" (Ortiz, 2008, p. 37); esto para cultivar la actitud positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas. La premisa del grupo es que a través de juegos (como cuadrados mágicos, sudokus, cubo de soma, torres de Hanoi, entre otros) se pueden generar metodologías de clase motivantes para que los estudiantes, a la vez que se diviertan, desarrollen su pensamiento matemático. Al respecto, De Guzmán (2006, p. 43) dice que "si el juego y las matemáticas, en su propia naturaleza, tienen tantos rasgos comunes, no es menos cierto que también participan de las mismas características en lo que respecta a su propia práctica". Para los integrantes del grupo Semillero Matemático es de gran interés construir e identificar diferentes maneras que nos ayuden a acercar el conocimiento matemático a los alumnos teniendo en cuenta, desde Ortiz (2008), que existe una relación unidireccional entre el juego y la lúdica, tanto así que todos los juegos son lúdicos, pero no todo lo lúdico es juego. El objetivo de este taller no será profundizar en el origen ni en el significado del juego; debido a sus múltiples componentes (sociales, sicológicas y filosóficas) que dificultan su comprensión se entenderá el juego desde su concepto lingüístico: "ejercicio recreativo sometido a reglas" (Ortiz, 2008, p. 42).

De este modo, se desea compartir con los participantes del taller tres actividades propias del Semillero en las que se usan los juegos: Switch 8, Logicubo y la Torre de Hanoi. Esto se hará siguiendo las etapas de la metodología del Semillero al momento de implementarlos: (a) Reconocimiento del material; (b) Apropiación de las reglas; (c) Espacio para jugar; y, (d) Orientación para pasar a procesos de generalización y conceptualización.

Finalmente, con ello mostraremos a los colegas que utilizando el juego con fines específicos logramos probar desde nuestra experiencia que no es una pérdida de tiempo sino, por el contrario, es una herramienta valiosa que, si se sabe utilizar, aporta mucho al desenvolvimiento de los jóvenes y sobre todo al desarrollo de funciones cognitivas básicas, entre las que se destaca el pensamiento numérico. Así, la matemática recreativa aporta una serie de actividades útiles y acordes a las temáticas y competencias que se desean desarrollar en los estudiantes, y en ningún momento se salen de los planes académicos del área; en conclusión, en el Semillero Matemático, los profesores licenciados y profesores en formación que hacen parte de él le apuestan al juego ya que nuestra experiencia nos ha mostrado que a través de él potenciamos las competencias básicas en matemáticas de una manera agradable y divertida.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

De Guzmán, M. "Enseñanza de las Ciencias y la Matemática". *Revista SIPROMA Matemática Iberoamericana*. [Versión electrónica]. Recuperado el 20 agosto de 2006 de http://www.oei.es/edumat.htm

Gardner, M. (1983). *Circo Matemático*. España.

Jaimes, M. (2008). El juego en el desarrollo del pensamiento numérico de estudiantes de séptimo grado. Tesis de postgrado. Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Ortiz, J. (2008). *Creación de ambientes lúdicos en clase de matemáticas: una mirada desde la formación docente*. Tesis de pregrado. Colombia: Universidad Industrial de Santander

La variación, algo más que patrones: una experiencia desde el proyecto numerario

Gabriela Builes Gil[*]
Luz Marina Díaz Gaviria[**]
Yolanda Beltrán de Covaleda[***]

RESUMEN

La propuesta de este taller está diseñada para maestros de Educación Básica Primaria, como un aporte a sus procesos de formación, específicamente, en didáctica de las matemáticas, a partir del proyecto Numerario. El propósito es generar una reflexión con los maestros sobre metodologías que favorezcan los procesos de aprendizaje de las matemáticas, contextualizando el conocimiento, en diferentes niveles de complejidad, desde las prácticas cotidianas. Es importante procurar la integración de los diferentes pensamientos matemáticos, particularmente para este caso, desde el pensamiento variacional con los conceptos de variación y cambio.

Palabras clave: escuela, interacción, maestro, procesos, estrategia, aprendizaje, pensamiento variacional.

[*] Integrante del grupo de investigación Matemáticas, Educación y Sociedad – MES – Facultad de Educación. Universidad de Antioquia. Profesora de cátedra en el área de Matemáticas en la Licenciatura en Pedagogía infantil, Facultad de Educación. Universidad de Antioquia. Integrante de equipos de trabajo en proyectos de extensión. Facultad de Educación. Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: gabriela.builes@gmail.com

[**] Integrante del grupo de investigación Matemáticas, Educación y Sociedad – MES – Facultad de Educación. Universidad de Antioquia. Integrante de equipos de trabajo en proyectos de extensión. Facultad de Educación. Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: lmdiazgaviria@hotmail.com

[***] Integrante del grupo de investigación Matemáticas, Educación y Sociedad – MES – Facultad de Educación. Universidad de Antioquia. Integrante de equipos de trabajo en proyectos de extensión. Facultad de Educación. Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: ybeltrand@gmail.com

PRESENTACIÓN

Con la pretensión de contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación en Colombia, la Fundación Corona, la Fundación Génesis y los Negocios de la Organización Corona vienen liderado, en alianza con algunas entidades privadas y públicas del país, el proyecto NUMERARIO. Este se inicia en los años 2009 y 2010 como experiencia piloto en varios municipios del Área Metropolitana del departamento de Antioquia, en instituciones educativas públicas de los sectores urbano y rural. En los años 2011 y 2012, con el apoyo de la Secretaría de Educación de Medellín y de otros aliados, la experiencia se amplía, en el departamento de Antioquia a otros municipios, incluido Medellín, a algunos municipios del departamento de Cundinamarca y a la ciudad de Cartagena. Este proyecto es ejecutado en Antioquia y Cartagena por la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Dicha gestión incluye tanto la coordinación general y académica, como los procesos de diseño y desarrollo de la propuesta de formación con maestros y padres de familia.

En este taller se quiere resaltar que este proyecto posibilita diferentes espacios de interacción y formación: un espacio de formación en el que participan los maestros de Educación Básica Primaria, y de manera especial los de Preescolar, primero, segundo y tercero; otro espacio de formación en el que participan los padres de familia de los estudiantes de estos mismos grados, y un último espacio de formación, en el que participan coordinadores y directivos de las diferentes instituciones educativas vinculadas al proyecto.

Para el diseño y desarrollo de la propuesta de formación con los maestros se ha conformado un equipo de talleristas, integrado por maestros de Educación Básica, vinculados a instituciones educativas y a la Universidad de Antioquia, como profesores de diferentes programas de la Facultad de Educación. De esta manera, se está constituyendo otro escenario de formación de manera colaborativa, donde a partir del diálogo de saberes desde la experiencia de cada uno, se viene configurando la estructura de los diferentes encuentros de formación con los maestros. Estos encuentros tienen como propósito la reflexión sobre estrategias didácticas que posibiliten desarrollar de manera integrada los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales desde la interrelación de los pensamientos matemáticos, en los diferentes grados. Asimismo, se establece un diálogo permanente entre la Universidad, la escuela y la comunidad, mediatizado y enriquecido por los contextos y por las intencionalidades educativas de los diferentes programas y los grupos de investigación que agrupan a los talleristas.

De igual manera, se tienen en cuenta las prácticas pedagógicas de los maestros de Educación Básica Primaria en las que aún prevalecen algunas prácticas mecanicistas que enfatizan más en procesos de repetición y memorización antes que en la comprensión y la construcción de saberes a partir de las interacciones. Estas prácticas siguen perpetuando la creencia de que las matemáticas son difíciles de aprender, generando una actitud de aversión y apatía por el conocimiento matemático escolar. Al respecto, Obando y otros (2006), plantean: "el trabajo así realizado no permite a los alumnos desarrollar habilidades y destrezas en el cálculo mental, en la compresión y la solución de problemas, en la comprensión misma del sentido y significado de las operaciones" (p. 97). No obstante, hay maestros que vienen transformando sus prácticas pedagógicas, posibilitando que en el aula circulen otros sentidos y significados de las matemáticas.

En este contexto, lo que se quiere compartir en este taller es la vivencia y las reflexiones que se han venido suscitando en los encuentros de formación con los maestros, con base en la realización de actividades que están inspiradas en un enfoque conceptual y metodológico, que busca resaltar las singularidades de los maestros, de sus estudiantes y de los contextos. Estas actividades enmarcadas en situaciones problema generan la necesidad de poner en acción el saber matemático con sentido y de forma significativa. Esta estrategia está favoreciendo un diálogo de confrontación, por una parte, con los saberes propios del campo disciplinar de las matemáticas y por otra parte, con las estrategias metodológicas empleadas en los procesos de enseñanza y las maneras de interpretar los procesos de aprendizaje en los estudiantes.

MARCO REFERENCIAL

La propuesta de este taller, a la luz del proyecto Numerario, pretende hacer énfasis en dos aspectos: la formación de maestros y el saber disciplinar alrededor de algunos procesos de variación y cambio, desde los cuales se presentan ciertos referentes que han venido configurando el proyecto.

En la Educación Matemática, uno de los aspectos de gran importancia es el desarrollo de procesos de formación continuada de maestros. Es así como desde la Universidad, se generan espacios que brindan a los maestros en ejercicio la oportunidad de reflexionar sobre sus prácticas pedagógicas, a partir de las interacciones que se pueden generar entre el maestro, el estudiante y el conocimiento, en este caso el saber matemático.

Los marcos legales del MEN, desde la Ley General de Educación, proponen en los Lineamientos curriculares de matemáticas, replantear las relaciones entre los maestros, los estudiantes, el saber matemático escolar y las instituciones, de tal manera que se generen proyectos de formación de maestros que favorezcan la reflexión en torno a sus prácticas pedagógicas, su formación disciplinar y didáctica, teniendo en cuenta los contextos y los sujetos que conforman las comunidades educativas. Al respecto, en los mismos Lineamientos curriculares de matemáticas (1998) se plantea:

> La formación de maestros debe descansar no sólo sobre una base metodológica firme que garantice la obtención de la cobertura y calidad apropiada, sino que ésta debe subyacer sobre una propuesta conceptual que permita a los maestros desplegar la educación que necesita la sociedad colombiana del nuevo milenio (p. 121).

En diferentes ámbitos educativos se ha venido incursionando en la concepción de formación propuesta por Larrosa, como un proceso vivido por cada uno, con base en su propio saber de experiencias y en una continua dialéctica entre sí mismo y los otros (los otros maestros, los otros directivos, los otros estudiantes, la institución, la familia y el contexto, entre otros). Es decir, pensar en un maestro reflexivo, dador de sentidos desde sus creencias, motivos, acciones e historias, que sea capaz de pensarse como un maestro investigador, transformador de su práctica pedagógica. De igual manera, Da Rocha Migueis y Da Graça Acevedo (2007) proponen que: "La formación de estas profesiones debe desarrollarse desde una actitud crítica, reflexiva y transformadora en relación con su práctica pedagógica desencadenando cambios significativos en su postura profesional" (p. 20).

Las mismas autoras expresan la importancia de establecer significativamente una diferencia entre el maestro que transmite a los niños un concepto, simplemente para que sea repetido y el que orienta para recrear los conceptos con significado propio, mediante estrategias que permitan relacionar lo lúdico y lo afectivo. Es pensar en un maestro cuya forma de enseñar sea motivadora y desafiante, que sea capaz de crear condiciones para la resolución de problemas significativos para los niños desde su cotidianidad y con contenidos matemáticos específicos, y por consiguiente, que se potencie el desarrollo del pensamiento matemático, a través de procesos de argumentación y representación en la resolución de problemas.

En los procesos de formación de maestros reflexivos, críticos, innovadores e investigadores es importante considerar los aspectos que rodean las prácticas en el aula y fuera de ella, que favorezcan que los cambios y movimientos que se van dando en los procesos de enseñanza y de aprendizaje sean dotados de sentido y significado. En esta perspectiva, sobre la formación de maestros, Da Rocha Migueis y Da Graça Acevedo (2007) plantean que:

> Debe ser, entonces, considerado como un proceso continuo, que pretende la mejoría de las prácticas docentes, centrado en el educador o en un grupo de educadores en interacción, incluyendo momentos formales y no formales, de reflexiones no solo de las prácticas sino también de los contextos en que estas ocurren, con la preocupación de propiciar cambios educativos en beneficio de los educadores, los alumnos, las familias y las comunidades (p. 22).

La participación e interacción en el proyecto Numerario de diferentes actores, como el equipo de la Universidad, los maestros, los niños, los directivos de las instituciones educativas y los padres de familia, hace que se avance en procesos de trabajo colaborativo, puesto que todos participan de una u otra manera desde su lugar como personas y desde su experiencia, en procura de movimientos y transformaciones en los procesos que se desarrollan en el aula de clase. Esta idea se complementa con las propuestas de Boavida y Ponte (2002) quienes plantean que:

> La colaboración puede desarrollarse entre pares, por ejemplo entre profesores que trabajan un mismo proyecto; sin embargo, la colaboración puede también tener lugar entre actores con estatus y papeles diferenciados, por ejemplo entre profesores e investigadores, entre profesores y alumnos, entre profesores y encargados de la educación... (p. 4).

La continuidad que se ha venido dando en el proyecto Numerario desde estas concepciones ha permitido identificar algunas transformaciones en las aulas de clase a la hora de enseñar matemáticas, y se tiene la esperanza que a mediano y largo plazo este trabajo comience a superar las expectativas que de él se tienen; según Boavida y Ponte (2002): "[...] la verdad es que, en muchos casos, la concretización, con éxito, de proyectos realmente ambiciosos e interesantes, solo es posible con la constitución de equipos colaborativos".

Aunque a lo largo del proyecto Numerario se ha venido trabajando con situaciones que involucran todos los pensamientos matemáticos, el saber disciplinar que se propone en este taller es "la variación y el cambio", desarrollados a través estrategias metodológicas que propician la interacción entre los maestros, los estudiantes y el propio conocimiento.

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) resaltan la importancia del pensamiento variacional en los procesos de formación matemática de los niños. Proponen el concepto de "variación" como plataforma primordial para acceder a los procesos de generalización, y como eje articulador de los pensamientos matemáticos, en los procesos de aprendizaje. En los Estándares básicos de competencias matemáticas (2006), se plantea:

> [...] este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos (p. 66).

Adicionalmente, es importante reconocer que la variación está presente en la vida cotidiana, y desde allí plantear actividades que posibiliten explorar estos conceptos matemáticos. Es decir, que los maestros puedan establecer relaciones entre el saber matemático escolar, relativo a la variación y al cambio, y las prácticas cotidianas, para planear situaciones que tengan propósitos didácticos. Por ejemplo, diseñar problemas en los que aparecen arreglos rectangulares para trabajar propiedades de la multiplicación y poner a variar el número de filas o de columnas, para ver cómo varían los resultados de las multiplicaciones que representan, e ir avanzando hacía el análisis de situaciones de variación. Al respecto Itzcovich, (2007) en el Módulo de Numerario propone:

> A medida que se avanza en la escolaridad, la multiplicación se convierte en una herramienta que permite entrar en ciertas prácticas algebraicas. El objeto central de estudio deja de ser la cuenta y pasa a ser el análisis de las propiedades y de su validación. En esta instancia, todo el trabajo desarrollado a lo largo de los años anteriores pasa a ser un insumo para abordar las nuevas cuestiones, no sólo en lo referido al aspecto matemático, sino también al tipo de práctica desarrollada (p. 179).

Por lo tanto, desarrollar con los niños, desde tempranas edades, situaciones de variación y cambio hace que se vaya incursionando en procesos de generalización y en razonamientos proporcionales, los cuales están muy relacionados con la resolución de problemas de la vida cotidiana que favorecen avanzar hacia la construcción de conceptos del álgebra escolar. En este sentido, en el Módulo 2 "Pensamiento Variacional" (2006) se plantea:

> [...] el estudio del álgebra escolar, al lado de procesos de variación, permite construir desde temprana edad algunos elementos propios del álgebra, tales como: el concepto de variable, la relación de igualdad en sus múltiples significados, el concepto de parámetro, de incógnita y de ecuación e inecuación, entre otros (p. 17).

Se escogió, entonces, este tema específico en el taller, para compartir con los maestros de básica primaria algunas experiencias de procesos que se vienen desarrollando, insistiendo en la importancia del pensamiento variacional desde los primeros grados.

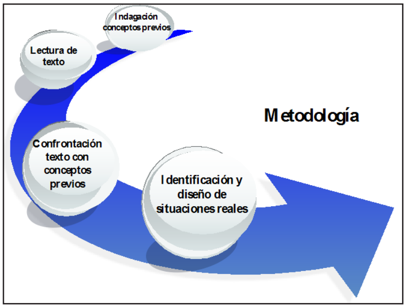
METODOLOGÍA

El taller se desarrolla en dos momentos. En el primero, se socializa la fundamentación metodológica del proyecto. En el segundo, se realizan algunas situaciones de variación y cambio que permitan vivenciar la metodología, objeto de nuestra reflexión. Además de las discusiones que durante las actividades se generan en torno a lo conceptual, vamos a compartir el componente metodológico de Numerario en doble vía.

Las situaciones diseñadas para compartir con los maestros, desde el pensamiento variacional, se proponen con la intencionalidad de visibilizar maneras de integrarlo con los otros pensamientos matemáticos, de tal manera que se movilicen conocimientos, formas de enseñar, establecimiento de relaciones con la cotidianidad, concepciones de las matemáticas, prácticas de aula y concepciones de los niños desde sus procesos de aprendizaje.

El desarrollo de cada situación, permite la interacción de varias voces a saber: el maestro –participante– con su experiencia, la lectura y discusión de los referentes teóricos del saber disciplinar y didáctico en torno a una temática específica y la voz del orientador del taller que posibilita, en unas relaciones de tipo horizontal, que el maestro, con su participación en el desarrollo de estas estrategias metodológicas, confronte sus prácticas pedagógicas y, a su vez, genere nuevas estrategias para el trabajo con sus estudiantes en el aula.

El siguiente gráfico ilustra la metodología del taller, análoga a la metodología en el proyecto Numerario, que es lo que se pretende compartir.



En primer lugar se indaga por los conceptos previos que tiene el maestro frente a una temática específica, tanto desde lo conceptual como desde lo metodológico. En segundo lugar, se realiza la lectura de un texto sobre la temática abordada, de manera individual o grupal, haciendo énfasis en los conceptos, relaciones y estrategias más relevantes. Luego, a partir del desarrollo de las situaciones se pone en diálogo este texto con lo planteado inicialmente por los maestros, para confrontar conceptos, relaciones y estrategias. Finalmente, se invita a los maestros asistentes al taller a proponer situaciones, que potencialmente le puedan servir para el diseño de problemas reales que estén acordes con los diferentes niveles de complejidad de los grados de la primaria.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Boavida, A.M. & Ponte, J.P. (2002) Investigaçao Colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Org), Reflectier e investigar sobre práctica profesional. Lisboa: APM.

Da Rocha Migueis & Da Graça Acevedo (2007) en Educaçao Matemática na Infancia. Abordajes y desafíos. Ediciones Gailivro. Rio de Janeiro. Brasil.

MEN, (2006), Estándares básicos de competencias en Matemáticas.

MEN, (1998), Lineamientos Curriculares de Matemáticas, Bogotá

Serie Didáctica de las matemáticas. Gobernación de Antioquia. Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia. Universidad de Antioquia. Facultad de Educación. "Diploma en desarrollo de competencias básicas en matemáticas en la Educación básica y media del Departamento de Antioquia". Módulo 2. Pensamiento variacional y razonamiento algebraico y Módulo 1. Pensamiento numérico y sistemas numéricos. Editorial Artes y letras Lda. Medellín, Colombia

Universidad de Antioquia, Fundación Corona, Negocios Corona. (2011) Documento guía: Numerario. Súmate a la vida. Promoción y desarrollo de habilidades de pensamiento matemático en niños (as) de preescolar, 1°, 2° y 3° grado de Educación Básica Primaria. Litoimpresos y Servicios Ltda. Medellín, Colombia.

Enseñanza de la suma y la resta desde la propuesta para el desarrollo natural del pensamiento matemático en la primera infancia

Carlos Alberto Díez Fonnegra[*]
Oscar Leonardo Pantano Mogollón[**]

RESUMEN

El taller Enseñanza de la suma y la resta desde la propuesta para el desarrollo natural del pensamiento matemático en la primera infancia pretende enseñar a los participantes los procesos y estadios asociados al pensamiento numérico implicados en la comprensión de la suma y la resta. Además, busca presentar el "Método para el Aprendizaje Natural de las Matemáticas", propuesta de innovación que replica el orden del proceso histórico de desarrollo del pensamiento del ser humano, permitiendo el establecimiento de proceso y estadios por los cuales los estudiantes atraviesan para construir los objetos matemáticos. Lo anterior posibilita que se fomente el aprendizaje significativo y estructurado, promoviendo la obtención de resultados favorables en los niños que han sido sujetos de este.

Palabras clave: Desarrollo del pensamiento matemático, educación infantil, resta, suma y metodología de enseñanza.

[*] Fundación EDP. Dirección electrónica: carlosd@fundacionedp.org
[**] Fundación EDP. Dirección electrónica: leonardop@fundacionedp.org

PRESENTACIÓN

Este taller estará orientado a la enseñanza y aprendizaje de los procesos y estadios asociados al desarrollo del pensamiento numérico en la primera infancia.

Este taller es el resultado de una propuesta curricular y didáctica para la enseñanza de las matemáticas en la primera infancia, denominada Método para el Aprendizaje Natural de las Matemáticas (MANM), que pretende mejorar las formas de desarrollo del pensamiento matemático, promoviendo una buena actitud de los niños hacia este proceso y fomentando la construcción de bases y aprendizajes sólidos para afrontar los aprendizajes posteriores.

El MANM replica el proceso evolutivo del desarrollo del pensamiento matemático en la historia. De este modo, se construyen las matemáticas en la primera infancia, reconstruyendo las condiciones evolutivas que el ser humano ha seguido en el perfeccionamiento de su pensamiento, logrando que los estudiantes recorran las etapas que dieron origen al desarrollo de este. Esta reproducción se logra, además, haciendo que los tiempos utilizados por los niños sean proporcionales a los tiempos que el ser humano utilizó para el desarrollo histórico de sus procesos de pensamiento, garantizando así un desarrollo sólido y significativo del pensamiento matemático de los estudiantes.

La propuesta ha sido construida de tal manera que cuenta con una estructura coherente que posibilita a los profesores reconocer una ruta o línea de trabajo para promover el aprendizaje de las matemáticas y un desarrollo natural del pensamiento; además, permite orientar su labor docente, guiándolos en el orden en que se deben enseñar los objetos matemáticos y proponiéndoles sugerencias didácticas para esta labor.

El método se basa en la división del pensamiento matemático en cuatro ejes; numérico, variacional, geométrico y métrico. Cada uno de estos ejes está dividido, a su vez, en procesos que están establecidos en estrecha coherencia con las condiciones evolutivas que el ser humano ha tenido en el desarrollo de su pensamiento matemático y la construcción de los objetos matemáticos a través de su historia[1]. Estos procesos, a su vez, están divididos

[1] Para una mayor descripción del MANM véase Camargo, S. P., Díez, C. A., & Pantano, O. L. (2012). El desarrollo del pensamiento matemático en la primera infancia; Método para el Aprendizaje Natural de las Matemáticas. Bogotá. Colombia. Fundación para el Desarrollo Educativo y Pedagógico.

en estadios, que son indicadores observables por los cuales van atravesando los estudiantes para pasar de un proceso a otro.

En el caso del eje de pensamiento numérico, que es el tema central de este taller, el aprendizaje de cada uno de los procesos y estadios se realizará a través de una serie de actividades que involucraran el uso de material concreto como: fichas de conteo, tablas (de conteo, agregación y diferencia) y hojas de papel, con el propósito de realizar la transición de lo concreto a lo abstracto. En estas actividades, los asistentes tendrán la oportunidad de reconocer y aprender los procesos y estadios, y, además, identificar las posibles actividades que se pueden desarrollar en el aula de clase de la primera infancia.

Este taller pretende, de igual forma, presentar la propuesta de innovación "Método Natural para el Aprendizaje de las Matemáticas" a los asistentes. Una propuesta pedagógica que ha sido implementada en varios colegios tanto privados como públicos de Colombia, en los que se han evidenciado resultados favorables en los aprendizajes de los niños, reflejando que se está desarrollando un trabajo de innovación, coherente y de calidad.

En el taller se persigue que los asistentes alcancen tres propósitos que les permitan entender el Método e integrarlo a su labor docente. El primero de ellos es comprender cada uno de los procesos que conforman el desarrollo del pensamiento numérico, para que reconozcan las implicaciones de enseñarlos en el orden establecido; el segundo propósito es aprender a pensar numéricamente, es decir, que entiendan, para cada proceso, los objetos matemáticos que están inmersos y sus implicaciones cognitivas. Y finalmente, que aprendan a enseñar a través de esta propuesta, es decir, que sean capaces de reconocer cómo estos procesos y estadios pueden ser implementados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

MARCO TEÓRICO

Como afirma Castro, Castro & Rico (1995), la educación matemática en la primera infancia tiene enorme influencia en el desarrollo del pensamiento matemático posterior, porque en esta etapa se construyen las bases y estructuras básicas para afrontar todo el aprendizaje. Por esta razón, no se pueden construir aprendizajes frágiles, memorísticos y abstractos. Al contrario, es indispensable en la educación de la primera infancia desarrollar en los niños procesos asociados al desarrollo del pensamiento matemático que evolucionen desde lo concreto hasta lo más abstracto.

Además, la educación matemática en la primera infancia debe aprovechar las estructuras intelectuales naturales que los niños adquieren antes del ingreso a la escuela, con el propósito de identificarlas y aprovecharlas como punto de partida para el aprendizaje de esta. Como afirma Baroody (1988), si no se tienen en cuenta las matemáticas informales, la forma de pensar y de aprender de los niños, se puede cometer el gran error de promover el aprendizaje de las matemáticas de manera mecánica, haciendo que los niños no piensen en lo que hacen sino que simplemente imiten una serie de prácticas compartidas sin mayor sentido, impidiendo que se lleve a cabo un aprendizaje significativo.

Por esta razón, los profesores deben tener en cuenta y comprender el proceso de aprendizaje de los niños, en el momento de construir métodos, establecer material y definir un currículo para la enseñanza de las matemáticas en la educación inicial. De la misma manera, es necesario tener en cuenta el desarrollo histórico de las matemáticas porque el proceso de construcción de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes tiene estrecha relación con el proceso que se desarrolló a través de la historia.

Por ejemplo, en los niños, como en las culturas primitivas, los procesos de construcción del sistema del sistema de numeración avanzan paulatinamente consolidando cada vez más las estructuras intelectuales de estos (Bassedas & Sellares, 1982). Baroody (1988), a su vez, afirma que la construcción y comprensión del sistema de numeración posicional en los niños es un proceso que implica una lenta evolución tal y como ocurrió en la historia.

El desarrollo matemático en los niños tiene estrecha relación con el desarrollo histórico de las matemáticas; así como en los primitivos, el pensamiento de los niños cada vez va haciéndose más preciso y abstracto a partir de ideas intuitivas, y que están guiadas por lo concreto. Además, existe una gran similitud entre las primeras nociones numéricas de los niños y las de los primitivos.

Los antepasados prehistóricos, con el propósito de satisfacer la necesidad de llevar la cuenta del tiempo y de sus pertenencias, acudieron a métodos rudimentarios como la correspondencia biunívoca, por ejemplo, para contabilizar la cantidad de pieles de animales con las que contaban, tallaban muescas en un palo o hueso, una muesca por cada piel añadida al montón. De este modo, para comprobar si estaban todas las pieles acudían al estableciendo de una correspondencia biunívoca asignando a cada piel una marca en el palo o hueso (Baroody, 1988).

Estas acciones realizadas por los antepasados hacen referencia al primer proceso del eje del pensamiento numérico denominado ***proceso de asignación.*** Este consiste en relacionar un objeto más concreto que se va contar con uno más abstracto que lo representa; es decir, se establece una correspondencia biunívoca entre los objetos concretos y los objetos más abstractos que serán representados con fichas de conteo.

Como afirman Dickson, Brown & Gibson (1991), la utilización de la correspondencia biunívoca en el conteo es una habilidad fundamental que hay que promover en los niños en la educación infantil. En este proceso, los niños aprenden a contar despacio, asignan únicamente una ficha a cada objeto a contar y movilizan cada ficha cerca al objeto contado, lo que permite diferenciar entre los elementos contados de los no contados.

No obstante, este principio de correspondencia biunívoca presentaba inconvenientes al momento de contar grandes cantidades de objetos; por esta razón, las sociedades y economías que se fueron haciendo cada vez más complejas, se vieron en la necesidad de emplear sistemas de representación y de cálculo que les permitieran manipular sin mayor inconveniente cantidades cada vez más grandes, surgiendo así la idea de agrupamiento.

Los pastores, para contabilizar la cantidad de ovejas que conformaban su rebaño, utilizaban sus dedos para establecer una correspondencia con cada una de sus ovejas; así, por cada oveja que pasaba junto a ellos, asignaban un dedo; al contar diez ovejas y asignar sus diez dedos correspondientes, representaban esta cantidad con un guijarro; de este modo, podían nuevamente utilizar sus dedos para continuar el conteo del rebaño. Así una y otra vez que asignaban diez representaban esta agrupación con un guijarro. La actividad de formar estos agrupamientos y de representar por medio de símbolos (guijarro) cada uno de estos para realizar cada vez conteos más extensos se denomina conteo por agrupación no posicional.

En el MANM, este desarrollo histórico se enmarca en el segundo proceso denominado ***agrupación posicional***. Este consiste en formar grupos del mismo tamaño, y a cada uno de estos asignar un símbolo con el propósito de abreviar el proceso de conteo de una cantidad de elementos. Esta agrupación no posicional se realiza en diferentes bases (agrupaciones de a dos: "binas"; agrupaciones de a tres: "ternas"; agrupaciones de a cinco: "quintas"; y agrupaciones de a diez: "decenas"), con el propósito de que los niños comprendan con mayor facilidad el proceso de agrupamiento en diferentes niveles, es decir, la obtención de binas de binas a partir de binas, la obtención de ternas de ternas a partir de ternas, la obtención de centenas a partir de decenas. La agrupación no posicional exige que se tengan en cuenta dos reglas fundamentales para realizar los diferentes agrupamientos:

- ✓ A cantidades con igual número de elementos se asignan símbolos iguales.
- ✓ Solo se puede tener una cantidad de elementos menor al número de la base, de lo contrario deben agruparse utilizando un nuevo símbolo.

Sin embargo, este sistema de realizar agrupamientos no era eficiente, ni permitía con facilidad desarrollar cálculos aritméticos. Lo anterior solo pudo solucionarse hasta la creación de un sistema de numeración posicional, en el cual el valor de una cifra depende de la posición en que se encuentre, es decir, de la ubicación que tiene con respecto a las demás cifras. Este sistema posicional elimina completamente la necesidad de definir un nuevo símbolo para representar las agrupaciones de diez elementos y sus múltiplos.

El proceso de ***agrupación posicional*** es el tercero del eje de pensamiento numérico. Este permite que los niños comprendan la estructura del sistema de numeración posicional, facilitando que entiendan los diferentes agrupamientos que se pueden realizar para obtener las unidades del orden inmediatamente superior junto con el valor relativo de cada una de las cifras. Con el propósito de que los niños adquieran mayor comprensión de este sistema, es indispensable enseñar otros sistemas numéricos en varias bases.

El mérito de la utilización de diferentes bases numéricas consiste en hacer comprender la relación que hay entre los objetos y la cifra de las unidades, entre los paquetes de primer orden y la primera cifra a la izquierda de la cifra de las unidades, entre los paquetes de segundo orden y la cifra siguiente hacia la izquierda (Vergnaud, 1991, p.141).

La utilización de diferentes bases diferentes a la base diez potencia una mayor comprensión del sistema posicional de numeración debido a que:

- ✓ Incide en el recuento mediante agrupamientos sucesivos en un número de elementos igual al número de elementos de la base.
- ✓ Fortalece el sentido del valor posicional de los dígitos.
- ✓ Potencia el significado de la cifra 0 para indicar la ausencia de unidades de un orden determinado (Gairín & Sancho. 2002, p. 75).

A partir de la agrupación y a través de la reversibilidad de este proceso, es decir, de la capacidad para realizar operaciones o acciones opuestas a la agrupación, se plantea la utilización de la desagrupación, habilidad que permite establecer una relación entre un determinado agrupamiento y las agrupaciones de orden inmediatamente anterior a este. En otras palabras, se trata de descomponer una agrupación de orden superior en agrupaciones de orden inmediatamente anterior; por ejemplo, descomponer una centena en diez decenas.

De este modo, la agrupación y la desagrupación dan origen, respectivamente, al cuarto y quinto proceso establecidos en MANM. El cuarto proceso se denomina ***agregación:*** consiste en convertir dos cantidades en una sola, a partir de la reunión de elementos ya contados. La agregación surge de la necesidad de no tener que contar una y otra vez los elementos de varias colecciones para determinar el total de estos que hay. La ***diferencia,*** el quinto proceso, busca encontrar una cantidad que representa lo que no hay en común entre dos cantidades. Entre la agregación y la diferencia existe un proceso de reversibilidad, dado que estos procesos se hacen con base en la agrupación y desagrupación, respectivamente.

Hasta estos procesos se usan cantidades representadas en forma de elementos concretos o manipulables, con el propósito de crear referente para lograr abstracciones de los objetos matemáticos. Teniendo en cuenta los planteamientos de Roa (2001) para aprender los algoritmos de las operaciones básicas, es indispensable partir de actividades que estén orientadas por la utilización de materiales concretos, que sean fácilmente manipulables y que permitan realizar los diferentes agrupamientos para la obtención de diferentes unidades de orden inmediatamente superior, puesto que esto permite vincular esta representación concreta a una más abstracta que tenga lugar después.

La comprensión adquirida en los procesos de agregación y diferencia da origen a la ***suma*** y a la ***resta,*** sexto y séptimo proceso del MANM, que son resultado de la necesidad de trabajar con los números, separándose de la utilización y manipulación de material concreto, tal como sucedió en la evolución del pensamiento matemático en el ser humano. A partir de este momento el aprendizaje se basa únicamente en elementos abstractos; en este se trabaja con números, que representan a las cantidades. La suma surge de la agregación, y la resta, de la diferencia; en ese sentido hay reversibilidad entre la suma y la resta.

Algunas veces el aprendizaje de las matemáticas y en especial de estos procesos matemáticos (la suma y la resta) suele hacerse de manera formal en la primera infancia, generando que los niños no puedan comprenderlo. Por esta razón, es indispensable la vinculación de estas operaciones con la agregación y la diferencia, que se hacen con material concreto, y en últimas con la agrupación y la desagrupación. Baroody (1988) plantea que una enseñanza abstracta, complicada y poco llamativa para los niños puede generar que ellos la olviden con facilidad, la memoricen, suelan ignorarla o malinterpretarla; por esta razón, los primeros conceptos y destrezas sujetas a estos surgen de actividades ligadas a la utilización de material concreto; a medida que se avanza en el proceso los niños van organizando su conocimiento de manera gradual, haciendo una transición de lo concreto a lo abstracto, permitiéndoles manejar símbolos cargados de significado y sentido.

La transición de lo concreto a lo abstracto, el tránsito de un material a otro o de una representación a otra es un principio didáctico fundamental para una mayor comprensión de los objetos matemáticos. Por esta razón, esta propuesta didáctica está estructurada de tal forma que el aprendizaje de cualquier objeto matemático parta de la manipulación de material concreto, luego siga a la utilización de representaciones gráficas y finalmente dé paso al manejo de los símbolos matemáticos, con el propósito de que estos últimos estén dotados de significado. Como afirma Duval (1999), la comprensión de un concepto se logra a través de la utilización y coordinación de dos o más sistemas de representación.

Esta forma de enseñanza del pensamiento numérico garantiza las bases que permitirán a los niños un correcto acercamiento a procesos más complejos como el pensamiento multiplicativo y la construcción del objeto matemático fracción; además, forma caminos de aprendizaje que parten desde la nocionalización y pasan por procesos paulatinos de abstracción, sentando también las bases de los procesos algebraicos.

METODOLOGÍA

El desarrollo del taller estará orientado por tres momentos esenciales: en el primero de ellos se explicarán las bases teóricas que sustentan y dan sentido al MANM, evidenciando aspectos como el desarrollo evolutivo del pensamiento matemático asociado a lo numérico a través de la historia y algunos elementos didácticos que justifican las acciones metodológicas realizadas en este. En el segundo momento se realizará una serie de actividades orientadas a la comprensión de los procesos asociados al pensamiento numérico y de las implicaciones que tienen en el desarrollo del pensamiento matemático en los niños de la primera infancia. Finalmente, en el tercer momento, se presentarán estrategias didácticas asociadas a los procesos con el propósito de promover la utilización de estas en el quehacer pedagógico de los asistentes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Baroody, A. (1988). *El pensamiento matemático de los niños: un marco evolutivo para maestros de preescolar ciclo inicial y educación especial.*

Bassedas, M., & Sellarés, R. (1982). La construcción individual del sistema de numeración convencional. Revista iberoamericana de educación, 43, 59-83. Recuperable en: http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=80004305

Castro, E., Castro, E., & Rico, L. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelación*. Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V. Colombia.

Dickson, L., Brown, M., & Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Editorial Labor.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle. Colombia.

Gairín, M., & Sancho, J. (2002). *Números y algoritmos.* España: Editorial Síntesis.

Roa, R. (2001). Algoritmos de cálculo. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de las matemáticas en la educación primaria* (pp. 231- 254). España: Editorial Síntesis.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matem*áticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las mate*máticas en la escuela primaria.* México: Editorial trillas.

Algunas ideas matemáticas y físicas de Arquímedes (el estudio de los cuerpos redondos y la fuerza de empuje)

Carlos Julio Echavarría Hincapié[*]
Catalina Bermúdez Galeano[**]

RESUMEN

Arquímedes es el matemático y científico de todos los tiempos, desde la Antigüedad hasta nuestros días; en él se personifican variedad de métodos para resolver situaciones matemáticas y científicas, además de ideas fundamentales que han acompañado la evolución de muchos conceptos de las matemáticas y las ciencias; entre ellas están las ideas sobre el cálculo integral, la geometría de los cuerpos redondos, la cuadratura de la parábola, la conceptualización sobre espejos y poleas, la palanca y las ideas sobre flotación de los cuerpos, a través de la experimentación.

Es por ello que, siguiendo algunas de sus rutas, se desarrollará el taller "Algunas ideas matemáticas y físicas de Arquímedes", mostrando a través de algunas de estas experiencias desarrollos metodológicos, e integración de ideas de las matemáticas con otras áreas del conocimiento científico.

Además, estos métodos permiten desarrollar ideas, que pueden ser aplicadas en procesos de aprendizaje de algunos conceptos de las matemáticas, que son enseñados en la Educación Básica y Media de nuestros jóvenes.

Asimismo, en este taller mostraremos algunos senderos de aprendizaje de las matemáticas, integrados a las ciencias naturales, siguiendo algunos métodos arquimedianos, en ambientes de la metodología de Aula Taller, donde el aprender haciendo, el uso de material tangible, el apoyo en guías de trabajo, el construir las ideas y los conceptos son, es la clave el conocimiento. Esto lo compartiremos con los maestros a través del estudio de los cuerpos redondos y las ideas de flotación de los cuerpos.

Cabe aclarar, además que, ni la metodología ni el tema a trabajar han sido explorados en nuestro país. Es por ello que queremos compartirlo, ya que es una experiencia que hemos vivido en otros espacios y que ha tenido un buen resultado.

[*] Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: carlojeh05@gmail.com.
[**] Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: cabermudezga@gmail.com.

PRESENTACIÓN

Arquímedes es un personaje científico de permanente actualidad, cuando pensamos las ideas básicas de las matemáticas y las ciencias que se deben llevar a la escuela; él será un buen referente tanto desde el saber disciplinar como desde los métodos de enseñanza; en él encontramos muchas ideas básicas de las ciencias, algunos métodos y muchos instrumentos, que de manera genial nos conducen a la construcción de conceptos e ideas matemáticos y científicos que nosotros creemos deben ser llevados a la escuela en todos los niveles de nuestra educación.

El taller que hemos preparado para presentar esta vez, y participar de este evento nacional, consiste en mostrar algunas ideas arquimedianas como lo son las relaciones de volumen y área superficial entre los cuerpos redondos, y la fuerza de empuje, donde se conjugan algunos elementos básicos que consideramos serían de mucha utilidad para compartir con los docentes de nuestro país.

Entre estos elementos básicos están: las relaciones que se pueden establecer entre los cuerpos geométricos redondos, a través de su construcción y la comparación entre sus áreas y volúmenes. Y algunas experiencias con fluidos, donde determinaremos el volumen a cuerpos irregulares; estudiaremos, asimismo los conceptos de presión y fuerza de empuje, y algunas leyes para los gases y el agua. Todo esto con miras a ilustrar caminos hacia la modelación matemática en la escuela, desde la experimentación.

Este trabajo lo desarrollaremos bajo la metodología de taller, una metodología propia de nuestra región, ya que ha sido construida con los maestros de Antioquia desde hace aproximadamente 20 años, donde el aprender haciendo, el uso de material tangible, las guías de trabajo, el permitir los aprendizajes de los participantes, son algunos de los principios que pondríamos en el escenario.

MARCO TEÓRICO

Considerando que los planes de estudio de las matemáticas y ciencias básicas en nuestro país tienen enfoques interdisciplinarios que en muchas ocasiones no son cumplidos, por la inmensidad de detalles en los que se centra, nace esta propuesta de trabajar a través de ideas generales y básicas que habrían de estar en la escuela durante su ciclo básico y medio. Como propuso Llinás, R. (1998):

Definimos el programa educacional "cosmología" como un marco intelectual para la comprensión general de los llamados universales.

El programa se basa en la hipótesis de que tales universales, lo observable, lo medible e interactuable, representa una estructura real, continúa y única del mundo que nos rodea y que utilizamos como base para nuestra actividad mental. Lo anterior esta está basado en una de las principales tesis del pensamiento occidental: los eventos complejos se forman por la interacción de eventos más simples que, de tal modo, generan una realidad aparentemente continua en el tiempo.

> … este enfoque esta engranado en dos aspectos importantes: a) dar conocimiento en una perspectiva histórica tal, que la reducción al origen más práctico sea siempre posible (la perspectiva) y b) Permitir al pupilo explorar el significado de nuevo conocimiento en el contexto de una posible visión del mundo (p. 3).

El conocimiento de los principios básicos en ciencias a través de los métodos experimentales, que plantea Arquímedes, lleva a pensar que la interdisciplinariedad se da no solo dentro de las matemáticas mismas, sino también entre las matemáticas y otras disciplinas o ciencias como lo son la física, la astronomía, la química, la psicología, las artes, la medicina, la biología, la meteorología, entre otras, es decir el conocimiento como un todo.

LAS CIENCIAS Y ARQUÍMEDES

La estampa que hoy caracteriza a Arquímedes es su salto de la bañera para correr desnudo por las calles gritando ¡Eureka!, ¡Eureka! (¡lo encontré!, ¡lo encontré!) porque acababa de descubrir cómo distinguir una corona de oro de otra de falso metal. Arquímedes con este sencillo hecho había encontrado la solución al problema que le había planteado el rey Hierón: reconocer si la corona que había mandado a fabricar con un orfebre era de oro puro, o si tenía alguna aleación con otro metal; con ello Arquímedes logró establecer las relaciones entre el volumen desalojado, el volumen de un cuerpo, el empuje, la densidad, y así finalmente determinar que el rey había sido engañado y dar a conocer el principio que hace posible que muchos objetos floten.

Sin embargo, no fue solo este descubrimiento y principio lo que hizo a Arquímedes un genio; además de este, realizó trabajos matemáticos de gran importancia que podrían dividirse en tres grupos: el primero, los relacionados con las áreas y sólidos circunscritos por curvas y superficies; estos incluyen sobre la esfera y el cilindro, el método y la medida del círculo (este último afirma que el área de un circulo es igual al área de un triángulo rectángulo con un cateto igual al radio del círculo, y el otro igual a su circunferencia). Obsérvese la interesante manera en que el enunciado de Arquímedes iguala el área encerrada por una curva, el círculo, con el área englobada por las líneas rectas, los catetos de un triángulo rectángulo. Hoy en día expresamos el área de un círculo como mientras la relación de Arquímedes, utilizando la notación moderna se expresara como:).

El segundo: los que analizan geométricamente problemas sobre hidrostática y estática. Y el tercero: obras misceláneas, especialmente las que enfatizan el hecho de contar, como, por ejemplo, el arenario.

Para demostrar teoremas sobre el área o el volumen de una figura limitada por curvas o superficie, Arquímedes empleaba el llamado método de exhaución, al que también se hace referencia como método indirecto de prueba que evita el empleo de límites.

El método nos ofrece una muestra de cómo Arquímedes descubrió nuevos teoremas; en el prefacio del libro "Sobre la esfera y el cilindro" Arquímedes escribió:

Como después se me ocurrieron teoremas dignos de mención, me he estado ocupando de sus demostraciones. Y son estos: primero, que la superficie de toda esfera es el cuádruple del circulo máximo de los que hay en ella [. . .] Estas propiedades de las figuras mencionadas existían desde antes en la naturaleza, pero eran desconocidas por quienes se dedicaron a la geometría antes que nosotros [...] por ello yo no dudaría en comparar estas proposiciones con las estudiadas por otros geómetras entre ellas, con las de Eudoxo relativas a los cuerpos sólidos, que parecen tan sobresalientes: la de que toda pirámide es un tercio del prisma que tiene la misma base que la pirámide e igual altura, y que todo cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base que el cono e igual altura. . .

Vemos aquí cómo retomando a pensadores como Arquímedes y Eudoxo, podemos trabajar relaciones tan básicas y poco entendidas en la escuela, como lo son las relaciones entre áreas y volúmenes de los sólidos redondos.

En general con Arquímedes se desarrollan unas matemáticas dinámicas, aplicables al fluido incesante de la naturaleza, moldeando pensamientos en formas geométricas tan perfectas que se puedan desarrollar en experiencias, como en el estudio sistemático de los volúmenes y áreas de los cuerpos redondos como el cilindro, el cono y la esfera; estos nos permiten visualizar relaciones, razones de áreas y volúmenes, partiendo de construcciones, siguiendo con mediciones y poniendo el pensamiento proporcional hasta obtener relaciones matemáticas generales.

La balanza de torque, que de manera magistral trabaja Arquímedes, nos relaciona las ideas de fuerza, distancia, torque, y nos muestra el camino para comprender experimentalmente la variación proporcional inversa, además de darle todo el sentido matemático que Arquímedes siempre buscó en todos sus experimentos.

METODOLOGÍA DEL TALLER

Este se hará de manera que los asistentes participen activamente de este; se hará una introducción al tema y una reflexión sobre la importancia de llevar este tema en la escuela; a continuación se presentará una serie de experiencias en las que los participantes tendrán la oportunidad de ver algunas relaciones de volumen y área superficial entre los cuerpos redondos; luego se realizarán algunas experiencias con fluidos y se mostrará experimentalmente lo que es la fuerza de empuje y cómo puede calcularse. Todo esto en la interacción de material tangible y bajo la metodología de Aula Taller.

La metodología de Aula Taller consiste en enseñar las matemáticas de una forma novedosa, centrada en la realización de actividades en ambiente de taller, donde el conocimiento se adquiere por descubrimiento y asimilación propios, despertando curiosidad en torno al tema o problema planteado, es decir, de aprender-haciendo. Esta metodología permite el trabajo interdisciplinario y en grupo.

La metodología se caracterizada por:

- El "aprender haciendo", clave del aprendizaje.
- La utilización de material didáctico para la exploración de situaciones concretas, que conduzca al desarrollo de un pensamiento matemático y científico.
- La construcción del conocimiento en una dinámica colectiva y participativa.
- La generación de ambientes propicios para la asimilación de conceptos básicos en matemáticas y ciencias, para su discusión y aprendizaje.
- La expresión libre de las ideas, privilegiando las actividades de aprendizaje significativo.

- El uso y diseño de guías de trabajo que se caracterizan por la relación de diferentes pensamientos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Llinás Riascos, R. (1998). Introducción para los profesores. Cosmología I. El tesoro del Paye. Colombia: Fundación Cosmología

Boyer, C. (1999). Historia de la matemática. Madrid: Alianza editorial

Vera, F. (1970). Griegos científicos. Madrid: Aguilar S.A de ediciones

Netz, R. & Nole, W. (2007). El código de Arquímedes. Bogotá. Temas de hoy S.A

Pickover, C. (2009). De Arquímedes a Hawkins. Madrid: Editorial Critica

Máximo, A. & Alvarenga, B. (2007). Física general. Cuarta edición. Oxford

XIII Certamen Casa de las Ciencias de Divulgación Científica. La Coruña, CIENCIANET. (2000). El Ludión o diablillo de descartes. Recuperado el 5 de abril de 2012 de http://ciencianet.com/ludion.html

Wikipedia la enciclopedia libre. Fluido. Recuperado el 25 de marzo de 2012 en http://es.wikipedia.org/wiki/Fluido

Wikipedia la enciclopedia libre. Ley de Boyle–mariotte. Recuperado el 10 de mayo de 2012 de http://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_Boyle-Mariotte Guías inéditas de trabajo. Grupo Ábaco.

Un camino hacia la actividad demostrativa

Jimmy Fonseca Velásquez*
Luis Fernando Lara Quintero**
Carmen Samper de Caicedo***

RESUMEN

Las tareas que se proponen, en este taller, salvo algunas modificaciones menores, son base de la investigación que reportaremos en nuestro trabajo de grado. Se pretende mostrar, de una manera activa y participativa, el potencial de la actividad demostrativa cuando ésta se da en el aula. Por un lado, es una herramienta para describir el comportamiento de los estudiantes en torno a la demostración. Por otro, es una herramienta didáctica para el aprendizaje de la geometría euclidiana, que, a la vez, suscita la práctica de la justificación, paso necesario en el acercamiento a la demostración.

Palabras clave: geometría, razonamiento deductivo, procesos de justificación, materiales manipulativos, Cabri.

* Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: jimmat23@yahoo.com
** Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: luisfernandolara26@yahoo.es
*** Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: csamper@pedagogica.edu.co

PRESENTACIÓN

El taller que presentamos a continuación se basa en las tareas de aula que se diseñaron en el marco de realización de nuestro trabajo de grado en Maestría en Docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, y que hacen parte de un *experimento de enseñanza*. El objetivo de éste es indagar y analizar el comportamiento racional y social de los estudiantes cuando participan en la *actividad demostrativa*. Dicho trabajo está en sintonía con los intereses del grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría*, Æ•G, de la Universidad. Con este taller pretendemos hacer un aporte a la enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, específicamente mostrando un tipo de tarea que propicia la actividad demostrativa de los estudiantes. Con tareas como las que presentamos, pretendemos responder al reconocimiento que le da el Ministerio de Educación Nacional (1998) a la geometría como una herramienta de modelación importante para interpretar, entender y apreciar el mundo que es netamente geométrico, así como de una disciplina que se caracteriza por favorecer un ambiente para el desarrollo del pensamiento espacial y procesos del pensamiento matemático como la argumentación. Desde este punto de vista, debe tener un papel protagónico, en la geometría escolar, el reconocimiento de propiedades, relaciones e invariantes con base en la observación de regularidades que lleven a la formulación de conjeturas y generalizaciones en un contexto de resolución de problemas, y la justificación de éstas.

La enseñanza de la geometría en la Educación Secundaria en Colombia, de acuerdo con Camargo (2010), aún está centrada en reconocer visualmente algunas figuras prototípicas y clasificarlas, memorizar ciertas fórmulas para encontrar áreas y perímetros, y memorizar demostraciones de algunos pocos teoremas. Este tipo de enseñanza no favorece un ambiente donde los estudiantes alcancen las metas propuestas por el MEN (1998) en torno a la resolución y planteamiento de problemas en el proceso de construcción del conocimiento matemático, donde se deben favorecer acciones como: explorar diferentes situaciones matemáticas, desarrollar procesos del pensamiento matemático y comunicarse matemáticamente. Para lograr estas metas, los estudiantes deben discutir sus ideas, negociar, especular sobre los posibles ejemplos y contraejemplos que ayuden a confirmarlas o desaprobarlas.

Al considerar este panorama y reconocer, por otro lado, el impacto de las nuevas tecnologías en la educación matemática, Gutiérrez (2007) señala: "si se posibilita que los estudiantes utilicen de manera habitual un programa de geometría dinámica, éstos pueden adquirir con más profundidad y rapidez los conceptos geométricos estudiados y progresar en sus habilidades de razonamiento deductivo y de demostración" (p. 7). Es decir, este tipo de herramientas "… permiten vincular la exploración con la demostración, en el ámbito de la geometría euclidiana" (Camargo, Samper & Perry, 2006, p. 372). En particular, Cabri, al igual que la mayoría de programas de geometría dinámica, ofrece al estudiante la posibilidad de modificar la forma de las figuras construidas manteniendo sus propiedades geométricas para así poder descubrir las propiedades invariantes y las dependencias generadas, elemento necesario para poder formular conjeturas y querer determinar por qué son verdaderas o por qué son falsas. Cabri ofrece a los estudiantes posibilidades de expresión al proporcionarles herramientas que les permiten comunicarse e involucrarse en la práctica de la validación.

MARCO TEÓRICO

El constructo teórico desde el cual diseñamos las tareas es la *actividad demostrativa* dicho constructo surge en el marco del proyecto de investigación del grupo Æ•G *Desarrollo del razonamiento deductivo a través de la geometría euclidiana* (Camargo et al., 2006), en el que se propone un modelo didáctico para el aprendizaje de la geometría euclidiana, con énfasis en el desarrollo del pensamiento deductivo, como aporte para la enseñanza y aprendizaje significativo de la geometría en la Educación Básica Secundaria. Camargo et al. (2006) afirman que en los continuos debates que se han presentado en torno a la pertinencia de la demostración en la educación matemática escolar se reconoce que desde la escuela se debe acercar a los estudiantes a actividades propias de la comunidad matemática. Las investigadoras están convencidas que la demostración debe ocupar un lugar prominente en el currículo de matemáticas. Sin embargo, coinciden con las críticas sobre la poca efectividad que se ha tenido en su enseñanza. Por esto, el grupo Æ•G ha dirigido sus esfuerzos a buscar alternativas para que la demostración tenga un papel significativo en la enseñanza, se use para promover la comprensión matemática y ayude a los estudiantes a entender los diferentes roles de la demostración en las matemáticas.

En el ámbito educativo, la *actividad demostrativa* comprende dos procesos que no son independientes (Samper, Perry, Camargo & Molina, 2012). En el primer proceso, o de conjeturación, se establecen conjeturas que luego se validan, debido a que las evidencias que provee la exploración de la situación generan un alto grado de seguridad, ya sea dentro de un sistema teórico o con explicaciones empíricas, según el nivel escolar correspondiente. Las acciones que hacen parte de este proceso son: *detectar y verificar propiedades, for-*

mular y *corroborar conjeturas*. En el segundo proceso se produce un discurso argumentativo de tipo deductivo con el cual se valida la conjetura formulada. Las acciones que conforman este proceso son: *seleccionar elementos teóricos o empíricos, construir argumentos y formular la justificación.* Al considerar la actividad demostrativa de esta manera, se promueve la comprensión del contenido matemático presente tanto en los enunciados de los teoremas como en sus justificaciones (Perry, Samper, Camargo, Echeverry & Molina, 2007). De acuerdo con Perry et al. (2007), un entorno favorable para aprender a demostrar se caracteriza por tres elementos. Primero, *las tareas matemáticas* dejan de ser aquellas en las que se da un enunciado que el estudiante demuestra, y pasan a ser propiciadoras de experiencias de carácter empírico que llevan a la comprensión de la situación, y a la formulación de conjeturas. Además, deben exigir que dicha conjetura luego se valide. Segundo, *la interacción social en el aula* entre profesor y estudiantes, y entre estudiantes que permite la comunicación y análisis crítico de ideas, y la argumentación como manifestación del proceso de razonamiento. El profesor se convierte en un guía que, como experto de la comunidad de la clase y no como la autoridad que tiene el saber, dirige el rumbo del proceso hacia el uso de términos, símbolos y formas de expresión propias de la práctica de la demostración en matemáticas; establece y utiliza las normas que rigen el funcionamiento de la justificación. Tercero*, el uso de la geometría dinámica* que incrementa la posibilidad de aprender a demostrar, si se vinculan tareas de construcción geométrica con las prácticas de justificar.

METODOLOGÍA DEL TALLER

El taller se llevará a cabo en dos sesiones, en cada una de las cuales los asistentes trabajarán de manera individual o por parejas. Las soluciones de las tareas se reportarán por escrito y luego se socializarán. En el primer día se desarrollarán dos tareas en las que es indispensable el uso de Cabri. En el segundo día, se describirán las tareas que ofrecieron los elementos para conformar el sistema teórico local que permite la justificación de la conjetura formulada en la última tarea de la sesión anterior; para ello se usará un esquema a tres columnas *Qué sé – Qué uso – Qué concluyo,* denominado por Samper, Molina & Echeverry (2011) como esquema-deducción.

Primera sesión

Tarea 1: DiPunRe

Situación: Don Gustavo es un campesino que desea cultivar arroz en su finca. Para ello, tiene que inundar el potrero en que sembrará las matas de arroz, sacando agua de una canal. Hay una llave de agua en el punto *P* lejos de la canal. Por tanto, debe construir una tubería desde el punto *P* a un punto de la canal para llenarla de agua. Si Don Gustavo quiere que la construcción sea lo más barata posible, entonces ¿cómo localiza un punto *Q* en la canal para que pueda cumplir con su intención?

a. Representen la situación en esta hoja.

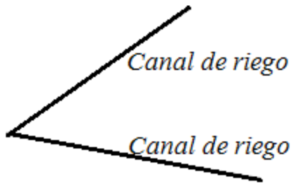
b. Representen la situación usando Cabri y encuentren el punto *Q*.

c. Completen la tabla con la información solicitada.

d. ¿Cómo encontraron el punto *Q*?

Construcción	¿Qué hacer?	¿Cómo hacerlo?
Exploración		
Conjeturación	¿Qué pueden concluir? Escriban su conclusión en la forma de condicional: Si (lo que construimos) entonces (lo que descubrimos).	

Tarea 2: TeoPELAn



Situación: Uno de los terrenos en la finca de don Gustavo tiene forma de cuña, bordeado por dos canales. Él quiere sembrar matas de arroz de tal forma que la distancia de cada mata a cada canal sea la misma.

a. Represente la situación usando Cabri.

b. Complete la tabla con la información solicitada.

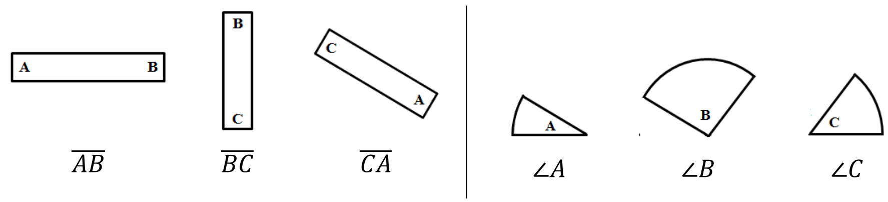
Construcción y exploración	¿Qué hacer?	¿Cómo hacerlo?
	Con base en la anterior construcción, respondan a. Representen en la calculadora las matas con puntos donde don Gustavo puede sembrarlas. b. ¿Cuántas de estas puede sembrar? c. ¿Cómo pueden describir el sitio en donde don Gustavo debe colocar las matas?	
Conjeturación	En términos de geometría, ¿qué pueden concluir? Escriban su conclusión en la forma de condicional: Si (lo que construimos) entonces (lo que descubrimos).	

Segunda sesión

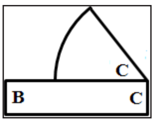
Tarea 1: En Busca del Triángulo Perdido[1]

El propósito de esta tarea es determinar cuál es el triángulo perdido en cada grupo. Para ello, cada grupo recibirá el material necesario para cada uno de los casos mencionados en la tabla que deberán diligenciar. El material consiste en unas regletas con las que se dibujarán segmentos y unos moldes con los que se dibujarán ángulos.

Regletas | Moldes de ángulos

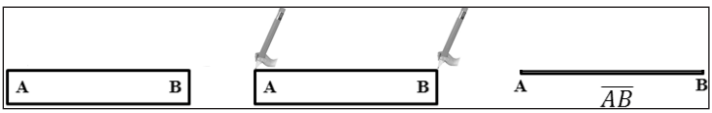


Usando las piezas indicadas, el grupo tratará de dibujar la mayor cantidad de triángulos diferentes, obedeciendo las siguientes reglas:



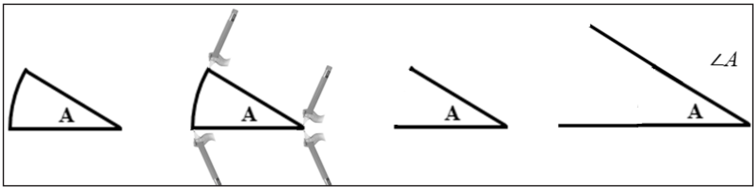
- Las letras indicadas en cada pieza deben coincidir. Por ejemplo, si se usa la regleta **BC** y el molde **C**, el extremo del segmento y el vértice del molde ángulo deben coincidir en **C**.

- Los segmentos deben tener la misma longitud de la regleta, y nombrarse como esta.



- Para dibujar un ángulo se deben trazar segmentos contra los lados rectos del molde. Estos segmentos se pueden extender o acortar cuanto sea necesario para que el dibujo dé lugar a un triángulo, a menos que sobre una de los segmentos se deba colocar una de las regletas, como se menciona en la primera regla.

[1] Esta tarea es una adaptación de las actividades propuestas en el libro Elementos de Geometría de Samper, Molina y Echeverry, 2011.



Diligenciamiento de la Tabla							
Caso	*Moldes*	*Regletas*	*¿Cuántos triángulos diferentes obtuvieron?*	*Caso*	*Moldes*	*Regletas*	*¿Cuántos triángulos diferentes obtuvieron?*
Caso 1 Dos ángulos				Caso 6 Dos lados y el ángulo no incluido			
Caso 2 Un lado y el ángulo con vértice en el lado				Caso 7 Dos lados y el ángulo incluido			
Caso 3 Un lado y el ángulo sin vértice en el lado				Caso 8 Dos ángulos y el lado no incluido			
Caso 4 Dos lados				Caso 9 Dos ángulos y el lado incluido			
Caso 5 Tres ángulos				Caso 10 Tres lados			

Tarea 2: ¿Qué tan Buenos Detectives fueron en la Búsqueda del Triángulo Perdido?

El propósito de esta tarea es comparar los dos triángulos (triángulo perdido que se entregará a cada grupo y triángulo obtenido), colocando la representación del uno encima de la del otro, para establecer una correspondencia entre los vértices de ambos triángulos y ver si coinciden en tamaño y forma, es decir, si los ángulos y lados de ambos triángulos tienen las mismas medidas.

Caso		*¿Se obtuvo el triángulo oculto?*	*Caso*		*¿Se obtuvo el triángulo oculto?*
Caso 1 Dos ángulos			Caso 6 Dos lados y el ángulo no incluido		
Caso 2 Un lado y el ángulo con vértice en el lado			Caso 7 Dos lados y el ángulo incluido		
Caso 3 Un lado y el ángulo sin vértice en el lado			Caso 8 Dos ángulos y el lado no incluido		
Caso 4 Dos lados			Caso 9 Dos ángulos y el lado incluido		
Caso 5 Tres ángulos			Caso 10 Tres lados		

Tarea 3: Hecho Geométrico BdA

El propósito de esta tarea es formular el hecho geométrico sobre la bisectriz de un ángulo a través de la exploración hecha en Cabri.

	¿Qué hacer?	¿Cómo hacerlo?
Construcción	Crear un archivo en Cabri llamado bda	
	Construir un ABC	
	Construir la bisectriz del ángulo ABC	
	Medir los ángulos que se determinan.	
Exploración	Con base en la anterior construcción hecha en Cabri, ¿qué observan de los ángulos?	
	Arrastrar	
Conjeturación	¿Qué pueden concluir? Escriban su conclusión en la forma de condicional: Si (lo que construimos) entonces (lo que descubrimos).	

Tarea 4: Justificación de TeoPELAn

El propósito de esta tarea es justificar la conjetura TeoPELAn, formulada en la última tarea de la primera sesión, haciendo uso del sistema teórico local y completando el esquema-deducción.

Conjetura: *Si* ________ *entonces* ______________________________ .

Qué sé	*Qué uso*	*Qué concluyo*

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria*. Universitat de Valencia, Valencia.

Camargo, L., Samper, C., & Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Sociedad Colombiana de Matemáticas XV Congreso Nacional de Matemáticas* (Volumen especial), 371-383.

Gutiérrez, A. (2007). *Geometría, demostración y ordenadores*. Paper presented at the 13ª JAEM, Granada.

MEN. (2003). *Estándares básicos en competencias matemáticas*. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas*. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Echeverry, A. & Molina, O. (2007). *Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para formación inicial de profesores*. Ponencia presentada en SIEM XVII, 17 a 21 de noviembre de 2007. Universidad Autónoma del Estado de México, Toluca, Estado de México.

Samper, C., Molina, O. & Echeverry, A. (2011). *Elementos de Geometría*. Bogotá: Fondo editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L. & Molina, O. (en prensa). Capítulo 1: Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En *Geometría Plana: Un espacio de aprendizaje*. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

La enseñanza inicial de la demostración: un manual para docentes

Jorge Enrique Galeano Cano[*]
Diana Marcela Lourido Guerrero[**]
Carlos Melán Jaramillo[***]

RESUMEN

Este trabajo pretende identificar, en la investigación desarrollada por Ponce de León (2007), elementos que permitan sentar las bases para crear un manual dirigido a docentes, que comunique las reflexiones y resultados de dicha investigación y al mismo tiempo brinde elementos curriculares y didácticos en torno a la enseñanza de la demostración. Así, el marco teórico se inscribe principalmente en los trabajos de Duval y su grupo (1993, 2004 a, 2004 b). Por otro lado, es establecen las condiciones de construcción del manual, en términos de consideraciones generales sobre un autor denominado como experto.

Palabras clave: perspectiva semiótica-cognitiva, demostración, razonamiento deductivo, recurso pedagógico, figuras geométricas.

[*] Universidad del Valle. Dirección electrónica: jogalean69@hotmail.com
[**] Universidad del Valle. Dirección electrónica: dianalourido@yahoo.com
[***] Universidad del Valle. Dirección electrónica: cmj617@hotmail.com

PRESENTACIÓN

Este trabajo plantea, como primera apuesta para la enseñanza de la demostración, introducir los procesos demostrativos en geometría, pues esta favorece el trabajo con distintos registros de representación semiótica, a saber: registro figural, la lengua natural y el lenguaje simbólico. La geometría se encuentra así dotada de una particularidad que permite el desarrollo de actividades de conversión, es decir, el paso de un registro a otro. En otras palabras, explotar las potencialidades de la geometría, descubriendo el rol que juegan las figuras y el discurso en lengua natural, se constituyen en un elemento necesario en aras de acceder a la demostración. De otra parte se encuentra el análisis sobre las características propias de la demostración, esto es, identificar la relación entre demostración y razonamiento deductivo; la comprensión de este último, es una exigencia cognitiva que implica específicamente saber cómo opera, qué propósito tiene, en qué fundamenta su validez y qué tipo de razonamientos produce .

Con respecto al rol desempeñado por las figuras en la comprensión del razonamiento deductivo, una vez que se entienda la potencia de hacer énfasis en la conversión de un registro a otro, se tiene que del tipo de aprehensión que se haga sobre las figuras se desprende un tipo particular de geometría, bien sea de acción o la que se conoce como geometría discursiva, que según esta perspectiva es la deseable, pues en ella tiene lugar la demostración. A su vez, llegar a esta geometría discursiva involucra un cambio en las reglas de juego, en el cual la validez de los hechos parta de la deducción y no de lo observable; tal cambio implica el tránsito entre las diferentes formas de aprehender las figuras. En síntesis, el papel que juegan las figuras permite dilucidar la idea de que la validación que se espera en matemáticas debe ser discursiva y no experimental.

Ahora bien, al retomar las consideraciones teóricas explicitadas por Ponce de León (2007), se hace necesario precisar qué del análisis sobre las exigencias cognitivas implicadas en la demostración es susceptible de presentar y ampliar en un manual para docentes, además de cómo hacer que estas reflexiones sienten las bases para constituir una propuesta curricular y didáctica.

MARCO TEÓRICO

En cuanto a la demostración, si se establece que la demostración requiere usar la lengua natural, además de vincular un tratamiento figural y, a su vez, movilizar un tipo de razonamiento específico, se hace necesario determinar cuáles son las exigencias cognitivas subyacentes a cada una de estas operaciones.

Ahora bien, cuando se tiene en cuenta la naturaleza de las matemáticas se desprende un análisis que da cuenta del razonamiento por medio de las proposiciones que lo componen, haciendo énfasis en que el tipo de razonamiento subyacente a la demostración es la deducción. De esta manera, se establece que los valores que intervienen en la comprensión del sentido de las proposiciones presentes en el razonamiento deductivo son el valor lógico y el valor epistémico. El valor lógico alude al hecho de que la proposición sea verdadera, falsa o indeterminada; este valor resulta de procedimientos específicos de verificación o de prueba y no depende solo de la comprensión de su contenido. En cuanto al valor epistémico, se reconocen dos tipos: valor epistémico semántico, el cual tiene ver con la comprensión de las proposiciones basándose únicamente en su contenido y el valor epistémico teórico, el cual responde a la organización del marco teórico en el cual una proposición es enunciada (Duval, 2004b). Considerar el razonamiento como un recorrido discursivo implica el hecho de que las proposiciones enunciadas en él no pueden ser separadas de su contexto de enunciación, pues es en virtud de este contexto que se tipifican los valores epistémicos, más aún, el mismo determina el valor lógico de las proposiciones.

Tomando como referencia los distintos análisis sobre el funcionamiento del razonamiento deductivo, Duval y Egret (1993) realizaron una propuesta para la enseñanza inicial de la demostración. Dicha propuesta está compuesta por tres etapas:

Primera etapa. Esta vincula un uso especializado de la lengua natural, además de un tratamiento pertinente de las figuras a partir de tres momentos: construcción y exploración de figuras, formulación de conjeturas y la distinción del antecedente y el consecuente del tercer enunciado.

En el primer momento se propone que al establecer la posibilidad intrínseca de convertir todas las proposiciones que intervienen en una demostración en el registro de sus representaciones figurales, se hace evidente el soporte intuitivo que proporcionan las figuras, pues aportan más de lo que dicen los enunciados, al permitir explorar, anticipar y formular conjeturas. De ahí que, se inicie por describir el soporte intuitivo de una figura y cuál puede ser su aporte heurístico en la resolución a un problema de geométrico, distinguiendo para tal fin, el tipo de aprehensión sobre la figura, a saber, perceptiva, operatoria y discursiva, definidas por Duval (2004). En este sentido, con respecto a las figuras se tiene que a cada tipo de aprehensión figural le corresponde un modo particular de hacer geometría y, por tanto, de acercarse a la demostración, de tal suerte que deba privilegiarse la aprehensión discursiva de entre todas, pues es, justo ahí, donde la demostración tiene lugar. De otra parte, la aprehensión discursiva, da cuenta de la relación indisoluble entre demostración en geometría y las figuras.

En el segundo momento, formulación de conjeturas, se reconoce que la conjetura aparece como un estatus teórico en el nivel local (paso de razonamiento) y toma un lugar preponderante ya que el reconocimiento de estas marca el inicio de la distinción entre el contenido y el estatus de una proposición, debido a que dicho reconocimiento implica –de parte del estudiante– entender que no basta con lo observado en un figura para aceptar o no la formulación de una propiedad o el establecimiento de un resultado. Entonces, la posibilidad de formular conjeturas, de reconocer su lugar en un recorrido discursivo y en la solución de un problema es un aspecto central en el aprendizaje del funcionamiento de los razonamientos deductivos. Se necesita, por lo tanto, de un acercamiento a las conjeturas, a su formulación por parte de los estudiantes en el marco de un trabajo de exploración y búsqueda consciente; en este sentido Larios ha propuesto una definición de estas:

> [...] una situación más "experimental", donde el individuo, puesto en una situación en particular, observa los hechos, los analiza, compara, encuentra un patrón y hace una afirmación, para posteriormente encontrar argumentos que la sustenten. Tales argumentos están relacionados íntimamente con las experiencias previas al momento de hacer la afirmación, además de que esta, hasta antes de proporcionar argumentos deductivos (es decir una demostración), es una conjetura [...]. Es importante recalcar que no se puede probar conscientemente algo si antes no fue conjeturado. (Larios, 2001, p. 50).

Este trabajo de búsqueda y formulación de la conjetura ha de distinguirse, como se señala más adelante, con el trabajo de búsqueda de los argumentos que la sustente; son dos procesos distintos aunque necesariamente relacionados.

El tercer momento de esta etapa tiene que ver con el análisis lógico, en términos de la naturaleza bipartita de los enunciados en matemáticas, particularmente de la estructura si-entonces del tercer enunciado. Esto es, reconocer que tanto el antecedente como el consecuente son proposiciones, además que el antecedente corresponde a la(s) premisa(s), mientras que el consecuente corresponde a la conclusión. Se comprende así que el tercer enunciado es otra proposición cuya operatividad está ligada a la articulación entre el antecedente y el consecuente.

Segunda etapa. Aquí se busca identificar los procedimientos heurísticos asociados a la resolución de un problema en geometría; además, permite caracterizar la dinámica de una clase que permita la discusión. En este sentido, esta etapa se divide en dos momentos:

El primer momento, discusión y búsqueda de propiedades, delimita lo que se requiere para que un estudiante acceda a la demostración, esto es, trata de establecer, entre las distintas formas en las que dicho estudiante aborda un problema geométrico, aquella en la cual la demostración tiene lugar. En ese sentido, Balacheff (2000) caracteriza tres tipos de situaciones inducidas por las actividades sugeridas a los estudiantes: la esfera de práctica, las situaciones de decisión y las situaciones de validación. En el primer tipo se trabaja de forma mecánica aplicando los conocimientos adquiridos, lo cual no genera nuevos conocimientos; en el segundo tipo se construyen conjeturas con el fin de diseñar estrategias que lleven a la resolución de una situación problema y en el último tipo el estudiante socializa sus explicaciones acerca de una afirmación, lo cual se aproxima a la demostración. Balacheff (2000) distingue dos tipos de pruebas que le permiten al estudiante convencer y convencerse acerca de una conjetura; estas se conocen como las formas pragmática e intelectual de abordar un problema geométrico.

El segundo momento, puesta en común, se inicia al señalar que un primer diagnóstico acerca de cuáles podrían ser los orígenes de la dificultad para enseñar y aprender la demostración en matemáticas ha sido formulado en términos de la naturaleza del contrato didáctico que emerge naturalmente de las posiciones del alumno y el docente con respecto a los saberes en juego. Dado que el docente es el garante de la legitimidad y de la validez epistemológica de lo que se construye en la clase, eso parecería implicar que el alumno se vería privado de un acceso auténtico a una problemática de la verdad y de la prueba. La superación de esta dificultad inherente a los sistemas didácticos puede ser investigada en situaciones que permiten la devolución a los alumnos de la responsabilidad matemática sobre sus producciones, lo que significa la desaparición del docente de los procesos de toma de decisión durante la resolución de un problema en favor de un esfuerzo de construcción de medios autónomos de prueba por parte de los alumnos.

Tercera etapa. Esta última etapa apunta a la comprensión y puesta en escena del funcionamiento del razonamiento deductivo, a través de dos momentos: la construcción de grafos proposicionales y redacción de la demostración. Lo que se pretende establecer en esta etapa es la diferenciación entre valor epistémico teórico y valor epistémico semántico de una proposición. Partiendo de este principio fundamental, el alumno descubre y comprende el funcionamiento del razonamiento deductivo pasando por un registro no discursivo: los grafos proposicionales.

El primer momento propone que un grafo ha de definirse como un registro no discursivo que privilegia la aprehensión sinóptica o vista global de las proposiciones que intervienen en la demostración, al organizarlas de acuerdo con su estatus operatorio. Es así como los grafos proposicionales aparecen en esta perspectiva de trabajo en la enseñanza de la demostración como un registro de representación que apoya la comprensión de aquello que es objeto de análisis en un razonamiento. Su uso se basa en el hecho de que para comprender lo que una representación discursiva presenta (enunciado en lengua natural) es necesario el paso por una representación no discursiva (Duval, 2004b). La construcción de dichos grafos se rige por las siguientes reglas: de una hipótesis parte una flecha (no llega), del y al tercer enunciado parten y llegan flechas, y llega una flecha a la conclusión, siempre y cuando sea la conclusión final, en el caso contrario, parte una flecha.

El segundo momento, redacción de la demostración, es necesario, dado que permite que los valores epistémicos teóricos se diferencien de los valores epistémicos semánticos y que estos últimos ya no se asimilen a los valores de verdad; la redacción en lengua natural de la demostración se presenta como una traducción del grafo, privilegiando actitudes proposicionales que marcan el estatus operatorio de las proposiciones.

Para lograr que la propuesta didáctica planteada anteriormente se pueda aplicar en el aula se establece como intención primordial construir un manual para uso de docentes en ejercicio, el cual deberá funcionar como vínculo entre las investigaciones aquí retomadas y la práctica escolar.

METODOLOGÍA DEL TALLER

Se propone que el taller se realice en dos sesiones. La primera sesión se dividirá en dos partes: una que presente los elementos teóricos de esta investigación que tienen que ver con los propósitos y la metodología que se utilizó; el tiempo para esta parte será de 25 a 30min. En la segunda parte se presentará la propuesta de Duval-Egret (1993), pues en torno a esta, se gira la reflexión del trabajo. Dado que esta propuesta se divide en tres etapas, para cada una de ellas se propondrá una actividad para que la desarrollen los participantes (60 min).

La segunda sesión se dividirá en cuatro momentos: análisis de los elementos teóricos a partir de las respuestas dadas por los participantes (20-25min); reflexión y debate sobre dichas respuestas, explicitando cómo se articulan curricularmente desde los Estándares, las etapas propuestas con los niveles de escolaridad (35-40min); presentación del manual como opción para llevar al aula esta propuesta sobre la enseñanza de la demostración con el respectivo debate (20-25), y, por último evaluación de la actividad por parte de los participantes (10-15 min).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balacheff, Nicolas. (2000). Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Una empresa docente. Bogotá: Universidad de los Andes.

Duval, R. & Egret M. (1993) Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. Lille: IREM 12.

Duval, Raymond. (2004b) Semiosis y pensamiento humano, Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali: Peter Lang.

Larios Osorio, Victor. (2001). Demostraciones y conjeturas en la escuela media. Revista eléctronica de Didáctica de las Matemáticas, 3, 45-55. Obtenido en la red mundial en octubre de 2001: http://www.uaq.mx/matematicas/redm/art/a0703.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En MEN, Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: MEN.

Ponce de León, Pilar. (2007). Enseñanza inicial de la demostración matemática en la educación básica desde una perspectiva cognitiva. Santiago de Cali: Grupo de Educación Matemática, Universidad del Valle.

El pensamiento variacional: un asunto de juego y actividad matemática en la escuela

Julián Ricardo Gómez[*]
José Luis Orozco[**]
Germán Darío Realpe[***]
Gloria Benavides[****]
Ninfa Navarro[*****]
Edgar Alberto Guacaneme[******]

RESUMEN

En este taller se analizan dos tareas (Casa de cambio y Progresión geométrica) planteadas en sendas cartillas del proyecto "Juega y Construye la Matemática", para la Educación Básica Primaria y Secundaria. Con este se pretende evidenciar que el pensamiento variacional es transversal al currículo y no siempre aparece de manera explícita en la actividad matemática del aula de clase.

Palabras clave: pensamiento variacional, juego, actividad matemática, formación de profesores, desarrollo del pensamiento matemático, razonamiento.

[*] Colegio Champagnat. Dirección electrónica: juliangomez@colegiochampagnat.edu.co
[**] Colegio Champagnat. Dirección electrónica: joseluisorozco@colegiochampagnat.edu.co
[***] Colegio Champagnat. Dirección electrónica: germanrealpe@colegiochampagnat.edu.co
[****] Colegio Champagnat. Dirección electrónica: gloriabenavides@colegiochampagnat.edu.co
[*****] Colegio Champagnat. Dirección electrónica: ninfanavarro@colegiochampagnat.edu.co
[******] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: guacaneme@pedagogica.edu.co

PRESENTACIÓN

El proyecto "Juega y Construye la Matemática", propio de la Comunidad de Hermanos Maristas de la Enseñanza, dentro de sus producciones escritas posee una serie de cartillas de matemáticas, que expresan el currículo de prescolar a undécimo grado, en las que se formulan algunas tareas para los estudiantes, a través de las cuales se busca generar actividad matemática en ellos y así permitir la construcción y apropiación de las matemáticas escolares. Actualmente estas cartillas son objeto de estudio por parte de un grupo de profesores de matemáticas del Colegio Champagnat de Bogotá, a través de lo cual se pretende indagar si el pensamiento variacional está siendo atendido y promovido por las tareas allí propuestas y en qué medida es transversal al currículo.

El objetivo de este taller es compartir la metodología de estudio de las tareas y propiciar, en los asistentes, reflexiones y aprendizajes de orden didáctico y matemático sobre el pensamiento variacional.

REFERENTE TEÓRICO

El proyecto "Juega y Construye la Matemática" se sustenta en los postulados de un enfoque constructivista, pero su tendencia es hacia un constructivismo blando; además, está orientado por los principios de *globalidad* (se requiere de una acción pedagógica global capaz de afectar la totalidad de su pensamiento), *integralidad* (es necesario considerar no solo el aspecto cognitivo del estudiante, sino también las diferentes facetas de su subjetividad), *lo lúdico* (el acercamiento al conocimiento matemático debe resultar placentero), *reconocimiento de la diferencia* (el acceso al conocimiento se debe dar desde el nivel de sus propias elaboraciones), *construcción social del conocimiento* (el conocimiento se construye en comunidades); y *lo tecnológico* (la construcción de conocimiento se da a través de mediaciones tecnológicas).

Esta perspectiva se corresponde ampliamente con lo expuesto en la normativa nacional curricular para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (MEN, 1998, 2006) y pretende efectivamente promoverse a través de las tareas que se incluyen en las cartillas que orientan las acciones docentes y discentes en las aulas de clase. De manera análoga, las tareas de estas cartillas pretenden atender tanto los contenidos, como promover el desarrollo de los distintos pensamientos matemáticos enunciados en dicha normativa. Sin embargo, este marco de intenciones puede no ser suficientemente explícito para los profesores de matemáticas, al igual que las estrategias, contenidos y pensamientos implicados en las tareas propuestas. En este orden de ideas, se reconoce que el estudio de las tareas ofrece una oportunidad para el aprendizaje docente, que puede redundar en el desarrollo de una mayor conciencia sobre el quehacer profesional.

Para desarrollar este estudio se ha decidido seleccionar inicialmente el pensamiento variacional y considerar los planteamientos hechos en la normativa curricular (MEN, 1998, 2006), así como acopiar un marco de referencia sobre el razonamiento variacional (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2003).

Un primer planteamiento, que se convierte en hipótesis de trabajo y, a la vez, en hipótesis objeto de estudio es la afirmación de que el pensamiento variacional es un eje curricular transversal a los grados escolares y que su estudio se inicia muy temprano en esta escolaridad. En esta dirección, entre otras ideas, se propone el estudio de "… situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica… [o] … el estudio de los patrones" (MEN, 1998, p. 50) como una manera de acceder a las relaciones funcionales en donde "… emerge la función como herramienta de conocimiento necesaria para enlazar patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio" (p. 51).

Una segunda hipótesis se refiere al planteamiento de que el pensamiento variacional es uno de los logros para alcanzar en la Educación Básica, que

> … presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas (MEN, 1998, p. 49).

En esta dirección se reconoce que el pensamiento variacional está relacionado con nociones y conceptos como: constante, variable, función, razón o tasa de cambio, dependencia e independencia de una variable con respecto a otra, modelos funcionales, relaciones de desigualdad, y ecuaciones e inecuaciones.

Un tercera hipótesis, conectada estrechamente con la anterior, se refiere a que "El pensamiento variacional se desarrolla en estrecha relación con los otros tipos de pensamiento matemático (el numérico, el espacial, el de medida o métrico y el aleatorio o probabilístico) y con otros tipos de pensamiento más propios de otras ciencias" (MEN, 2006, p. 66).

Por otra parte, para cualificar la mirada a las tareas propuestas en las cartillas, se ha asumido una perspectiva teórica sobre el razonamiento covariacional[1], que refiere un marco conceptual para describir las acciones mentales y los niveles de razonamiento covariacional, sintetizados en la tabla siguientes (Carlson et al., 2003, p. 128-129).

Acción mental	*Descripción de la acción mental*	*Comportamientos*
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e. g., y cambia con cambios en x).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

Tabla Nº 1. Acciones mentales del marco conceptual para la covariación

[1] Entendido como "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra" (Carlson et al., 2003, p. 124)

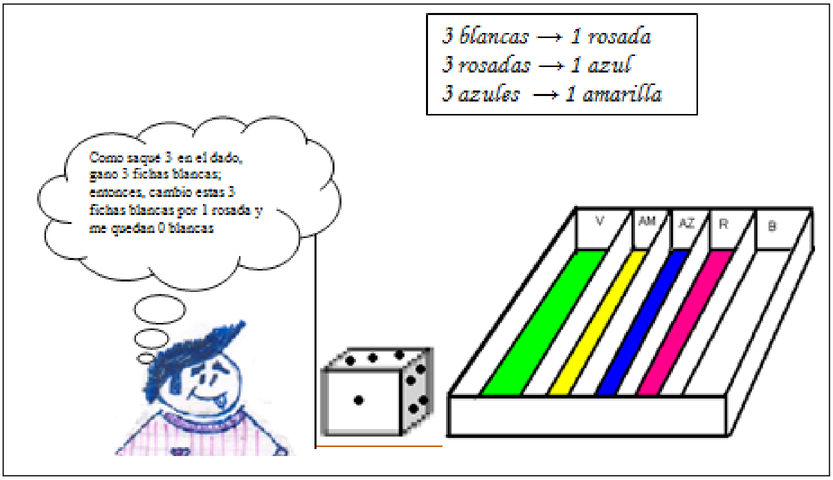
NIVELES DEL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL
El marco conceptual para la covariación describe cinco niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación. Estas imágenes de covariación se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas por cada imagen.
Nivel 1 (N1). Coordinación
En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2). Dirección
En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa
En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.
Nivel 4 (N4). Razón promedio
En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.
Nivel 5 (N5). Razón instantánea
En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

Tabla N.º 2. Marco conceptual para los niveles de la covariación

METODOLOGÍA DEL TALLER

El taller está configurado por tres partes. En la primera, a partir del conocimiento y experiencia de los participantes, se presentarán y discutirán las indicaciones de la normativa curricular respecto del pensamiento variacional y se presentará una visión sobre el marco conceptual sobre el razonamiento conceptual; en la segunda y tercera se abordará la presentación y estudio de sendas tareas (El juego de la casa de cambio y Progresión geométrica) extractadas de las cartillas del proyecto "Juega y Construye la Matemática".

El juego de la Casa de Cambio. (Vera, Rodríguez y Ríos, 2012, pp. 1-5). Este juego consiste en hacer cambios de fichas de un color por otras de otro color, según una equivalencia que se fija apropiadamente. La siguiente imagen muestra la forma como, en base 3, se deben hacer los cambios.



Una de las consignas que se propone a los estudiantes es: Si se juega Casa de Cambio en base 3 ¿cuántas fichas blancas se necesitan para obtener una ficha azul?, ¿cuántas fichas blancas se necesitan para obtener una ficha amarilla?

Se prevé que el juego permita construir un sistema de cambios análogos a las situaciones problema de conversión de unidades, multiplicación compuesta, potenciación, proporcionalidad y, además, que permita trabajar elementos para generar pensamiento variacional.

Los profesores tienen la posibilidad de hacer algunas modificaciones del contexto y proponer situaciones como las siguientes:

Una fábrica de gomas empaca su producto en base 6, así: 6 gomas en un paquete, 6 paquetes llenos en una bolsa y 6 bolsas en una caja. ¿Cuántas gomas hay en 2 cajas y 3 paquetes?

Una fábrica de galletas empaca su producto de la siguiente manera: 4 galletas en una paquete, 12 paquetes en una bolsa, 24 bolsas en una caja

¿Cuántos galletas hay en 2 cajas?

Luego de la presentación del juego, se propondrán las siguientes consignas para que sean resueltas en grupos de tres integrantes.

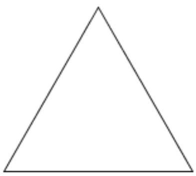
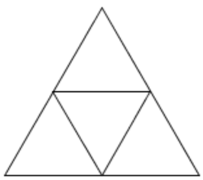
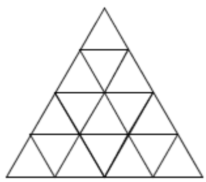
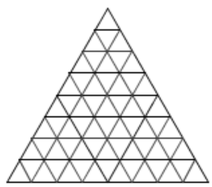
1. Resuelva la anterior situación colocándose en el lugar del estudiante e identifique qué estrategias utilizaría. Realice una representación de la situación.

2. Discuta si el juego se ajusta a los planteamientos sobre el pensamiento variacional expresados en los Lineamientos y Estándares (MEN, 1998, 2006).

3. Identifique si a través del juego se promueven aspectos del razonamiento covariacional (Carlson et al. 2003).

4. Especifique si el juego debe modificarse para responder a la normativa curricular y a los niveles del razonamiento covariacional.

Progresión geométrica. (Orozco, 2010). Esta tarea busca descubrir patrones de variación y regularidad, así como abordar el concepto de progresión geométrica. Para ello se propone al estudiante observar la sucesión de triángulos mostrados en la secuencia de figuras y posteriormente completar la tabla, teniendo en cuenta que el área de la figura 1 es de una unidad cuadrada.

Figura 1	*Figura 2*	*Figura 3*	*Figura 4*
			

Números de veces que se trazan puntos medios.	0	1	2	3	4	5	…	n
Total de puntos medios trazados sobre cada lado del triángulo.	0	1	3	7	15	31	…	
Números triángulos equiláteros de menor área en cada figura.	1	4	16					
Área del triángulo equilátero más pequeño de cada figura.	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$					
Perímetro del triángulo equilátero más pequeño de cada figura, tomando x, como la longitud del lado del triángulo de la figura 1.	$3x$	$\frac{3x}{2}$	$\frac{3x}{4}$					

La tarea se complementa con la formulación a los estudiantes de algunas de las siguientes preguntas:

a) ¿Qué tipo de progresión forma el número de triángulos pequeños, que se forman en cada figura?

b) ¿Qué tipo de progresión forman las magnitudes del área de los triángulos pequeños, que se forman en cada figura?

c) ¿Qué tipo de progresión forman las longitudes del perímetro de los triángulos pequeños que se forman en cada figura?

d) ¿En cada caso anterior, cuál es la razón de cada una de las progresiones?

e) Si *n*, representa el número de veces que se realiza el proceso de trazar puntos medios, iniciado en cero, ¿cuáles son las expresiones que permiten calcular: el número de triángulos, el área y el perímetro del triángulo pequeño que se forma?

Luego de la presentación de la segunda tarea se pedirá a los asistentes al taller que, organizados en grupos de tres integrantes, respondan las preguntas propuestas para el análisis de la tarea del *juego de la casa de cambio*.

Finalmente, se hará la discusión plenaria de las posturas de los asistentes y se contrastará con la de los profesores, coordiandores del taller.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA 8* (2), 121-156.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Orozco, J. (2010) *Juega y Construye la Matemática. Noveno Grado*. Bogotá: Ediciones Maristas.

Vera, J., Rodríguez, A., & Ríos, A. (2012). *Juega y Construye la Matemática. Quinto Grado*. Bogotá: Editorial Kimpres Ltda.

Representación de objetos tridimensionales utilizando multicubos. Software: multicubos, geoespacio, explorando el espacio 3D

Efraín Alberto Hoyos Salcedo[*]
Jorge Hernán Aristizábal[**]

RESUMEN

El presente taller es la respuesta a una necesidad sentida en el desarrollo del currículo de matemática en Básica Primaria y Secundaria con el propósito de desarrollar competencias espaciales en los estudiantes. El software educativo ocupa un lugar muy importante en esta propuesta en cuanto al desarrollo de las actividades, y está compuesto por una secuencia didáctica con tres programas diseñados con herramientas 3D: explorando el espacio, multicubos y geoespacio. La fundamentación teórica se basa en la teoría de las representaciones de objetos matemáticos, y la metodología del taller incluye trabajo en la sala de informática apoyado con guías, software educativo y, por supuesto, el espacio para las reflexiones teóricas de los participantes.

El software está diseñado como ambientes de reconocimiento y de construcción de objetos tridimensionales con preguntas y sus correspondientes respuestas de evaluación en formato de micromundo para el desarrollo del pensamiento espacial.

Palabras clave: pensamiento espacial, tridimensional, software educativo, representaciones, transformaciones, visualización.

[*] Universidad del Quindío. Dirección electrónica: eahoyos@uniquindio.edu.co
[**] Universidad del Quindío. Dirección electrónica: jhaz@uniquindio.edu.co

PRESENTACIÓN

En didáctica de las matemáticas, está demostrado que, en todos los campos de las matemáticas escolares, el aprendizaje y la enseñanza resultan más fáciles y profundos cuando evitan la abstracción innecesaria y se apoyan en representaciones o modelizaciones gráficas simbólicas o físicas que los estudiantes pueden articular mediante la observación, construcción, manipulación o transformación, que permitan la solución de los problemas matemáticos. Para el caso del desarrollo de la visualización espacial, la utilización del software educativo que se va socializar en este taller ocupa un lugar de gran importancia.

Es tambien importante resaltar que hoy, según los estándares por competencias en matemáticas en Colombia, se traslada la responsabilidad del desarrollo de competencias espaciales en los estudiantes de Básica Primaria y Secundaria a los docentes de matemáticas, asunto que antes estaba incluido en el currículo de dibujo técnico.

REFERENTES TEÓRICOS

Pensamiento espacial y sistemas geométricos. El estudio de la geometría intuitiva en los currículos de las matemáticas escolares se había abandonado como una consecuencia de la adopción de la matemática moderna. Desde un punto de vista didáctico, científico e histórico, actualmente se considera una necesidad ineludible recuperar el sentido espacial intuitivo en toda la matemática, no solo en lo que se refiere a la geometría.

Howard Gardner (2001) en su teoría de las múltiples inteligencias considera como una de estas inteligencias la espacial y plantea que el pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico, puesto que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas. El manejo de información espacial para resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios es peculiar a esas personas que tienen desarrollada su inteligencia espacial. Se estima que la mayoría de las profesiones científicas y técnicas, tales como el dibujo técnico, la arquitectura, las ingenierías, la aviación, y muchas disciplinas científicas como química, física, matemáticas, requieren personas que tengan un alto desarrollo de inteligencia espacial.

Los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento. Esta construcción se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que avanza desde un espacio intuitivo o sensorio-motor (que se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, etc.), a un espacio conceptual o abstracto relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas, tomando sistemas de referencia y prediciendo los resultados de manipulaciones mentales. Por tanto, el estudio de la geometría en la escuela debe favorecer estas interacciones. Se trata de actuar y argumentar sobre el espacio ayudándose con modelos y figuras, con palabras del lenguaje ordinario, con gestos y movimientos corporales y recursos informáticos.

Geometría activa. Para lograr este dominio del espacio se sugiere el enfoque de geometría activa que parte de la actividad del alumno y su confrontación con el mundo. Se da prioridad a la actividad sobre la contemplación pasiva de figuras y símbolos, a las operaciones sobre las relaciones y elementos de los sistemas y a la importancia de las transformaciones en la comprensión aun de aquellos conceptos que a primera vista parecen estáticos. Se trata pues de hacer cosas, de moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna. Esta conceptualización va acompañada en un principio por gestos y palabras del lenguaje ordinario, hasta que los conceptos estén incipientemente construidos en un nivel suficientemente estable para que los alumnos mismos puedan proponer y evaluar posibles definiciones y simbolismos formales.

Representación bidimensional del espacio tridimensional. Otro aspecto importante del pensamiento espacial es la exploración activa del espacio tridimensional en la realidad externa y en la imaginación, y la representación de objetos sólidos ubicados en el espacio.

Al respecto Lappan y Winter afirman: A pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias matemáticas que proporcionamos a nuestros niños son bidimensionales. Nos valemos de libros bidimensionales para presentar las matemáticas a los niños, libros que contienen figuras bidimensionales de objetos tridimensionales. A no dudar, tal uso de dibujos de objetos le supone al niño una dificultad adicional en el proceso de comprensión. Es empero, necesario que los niños aprendan a habérselas con las representaciones bidimensionales de su mundo. En nuestro mundo moderno, la información seguirá estando diseminada por libros y figuras, posiblemente en figuras en movimiento, como en la televisión, pero que seguirán siendo representaciones bidimensionales del mundo real Linda Dickson y otros, El aprendizaje de las matemáticas, (Dickson, 1991)

Para comunicar y expresar la información espacial que se percibe al observar los objetos tridimensionales es de gran utilidad el uso de representaciones planas de las formas y relaciones tridimensionales. Hay distintos tipos de tales representaciones. Cada una es importante para resaltar un aspecto, pero es necesario utilizar varias a la vez para desarrollar y completar la percepción del espacio. El dibujo en perspectiva se puede utilizar con mucho provecho para la educación estética, y para el ejercicio de las proyecciones de objetos tridimensionales en la hoja de papel, y de la hoja de papel al espacio. Para esto último se puede empezar por dibujar cubos y cajas en perspectiva, de manera que unos oculten parcialmente a los otros, y luego tratar de colocar cubos y cajas de cartón sobre una mesa de manera que se vean como en el papel. Aun en el dibujo en perspectiva es difícil dibujar las elipses que representan las distintas maneras como aparece un círculo desde distintos puntos de vista. Por eso puede ser aconsejable limitar la perspectiva a figuras rectilíneas, a menos que los mismos alumnos quieran explorar cómo se dibujan las tapas de las alcantarillas en las calles ya dibujadas en perspectiva.

Las transformaciones. En la actualidad, gran parte de la geometría escolar se ha ocupado del movimiento de figuras geométricas desde una posición a otra, y de movimientos que cambian el tamaño o la forma. El estudio de las transformaciones de figuras ha ido progresivamente primando sobre la presentación formal de la geometría, basada en teoremas y demostraciones y en el método deductivo.

Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. En las investigaciones analizadas en el campo de la educación matemática se proponen diferentes definiciones de visualización y orientación, tanto en el contexto de la geometría como en otras disciplinas (por ejemplo, el álgebra o la aritmética), pero muchas veces se designa un mismo concepto con nombres diferentes y conceptos diferentes con un mismo nombre. Además, estas definiciones pueden resultar de difícil aplicación directa en la enseñanza.

Es importante mencionar una manera operativa el tema de la visualización y la orientación en el contexto de la geometría espacial, identificando y clasificando los principales tipos de tareas sobre la visualización y la orientación de objetos o espacios tridimensionales (representados en el plano o presentados físicamente).

En el contexto tridimensional (prescindimos de las tareas de orientación y visualización de figuras planas) podemos diferenciar tres grandes familias de actividades, según el tópico específico tratado:

1. Orientación estática del sujeto y de los objetos

2. Interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales

3. Orientación del sujeto en espacios reales

En este taller nos centraremos en la visualización de objetos tridimensionales, mediante la elaboración e implementación de una propuesta de intervención pedagógica que potencie el desarrollo de habilidades de visualización del espacio 3D, en ambientes informáticos.

Esta propuesta intenta devolver la dinámica a los sistemas geométricos, con sus operadores y transformaciones, que resultan de interiorizar en forma de esquemas activos en la imaginación, los movimientos, acciones y transformaciones que se ejecutan físicamente. Se propone que se trabaje la geometría por medio de aquellas transformaciones que ayuden a esa exploración activa del espacio y a desarrollar sus representaciones en la imaginación y en el plano del dibujo.

Muchas son las investigaciones que estudian las estrategias, los conocimientos, las habilidades, las dificultades, puestas en juego al resolver diferentes actividades de perspectivas de cuerpos tridimensionales. Describimos brevemente las tareas presentadas en algunos trabajos centrados en este tópico.

Gutiérrez (1996a, p. 36), en el análisis de un experimento de enseñanza de las representaciones planas de módulos multicubos, distingue tres tipos de actividades:

- A partir de una representación plana de módulos en perspectiva en el ordenador con la posibilidad de girarlo libremente),tiene que dibujar diferentes tipos de sus representaciones planas.
- El estudiante tiene que relacionar dos tipos de representaciones planas del módulo, sin construirlo físicamente.

Fischbein (1993) analiza el caso del desarrollo de un cubo, como ejemplo de una práctica con estudiantes de actividades mentales en las cuales la cooperación entre el aspecto conceptual y el figural requiere un esfuerzo especial. Esta actividad se refiere al desarrollo de un cuerpo geométrico y está compuesta de tres partes:

- Dibujar la imagen obtenida desarrollando un cuerpo geométrico

  Identificar el cuerpo geométrico obtenido a partir de un desarrollo plano

- Indicar en el desarrollo las aristas que se hacen corresponder cuando el objeto tridimensional sea reconstruido.

METODOLOGÍA DEL TALLER

El taller se desarrollará en tres momentos durante hora y media:

a. Introducción teórica sobre sistemas de representación del espacio 3D.

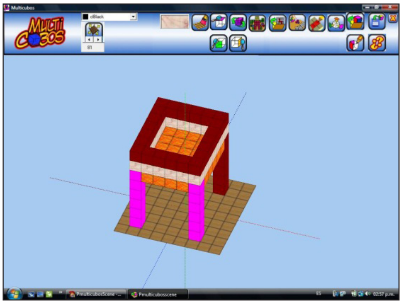
b. Desarrollo de actividades en una sala de informática en grupos de dos participantes por computador, utilizando software educativo que incluye los siguientes programas: multicubos, Geoespacio y explorando el espacio 3D.

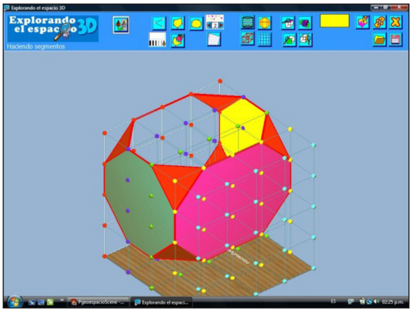
c. Discusión de los alcances bondades y dificultades de la propuesta didáctica.

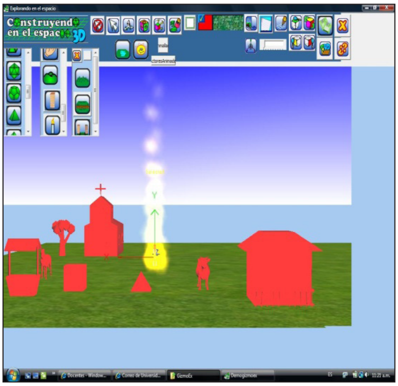
Resumiendo: la importancia de un buen desarrollo del pensamiento geométrico espacial de los estudiantes es un hecho reconocido lo cual determina la necesidad de una recuperación del sentido espacial como herramienta de exploración y modelación del espacio 3D.

Por lo tanto, siempre que se manejen objetos tridimensionales y haya la necesidad de representarlos mediante figuras planas se tendrá planteado un problema que tiene que ver con la capacidad de visualización espacial de los estudiantes y con su habilidad para dibujar representaciones planas de objetos tridimensionales. La capacidad de visualización espacial es uno de los elementos clave en este problema, y los recursos informáticos pueden ser de gran ayuda y una alternativa de solución.

Las siguientes gráficas ilustran los entornos informáticos de la secuencia didática a desarrollar como actividades del taller:







REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Dickson, L. (1991). El aprendizaje de las matemáticas. Madrid: Editorial Labor S.A.

Ferrero, L. (2008). Mateáticas 4: Primaria, segundo ciclo. Madrid: Anaya.

Ferrero, L. (2006). Mateáticas 6: Primaria, tercer ciclo. Madrid: Anaya.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. EducationalStudies in Mathematics , 139-162.

Galvez, G. (1985). El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano: Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria (Tesis doctoral). Centro de Investigación del IPN, México.

García, J. (2009). Estimular la orientación espacial, nivel 1-2-3-4. Madrid: Grupo Gesfomedia.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (págs. 3-19). Valencia: Universidad Valencia.

Howard, G. (2001). Estructuras de la mente: la teoría de las inteligencias múltiples. Estados Unidos: Fondo de Cultura Económica USA.

Lappan, G., Phillips, E. D., & Winter, M. J. (1984). Spatial visualization. Mathematics Teacher , 618-623.

NCTM. (20 de 01 de 2012). National Council of Teachers of Mathematics. Recuperado el 15 de 04 de 2012, de Principles and standards for school mathematics: http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=4294967312

Una propuesta para aplicar *Probability Explorer* en el aula

*Edgar David Jaimes Carvajal**

RESUMEN

El taller propuesto tuvo como objetivo proponer y experimentar una metodología de trabajo en el aula para el aprendizaje significativo de la noción de probabilidad. El fundamento del taller estuvo sustentado en el uso del enfoque experimental y simulado con el software Probability Explorer. Los participantes se involucraron en la generación, tratamiento, sistematización y análisis de datos de un experimento aleatorio. Se justificó la importancia del uso de diferentes sistemas de representación, así como la influencia de la noción de distribución en la comprensión del significado del concepto de probabilidad. El taller se desarrolló en tres fases: diagnóstico, experimentación "real" y simulación. Se propuso una manera de evaluar las respuestas de los participantes a través del modelo SOLO.

Palabras clave: Probabilidad. Experimentos aleatorios. Distribución de variables

* Instituto Técnico Industrial Francisco de Paula Santander – Puente Nacional. Dirección electrónica: edjaimes@gmail.com

JUSTIFICACIÓN

En la enseñanza tradicional de la probabilidad de nivel elemental se pone demasiado énfasis en el cálculo y se descuida su comprensión (Yáñez, 2003 & Reátiga, 2004). Se suele comenzar por calcular la probabilidad de resultados aislados sin considerar y comparar las probabilidades de todos los posibles resultados, es decir, sin considerar la distribución de probabilidades. La consideración de distribuciones de variables aleatorias puede contribuir a la comprensión, en la medida en que ofrece la posibilidad de ver el conjunto total de resultados de una experiencia, empezando a percibir las propiedades del conjunto y no de elementos individuales. Pero este modelo de enseñanza puede evidenciar una concepción errónea común en los estudiantes: el sesgo de equiprobabilidad, el cual consiste en asignar igual probabilidad al conjunto de resultados de una experiencia. Es posible que un enfoque frecuencial y la ayuda de un software dinámico (Probability Explorer en www.probexplorer.com, ver Fig. 1) puedan contribuir a superar este sesgo en una situación simple en la que en un primer acercamiento los estudiantes posiblemente asignen equiprobabilidad a los resultados o, bien, evidencien respuestas de tipo idiosincrático o de tipo determinista. De acuerdo con lo anterior se plantearon dos preguntas: ¿Cómo desarrollan los estudiantes la comprensión de la Ley de los Grandes Números (LGN) con ayuda de la noción de distribución en un ambiente de aprendizaje con tecnología? ¿Qué resultados se obtienen de las respuestas de los estudiantes a tareas de probabilidad relacionadas con la LGN antes y después de actividades de simulación física y computacional?

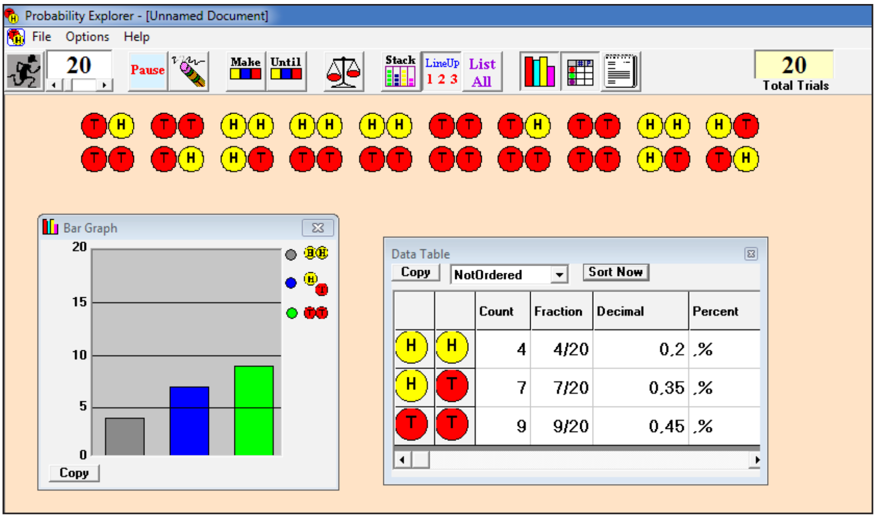


Figura 2. Simulación en Probability Explorer con dos monedas.

MARCO CONCEPTUAL

Trabajos como el de Fischbein (1982) y Sánchez (2002) respaldan el uso de la experimentación de situaciones aleatorias como camino hacia aprendizajes significativos, a través del desarrollo de intuiciones apropiadas respecto a la frecuencia relativa, donde el contexto y las disposiciones de los estudiantes forman parte de un ambiente específico de aprendizaje para el desarrollo del razonamiento probabilístico (Garfield, et al., 2008). En este ambiente, los estudiantes deben realizar tareas de predicción a priori y posteriori de la experimentación física, y de confrontación de resultados de manera individual y grupal a través de la discusión entre pares. Pero dadas las pocas repeticiones que finalmente se realizan, es muy difícil que los estudiantes perciban alguna regularidad en el comportamiento de las secuencias aleatorias que permita dar algún significado a su experiencia y generar conceptos claros sobre la probabilidad de un suceso (Jaimes & Martínez, 2007). Ello nos plantea un nuevo reto: complementar el enfoque frecuencial con el desarrollo de la noción del concepto de distribución y hacer uso de una herramienta que permita generar resultados aleatorios en mayor cantidad, menos tiempo y con muchas repeticiones –un simulador de probabilidad–. Pfannkuch y Reading (2006) afirman que la distribución es el lente a través del cual es posible ver la variación, la cual es el corazón del pensamiento estadístico y probabilístico (ver Fig. 2), donde el estudiante debe razonar en una variable aleatoria para percibir patrones de variación en las frecuencias relativas a través de representaciones tabulares y gráficas. Esta es la razón por la cual se cree que la noción de distribución de frecuencias relativas y la variable aleatoria pueden ser herramientas a través de las cuales los estudiantes pueden desarrollar significados e intuiciones correctas de probabilidad tratando las gráficas como distribuciones, es decir, ver los datos aleatorios como un ente, y no que se centren en los resultados de un evento como tradicional-

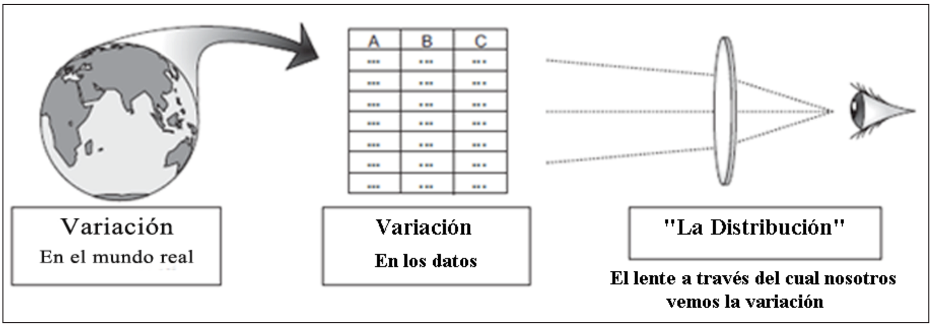


Figura 2. La Distribución como lente (Pfannkuch y Reading, 2006)

mente se hace. Uno de los principales obstáculos de este enfoque para percibir de manera adecuada cualquier distribución (uniforme o no uniforme) lo representa el sesgo de equiprobabilidad, ya que los sujetos con este sesgo consideran que el resultado de un experimento aleatorio "depende del azar" y en consecuencia todos los posibles resultados son equiprobables.

METODOLOGÍA DEL TALLER

El taller está basado en las actividades implementadas en la tesis de maestría de Jaimes (2011), la cual se desarrolló durante diez meses, dos de los cuales se trabajó directamente con 34 estudiantes entre 14 y 15 años de tercer grado de secundaria en la Escuela Técnica # 97 de Ecatepec (Estado de México). Se diseñó y aplicó una actividad que giró en torno a una situación aleatoria relacionada con un espacio muestral no equiprobable e implícito, relacionado con el número de caras que resultan del lanzamiento de dos monedas (ver Fig. 3). La actividad se desarrolló en tres fases: diagnóstico, experimentación y simulación computacional, donde los estudiantes debían hacer predicciones antes, durante y posterior a la experimentación y simulación. Los resultados eran presentados en tablas y gráficas de frecuencias absolutas y relativas. El seguimiento de los cambios en los razonamientos se realizó a través de un diagnóstico inicial, una evaluación posexperimentación física y una evaluación final postsimulación computacional, que consistieron en doce preguntas cada una, relacionadas con doce tareas diferentes de predicción, argumentación e interpretación de resultados.

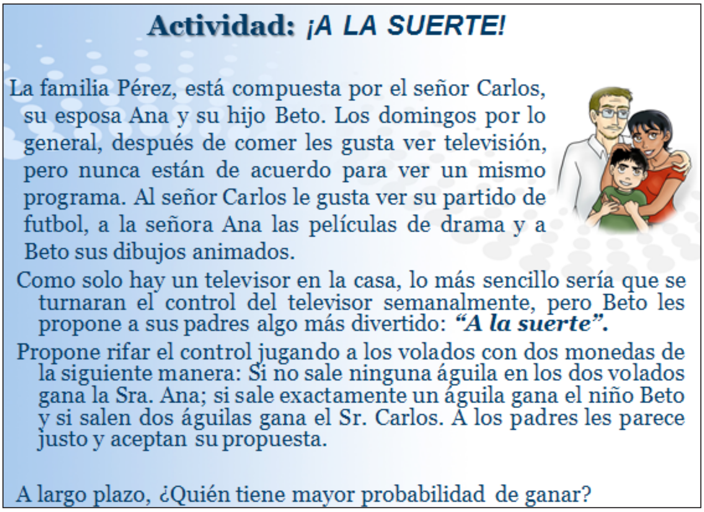


Figura 3. Situación aleatoria propuesta a los estudiantes (Jaimes, 2011)

El modelo SOLO (The Structure of Observed Learning Outcomes) de Biggs y Collis (1991) ayudó a describir el razonamiento de los estudiantes a partir de la observación de la conducta de resolución frente a diversos problemas, ya que permitió jerarquizar las respuestas de los estudiantes y ha sido empleado en la investigación estocástica (Watson, 2006). Este modelo no clasifica a los estudiantes como de rendimiento alto o bajo, pero sí clasifica las respuestas en una escala de cinco categorías en un tiempo determinado y respecto a una tarea específica. Además, reconoce que a diferentes tiempos se pueden observar diferentes respuestas de un mismo sujeto. Así, las respuestas se pueden considerar manifestaciones que dependen del tiempo, y pueden permitir decidir qué actividades son convenientes para ayudar a los estudiantes a avanzar en su desarrollo. Este modelo tiene cinco niveles de respuesta: prestructural, uniestructural, multiestructural, relacional y abstracción extendida (ver fig. 4). El modelo SOLO sirvió como una herramienta para caracterizar la evolución del razonamiento de los estudiantes a partir de las respuestas que dieron a las preguntas del diagnóstico y las dos evaluaciones.

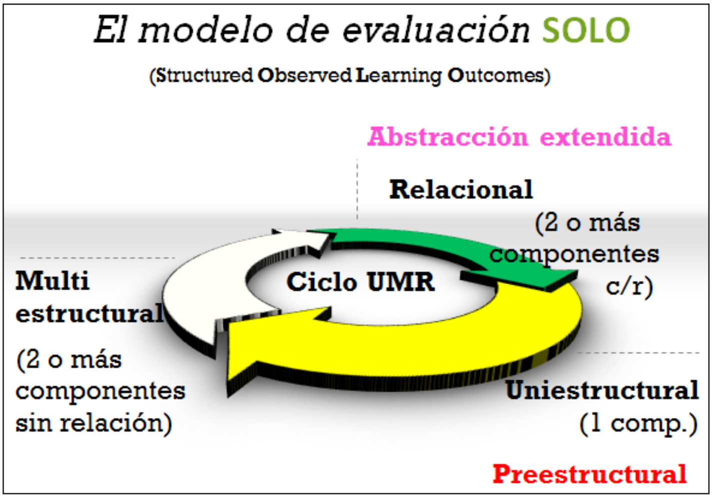


Figura 4. Modelo SOLO (Biggs y Collis, 1991)

La idea era implementar la misma situación, adecuándola para dos sesiones de hora y media con el objetivo general de vivenciar una actividad de experimentación y simulación computacional que permita a los docentes que enseñan matemática acercarse al concepto de probabilidad desde un enfoque frecuencial e involucrando la idea de variable aleatoria y de distribución, donde sea posible confrontar nuestras intuiciones con los datos reales y simulados. En la primera sesión se expusieron, de manera corta, las ideas teóricas básicas y metodológicas que están detrás del taller a desarrollar, de tal manera que pueda ser implementado en instituciones de Básica Primaria o bachillerato. Se aplicó un diagnóstico para identificar algunas intuiciones y sesgos que pueden tener los participantes. Luego, los participantes tomaron datos reales de la situación aleatoria (haciendo lanzamientos simultáneos de dos monedas por parejas) y respondieron unas preguntas básicas acerca de las distribuciones de frecuencias absolutas y relativas de los datos obtenidos, para contrastar con las respuestas del diagnóstico y hacer inferencias.

En la segunda sesión, se propuso realizar simulaciones con el software Probability Explorer (Drier, 2000a, 2000b) para modelar la situación aleatoria de la variable aleatoria número de caras, se tomaron algunas distribuciones de frecuencias a corto, mediano y largo plazo, se respondieron algunas preguntas sobre las percepciones de los datos y se hicieron inferencias para contrastar con las respuestas anteriores. Finalmente se concluyó el taller con una fase de institucionalización de conocimientos, donde se ejemplifica el uso del modelo SOLO para categorizar las respuestas y caracterizar las componentes conceptuales asociadas a las tareas que enfrentan los participantes en cada pregunta.

Las actividades desarrolladas pueden ser usadas y modificadas de manera libre para uso educativo y están disponibles a través del grupo abierto de Facebook: *Probability Explorer* o a través del link: https://www.facebook.com/groups/280979438671679/ el cuál es un espacio para socializar temas de enseñanza de la probabilidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Biggs, J. B., Collis, K. F. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligence behavior. En H. A. Rowe (Ed.) *Intelligence: Reconceptualization and measurement*, pp. 57 – 76. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Drier, H. S. (2000a). The Probability Explorer: A research-based microworld to enhance children's intuitive understandings of chance and data. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 22 (3-4), pp. 165-178.

Drier, H. S. (2000b). Children's meaning-making activity with dynamic multiple representations in a probability microworld. In M. Fernandez (Ed.), *Proceedings of the twenty-second annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (2), pp. 691-696. Tucson, AZ.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics*, 3(2), 9-19.

Garfield, J.B., Ben-Zvi, D., Chance, B., Medina, E., Roseth, C., & Zieffler, A. (2008). Creating a Statistical Reasoning Learning Environment. In Garfield, J.B., & Ben-Zvi, D. (Eds.) *Developing Students' Statistical Reasoning Connecting Research and Teaching Practice*, (3), pp. 45, 63. Springer Netherlands.

Jaimes, E., & Martínez, J. (2007). *Probability Explorer: Un Socio Cognitivo en la Construcción del Significado de la Ley de los Grandes Números con Estudiantes de Octavo Grado en el Instituto Técnico Industrial de Puente Nacional*. Tesis de especialización en Educación Matemática no publicada. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

Jaimes, E. (2011). *Niveles de Razonamiento Probabilístico con énfasis en la Noción de Distribución de Estudiantes de Secundaria en Tareas de Experimentación y Simulación Computacional*. Tesis de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa no publicada. Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Cinvestav - IPN. México, D. F.

Pfannkuch, M. & Reading, Ch. (2006). Reasoning about distributions: a complex process. *Statistics Education Research Journal*, 5 (2), pp. 4-9.

Reátiga, A., 2004. *Confrontación entre realidad y modelo teórico: Una propuesta para desarrollar la intuición probabilística en los niños de sexto grado.* Tesis de especialización en Educación Matemática no publicada. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga. Colombia.

Sánchez, E. (2002), *"Teachers Belief About usefulness of simulation with the educational software Fathom for developing probability concepts in statics classroom".* En B. Philips (ed). Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statics [Conference paper ICOTS 6], International Association for Satatistical Education.

Watson, J. (2006). Chance – Precursor to Probability. In J. Watson (2006), *Statistical Literacy at School* (pp. 127–185). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Yáñez, G. (2003). *Estudios sobre el Papel de la Simulación Computacional en la Comprensión de las Secuencias Aleatorias, la Probabilidad y la Probabilidad Condicional.* Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México D.F.

La modelación matemática en el contexto de la robótica: una actividad didáctica realizada por aprendizaje de proyectos para el concepto de proporción

*Javier Andrés Moreno Torres**

RESUMEN

La modelación matemática es una actividad científica visible en las prácticas investigativas de los expertos en ciencias aplicadas. Esta actividad se está adaptando a los términos educativos, como un método didáctico que exalta la participación de los conocimientos matemáticos y no matemáticos en contextos reales. Así, el propósito del taller es mostrar una actividad de la modelación matemática en contextos reales como la robótica. Para esta actividad el objeto matemático es la proporcionalidad dirigida a los grados séptimos; sin embargo, lo importante para el taller será estructurar una actividad de modelación matemática a través de la enseñanza por proyectos, identificar los elementos necesarios de la planificación didáctica y reflexionar sobre el uso del contexto de la robótica.

Palabras-clave: Modelación matemática, robótica, proyectos, mundo real, proporcionalidad

* Secretaría de Educación Distrital. Dirección electrónica: javierandresmoreno@gmail.com

PRESENTACIÓN

Este taller tiene como propósito diseñar una actividad de modelación matemática en el contexto de la robótica para la enseñanza de la proporcionalidad en grado séptimo, la cual se ejecuta a través de un proyecto en un ambiente de aprendizaje y potencia la reflexión sobre la relación entre la matemática, las ciencias que la requieren y la vida cotidiana.

El diseño de la actividad se intenta para usar diferentes elementos, tales como los registros de representación, el tránsito entre el lenguaje natural y matemático, la construcción de modelos matemáticos, el aprendizaje a través de proyectos, la argumentación a partir de supuestos, la búsqueda de analogías y la identificación de las nociones previas.

El desarrollo de la actividad de modelación matemática en el contexto de la robótica se plantea desde un proyecto; esto implica la contextualización de un problema, búsqueda y aplicación de información y conocimiento, la evaluación de los procesos, la creación o generación y la comunicación.

Los elementos descritos deben potenciar la reflexión sobre el origen de las matemáticas desde otras ciencias; esto daría sentido a las matemáticas escolares, y en respuesta, la matemática le daría sentido a las ciencias que la usan.

MARCO TEÓRICO

La humanidad desarrolló la ciencia por medio de teorías adecuadas para intentar entender la naturaleza. Utiliza las teorías para tomar decisiones y actuar correctamente (Bassanezi, 2007).

La ciencia se entiende entonces como el producto de la evolución mental, emocional y social, en un fenómeno acumulativo en el cual se han desarrollado representaciones orales y visuales para entender y manejar la realidad.

Las ciencias en los ambientes escolares ven en la matemática una función estrictamente estadística, sin reconocer el verdadero poder de la matemática y la lógica como ciencias formales que dan coherencia y orden a las observaciones o experiencias empíricas de los científicos. A partir de esta evolución entre la matemática y las ciencias que la requieren, se configura la modelación matemática (Bassanezi, 2007).

Los científicos en la observación de los fenómenos naturales intentaron explicar, predecir y comprender lo que sucedía; en estos procesos los científicos no solo acudían a los conocimientos propios de su ciencia, también acudían a otras ciencias como la matemática, de tal forma que les sirviera para lograr una comprensión global del fenómeno.

La modelación matemática en la ciencia contemporánea parte de experiencias planificadas y basada en teorías sujetas a la evolución. La ciencia ya no está sujeta al empirismo y las prácticas de ensayo y error; ahora la ciencia construye el conocimiento a través de actividades planificadas y hace relevantes los conocimientos anteriores.

Las prácticas integradoras entre las ciencias y las matemáticas buscan emular las formas de pensar, los procesos de la observación y la investigación, y las actividades científicas experimentales.

La modelación matemática abarca exclusivamente problemas del *mundo real*. Según Blum (citado por Villa, Bustamante, Berrío, Osorio, & Ocampo, 2009) es: "… todo aquello que tiene relación con la naturaleza, la sociedad y la cultura, incluyendo lo referente a la vida cotidiana, como a los temas escolares y universitarios y disciplinas curriculares distintas a la matemática".

El mundo real en el ambiente escolar muchas veces se virtualiza, pierde su esencia, desmotiva y se convierte en un artificio propio de las matemáticas pasivas y no de las matemáticas aplicadas (Villa, Bustamante, Berrio, Osorio, & Ocampo, 2009). En este sentido el estudio realizado por Alsina (2007) muestra las realidades utilizadas en el ambiente escolar por los educadores. Estas realidades son:

Realidades falseadas y manipuladas: escriben situaciones con datos aparentemente reales o históricamente correctos, pero deformadas para realizar ejercicios matemáticos rutinarios (Alsina, 2007). *Realidades inusuales*: aparecen como si fueran cotidianas, pero son de carácter excepcional o muy poco frecuente. *Las realidades caducadas:* pertenecen a las situaciones pasadas, en algún momento fueron actualidad, pero perdieron vigencia para el presente. *Realidades lejanas*: son aquellas que no pertenecen a la cultura local o a hechos no aceptados globalmente por el individuo. *Realidades ocultas*: son hechos no observables directamente y cuyos resultados no pueden ser contrastados. *Realidades no adecuadas*: son situaciones no adecuadas a la edad y circunstancias de los estudiantes. *Realidades inventadas*: son situaciones de realidades ficticias, maquilladas como situaciones aparentemente posibles.

Las actividades de la modelación matemática se desarrollan en ambientes de aprendizaje; estos son los espacios sociales ideales para realizar una reflexión entre el individuo, el objeto de estudio y los artefactos, para la construcción de un saber común (Radford, 2006).

En la modelación matemática en el ambiente de aprendizaje se deben conformar grupos de tres estudiantes para el proyecto, con perfiles definidos (Camarena, 2005).

El líder académico es el estudiante teórico de la clase al cual le gusta basarse en hechos verificables y teorías. *El líder emocional*: su característica de aprendizaje se basa en la intuición; son estudiantes animosos que toman pocas notas en clase porque selecciona lo esencial. *El líder de trabajo*: es un estudiante metódico, organizado, y frecuentemente meticuloso, lo desborda la toma de apuntes porque intenta ser claro y limpio.

En los grupos de trabajo, la modelación matemática presenta procesos o actividades intelectuales:

La primera actividad intelectual es la *experimentación*. Los métodos experimentales son casi siempre dictados por la naturaleza del objeto (Bassanezi, 2007); se llevan a cabo en el laboratorio o en lugar que signifique un espacio distinto al tradicional; la mayor contribución de la experimentación es el procesamiento de datos.

La *abstracción* debe llevar a la formulación de los modelos matemáticos (Bassanezi, 2007); el estudiante debe establecer: la selección de variables; la formulación de los problemas teóricos; la formulación de la hipótesis, y la simplificación de los problemas complejos en sencillos.

La *resolución* se entiende como la sustitución de lenguaje natural por lenguaje matemático coherente y dependiendo de la complejidad se hará necesario el uso de métodos computacionales dando una solución numérica aproximada (Bassanezi, 2007). Esta fase es importante en la modelación matemática; puede ser la responsable de los adelantos matemáticos porque si el modelo no se acomoda, se debe reformular y transformar para dar solución.

La *validación* es el momento en donde el modelo se pone a prueba con datos empíricos. El grado de aproximación de las pruebas con el modelo será el factor determinante para la validación.

La *modificación* es el proceso natural cuando se comprueba que existieron errores que se pueden corregir.

En la modelación matemática, el estudiante tiende a ser responsable de su propio aprendizaje e invita al educador a realizar trabajos investigativos como parte de su labor docente.

METODOLOGÍA DEL TALLER

El taller se desarrolla en dos partes: se inicia con la actividad para crear las nociones previas y se continúa con la fundamentación teórica, formalizando los elementos básicos de la modelación matemática.

Sesión práctica - Actividad para estudiantes

Recordar - Comprender 

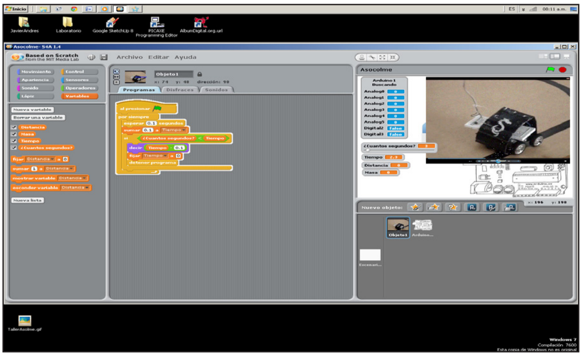


Ilustración 1. Interfaz gráfica del software a utilizar en la aplicación robótica.

En nuestras manos tenemos un sofisticado dispositivo robótico al cual llamaremos DRAGÓN. El robot está diseñado para seguir un camino de color negro sobre una superficie blanca, el camino lo podemos diseñar a nuestra imaginación o copiando pistas de carreras famosas como la FÓRMULA UNO, o de un RALLY. Lo importante es decirle a nuestro Robot DRAGÓN por dónde debe dirigirse.

Además de seguir un camino de color negro, DRAGÓN también nos dice algunos datos mientras transita por el camino que hemos elegido, como lo son la distancia que recorre y el tiempo que dura ese recorrido.

En esta actividad nuestro robot DRAGÓN nos ayudará a obtener los datos de un recorrido en línea recta y así lograr entender la relación entre la distancia y el tiempo cuando se mueve un objeto como el robot DRAGÓN.

Aplicar - Analizar

Realiza los siguientes procedimientos:

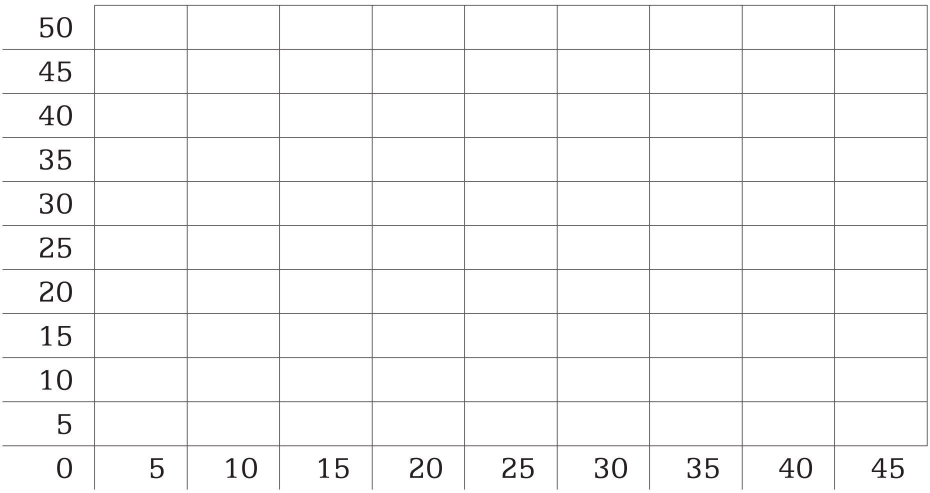
A. Diseña una pista de carreras de 1.5 m en forma de línea recta.

B. Coloca al robot DRAGÓN al inicio de la pista, y en el programa informático dile cuánto tiempo quieres que circule. Toma el dato de la distancia que recorrió.

C. Ya observaste el funcionamiento del robot DRAGÓN, completa la siguiente tabla:

Tiempo (s)	*Distancia (cm)*
1	
2	
3	
5	
8	

D. Ubica en el siguiente gráfico los datos que nos dio el robot DRAGÓN.



Evaluar

A partir de la experiencia con el robot DRAGÓN, contesta:

En las tablas de datos y en las gráficas existen las "variables" donde los datos cambian. Existen dos tipos de variables: las "variables dependientes" que dependen de otra variable para existir. Y las variables independientes, que NO dependen de otra variable. En la experiencia con el robot DRAGÓN:

1. ¿Cuál es la variable independiente?

____

2. ¿Cuál es la variable dependiente?

____

3. ¿Existen datos constantes? Explique su respuesta.

____

____

4. Si el tiempo aumenta, entonces la distancia cómo se comporta

____

Crear

En este momento vamos a diseñar el proyecto de una pista de carreras, donde el robot DRAGÓN pueda seguir un camino, con varias curvas y rectas. Las condiciones son las siguientes:

- La pista de carreras puede tener tantas curvas como rectas quieras.
- La pista de carreras es solamente para un carro.
- En la recta principal nuestro robot DRAGÓN debe permanecer 5 (s) segundos, en la primera recta secundaria el robot debe permanecer 2.5 (s) segundos y en la segunda recta secundaria debe estar 3 (s) segundos.

1. Para comenzar con el proyecto, soluciona las siguientes preguntas:

   ¿Dónde se encuentra el problema? ¿Qué problema se quiere solucionar? ¿Por qué se quiere solucionar el problema? ¿Con qué cuento? ¿Qué tipo de datos tengo? ¿Tengo condicionantes? ¿Cuáles son variables en mi problema y cuales son constantes? ¿Se podrá ver para casos particulares y después para cualquier caso? ¿Qué problema que ya he resuelto se parece a este?

2. Determina la distancia que deben tener las rectas con respecto al tiempo que se dio.

3. Realiza un bosquejo de la pista y finalmente constrúyela sobre una superficie blanca.

SESIÓN TEÓRICA

La sesión teórica tiene el propósito de analizar la planificación didáctica de una actividad de modelación matemática en el contexto de la robótica por parte de los docentes asistentes.

Actividad para docentes

1. Describa los elementos presentes en la actividad de proporcionalidad, realizada con el robot DRAGÓN:

Tránsito entre los diferentes registros de representación:
Tránsito del leguaje natural al matemático, y viceversa
Construcción de modelos matemáticos
Aprendizaje a través de proyectos
Argumentación, habilidad de conjeturar y partir de supuestos
Búsqueda de analogías
Identificación de nociones previas
Identificación de obstáculos

2. Describa los componentes y pasos que fueron visibles en la actividad para realizar un proyecto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas. ¿Cuántas tuvo Enrique IV? *Revista Iberoamericana de Educación* (43), 85-101.

Aravena, M., Carlos, C., & Joaquín, G. (2008). *Modelos matemáticos a través de proyectos*. Relime, 11 (001), 49-92.

Bassanezi, R. C. (2007). Modelación matemática: ¿un método científico de investigación o una estrategia de enseñanza aprendizaje? En R. C. BASSANEZI, *Enseñanza y aprendizaje con modelación matemática* (J. Acevedo, trad.). Brasil.

Camarena, P. (2008). La matemática en el contexto de las ciencias. *Memorias del iii Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas*. Perú.

D´Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representación semiótica y noéticas: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno* (35), 90-106.

Font, V. (2005). Funciones y derivadas. *Memorias del XXI Coloquio Distrital de Matemáticas i Estadística*, 1-47.

Olazábal, A. M. (2005). *Categorías de la traducción del lenguaje natural al algebraico en la matemática en contexto.* Tesis doctoral, Instituto Politécnico Nacional, México, D. F.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Relime* (especial), 103-129.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión de la investigación en educación matemática. *PNA*, 1-14.

Sallet, M. B., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemáticas. *Educación matemática*, 16 (2), 105-125.

Villa, J. A., & Ruiz, H. M. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista virtual* Universidad Católica del Norte (27).

Villa, J. A., Bustamante, C. A., Berrio, M. D., Osorio, J. A., & Ocampo, d. A. (2009). Sentido de realidad y modelación: el caso de Alberto. *Alexandria*, 2 (2), 159-180.

Material educativo computarizado para la enseñanza de las matemáticas

Diego Alberto Muñoz Delgado [*]
Aduar Mauricio Mateus Ocampo [**]
Santiago Franco Posada [***]

RESUMEN

En la actualidad se hace necesario implementar en los procesos de enseñanza aprendizaje nuevas herramientas que permitan la ampliación metodológica y didáctica de un saber, al mismo tiempo que sean innovadoras y que utilicen recursos educativos efectivos, actuales y gratuitos, como es el caso de las llamadas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC).

Con este taller se pretende incentivar a los profesores que orientan el área de matemáticas (básica primaria, básica secundaria y media) a trabajar en sus aulas con software no necesariamente educativo, que facilite el desarrollo del pensamiento matemático (aleatorio, numérico, geométrico, variacional), sin perder de vista la función mediadora de las herramientas computacionales en el logro de metas para el desarrollo de un objeto matemático específico. En este taller se demostrará el uso de una secuencia didáctica, que sirve como guía, para aquellos docentes que desean trabajar sus clases de matemáticas con la ayuda de software.

Palabras clave: metodología de enseñanza, software, resolución de problemas, innovación.

[*] Universidad del Quindío. Dirección electrónica: daltomoz@gmail.com
[**] Universidad del Quindío. Dirección electrónica:eduarmauricio78@yahoo.com.co
[***] Universidad del Quindío. Dirección electrónica:tiago323@hotmail.com

INTRODUCCIÓN

Con la llegada de los computadores a las instituciones educativas, los docentes se dieron cuenta de que era complicado utilizarlos para enseñar una materia porque se desconocía el manejo del equipo. Esos tiempos han venido cambiando: ahora los estudiantes son nativos digitales, para quienes la utilización de las TIC no representan mayor dificultad.

Es el momento para que los docentes aprovechen esas habilidades de los estudiantes, trabajando para que la docencia y los procesos de aprendizaje se adapten a las características de los individuos actuales. La utilización de las TIC en el aula de clase es una necesidad inequívoca; es por ello que los docentes deben incursionar cada vez más en la creación de Materiales Educativos Computarizados (MEC), que les faciliten a los estudiantes aprender a su propio ritmo y de acuerdo con sus necesidades individuales.

El papel de los docentes está cambiando del modelo tradicional, donde ellos eran la fuente del conocimiento, a un nuevo rol como mediadores, motivadores y facilitadores de procesos de aprendizaje. Ahora es importante que dediquen su esfuerzo a la creación de recursos educativos que contribuyan a promover en los estudiantes la creación de estrategias que les permitan aprender a aprender mediante la resolución de problemas y que integren las TIC con métodos pedagógicos innovadores en el aula de clase.

METODOLOGÍA

Pensando en el nuevo rol del docente, se compartirá una secuencia didáctica que sirve como guía para aquellos docentes que desean trabajar sus clases con ayuda de un software en el área de matemáticas. Esta secuencia didáctica es resultado de la aplicación de la metodología ingeniería didáctica (Artigue, 1990), en procesos investigativos desarrollados por estudiantes de maestría de la Universidad del Quindío, y se presenta a consideración de los asistentes del evento como una experiencia de aula. Los asistentes al taller recibirán algunas de las guías didácticas utilizadas para trabajar diferentes objetos matemáticos desde los pensamientos numérico, geométrico y variacional, con ayuda de software. Además de los materiales, se comentará el proceso para elaborar las guías de trabajo y los resultados obtenidos con los estudiantes.

El propósito del taller es involucrar tanto a los docentes como a los estudiantes con las nuevas tecnologías, exaltando la importancia que tiene el trabajo guiado, que busca objetivos precisos desde el mismo momento de su diseño y que tiene claras cuáles son las habilidades que el alumno debe demostrar en cada una de las actividades propuestas.

El desarrollo de la secuencia didáctica presupone que la actividad de enseñanza se estructure y planifique correctamente, buscando resultados que transformen la producción del estudiante al apropiarse de nuevos contenidos, de una manera activa y creativa, a través de los cuales adquiera y aplique diferentes conocimientos de manera competente en su vida cotidiana.

Cuando el docente estructura y organiza el proceso pedagógico, respondiendo a la inclusión de todos los agentes involucrados en la actividad educativa, y utiliza métodos que permitan que el estudiante aprenda a aprender, que se sienta responsable y comprometido con sus resultados, que comprenda que solo con su preparación consciente y sistemática podrá demostrar que ha aprehendido, que sabe por qué sabe hacer, que sus estructuras cognitivas se han desarrollado como resultado de su aprendizaje, cuando todo ello ocurre, la educación adquiere su real dimensión: la de transformar.

Mediante este taller se busca impulsar el uso de estos MEC en las instituciones educativas, al igual que compartir tres experiencias de aula, dirigidas al fortalecimiento de tres pensamientos matemáticos: el numérico, el geométrico y el variacional. Dichas experiencias dieron origen a guías de trabajo, las cuales se compartirán con los asistentes.

En torno al pensamiento numérico, pretendemos dar cuenta de la Ingeniería Didáctica desarrollada para construir una secuencia didáctica basada en las TIC, utilizando aplicaciones diseñadas en java para fortalecer el concepto de fracción desde su interpretación como parte-todo. Dicha secuencia está diseñada para el trabajo con estudiantes de grado séptimo.

Como estrategia metodológica para desarrollar el pensamiento geométrico-espacial en estudiantes de la Básica Secundaria, presentaremos guías de clase que combinan el trabajo apoyado en las TIC con Software aplicativo como Poly, Activa tu mente y Multicubos; con actividades de lápiz y papel, tendentes a desplegar el potencial de generar perspectivas tridimensionales, partiendo de imágenes bidimensionales, además de establecer el cubo como unidad básica de medida tridimensional.

En cuanto al pensamiento variacional, se explicará el proceso realizado para crear la secuencia didáctica, la forma como se utilizan los videotutoriales, las guías paso a paso y el software (Microsoft Excel y GeoGebra), para solucionar problemas con sistemas de ecuaciones lineales en grado noveno.

Para desarrollar el taller se requieren computadores donde los participantes realicen la instalación del software aplicativo que utilizarán durante las prácticas. Los computadores deben tener habilitadas las unidades de DVD o USB y preferiblemente estar conectados en red, aunque no es una camisa de fuerza. El software y los materiales utilizados para el taller serán entregados a los asistentes en CD.

Los tres docentes proponentes se encargarán de exponer las bondades de las experiencias de aula, realizar las demostraciones sobre instalación de software, explicar cómo se diseñan y utilizan las guías didácticas en ambientes escolarizados, y asesorar a los participantes durante el desarrollo de las actividades.

MARCO TEÓRICO

La secuencia didáctica que se propone se enmarca en la teoría de la Ingeniería Didáctica de Michelle Artigue, que, a su vez, tiene como referentes la teoría de la transposición didáctica de Yves Chevallar (Chevallard, Pourquoi la transposition didactique, 1962) y la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau (Brousseau, 1997).

La ingeniería Didáctica nace en Francia en medio de las corrientes constructivistas piagetianas, en las que se reconoce que el niño participa en la elaboración de su conocimiento, y dicho conocimiento se adquiere por adaptación a un medio que aparece como problemático (Artigue, Douady, Moreno, & Hurtado, 1995).

La ingeniería Didáctica se manifiesta como un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas (Artigue, Douady, Moreno, & Hurtado, 1995). Además, es un marco teórico y metodología de investigación cualitativa, que rompe con el viejo esquema de investigación meramente positivista.

Como metodología de investigación la ingeniería didáctica se trabaja mediante "realizaciones didácticas" en el aula, es decir, con base en un tema susceptible de investigarse con un grupo de personas, se realiza un análisis preliminar de las situaciones que se desean estudiar como parte del proceso experimental. Luego, en el análisis a priori se busca precisar los valores de las variables didácticas que se producen como consecuencia de la selección de aspectos a investigar. Seguidamente, se realiza el diseño de la situación didáctica y la intervención pedagógica en la fase experimental. Al final, en el análisis a posteriori, los resultados de la intervención pedagógica o secuencia didáctica se comparan con los resultados del análisis a priori para rechazar o confirmar las hipótesis formuladas inicialmente.

El proceso experimental de la ingeniería didáctica consta de cuatro fases:

1. Primera fase: Análisis preliminares.
2. Segunda fase: Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas.
3. Tercera fase: Experimentación.
4. Cuarta fase: Análisis a posteriori y evaluación (Campos E. d., 2006, p. 3).

En la actualidad, una gran cantidad de investigadores usan esta teoría cuando tratan de incluir las TIC en los procesos investigativos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En nuestro caso, se convierte en un marco ideal, pues nuestra propuesta trata de incluir las TIC en el aula de matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Hurtado, H. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática (Primera ed., Vol. 1). (H. Hurtado, Ed.) Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1997). La thèorie des situations didactiques. Recuperado el 17 de noviembre de 2011, de http://math.unipa.it/: http://math.unipa.it/~grim/brousseau_montreal_03.pdf

Campos, E. d. (2006). Ingeniería Didáctica. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática., 9.

Chevallard, Y. (1962). Pourquoi la transposition didactique. Recuperado el 18 de octubre de 2011, de http://yves.chevallard.free.fr:

Chevallard, Y. (1997). La Transposición Didáctica: Del saber sabio al saber enseñado.

Uso de material manipulativo en clases de matemáticas: una aproximación al trabajo experimental con los hexaminós

Octavio Augusto Pabón Ramírez[*]
Lina María Avirama Gutiérrez[**]
Carolina Rodríguez Raigoza[***]

RESUMEN

Las tendencias recientes en didáctica de las matemáticas otorgan especial atención a las matemáticas experimentales, vinculadas con el resurgimiento del interés por la integración de recursos manipulativos y fundamentalmente por una nueva conceptualización de recurso pedagógico. Nuestra propuesta de taller se estructura a partir de elementos teóricos y metodológicos desarrollados en el marco del proyecto "Caracterización de los vínculos entre los Recursos Pedagógicos y el Conocimiento Matemático en la Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Básica", que desarrolló el Grupo de Educación Matemática, GEM. (Universidad del Valle – COLCIENCIAS, Contrato 110648925213). Este taller busca que los profesores de matemáticas desarrollen un conocimiento fundamentado de la integración de recursos (en nuestro caso, los hexaminós) en las clases de matemáticas.

Palabras clave: didáctica de las matemáticas, matemáticas experimentales, geometría, hexaminós.

[*] Universidad del Valle. Dirección electrónica: augpabon@yahoo.com
[**] Universidad del Valle. Dirección electrónica: linaavirama@gmail.com
[***] Universidad del Valle. Dirección electrónica: carolin0617@hotmail.com

PRESENTACIÓN

Los materiales manipulativos tienen una extensa tradición en el ámbito de la Educación Matemática. En efecto, el uso e integración de los mismos en el aula de matemáticas ha tenido momentos de auge y momentos críticos en los que tales materiales prácticamente desaparecieron de las aulas de matemáticas. No obstante, siempre ha sido posible reconocer un interés de investigadores y docentes sobre este asunto, asociado al reconocimiento del rol central de la dimensión experimental de las matemáticas que consideran al aprendizaje de las mismas como un proceso constructivo, lo cual significa aceptar que los alumnos tienen, descubren y adquieren habilidades y conocimientos matemáticos y, que por lo regular, lo hacen en el marco de actividades sociales en las que se proponen tales aprendizajes.

De igual manera, es evidente el interés por la creación de contextos matemáticos significativos y auténticos que se asocien a la posibilidad de que las invenciones y producciones de los alumnos puedan ser relacionadas con las habilidades y los conceptos matemáticos que se espera aprendan y, de esta manera, sean marcos útiles y apropiados para el aprendizaje. Es, por tanto, esencial que los contextos en que se anclan los problemas matemáticos en juego representen la diversidad, la complejidad, la sobre información y ambigüedad de las situaciones problema que los alumnos puedan encontrar fuera de sus clases de matemáticas.

En la perspectiva del trabajo experimental, uno de los contextos de mayor tradición es el asociado al trabajo con materiales y recursos manipulativos. Así, se considera que la manipulación, el trabajo con modelos visuales, esquemas y diagramas, entre otros, podrían ser usados como elementos para la construcción de un puente entre las nociones intuitivas de los alumnos y las estrategias informales, de un lado, y los conceptos y procedimientos de las matemáticas formales, del otro. A los alumnos mismos les conviene tanto como sea posible, jugar un papel central en el desarrollo y refinamiento de estos modelos y herramientas.

MARCO TEÓRICO

La formación y actualización de docentes de matemáticas otorga especial relevancia al trabajo con artefactos en didáctica de las matemáticas, fundamentado a partir del denominado enfoque instrumental1. De esta manera

[1] De acuerdo con Drijvers y Gravemeijer (2005), la aproximación instrumental para aprender a usar herramientas surge en el marco de los trabajos sobre la ergonomía cognitiva (Rabardel,

se abordan asuntos que incluyen, entre otros: el análisis de artefactos, experiencias de sesiones de trabajo experimental organizadas por los mismos profesores, reflexiones sobre el potencial y utilización didáctica y la gestión didáctica. Entre los asuntos conexos con este interés se destaca la evolución de los artefactos utilizados en las aulas de matemáticas y una transformación/concepción de recurso pedagógico para los profesores en formación, como fundamento del trabajo colaborativo y para la constitución de comunidades de práctica.

Este tipo de experiencias puede contextualizarse a partir de las consideraciones de Bruno D'Amore (2004) quien establece una tipología del campo de la didáctica de las matemáticas y señala que los esfuerzos de integrar materiales en el trabajo en el aula de matemáticas forman parte de la denominada didáctica de tipo A2, es decir, todos los estudios y las ideaciones de instrumentos (concretos o no) que pueden mejorar la enseñanza de las matemáticas. En esta categoría incluye los trabajos clásicos de Dienes, de Castelnuovo y los ambientes inspirados en las ideas de Montessori.

De otra parte, es posible reconocer que un número significativo de investigaciones realizadas en la última década se han centrado en cómo se lleva a cabo la integración de herramientas a la escuela y la influencia de los maestros en este proceso. También se han abordado las dificultades de los profesores para realizar una integración efectiva de las herramientas en la enseñanza de las matemáticas. En relación con este asunto, se destaca el marco teórico propuesto por Artigue (2002), denominado instrumentación.

También se reseña el debate sobre lo que específicamente constituye una herramienta. En relación con este asunto se destacan los aportes de investigadores franceses (por ejemplo, Artigue, 1998, 2002; Lagrange, 1999, Güin y Trouche, 1999, 2002, 2004, 2008; Trouche, 2003, Drijvers, P., Trouche, L. 2008,) quienes apoyados en el marco teórico de la instrumentación han propuesto diversas interpretaciones sobre la dinámica de la integración de las herramientas en el proceso de enseñanza de las matemáticas.

1995). Las ideas de Vygotsky (1978) de cómo las herramientas median el aprendizaje pueden considerarse como las bases de esta aproximación. En Francia, los investigadores y educadores matemáticos (Artigue 1998, 2002, Güin & Trouche 1999, Lagrange 2000, Trouche 2003,) se han apoyado en la aproximación instrumental para el aprendizaje de las matemáticas usando herramientas informáticas y computacionales.

[2] D'Amore señala que se puede hipotizar un doble modo de ver a la didáctica de la matemática, a saber: La didáctica A es como la divulgación de las ideas fijando por lo tanto, la atención en la fase de la enseñanza (A mayúscula aquí está por Arte), la didáctica B, como investigación empírica, fijando la atención en la fase del aprendizaje. (D'amore, 2004).

Ahora bien, los investigadores señalan que la investigación histórica muestra claramente, en tiempos y en zonas geográficas dados, la existencia y la diversidad de herramientas utilizadas para el cálculo, como también para otros propósitos que reflejan las necesidades de cálculo de la sociedad en cuestión. Estas herramientas tienen una doble condición, a saber: surgen de la actividad humana y a su vez asisten a la actividad humana. En tal sentido reconocen la existencia de dos invariantes: diversidad y articulación de herramientas y de una evolución hacia prácticas más experimentales. A partir de este reconocimiento formulan algunas preguntas relacionadas con la integración de herramientas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que incluyen entre otras: ¿existen buenos contextos, buenas prácticas de enseñanza y cómo es posible promoverlas? dentro de la perspectiva del laboratorio de matemáticas (Maschietto & Trouche, 2010).

En el marco de referencia señalado anteriormente, estos investigadores proponen una estrategia que contempla la búsqueda de herramientas en la historia de la educación matemática y su estudio desde la perspectiva instrumental, el análisis de la noción de laboratorio de matemáticas, desde un punto de vista histórico, y la discusión de algunas experiencias de formación y cualificación de profesores de matemáticas. Güin y Trouche (2008) introducen igualmente una idea mucho más compleja en relación con los recursos: concebir los recursos pedagógicos como artefactos, que se constituyen en instrumentos dentro de comunidades de práctica emergentes. A partir de esta idea, se propone una reflexión interdisciplinaria sobre el desarrollo de recursos para el docente y se reconoce que una vez estos estén dentro de una comunidad de práctica, se debe dar tiempo a los profesores, para que logren un clima de confianza que permita la adhesión de otros actores.

En consonancia con lo expuesto, nuestra propuesta de taller busca plantear problemas cuyas soluciones se pueden enmarcar en algunos de los diferentes tipos de geometría existentes y que fundamentalmente tienen que ver con el estudio de ciertas propiedades geométricas, con el objetivo de crear perspectivas de generalización y modelación. De manera particular proponemos el trabajo con los denominados hexaminós, que en su condición de recursos manipulativos pueden asociarse tanto a la perspectiva experimental como a la perspectiva lúdica. En esta última se incorpora, desde diferentes perspectivas, un trabajo con recursos que se rigen con reglas acordadas previamente pero que tienen un trasfondo matemático claro y preciso.

Debe tenerse en cuenta que el juego en el aula de clase fue propuesto por primera vez por Solomon W. Golomb en 1954, al publicar "Checker Board and Polyominoes" (tableros de ajedrez y poliminós); asimismo, el término "poliminó", polígonos construidos al agrupar cuadrados unidos entre sí por uno de sus lados. Ahora bien aunque se suele señalar que pensar en jugar en las clases de matemáticas podría ser motivo de preocupación por la eventual pérdida de formalidad y estructura de la misma, el docente debe hacer un estudio detallado de su potencial, fortalezas y debilidades y así realizar una correcta selección del juego, reconociendo el propósito de integrarlo a las actividades de clase, y el contenido matemático que se mediará en su desarrollo, pues no todos los juegos responden al objetivo de enseñanza y aprendizaje matemático.

En particular, en lo que concierne a los hexaminós, estos involucran elementos geométricos que pueden vincularse a actividades en la clase de matemáticas, en diferentes niveles de escolaridad, constituyéndose en recursos pedagógicos que promueven el aprendizaje de la geometría. Nuestro interés es sobre uno de los tipos de poliminós, a saber, los hexaminós. Estos son la unión de seis (6) cuadrados; en total son treinta y cinco (35) posibles modelos de hexaminós, donde solo once (11) sirven para la construcción de un cubo (figura 1).

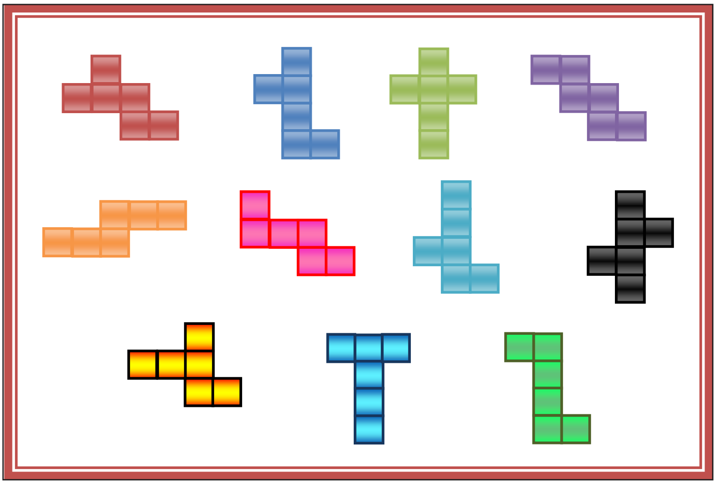


Figura 1. Hexaminós

Al trabajar con hexaminós en las clases de matemáticas en actividades de armado y representación de planos de cubos y su construcción (ensamble) buscamos potenciar y fortalecer el desarrollo de la imaginación espacial y aproximar el conocimiento no tangible de la geometría espacial, con el uso de material manipulativo.

METODOLOGÍA DEL TALLER

La propuesta de taller busca problematizar el rol que cumple una conceptualización de recurso pedagógico, a partir de estudios recientes sobre la naturaleza particular de los mismos y los hallazgos sobre este asunto en las aulas de clase. El taller estará planeado en dos (2) partes o sesiones. En la primera se plantean nuestras motivaciones, expectativas y creencias sobre los recursos pedagógicos y su integración a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, particularmente en el campo de la geometría escolar.

En la segunda sesión se plantean elementos teóricos y metodológicos para el uso e integración de recursos pedagógicos en la clase de matemáticas, a partir del trabajo experimental y lúdico con los hexaminós y se presentarán usos clásicos de los hexaminós en las clases de geometría y variaciones recientes desde la perspectiva del trabajo en Laboratorios de matemáticas y en clubes de matemáticas. Así en desarrollo de este proceso, esperamos que se generen espacios de discusión y se elaboran las conclusiones finales del taller.

Nivel al que va dirigido: Nivel medio. Profesores de Educación Básica, estudiantes de la Licenciatura en Educación en Matemáticas.

Tiempo: La duración del taller será de noventa (90) minutos, dividida en dos sesiones de 45 minutos.

Materiales: Los siguientes materiales se necesitan, por cada participante:

- Un octavo de cartón paja
- Regla
- Un lápiz
- Tijeras y bisturí
- Cinta pegante
- Pegante sintético
- 5 bisagras pequeñas
- Palos de pinchos (chorizos)
- Aguja capotera
- Lana

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1998). Teacher training as a key issue for the integration of computer technologies. In D.Tinsley & D.C.Johnson (eds), Information and Communication Technologies in School Mathematics (pp. 121–130), Chapman & Hall, London.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. International Journal of Computers for Mathematics Learning, 7, pp. 245–274.

D'Amore, B. (2004) Didáctica de la matemática. Bogotá: Editorial Magisterio.

Drijvers, P.; Gravemeijer, K. (2005) Computer algebra as an instrument: examples of algebraic schemes. In D. Guin., K. Ruthven and L. Trouche (Eds). The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument. Chapter 7, pp. 163-196, Springer.

Drijvers, P.; Trouche, L. (2008), From artifacts to instruments: a theoretical framework behind the orchestra metaphor, in K. Heid and G. Blume (eds.), Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics (pp. 363-392), Information Age., Charlotte, NC, Vol. 2. Cases and perspectives.

Golomb S. (1954) "Checkerboards and polyominoes", Amer. Math. Monthly61 (Dec. 1954), pp. 672–682

Guin, D.; Trouche L. (1999), The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments. The Case of Calculators, The International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3 (3), pp. 195-227

Guin, D. ; Trouche, L. (eds.) (2002), Calculatrices symboliques : transformer un outil un instrument du travail mathématique, un problème didactique, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Guin, D; Ruthven, K; Trouche, L. (eds.) (2004) The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument (contributions of M. Artigue, P. Drijvers, P. Elbaz-Vincent, J.B. Lagrange, M. Kendal, R. Pierce & K. Stacey), Springer.

Guin, D. ; Joab, M. & Trouche, L. (2008), Conception collaborative de ressources pour l'enseignement des mathématiques, l'expérience du SFoDEM (2000-2006), INRP et IREM (Université Montpellier 2)

Lagrange, J.B. (1999) Complex calculators in the classroom: Theoretical and practical reflections on teaching pre-calculus International Journal of Computers for Mathematical Learning, 4(1) pp. 51-81.

Lagrange, J.B (2000) L'intégration des instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques. Ed. Stud. in Math. 6(2): 143-165.

Maschietto, M. & Trouche, L. (2010). Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories, ZDM The International Journal on Mathematics Education, 42 (1), 33–47.

Rabardel, P. (1995) Les hommes et les technologies -approche cognitive des instruments contemporains. Paris: A. Colin.

Trouche, L. (2003). Managing the Complexity of Human/Machine Interaction in a Computer Based Learning Environment: Guiding Student's Process Command Through Instrumental Orchestrations. Communication presented at CAME 3: Learning in a CAS Environment: Mind-Machine Interaction. Reims, France, June 2003.

Vygotsky, L.S. (1978) Mind in society: The development of higher psychological processes. Cambridge, MA: Harvard University Press.

El dominio, rango y la transformación de funciones construyendo animaciones en GeoGebra

Ricardo Rey Monroy[*]
Alexandra Bulla Buitrago[**]
William Jiménez Gómez[***]
Sandra Milena Rojas[****]

RESUMEN

La comunicación expone los resultados del trabajo de investigación *"Construcción del concepto de fracción con estudiantes de Licenciatura en Educación Básica". Caso: una universidad en Bucaramanga,* realizado con la integración de los métodos cuantitativo y cualitativo. En una primera etapa se indagan e identifican los diferentes significados de fracción que tienen los estudiantes, a través de una prueba diagnóstica, apoyados en dos lineamientos teóricos: la didáctica de las matemáticas y la formación de maestros; posteriormente, se diseñan e implementan tres unidades didácticas utilizando las herramientas juego Partimundo, bloques lógicos de Dienes y regletas de Cuisenaire para construir los significados de fracción: parte-todo, razón y operador, lo que permite una observación directa del docente-investigador con el grupo objeto. Finalmente se aplica una prueba final que se contrasta con la prueba diagnóstica y el análisis de las observaciones realizadas en la implementación de la estrategia. El impacto de esta investigación genera en la Educación Superior la transformación de procesos de enseñanza a través de experiencias de aprendizaje significativas en los docentes en formación.

Palabras clave: fracciones, parte-todo, operador, razón, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

[*] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: lordking_28@hotmail.com
[**] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: alexa12108@hotmail.com
[***] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: williamajg@hotmail.com
[****] Instituto Pedagógico Nacional. Dirección electrónica: rojastolosa@yahoo.com.ar

PRESENTACIÓN

En el año 2011 en la cátedra de Didáctica de la Geometría de quinto semestre del proyecto curricular de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Bogotá, Colombia), se proponen actividades enmarcadas en la resolución de conflictos haciendo énfasis en el uso de las tecnologías en el aula como: software matemáticos e instrumentos tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas sustentados en el hecho de que los avances en las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones (reconocidas en el ámbito escolar y científico como las TIC) influyen directa o indirectamente en el ámbito educativo lo que requiere una formación previa del profesorado (González, et al. 2008). Una de dichas actividades se centró en el tema de "transformaciones de funciones en el plano real" haciendo uso del software de geometría dinámica "GeoGebra". Se propuso una situación basada en la elaboración de animaciones creativas donde la representación gráfica en un sistema de coordenadas cartesiana de funciones, sus dominios y rangos, movimientos rígidos como translaciones, reflexiones, y transformaciones de compresión, fueron los elementos básicos para la construcción de la animación.

El taller tiene como propósito dar a conocer las actividades realizadas, teniendo presente que la propuesta no tiene como objetivo la enseñanza de los conceptos sino la manipulación y reconocimiento de las características básicas de los mismos, para la creación de una animación visualmente atractiva.

MARCO TEÓRICO

En nuestros precedentes teóricos consideraremos algunos conceptos básicos como la función, su dominio y rango, además de las trasformaciones de una función vistas como movimientos rígidos. Dichos conceptos y procesos son los que se pretenden afianzar en la actividad propuesta mediante el uso de GeoGebra.

Llamaremos función de un conjunto *A* en un conjunto *B*, a toda relación *R* de *A* en *B*que cumpla la condición:

Para todo elemento $x \in A$, existe un elemento $y \in B$ y sólo uno tal que xRy.

Llamaremos dominio y rango de la función *f* a los conjuntos *D(f) e I(f)* definidos así:

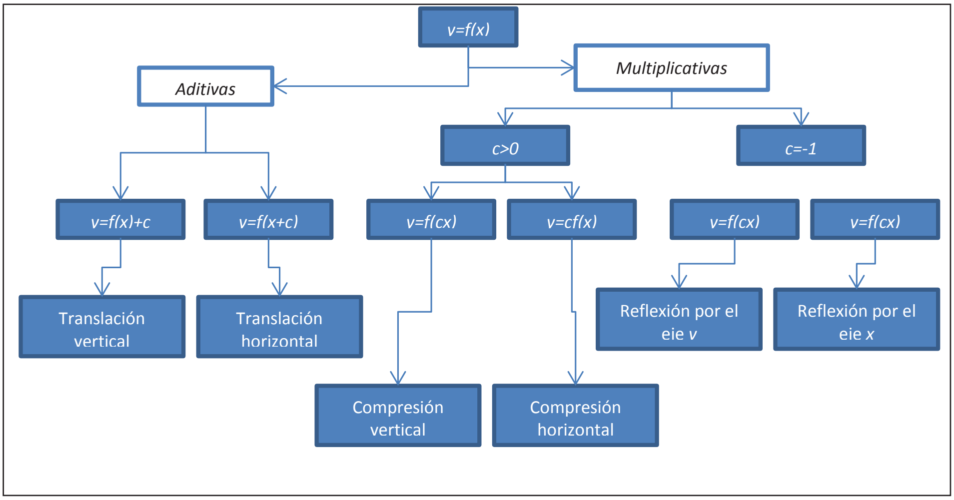
$$D(f)=\{x : x\in A \wedge xRy \text{ (para algún } y\in B)\}$$

$$I(f)=\{y : y\in B, \wedge xRy \text{ (para algún } x\in A)\}$$

(Muñoz, 2002)

Para nuestro caso particular, funciones en los reales ($\mathbb{R}$, tendremos que $\boldsymbol{A}$ **y** $\boldsymbol{B}\subseteq\mathbb{R}$, en este caso es usual presentar la función con la notación *y=f(x)*).

Las funciones reales pueden originar otras por medio de trasformaciones de esta haciendo operaciones aditivas o multiplicativas; los resultados al realizarlas se resumen en el *esquema 1* (Jiménez, Mayorga, Ahumada, y Cuchigay, 2011).



Esquema 1. Resumen de las características de la transformación de funciones

METODOLOGÍA DEL TALLER

Inicialmente se dará a conocer la aplicación de una de algunas herramientas de GeoGebra. La primera es el deslizador que se emplea para dar movimiento a las funciones, hacer variar un objeto con un cambio definido en intervalos de números racionales; es decir, se aplica el deslizador para comenzar a animar las representaciones gráficas de las funciones descritas anteriormente; por ejemplo, en la *figura* 1 se muestra la función $y = sen\,(ax)$ para valores de *a* entre 0 y 5.

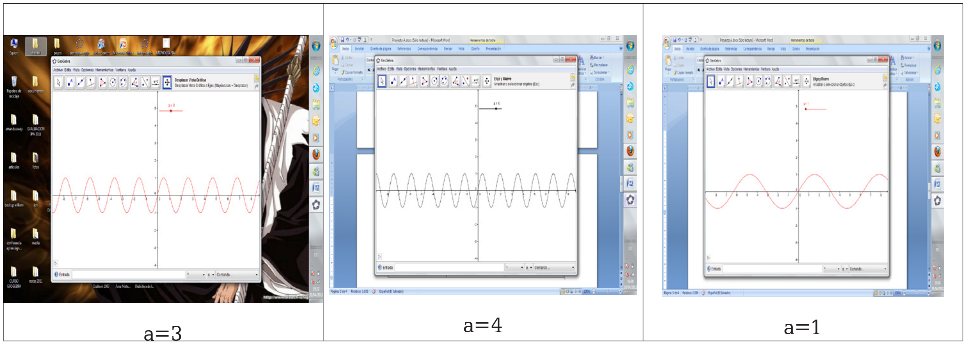


Figura 1.

Después se explicarán las diversas formas de graficar una función en GeoGebra; la primera de estas es el de la herramienta sin restricción " $y=$ " ó " $f(x)=$ " que sirve para graficar una función con dominio sin poner condición alguna puesto que el software mismo identifica el dominio de la función por ejemplo, en la función $f(x)=\frac{1}{x}$ la gráfica reconoce que la función está definida para todo número real, salvo para el cero. En la *figura* 2 se muestra la gráfica resultante al escribir una función cuadrática.

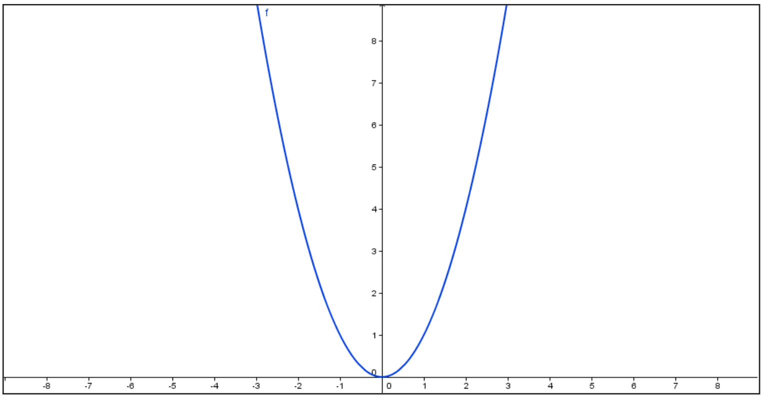


Figura 2. $f(x)=x^2$

La segunda forma para graficar una función es la herramienta condicional dada por la forma " Si[<condición>, <entonces>, <si no, entonces>] ", que sirve para definir funciones a trozos, por ejemplo, para graficar funciones relacionadas con el valor absoluto que dependen de un intervalo para trazar el segmento de alguna función, se condiciona el dominio por ejemplo para la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si\ ,\ x\leq 0 \\ x & si\ ,\ x>0 \end{cases}$$

Se usaría la forma: $si[x\leq 0, x^2, x]$ (*Figura* 3)

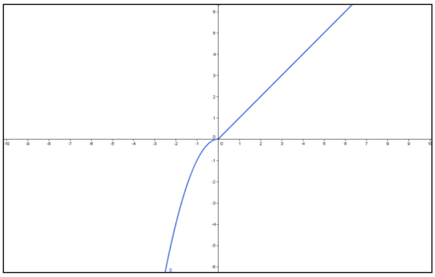


Figura 3.

Y por último, la tercera forma que se mostrará: función con restricción dada por la forma "Función[<función>, <valor inicial>, <valor final>]" esta sirve para restringir la función en un intervalo dado, donde se restringe el dominio para obtener solamente un trozo de la función (*figura* 4).

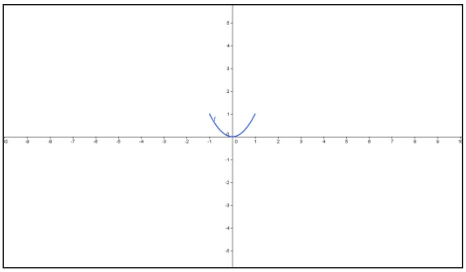


Figura 4. *Función*$[x^2$, -1,1]

Haciendo uso de estas formas y diferentes tipos de funciones, se procede a realizar la construcción de varias imágenes interesantes. Un ejemplo es la construcción de una "barca" que está sobre el agua, que se desplaza sobre el mar (*figura* 5), actividad que se propondrá para que los asistentes las repliquen.

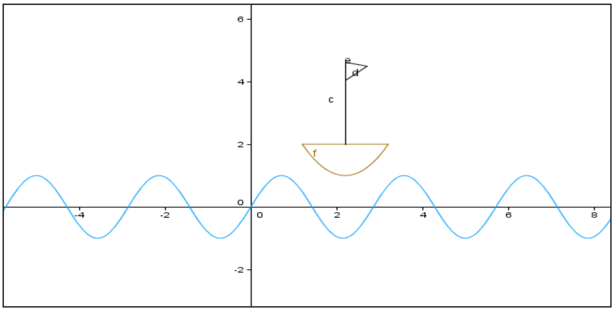


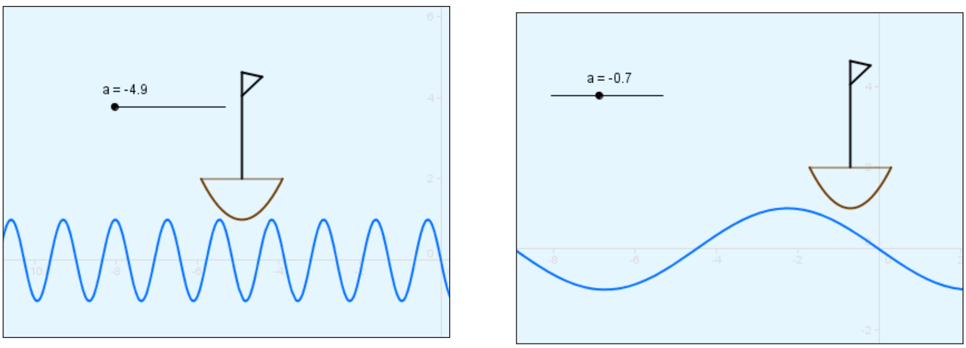
Figura 5. Gráfica de las funciones con las que se creó la barca

Una forma de construirla es graficar funciones y animarla; animamos los puntos con los que se construye, por ejemplo, la "vela" de la barca incluyendo el valor del deslizador en la coordenada, y graficamos la función *f(x)=sen(x)* aplicando transformaciones de compresión para obtener una animación de agua en movimiento, obteniendo como resultado las siguientes funciones:

$$\boxed{\mathit{Función}[(x-a)^2+1, a-1, a+1]}$$

$$\mathit{Función}[2, a-1, a+1] \quad f(x)=\sin(a\,x)$$

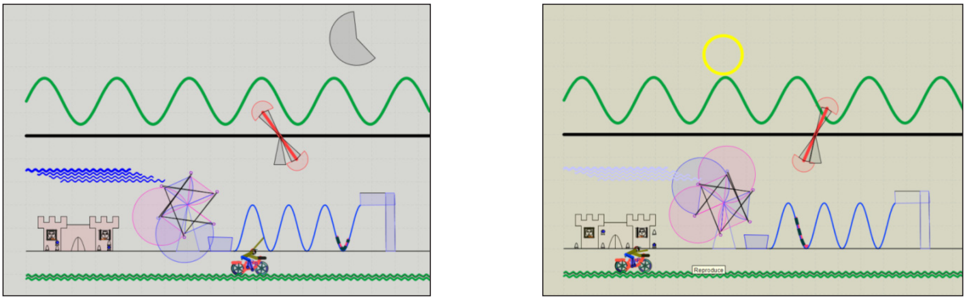
Arreglamos algunos detalles como los colores de las gráficas, ocultar rótulos, cambiar el color de los ejes y demás objetos que no se necesita hacer visible y obtenemos:



a b

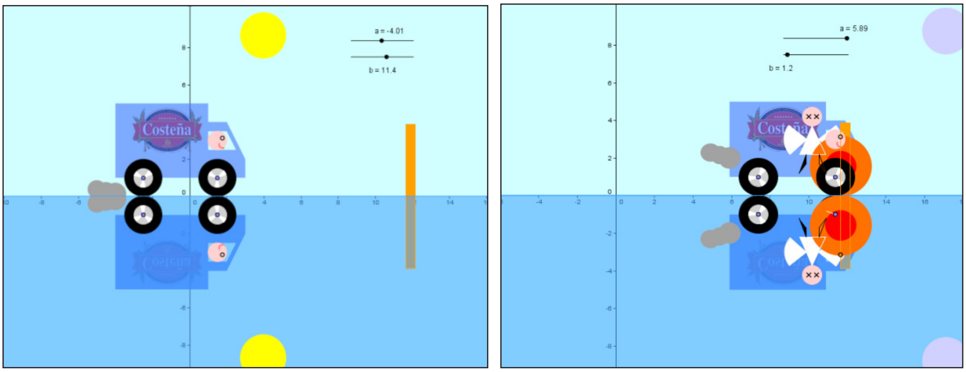
Figura 9. Animación de la barca

Finalmente se propone a los asistentes que realicen su propia animación. Algunos ejemplos de las construcciones realizadas se muestran en las *figuras* 10 *y* 11.



a b

Figura 10. Proyecto 1.



a b

Figura 11. Proyecto 2

El tipo de actividad propuesta exige de parte de los estudiantes para profesor de matemáticas comprender los conceptos que se emplean en las animaciones como los son dominio, rango, transformaciones de funciones, entre otros, logrando establecer relaciones entre los diferentes sistemas de representación, en este caso, entre el algebraico y el gráfico.

Finalmente, el proponer a los estudiantes para profesor este tipo de actividades les posibilita reconocer otro tipo de enfoque para la enseñanza de las matemáticas escolares, en el que la incentivación y el uso de software matemático y situaciones problémicas dan sentido a la actividad matemática en el aula.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Jiménez W., Mayorga L., Ahumada J. & Cuchigay A. (2011). Transformaciones de funciones en coordenadas polares. En Memorias del X Encuentro Nacional de Educación Matemáticas y Estadística. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Tunja. Tomado de http://www.uptc.edu.co/eventos/2011/enemes/programacion/documentos/memorias_2011.pdf

González, M., Bernabé, M., Capdevila, J. et al. (2008) Formación e-learning para el profesorado de la Educación Secundaria Obligatoria de España para utilizar las Infraestructuras de Datos Espaciales como un recurso educativo TIC. Tomado de http://oa.upm.es/3602/1/INVE_MEM_2008_56079.pdf.

Muñoz, Q. (2002). Introducción a la teoría de conjuntos. Ed. Universidad Nacional de Colombia.

Generalización y simbolización de procesos de medición: una herramienta en la iniciación al álgebra

Jairo Aníbal Rey[*]
Patricia Quiroga[**]
Gladys Martínez[***]

RESUMEN

El taller presenta una propuesta de trabajo en el aula que pretende mostrar los procesos de medición como herramienta para dar cuenta de algunas relaciones existentes entre las figuras geométricas del tangram, así como una transición entre las relaciones observadas y su representación simbólica que constituyan los primeros pasos hacia la construcción del lenguaje algebraico. Para el desarrollo del taller se tienen en cuenta diferentes elementos de tipo teórico como el álgebra escolar, los procesos de medición, los procesos de generalización y simbolización, la geometría como herramienta para enseñanza del álgebra, con el ánimo de generar conocimientos no solo de tipo conceptual, sino también de tipo procedimental y actitudinal. La metodología del taller articula exposición magistral con espacios de discusión a partir del trabajo en equipo de los asistentes.

Palabras clave: generalización, álgebra, estimación de medidas, materiales manipulativos.

* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: anibalrey@profesores.com

** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: patriciaquirogah@hotmail.com

*** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: gcmartinezud@hotmail.com

INTRODUCCIÓN

Algunas investigaciones realizadas sobre la enseñanza de expresiones algebraicas a través de la geometría muestran que los estudiantes presentan dificultades en la capacidad de expresar en lenguaje simbólico los resultados numéricos que se obtienen. De acuerdo con Fujii (citado por Palarea, 1998), existen numerosas investigaciones en torno a las dificultades que se dan en la enseñanza y aprendizaje de contenidos algebraicos, en donde se han identificado dificultades específicas al aprender álgebra, como por ejemplo: obstáculos cognoscitivos, la letra como objeto y aplicación errada de la notación de encadenamiento, entre otros. Entre las dificultades evidenciadas en estos estudios, se encuentran el temor en los estudiantes de expresar con letras lo que han venido trabajando en los grados precedentes; es decir, la dificultad de realizar la transición del lenguaje aritmético al algebraico, lo cual ocurre, en parte, debido al carácter abstracto del álgebra y a un limitado acercamiento al trabajo con variables.

Por estas razones, la transición de la aritmética al álgebra implica grandes desafíos en la comprensión de los estudiantes, y por tanto es necesario establecer nuevas relaciones de significación con el mundo real y con los procesos aritméticos previos. Asimismo, es necesaria una reflexión continua acerca de los procesos de enseñanza que le permitan al docente fortalecer su práctica y favorecer el aprendizaje de los estudiantes de manera activa.

MARCO TEÓRICO

El aprendizaje se da cuando se re-construye la red de significados que respaldan las acciones que hace el individuo; por tanto, no ha aprendido nada quien no puede actuar (saber hacer), o quien no puede explicar su acción o la realidad ante la que actúa (saber) o quien no puede dar cuenta del porqué actúa de una manera (actitud) (De Zubiría, 2008).

Se consideran, además, importantes los aportes de Gómez-Chacón (2002), quien plantea que generalmente en los primeros años de escolaridad los estudiantes suelen mostrar aceptación y gusto por las matemáticas, pero que esto se va perdiendo a medida que va avanzando en los grados de escolaridad. Este es un factor a tener en cuenta a la hora de planear y ejecutar actividades de aula; estas deben abordar tres componentes: el cognitivo, que aborda las creencias subyacentes a la actitud; el afectivo que se hace evidente en la aceptación o rechazo por la tarea planteada o por las matemáticas mismas, y el intencional que se puede entender como la tendencia a un determinado comportamiento. De este modo, se hace necesario para el docente pensar en el diseño de actividades de aula que permitan mantener los niveles motivacionales de los estudiantes aun cuando avancen en los niveles de escolaridad.

Desde la perspectiva educativa de las matemáticas los estudiantes aprenden estos tres tipos de contenido y es tan importante la planeación de los de tipo conceptual como los relacionados con los otros tipos de contenido.

En el Diseño Curricular Base (MEC, 1989) se entiende por contenido escolar tanto los que habitualmente se han considerado contenidos, los de tipo conceptual, como otros que han estado más ausentes de los planes de estudio y que no por ello son menos importantes: contenidos relativos a procedimientos, y a normas, valores y actitudes (Godino y otros, 2003, p. 26).

El álgebra escolar. El álgebra escolar ha sido de gran influencia en la formación de los procesos cognitivos de los estudiantes; esto se debe a la simplicidad y potencia de sus registros formales y de sus métodos (Socas y otros, 1998). Sin embargo, las temáticas y sus procesos se han mantenido desde sus inicios como asignatura a finales de siglo XIX hasta la fecha, casi sin ninguna alteración (Palarea, 1998).

En los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) se propone iniciar el estudio de la variación a través de la exploración e identificación de regularidades y patrones en escenarios geométricos o numéricos que permitan a los estudiantes hacer una descripción verbal de ciertas relaciones existentes entre las cantidades que posteriormente tendrán que complejizarse y convertirse en expresiones en lenguaje matemático. Mientras tanto, históricamente Socas y otros (1996) señalan tres etapas en el desarrollo histórico del álgebra: la retórica, la sincopada y la simbólica. En la primera etapa no se utilizan los símbolos, se hace una descripción de los problemas a base de palabras; en esta etapa se utiliza el pensamiento concreto dado que el lenguaje que se usa asigna cada palabra al objeto al que se refiere. En la etapa sincopada algunas palabras de uso frecuente se empiezan a abreviar hasta llegar a olvidar su origen lo que va produciendo símbolos que no tienen relación directa con lo que representan. Y en la tercera etapa, la simbólica, se da el paso hacia la abstracción, aparece el lenguaje simbólico; aquí las letras tienen un significado independiente de aquello que representan; este lenguaje permite plantear, comprender y resolver expresiones generales, no solo expresiones particulares.

De una manera sencilla, el álgebra debe pensarse como una rama de las matemáticas que trata de generalizaciones de operaciones y estructuras matemáticas; la geometría es una herramienta de enseñanza y aprendizaje que ayuda al estudiante a encontrar un significado a los conceptos algebraicos y procesos aritméticos al adoptar con medidas de volumen, área y perímetro el sentido a este nuevo cambio que es la transición de la aritmética al álgebra a través de la traducción del lenguaje aritmético al algebraico.

La geometría como herramienta de enseñanza y aprendizaje. La geometría puede considerarse como una herramienta para el entendimiento, ya que es tal vez la parte de las matemáticas más concreta y ligada a la realidad, además que parece difícil encontrar contextos en los que no aparezca la geometría ya sea de manera directa o indirecta. Las personas construyen de manera intuitiva algunas relaciones y conceptos geométricos, producto de su interacción con el espacio; el trabajo con la geometría debe permitir avanzar en el desarrollo del conocimiento de ese espacio hasta el punto que se pueda dejar de lado y usar la capacidad de abstracción, es decir, manejar mentalmente imágenes y relaciones geométricas.

En este sentido, Mancera (citado en Sandoval, 2010, p. 23) señala que se deben promover formas de enseñanza basadas en configuraciones geométricas para introducir algunos conceptos o contenidos propios de la aritmética y el álgebra, ya que en la enseñanza de las matemáticas en los diferentes niveles se sugiere "partir de lo concreto para llegar a lo abstracto, ir de lo fácil a lo difícil" y esto lo permite la geometría como herramienta de enseñanza.

La medida y los procesos de medición. El tangram chino de 7 piezas presenta varias regularidades entre sus fichas, tanto en área como en las medidas de sus lados; es desde este último elemento desde donde partimos para hacer descripciones de las fichas, de las regularidades entre las relaciones y llegar a la simbolización de estas. Por esta razón es importante tener en cuenta aportes teóricos relacionados con la medida, para que esta sea la herramienta que permita establecer las relaciones.

Los procesos de medición solo son posibles si se proporcionan a los estudiantes espacios en los que puedan experimentar, como talleres, laboratorios y el mismo salón de clases con diferentes situaciones que posibiliten el trabajo con magnitudes y su medida (Chamorro y Belmonte, 1994).

Constitución de la unidad. Según Chamorro y Belmonte (1994), se va constituyendo de manera progresiva; en esta progresión se presentan cinco etapas bien diferenciadas:

a) Ausencia de unidad. Es una noción de unidad de carácter netamente visual y comparativo que permite comparar objetos directamente entre sí, lo que no implica que el niño use una unidad de medida.

b) Unidad objetal. En este caso la unidad establecida está ligada directamente a un solo objeto a medir, sin que dicha unidad no sea también usada en la medición de otros objetos.

c) Unidad situacional. La unidad aún mantiene una relación con el objeto a medir, sin embargo, es posible que de acuerdo con la situación u objeto a medir esta unidad pueda cambiar.

d) Unidad figural. La unidad va perdiendo la relación que tenía con el objeto a medir, se tiene la tendencia a medir objetos grandes con unidades grandes y objetos pequeños con unidades pequeñas.

e) Unidad propiamente dicha. En esta etapa se consigue identificar una unidad con la cual se puedan medir todas las figuras u objetos, sin que dependa ni tenga ninguna relación con el objeto a medir.

Tratamiento de la medida. De acuerdo con Chamorro y Belmonte (1994, p. 55), "medir medir solo tiene razón de ser cuando se siente tal necesidad, es decir, cuando los sentidos son insuficientes", por tanto es difícil y complejo; así que este proceso debe llevarse al aula de clase desde el trabajo concreto hacia el abstracto, desde lo fácil hacia lo difícil, propiciar espacios en los que el estudiante descubra y aprenda de sus errores y tomar situaciones de la vida para estos espacios. Para tal fin, se propone una serie progresiva de procesos en el tratamiento de la medida:

- Estimación sensorial. Tiene que ver con las apreciaciones sensoriales, particularmente de la vista, que sobre la medida se realice, que además no son siempre posibles.

- Comparación directa. Se hace un desplazamiento de los objetos con el fin de hacer la comparación entre ellos y determinar cuál de ellos es mayor o menor.

- Comparación indirecta. Para la comparación de los objetos se tiene como mediador un tercer objeto.

- Relación entre distintas unidades. Se realizan cambios y relaciones entre las unidades del sistema, primero desde lo manipulativo para luego llegar a su representación numérica y simbólica.

METODOLOGÍA

Cada una de las sesiones del taller se inicia con una actividad que motive a los participantes hacia el aprendizaje; durante el desarrollo de cada sesión se llevarán a cabo diferentes actividades que apunten no solo a la presentación de las enseñanzas, sino también a su apropiación, por lo que el componente de trabajo de los participantes es alto; para finalizar cada sesión habrá un espacio para compartir experiencias, con el ánimo de hacer explícitos los aprendizajes adquiridos y posibles variaciones de las actividades para su aplicación en el aula.

Dado que el tangram es el eje articulador de las diferentes situaciones que se irán complejizando a medida que se cumplan ciertos objetivos, las actividades se desarrollarán teniendo este recurso como base en el proceso de traducción al lenguaje algebraico de las regularidades que se expresan desde la medición. Se irá alternando el desarrollo de las actividades con la presentación magistral del respaldo teórico que ellas tienen, con el fin de mostrar cómo se da la articulación de los contenidos de tipo conceptual, procedimental y actitudinal junto con los procesos de medición y simbolización.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Chamorro, C, Belmonte, J. (1994). El problema de la medida: Didáctica de las magnitudes lineales. Madrid. Síntesis.

De Zubiría, M. (2008). Cómo funciona la Mente Humana: más allá de la Psicología cognitiva. Bogotá. Fundación Internacional de Pedagogía Conceptual Alberto Merani.

Godino, J. & otros. (2003). Matemáticas para maestros. Departamento de didáctica de las matemáticas Universidad de Granada. Granada.

Gómez-Chacón, I. (2000). Matemática Emocional: Los efectos en el aprendizaje matemático, Madrid. Narcea S.A. de Ediciones.

Kieran, C. (1994). The learning and teaching of scooll Algebra. (Traducción de Mesa Vilma María (1995)) "Una empresa docente". Recuperado el 13 de abril de 2011, de http://uniandes.edu.co/servidor/em/recinf/traducciones/Kieran (92>/Kieran(92)-l.htm/

MEN. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Bogotá. Escribe y Edita.

Palarea, M. (1998). La adquisición del lenguaje algebraico y la detención de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años. Tesis doctoral. Departamento de análisis Matemático. Universidad de la Laguna. España.

Sandoval, Y (2010). Las representaciones geométricas como herramienta para la construcción del significado de expresiones y operaciones algebraicas, desarrollado con alumnos de octavo grado del instituto "San José del Pedregal" Tesis de maestría no publicada. Universidad Pedagógica de Tegucigalpa.

Socas, M. & otros. (1996). Iniciación al álgebra. Madrid, Ed. Síntesis.

Socas, M. & otros. (1998). "Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza de la secundaria" Recuperado 22 de Febrero de 2011, de Rvta. Interuniversitaria de formación del profesorado, nº 32.

El juego de dados de Mozart como recurso didáctico para dinamizar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las nociones básicas de la probabilidad

Yeimy Rodríguez García[*]
Geral Stivens Galán García[**]
Milton Sady Riveros Castellanos[***]
Dolly Carolina Mora Villota[****]

RESUMEN

Una de las tareas más importantes del docente es la transposición didáctica, que consiste en transformar el saber abstracto en un saber enseñado, que se acomode a las necesidades de los estudiantes y que cumpla la función de ser significativo. En ese orden de ideas, el uso de recursos didácticos y la gestión docente facilitan tal tarea.

En efecto, este taller consiste en la aplicación del recurso "Juego de dados de Mozart", y tiene como finalidad ilustrar en qué consiste el juego, con ayuda de medios tecnológicos que permiten que cada persona pueda crear diversas composiciones musicales por medio del azar, y que, además, construya algunos conceptos de probabilidad. De esta manera se hará un aporte a la didáctica de la estocástica y, por ende, una propuesta para enseñar probabilidad por medio de un recurso innovador y que se puede adaptar para abordar diferentes conceptos.

Palabras clave: Experimentación, probabilidad, constructivismo, gestión docente, recursos didácticos

[*] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: yeimy.rodriguez111@yahoo.com
[**] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: geraldstevengg@gmail.com
[***] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: mimilton88@gmail.com
[****] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: dolly_carolina_mora@hotmail.com

PRESENTACIÓN DEL TALLER

El taller tiene como objetivo, que los docentes de matemáticas y estadística consideren el "Juego de dados de Mozart" como un recurso para enseñar probabilidad condicional, o incluso algunas nociones básicas de probabilidad.

La idea es aplicarlo por medio de algunas preguntas orientadoras y una situación fundamental que los llevará a hacer un análisis más profundo del juego. Luego se hará una conclusión de los objetos estocásticos trabajados y el uso de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau como una metodología para llevar a cabo en el aula este instrumento. De igual forma se hará una reflexión en torno a las ventajas y desventajas del taller y del recurso.

MARCO TEÓRICO

Como ya se ha mencionado, la propuesta "Juego de dados de Mozart" es un aporte a la enseñanza de la probabilidad, y por ello es importante centrarse en la construcción del juego y algunos aspectos relacionados directamente con la didáctica y lo que postula el Ministerio de Educación Nacional.

Para el diseño de este taller se toma la tesis de Tiburcio S. (2002), en la cual se describe el juego de composición musical de valses ideado por Wolfgang Amadeus Mozart en 1777, titulado: "*Juego de dados musical para escribir valses con la ayuda de dos dados, sin ser músico ni saber nada de composición*".

El juego de dados consiste en la creación de una pequeña obra musical: un vals de 16 compases[1]. El método se basa en dos tablas y un repertorio de 176 compases cifrados y agrupados en 16 conjuntos de 11 compases cada uno. Las columnas indican el número de orden del compás, y en cada una de las filas aparece un número entre 2 y 12 que corresponde a la suma de las caras de dos dados.

Para obtener el primer compás se arrojan dos dados y se suma su resultado, obteniéndose un número de fila que interceptada con la columna I da la cifra del compás a seleccionar. Por ejemplo, si la suma dio 3, se debe seleccionar el compás 32 del repertorio. Se procede igual con el segundo compás y así sucesivamente, hasta conseguir los 16 elementos que deberán incluirse en la partitura. El método funciona porque los compases correspondientes a una misma columna son variaciones sobre una idéntica base armónica. Las

1 División rítmica de fragmentos de igual duración que se lleva a cabo en una obra musical.

tablas cumplen ciertas reglas (las de la armonía y melodía tradicional) que son conjugadas con el azar.

El ingenio del Mozart lo llevó a componer no una pieza para piano, sino un generador de minuetos[2]. La obra no contiene una partitura para una pequeña composición, sino que tiene un sistema que, apoyado en el azar, puede generar un número muy grande de composiciones diferentes. Pues el número de posibles partituras corresponde a 11 elevado a 16, que es un número tan grande que se estima que si se interpretaran continuamente todas las partituras posibles, y cada interpretación tardara 30 segundos, para agotar todas las posibilidades, se necesitarían más de 728 millones de años, interpretando la obra de día y de noche y de manera continua.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Figura 1: Tablas del juego de dados de Mozart, con los 176 compases cifrados.

Se observa que el conjunto del espacio muestral que se obtiene de lanzar dos dados y sumar sus resultados es de 36 elementos:

	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

Figura 2: posibles resultados que se obtienen al lanzar dos dados

[2] Composición instrumental de ritmo ternario y moderado que se intercala entre los tiempos de una sonata, cuarteto o sinfonía.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Figura 3: suma de los posibles resultados que se obtienen al lanzar dos dados

Es importante mencionar que no todas las obtenciones para la suma de las caras de dos dados son igualmente probables; se tiene que el número total de parejas (i,j) es 36, y las respectivas probabilidades de la suma son:

Prob.(2) = 1/36 = Prob.(12)	Prob.(5) = 4/36 = Prob.(9)
Prob.(3) = 2/36 = Prob.(11)	Prob.(6) = 5/36 =Prob.(8)
Prob.(4) = 3/36 = Prob.(10)	Prob.(7) = 6/36

Los 16 lanzamientos del par de dados se hacen de manera independiente; si por ejemplo las 16 sumas dieran como resultado: (2, 4, 11, 6, 7, 6, 11, 8, 3, 5, 4, 8, 2, 12, 10, 7), se tiene una probabilidad asociada. Se calcula su probabilidad de ocurrencia multiplicando las 16 probabilidades que le corresponden a cada uno de los números ejemplificados, la del 2, la del 4, la del 11, etcétera. En este caso el resultado es: Prob. = (1 x 3 x 2 x 5 x 6 x 5 x 2 x 5 x 2 x 4 x 3 x 5 x 1 x 1 x 3 x 6) x (1/36 elevado a 16). De las más de 45,949 billones de posibles realizaciones, muchas comparten el tener la misma probabilidad de ocurrir pero solo una de ellas se distingue, desde el punto de vista probabilístico, en tener la probabilidad de ocurrencia más alta; esta corresponde a la realización en donde para cada uno de los 16 compases, los dados suman 7 en todas las ocasiones.

Necesidad social de la interdisciplinariedad entre las ciencias. Caro, M. (2006) advierte que es sumamente importante salir de la enseñanza de asignaturas fragmentadas, para pasar a una enseñanza integrada e interdisciplinar. Es decir, que es posible entonces formar constructores del conocimiento a través de la educación integradora de saberes; por ello, una idea para abordar la interdisciplinariedad en este proyecto está en lograr una conexión entre la estocástica y la música, las dos vistas desde su desarrollo y aplicación aparentemente intuitivo. En efecto, se puede componer sin necesidad de ser músico, y un músico puede aprender probabilidad a partir de lo que compone.

Aprovechar la tecnología como recurso facilitador y potenciador del aprendizaje matemático. La Oficina Regional de Educación de la UNESCO para América Latina y el Caribe (2005) ha visto dentro de su investigación que un problema es que gran número de escuelas no posee computadoras o acceso a Internet y que esto, debido al impacto tecnológico en el cual está inmerso el mundo entero, perjudica el progreso educativo, pues la tecnología avanza en la vida cotidiana más rápido que en las escuelas, y un docente que no maneje las tecnologías de información y comunicación está en clara desventaja con relación a los alumnos. Es decir, que en acuerdo, el uso de nuevas tecnologías en la escuela es una herramienta para el mejoramiento de la calidad de la educación matemática en el país, es fundamental para irrumpir el problema de desarrollo y, por tanto, debe aprovecharse dentro de la gestión docente.

Propuesta de enseñanza de objetos estocásticos. Se habla, entonces, de que hay una conexión estrecha entre la música y la probabilidad, y que la tecnología es útil para el aprendizaje de las matemáticas. En ese orden de ideas se diría que es posible generar música por medio de programas de computadora enfocados en el aprendizaje de la probabilidad, debido a que el terreno de la informática ha dado nuevas herramientas para el compositor.

Sin embargo, para efectuar dicha relación que establece la interdisciplinariedad es esencial conocer algunos modelos de enseñanza para la probabilidad. Para ello, Vergel, R. Rocha, P. y León, O. (2001) proponen unos elementos conceptuales que sustentan una propuesta de enseñanza de objetos estocásticos, basándose en tres elementos conceptuales: desarrollo de proyectos de aula como estrategia didáctica, la teoría de las situaciones didácticas y el análisis exploratorio de datos.

Teniendo en cuenta lo anterior, en este taller se hará una reflexión sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje bajo la resolución de problemas por medio de la teoría de situaciones didácticas propuesta por Brousseau, reconociendo las ventajas didácticas de los dispositivos juego y proyecto de aula.

Ahora bien, la teoría de las situaciones didácticas propuesta por Guy Brousseau (1986) se basa en una aproximación constructivista, la cual actúa bajo el principio de que una noción se construye en un ambiente de situaciones de enseñanza, creando un discurso hecho tanto por el maestro, como por los alumnos.

El estudiante debe pasar por cuatro situaciones en el aula, mientras se desarrolla una situación didáctica:

Situaciones de acción: ensayo y error que hace el alumno para resolver el problema.

Situaciones de formulación: el alumno intercambia información con maestro y compañeros.

Situaciones de validación: el estudiante justifica la pertinencia y la validez de la estrategia usada, del modelo empleado para la resolución de la situación. Hay un intercambio de información que lleva al alumno a la revisión.

Situaciones de institucionalización: es un proceso a cargo del profesor; las respuestas de los alumnos deben ser transformadas a través de un proceso de re-descontextualización y re- personalización, para que dichos conocimientos puedan ser convertidos en saberes.

Cuando la situación problema recoge todas las características anteriores, se adapta en su desarrollo a cada una de las situaciones propuestas por Brousseau (1986). Entonces se le reconoce como situación fundamental

Los proyectos de aula nacen como una estrategia didáctica que busca la interdisciplinaridad y la transversalidad para potenciar el aprendizaje significativo en un contexto de aplicación social, económico, político, etc. Además, permiten que el estudiante dé solución a una situación fundamental en relación con un conocimiento específico; por ello este dispositivo será esencial, dado que aborda transversalidad (música, tecnología y probabilidad) y se fundamenta en una situación problema de la cual se desprenden todos los conceptos que se quieran enseñar en probabilidad para los que el juego es útil.

Enseñanza de la probabilidad. Glayman y Varga (1975) recomiendan un proceso de enseñanza de la probabilidad en tres etapas: la experimentación, razonamiento elemental y medida de la probabilidad.

La experimentación. Es la primera etapa para familiarizar al niño con el mundo probabilístico, y consiste en una amplia experimentación, manipulando material variado (dados, peonzas, monedas, bolas, etc.). Cada experiencia se repite muchas veces en las mismas condiciones y luego se propone a los niños que traten de adivinar el resultado con el objeto de que capten las propiedades inherentes a fenómenos aleatorios.

Razonamiento elemental. Es la segunda etapa –razonamiento elemental– consiste en proponer juegos que permitan comparar cualitativamente las probabilidades de ciertos sucesos.

Medida de la probabilidad. Se propone el uso de fracciones, surgidas de las frecuencias, como medida de la probabilidad. El aprendizaje y la utilización de este instrumento se podrán ir haciendo simultáneamente con el estudio de las situaciones y vendrá motivado por ellas (Batanero 1996, p. 55).

Políticas educativas vigentes. Teniendo en cuenta los estándares básicos de calidad para el área de matemáticas (2006) del MEN, se identifica que los siguientes estándares responden a la propuesta a implementar:

¨Calculo probabilidad de eventos simples, usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).¨

¨Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.)¨

METODOLOGÍA DEL TALLER

Recursos. Para realizar una "transposición didáctica" del juego de dados de Mozart, se requiere una sala de informática, puesto que se proponen dos programas con ciertas particularidades cuya función será llevar a cabo la integración entre la música y la probabilidad: el Mozart Dice, y el Notación Player. El ¨Mozart Dice¨ es, básicamente, la sistematización del juego de dados para la composición musical de valses, ideado por Mozart, y permite reproducir y guardar la obra, en formato de audio. El ¨Notación Player¨, por otra parte, es un programa que admite tomar las canciones y reproducirlas, mostrando su partitura completa, y en el caso de los valses producidos por juego de dados de Mozart, es posible ver y reproducir sus compases por separado, lo que abre la opción de que usando los dos programas simultáneamente, se pueda identificar de manera intuitiva, primero escuchando y luego asociando un número a un sonido. Y según un orden específico, deducir el número correspondiente a la suma de los dados para cada compás (del 2 al 12), y el compás para entrar a determinar la probabilidad de ocurrencia de un vals dado.

De igual forma, a cada persona se le hará entrega de una guía de trabajo y dos dados. En la guía va a aparecer una situación fundamental y algunas preguntas clave para poder solucionarla; los dados son para que cada persona tenga la posibilidad de componer e identificar con mayor facilidad el espacio muestral del experimento aleatorio.

Organización, primera parte: se explicará claramente en qué consiste el juego, para que luego cada uno de los asistentes interactúen directamente con este, experimentando, lanzando los dados y ubicando los resultados obtenidos en las tablas puestas en el programa tecnológico, para así obtener diversas composiciones musicales. Enseguida se presentará la situación fundamental, y se proporcionará la composición musical en formato audio, para que cada uno la escuche atentamente y la descifre con ayuda del juego y de un reproductor de audio.

Organización, segunda parte. Una vez descifrada la composición musical dada, cada participante del taller debe calcular la probabilidad de ocurrencias de esta, también debe deducir la composición más probable, la menos probable, algunas composiciones equiprobables; y calcular su probabilidad de ocurrencia haciendo uso de la probabilidad condicional.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azcárate, P. & Cardeñoso, J. M. (2001). *Probabilidad*. Madrid, España. Editorial Síntesis.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en *Didactique des Mathématiques*, VII (2), pp. 33-115.

Caro Valverde, M. (2006). *Los clásicos redivivos en el aula. Modelo didáctico interdisciplinar en educación literaria*. Universidad de Murcia, Facultad de Educación. Departamento de Didáctica de la Lengua y la Literatura. Tesis doctoral.

Godino, J., Batanero, C. & Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* Madrid España. Editorial Síntesis.

Godino, Juan D. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada

Godino, Juan D. (2001). *Análisis de datos y su didáctica*. Universidad de Granada, España.

MEN. (2006). *Estándares básicos de calidad para el área de matemáticas*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Tiburcio S. (2002). *Teoría de la probabilidad en la composición musical contemporánea*. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Escuela de Artes. México

Vergel, Rodolfo. Rocha, Pedro & León, Olga (2001). *El juego, la resolución de problemas y el proyecto de aula como dispositivos en las didácticas de la matemática y de la estadística.* Universidad Distrital Francisco José de Caldas.Esta dirección electrónica esta protegida contra spambots. Es necesario activar Javascript para vis

Resignificación de la suma de fracciones

Juan Manuel Salas Martínez[*]

RESUMEN

Vincular la idea de fracción y su comprensión desde la representación simbólica impide a los estudiantes entender las relaciones matemáticas implícitas que están detrás del algoritmo. La suma de fracciones debería inducir a la construcción de los atributos de la fracción en su interpretación parte-todo, dotando de significado al algoritmo, es decir, debería permitir establecer la correlación entre el trabajo de los símbolos y la representación gráfica, a partir de la interpretación de medida en contexto continuo y discreto. Esta investigación da a conocer una secuencia de actividades sobre la suma de fracciones, desde la representación gráfica y discreta, con el fin de recontextualizar y resignificar en los estudiantes el proceso de la suma de fracciones.

Palabras clave. Secuencia didáctica, fracciones, representación gráfica y concreta.

[*] Colegio la Belleza los Libertadores (IED). Dirección electrónica: juanmanuelsalasmartinez@hotmail.com

PRESENTACIÓN

Las indagaciones con respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones en grado séptimo, realizadas en las Instituciones Educativas Distritales John F. Kennedy y San Bernardino, mostraron que la falta comprensión de la suma de fracciones en los estudiantes está vinculada con el poco trabajo en el contexto continuo y discreto, priorizando la falta de sentido que se le da al algoritmo desde la interpretación parte-todo, donde el manejo incorrecto de los procesos algorítmicos es generado a partir de los esquemas aritméticos previos, ya que durante la primaria el estudiante ha profundizado sobre el conocimiento del número natural; la ruptura de la unidad no es objeto de discusión y mucho menos su conceptualización.

Una de sus manifestaciones aparece cuando el estudiante tiene que dotar de significado a la suma de fracciones, porque aplica la suma de fracciones como la habilidad para usar reglas o algoritmos desde los números naturales, sumando numerador con numerador o denominador con denominador.

Es creencia común entre el profesorado y está demostrado experimentalmente, la considerable dificultad con que el estudiante aprende qué es una fracción y como la utiliza, esta opinión es motivada por el tipo de enseñanza al que ha venido sujeto el estudiante, en el cual se pasa con bastante rapidez a un desarrollo algorítmico, que venía limitada por las dificultades en el aprendizaje del concepto (Maza & Arce, 1988, p.81)

Respecto al manejo algorítmico, el cual está ligado a la comprensión del concepto de suma de fracciones, en general, los estudiantes presentan dificultad cuando las fracciones tienen distinto denominador, porque se adentra en otra perspectiva diferente al algoritmo común utilizado para sumar dos naturales; además de ello, involucra procesos multiplicativos.

Lógicamente, si el niño está manejando reglas sin ningún sentido para él, resulta bastante natural que a lo largo del tiempo, deje de utilizarlas y las sustituya por otros procedimientos más «naturales» o, que olviden o modifiquen algún paso en el algoritmo, convirtiéndolo así en un procedimiento erróneo (Llinares & Sánchez, 1988, p. 132).

Cuando los estudiantes vinculan la idea de fracción y su comprensión desde el modelo simbólico se les impide entender las relaciones matemáticas implícitas (de donde viene o que justifica una manera particular de operar) que están detrás del algoritmo, ya que cuando se introducen para el trabajo en el aula los modelos concretos se ve que no toman en cuenta la relación parte-todo, el manejo de los atributos no se considera como una consecuencia lógica del concepto sino como una simple mecanización sin sentido.

La razón de que estos algoritmos se pueden convertir en reglas sin sentido puede ser debida a una introducción demasiado temprana en la escuela (traslación demasiado rápida hacia el manejo de símbolos sin la existencia de un esquema conceptual), pero también en algunos casos por una introducción desvinculada de un fundamento suficientemente concreto y natural a la operación ("falta de la existencia de un modelo de compresión") (Llinares & Sánchez, 1988, p. 133).

La suma de fracciones debería inducir a la compilación de los atributos de la fracción en su interpretación parte-todo, dotando de significado al algoritmo, es decir, poder establecer el correlato entre el trabajo con los símbolos y la representación gráfica en contexto continuo y discreto; es por ello que diseñamos una secuencia de actividades, enmarcada en la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo llevar al aula una propuesta de actividades que permita a los estudiantes de grado séptimo dotar de significado y sentido a la suma de fracciones desde la interpretación de medida en contexto continuo y discreto? Con el siguiente objetivo: Diseñar, implementar y analizar una secuencia de actividades orientada a estudiantes de grado séptimo en torno a la suma de fracciones desde la interpretación de medida en contexto continuo y discreto.

MARCO TEÓRICO

Bajo los requerimientos legales es indispensable informarse y desarrollar nuevas tendencias hacia la búsqueda de calidad en la educación; es por ello, que al momento de crear una secuencia de actividades es necesario tener en cuenta algunas pautas que permitan un desarrollo óptimo.

Las fracciones desde la interpretación como medida son una aproximación al número racional, dan sentido y significado al trabajo en el desarrollo del pensamiento numérico y los sistemas numéricos, y amplían el trabajo en los diferentes universos numéricos por medio de estrategias para la resolución de problemas.

En este sentido Mcintosh (1992, citado en Ministerio de Educación Nacional, 1998) amplía este concepto y afirma que:

El pensamiento numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones. Así se refleja una inclinación y una habilidad para usar números y métodos cuantitativos como medios para comunicar, procesar e interpretar información, y se crea la expectativa de que los números son útiles y de que las matemáticas tienen una cierta regularidad. (p. 26).

Según los Lineamientos Curriculares del año de 1998, algunos de los propósitos generales del currículo en matemáticas son:

- Estimular a los estudiantes y crear situaciones en las que ellos puedan poner en juego sus ideas, inventar otras y descubrir.
- Desarrollar en los estudiantes una sólida comprensión de los conceptos, procesos, estrategias básicas de la matemática e igualmente la capacidad de utilizar todo ello en la resolución de problemas.
- Contribuir al desarrollo del lenguaje y la comunicación matemática en los estudiantes para que puedan comunicar oral, escrita y gráficamente sus ideas y experiencias matemáticas.
- Contribuir a que el estudiante logre el excelente desarrollo de sus etapas de aprendizaje.

Por esta razón, es importante presentar a los estudiantes una serie de actividades con las cuales se identifiquen y puedan encontrar el sentido al trabajo matemático que vienen realizando, donde desarrollen los procesos generales para el aprendizaje propuestos por el Ministerio de Educación Nacional: resolución y planteamiento de problemas, razonamiento, comunicación, modelación, elaboración, comparación y ejercitación.

Es necesario iniciar este proceso a partir de la interpretación parte-todo, ya que esta interpretación es de las más intuitivas, tal como lo afirma Llinares y Sánchez (1988). Al iniciar la secuencia de actividades en torno al concepto de fracción como relación parte-todo en un primer momento, la fracción viene a ser lo que relaciona las partes y el todo o unidad, ya sea en contexto continuo o discreto; la fracción sugiere una acción como lo afirma Freudenthal (1973, citado en Llinares & Sánchez, 1988) y estas acciones hacen parte del trabajo previo que se le debe proponer al estudiante.

Al hacer trabajo sobre fracciones, es necesario realizar acciones sobre un todo o en otras palabras sobre la unidad; una vez que el todo ha sido o está cortado o coloreado, en partes iguales, o si se experimenta o imagina como si lo fuera; queda constituida la fracción; una vez constituida esta, pasa a ser el resultado de una acción. Así surge la necesidad de comunicar la acción y su resultado, desarrollándose a través del lenguaje; este puede ser oral, gráfico, escrito en palabras o escrito en símbolos apareciendo las diversas representaciones que ponen de manifiesto la relación que se establece entre las partes y el todo, dotando de sentido y significado a la fracción.

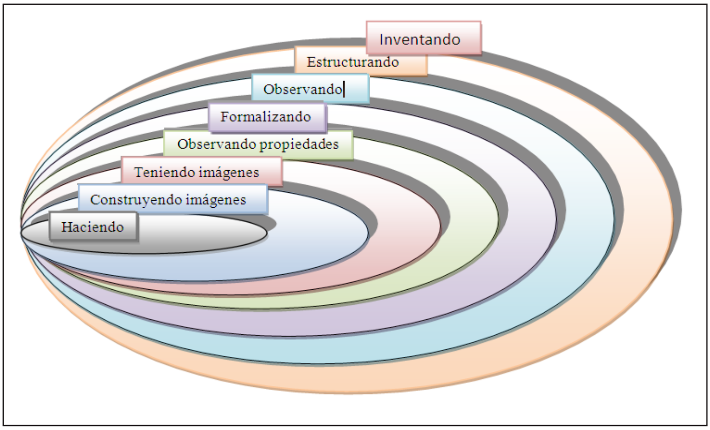
Los modos de representación son instrumentos para comunicar, pensar, calcular y compartir información. Visto de esta manera y considerando la caracterización de la competencia matemática… los modos de representación apoyan el desarrollo de la competencia matemática al permitir desarrollar proceso de comunicación (Llinares, 2003, pp. 203-204).

Como lo propone Llinares (2003) las representaciones deben ser una herramienta para generar la competencia matemática y los estudiantes deben hacer uso de ellas para llegar a un fin al interpretar y darle sentido a las distintas representaciones.

En la relación parte todo se encuentra el origen de las demás interpretaciones del número racional… su uso la convierte en generadora de lenguaje y símbolos que van a construir la base y el origen del trabajo con las demás interpretaciones. (Llinares & Sánchez, p.83)

Llinares y Sánchez (1988) consideran un tratamiento intuitivo y concreto que se da al inicio de la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, yendo en contra de aquellos enfoques que parten a enseñar las fracciones a partir de los operadores o tratamiento numérico algorítmico de las fracciones; son conscientes de que allí también se debe llegar pero en la etapa final de la enseñanza y aprendizaje de las fracciones, y sostienen que los procesos algorítmicos son procesos de síntesis individual útiles para la resolución de situaciones problemáticas, mas no reglas para ser utilizadas.

Modelo recursivo de Kieren. El esquema de Kieren propone siete etapas para dar a conocer la fracción desde la representación gráfica, las cuales son: haciendo, construyendo imágenes, teniendo imágenes, observando propiedades, formalizando, observando, estructurando e inventando. Estas etapas se consideraron de gran importancia para el diseño y análisis de la secuencia de actividades teniendo claro que para grado séptimo se espera abarcar el desarrollo hasta la cuarta etapa, puesto que para las últimas se necesita un nivel más avanzado, el cual no se profundizará en la propuesta.



Kieren (1993, citado en Llinares, 2003) fundamenta su modelo recursivo para la enseñanza de la fracción desde el ámbito gráfico mediante instrumentos conceptuales que desligan un proceso de complejidad, en el cual el individuo llega a la comprensión mediante representaciones y el lenguaje. Asimismo, comenta la necesidad de que el conocimiento informal de los estudiantes descanse en el uso de representaciones, junto con instrumentos cognitivos, como son la notación de la unidad, repartos equivalentes y el uso del lenguaje.

Kieren (1993, citado en Llinares, 2003) propone que la manera de entender las formas de conocer los números racionales radica en las relaciones que se pueden establecer entre los primeros tipos de conocimientos, refiriéndose a la manera en que las representaciones y el lenguaje utilizado ayudan a dotar de significado a los símbolos.

Reconstruir la unidad y dividir un todo en partes equivalentes es de suma importancia para iniciar con el reconocimiento de las fracciones desde la relación parte-todo; de igual manera, como lo propone Llinares (2003) y la idea que sostiene Kieren (1993, citado en Llinares, 2003). "Las actividades de comunicar y explicar lo realizado ayudan en el proceso de observar semejanzas y patrones en las acciones y símbolos utilizados" (Llinares, 2003, p. 202).

METODOLOGÍA DEL TALLER

La presente propuesta de investigación se puede denominar de tipo cualitativo, ya que se centra en la indagación, teniendo en cuenta las características y cualidades de un concepto determinado. De esta manera, los datos se toman como registros de acciones y procesos de los estudiantes; dichos registros pueden ser escritos en protocolos donde se relate o describa el desarrollo de una acción del estudiante frente a una situación, y se miren la reacción y formas de proceder que generan unas manifestaciones observables a partir de sus representaciones como palabras, gestos, iconos, gráficas, símbolos y signos, entre otros.

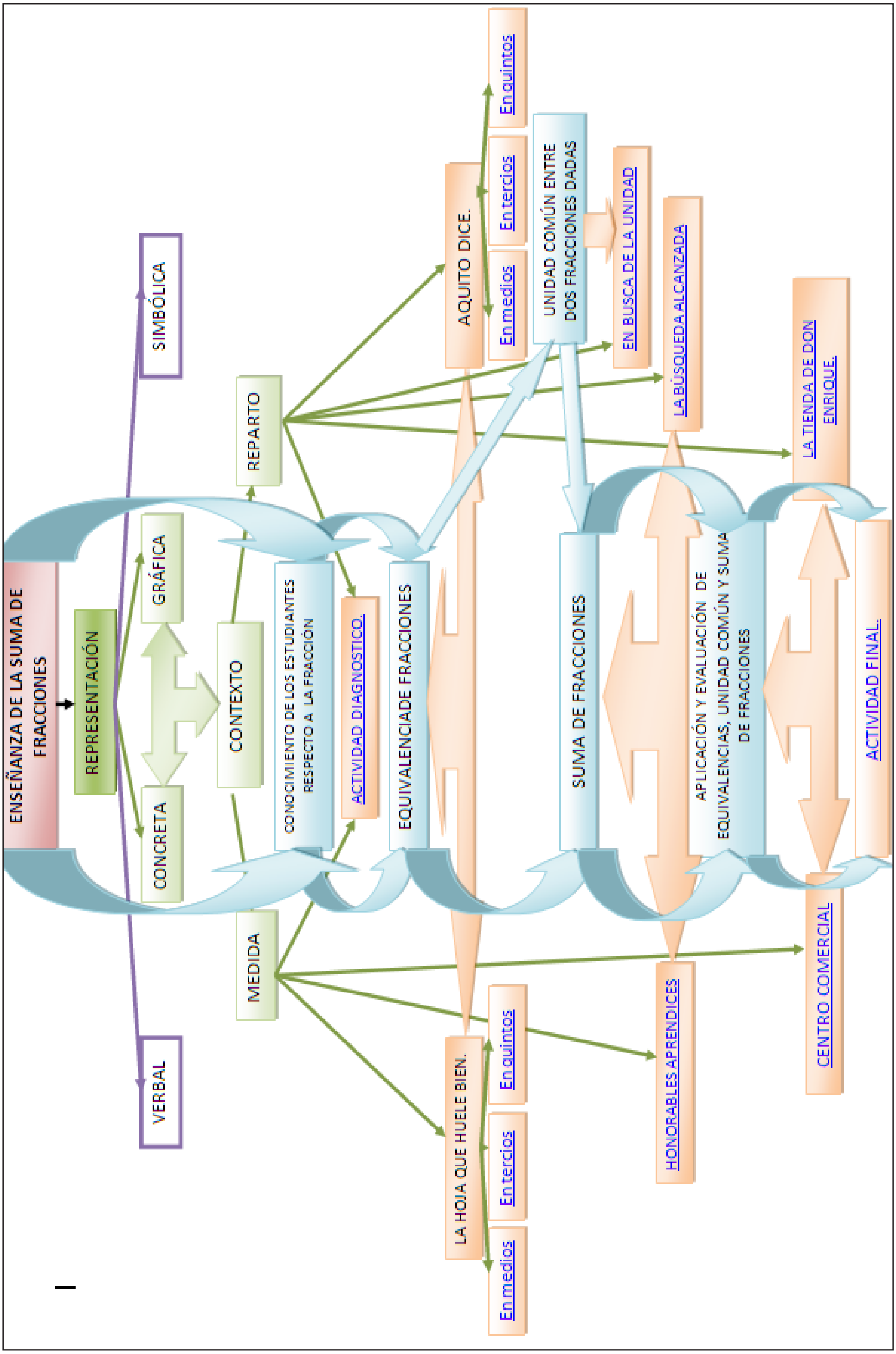
Los proyectos de investigación de estudio de caso consideran en su conjunto la pregunta de investigación, la recolección y el análisis de la información, los roles del investigador, la validación de los resultados a partir de instancias de triangulación, y finalmente la redacción del informe final (Stake, 1995, citado en Vasilachi, 2006, p. 220).

Se adoptó el estudio de caso, por ser un procedimiento que tiene en cuenta los diferentes contextos, reduciendo su estudio a un conjunto de fenómenos para buscar su esencia, profundizar sobre su singularidad, sin pretender generalizar, como se hace a partir de métodos estadísticos. Por ello, el estudio se hizo seleccionando casos significativos social y culturalmente por su relevancia respecto al objeto de estudio, en este caso la suma de fracciones desde la interpretación de medida.

El mapa conceptual muestra la secuencia de actividades de la investigación; en esta se parte de la interpretación de medida iniciando el trabajo en cada una de las actividades a partir de la representación concreta y gráfica primordialmente, pero también se presenta la correspondencia a la representación verbal y simbólica.

Al lado izquierdo del mapa se observan las actividades propuestas en contexto continuo, y al lado derecho del mapa se observan las actividades propuestas en contexto discreto; en el cuadro azul se muestran los temas a tratar en cada una de las actividades iniciando con la indagación del conocimiento de los estudiantes respecto a la fracción a partir de la interpretación de medida en contexto continuo y discreto mediante la actividad llamada "actividad diagnóstico". Se continúa con el reconocimiento de las equivalencias de la fracción en medios, tercios y quintos a partir de la interpretación de medida, dando paso a la segunda actividad llamada "la hoja que huele bien" en contexto continuo y la tercera actividad llamada "Akito dice" en contexto discreto.

Luego se trabaja el reconocimiento del común de las partes de la unidad y la suma de fracciones a partir de la interpretación de medida en contexto


ENSEÑANZA DE LA SUMA DE FRACCIONES
REPRESENTACIÓN
VERBAL
SIMBÓLICA
CONCRETA
GRÁFICA
CONTEXTO
MEDIDA
REPARTO
CONOCIMIENTO DE LOS ESTUDIANTES RESPECTO A LA FRACCIÓN
ACTIVIDAD DIAGNOSTICO.
EQUIVALENCIADE FRACCIONES
AQUITO DICE.
En medios
En tercios
En quintos
LA HOJA QUE HUELE BIEN.
En medios
En tercios
En quintos
UNIDAD COMÚN ENTRE DOS FRACCIONES DADAS
EN BUSCA DE LA UNIDAD
LA BÚSQUEDA ALCANZADA
SUMA DE FRACCIONES
HONORABLES APRENDICES
APLICACIÓN Y EVALUACIÓN DE EQUIVALENCIAS, UNIDAD COMÚN Y SUMA DE FRACCIONES
LA TIENDA DE DON ENRIQUE.
CENTRO COMERCIAL
ACTIVIDAD FINAL.

continuo, mediante la cuarta actividad llamada "honorables aprendices". Enseguida, para trabajar la suma de fracciones a partir de la interpretación de medida en contexto discreto, se requiere de una actividad diseñada exclusivamente para el reconocimiento del común de las partes de la colección en contexto discreto, dando paso a la quinta actividad llamada "en busca de la unidad" y continuando con el reconocimiento de la suma de fracciones a partir de la interpretación de medida en contexto discreto mediante la sexta actividad llamada "la búsqueda alcanzada".

Por último se pretende evaluar todas las estrategias y conceptos que se profundizaron en las actividades anteriores sobre las equivalencias, el común de las partes de la unidad y la suma de fracciones a partir de la interpretación de medida, mediante la séptima actividad llamada "proyecto Jamuel" en contexto continuo, y la octava actividad llamada "la tienda de don Enrique" en contexto discreto. Finalmente, se da a conocer una propuesta mediante una actividad diseñada para que los estudiantes relacionen la suma de fracciones a partir de la interpretación de medida con el algoritmo; esta guía del estudiante no se aplicó debido a que esta propuesta final no hace parte de la investigación planteada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Llinares, S. & Sánchez, M. (1988). Fracciones. La relación parte todo. Madrid, España: Síntesis.

Maza, C. & Arce, C. (1988). Ordenar y clasificar. Matemáticas, cultura y aprendizaje. Madrid, España: Síntesis.

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En M. Chamorro (Ed.), Didáctica de las Matemáticas (pp. 187-220). Madrid: Pearson-Prentice Hall.

Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos Curriculares: Matemáticas. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Vasilachis, I. (2006). Estrategias de investigación cualitativa. Barcelona, España: Gedisa.

Sistemas de prácticas de estudiantes de grado séptimo en la solución de algunos tipos de situaciones de proporcionalidad

*Eruin Alonso Sánchez Ordóñez**
*Gladis Jazmín Escobar Mosquera**
*Jimmy Oswaldo Muñoz Gaviria***

RESUMEN

En el presente documento se pretende mostrar una manera de explorar las formas previas a la instrucción que tienen los estudiantes al enfrentar problemas relacionados con el razonamiento proporcional. Para tal fin se diseñaron cinco situaciones de variación y cambio que fueron aplicadas a estudiantes de grado séptimo de Educación Básica, quienes aún no han estudiado de manera formal lo referente a las razones, las proporciones y la proporcionalidad. Las estrategias utilizadas por los estudiantes al enfrentar dichas situaciones fueron analizadas teniendo como marco teórico y metodológico la teoría antropológica de lo didáctico.

Palabras clave: teoría antropológica de lo didáctico; sistemas de prácticas; razones proporciones y proporcionalidad; situaciones de variación y cambio.

* Institución Educativa "Los Comuneros" Popayán. Dirección electrónica: eruinalonso@hotmail.com

** Institución Educativa "Tomas Cipriano de Mosquera" Popayán. Dirección electrónica: gescobarmosquera768@gmail.com

** Institución Educativa "Julumito" Popayán. Dirección electrónica: jimms555@hotmail.com

PRESENTACIÓN

En el currículo de matemáticas de Colombia tradicionalmente las razones, las proporciones y la proporcionalidad son enseñadas partiendo de la definición de razón como cociente indicado entre dos números enteros, y de proporción, como igualdad de dos razones, para luego enseñar a resolver problemas típicos mediante la regla de tres y la multiplicación en cruz. Tal forma de trabajar centra su atención en lo algorítmico y privilegia lo numérico, desconociendo o conectando débilmente estos objetos de conocimiento matemático con lo variacional, esencialmente con las relaciones y las funciones. Además, de cierta manera, no explora las formas previas a la instrucción que tienen los estudiantes, es decir, se desconocen las estrategias, procedimientos, algoritmos o conocimientos adquiridos por ellos en la vida cotidiana o en otras áreas del conocimiento, que les permitirían enfrentar dichos problemas. En tal sentido, se ha propuesto identificar los sistemas de prácticas que desarrollan los estudiantes en la solución de situaciones de variación y cambio, y la manera como esos sistemas dan forma a los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. Para tal fin, en el marco de la teoría antropológica de la didáctica (en adelante TAD) como referente teórico y metodológico, se recurre a la aplicación de cinco situaciones de variación y cambio, mediante las cuales se identificó, por un lado, la forma como los estudiantes llevan las razones, las proporciones y la proporcionalidad al aula de clase, y por otro, las dificultades y carencias en lo referente a conocimientos matemáticos necesarios para avanzar en la construcción de los mencionados objetos. La implementación de las situaciones permitió identificar que los estudiantes realizan con mayor naturalidad análisis de tipo cualitativo y acuden a un razonamiento por analogías, pero que la elaboración de preguntas adecuadas los induce a cuantificar sus análisis. Además, se evidenció la utilización de un buen número de teoremas y conceptos en acto (Vergnaud, 1990), propios del campo conceptual de las estructuras multiplicativas (Vergnaud, 1990, 1991, 1994) los cuales deberán ser formalizados más adelante.

La investigación que sirve como fundamento al presente taller fue desarrollada con estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa "Los Comuneros" del municipio de Popayán, institución de carácter oficial ubicada en el barrio del mismo nombre y cuyos estudiantes en su gran mayoría pertenecen a los estratos 1 y 2, además muchos de ellos se encuentran en condición de desplazamiento forzado. La actividad que permitió la recolección de la información se desarrolló durante la jornada habitual de los estudiantes de grado séptimo pero por fuera de la clase normal de matemáticas. A los estudiantes se les entregó, de manera individual, una fotocopia en donde estaba escrita la guía de trabajo que debían realizar con cada situación y algunas preguntas de reflexión surgidas de ella. Al final de las sesiones fueron recogidas las producciones escritas de los estudiantes para analizar sus respuestas y soluciones.

En la investigación antes mencionada se tomó como antecedente una experiencia de aula, compilada por Perry, Guacaneme, Andrade y Fernández (2003) denominada "Una oportunidad para profundizar en aspectos relativos a la enseñanza de razón como tópico matemático", experiencia en la cual se implementó una secuencia de actividades con grupos de estudiantes de grado séptimo y octavo de Educación Básica Secundaria; asimismo, la tesis de maestría de Guacaneme (2001) en la que se presenta un análisis de los libros de texto escolares de matemáticas en cuanto a proporción y proporcionalidad. Para el análisis de las situaciones se consideró un esquema propuesto por Obando, Vanegas y Vásquez (2006), y por Posada (2006), consistente en anticipar cuáles serían las posibles respuestas de los estudiantes y cómo resolvería las situaciones un experto; parte de los elementos matemáticos considerados en el marco teórico provienen de Obando, Vasco y Arboleda (2009).

MARCO TEÓRICO

Teoría antropológica de lo didáctico. Para Bosh y Chevallard (1999), el análisis del conocimiento matemático como un conjunto de prácticas sociales institucionalizadas requiere la descripción y el estudio de las condiciones de su realización. Dicho análisis, es lo que desde la TAD se ha denominado organización matemática (OM) o praxeología, o en palabras de Espinoza y Azcárate (2000) una OM permite modelizar el conocimiento matemático como actividad humana.

Estas praxeologías, propuestas por el enfoque antropológico, están compuestas de tipos de situaciones (S), tipos de problemas () y de técnicas (), las cuales constituyen la praxis o conocimientos técnicos y de tecnologías () y teorías () que constituirán el logos o saber. Según Espinoza y Azcárate (2000) las técnicas se entienden como ciertas maneras de hacer, esto es, como procedimientos que pueden ser empleados para resolver los problemas; las tecnologías como los discursos que sustentan, describen, explican y justifican los procesos matemáticos que ahí se encuentran involucrados, y los cuales se espera sean más adelante institucionalizados en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, y la teoría como el argumento formal que permite justificar rigurosamente dicha tecnología.

De lo anterior se puede determinar que los objetos de conocimiento matemático surgen de prácticas con las matemáticas ubicadas en diversos contextos geográficos y culturales; en tal sentido, D'Amore y Godino (2007); Godino, Batanero y Font (2008), entienden una práctica matemática como una actuación particular, o conjunto de actuaciones, en el abordaje de problemas matemáticos específicos (de un individuo o de una institución). Esta práctica está determinada por formas de razonar, comunicar, validar o generalizar y habitualmente no existe de manera aislada sino que está asociada a sistemas de prácticas que interaccionan entre sí.

Campos conceptuales. Para (Vergnaud, 1990) un campo conceptual puede considerarse como un conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar un conjunto de situaciones. Este conjunto de conceptos y de teoremas están presentes de manera informal y en un nivel previo en los sujetos a través de lo que Vergnaud (1983) denomina teoremas y conceptos en acto o en acción. Los teoremas y conceptos en acto son definidos como relaciones matemáticas que son tomadas en cuenta por los estudiantes cuando escogen una operación o una secuencia de operaciones para resolver un problema. En tal sentido son conocimientos construidos bajo la acción de los individuos, con validez local, y por ende, soportados por una base empírica antes que formal.

El campo conceptual de las estructuras multiplicativas. Vergnaud (1983, 1990, 1991, 1994, 2007) define el campo conceptual de las estructuras multiplicativas como el conjunto de situaciones que requieren una multiplicación, una división o una combinación de tales operaciones, pero también como el conjunto de conceptos (proporción simple y compuesta, función lineal, múltiplo, combinación lineal, fracción, divisor, razón, etc.) y teoremas (propiedades de isomorfismo de la función lineal y su generalización a las relaciones no enteras, propiedades que se refieren al coeficiente constante entre dos variables linealmente ligadas, y algunas propiedades específicas de la bilinealidad) que permiten analizar estas situaciones.

Razonamiento proporcional. Según Lamon (2007) este tipo de razonamiento tiene que ver con suministrar argumentos que permitan soportar las enunciaciones que se hacen con respecto a las relaciones estructurales entre cuatro cantidades. Estas enunciaciones están hechas en contextos que al mismo tiempo involucren la covariación entre cantidades y la invariancia de razones o productos. Por tanto, el razonamiento proporcional podría ser considerado como aquella habilidad que permite no solo diferenciar la relación multiplicativa entre dos cantidades sino también la capacidad de poder extender dicha relación a otro par de cantidades.

CONCLUSIONES

Se observó cómo en algunas situaciones los estudiantes acuden a realizar la división entre las cantidades de magnitud involucradas para determinar el valor por unidad. En este momento fue difícil determinar el significado que para ellos tenía dicha cantidad. Pero en las preguntas denominadas de generalización, se observa que el valor encontrado es utilizado como invariante o como constante de proporcionalidad. Se pone en evidencia la preferencia de algunos estudiantes por la realización de procesos aditivos en lugar de la multiplicación.

En problemas de repartos proporcionales se evidenció mayor comodidad de los estudiantes para realizar análisis de tipo cualitativo y no tanto para el análisis de índole cuantitativo. De igual manera, en un 30% de estudiantes se observó la primacía de los repartos equitativos por encima de los repartos proporcionales, influenciada por la manera como en la vida cotidiana se dan las cosas. En este sentido es necesario diseñar situaciones de tal forma que induzcan al estudiante a asignar de manera natural el carácter proporcional que debe tener el reparto que se va a realizar. Ahora bien, en la realización de los análisis cuantitativos la técnica mayoritariamente utilizada permitió calcular la constante de proporcionalidad que luego se aplicó para determinar los valores del premio que debe recibir cada persona.

En lo referente a los problemas relacionados con porcentajes, la mayoría de los estudiantes acudieron a la técnica de determinar a cuánto correspondía el 1%.

METODOLOGÍA DEL TALLER

La idea es poner a los participantes en situación; por tal razón se los invitará a trabajar aproximadamente de la misma forma como lo hicieron los estudiantes. Tal desarrollo se hará a partir de tres momentos, aunque inicialmente se los familiarizará con algunos elementos teóricos que sirvieron de base para el análisis de los resultados y que constituirán el primer momento.

Los momentos propuestos son:

- Primer momento. Presentación de los elementos teóricos que sustentan el taller.

- Segundo momento. Proposición a los participantes de la solución de dos de las cinco situaciones aplicadas a los estudiantes.
- Tercer momento. Presentación de los resultados obtenidos en la implementación con los estudiantes de grado séptimo.
- Cuarto momento. Discusión a partir de la presentación de resultados hecha en el tercer momento y de los resultados obtenidos en el segundo momento.

  Se anexan las situaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. Recherches en didactique des mathématiques 19 (1), 77-124.

D'amore, B., & Godino, J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de las matemáticas. Revista Latinoamenricana de Investigación en Matemática Educativa, 10 (2), 191-218.

Espinoza, L., & Azcarate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "limite de una función": una propuesta metodológica para el análisis. Enseñanza de las Ciencias, 18 (3), 355-368.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático. Consultado en diciembre 15, 2009. Disponible en http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

Guacaneme, E. (2001). Estudio didáctico de la proporción y la proporcionalidad: una aproximación a los aspectos matemáticos formales y alos textos escolares de matemáticas. Tesis de Maestría no publicada, Universidad del Valle, Cali.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 629 - 667). New York: Information Age Pub Inc.

Obando, G., Vasco, C., & Arboleda, L. (2009). Praxeologías matemáticas en torno al número racional, las razones, las proprociones y la proporcionalidad. Comunicación interna no publicada. Universidad del Valle. Cali.

Obando, G., Vanegas, M., & Vásquez, N. (2006). Pensamiento numérico y sistemas numéricos. Medellín: Gobernación de Antioquia.Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia. Dirección de Fomento a la Educación con Calidad.

Perry, P., Gucanéme, E., Andrade, L., & Fernández, F. (2003). Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: Un hueso duro de roer. Bogotá: Una empresa docente.

Posada Balvin, F. A. (2006). Módulo 2 Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico. Medellín: Gobernación de Antioquia. Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia. Dirección de Fomento a la Educación con Calidad.

Sánchez, Eruin. (2011). Razones, proporciones y proporcionalidad en términos de variación y correlación entre magnitudes: una posible forma para comprender las construcción de dichos objetos matemáticos. Tesis de maestría no publicada, Universidad del Cauca. Colombia.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. En R. Lesh y M Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes (pp. 127-124). New York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactiques des Mathématiques, 10 (23), 133-170.

Vergnaud, G. (1991). El niño las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. México: Trillas.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? En G. Harel and J. Confrey (Eds.), The Devepopment of MULTIPLICATIVE REASONING in the learning of mathematics (pp. 41-61). Albany: State University of New York.

Vergnaud, G. (2007). In what sense the conceptual fields theory might help us to facilitate meaningful learning? [¿En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo?]. Investigações em Ensino de Ciências, 12(2), 285 - 302.

Situación 1: Repartamos el premio

Luisa, Pedro, José y Martha (quienes no se conocen) compraron una boleta para la rifa de 12'000.000 de pesos en efectivo. El valor total de la boleta es $10.000. Para la compra Luisa aportó 1.000 pesos, Pedro 2.000, José 3.000 y Martha 4.000 pesos.

(Recuerda escribir las operaciones que realizas)

1. Si las cuatro personas se ganan la rifa :
   a. ¿Quién recibe más dinero? ¿Por qué?
   b. ¿Quién recibe menos dinero? ¿Por qué?
   c. ¿Qué cantidad de dinero le corresponde a cada uno?
2. ¿Cuánto debería recibir José si su aporte hubiese sido de 5.000 pesos?

3. ¿Cuánto debería recibir Martha si su aporte hubiese sido de 7.000 pesos?
4. ¿Cuánto debería haber aportado una de las cuatro personas si hubiese querido ganarse $9’000.000?
5. ¿Cuánto debería haber aportado una de las cuatro personas si hubiese querido ganarse 5’400.000 pesos?
6. ¿Cómo se calcularía la cantidad de dinero recibido de acuerdo con una cantidad de dinero aportado?
7. ¿Cómo se calcularía la cantidad de dinero aportado de acuerdo con la cantidad de dinero que se quiere recibir?
8. El realizador de la rifa informa que en una anterior ocasión realizó la repartición de acuerdo con la siguiente tabla:

Aporte	$500	$1.500	$3.000	$5.000
Premio	$500.000	$1’500.000	$3’000.000	$7’000.000

¿Consideras que está correctamente distribuido el premio? ¿Por qué?

Situación 2: Un paseo por los descuentos

Una familia realiza algunas compras en un almacén de cadena de su ciudad el cual, por estar cumpliendo años, está ofreciendo diferentes descuentos en los productos que vende. Los artículos comprados, y el descuento ofrecido aparecen en la tirilla de compras representada por la tabla de la derecha:

Almacenes progreso			
Cantidad	Artículo	Precio (pesos)	Porcentaje de Descuento
1 Arroba	Arroz	30000	20%
1 Arroba	Azúcar	17000	20%
1 Litro	Aceite	6000	20%
1	Cámara digital	200000	5%
1	Memoria usb 2gb	20000	5%
1	Celular	150000	5%
1	Pantalón	50000	15%
1	Camisa	40000	15%
1 Kilo	Detergente	5000	10%
1	Jabón de tocador	3000	10%

(Recuerda escribir las operaciones que realizas)

1. ¿Cuál es el valor del descuento para:
    a. el arroz?
    b. la cámara?
    c. la camisa?
    d. el detergente?
2. ¿De cuánto sería el descuento para:
    a. 5 arrobas de arroz?
    b. 3 camisas?
3. ¿Cuál es el valor total del descuento para:
    a. la cámara, la memoria y el celular?
    b. el arroz, el azúcar y el aceite?
4. Si el padre decide luego comprar un martillo cuyo valor original es 15.000 pesos y el valor del descuento es 1.500 pesos. ¿Qué porcentaje de descuento tiene el martillo?

Conjeturas al realizar una tarea asociada a una ecuación vectorial de la recta con el apoyo de geometría dinámica

María Nubia Soler Álvarez[*]
Edwin A. Carranza Vargas[**]
Yuri Tatiana Samboní Trujillo[***]
Mery Viviana Pinzón Morarte[****]

RESUMEN

En este taller los participantes, a partir del desarrollo de una tarea, identifican algunas etapas en la formulación y validación de conjeturas. La tarea se centra en la exploración de un applet relacionado con la ecuación vectorial de la recta en el plano, a partir del cual se identifican algunas propiedades geométricas del objeto geométrico y, con estas, se establecen e intentan validar generalidades. Este taller surge en el marco del proyecto de investigación "Razonamientos abductivos, inductivos y deductivos desarrollados por estudiantes del curso de Geometría Analítica al realizar una tarea relacionada con la representación de objetos geométricos en distintos sistemas coordenados" que se realiza este año en la Universidad Pedagógica Nacional.

Palabras clave. Argumentación, conjetura, actividad matemática, validación y applet en geometría dinámica.

[*] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: msoler@pedadogica.edu.co
[**] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: ecarranza@pedagogica.edu.co
[***] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: tatiana728@yahoo.es
[****] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: vivispinmor@gmail.com

PRESENTACIÓN

Este taller está asociado al proyecto de investigación "Razonamientos abductivos, inductivos y deductivos desarrollados por estudiantes del curso de Geometría Analítica al realizar una tarea relacionada con la representación de objetos geométricos en distintos sistemas coordenados" que se realiza en la actualidad en la Universidad Pedagógica Nacional. En este proyecto se caracterizan algunas tareas que promueven los razonamientos abductivo, deductivo e inductivo y permiten identificar representaciones de objetos geométricos en la clase de Geometría Analítica de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo están estrechamente relacionados con los procesos de elaboración y validación de conjeturas (Ver Soler-Álvarez y Manrique, 2011); por esta razón en el desarrollo del proyecto mencionado, se ha empezado a centrar la atención en estos procesos. Una de las tareas que se ha realizado en el curso de Geometría mencionado se relaciona con la representación vectorial de la recta en el plano y se apoya en un software de geometría dinámica. En un análisis preliminar del desarrollo de esta tarea, ha sido posible evidenciar varias de las etapas en los procesos de elaboración y validación de conjeturas. Con este taller queremos presentar algunos de los resultados obtenidos de la implementación de la tarea. Resultados que, además, pueden contribuir a discusiones que se dan en la comunidad de educadores matemáticos sobre la actividad en la clase de matemáticas, el apoyo de herramientas tecnológicas en los procesos de argumentación y la formación de profesores.

El taller que se propone busca que los participantes reflexionen sobre los procesos de formulación y validación de conjeturas que surgen al explorar el applet "Ecuación vectorial de la recta". Este applet, por surgir en el contexto de la geometría dinámica, permite considerar una multiplicidad de casos, con los cuales es posible hallar patrones o regularidades de los objetos geométricos y plantear una gran diversidad de conjeturas. Las intenciones del taller son, en primer lugar, que los participantes, al manipular el applet, logren conceptualizar o ampliar el conocimiento sobre la ecuación vectorial de la recta, y en segundo lugar, que evidencien los procesos, caminos o etapas que llevan a la formulación y validación de conjeturas, evidenciando los distintos razonamientos y argumentos que están relacionados en estos procesos.

MARCO TEÓRICO

A continuación se describen los referentes teóricos tenidos en cuenta para la planeación del taller.

Pasos del proceso de elaborar conjeturas

Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid & Yevdokimov (2008) plantean que una conjetura es una proposición de la cual se piensa que es verdadera pero que debe ser sometida a examen para verificar su validez o refutarla. De acuerdo con estos autores, los pasos para conjeturar son los siguientes:

1. Observación de casos (casos particulares).
2. Organización de los casos (tablas).
3. Búsqueda y predicción de patrones (conjeturar con duda).
4. Formulación de una conjetura (casos posibles, tal vez).
5. Validez de la conjetura (verificar predicción).
6. Generalización de las conjeturas (razones).
7. Demostración.

Cañadas et al. (2008) establecen que hay cinco tipos de conjeturas; uno de ellos son las conjeturas asociadas a representaciones ejecutables; la denominan Inducción empírica a partir de casos dinámicos, que describen como:

La base para establecer una conjetura de este tipo es un número infinito de acontecimientos continuos, que son sólo un subconjunto del número infinito de acontecimientos posibles. A partir de ellos se conjetura una regla general, que describe la naturaleza de un conjunto de acontecimientos dinámicamente relacionados (Cañadas et al., 2008, p. 434).

En el tipo de conjetura Inducción empírica a partir de casos dinámicos, los dos primeros pasos se dan a partir de la manipulación de algún programa dinámico, con la finalidad de observar que alguna propiedad se mantiene constante en la manipulación continua. Después la manipulación está dirigida a validar la conjetura. Las justificaciones de la generalización, en muchos casos, no son posibles en el contexto del software dinámico, pero los problemas allí propuestos son la base para la elaboración de conjeturas.

GEOGEBRA

Los procesos de visualización inmersos en el uso de software de geometría dinámica se convierten en aspectos relevantes a la hora de generar conjeturas y producir argumentos válidos presentes en un determinado dominio. El uso en particular del software Geogebra va encaminado a su versatilidad a la hora de mezclar lo algebraico con lo geométrico de manera simultánea y lograr ver cómo esos dos tipos de representación se entrelazan para dar paso a representaciones ejecutables que consiguen desembocar en la elaboración de conjeturas y la producción de argumentos situados.

El uso de los deslizadores es una herramienta fuerte puesto que logra evidenciar de forma visual el dinamismo de objetos de tipo algebraico y geométrico permitiendo así que con un solo movimiento de forma ingenua o precisa, los procesos de visualización se materialicen en generalizaciones.

El software Geogebra, por su potencia en la mezcla de varios tipos de representación, logra conjugar en un solo espacio la conversión y transformación de los distintos objetos matemáticos presentes en un determinado episodio. Es por esta razón también que dicho software fue usado en la creación de applets pertenecientes a un curso de Geometría Analítica, ya que es un escenario propicio para el descubrimiento de relaciones algebraicas y geométricas.

METODOLOGÍA DEL TALLER

El taller está dividido en dos partes, una práctica y otra reflexiva. En la primera parte, cuya duración es 30 minutos, se realiza una tarea relacionada con un applet llamado "Ecuación vectorial de la recta", y en la segunda parte, que dura 60 minutos, se reflexiona y conceptualiza sobre la actividad matemática realizada por los participantes al desarrollar la tarea propuesta.

El applet permite determinar los lugares geométricos descritos por dos puntos que dependen de un vector, un punto móvil y dos parámetros. En la figura 1 se muestra un pantallazo de la imagen inicial presentada a los participantes.

En la parte práctica los participantes dan respuesta a una pregunta formulada en el applet. El proceso de responder la pregunta requiere que formulen conjeturas que son sometidas a procesos de validación. Se pide a los participantes que registren en un formato información sobre las conjeturas formuladas, los caminos recorridos para llegar a estas conjeturas y la forma de validarlas.

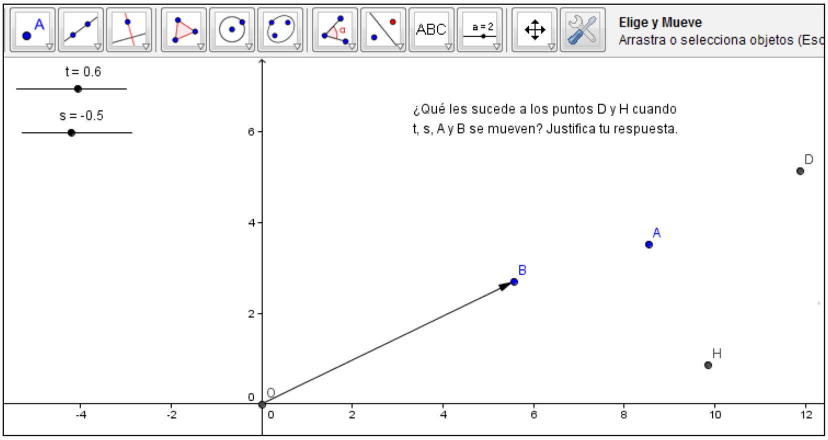


Figura 1. Pantalla inicial del applet "Ecuación vectorial de la recta".

En la parte reflexiva, los participantes por grupos identifican los momentos o etapas vividos en los procesos de elaboración y validación de conjeturas. En la plenaria de este trabajo, en grupo se contrasta lo hecho por los participantes con algunos referentes teóricos que el grupo de investigación tiene sobre este tema.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cañadas, M., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D., & Yevdokimov, O. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: tipos y pasos. Enseñanza de las Ciencias, 26(3), 431-444.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Serie Lineamientos Curriculares. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Estándares Básicos en Competencias en Matemáticas.

Soler-Álvarez, M. & Manrique, V. (2011). Informe final proyecto de investigación "Actividades Matemáticas para el desarrollo de proceso lógicos: los razonamientos inductivo y abductivo". Documento de circulación restringida. En proceso de impresión. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Pruebas saber 2009.
Análisis del tópico de geometría y medición

Liliam Cristina Tarapuez[*]
Gustavo Marmolejo[**]
Hilbert Blanco[***]

RESUMEN

Las pruebas externas son un importante instrumento que suscita revisar y transformar las prácticas de enseñanza imperantes en las instituciones educativas; es necesario, pues, contar con instrumentos que permitan categorizar lo que en ellas se evalúa. En este taller la atención recae en las Pruebas Saber aplicadas a estudiantes de grado quinto de Educación Básica, y se aplica sobre los ítems de matemáticas que le conforman una metodología de análisis que permite discriminarlos semiótica, cognitiva, matemática, fenomenológica y curricularmente.

[*] Universidad de Nariño. Dirección electrónica: crishpet@hotmail.com
[**] Universidad de Nariño. Dirección electrónica: usalgamav@gmail.com
[***] Universidad de Nariño. Dirección electrónica: hilbla@yahoo.co

PRESENTACIÓN

Las pruebas externas (Timss, Pisa, Icfes, Saber…) son un importante referente para discriminar cuál es el nivel de aprendizaje que los estudiantes tienen acerca de las matemáticas. Por lo general han sido aplicadas a estudiantes que finalizan la educación obligatoria; los resultados obtenidos tienden a ser usados para comparar el nivel de aprendizaje y la calidad de la enseñanza de las matemáticas entre regiones y países distintos. Es el caso del estudio realizado por Díaz, Gaviria, Torres y Guacaneme (1997) quienes, según los desempeños evaluados en las pruebas Timss, comparan el porcentaje de aciertos y equivocaciones de los estudiantes colombianos con los evidenciados por alumnos de otros países.

En la última década el Ministerio de Educación de Colombia y el Icfes ampliaron el rango de estudiantes a evaluar en matemáticas. Así, en la actualidad el interés por conocer el nivel de aprendizaje de las matemáticas que tienen los estudiantes colombianos no recae de forma exclusiva en aquellos que finalizan su etapa escolar, sino que también se centra en estudiantes de los grados 3, 5 y 9. De esta forma se pretende, no solo identificar el nivel de aprendizaje alcanzado, sino también discriminar su evolución de un nivel a otro y aportar elementos para que las instituciones educativas tomen decisiones en relación con el mejoramiento de la calidad de enseñanza de las matemáticas.

De esta manera, la inclinación de la comunidad de educadores matemáticos en Colombia ha pasado de centrar la atención de forma privilegiada en los resultados de las pruebas ICFES, a concentrar su atención en aquellas que se aplican en la Educación Básica. Es el caso de Marmolejo (2007) y Vázquez (2007), entre otros, quienes explican los niveles de complejidad subyacentes en los ítems que tuvieron los estudiantes de grado quinto del Valle del Cauca al ser evaluados en las pruebas censales 2005. El primero de los autores consideró la complejidad de los ítems que evalúan el tópico de geometría y medición en términos del rol que desempeña la visualización asociada a las figuras bidimensionales; Vázquez, en un sentido diferente, se enfoca en los cambios de registros que subyacen al desarrollo de las problemáticas presentadas en el tópico de aritmética. En un sentido distinto, destaca el informe de los resultados de los estudiantes en la prueba saber 2009 (ICFES, 2011) donde se caracteriza el nivel de aprendizaje de las matemáticas en grado quinto según el tipo de desempeño logrado (insuficiente, mínimo, aceptable o avanzado). En estos resultados se evidencia en una gran parte de los municipios colombianos un bajo nivel de desempeño; es el caso de San Juan de Pasto donde una gran proporción de estudiantes se encuentra en un nivel de desempeño *mínimo.*

En este taller la atención recae en las Pruebas *Saber* de matemáticas aplicadas en el 2009, en particular, en los ítems que conforman el tópico de geometría y medición. Consideramos que un análisis estructural de las preguntas de las pruebas externas aporta elementos para orientar procesos de transformación de la enseñanza de las matemáticas en las instituciones escolares. En este sentido proponemos la caracterización de los ítems que conforman el tópico de geometría y medición según cinco aspectos: semiótico, cognitivo, matemático, curricular y fenomenológico.

MARCO TEÓRICO

En lo que sigue describimos las categorías a considerar en el análisis que proponemos realizar en el taller. Igualmente se designarán los elementos que las caracterizan y que están presentes en los ítems del tópico geometría y medición en las prueba *Saber 2009*.

Semiosis: refiere a la función que desempeñan los registros de representación en el desarrollo de las problemáticas planteadas en la prueba. Las representaciones que provienen de cualquier registro de representación se caracterizan por movilizar tres actividades cognitivas distintas (Duval, 1999): la conformación, el tratamiento y la conversión. Según su presencia en el desarrollo de los ítems considerados en la prueba, únicamente las dos últimos son objeto de reflexión en el taller. Ambos consideran los cambios a los que se somete una representación: el tratamiento alude a las transformaciones internas a un registro semiótico; la conversión, por su parte, es una transformación de naturaleza externa: refiere a la transformación de una representación de un registro a otra representación de un registro de naturaleza diferente (Duval, 2004).

Fenomenología: considera el contexto en el que están inmersos cada uno de los ítems de las pruebas saber. Son tres los contextos observados en la prueba: *matemáticos* (situaciones propias de las matemáticas), *idealistas* (situaciones cotidianas donde el contexto utilizado es forzado o irreal) y *real* (el contexto es de la vida diaria pero no es forzado).

Curricular: esta categoría permite analizar los ítems de la prueba según la naturaleza de los pensamientos matemáticos que podría movilizar. Tres son los elementos que determinan esta categoría: *simple* (cuando la actividad moviliza los estándares del pensamiento espacial pero no los del pensamiento métrico, y viceversa); *mixto interno* (cuando la actividad moviliza uno o varios estándares de cada pensamiento: espacial y métrico) y *mixto externo* (cuando se hace la combinación de un mixto interno con uno o varios de los demás pensamientos: pensamiento numérico o pensamiento aleatorio).

Disciplinar: se refiere a los saberes matemáticos, que son necesarios para la resolución del problema. Los elementos que lo caracterizan son seis, a saber: las *magnitudes*, las *medidas*, las *operaciones geométricas* y *aritméticas,* y las *definiciones de figuras planas y sólidos*.

Cognición: alude a los procesos que intervienen en el aprendizaje de la geometría. Según Duval (1999) son tres los procesos cognitivos que caracterizan el aprendizaje de la geometría: visualización, razonamiento y construcción. En los procesos de desarrollo que exige la prueba en estudio se movilizan los dos primeros. Los elementos que describen esta última categoría son cuatro, los tres primeros relacionados con la visualización, el último con el razonamiento. En lo que sigue describimos cada uno de ellos: *aprehensión icónic*a: "entendida como la organización perceptiva de la gestalt 1D/2D (líneas rectas o curvas, el contorno cerrado de un triangulo, de un cuadrilátero, etc.) o gestalts 3D/2D (cubo, tazón, etc.) para que representen objetos reales u objetos matemáticos" (Duval, 2001, pág. 3); *aprehensión discursiva* (acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas tipo definiciones, teoremas o axiomas), *aprehensión operatoria* (se produce al modificar una figura mediante la aplicación de operaciones figurales) y *razonamiento como un proceso discursivo natural*, en este caso, "en donde cualquier procedimiento permite desprender nueva información de informaciones dadas; de esta manera la inducción, la abducción y la inferencia son varias formas de razonamiento. Esta información debe estar dada bajo una organización visual de gestalts nD/2D y bajo algunas redes semánticas, y debe ser procesada en un nivel representacional y simbólico" (Duval, 1999).

METODOLOGÍA DEL TALLER

El taller se realizará en cinco fases, a saber:

Fase 1: Los orientadores del taller describirán los aspectos que hacen de las pruebas externas importantes referentes a considerar en la transformación de la calidad de la enseñanza de la visualización en las instituciones educativas. Se asignará 5 minutos para esta primera fase

Fase 2: Se presentará al público participante en el taller una propuesta metodológica para el análisis de los ítems que evalúan conocimiento métrico y geométrico en la prueba *Saber-2009*. Serán 20 los minutos asignados para el desarrollo de este segundo momento.

Fase 3: Los profesores participantes en el taller aplicarán las categorías de análisis a tres ítems que evalúan elementos geométricos y métricos de las pruebas saber 2009. Se hará entrega de un documento de trabajo compuesto por 1) las definiciones de las categorías y sus dimensiones, 2) los ítems a caracterizar y 3) una tabla de doble entrada para tipificar la presencia de los elementos de la metodología de análisis propuestas. Para el desarrollo de esta fase se tendrán en cuenta 30 minutos.

Fase 4: Los talleristas junto a la población de educadores que participan en el taller contrastarán el análisis realizado a los ítems en estudio. Se designarán 20 minutos en el desarrollo de esta fase.

Fase 5: A manera de conclusión se presentarán los resultados del análisis realizado a todos los ítems que conforman la prueba en estudio y se establecerán elementos a considerar en el análisis de otras pruebas, así como el rol que desempeña este tipo de estudios en la transformación de la enseñanza de las matemáticas en las instituciones educativas. Se asignarán 15 minutos a esta fase.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Díaz, C. Gaviria, J. Torres, L. & Guacaneme, E. (1997). *Tercer estudio internacional de matemáticas y Ciencias*. Santafé de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali: Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2001). La geometría desde un punto de vista cognitiva. (V. Hernández & M. Villalba, Trad.).Recuperado de http://fractus.uson.mx/Papers/ICMI/LaGeometria.htm

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas.* Santiago de Cali: M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle

Instituto colombiano de educación superior. (2011). Saber 5° y 9°. Documentos. Cuadernillos de pruebas – Pruebas de matemáticas, quinto grado, calendario A. Recuperado de http://www.icfes.gov.co/saber59/index.php?option=com_phocadownload&view=category&id=1:p&Itemid=8

Instituto colombiano de educación superior. (2011). Saber 5° y 9° Resultados SABER 5° y 9° 2009. Resultados Censales SABER 5º y 9º 2009. Resultados de los establecimientos educativos, municipios y departamentos. Recuperado de http://www.icfessaber.edu.co/graficar/ente/id/49/grado/5/tipo/2

Marmolejo, G. (2007). *Algunos Tópicos a tener en cuenta en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras. Procesos de visualización y factores de visibilidad*. Tesis de magister no publicada. Cali: Universidad del Valle.

Marmolejo, G. (2007) Análisis del tópico de geometría y medición. En L. Torres. *Pruebas censales y formación de pensamiento matemático en la escuela.* (pp. 40-44). Cali: Universidad del Valle.

López, R. & Bazan, P. (2012). *Informe Ejecutivo Análisis Pruebas Saber 5°, 9° y 11°.* Departamento del Valle del Cauca. Secretaria de Educación.

Alcaldía Mayor de Bogotá. (2007). *Las evaluaciones y la evaluación de aula en Matemáticas.* Santafé de Bogotá. Secretaria de Educación.

Razonamiento estadístico en situaciones de muestreo y simulación

Germán Urbina[*]
Carlos Arboleda[*]
Felipe Fernández[**]

RESUMEN

Este taller propone una trayectoria de enseñanza que busca promover el razonamiento estadístico, de estudiantes universitarios, alrededor de situaciones de muestreo apoyadas en actividades de simulación. La postura conceptual y metodológica se fundamenta en algunas de las categorías diseñadas, en estudios anteriores, por la línea de investigación en Educación Estadística del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional[1]. El taller se divide en cuatro partes, entre las que se busca reconocer la necesidad de muestrear en contextos que así lo requieran, valorar diferentes métodos de muestreo y generar discusión sobre la verosimilitud de diferentes métodos de muestreo mediante el cálculo de resúmenes estadísticos y la generación de distribuciones muestrales de medias.

Palabras clave: razonamiento estadístico, muestreo, distribución de muestreo, simulación.

[*] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: gricardo.urbina@gmail.com
[**] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: caarboledac@gmail.com
[***] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: fjfernandez@pedagogica.edu.co
<?> Estas categorías aparecen reportadas en Fernández, Andrade y Sarmiento (2010)

PRESENTACIÓN

Este taller se elaboró en el marco de actividades realizadas por Arboleda y Urbina (2012) en su trabajo de grado de maestría cuyo objetivo principal fue indagar acerca del razonamiento estadístico de estudiantes universitarios alrededor de situaciones de muestreo soportadas en parte por actividades de simulación. En dicho trabajo se caracterizan algunas nociones de muestreo y simulación, y se estudian constructos y categorías acerca del razonamiento estadístico que se materializan en un conjunto de indicadores.

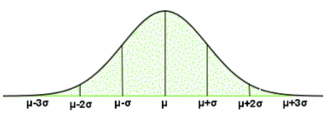
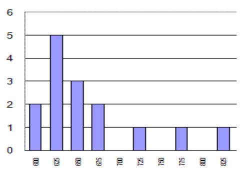
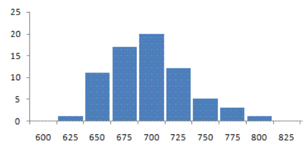
El taller pretende ser un aporte para que los participantes, partiendo desde sus nociones básicas asociadas a conceptos de muestreo y distribución, visualicen las posibilidades que una situación de simulación (como la que se planteó en nuestro trabajo) puede aportar tanto en el aula, como en las situaciones de investigación acerca del razonamiento estadístico.

MARCO TEÓRICO

Este taller considera las situaciones de muestreo como uno de los tres escenarios para aproximarse al estudio de la variación en estadística, dada por Canada (2004). En estas situaciones, la idea de variabilidad surge de observar diferencias en muestras repetidas obtenidas de una población y está ligada a la representatividad de la muestra.

En el escenario de las situaciones de muestreo, es importante señalar distinciones entre Población, Muestra y Distribución de Muestreo. Para el caso de una distribución muestral de medias, estas distinciones se pueden apreciar en el siguiente cuadro.

Tabla 1. Distinción entre población, muestra y distribución muestral de medias

Población	*Muestra*	*Distribución Muestral de Medias*
Parámetros Media Poblacional Desviación poblacional	Estimadores: Media de la muestra Desviación de la muestra	Características: Media de la Distribución. Desviación de la distribución
		

Respecto a la desviación de la distribución, en la tercera columna, se evidencia el hecho bien conocido que a medida que se incrementa el tamaño de la muestra, la distribución de muestreo presenta menos variación.

La investigación en educación estadística caracteriza, en la literatura de los últimos años, tres procesos cognitivos llamados alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico, nombrados en la literatura anglosajona como "statistical literacy, reasoning and thinking" haciendo referencia a la educación que debe tener un individuo sobre lo estocástico.

Dichos procesos intentan superar enfoques tradicionales donde se hace énfasis en el desarrollo de habilidades, procedimientos y computaciones numéricas, que no favorecen en los estudiantes las acciones de "razonar" o "pensar" de un modo estadístico.

delMas (2002) se basó en esta postura conceptual para presentar una lista de palabras que proporcionan orientaciones sobre lo que se requiere del estudiante para que demuestre o desarrolle su comprensión en alguno de los tres procesos cognitivos. Dependiendo del proceso cognitivo a caracterizar, se deben elaborar tareas en donde el diseño de las preguntas presentadas guíe la actividad de los estudiantes de acuerdo con la siguiente tabla.

Tabla 2.Tareas que podrían distinguir los tres procesos

Alfabetización básica	*Razonamiento*	*Pensamiento*
Identificar Describir Refrasear Traducir Interpretar Leer	¿Por qué? ¿Cómo? Explicar (Los procesos)	Aplicar Criticar Evaluar Generalizar

De la tabla anterior, se ve por ejemplo, que si una meta de la instrucción fuera desarrollar el razonamiento estadístico, entonces los profesores deben procurar que los estudiantes realicen acciones como explicar: cómo los resultados de un proceso particular fueron producidos; el proceso que produce la distribución muestral de un estadístico; por qué una muestra aleatoria tiende a producir muestras representativas y por qué una conclusión dada es justificable.

METODOLOGÍA DEL TALLER

El taller va dirigido a la comunidad académica en general interesada en conocer y/o profundizar aspectos relativos a la educación estadística y está organizado en cuatro partes.

La primera intenta introducir la necesidad de muestrear, identificar la variable relevante en un contexto y notar que la selección de la muestra implica la definición de un proceso de selección. La segunda enfatiza la idea de que existen diferentes métodos de muestreo y de que es necesario valorar cuál puede ser más conveniente. En la tercera se busca contrastar las ideas intuitivas generadas en la actividad de la parte 2, con los resultados de solo una realización física de los procesos de muestreo considerados. La última parte pretende generar una discusión entre los participantes acerca de la verosimilitud de los métodos propuestos en la actividad, con base en la generación de distribuciones de medias muestrales, que se construye con base en la reiteración de la toma de muestras y el correspondiente cálculo y organización, en una distribución, de las medias obtenidas.

Proceso hipotético de aprendizaje en el taller

En la primera parte, se trabaja con una base de datos con acceso restringido, como de hecho se verifica en la mayoría de los contextos reales donde se supone que la generación de datos es un proceso que involucra un costo. Se espera generar distinción entre población y muestra, y abrir discusión en torno a los recursos que implica un proceso de muestreo, y la necesidad de definir qué es lo que se quiere medir u observar. Asimismo se tiene la intención de que el estudiante comente qué ventajas y desventajas puede tener el tomar una muestra.

En la segunda parte, el hecho de tener acceso restringido a la Base de Datos motiva una discusión intuitiva de los métodos presentados en esta parte, en la que se busca que se expliciten razones para justificar qué método de muestreo es más conveniente.

Para la tercera parte, se espera que en el proceso se abra espacio para que los participantes: noten sesgos que pueden aparecer relativos a la utilización de los métodos; cuestionen la manera como se estima el promedio en algunos de los métodos y se den cuenta de que algunos métodos presentan mayor o menor variabilidad que otros.

En la parte 4, se espera que la utilización de la herramienta de simulación ayude a que los participantes adviertan las diferencias de variación presentes en los métodos, para que de manera comparativa evalúen la conveniencia de cada método.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arboleda, C. & Urbina, G. (2012). Razonamiento estadístico de estudiantes universitarios. Un estudio con actividades de simulación en situaciones de muestreo. COMPLETE

Canada, D. (2004). Elementary preservice teachers' conceptions of variation (tesis doctoral).Portland StateUniversity

del Mas, R. (2002). Statistical literacy, reasoning, and learning: a commentary. Journal of Statistics Education, 10(3).University or Minnesota.

Fernández, F., Andrade, L. & Sarmiento, B. (2010) Experimentos de enseñanza para el desarrollo de razonamiento estadístico con estudiantes de secundaria (Informe de Investigación). Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional.

Límite de funciones y sistemas de representación. Estudio comparativo de textos escolares

Yuly Maribel Pantoja Portillo[*]
Luis Felipe Martínez Patiño[**]

RESUMEN

Este trabajo es de carácter semiótico estructural, es decir, se analiza cómo conviven los sistemas de representación en la manera como los textos escolares presentan el concepto de límite; se toman para este análisis dos aspectos principales que son: el aspecto semiótico y el curricular. Se pretende que los participantes en el taller discriminen las representaciones que usan los libros al introducir el concepto de límite. Adicionalmente los participantes deberán identificar los estándares que se movilizan en este contenido. Los ejemplos a analizar serán tomados de manuales de matemáticas de grado once. Por último se realizará la codificación y validación la información obtenida.

Universidad de Nariño. Dirección electrónica: yuly-david@hotmail.com
Leidy Marcela Gómez Melo, Universidad de Nariño, lmarcegom@gmail.com
** Universidad de Nariño. Dirección electrónica: lufemapa@hotmail.com

PRESENTACIÓN

El concepto de límite ocupa una posición central en el cálculo, pues, por un lado, es un concepto básico sobre el cual se construye el cálculo diferencial e integral. Por otro lado, debido a su carácter instrumental, es usado como herramienta tanto en la solución de problemas matemáticos como de otras ciencias. En un sentido distinto, los primeros acercamientos a la noción de límite en el aula se realizan por medio de representaciones, es a partir de estas que se introducen y construyen los conceptos matemáticos. Generalmente, la noción de límite es abordada en principio desde la representación numérica, para luego pasar a la representación gráfica. Pero, una y otra tienden a ser utilizadas de manera limitada (Medina, 2001); en consecuencia, este tipo de representaciones no se considera como apoyo en los procesos algebraicos. Es aquí donde aparecen las dificultades en el aprendizaje del límite, pues los estudiantes usualmente aplican algoritmos sin comprender verdaderamente su significado; esto se ve reflejado en las concepciones erróneas que se adquieren (Medina, 2001), las cuales se manifiestan cuando se enfrentan a la resolución de problemas en los que se hace necesaria la aplicación del límite.

Muy a menudo, los objetivos de la enseñanza de las matemáticas se definen en términos de los tipos de problemas que los estudiantes sean capaces de resolver, o de las habilidades y conceptos que tengan. Sin embargo, estas formulaciones de los objetivos de aprendizaje tienden a limitar la visión de la educación matemática. La razón de esto es que tales objetivos no incorporan capacidades para nuevas construcciones espontáneas, para la síntesis de nuevas estrategias cuando sea necesario al enfrentarse a situaciones desconocidas, o para actos matemáticos creativos. Una de las principales razones de nuestro énfasis en los sistemas externos de representación es que proporcionan un medio para caracterizar los resultados del aprendizaje de una manera más valiosa.

Por otra parte, en relación con los textos escolares, estos son, de un lado, los materiales didácticos de mayor uso por parte de educadores, al preparar e implementar sus clases de matemáticas, y por los estudiantes en sus intentos por comprender las matemáticas enseñadas (Pepin et al. (2001), citados por Marmolejo, González, 2011) y, de otro lado, al considerarse de parte de la comunidad educativa que "… la enseñanza no está tan determinada por los decretos y órdenes ministeriales como por los libros de texto (Shubring, 1987); en este taller se considera que estos materiales didácticos son una potente herramienta para reflexionar sobre los elementos que caracterizan la enseñanza y el aprendizaje de la matemáticas.

Por todo lo anterior, pretendemos que los docentes que participen en el taller discriminen las representaciones que usan los libros al introducir el concepto de límite. La atención recaerá en los ejemplos que se plantean en estos materiales, pues es aquí en donde se evidencia la intencionalidad que tiene el autor al introducir las temáticas correspondientes a este tema y donde aparece un contraste significativo de las representaciones utilizadas. Adicionalmente, los docentes deberán identificar los estándares que se movilizan en este contenido. Los ejemplos a analizar serán tomados de manuales de matemáticas de grado once.

MARCO TEÓRICO

En lo que sigue describimos cinco categorías a considerar en el análisis que proponemos realizar en el taller. Igualmente, tres de ellas de naturaleza semiótica y dos de naturaleza curricular.

Sistema de representación analítico de funciones: muestra una concepción formal del límite, un aspecto estático y abstracto. El grado de precisión es inmejorable, pero difícilmente ligado con fenómenos reales (tomado de Medina, 2001). Son cinco los tipos de representación que caracterizan esta categoría, a saber:

Representación numérico-tabular: muestra la evaluación de la función en valores cercanos a la variable independiente. Representación gráfico-cartesiana de función: se intenta describir gráficamente el acercamiento de la variable dependiente a un valor, cuando la variable independiente se acerca a otro. Representación simbólico-específica de función: se da cuando se presenta un ejercicio de cálculo de límite de una función de la forma , y se procede a evaluarlo, obteniendo así el límite L. Definición verbal de función: en este tipo se presenta una descripción de la definición formal sin el uso de símbolos que caracterizan la definición formal (como e, d y los cuantificadores ,) pero que están implícitos. Definición formal de función: en esta dimensión aparece explícita la siguiente definición: Definición formal de límite de una función: Sea f una función cuyo dominio es el intervalo I. Sea "a" un valor cualquiera que puede o no pertenecer a I. Decimos que: Si y solo si: e >0, d >o tal que si 0 < ½x - a½< d entonces ½f(x) - L½< e.

Sistema de representación algebraico: considera el uso de notaciones y simbolismo algebraico asociados a funciones y sucesiones, el cálculo de límites se reduce a la aplicación de teoremas de límites y uso de algoritmos algebraicos como sustitución, factorización y racionalización (tomado de

Medina 2001). En esta categoría se presenta un tipo de representación, a saber:

Representación algebraica de función y sucesión: se llama representación algebraica cuando en el proceso del cálculo de un límite, se requiere el uso de procedimientos algebraicos como: factorización, racionalización, uso de conjugadas y simplificaciones para obviar indeterminaciones.

Sistema de representación aritmético: alude a las representaciones de límites de sucesiones que están asociados a representaciones de números y sus operaciones (tomado de Medina 2001). Son seis los tipos de representación que caracterizan esta categoría, a saber:

Representación numérico-tabular de una sucesión: en esta dimensión la representación del límite se hace por medio de una tabla de valores en la que se expresan valores de la variable independiente y valores de la sucesión, con la intención de mostrar la tendencia del límite. Representación simbólico-específica de una sucesión: se da cuando se presenta un ejercicio de cálculo de límite de una sucesión de la forma y se procede a evaluarlo, obteniendo así el límite L. Definición verbal de una sucesión: en este tipo se presenta una descripción de la definición formal de sucesión sin el uso de símbolos que caracterizan la definición formal (como e y N y los cuantificadores y) pero que están implícitos. Definición formal de una sucesión: en este tipo aparece explícita la siguiente definición: una sucesión (Sn) tiene límite L si, para cada número positivo e, existe un número positivo N (que en general depende de e) tal que $|Sn - L| < e$ para todo n ³ N. Representación de la recta real: en este tipo se usa la recta real para expresar el concepto de límite, ubicando puntos en la recta cada vez más próximos al punto límite siempre que n sea más grande. Representación cartesiana de sucesión: los valores de la iteración de la sucesión forman un conjunto discreto de puntos, quedando representada la sucesión como función.

Estándares de calidad: en esta categoría se consideran los estándares que se movilizan en el pensamiento numérico y en el pensamiento variacional y que son los que se relacionan con el límite (tomado del MEN, 2003).

Los tipos han sido designados como indicadores de logro donde aparecen los contenidos relacionados con el límite. Aquí se debe identificar qué contenidos de los mostrados en cada subcategoría se movilizan en cada ejemplo.

Pensamiento variacional, estándar: utilizar técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos. Son tres los tipos de contenidos que caracterizan esta categoría, a saber:

Interpreta y/o define gráficamente el límite de una función: se considera cuando en el ejemplo aparecen gráficas relacionadas con el límite de una función y sucesión donde se evidencian aproximaciones. Determina el límite de una función por aproximación: se considera cuando en el ejemplo aparecen tablas con aproximaciones. Determina si existen la ecuación de las asíntotas horizontales, verticales u oblicuas de una función: se considera cuando en el ejemplo se localizan las asíntotas de la curva.

Pensamiento numérico, estándar: usar las propiedades y representaciones en los números naturales y reales en el cálculo del límite. Son tres los tipos de contenidos que caracterizan esta categoría, a saber:

Evalúa límites de funciones reales utilizando sus propiedades: se considera cuando se aplican las propiedades de los límites. Aplica propiedades algebraicas: se considera cuando se aplican propiedades algebraicas como: asociativa, distributiva, de potenciación de radicación, etc. en el cálculo de límites. Calcula límites de funciones indeterminadas límites infinitos, límites trigonométricos: se considera cuando aparecen en los ejemplos el cálculo de límites de este tipo.

METODOLOGÍA DEL TALLER

El taller se realizará en cinco fases, a saber:

Fase 1: los talleristas describirán los aspectos que hacen de los sistemas de representación importantes referentes a considerar en la transformación de la calidad de la enseñanza del límite en el aula de clases. Se asignará 5 minutos para esta primera fase.

Fase 2: se presentará al público participante en el taller una propuesta metodológica para el análisis de los ejemplos que evalúan conocimiento analítico y algebraico relacionado con el concepto de límite. Serán 20 los minutos asignados para el desarrollo de este segundo momento.

Fase 3: los profesores participantes en el taller aplicarán las categorías de análisis a cuatro ejemplos que evalúan elementos analíticos y algebraicos de los ejemplos. Se hará entrega de un documento de trabajo compuesto por 1) las definiciones de las categorías y subcategorías, 2) los ejemplos a caracterizar y 3) una tabla de doble entrada para tipificar la presencia de los elementos de la metodología de análisis propuestas. Se tendrán en cuenta 30 minutos para el desarrollo de esta fase.

Fase 4: Los talleristas junto a la población participante en el taller contrastarán el análisis realizado a los ejemplos en estudio. Se designarán 20 minutos en el desarrollo de esta fase.

Fase 5: a manera de conclusión se presentarán los resultados del análisis realizado a todos los ejemplos que conforman la prueba en estudio y se establecerán elementos a considerar en el análisis de otras pruebas, así como el rol que desempeña este tipo de estudios en la transformación de la enseñanza de las matemáticas. Se asignarán 15 minutos para esta última fase.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Blázquez, S. & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. COMPLETE

Castro, E. & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.

Cornu, B. (1991) Limits. En: Advanced Mathematical Thinking. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, p. 153-165

García, G., Serrano, C., Espitia, L., (1997) El concepto de función en textos escolares, Colciencias – UPN

Kaput, J. (1987). Representation Systems and Mathematics. En Janvier, C. Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. Ed. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. New Jersey, USA.

Medina, Anna. (2001) Concepciones del Concepto de Límite en Estudiantes Universitarios. Universidad Pedagógica Nacional. Colombia.

Las concepciones de los docentes sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje

*Willington Algeri Benítez Chará**
*Yilton Riascos Forero***

RESUMEN

El taller propuesto hace parte de la investigación denominada "Concepciones sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje: un estudio comparativo entre docentes en ejercicio y docentes en formación" (Benítez, 2001), realizada en el marco de la Maestría en Educación cuyo interés es conocer la forma de concebir las matemáticas que tienen los docentes de matemáticas, así cómo influye esta idea en sus procesos de enseñanza y aprendizaje, las restricciones institucionales y las sociales y culturales, implementando para ello una entrevista semiestructurada.

* Profesor: Institución Educativa Santa Rosa; Profesor Catedrático Universidad Cooperativa de Colombia, Institución Universitaria Colegio Mayor del Cauca-Popayán. Dirección electrónica: willingtonbenitez@mgmail.co.

** Profesor Titular Dpto. de Matemáticas de la Universidad del Cauca; Candidato a Doctor en Psicología por la Universidad del Valle. Dirección electrónica: yirifo@unicauca.edu.co

PRESENTACIÓN

La formación de profesores de matemáticas es un área de interés en Educación Matemática ya que su labor tiene una gran repercusión en la enseñanza de las matemáticas del presente y del futuro de la humanidad. Esta importancia se hace evidente en períodos de reformas educativas, ya que difícilmente se podrían aplicar si los profesores, como principales agentes dinamizadores, no sienten tal necesidad, ni asumen como propia y aportan los esfuerzos necesarios para realizarla.

Teniendo en cuenta las perspectivas sobre las funciones y roles que los profesores de matemáticas realizan en el aula de clases, es fácil aceptar que existe un gran abanico de quehaceres, responsabilidades, y restricciones, y que todos estos se encuentran mediados, en alguna medida, por las creencias y concepciones que el profesor tiene acerca de su actividad profesional (Pochulu, 2004; Spengler, Egidi, Luisina, & Craveri, Ana María, 2007).

Permanentemente se le pide o exige, al profesor de matemáticas, un nuevo comportamiento profesional, que contribuya a una mejor culturización y humanización de esta disciplina; asimismo, una nueva actitud hacia los estudiantes, conocimiento y habilidades pedagógicas flexibles según las distintas situaciones y contextos educativos donde el estudiante juegue un rol fundamental, un conocimiento de la disciplina en sí y el conocimiento didáctico asociado a ella (Pochulu, 2004). Sin duda, es larga la serie de aspectos, actitudes y comportamientos que deberían estar presentes en la tarea de los profesores de matemáticas, pero este no es el espacio para hacerlo. Por otro lado, las demandas sociales abren la discusión a la incorporación de recursos, sobre todo tecnológicos, y la implementación de metodologías de enseñanza y aprendizaje.

Esta situación, sumada a los nuevos cambios curriculares y pedagógicos, exige de la formación de docentes una inmediata revisión, actualización y perfeccionamiento de sus metodologías. Estas peticiones o exigencias, en particular para la actividad de enseñanza, presentan relación inversa con los conocimientos que el profesor tiene y que efectivamente va fortaleciendo en el tiempo, lo que le lleva a una consolidación de una práctica, la cual, según Joshua y Dupin (1998), inicia cuando ellos:

> … desarrollan concepciones precisas, ligadas a su propia historia, sobre la manera como un alumno aprende, sobre las finalidades de la enseñanza que él prodiga y sobre los fundamentos epistemológicos de las ciencias. Esto constituye de alguna manera su ideología privada, la cual condicionará en parte los actos de enseñanza (pág. 8).

Las concepciones, entendidas como el fortalecimiento en la comprensión de conceptos, se van formando a lo largo de la vida del docente, período que comienza desde su época estudiantil en la secundaria, luego en su formación inicial como docente en formación, donde se empieza a consolidar su práctica, hasta llegar a arraigarse progresivamente en su rol como de docente en ejercicio.

Según Del Solar y Díaz (2009), gran parte de las creencias1 de los docentes respecto a cómo se debe enseñar y aprender ya están asentadas en su mundo cognitivo antes de ingresar a la universidad, y están constituidas por hechos personales y académicos que los han marcado, de una u otra manera; ellas obedecen a un conocimiento práctico mucho más amplio, que involucra principios construidos e interiorizados por el profesor durante su historia personal y profesional.

En cada uno de estos períodos se producen cambios, no solo en el plano profesional, sino también en el plano personal. Ambos planos manejan una dialéctica que va modificando formas de pensar, de entender la vida personal y profesional, etc., afectando el sistema de creencias que el docente ha construido, y concibiendo la necesidad por mejorar las prácticas de los docentes.

Esta reflexión culmina con la necesidad de realizar investigaciones acerca de la evolución de ese proceso, al comprender la relevancia del papel del docente en los proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, procurando mejores comprensiones acerca de cómo la enseñan y cómo la conciben y les otorgan significados personales.

Esta problemática como lo evidencian los investigadores en el ámbito mundial en el campo, es foco de preocupación, particularmente en Colombia en donde se ha empezado a teorizar sobre el tema como lo demuestran los trabajos de Martá (2008), Delgado, Trujillo, Castro & Guerrero (2010) y Benítez (2001), entre otros, lo que abre el panorama para seguir realizando investigaciones en el campo.

La formación de profesores enfatiza la necesidad de pensar la formación universitaria en función de estar preparado para realizar “algo” de manera competente al finalizar el proceso educativo y haber adquirido las habilidades que permitan seguir innovando y aprendiendo del fenómeno de la enseñanza de las matemáticas.

---

1 Entendemos por creencia, la explicación intuitiva que se tiene respecto de un concepto y que no encuentra aún respaldo argumentativo en teorías o explicaciones científicas.

De esta forma, el diseño de oportunidades para que el docente en formación aprenda a enseñar requiere de la realización de dos tareas previas: – analizar la actividad en la que se pretende que el individuo llegue a ser competente, e – identificar las competencias para la realización de dicha actividad.

En la profesión de profesor de matemáticas, la actividad vinculada es la de "enseñar matemáticas"; por lo tanto, en los programas de formación de profesores, debe plantearse interrogantes respecto a ¿qué significa aprender a enseñar matemáticas desde la perspectiva de "aprender una práctica"?, lo implica entender la noción de práctica como realizar tareas para alcanzar un fin, hacer uso de instrumentos y justificar su utilización.

MARCO TEÓRICO

Lo que piensa el profesor sobre la educación, cómo concibe la asignatura que enseña y su área de conocimiento, cómo entiende la enseñanza y el aprendizaje de la misma, y cómo percibe y valora a sus estudiantes son elementos claves para poder interpretar y entender lo que los docentes hacemos en las aulas, y para comprender cómo mediamos en el aprendizaje de nuestros alumnos (Clark & Peterson, 1990; Shulman, 1989).

En esta línea, la influencia en concreto que tienen las concepciones de los docentes sobre y para la enseñanza de las matemáticas también está ampliamente reconocida (Kuhs & Ball, 1986; Ernest P. , 1989; Pajares, 1992; Thompson, 1992), pues como sostiene Ernest (1989), aun reconociendo que es importante el conocimiento de las matemáticas por sí mismo, esto no es suficiente para explicar las diferencias existentes en la práctica de los profesores de matemáticas, ya que estas implican la participación del sistema de creencias que cada profesor tiene sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, los límites y posibilidades del contexto institucional donde se imparten, y sus procesos de reflexión.

Ahora bien, si hay algo que llama la atención al adentrarse en el ámbito de estudio de las concepciones, es, sin duda, la gran diversidad de términos utilizados, entre los cuales es difícil discernir claramente si la diferencia es simplemente de etiqueta o si va más allá y llega a la propia comprensión del concepto.

Mientras unos autores manejan los términos creencias y concepciones como sinónimos, otros señalan que son diferentes tipos o niveles de conocimiento y que por lo tanto forman parte del conocimiento profesional del profesor (Ernest P., 1989; Thompson, 1992). La discusión básica se sitúa en la distinción entre creencias, concepciones y conocimiento (Ernest P., 1989; Thompson, 1992; Carrillo, 1998).

En la literatura consultada, la diferencia entre concepción y creencia no es siempre clara. Pajares (1992) caracteriza las creencias distinguiéndolas de una manera muy sutil de las concepciones. Thompson (1992) diferencia en principio explícitamente concepciones, compuestas de creencias y otras representaciones, al afirmar que "… las concepciones son una estructura mental general, que abarca las creencias, los significados, conceptos, las proposiciones, reglas, las imágenes mentales, preferencias, y gustos…".

Ponte (1994), citado por Flores (1998), concuerda con esta postura al afirmar que las concepciones forman un concepto más general que puede ser usado para estudiar aspectos en los que la persona no parece sostener creencias sólidas y agrega que la mayoría de los autores ven creencias como algo con una carga afectiva relacionada con preferencias, inclinaciones, y líneas de acción.

Las concepciones condicionan la forma de abordar las tareas; así, las creencias pueden mostrar aspectos afectivos de la personalidad del profesor. Según Thompson (1992), los investigadores han reportado variados desacuerdos o inconsistencias entre las creencias profesadas por los profesores sobre la naturaleza de las matemáticas, y la práctica. Por ello recomienda que las investigaciones sobre las creencias de los profesores examinen los datos verbales de los profesores con los datos observacionales de su práctica instruccional o de su conducta matemática.

Ernest (1989) identifica tres aspectos importantes sobre los que el profesor de matemáticas debe profundizar, ya que afectan a su ejercicio profesional; ellos son: – la visión o concepto del profesor sobre la naturaleza de las matemáticas, – su modelo o visión de la enseñanza de las matemáticas, y – su modelo o visión del proceso de aprender matemáticas (pág. 250). Es decir, las concepciones que tenga un profesor sobre las matemáticas se componen de sus creencias acerca del propio contenido, de su enseñanza y de su aprendizaje. La concepción del profesor sobre la naturaleza de las matemáticas y su sistema de creencias, concerniente a la naturaleza de las matemáticas en general, forma la base de la filosofía de las matemáticas, y son parte de sus concepciones.

Ernest (1989) sostiene que el conocimiento matemático de los profesores, aunque necesario, no es suficiente para explicar las diferentes aproximaciones didácticas de los profesores de matemáticas. Por ello, considera necesario tomar tres componentes de las creencias de los profesores.

El primero se refiere a la naturaleza de las matemáticas: identificando tres sistemas de creencias, que hacen referencia a la filosofía de las matemáticas: platónica, instrumentalista y resolución de problemas. El Segundo, al nivel de conciencia del profesor de sus propias creencias, y el alcance con el que el profesor reflexiona sobre su práctica de enseñanza de las matemáticas y, el tercero, la visión del profesor sobre el proceso de aprender matemáticas, qué comportamientos y actividades mentales están involucradas por parte del estudiante, y qué constituyen actividades de aprendizaje apropiadas y prototípicas.

La caracterización de los tres componentes respecto a la creencias de los profesores conduce a Ernest a establecer una jerarquía entre ellos en función de consideraciones estructurales -la manera de percibir las relaciones entre sus elementos y las propiedades, locales o globales- y del carácter infalible -de un conocimiento que se considera independiente de la experiencia-, o, falible, de un conocimiento dinámico y producto de prácticas culturales.

En síntesis, los estudios acerca de las concepciones sobre las matemáticas, juegan un papel importante en el desarrollo de la formación de docentes, ya que los profesores de matemáticas pueden concebir de manera distinta los conceptos matemáticos, y durante la enseñanza de tales conceptos matemáticos, pueden enfatizar en diferentes aspectos esperando que, en algunos casos, esto se dé de forma coherente con sus concepciones.

METODOLOGÍA

El taller busca identificar las concepciones que tienen los docentes sobre las matemáticas, su enseñanza, su aprendizaje, las restricciones institucionales y las sociales y culturales, implementando para ello una entrevista semiestructurada cuya finalidad es la de permitir a los docentes tomar conciencia de las situaciones más sensibles y particulares de sus experiencias con las matemáticas, así como reconocer los argumentos que esgrimen para justificar sus posiciones y sus prácticas. De manera particular busca que los docentes den respuesta a dos interrogantes.

El primero: ¿Cómo enseñan las matemáticas los profesores universitarios? – debe aportar fundamentalmente la descripción de sus prácticas. Las prácticas de clases: tipo de enseñanza, guías para el aprendizaje, modalidad de evaluación. Las prácticas institucionales: organización curricular y sus cambios, definición de programas, restricciones de tiempo, exigencias de la evaluación y la promoción. Y el segundo ¿Por qué las enseña así? - es mucho más complejo y debe dar cuenta, entre otras, de la relación entre su historia personal como estudiante y la manera como asume su docencia, los modelos de profesores que lo han marcado, y que sigue (de manera consciente o no), su formación para este oficio y las ideas que sigue respecto a qué son las matemáticas como objeto de conocimiento, sus creencias, las explicaciones que se dan acerca de cómo es mejor enseñar, y su conocimiento o ignorancia de aspectos pedagógicos y didácticos, entre otros.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andrews, P., & Hatch, G. A. (1999). A new look at secondary teachers' conceptions of mathematics and its teaching. British Educational Research Journal, 25(2), 203-214.

Benítez, W. A., (2011) Concepciones acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje: un estudio comparativo entre docentes en ejercicio y docentes en formación, Tesis de Maestría. Universidad del Cauca.

Carrillo, J. (1998). Modos de resolver problemas y concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza. Metodología de investigación y relaciones.Universidad de Huelva. Huelva.

Del solar, I., & Díaz, C. (2009). El profesor universitario: construcción de su saber pedagógico e identidad profesional a partir de sus cogniciones y creencias. Calidad de la educación.

Delgado, C., Trujillo, M., Castro , N., & Guerrero, J. (2010). El concepto de función y la teoria de las situaciones. bases epistemologicas y didácticas en la enseñanza del concepto de función con ayuda de calculadoras graficadoras. Bogotá.

Ernest, P. (1989). The Impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics at 6th International Congress of Mathematical Education, Budapest, August 1988. Budapest.

Flores, P. (1998). Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje: investigación sobre las prácticas de enseñanza. Granada (Esp): Comares.

Joshua, S., & Dupin, J. (1998). Introducción a la Didáctica de las ciencias y las matemáticas. Traducción y adaptación del francés de Gloria Castrillón y Myriam Vega. Universidad del Valle, IEP. Grupo de Educación matemática. Santiago de Cali., 1.119.

Martá V, J. F. (2008). Pedagogía y universidad: Obstáculos epistemológicos en la formación pedagógica del docente universitario. Revista Educación y Desarrollo.

Pajares, M. (1992). Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning up a messy Construct. Review of Educational. 62(3), pp. 307-332.

Pochulu, M. (2004). Configuraciones en las prácticas docentes de Matemática en la Universidad _ Estudio de un caso: Álgebra en las carreras de Ciencias. Revista de Informática Educativa y Medios Audiovisuales Vol. 2 (4), págs. 31-61. 2004.

Shulman, L. (1989). Paradigmas y programas de investigación en el estudio de la enseñanza: una perspectiva contemporánea. En M. C. WITTROCK: La investigación de la enseñanza, I. Barcelona: Paidós.

Spengler, M., Egidi, Luisina, & Craveri, Ana María. (2007). El nuevo paple del docente universitario: el profesor colectivo. Undécimas Jornadas "Investigaciones en la Facultad" de Ciencias Económicas y Estadística, noviembre de 2007.

Thompson, A. (1992). Teacher's beliefs and conceptions: a synthesis of the research. New York: Macmillan.: En D.A. Grouws, (Ed.), Handbook on mathematics teaching and learning.

Introducción al uso del software R en la clase de Probabilidad y Estadística

Osmar Darío Vera[*]

RESUMEN

Ningún otro programa en la actualidad posee las condiciones de madurez, cantidad de recursos y manejabilidad para el análisis de datos estadísticos que R. Se trata de un software de uso libre. Hoy día es necesario darlo a conocer y usarlo en la clase de Probabilidad y Estadística, introducir al estudiante en el uso de sus herramientas más básicas, para que luego pueda profundizar en su conocimiento y uso. En este taller pretendemos dar a conocer esta herramienta estadística tan poderosa para su uso en el aula de clase, compartir y transmitir nuestra experiencia en su uso, así como discutir algunos resultados obtenidos. Se espera analizar algunos datos estadísticos mediante el R, así como mostrar algunos trabajos realizados por los alumnos de Universidad, en la asignatura Probabilidad y Estadística.

Palabras clave: didáctica de la probabilidad y estadística. El R como material didáctico. Uso de software R en clase de estadística.

[*] Universidad Nacional de Quilmes. Argentina. Dirección electrónica: overa17@gmail.com

13º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa

POSTERS

Etnografía del saber matemático de los pescadores de Buenaventura. Pacífico colombiano

Armando Aroca Araújo[*]

[E][1]**:** ¿Qué tan lejos ha llegado?
[A]: *Pa' fuera,*
[E]: ¿Qué tan lejos?
[A]: ¡Bastante!
[E]: ¿Qué es bastante?
[A]: *Bastante quiere decir como allá... de las últimas boyas afuera que vienen los barcos mercantes*
[E]: ¿Y eso más o menos a qué distancia queda?
[A]: *Eso queda cómo a... más o menos a... mejor dicho como de aquí pa' fuera isí!*
[E]: *Pero dígame algo que me oriente más, "de aquí pa' fuera"* ¡*no me dice mucho!*
[E]: ¡Bueno, como a 30 brazas! (Ambos nos reímos)[2].

RESUMEN

La investigación tuvo como propósito esencial establecer una aproximación a las formas de orientación espacial que emplean los pescadores antes y durante sus faenas de pesca, para no desorientarse o perderse en mar afuera. En el análisis también se presentan aproximaciones a otros procesos y pensamientos matemáticos, como el métrico y numérico, que emplea dicha comunidad y que, sin duda, pueden contribuir a enriquecer otras nociones espaciales que circulan en la educación espacial. Fueron dos años de investigación, esencialmente, sobre el desarrollo y empleo de comunidades de pescadores de Buenaventura, la Bocana y Punta Soldado, y en particular con pescadores de *Viento y Marea*, pesca en mar afuera por más de tres días consecutivos.

---

* Universidad del Atlántico. Dirección académica: armandoaroca@mail.unitlantico.edu.co

1 [E] = Entrevistador. [A] = Alberto.

2 Yo me reía porque verificaba una vez más esta respuesta y él, tal vez, porque yo no le entendía su lógica. El concepto entonces de distancia que tienen los pescadores es tridimensional, pues para determinar longitudes estas están en función de la profundidad y por ende de los peces. Que un pescador diga que llegó a 30 brazas de distancia, y que cada braza es la longitud de la envergadura de los brazos, nuestra lógica haría un cálculo rápido de multiplicar 30 por dicha envergadura, pero no es así; haber llegado a 30 brazas de distancia es haber llegado a 30 brazas de profundidad.

INTRODUCCIÓN

Los pescadores, al tener como reto la captura de diferentes peces marinos y marisco con conchas, codificaron el mar para este propósito. Pues fue la captura de las diversas especies la que les impuso los retos de ubicarse espacialmente para no perderse. Entonces la comunidad paulatinamente codificó el mar, e iba creando su propia realidad tal como lo plantea Berger (1993). Si las prácticas y saberes individuales o colectivos que iban apareciendo como producto de la resolución de problemas eran óptimos para la comunidad, se instalaban hasta que una mejor técnica o tecnología surgiera. Bastaría que un solo individuo observara, experimentara y luego reprodujera, desarrollando la experticia que después la comunidad reconocería. Habrían aprendido las primeras formas de pescar y aprovecharían las técnicas, la simulación o adaptación de la tecnología utilizadas por los españoles. Al ir progresivamente entrando en las profundidades del mar y en trayectos mayores a un día, harían mechones para ir alumbrando en las noches; entenderían el comportamiento del mar, se darían cuenta de que si tiraban la red en cierta profundidad solo atrapaban ciertos peces; que podrían seguir pescando, sin estar presentes, con anzuelos si los dejaban flotando o anclados, o tirando trasmallos que quedarían a merced de la corriente del mar. Notarían que estaban en la región más lluviosa del país y una de las principales en el mundo; a algunas estrellas que salen de tal parte y se mueven hacia cierto sitio les asignarían entonces un referente de orientación, como lo harían con el Sol, la Luna y las estrellas. En sí, codificarían las diversas direcciones del viento, y otros referentes naturales y artificiales tal como lo muestra la Figura 1.

MARCO TEÓRICO

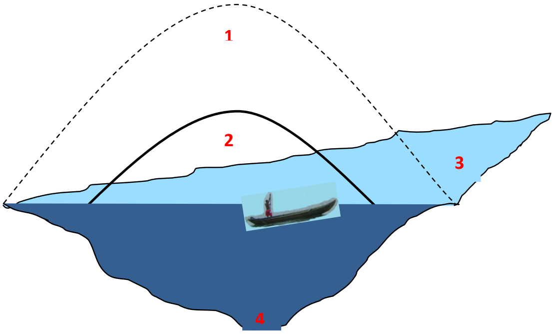
Por otro lado, se tuvieron en cuenta investigaciones cuyos objetos de estudio eran similares o directamente relacionados como las realizadas por Goetzfridt (2008) quien analizó sistemas de numeración, conteo, medición, clasificación, relaciones espaciales, simetría y geometría, entre otros temas, de habitantes de las regiones de la Polinesia, Melanesia y Micronesia; De Vega (2005), quien analizó el sistema de navegación desarrollado por los aborígenes de Polinesia; estos dos autores hicieron sus investigaciones en las costas del pacífico australiano. Chieus (2009), después de un preámbulo teórico significativo, analizó la construcción de redes de pesca de los caiçaras que habitan la ciudad de Ubatuba en el litoral norte paulista; Diegues (2004), plantea de cómo la actividad de caza a gran escala conlleva a la conformación de comunidades humanas, y Campos (1982) analizó algunas prácticas y saberes de los habitantes de la isla de los Búzios; estos tres últimos autores han hecho sus trabajos en costas de Brasil. Este referente teórico sirvió entonces para conocer un panorama general sobre el estado del arte en este tipo de investigaciones, y poder analizar que las concepciones de espacio, espacialidad y temporalidad han sido poco estudiadas entre estos grupos laborales. Concepciones que pueden tener significativos aportes que enriquecen la comprensión transcultural del desarrollo del pensamiento espacial del ser humano.

MATERIALES Y MÉTODOS

Esta investigación se desarrolló en el marco del Seminario de Formación en Etnomatemáticas que se ofertó en la Universidad del Valle con sedes en Buenaventura y Cali, en los años 2010 y 2011. Fueron en total dos visitas colectivas, en compañía de estudiantes, y más de veinte personales que se realizaron desde el periodo 2010A hasta el 2012A. La investigación tuvo en cuenta, tal como se hizo en Rey y Aroca (2011), a Goetz & Le Compte (1998), más a Deslauriers (2005) y D'Olne (1995). Por ello, se empleó una metodología que admitiera la utilización de una pluralidad de instrumentos como entrevistas, grabaciones, fotos digitales, apuntes de campo, para comprender lo mejor posible las prácticas y saberes de los pescadores. Fueron más de 30 entrevistas estructuradas. Estas entrevistas constaban de tres categorías de análisis, más las respectivas preguntas asociadas a ellas, entre ellas, condiciones socioeconómicas de vida, sistema cultural, procesos relacionados con la actividad de la pesca y otras actividades económicas. También, se aplicó la metodología propuesta en Aroca (2009) concerniente a investigaciones desarrolladas en el marco de la descripción y análisis de una etnomatemática.

RESULTADOS Y/O DISCUSIÓN

Los pescadores emplean otras formas de ubicación espacial, otra lógica de orientación, que no responde, como efectivamente no debería responder, a las formas de orientación urbana, definidas por calles, carreras, transversales, avenidas, y hasta por los mismos textos escolares. Los referentes de orientación de los pescadores responden a dos tipos: unos naturales y otros artificiales, los cuales se encuentran distribuidos en cuatro dimensiones que se presentan en la siguiente Figura.



1. **Dimensión celestial** (Las estrellas, el Sol y la Luna).
2. **Dimensión atmosférica** (Vientos y Nubes, relámpagos, oscurana y tronamenta).
3. **Dimensión superficial** (Boyas, redes, montañas, color del mar, el sonido de las olas, la puntos de pesca, candelilla, árboles, olas, basuras flotantes, corrientes, pájaros, etc.)
4. **Dimensión profundidad** (Las pozas, lo seco y lo hondo, las pegas (rocas filosas y palos enterrados) y bancos de arena que se reflejan en la superficie del mar).

Figura 1. Inserción del pescador en cuatro dimensiones que le permiten construir su espacialidad.

La dimensión 1 corresponde a la celestial o superior, que es infinita, en donde existen tres referentes universales para la orientación: el movimiento y fases de la Luna, el movimiento de las estrellas y la traslación y rotación de la Tierra en torno al Sol, los "relojes" naturales. La dimensión 2 corresponde a la atmosférica, que es local o regional, pues las nubes, los aguaceros, los rayos, los vientos, tienen comportamientos disímiles según la región del planeta, y tienen simbolizaciones contextualizadas, por ejemplo, que el viento del norte viene de tal lugar y conduce a otro. La dimensión 3 corresponde a la superficie del mar, donde se mezclan referentes naturales que son mundiales y otros que son simbólica o comercialmente locales; en esta dimensión se encuentran las olas, las corrientes, el color del mar (amarillo, marrón, verde claro, verde oscuro, azul o negruzco), el sonido del mar, la candelilla, las rutas comerciales, basuras flotantes, los cabos y trasmallos, las boyas, puntos de pesca, las orillas, las costas, referentes costeros naturales o artificiales como árboles, montañas, faros, luces de caseríos, islotes, bocanas o esteros. La dimensión 4 es la profundidad del mar que también es local. Ella permite, usando el sondeo, determinar cuán lejos puede estar de la orilla y qué peces puede encontrar en ese momento. En ella se localizan las partes secas u hondas, las pozas, los riscos, los bancos de arena.

CONCLUSIONES. ¿CÓMO RELACIONAR ESTA ETNOMATEMÁTICA CON LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA?

Ante la pregunta anterior existirían otras más por resolver. ¿Cuál es la relación del desarrollo de los pensamientos métrico y espacial escolares con la cotidianidad de los niños que habitan en las regiones costeras de Colombia y en particular de aquellos cuyos padres son pescadores?, ¿cómo la enseñanza del Sistema Métrico Decimal puede dar cuenta de estos conocimientos y de otros que sí son parte de la realidad de los estudiantes?, ¿de qué manera el profesor de matemáticas enfrenta este tipo de situaciones a-didácticas, en particular la relación disyunta que existe entre las formas de ubicación espacial urbana que está dada por calles, carreras, avenidas y la forma de ubicación espacial marina representada por vientos, sondeos, movimientos de astros, color del agua, candelilla, oscurana, mal tiempo? Si se trata de buscar un aporte o relación de estas y otras prácticas, saberes y lenguajes etnomatemáticos a la educación escolar se podría ver su aplicación en aquellas situaciones que Brosseau llamó a-didácticas, orientándolas en el vínculo de estas con la actividad matemática y con la realidad de los estudiantes. Estas actividades que usualmente llamamos de aplicación pretenden abordar desde el aula de clases situaciones empíricas que se desarrollan en la cotidianidad o la vida real que comprenden fenómenos en el planeta Tierra y de lo que conocemos del resto del universo. ¿Pero qué es la cotidianidad o la vida real?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aroca, A. (2008). Una propuesta metodológica en etnomatemática. Rev. UDCA Actualidad & Divulgación Científica. 11(1): 67-76.

Berger, P. (1993). La construcción social de la realidad. Argentina: Ed. Amorrortu Editores.

Campos, M. D. (2006). A cosmología dos Caiapó. Scientif American Brasil. 14: 63 -71.

Campos, M. D. (1982). Saber mágico, Saber Empírico e outros Saberes na Ilhas dos Búzios. En: A. Eulalio. (Org.). Caminhos cruzados. Linguagem, Antropologia e Ciências Naturais. p. 23-32. Brasil: Ed. Brasiliense S.A.

Campos, M. D. (1995). Sociedades e Natureza: Da etnociência à etnografia de saberes e técnicas.

Campos, M. D. (1999). SULear vs NORTEar: Representações e apropriações do espaço entre emoção, empiria e ideología. Programa de Estudos Interdisciplinares de Comunidades e Ecologia Social. EICOS - Instituto de Psicologia - UFRJ/UNESCO.

Chieus, G. (2009). A Braça da Rede, uma Técnica Caiçara de Medir. Revista Latinoamericana de etnomatemáticas. 2(2): 4-17.

Coulon, A. (2005). La etnometodología. Madrid: Ediciones Cátedra.

De Vega, M. (2005). El arte de navegar de los polinesios. Página 251- 258. Obtenido en octubre 20, de 2010. http://adelaflor.net/textos/mapas-mentales.hmt

De Vega, (2005). Interpretación de indicios de la proximidad de tierra.

Garfinkel, H. (2008). Studies in Ethnomethodology. Cambridge: Polity press.

Goetz, J. y Lecompte, M. (1998). Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa. Madrid: Morata.

Mesquita, M. (2004). O Conceito de Espaço na Cultura da Criança em Situação de rua: um estudo etnomatemático (1 ed.).Brasil/ São Paulo: Zouk.

Pinxten, R. (1983). Antropology of Space, Explorationas in Natural Philosophyand semantics of the Navajo. Phyladelphia: University of Pensylvania Press, P. 227-237.

Evaluación, diagnóstico e intervención en la comprensión del valor de posición y de numerales arábigos

Nohemy M. Bedoya Ríos[*]
Bibiana Muñoz Bocanegra[**]
Diego A. Medina Rodríguez[***]

RESUMEN

Se propone una caracterización de diferentes tareas utilizadas en el diagnóstico, evaluación e intervención en la comprensión del valor de posición y en la escritura de numerales arábigos en niños de Preescolar y Básica Primaria. El propósito de esta caracterización es realizar una identificación de las demandas y exigencias cognitivas que estas tareas proponen y promueven, así como de las posibilidades que cada una de ellas ofrece.

[*] Universidad del Valle. Dirección electrónica: nohemy_bedoya@yahoo.es.
[**] Universidad del Valle. Dirección electrónica: bibianitamb@yahoo.es.
[***] Universidad Cooperativa de Colombia. Dirección electrónica: diego.medinar@ucc.edu.co.

INTRODUCCIÓN

La relación entre el valor de posición y la escritura de numerales arábigos se aborda, generalmente, a partir de tareas de correspondencias de dígitos que se caracterizan por proponer situaciones en donde se deben establecer relaciones entre colecciones de fichas con valores unitarios y los valores que expresan los numerales arábigos (Ver Kamii, 1985, Medina, 2102; Ross, 2003). Igualmente, en estas tareas se exige enunciar verbalmente los vínculos que los niños establecen entre los dígitos que integran los numerales y las cantidades de fichas utilizadas para componerlos. El propósito de estas situaciones es acceder a la comprensión lograda del valor de posición en función de los diferentes tipos de numerales que se les proponen. La escritura de numerales también ha sido abordada desde la perspectiva de cómo ocurre el proceso de transcodificación numérica, es decir, el proceso de traducción de representaciones numéricas de un formato a otro (Power & Dal Martello, 1990; Turconi, Campbell & Serón, 2006). Sin embargo, muy pocos estudios plantean situaciones de intervención en las que se proponga la posibilidad de mejorar la comprensión y la producción de numerales arábigos de manera simultánea a partir de la comprensión de las relaciones que se generan entre las invariantes del sistema decimal (Bentley, 1987; Medina, 2012; Ross; 2003). Así, es posible plantear que existen diferentes tareas para evaluar, diagnosticar e intervenir la comprensión del valor de posición y de los numerales multidígitos, las cuales, responden a características estructurales, demandas cognitivas diversas.

MATERIALES Y MÉTODOS

Se presentan las tareas y situaciones utilizadas en tres investigaciones que abordan la comprensión del valor de posición y su relación con la escritura de numerales arábigos en niños de Básica Primaria de 1°, 2° y 3° grado (Bedoya, 2010; Medina, 2012, y Muñoz & García, 2010).

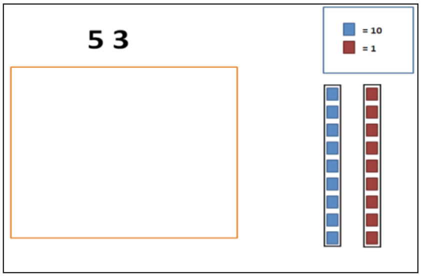
Tareas de evaluación y diagnóstico

Las tareas que proponen los estudios mencionados se fundamentan en el hecho de que el valor de posición es un principio estructural del sistema de notación arábigo y, por lo tanto, se deben analizar las relaciones que los niños establecen entre este y las invariantes del sistema de numeración. Nunes & Bryant (1997) establecen que el sistema de numeración decimal se caracteriza por poseer invariantes que lo determinan, tales como el concepto de unidad, la composición aditiva del número y las equivalencias numéricas.

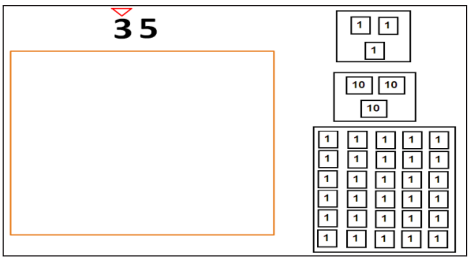
Con base en lo anterior las investigaciones referenciadas, propusieron las siguientes tareas:

Tarea 1. Dictado de numerales. Esta tarea evalúa el sistema de producción de numerales arábigos (Noel & Serón, 1993). Al exigir la representación numérica a través del uso del formato arábigo, es posible dar cuenta del manejo del valor de posición en estas producciones. La utilización del rango numérico como variable de la tarea permite evaluar el conocimiento de los niños sobre el sistema de notación, así como las regularidades que han logrado establecer.

Tarea 2. Tarea de composición multiplicativa. En esta tarea se evalúa la capacidad del niño para establecer las relaciones de composición en una misma unidad de orden. Se busca que el niño establezca la correspondencia entre la cantidad de fichas y el valor de las mismas para representar un determinado orden dentro del numeral arábigo.



Tarea 3. Equivalencia numérica. Esta tarea evalúa la capacidad del niño para reconocer que se pueden establecer relaciones entre unidades de distinto orden, en las que se mantenga la igualdad en el valor total. Así, los niños deben establecer la igualdad entre el valor del dígito que corresponde a las decenas con un conjunto de fichas marcadas con el valor de las unidades del orden inmediatamente inferior (unidades de uno).



Tarea 4: Asignación de unidades de orden. Esta tarea pretende medir la comprensión que se tiene del valor de posición en cada unidad de orden de los numerales arábigos. Consiste en la presentación de numerales con un mismo

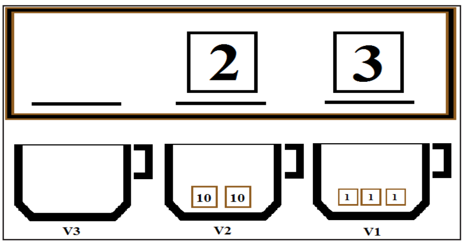
dígito en, al menos, dos posiciones diferentes y un conjunto de barras de fichas de colores que deben ser colocadas debajo de cada dígito, de acuerdo con su respectivo valor.

Tarea 5: Comparación de magnitudes. Esta tarea evalúa el sistema de comprensión del formato arábigo, en tanto que requiere de una representación de las cantidades sin producción numérica. Fue utilizada para evaluar específicamente la comprensión del principio posicional de los numerales arábigos (Sinclair & Scheuer, 1993). Consiste en la presentación de parejas de numerales arábigos, de las cuales el niño debe seleccionar el numeral mayor y justificar su elección.

TAREAS DE INTERVENCIÓN

Para Lerner y Sadovsky (1994) la comprensión constituye un proceso que se encuentra relacionado con la apropiación de un objeto de conocimiento, lo cual implica acceder a sus reglas de funcionamiento, tener la posibilidad de utilizarlo en todos los contextos pertinentes y poder relacionarlo con otros objetos de conocimiento. Con el fin de favorecer el avance en la comprensión de los niños sobre las características del valor de posición se desarrollaron procesos de intervención, los cuales utilizan tareas y protocolos en los que se explicitan los distintos tipos de unidades de orden, así como las posibles relaciones entre dichas unidades.

Tarea 1: Tarea de los vasos. Esta situación propone la comprensión del valor de posición a partir de material concreto y de un protocolo estructurado y flexible que plantea preguntas de reflexión fundamentadas en dos de las invariantes del sistema de notación, la composición aditiva y la equivalencia numérica (ver figura 5). Así, se deben establecer correspondencias entre los valores de los dígitos y colecciones de fichas que representan las unidades del sistema de notación arábigo escrito a partir de composiciones aditivas para establecer el valor de cada dígito, y el valor total del numeral, así como equivalencias numéricas entre colecciones de elementos.



Tarea 2: La tienda. Esta es una adaptación de la tarea de la tienda utilizada por Nunes (Nunes & Bryant, 1997). El objetivo de la situación es presentar un contexto cotidiano en el que el niño debe reunir un monto de dinero a través de la combinación de diferentes tipos de unidades. Para resolver la tarea el niño debe establecer relaciones de composición aditiva entre las distintas unidades y puede establecer relaciones aditivas o multiplicativas para componer con un mismo tipo de unidad. Se presenta la actividad como un juego en el que el niño podía comprar algunos de los objetos que se encontraban en la "tienda"; para esto se le ofrecía un conjunto de monedas de diferentes denominaciones (1, 50, 100, 200 y 500) que en total excedían el precio de cada objeto. La presentación de esta tarea implica la presentación de un protocolo flexible de preguntas.

Tarea 2: Composición con fichas de valor. En esta tarea se debe componer un numeral verbal combinando fichas de distintos valores. De manera similar a la tarea de la tienda, el niño debe establecer relaciones de composición aditivas entre las diferentes unidades y puede establecer relaciones aditivas o multiplicativas para componer dentro de una misma unidad de orden. Se presentaba al niño una serie de fichas y el entrevistador explicitaba el valor de las mismas; posteriormente se le pedía al niño que organizara las fichas de forma tal que reuniera o hiciera un determinado número. La presentación de esta tarea implica la presentación de un protocolo flexible de preguntas.

DISCUSIÓN

Toda tarea plantea una estructura diferente y exige el uso de funcionamientos mentales diferentes en los sujetos, los cuales pueden ser inferidos a partir de los desempeños que ellos evidencian. Desde esta perspectiva, comprender un número implica no solo relacionar una determinada cantidad con algún tipo de representación –como podrían ser las palabras número que utilizamos en el español– sino también poder establecer relaciones de este número con otros, entender su funcionalidad en campos como la medición y estar en capacidad de operar con él, comprendiendo las implicaciones de dichas operaciones y las razones que las sustentan (reglas de funcionamiento) a partir de su estructura.

Los anteriores planteamientos intentan generar una reflexión no solo en términos de proponer posibilidades para abordar la investigación de los objetos de estudio ya mencionados, sino también, la de generar un reconocimiento sobre el tipo de tareas que se proponen usualmente a los procesos de instrucción; esto supondría consecuencias para el aprendizaje y los procesos de instruccionales.

CONCLUSIONES

La comprensión del valor de posición y la escritura de numerales no debe suponer solo la identificación de las dificultades que afrontan los niños con estos dos aspectos, sino también de las competencias básicas relacionadas. En este sentido, resulta fundamental establecer criterios claros y relevantes para la selección adecuada de tareas de evaluación, diagnóstico e intervención que puedan ofrecer una perspectiva integral de las competencias y habilidades del sujeto, lo cual supone una comprensión más amplia de los fenómenos a investigar.

La comprensión de las características de las tareas abordadas en este documento, supone un efecto sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula de clase, en cuanto sugieren alternativas de trabajo en el aula de clases, así como la posibilidad de identificar dificultades y fortalezas en la comprensión y desempeño de los niños en los niveles individual y grupal.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bedoya R, N. (2010). “Caracterización de las relaciones entre composición aditivo-multiplicativa y comprensión valor de posición”. Informe final de proyecto de investigación presentado a COLCIENCIAS y la Universidad del Valle, en el marco del programa Jóvenes Investigadores e Innovadores.

Bentley, P. A. (1987). Making the place value notation concept child´s play: Constructions for displaying and confirming component elements of the place notation concept with elementary and preschool children. Recuperado el 26 de octubre de 2010, de http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED291491.pdf

Kamii, C. K., & Joseph, L. (1990) La enseñanza del valor posicional y de la adición en dos columnas. Comunicación, Lenguaje y Educación, 6; pp. 2–35.

Lerner, D., & Sadovsky, P. (1994). El sistema de numeración: un problema didáctico, En Parra, C. & Saiz, J, (Eds), Didáctica de las Matemáticas (pp. 95-184). Buenos Aires: Paidós.

Medina R., D. A. (2012). Efecto de la comprensión del valor de posición en la escritura de numerales arábigos en niños de 1° grado. Trabajo de Tesis realizado para optar por el titulo de Máster en Psicología. Universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia.

Muñoz, B. & Garcia, J., (2010). Comprensión del valor de posición y su relación con el proceso de transcodificación numérica del formato verbal al formato arábigo.

Trabajo de Grado realizado para optar por el titulo de Psicólogo. Universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia.

Nunez, T. & Bryant, P. (1998). Las matemáticas y su aplicación: La perspectiva de niño. México: Siglo XXI editores.

Ross, S. H. (2003). Place value: Problem solving and written assessment. Teaching Children Mathematics, Volume 8, Issue 7, Page 419-423.

Sinclair, A., & Scheuer, N. I. (1993). Understanding the written number system: 6 years-old in Argentina and Switzerland. Educational Studies in Mathematics, 24, 199-221.

Power, R. & Dal Martello, M. (1990). The dictation of Italian numerals. Language and Cognitive Processes, 5, 237-254.

Turconi, E., Campbell, J. I., Seron, X. (2006). Numerical order and quantity processing in number comparison. Cognition, 98, pp. 273-285.

Experiencias de la enseñanza de la matemática en aulas inclusivas y exclusivas

Claudia Cecilia Castro Cortés[*]
Elizabeth Torres Puentes [**]

RESUMEN

Los estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, desde el año 2006, vienen desarrollando algunas de sus prácticas en aulas inclusivas y exclusivas, lo que ha implicado que los docentes de estos espacios académicos vinculen propósitos de formación, que den cuenta de la atención a estudiantes con necesidades educativas especiales en el aula de matemáticas, de instituciones educativas en la ciudad de Bogotá. Este trabajo ha generado en los estudiantes de la licenciatura una reflexión sobre la importancia de los procesos de inclusión, el respeto por la diversidad y por el compromiso social con los niños y jóvenes que están educando.

Palabras clave: enseñanza de la matemática, prácticas, inclusión, necesidades educativas especiales.

[*] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrrónica: mathclaudiacastro@yahoo.com

[*] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrrónica: elizatorrespuentes@gmail.com

INTRODUCCIÓN

Algunos de los estudiantes para profesor de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas -LEBEM-, desarrollan sus prácticas docentes en instituciones de carácter público de la ciudad de Bogotá. Hasta el año 2006 estas prácticas se llevaban a cabo en aulas con estudiantes regulares; a partir de este año y hasta la fecha, se han vinculado instituciones con aulas inclusivas, en las que se atienden estudiantes con limitación visual, limitación auditiva o déficit cognitivo leve; e instituciones con aulas exclusivas, en las que todos los estudiantes presentan la misma condición: limitación auditiva o déficit cognitivo leve.

MARCO TEÓRICO

Con el fin de que los practicantes construyan propuestas de carácter inclusivo[1], los estudiantes para profesor se vinculan a un proceso de formación que se brinda desde cada uno de los espacios de formación de las prácticas, las electivas, y por el personal especializado de las instituciones (tiflólogas, fonoaudióloga y docentes de apoyo).

El proceso de formación de profesores de matemáticas liderado por LEBEM, en el contexto de las prácticas y el convenio con los colegios, tiene cuatro referentes teóricos que orientan la experiencia:

- Políticas públicas de atención a poblaciones vulnerables: la atención a la diversidad, además de ser un compromiso social de los educadores, se convierte en un deber desde las políticas nacionales e internacionales. En lo que refiere a las políticas nacionales, las poblaciones con Necesidades Educativas Especiales -NEE- son citadas en la Constitución Política de Colombia de 1991, Ley General de Educación de 1994, y en el Plan Nacional Decenal de Educación 2006–2016.

- Educación matemática y las necesidades educativas especiales: Se entiende que un estudiante tiene necesidades educativas especiales cuando con o sin discapacidad se le dificulta el acceso a contenidos curriculares en la interacción con su contexto escolar y que, para satisfacerlas, requiere de apoyo educativo de carácter adicional o diferente (Espejo, 2001); se puede inferir que las necesidades educativas están presentes en todos los individuos.

[1] Se entiende como propuesta inclusiva aquella que vincula en el proceso a todos los estudiantes, a partir de las estrategias pedagógicas, la adaptación de material y las formas de comunicación.

- Adaptación de materiales para el trabajo en matemáticas con población con NEE: Desde los marcos teóricos de diferentes investigaciones que se han abordado frente al tema de la relación entre matemática y las NEE, Rosich (1996) afirma que la adaptación de material propicia procesos en el desarrollo de cualquier población, y al respecto plantea dos hipótesis claras: la primera, que todos los estudiantes con NEE pueden aprender matemáticas, y la segunda, que si bien es cierto que tienen la capacidad, hay condiciones diversas que generan un retraso de, al menos, dos años en la adquisición de experiencias lógico-matemáticas.
- Comunicación: Diversas investigaciones dejan ver que la importancia de la relación entre el lenguaje y la educación matemática es fundamental en la comprensión de los conceptos; en relación con los estudiantes sordos León, Calderón y Orjuela (2011) reconocen las deficiencias lingüísticas en el desarrollo de la lengua de señas, y con los estudiantes ciegos Rosich (1996) asegura que el profesor debe ser muy preciso en el uso del leguaje, de tal manera que el estudiante pueda hacer una imagen mental y espacial de los objetos a partir del lenguaje oral.

METODOLOGÍA

Las experiencias de enseñanza que se han diseñado, gestionado y evaluado para aulas exclusivas e inclusivas; ha requerido de un proceso que es desarrollado metodológicamente así:

Fase de formación. Se lleva a cabo en tres momentos: i) en los espacios de formación de las prácticas, ii) en las electivas vinculadas a la línea de NEE y iii) en las instituciones educativas, por personas especializadas en población con NEE.

En relación con los espacios de formación de las prácticas, se ha logrado vincular a la línea de NEE los espacios de cuatro prácticas diferentes; cada una de las experiencias de enseñanza que han surgido en estas prácticas han sido sistematizadas en unidades didácticas y giran en torno a preguntas orientadoras de carácter general, en las que se pretende que tanto los practicantes como los profesores que las dirigen hagan reflexión acerca de cuáles elementos de la planeación y el diseño de secuencias didácticas se deben tener en cuenta en el aula de matemáticas inclusiva, cuáles son las principales adaptaciones de material didáctico que se deben hacer para una población con NEE en el contexto del aula de matemáticas, cuáles adaptaciones curriculares y evaluativas son pertinentes para potenciar y valorar el aprendizaje de las matemáticas en una población con NEE, cuál debe ser el papel del profesor dentro de la institución educativa, de tal manera que favorezca los procesos de inclusión dentro y fuera del aula.

En relación con las electivas, los estudiantes de la LEBEM tienen la posibilidad de tomar cursos que contribuyen a su formación para la atención de población con NEE; estas electivas y sus propósitos son:

Tabla 1. Electivas en la línea de NEE

ELECTIVAS	*DESCRIPCIÓN*
Mediaciones Semióticas Braille y Ábaco	Electivas que tienen como propósito hacer reconocimiento de la población, conocer procesos de escritura y procesos en operaciones matemáticas básicas, estrategias pedagógicas y adaptación de materiales.
Lengua de Señas Colombiana I Lengua de Señas Colombiana II	Electiva que tiene como propósito dar herramientas de carácter comunicativo con personas con limitación auditiva, se proyecta realizar la electiva LSC III.
Electiva de NEE	Electiva con dos créditos obligatorios complementarios de un núcleo común que es transversal todos los proyectos curriculares de la facultad de educación, y que propicia una reflexión acerca de los procesos de inclusión de todas las poblaciones con NEE en el aula.

Por último, las instituciones en las cuales se desarrollan las prácticas ofrecen espacios de formación con personas especializadas en el manejo de cada una de estas poblaciones: tiflólogos para el caso las instituciones con estudiantes con limitación visual; fonoaudiólogos para las instituciones con estudiantes con limitación auditiva y educadores especiales, para instituciones con estudiantes con déficit cognitivo leve.

Fase de gestión. Las propuestas de enseñanza que han sido diseñadas, gestionadas y evaluadas, en la línea de NEE han tenido impacto en las instituciones vinculadas a estas prácticas; algunas de estas son:

Tabla 2. Propuestas de enseñanza de carácter inclusivo

NEE	*Institución educativa*	*Práctica*	*Tipo de institución*	*Experiencias de enseñanzas*
Limitación visual	Luis Ángel Arango	Práctica Intensiva	Institución Pública Inclusiva	Construcción de propuesta de aula inclusiva para estudiantes de 5º y 6º en geometría y estructura multiplicativa.

NEE	*Institución educativa*	*Práctica*	*Tipo de institución*	*Experiencias de enseñanzas*
Limitación visual	OEA	Práctica Intensiva	Institución Pública Inclusiva	Proyecto de aula para los grados 5º, 6º y 7º. Construcción de propuestas inclusiva en los grados 6º, 8º y 9º.
		Práctica Intermedia		Construcción de propuestas inclusivas en geometría y pensamiento numérico. Haciendo reflexión en la planeación y los recursos didácticos.
	José Félix Restrepo	Práctica Intermedia	Institución Pública Inclusiva	Construcción de propuestas inclusivas con énfasis en la reflexión de los recursos didácticos y la evaluación.
Limitación auditiva	Colegio Filadelfia	Práctica Intensiva	Institución Privada Exclusiva	Construcción de propuestas sobre la fracción como relación parte todo.
	República de Panamá	Práctica Intensiva	Institución Pública Inclusiva	Construcción de propuestas inclusivas en geometría y pensamiento numérico.
Deficiencia cognitiva leve	República de Bolivia	Práctica Intensiva	Institución Pública Exclusiva	Proceso de acompañamiento a los profesores de primaria, en la enseñanza de las matemáticas, diseño de propuestas.
	Jorge Soto del Corral	Práctica Intermedia	Institución Pública Inclusiva	Construcción de propuestas inclusivas, para estudio con énfasis en la reflexión de los recursos didácticos y la evaluación.

Fase de reflexión. Los estudiantes que participan en la línea de NEE cuentan con varios espacios de reflexión, como semilleros de investigación y grupos de estudio de la línea, en los cuales se evalúa el diseño, gestión y resultados de las propuestas, y se revisan aspectos relacionados con estrategias pedagógicas, adaptación de material y procesos de inclusión.

RESULTADOS

Los resultados relacionados con la experiencia de formación de profesores de matemáticas para la atención de población con Necesidades Educativas Especiales se pueden reflejar en lo siguiente:

1. El convenio de prácticas en esta línea ha favorecido a las instituciones involucradas, ya que, por un lado, se brinda atención de calidad en cuanto al acceso de la educación matemática a los niños de las instituciones es-

colares, y por otro, los estudiantes para profesor adquieren experticia en habilidades requeridas para el trabajo con cada una de las poblaciones.

2. Se han incrementado los trabajos de grado que se interesan por investigar elementos para innovar en la práctica docente con estas poblaciones y por aportar en los procesos de aprendizaje de las matemáticas de los niños con NEE.

3. Se ha logrado cualificar un discurso sobre la diversidad en el aula de matemáticas en la LEBEM, y se ha alcanzado una reflexión constante sobre el papel del profesor de matemáticas como garante del derecho a la educación.

CONCLUSIONES

Es importante entender que este tipo de experiencia de formación de profesores es valiosa en el sentido que propende por brindar elementos pedagógicos, didácticos y disciplinares para la atención integral de la población con NEE en el aula de matemáticas, y por tanto, ha requerido de tiempo, esfuerzo, estudio e interés por parte de los estudiantes para profesor.

En este sentido en el marco de las prácticas docentes se ha obtenido una mayor reflexión de los estudiantes para profesor sobre su papel de transformador y garante de derechos, por lo que se reflexiona permanentemente sobre la democratización de la educación matemática; además, se ha considerado la importancia de promover las prácticas docentes en colegios de carácter inclusivo en tanto fortalecen los procesos de diseño, gestión y evaluación de secuencias didácticas en pro del mejoramiento de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Espejo, J. (2001). Antecedentes, marco legal y psicopedagógico de la educación especial en México. En Pedagogía y diversidad. Convenio Andrés Bello. Abril. p. 29- 43. La Habana.

León, O., Calderón, D. & Orjuela, M. (2011). La relación lenguaje- matemáticas en la didáctica de los sistemas de numeración: aplicaciones en población sorda. Bogotá: Universidad Distrital.

Rosich, N., Núñez, J. & Fernández, J. (1996). Matemáticas y deficiencia sensorial. Madrid: Síntesis.

Enseñanza y aprendizaje del concepto de número racional en estudiantes de grado séptimo, utilizando entornos informáticos

Santiago Franco Posada[*]

RESUMEN

Esta investigación pretende realizar una indagación sistemática para analizar los procesos desarrollados en la construcción del concepto de número racional por los docentes y los estudiantes del grado séptimo de la IE Bosques de Pinares de Armenia, Quindío. La propuesta se enmarca en la teoría de la Ingeniería Didáctica, que a su vez se apoya en las teorías de las situaciones didácticas de Guy Brousseau, (1997) y la transposición didáctica de Yves Chevallard, (1998). Al finalizar la investigación, esperamos contar con una herramienta que ayude a maestros y estudiantes, para tender puentes entre los diferentes significados o interpretaciones que se puede tener de un número racional, además del correcto uso de las operaciones que entre estos se puede establecer.

Palabras clave: metodología de enseñanza, números racionales, software.

[*] Universidad del Quindío. Dirección electrónica: tiago323@hotmail.com

INTRODUCCIÓN

La presente propuesta surge como un intento para mejorar las prácticas pedagógicas en el aula de matemáticas de la Educación Básica Secundaria, ante la preocupación de los maestros por el escaso desarrollo del pensamiento numérico que demuestran los estudiantes de grado séptimo, plasmado en su incapacidad para dimensionar correctamente el significado numérico y operacional de los números racionales.

Según los estándares propuestos por el MEN (1998), para la formación del concepto de número racional, se inicia un recorrido en grado cuarto de primaria, continuando su estudio en quinto y sexto, hasta llegar al grado séptimo, cuando se espera que los estudiantes lleven consigo la capacidad de operar e interpretar los racionales de diversas maneras, según el contexto y la favorabilidad que dicha interpretación aporte en la solución de cualquier situación problemática determinada.

Los exámenes externos como las Pruebas Saber muestran que esta meta es alcanzada por pocos estudiantes. Es notoria la dificultad que tienen los estudiantes, tanto de grados inferiores como superiores, cuando se enfrentan a resolver problemas que impliquen la interpretación o manejo de operaciones entre racionales.

La presente propuesta se desarrolla con estudiantes de séptimo grado de la IE Bosques de Pinares de la ciudad de Armenia, Quindío, que atiende una población con grandes dificultades sociales y económicas, y se establece bajo la premisa de que la educación debe transformar al individuo, y a través de este, a la sociedad. Así, esperamos brindarles herramientas intelectuales a los jóvenes de dicha institución, para que desarrollen su capacidad de trasformar positivamente sus propias vidas y su entorno.

MATERIALES – MÉTODOS

En nuestro caso, proponemos una investigación en el nivel micro-ingeniería (Artigue et al., 1995), pues nuestro interés radica en observar las dinámicas presentes en el aula para la construcción del concepto de número racional y los diferentes significados que puede tomar, con el fin de proponer estrategias para mejorar dicha construcción.

Fase 1: Los análisis preliminares

Se elabora una construcción epistemológica del concepto de número racional, donde podemos resaltar los trabajos de Kline, M. (1992) y Kieren (1976). Es a este último a quien se refiere Vasco (1994) en su obra El archipiélago fraccionario que constituye el lente que usaremos para el proceso investigativo.

Se diseña y aplica un cuestionario, en el que se indaga por la concepción de las diferentes interpretaciones del número racional, islas, según Vasco, y las estrategias que poseen los estudiantes para realizar transformaciones entre sus diferentes significados.

Fase 2: Análisis a priori

Se analizan los resultados de los cuestionarios, tratando de identificar los conocimientos-obstáculo (Brousseau, 1997) que afectan la correcta interpretación de los racionales y la movilidad entre sus interpretaciones por parte de los estudiantes. Como producto del análisis, se construye una secuencia didáctica apoyada en el uso de computadores, tratando de mover a los estudiantes desde su estado de construcción del concepto estudiado, mejorando su capacidad para usar los racionales para interpretar su realidad y resolver situaciones académicas y cotidianas

Fase 3: Experimentación

Inicialmente se aplica la secuencia didáctica, en nuestro caso, utilizando entornos informáticos -páginas web interactivas-. Una vez diseñada la estrategia con la que se espera llevar los estudiantes a superar las dificultades encontradas en el análisis a priori y obedeciendo a la teoría constructivista en la que se enmarca la ingeniería didáctica, que plantea que el aprendizaje de la matemática no se da por azar, que es producto de la adaptación del individuo a las condiciones de un medio, (Brousseau, (1997).

Se lleva a cabo el trabajo con los estudiantes en dos momentos: el primero es la aplicación de una guía de clase en la sala de cómputo usando páginas web; en este primer momento el docente cumple un papel descriptivo (plantea la situación); en un segundo momento se realiza una actividad por equipos en el salón de clase en la que el estudiante debe expresar a sus compañeros la idea que interpretó de la situación, así como debe dar cuenta y pedir explicaciones a sus compañeros sobre la justificación de las ideas expresadas. Finalmente, se llega a la institucionalización, donde el docente, partiendo de los conocimientos mostrados por los estudiantes, muestra el conocimiento cultural del objeto estudiado.

El proyecto actualmente se encuentra finalizando esta tercera Fase.

Fase 4: Análisis a posteriori y evaluación

En esta etapa, se repite el cuestionario realizada inicialmente a los estudiantes y se toma toda la información recolectada en las fases de análisis a priori y la experimentación. Partiendo de las hipótesis planteadas, se hace el contraste de los datos para validar el aporte que la herramienta o secuencia didáctica tiene en la construcción del concepto de número racional en la población seleccionada.

CONCLUSIONES PARCIALES

- Partiendo de del análisis de los datos recolectados, es notoria la escasa formación del concepto de racional mostrado por la población estudiada.
- Producto del enfoque que se tiene al enseñar el concepto de racional, privilegiando su interpretación como parte-todo (Kieren, 1976), los estudiantes muestran una construcción metal de racional limitada a la concepción parte-todo.
- Los estudiantes muestran mejor disposición para el trabajo en el área de matemáticas, gracias a la inclusión de TIC en las clases.
- La metodología privilegia las producciones didácticas de los estudiantes.
- Se promueve el desarrollo de habilidades creativas, mediante el fortalecimiento del pensamiento divergente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1990). Epistemología y didáctica. Epistémologie et Didactique. *Reserches en Didactique des Mathématiques.*, Vol.10, N.º 23.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. ((1997).). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica del saber sabio al saber enseñado*, Aique, Buenos Aires.

García, Y. R. (2007). Una ingeniería didáctica aplicada sobre fracciones. *OMNIA*, 120-157.

GEDES. (2009). *Influencia de un software educativo en la comprensión del concepto de fracción*. Armenia: GEDES Editores.

Kieren, T.E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), Number and easurement: Papers from a Research Workshop (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Madrid: Alianza.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

Vasco, C. (1994) El archipiélago fraccionario. In: Ministerio de Educación Nacional. Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas. Vol.2.Bogotá, Colombia.

DISEÑO DEL POSTER

Estudio experimental del uso de un geoplano computarizado en la enseñanza de la geometría en los grados cuarto y quinto de Básica Primaria

Jorge Mario García Usuga[*]
Leonardo Duvan Restrepo Alape[**]
Valentina Zuluaga Zuluaga[***]

RESUMEN

Este póster tiene como objetivo presentar los resultados de la investigación sobre Estudio experimental del uso de un geoplano computarizado en la enseñanza de la geometría en los grados cuarto y quinto de Básica Primaria. El software educativo y el material de apoyo fueron desarrollados por Gedes (Grupo de Estudio y Desarrollo de Software) de la Universidad del Quindío. En la investigación se usó material educativo físico y computarizado con el fin de mejorar el grado de conceptualización y comprensión, estableciendo si esta nueva metodología influye significativamente en el aprendizaje de la geometría euclidiana.

Palabras clave: software, geoplano, enseñanza, geometría, aprendizaje.

[*] Estudiante Licenciatura en Matemáticas. Universidad del Quindío. Dirección electrónica: jmgarcia@uniquindio.edu.com

[**] Docente Licenciatura en Matemáticas. Universidad del Quindío. Dirección electrónica: ldrestrepo@uniquindio.edu.com

[***] Docente Licenciatura en Matemáticas. Universidad del Quindío. Dirección electrónica: v22_23_1995@hotmail.com

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo investigó un aspecto particular del uso de materiales educativos computarizados en el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas elementales: el uso de un geoplano en dos modalidades o versiones, físico y computarizado, con el fin de mejorar el grado de conceptualización y el aprendizaje de los temas de geometría euclidiana como perímetro y área.

Tal como se establece en el planteamiento del problema, todos los autores están de acuerdo en reconocer que una buena tecnología nunca esconde las debilidades del acto docente y que el éxito se debe únicamente a las aplicaciones creativas que los docentes hacen de la tecnología. Los temores que pueden inspirar las nuevas tecnologías solo pueden ser superados con capacitación, no solamente en los aspectos puramente técnicos sino fundamentalmente en las aplicaciones de la tecnología. La fuerza más notoria para cambiar el currículo de las matemáticas es el computador, un artefacto capaz de hablar en el lenguaje de las matemáticas que ha transformado totalmente la ciencia y la sociedad; los computadores cambian lo que es factible y lo que es importante en el currículo de las matemáticas; ellos permiten en el salón de clase de nuestros días cosas que nunca antes pudieron hacerse.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿Existe una relación significativa entre el método de enseñanza, el aprendizaje de conceptos y el rendimiento académico en geometría euclidiana para estudiantes de quinto nivel de Educación Básica?

Se trata de comparar el aprendizaje de algunos conceptos y el rendimiento académico, ante la aplicación de dos métodos de enseñanza A y B, caracterizados ambos por el uso del geoplano como recurso didáctico; lo que establece la diferencia entre estos dos métodos es que en el método A se usa el geoplano manual, y en el método B, se usa material educativo computarizado que simule al geoplano manual que en adelante se llamará "Geoplano computarizado".

OBJETIVOS

- Establecer si el uso de material educativo computarizado influye significativamente en el aprendizaje de la geometría euclidiana.
- Comparar el aprendizaje de conceptos y rendimiento académico, en geometría euclidiana del quinto nivel de Educación Básica, de dos grupos de estudiantes en uno de los cuales se usa material educativo computarizado y el otro se toma como grupo de control.

- Establecer una fundamentación sobre la influencia de materiales educativos computarizados en la enseñanza, para posteriores investigaciones complementarias en otras asignaturas de matemáticas o de otras disciplinas.

METODOLOGÍA

La metodología en las actividades es fundamentalmente de tipo heurístico, que es la que mejor se adapta a la estructura del geoplano.

Basada en la enseñanza educativa, consigue que el alumno saque conclusiones a partir de su propio trabajo y de sus experimentos por lo que este pasa de lo concreto y particular a lo general, de resolver algunos ejemplos o casos particulares a formular una conjetura que pueda resolver de forma general su problema.

La enseñanza heurística entraña más trabajo y dificultad para el profesor que la tradicional enseñanza deductiva (en la que el profesor es el centro de la clase), pues obliga a una enseñanza personalizada, o en pequeños grupos, y a que el profesor esté pendiente de cada uno de ellos para guiarlos, cuando sea necesario, hacia el objetivo propuesto con comentarios o preguntas, y nunca con las soluciones

Se puede observar que los problemas de los libros de texto alcanzan, en la inmensa mayoría de los casos, solo algunas de las tres primeras categorías y que muy pocas veces se llega a la cuarta categoría: sin embargo, una enseñanza de tipo heurístico como la que ofrecemos con estos bloques de actividades alcanza las categorías quinta y sexta. Faltaría únicamente por alcanzar la última categoría, pero que evidentemente queda fuera de los objetivos de este trabajo.

El geoplano, en cualquier forma en que se utilice, supone la continua construcción de figuras, su modificación y su eliminación para poder construir otras nuevas; además, sobre todo en las actividades de la primera etapa, una parte importante del trabajo de los alumnos consiste en comparar los resultados obtenidos. Pero esta comparación solo es posible si se guardan los resultados; por lo tanto, siempre que se trabaje con el geoplano debe tenerse al lado un papel para ir copiando los resultados.

DISEÑO EXPERIMENTAL

Con el fin de eliminar las diferencias entre los estudiantes que van a constituir los grupos experimental y de control, y controlar los factores de selección, mortalidad, historia, maduración y regresión se seleccionó el "diseño de grupos aleatorios con un grupo experimental, un grupo control y mediciones antes y después en los dos grupos".

CONCLUSIONES

La prueba T Student aplicada a los resultados del pre-test en los dos grupos confirmó la hipótesis de que no existe diferencia académica significativa entre estos grupos. Este es un requerimiento estadístico, y de acuerdo con el diseño experimental aplicado, sobre la homogeneidad académica en los grupos experimental y de control, es decir, que con un nivel de confianza del 90 % podemos afirmar que no hay evidencia para rechazar la igualdad académica antes del proceso experimental.

La prueba de Kolmogorov-Smirnov aplicada a las distribuciones del pos-test y del pretest en los dos grupos validó el supuesto de normalidad de las distribuciones. Este es un supuesto en la prueba para la significación de la diferencia de medias debido al tratamiento y respecto de los resultados del postest.

La prueba T de Student aplicada a los resultados del postest en los dos grupos confirmó la hipótesis de que existe diferencia académica significativa ente el grupo control y el grupo experimental debido al tratamiento experimental aplicado y no debido al azar o a otras variables, es decir, que con un nivel de confianza del 99% podemos afirmar que usando el método de aprendizaje a través del geoplano computarizado se produce en los estudiantes un mejor rendimiento académico y una mejor asimilación de conceptos que cuando se utiliza el geoplano físico.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cambell, D., & Stanley, J. (1978). Diseños experimentales y cuasiexperimentales en la investigación social. Buenos Aires: Amorrorta Editores.

Carreño, F. (1977). Enfoques y principios teóricos de evaluación. México: Trillas.

Castañeda, & Margarita. (1975). Análisis del aprendizaje de conceptos y procedimientos. México.

Collins, A. (1992). Towar a design science of education. Berlin: Springer - Verlag.

García, G., & otros. (1994). "El papel de las representaciones en la construcción de conceptos matemáticos", en ponencias del Segundo Simposio Internacional en Educación Matemática. Santafé de Bogotá.

Kaput, J. (1992). Teaching and mathematics education. New York: Mac Millan.

Kerlinger, F. (1984). Investigación del comportamiento: técnicas y metodología. México: Interamericana.

Pérez Gutiérrez, Luis. *Nuevos estilos de universidad.* Cámara de Representantes. Santafé de Bogotá, D. C. 1993.

Salomón, G. (1992). Effects with and of computers and the study of computers – based learning enviroments. Berlin: Springer – Verlag.

Geometría de las plantas y árboles de la Ciudadela Educativa La Vida del Municipio de Copacabana

*Vinelva Iturriago Arrieta**
*Sandra Morales Munera***
*Juan José Bedoya Jiménez****
*Yanceli Hernández Gaviria*****

RESUMEN

La geometría fractal es utilizada para encontrar patrones en la naturaleza y fabricar estructuras en todo nivel, en especial en la botánica. Usando este conocimiento universal, en esta investigación se propone determinar las diferentes relaciones que pueden existir entre conceptos geométricos ligados a los fractales, y la filotaxis de las plantas.

Un fractal es un objeto geométrico que posee una estructura fragmentada e irregular, y está presente en diferentes escalas, de modo que una parte de sí mismo represente el todo (figura1). Es así como esta investigación está estructurada en tres momentos. En el primer momento se hace un esbozo de los primeros patrones que dieron origen a esta geometría tratando las características (figura 2) desde el conjunto de Cantor(1883), las curvas de Peano (1890), la curva de Von Koch (1904), el triángulo de Sierpinski (1916), entre otros. En el segundo momento los fractales se relacionan con los árboles y plantas, simulándolos a partir de los sistemas iterados de funciones (IFS) y los sistemas lindenmayer (Lsystem). En el tercer momento, se presenta una descripción de las actividades experimentales a través de una propuesta didáctica que pretende estimular el trabajo de los estudiantes con la geometría.

Palabras-clave: Fractales, filotaxia, iteración, simulación

* Institución Educativa José Miguel de Restrepo y Puerta. Dirección electrónica: vinelva@hotmail.com

** Institución Educativa José Miguel de Restrepo y Puerta. Dirección electrónica: smoralesmunera@gmail.com

*** Institución Educativa José Miguel de Restrepo y Puerta. Dirección electrónica: j.j-bedoya222@hotmail.com

**** Institución Educativa José Miguel de Restrepo y Puerta. Dirección electrónica: meduzitha.roja@gmail.com.

INTRODUCCIÓN

A partir del proyecto sobre "Factores del ámbito escolar que influyen en las manifestaciones de la pereza en los estudiantes con bajo rendimiento académico del grado 10 de la Institución Educativa José Miguel de Restrepo y Puerta" desarrollado en el 2011, se pudo concluir que los estudiantes no relacionan conceptos matemáticos con situaciones de la vida cotidiana sin ver su aplicación.

Por tanto, está investigación se centra en la observación de las formas de la naturaleza y la filotaxia de los árboles buscando la relación con la geometría fractal, la cual es una teoría matemática contemporánea que se aparta de la geometría euclidiana, la cual permite describir objetos geométricos autosemejantes o simétricos a escala; Spinadel (2003) plantea que los fractales son nombres que le dan a objetos que carecen de simetría traslatoria, carecen de suavidad asociada con líneas, planos y esferas euclidianas; mantienen el equilibrio en contornos rugosos y mellados. La palabra fractal proviene del verbo latino frangere (romper) y el adjetivo correspondiente fractus(irregular y fragmentado).

Por lo tanto, las formas de las plantas y los arboles de la Ciudadela la Vida pueden ser descritos mediante patrones los cuales pueden ser simulados usando el sistema-L. Campos (2011) plantea que un sistema-L es un lenguaje, una gramática formal de derivación paralela, con un conjunto de reglas y símbolos principalmente utilizados para modelar el proceso de crecimiento de las plantas, aunque también puede modelar la morfología de una gran variedad de organismos. Por lo tanto, el propósito de esta investigación es establecer la relación que existe entre la filotaxis y la geometría de las plantas y árboles que habitan en la Institución Educativa José Miguel de Restrepo y Puerta.

METODOLOGÍA

En esta investigación se utiliza la observación directa realizando diferentes registros sobre las formas que tienen los árboles y algunas plantas del entorno institucional, tomándose registro fotográfico para establecer comparaciones; además, se hace una descripción detallada de la taxonomía de las plantas, en donde se observe y compare la estructura; también se hace un análisis documental, que permita reconocer las aplicaciones de la geometría fractal en la filotaxia.

Para ello, se dividirán, en zonas, los sectores de la institución escogidos como áreas de estudio. Estas zonas se numerarán y se asignarán a cada equipo previamente establecido del número de estudiantes que conforman el grupo de investigación, en las cuales trabajarán siguiendo criterios dados.

RESULTADOS

- Simulación de la filotaxia de las plantas y árboles de la ciudadela mediante el uso de los sistemas de lindernmayer (figura 3).
- Demostración de que la matemática es un lenguaje que se encuentra en la naturaleza y que permite describirla.
- Formulación y ejecución de talleres con otros estudiantes donde apliquen conceptos de la geometría y de sucesiones desde la filotaxia de los árboles.

CONCLUSIONES

Los fractales son una demostración de la aplicación de la geometría en contexto; es así como son transferibles a otras áreas del conocimiento con el uso de las TIC. Además, es posible incluir esta geometría dentro del currículo de secundaria.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azagra Rueda Daniel Interrelación entre análisis, geometría y ecuaciones en derivadas parciales. Imdea matemáticas. 1,174

DebnathLokenath. (2004) A brief historical introduction to fractals and fractal geometry. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37, N.° 1, 2006, 29–50

Flores, R. (2010) Acceso y permanencia en una educación de calidad: El pensamiento crítico como una competencia transversal para la calidad de la educación. Congreso Iberoamericano de la Educación. 1-16.

Móreles, U. (2002). Los fractales. Acta universitaria, 13,18-23

Morones, Rubén. (2002) La Simetría de Izquierda-Derecha en la Naturaleza. Ciencia UANL, 2,173-179

Campos, D. (2011). Introducción a los sistemas de lindenmayer: fractales, autómatas celulares y aplicaciones. Veranos de la Investigación Harold V. McIntosh, Puebla, México. [Consultado: http://uncomp.uwe.ac.uk/genaro/Papers/Veranos_McIntosh.html]

Núñez Pablo. E Calderón Silvia. & Gil Salvador. (2010) Búsqueda de orden y armonía en la naturaleza, descubriendo leyes de escala en el aula. Lat. Am. J. Phys. Educ. 1, 118-126

Paglini, Milena. (2002) Mandalas y fractales: Morfologías de la naturaleza. Arte y Diseño Digital, 212-215.

Peral Alonso, Juan Carlos. Las matemáticas en la naturaleza: SIGMA N.º 22 • zk. 22 SIGMA, 161-171

Pérez Sánchez, Luz & Argote vea-Murguía, José Ignacio. Una experiencia de enriquecimiento a través del arte fractal. Faisca, 13,112-122

Spinadel, Vera W de (2003) "Geometría fractal y geometría euclidiana". En: Revista Educación y Pedagogía. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Vol. XV, N.° 35, (enero-abril), pp. 85-91.

Solución de modelos matemáticos, utilizando el software Derive 6.1 en aplicaciones de ecuaciones diferenciales de primer orden

*Jhon Franklin Espinosa Castro**

RESUMEN

Con el avance de la ciencia a través de la tecnología, se utilizan modelos matemáticos representados por ecuaciones diferenciales de primer orden que describen el fenómeno. Por tal motivo, se realizó el presente documento en el cual se explican diversas aplicaciones en diferentes áreas por medio del software Derive. Existen dos grupos; en el primero se encuentran: temperatura de un objeto al salir de un horno, crecimiento de una colonia bacteriana, carga e intensidad de corriente de un circuito RC, concentración de sal en un tanque con salmuera; y en el segundo están: el ácido valproic en el cuerpo, contaminación del lago Michigan y un fósil dotado con carbono 14.

Palabras clave: Software, modelo, ecuación diferencial, derive.

* Director del semillero de investigación matemática, Universidad Francisco de Paula Santander. UFPS. Dirección electrónica: jhon_franklin_espinosa@hotmail.com.

INTRODUCCIÓN

A medida que el mundo va evolucionando la ciencia también lo hace de manera rápida y progresiva, utilizando tecnologías que van facilitando la comprensión de cada una de las incógnitas que se presentan en los diferentes campos de acción, en especial en la matemática. Con base en lo anterior, en este escrito, se utilizó el software matemático Derive 6.1 como manipulador algebraico para realizar cálculos numéricos, optimizando tiempo en el proceso analítico y gráfico, como herramienta tecnológica en la solución de aplicaciones de ecuaciones diferenciales de primer orden, en contextos especificados.

MATERIALES Y MÉTODOS

Con la finalidad de optimizar tiempo y procesos, se empleó como herramienta computacional el software matemático Derive 6.1 [5]. E igualmente se utilizaron dos tipos de metodología: aplicativa y explicativa; la primera, enfocada en el empleo del programa como un mecanismo tecnológico, y la segunda, que especifica la sintaxis de la función p (x), q (y), respectivamente, la asignación de las variables y las condiciones iniciales dadas, que se deben utilizar en la solución de los modelos matemáticos que definen la aplicación. Los ejercicios propuestos fueron extraídos de los siguientes libros: Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado [1], Ecuaciones diferenciales [2] y Cálculo aplicado [3].

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A continuación, se establecen los enunciados de las aplicaciones analizadas, teniendo en cuenta la siguiente sintaxis generalizada que se debe digitar en el programa para cada ejercicio. Es decir, separable (p, q, x, y, x_0, y_0) que proporciona la solución del problema de valor inicial, donde se asume y' = p (x) * q (y) para y (x_0) = y_0 [4]. Además, para cada aplicación las variables dependientes e independiente se referencia por x e y.

a. Al sacar un pastel de un horno, su temperatura es de 300°F, en un tiempo t = 0. A una temperatura ambiente de 70°F. Luego de tres minutos, su temperatura es de 200°F. Hallar, a. La ecuación que determina la temperatura en cualquier instante de tiempo t, y b. La respectiva tabla y gráfica. Modelo: dT/dt = k (T - 70); Asignación de variables: x = t = 0; y = T = 300.

$$\#1:\ SEPARABLE\left(1, yk-70k, x, y, 0, 300\right)$$

$$\#2: SOLVE(SEPARABLE\left(1, yk-70k, x, y, 0, 300\right), y, Real)$$

$\#3: y=230e^{kx}+70$. Utilizando la condición, x = 3, y = 200.

$\#4: 200=230e^{3k}+70$

$\#5: SOLVE\ (200=230e^{3k}+70\ ), k, Real)$

#6: k = - 0.1901816194. Por lo tanto, la solución particular o específica, de la ecuación diferencial, que determina la temperatura en cualquier instante de tiempo t es: $\#7: y=230e^{-0{,}190181x}+70$

b. Se realizara un respectivo análisis de una colonia de bacterias, que crecen en cultivo a un ritmo proporcional a la cantidad presente. Inicialmente hay 300 colonias de bacterias en el cultivo y en un tiempo de 2 horas el número ha crecido un 20%. Hallar, a. ¿La ecuación que determina la población en cualquier instante de tiempo t? y b. ¿La respectiva tabla y gráfica? Modelo:

dP/dt = kP; Asignación de variables: x = t = 0; y = p = 300.

#1: $SEPARABLE(1, yk, x, y, 0, 300)$

$\#2: SOLVE(SEPARABLE(1, yk, x, y, 0, 300), y, Real)$

$\#3: y=300e^{kx}$. Utilizando la condición, x = 2, y = 360.

$\#4: 360=300e^{2k}$

$\#5: SOLVE(360=300e^{2k}\ ), k, Real)$

#6: k = 0.09116077839. Por lo tanto, la solución particular o específica, de la ecuación diferencial, que determina la población en cualquier instante de tiempo t es:

$\#7: y=360e^{0.09116077839x}$

c. Se aplica una fuerza electromotriz de 100V en circuito en serie RC, donde el valor de la resistencia es 200Ω y una capacitancia de 0,0001F. Hallar, la función $q(t)$, $i(t)$ que establece carga y la intensidad de la corriente para $q(0)=0$. Modelo: dq/dt = 0.5 - 50q; Asignación de variables: x = t = 0: y = q = 0.

#1: SEPARABLE (1, 0.5 - 50y, x, y, 0, 0)

#2: SOLVE (SEPARABLE (1, 0.5 - 50y, x, y, 0, 0), y, Real). Por lo tanto, la solución particular o específica, de la ecuación diferencial que determina la carga en cualquier instante de tiempo t es:

#3: $y = \frac{1}{100} - \frac{e^{-50x}}{100}$. Ahora, la solución particular o específica, de la ecuación diferencial, que determina la intensidad de la corriente en cualquier instante de tiempo t. Se debe realizar la derivada de la función de la carga.

#4: $\frac{1}{100} - \frac{e^{-50x}}{100}$

#5: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{100} - \frac{e^{-50x}}{100}\right)$

#6: $\frac{e^{-50x}}{2}$ Luego, y = y'

#7: $y = \frac{e^{-50x}}{2}$

d. Un tanque mezclador contiene 300 galones de salmuera (sal disuelta en agua). Otra solución se bombea al tanque a razón de 3 galones por minuto, la concentración de sal en este efluente es de 2 libras por galón. La solución bien agitada se desaloja a la misma razón. Si a $A(t)$, denota la cantidad de sal medida en libras en el tanque en un tiempo, encuentre la cantidad de sal en el tanque en cualquier instante de tiempo t, si había 50 libras de sal disueltas en los 300 galones iniciales. Modelo: dA/dt = 6 - A/100; Asignación de variables: x = t = 0; y = A = 50.

#1: SEPARABLE $\left(1{,}6-\frac{y}{100},x,y,0{,}50\right)$

#2: SOLVE $\left(SEPARABLE\left(1{,}6-\frac{y}{100},x,y,0{,}50\right),y,Real\right)$. Por lo tanto, la solución particular o específica, de la ecuación diferencial, que determina la cantidad de sal en cualquier instante de tiempo t es:

#3: $y = 600 - 550e^{-0.01x}$

e. El ácido valproic es un medicamento que se emplea para controlar la epilepsia; su vida media en el cuerpo humano es de unas 15 horas. Hallar ¿A qué hora quedará 10% de la dosis original?

Modelo: dQ/dt = - KQ; Asignación de variables: x = t = 0; y = Q = q. Donde q representa cantidad inicial del medicamento.

#1: SEPARABLE (1, - yk, x, y, 0, q)

#2: SOLVE (SEPARABLE (1, - yk, x, y, 0, q), y, Real)

#3: y = $qe^{-k\,x}$. Como la vida media es de 15 horas, sabemos que la cantidad restante Q = 0.5q cuando t = 15 horas.

#4: 0.5q = qe^{-15k}

#5: SOLVE (0.5q = qe^{-15k}, k, Real)

#6: k = 0.04620981203. Remplazando en #3

#7: y = $qe^{-0.04620981203\,x}$. Utilizando la condición, y = 0.10q. Es decir, 10% de la dosis original.

#8: 0.1q = $qe^{-0.04620981203\,x}$

#9: SOLVE (0.1q = $qe^{-0.04620981203x}$, x, Real)

#10: x = 49.82892142. Aproximadamente, en un tiempo de 50 horas.

f. ¿Cuánto tiempo tardara para que el 90% de la contaminación sea eliminada del lago Michigan? Suponiendo que no se viertan más contaminantes. Modelo: dQ/dt = - rQ/v; Asignación de variables: x = t = 0; y = Q = q. Donde q representa cantidad inicial de contaminación

r/v = 0.03224489796

#1: SEPARABLE $\left(1,-\dfrac{r\,y}{v}\,,x,\ y,\ 0,\ q\right)$

#2: SOLVE $\left(SEPARABLE\left(1,-\dfrac{r\,y}{v},x,\ y,0\ ,q\right),\ y,\ real\right)$

#3: $y=qe^{-\frac{r.\ x}{v}}$. Remplazando el valor de r/v = 0.0322 en #3

#4: $y=qe^{-\,0.0322\ x}$.Cuando el 90% de la contaminación se haya eliminado del lago, resta un 10% de contaminación. Es decir, y = 0.1q.

#5: $0.1q=qe^{-\,0.0322\ x}$

#6: SOLVE $(0.1q=q\,e^{-0.0322x},\ x,real)$

#7: x = 71.50885381. Solución: aproximadamente: 72 años

g. Se analizó un hueso fosilizado y se encontró que contenía la milésima parte de la cantidad original de C - 14. Determine la edad del fósil. Modelo: dA/dt = kA; Asignación de variables: x = t = 0; y = A = a. Donde a representa la cantidad inicial de C^{14}.

#1: SEPARABLE (1, yk, x, y, 0, a)

#2: SOLVE (SEPARABLE (1, yk, x, y, 0, a), y, Real)

#3: $y = ae^{kx}$. Para calcular el valor de la constante de decaimiento, se debe tener en cuenta la siguiente condición, de que 0.5a = A (5600). Porque, la vida media es el valor que corresponde en tiempo t, A (t) = 0.5 a, para una cantidad inicial.

#4: $0.5a = ae^{5600k}$

#5: SOLVE ($0.5a = ae^{5600k}$, k, Real)

#6: k = - 0.0001237762822. Remplazando en #3

#7: $y = ae^{-0,000123x}$. Utilizando la condición, y = 0,001a que representa la milésima parte de la cantidad original de C – 14.

#8: $0.001a = ae^{-0,000123x}$

#9: SOLVE ($0.001a = ae^{-0,000123x}$, x, Real)

#10: x = 56160,61201. Aproximadamente, 56000 años

AGRADECIMIENTOS

A los estudiantes del semillero de investigación Matematic y directora del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Francisco de Paula Santander.

CONCLUSIONES

El aprendizaje que proporciona la utilización de esta herramienta en los estudiantes universitarios es innovador, debido a que se puede determinar si su proceso analítico es correcto o no, y visual, por la sintaxis y las modificaciones que se pueden hacer en él. Por lo tanto, la incorporación de nuevas tecnologías en la matemática (ecuaciones diferenciales) enriquece los ambientes de aprendizaje de los alumnos, la transformación de las prácticas educativas, las estructuras curriculares y la capacidad para investigar, crear y adaptarse a nuevos requerimientos, como también el desarrollo de habilidades en el avance técnico, tecnológico y científico.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] G. ZILL, Dennis. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. 7 ª edición. Internacional Thomson Learning. México, DF. 2002. p. 22, 98, 99 – 101, 106.

[2] COSTA, Bronson. Ecuaciones diferenciales. 3ª edición. McGraw-Hill Interamericana. México, DF. 2008. p. 68.

[3] H. HALLETT, Deborah. M. GLEASON, Andrew. Cálculo aplicado. 1ª edición. Compañía editorial continental. México, DF. 1999. p. 464 – 467.

[4] SÁNCHEZ RUIZ, Luis M. LEGUA FERNÁNDEZ, Matilde P., MORAÑO, José Antonio. Matemáticas con Derive. Editorial Universidad Politécnica de Valencia. Departamento de matemáticas aplicada. 1ª edición. Pdf. p. 225 – 226, 233 – 234.

[5] Derive. Disponible en http: //es.wikipedia.org/wiki/Derive. Consulta 01/09/2011

Desarrollo de competencias matemáticas en torno al concepto de función lineal

*Jose Arley Londoño Acevedo**
*Eliécer Aldana Bermúdez***

RESUMEN
En este estudio se reportan los primeros resultados de una investigación en curso, donde se busca el desarrollo de competencias en el pensamiento variacional desde el concepto de función lineal. La investigación tiene como base la teoría de "Las situaciones didácticas" de Brousseau. Para ello se ha utilizado, como metodología, una ingeniería didáctica a un grupo de veinticinco estudiantes de grado noveno, a los cuales se les aplico un cuestionario y una entrevista. A partir del análisis y de los resultados se muestran algunas dificultades que ellos ponen de manifiesto y el logro de algunas competencias como pensar y razonar, plantear y resolver problemas y representar.

Palabras clave: función lineal, ingeniería didáctica, representaciones, situaciones didácticas, competencias.

* Institución Educativa Robledo. Dirección electrónica: arleymate2010@hotmail.com.
** Universidad del Quindío. Dirección electrónica: eliecerab@uniquindio.edu.co.

INTRODUCCIÓN

La función lineal es uno de los conceptos fundamentales para el estudio de las funciones reales y el desarrollo del pensamiento variacional y numérico. Los resultados reflejan algunas dificultades de comprensión en este concepto como proporcionalidad, magnitudes directa e inversamente proporcionales, variables dependientes e independientes.

Al respecto, Santos y Alvarado (2000) reportan la falta de aprendizaje del concepto debido al énfasis que se hace en la enseñanza de procedimientos algorítmicos, y la carencia de una enseñanza basada en la resolución de problemas. Asimismo, Arzarello et al. (1995, pp. 10-11) plantean que el uso de símbolos inadecuados no favorece el desarrollo del pensamiento variacional; por este motivo en la historia del álgebra tiene importancia no sólo la historia de los conceptos sino también el sistema de símbolos utilizados para poder expresarlos. El problema de esta investigación tiene que ver con la necesidad de que los estudiantes desarrollen competencias básicas en matemáticas. Por tanto lo que se espera en concreto es: ¿Cómo generar en el estudiante de grado noveno el desarrollo de competencias matemáticas, entorno al concepto de función lineal?

El desarrollo del pensamiento variacional juega un papel importante en la investigación, requiere de la formación de conceptos apropiados, que involucran el desarrollo de competencias básicas como: pensar y razonar, plantear y resolver problemas y representar a partir de situaciones de la vida cotidiana. Por ejemplo, para la competencia de pensar y razonar pretende plantear preguntas propias de las matemáticas como: ¿Cuántos hay?, ¿Como encontrarlo?, si es así,…entonces, etc. En la competencia de representar, se pretende relacionar diferentes formas de representación de acuerdo con la situación del problema y el propósito.

METODOLOGÍA

La metodología de investigación está fundamentada en la ingeniería didáctica, de tipo cualitativo; es un estudio de caso, orientado al desarrollo de competencias matemáticas en el pensamiento variacional desde el concepto de función lineal; esta investigación se realiza en la Institución educativa Robledo con 25 estudiantes de grado noveno; para la obtención de los datos se pretende utilizar dos secuencias a-didácticas, con cuestionarios, una entrevista y videograbaciones, con el fin de generar en ellos competencias como: pensar y razonar, plantear y resolver problemas, y representar. El desarrollo del estudio se hizo en diferentes fases: se diseñaron dos secuencias que fueron analizadas por expertos y aplicadas a cada uno de los estudiantes. A partir del informe de los expertos y de los resultados en el análisis preliminar se realizó un cuestionario. Luego se diseñó una entrevista con el objetivo de obtener más información sobre algunos resultados para describir y explicar las dificultades encontradas, y el desarrollo de algunas competencias en la construcción del concepto de función lineal.

Para alcanzar este propósito se consideró conveniente utilizar metodología de investigación cualitativa. Merriam S. (1998) señaló, sobre esta metodología, que primero, consiste en entender el interés desde las perspectivas de los participantes. Segundo, el investigador es el instrumento primario para la colección de datos y el análisis. Tercero, esta metodología se refiere al estudio de casos. Cuarto, emplea la estrategia de investigación inductiva. Quinto, se enfoca en los procesos y entendimientos. Finalmente, el investigador consume una cantidad de tiempo sustancial, en el medio natural. (Merriam S. 1998, p. 6)

ANÁLISIS DE DATOS

En el análisis preliminar se pudieron establecer los conceptos de proporcionalidad, magnitudes inversamente proporcionales. El estudiante suele usar algunas competencias como: pensar y razonar, plantear y resolver problemas, y representar.

Para suministrar agua a una pequeña población, se tiene un tanque lleno con 120000 litros de agua. La llave del tanque se abre para que salgan, 12000 litros de agua por hora. Con la información anterior complete la siguiente tabla que relaciona el tiempo transcurrido (t) y la cantidad de agua que queda en el tanque (c).

Tiempo (t)	*1*						*7*				
Cantidad (c)	*108000*		*84000*								

- *¿En cuántas horas se desocupa totalmente el tanque?*
- *Construya una expresión que permita determinar la cantidad de agua c (en miles de litros) que hay en el tanque transcurridas t horas.*
- *¿Cuál es el valor máximo que puede tomar t? (explique)*

Este estudiante con base en la información establece que es una magnitud inversamente proporcional y puede constituir el concepto de función desde las magnitudes.

Tiempo (t).	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Cantidad (c)	108000	96.000	84000	72000	60.000	48.000	36.000	24.000	12.000	0	0

A3, Representación de la tarea 3 en el análisis preliminar

- El tanque se desocupa totalmente en 10
- $Tx + Cy = 0$
- El valor maximo que puede tomar T es 120.000 porque en el tanque solo cabe esa cantidad.

El estudiante no tiene dificultades, porque desarrolló algunas competencias como pensar y razonar, ya que plantea soluciones matemáticas.

A3, Solución de la tarea 3 en el análisis preliminar.

En el siguiente episodio desarrolla competencias como: plantear y resolver problemas.

E. ¿Me podría explicar cómo obtuvo esta respuesta?

A3: Lo que hice fue que como tenía dos valores en la variable independiente en este caso (t) entonces comencé a llenar los espacios. Luego en la variable dependiente empecé a sacar la diferencia. Por esto puedo determinar que es una magnitud directamente proporcional.

En cuanto a la construcción de la expresión algebraica, esto es lo que hace.

E. ¿Por qué representa la expresión de esta manera y además cual fue el valor máximo?

A3: Al responde esta pregunta pensé que tomando el valor del tiempo (t) más cantidad (c) la podía igualar a cero entonces determine que esta era la ecuación pero después especulé que esta expresión era de otra forma. El valor máximo tomado fue el de 12.000 cuando el tanque tenía la cantidad mínima.

Nótese que el sujeto desarrolla algunas competencias como pensar y razonar, plantear y resolver problemas pero presenta dificultades en modelar una expresión algebraica.

La siguiente tarea muestra cómo el estudiante logra desarrollar competencias en torno al concepto de función lineal.

1. *Responder las siguientes preguntas de acuerdo con la información presentada:*

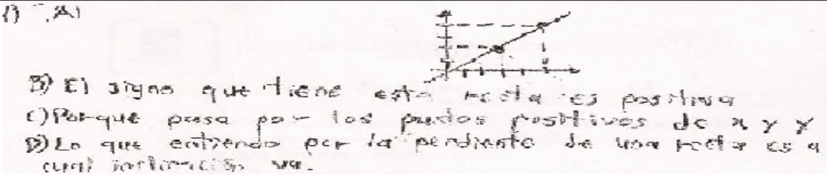
a) *Dibuja una recta que pasa por los puntos (3,2) y (5,4)*

b) *¿Qué signo tiene la pendiente de esta recta?*

c) *¿Por qué?*

d) *¿Qué entiendes por pendiente de una recta?*

Este estudiante representa la grafica y la noción de pendiente de la siguiente manera.



A3, Representación de la tarea 1 en el cuestionario

Se puede establecer que desarrollan más seguros las competencias de representación.

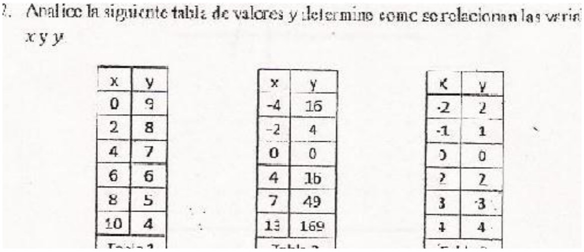
E. ¿Cómo obtuvo la gráfica de una función lineal?

A3: Gráficamente lo que hice fue tomar los dos puntos que me dan en la información y como yo sé que una recta pasó por dos puntos entonces ubique los puntos dentro de un plano cartesiano y después uno los puntos por medio de una recta.

E. ¿Qué es para usted una pendiente y que signo tiene en el anterior punto?

A3: Es la inclinación que tiene la recta además al ejercicio le asigne una pendiente positiva por que como se encuentra en el primer cuadrante.

Los estudiantes recurren a graficar las parejas ordenadas y a partir del dibujo determinan si la relación es lineal.



2. Analice la siguiente tabla de valores y determine como se relacionan las vari
x y y

x	y
0	9
2	8
4	7
6	6
8	5
10	4

x	y
-4	16
-2	4
0	0
4	16
7	49
13	169

x	y
-2	2
-1	1
0	0
2	2
3	3
4	4

Se evalúo el desarrollo de algunas competencias al realizar la representación y argumentar.

E. ¿Cuáles de las tres representaciones es una función lineal y por qué?

A3: A partir de los dibujos obtenido determine que la primera tabla representa una función lineal ya que a cada elemento de x le corresponde solo uno de y, mientras que las otras dos tablas no son funciones lineales, además una vez que percibió que los puntos no parecían configurar una recta.

CONCLUSIONES

Los estudiantes presentan dificultades en relación con la articulación entre registros gráficos, algebraicos, tabulación y en la noción de pendiente; no expresan argumentos matemáticos en algunos problemas en contexto; en las situaciones didácticas, los estudiantes lograron desarrollar algunas competencias como pensar y razonar y representar ya que pueden distinguir entre diferentes tipos de cuestiones propias de una función lineal; por la forma como resolvieron las tareas a lo largo de todo el análisis preliminar, el cuestionario y el modo de justificar las respuestas en la entrevista, pone en evidencia que los estudiantes desarrollan algunas competencias, porque recuerdan los elementos matemáticos necesarios en la resolución de problemas, utilizan algunos sistemas de representación (tabulación y gráfica); pero presentan dificultades en el procedimiento algebraico relacionado con el concepto de función lineal.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adrián, D. l. (2000). El concepto de función en secundaria: Conocer el grado de visualización de función lineal en el alumno,Experimentaciones en Educación Matemática en los Niveles Medio Superior y Universitario. México: Editores F. Hitt y G. Hernández, Cinvestav-IPN.

Artigue, M. (1998). Ingeniería didactica. En Artigue,M, Douay, R, Moreno, L,Gomez, P. (Eds). Ingeniería didáctica en educación matemática. Colombia : Una empresa docente .

Arzarello, F. B. (1995). The construction of algebraic knowledge: towards a socio-cultural theory and practice. . Proceedings of the 19th International Conference for Psychology of Mathematics educatio, Vol I. , págs. 119-140.

Brousseau, G. (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics. Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires.: Aique.

Kieran, C.(2007).Learning and Teaching Algebra at the Middle School Through College Levels. En Lester, F. K. (Ed.). Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. . Reston, Virginia: NCTM e IAP, (pp. 707-762)..

Merriam, S. B. (1998). Qualitative Research and Case Study. Applications in Education. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Santos, & M & Alvarado. (2000). Reforma curricular y desempeño de los estudiantes del nivel medio superior en el proceso de resolución de problemas no rutinarios, Experimentaciones en Educación Matemática en los Niveles Medio Superior y Universitario,. México, pp. 1-16: Editores F. Hitt y G. Hernández, Cinvestav-IPN,.

Estudio cualitativo sobre la enseñanza de las Medidas de Tendencia Central usando una estrategia didáctica basada en e-learning, en grado décimo de educación secundaria en la Institución Educativa Luis Eduardo Calvo Cano

Eduar Mauricio Mateus Ocampo[*]

RESUMEN

Esta investigación tiene como propósito implementar una estrategia didáctica basada en el e-learning para determinar el nivel de adquisición de los conceptos de media, mediana y moda, en los alumnos de un curso de grado décimo de Educación Secundaria. El proyecto está basado en el enfoque ontosemiótico propuesto por Godino, Batanero y Font (2007). Al finalizar la investigación se espera que los alumnos tengan mejor desempeño en la solución de situaciones problema que involucren el concepto de medidas de tendencia central y se desenvuelvan de una forma natural en los ambientes virtuales.

Palabras clave: e-learning, medidas de tendencia central, plataforma Moodle.

[*] Universidad del Quindío. Direcciones electrónicas: eduarmauricio78@yahoo.com.co, Emmo1978@gmail.com.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de investigación pretende, implementar la metodología e-learning en la enseñanza de un curso de Estadística Descriptiva, mediada por la plataforma Moodle; esta metodología tiene que ver con el hecho obvio de plantear la asignatura de modo que resulte accesible, útil y motivadora para un alumnado que proviene de un mundo considerablemente alejado de las Matemáticas; aunque la metodología aquí se puede implementar fácilmente en la enseñanza de cualquier disciplina se decidió trabajar en esta asignatura porque aunque está inmersa dentro del currículo del área de matemáticas, frecuentemente se deja aislada del desarrollo normal de las clases de un año lectivo, sea porque la persona que la orienta no tiene un perfil académico para hacerlo o porque los profesores del área dedican la mayor parte del tiempo al trabajo numérico-variacional dejando de lado lo aleatorio. Esto implica que los alumnos al finalizar el año no identifiquen ni, mucho menos, apliquen los conceptos básicos de la estadística conduciéndolos a que no alcancen los logros requeridos para la misma.

La utilización de los computadores en el colegio aproxima el entorno académico a otros entornos del alumno (donde se desenvuelve normalmente y con mayor agilidad), lo que va a facilitar la transferencia de los aprendizajes de unos contextos a otros y sin estar preocupados de prejuicios que son los que llevan casi siempre a que una persona fracase.

Ejemplos de ello los encontramos en autores como Cobo (2003), que realizó una investigación (estudio teórico-experimental), sobre el significado y la comprensión de las medidas de posición central en la Educación Secundaria Obligatoria, que analiza los tipos de problemas, representaciones, procedimientos de cálculo, definiciones, propiedades y argumentaciones relacionados con estos objetos, tanto en su faceta institucional como personal.

Es igualmente importante mencionar el estudio realizado por Hoyos y otros (2005) en el departamento del Quindío. Estos estudios fueron adelantados por el grupo de investigación GEDES, dado que ellos no son ajenos a la problemática que se vive alrededor de la enseñanza de la estadística, han desarrollado una didáctica construida desde el aula, sustentada en las nuevas tecnologías de la información y con miras a alcanzar los estándares propuestos por el Ministerio de Educación.

Con este tipo de proyectos sobre la enseñanza de las matemáticas y la estadística, se está contribuyendo a identificar los elementos que generan distanciamiento entre el alumno, el profesor y los contenidos (en nuestro caso con un grupo del grado décimo de la Institución Educativa "Luis Eduardo Calvo Cano" del municipio de Circasia (Q)), y qué herramientas permiten acortar dicha distancia, al mismo tiempo que se favorecen la planificación y la ampliación del campo metodológico de enseñanza y la didáctica del aprendizaje, relacionando las competencias necesarias del universo matemático, la motivación del conjunto académico (docente, estudiante y contenido) y las posibles apropiaciones y creaciones que resulten de esta nueva propuesta.

MATERIALES – MÉTODOS

La metodología de la investigación es de corte cualitativo pero tomando como referencia la ingeniería didáctica por considerarla adecuada para responder a la pregunta y a los objetivos de investigación; además, la construcción didáctica nos lleva a retomar las fases del proceso experimental en el desarrollo de nuestro trabajo; la metodología en sí misma se compuso de las siguientes fases:

Primera fase: Análisis preliminares.

Segunda fase: Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas.

Tercera fase: Experimentación.

Cuarta fase: Análisis a posteriori y evaluación

Dichas fases se trabajaron en un contexto de micro-ingeniería, ya que esta investigación tiene como objeto el estudio de un determinado tema en un entorno local.

Como la investigación gira en torno a una microingeniería, la teoría de los significados institucionales y personales será una herramienta necesaria para desarrollar los paso del proyecto, como se ha mostrado en diversos trabajos (Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, en prensa) incluyendo la noción de función semiótica y una categorización de los objetos matemáticos.

Por ello se proponen como tipos de entidades matemáticas primarias las siguientes: lenguaje, situaciones, acciones, conceptos, propiedades o atributos y argumentos.

Con esta concepción, a continuación aplicaremos el marco teórico para realizar un análisis epistémico de las medidas de posición central, limitándonos a su uso en estadística descriptiva.

Para este trabajo se diseñará un cuestionario orientado a la evaluación del significado personal que los estudiantes tienen de las medidas de tendencia central, el cual tratará de evaluar los siguientes tipos de comprensión, que corresponden a los diversos elementos de significado contemplados en nuestro marco teórico.

Cuando nos preguntamos por el significado de la media o de las medidas de tendencia central observamos que este significado tiene un carácter complejo. En el trabajo matemático se pueden identificar los siguientes tipos de entidades: enunciados de problemas, ejercicios; notaciones, símbolos, texto ordinario; operaciones, algoritmos; definiciones de conceptos, enunciados de proposiciones; demostraciones, comprobaciones.

Las fases dentro de nuestro trabajo las realizamos de la siguiente manera:

ANÁLISIS PRELIMINARES

- Realizamos una prueba diagnóstico que consta de un cuestionario con 10 ítems los cuales han sido validados anteriormente por expertos (Mayen, Cobo y Balderas, 2007).
- Se aplicó un cuestionario sobre uso del computador y conectividad.
- Se analizaron las respuestas teniendo como referencia el marco teórico de Godino (2002).

Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas

- Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el primer cuestionario elaboraremos una secuencia didáctica que nos permitió corregir los errores que presentan los alumnos.
- De acuerdo con los datos que nos arrojó el cuestionario sobre el uso y el dominio del computador, se realizaron varias sesiones para nivelar los alumnos en dichos contenidos.
- La secuencia didáctica elaborada para los conceptos de medidas de tendencia central la organizaremos de manera virtual en forma de WebQues teniendo en cuenta la estructura de la misma y la cual será mediada por una plataforma (Moodle).

Dicho curso será cien por ciento virtual aplicando la metodología e-learning.

EXPERIMENTACIÓN

- Se abordó una primera unidad donde el alumno trabajó todo lo relativo a la concepción de media aritmética.

- Se trabajó una siguiente unidad con el concepto de moda.
- Posteriormente abordarán una unidad relativa al concepto de mediana.
- Por último se desarrolló una unidad en la cual el alumno involucre los tres concepto de medidas de tendencia central antes vistos de una manera más compleja.

En cada una de las unidades se recogieron los datos de evaluación y de análisis por medio de diferentes recursos que nos ofrece la metodología e-learning y la plataforma en la cual desarrollaremos nuestro curso como son los foros, tareas, chats, evaluaciones y las diferentes participaciones en cada una de las actividades mencionadas por parte de los alumnos.

ANÁLISIS A POSTERIORI Y EVALUACIÓN

En esta fase debemos hacer una comparación exhaustiva con respecto a la segunda (concepción y análisis a priori), pero teniendo en cuenta que como nuestra metodología se divide en varias sesiones esta confrontación con los propósitos y resultados la debemos hacer finalizando cada una de las unidades didácticas para que nos determine los cambios que debemos hacer para la siguiente unidad y podamos corregir las dificultades halladas.

Teniendo las comparaciones por unidad podemos hacer finalmente una evaluación global de nuestro trabajo para poder arrojar unos resultados de nuestra propuesta de investigación.

Conclusiones parciales

Ventajas:

- Se espera desarrollar una cultura de la virtualidad desde las matemáticas en los estudiantes de la institución educativa Luis Eduardo Calvo Cano del municipio de Circasia, Quindío.
- Los estudiantes acceden de manera constante y permanente a la plataforma.
- El ritmo lo marca el propio estudiante.
- Se promueve el aprendizaje autónomo.
- Se utilizan herramientas web 2.0 con fines educativos.
- Se ha abierto un espacio en la Institución que promueve el uso de TIC como apoyo a la enseñanza.

- Se montó la plataforma Moodle para que los docentes la usen como apoyo para sus cursos presenciales.

INCONVENIENTES

- Hay un marcado choque con el modelo tradicional de enseñanza.
- En ocasiones los estudiantes se sienten inseguros producidos por la novedad o la falta de conocimiento.
- El docente debe dedicar mucho tiempo a cada estudiante.
- No existe un Banco de Objetos de Aprendizaje lo suficientemente estándar para poderlo implementar directamente, por lo tanto los OVA deben ser desarrollados por el docente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cobo M, Belén (2003). "Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de Secundaria" [Tesis Doctoral]. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, Juan D. (2002). "Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática". Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 22, n.º 2.3, pp. 237-284.

Hoyos, Efraín; Acosta, César; García, Jorge et al. (2005). "Implementación de una estrategia de intervención pedagógica en el contexto de una didáctica con software para el desarrollo del pensamiento estadístico en los niños y niñas de grado 4° y 5° de básica primaria" [Informe Final de Investigación]. Facultad de Educación. Programa de Licenciatura en Matemáticas. Grupo de investigación GEDES. Universidad del Quindío.

Ingeniería didáctica: solución de problemas mediante sistema de ecuaciones lineales, con estudiantes de noveno grado

Diego Alberto Muñoz Delgado[*]

RESUMEN

Se realiza una investigación de tipo cualitativo en educación matemática, con estudiantes de grado noveno de la institución educativa CASD, para identificar qué esquemas aplican en el desarrollo del concepto "solución de problemas mediante sistema de ecuaciones lineales". Se implementó la metodología de la ingeniería didáctica (Artigue, Douady, Moreno & Hurtado, 1995). Se realizaron sesiones educativas presenciales y de trabajo extracurricular para cumplir con las cuatro fases de la ingeniería didáctica. Como producto del proceso se contará con una metodología adecuada para implementarla en la institución educativa, que contribuya a mejorar el desempeño académico, innovar los métodos de enseñanza y aprendizaje, con ayuda de las TIC y reducir la pérdida de grados de los estudiantes de básica secundaria.

Palabras clave: sistemas de ecuaciones, resolución de problemas, metodología de enseñanza, software.

[*] Universidad del Quindío. Dirección electrónica: daltomoz@gmail.com

INTRODUCCIÓN

En este proyecto de investigación se implementan los lineamientos del constructivismo de Jean Piaget, en especial los dados en la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1997) y la teoría de la transposición didáctica (Chevallard, Pourquoi la transposition didactique, 1962), enfoques pedagógicos en que se sustenta la ingeniería didáctica, que es impulsada especialmente por Michèle Artigue. Finalmente, el objeto matemático se trabaja mediante la resolución de problemas de acuerdo con el "método de los cuatro pasos" de George Polya.

Se ha elegido estudiar el tema: solución de problemas mediante sistemas de ecuaciones lineales con estudiantes de noveno grado, porque es la puerta de entrada a otros temas de matemáticas más complejos que se ven en ambientes universitarios y que están relacionados directamente con carreras afines a las modalidades técnicas del CASD, como son Ingeniería de Sistemas, Ingeniería de Software, Ingeniería Telemática E Ingeniería Electrónica. Si logramos que los estudiantes tengan un mejor desempeño en matemáticas, estaremos contribuyendo a que más jóvenes culminen sus estudios universitarios.

MATERIALES – MÉTODOS

La investigación en educación matemática se aborda desde un enfoque constructivista, con estudiantes de grado noveno de la institución educativa CASD, para conocer cómo desarrollan el concepto "solución de problemas mediante sistemas de ecuaciones lineales" implementando la estrategia metodológica de la ingeniería didáctica.

De acuerdo con este marco conceptual y metodológico se trabajan cuatro fases:

Primera fase: Análisis preliminares. Se emplea un cuestionario con 14 ítems, que contiene preguntas y problemas que se pueden solucionar mediante sistemas de ecuaciones lineales por métodos como: igualación, sustitución, reducción y gráfico. En esta fase se determinan las necesidades de aprendizaje de los estudiantes.

Segunda fase: Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas. Se procede a analizar los resultados encontrados en el análisis preliminar. Se busca determinar los métodos de resolución que representan mayor dificultad, las preguntas que mejor se comprenden y los pasos que siguen los estudiantes para solucionar los problemas. Se determinan las variables a estudiar, se diseñan los contenidos, ayudas educativas e instrumentos de evaluación y recolección de datos, que se utilizan en la siguiente fase. Uno de los productos de la investigación es una secuencia didáctica utilizando videotutoriales, que se elabora para contribuir a subsanar las dificultades de aprendizaje encontradas en los estudiantes.

Tercera fase: Experimentación. En esta fase se hace una revisión más profunda del estado del arte y se realiza la secuencia didáctica que permita subsanar los problemas detectados. Se desarrolla la secuencia didáctica de acuerdo con el plan previsto. El curso tiene una parte presencial y otra virtual. Las clases presenciales se alternan entre el aula de clases y la sala de sistemas, donde se utiliza el software GeoGebra y Microsoft Excel para solucionar los sistemas de ecuaciones con mayor dinamismo. Con los videotutoriales, los estudiantes se ejercitan y resuelven sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas. Para verificar la utilidad de la secuencia didáctica se aplican varios instrumentos de captura de datos (cuestionarios, entrevistas videos, apuntes de los estudiantes y del investigador). Cada sesión educativa se evalúa durante el proceso para verificar avances en el aprendizaje y replantear temas y conceptos si es necesario.

Cuarta fase: Análisis a posteriori y evaluación. Los resultados del análisis a priori y los resultados encontrados con los instrumentos de evaluación de las sesiones educativas, se contrastan y se concluye si se da el aprendizaje esperado, si surgen dificultades no previstas y si se logran las metas propuestas. Por último, se procede a divulgar los resultados de la investigación.

El proyecto se encuentra en la tercera fase y se compartirá el proceso llevado hasta el momento actual.

CONCLUSIONES PARCIALES

A continuación se destacan algunos de los hallazgos y se presentan a modo de conclusión. Sin embargo, se debe tener presente que el proyecto se encuentra en desarrollo:

En el cuestionario preliminar que se aplicó para detectar el conocimiento que tienen los estudiantes sobre la solución de problemas mediante sistemas de ecuaciones lineales, se encontró un desconocimiento total del tema, lo que confirma la necesidad de enseñarlo.

Para desarrollar la secuencia didáctica se preparó una guía didáctica en formato pdf, donde se explican los métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales; esta permite que los jóvenes estudien los temas y desarrollen los problemas sin preocuparse por tomar apuntes muy detallados en sus cuadernos.

De los 38 participantes en el curso, dos no tienen computador, pero todos tiene acceso a Internet, lo que permite que la mayoría de ellos estudien y entreguen sus trabajos por correo. Cada estudiante recibió un CD que contiene los programas y materiales necesarios para desarrollar el curso.

Las clases de matemáticas son más divertidas y tienen mayor participación de los estudiantes si se utilizan computadores que cuenten con el software apropiado, por ejemplo, GeoGebra o Microsoft Excel.

Se abren nuevos campos de investigación en otros temas de matemáticas en todos los grados, que para los docentes pueden convertirse en la oportunidad de hacer las clases más divertidas, interesantes y efectivas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Hurtado, H. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (Primera ed., Vol. 1). (H. Hurtado, Ed.) Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1997). *La thèorie des situations didactiques.* Recuperado el 17 de noviembre de 2011, de http://math.unipa.it/: http://math.unipa.it/~grim/brousseau_montreal_03.pdf

Campos, E. d. (2006). Ingeniería Didáctica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.*, 9.

Chevallard, Y. (1962). *Pourquoi la transposition didactique.* Recuperado el 18 de octubre de 2011, de http://yves.chevallard.free.fr: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Pourquoi_la_transposition_didactique.pdf

Chevallard, Y. (1997). La Transposición Didáctica: Del saber sabio al saber enseñado.

Herrero, S. M. (marzo de 2004). Sistemas de Ecuaciones Lineales: Una secuencia didáctica. *Relime - , 7*(1), 49-78.

Ochoviet Filgueiras, T. C. (2009). *Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.* Montevideo – Uruguay.

Unesco, & Betancourt, A. M. (1993). *Educación a distancia y función tutorial* (2 ed.). (V. Monturiol, Ed.) San José - Costa Rica, San José, Costa Rica: Oficina Subregional de Educación de la UNESCO para Centroamérica y Panamá.

DISEÑO DEL POSTER

UNIVERSIDAD DEL QUINDÍO

Maestría en Ciencias de la Educación
Línea de Educación Matemática

Maestrante: Diego Alberto Muñoz Delgado daltomoz@gmail.com

Estudio de tipo cualitativo orientado a indentificar cómo adquieren, los estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa CASD de Armenia Q., el concepto de solución de problemas mediante Sistema de Ecuaciones Lineales (SEL).

RESUMEN

Se realizará una investigación de tipo cualitativo en educación matemática, con estudiantes de grado noveno de la institución educativa CASD, para identificar qué esquemas aplican en el desarrolló del concepto "solución de problemas mediante sistema de ecuaciones lineales". Se implementará la metodología de la Ingeniería Didáctica *(Artigue, Douady, Moreno & Hurtado, 1995)*. Para lograr este objetivo se realizarán una serie de actividades durante las sesiones educativas presenciales y como trabajo extracurricular con el fin de cumplir con las cuatro fases en las que se fundamenta el proceso experimental de la ingeniería didáctica: 1. Primera fase: Análisis preliminares. 2. Segunda fase: Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas. 3. Tercera fase: Experimentación. 4. Cuarta fase: Análisis a posteriori y evaluación.

Al final del proceso investigativo programado, se espera contar con una metodología de enseñanza-aprendizaje adecuada para implementarla en la institución educativa, que contribuya a mejorar el desempeño académico, innovar los métodos de enseñanza y aprendizaje con ayuda de las TICs y reducir la deserción escolar y la pérdida de grados de los estudiantes de básica secundaria.

INTRODUCCIÓN

En este proyecto de investigación se implementarán los lineamientos del constructivismo de Jean Piaget, en especial los dados en la teoría de situaciones didácticas *(Brousseau, 1997)* y la teoría de la transposición didáctica (*Chevallard, Pourquoi la transposition didactique, 1962)*, que son los enfoques pedagógicos en que se sustenta la Ingeniería Didáctica que es impulsada especialmente por Michèle Artigue y finalmente el objeto matemático se trabajará mediante la resolución de problemas de acuerdo con el "método de los cuatro pasos" de George Polya.

Se ha elegido estudiar el tema: solución de problemas mediante sistemas de ecuaciones lineales con estudiantes de noveno grado, porque es la puerta de entrada a otros temas de matemáticas más complejos que se ven en ambientes universitarios y que están relacionados directamente con carreras afines a las especialidades del CASD, como son ingeniería de sistemas, ingeniería de software, ingeniería telemática e ingeniería electrónica. Si logramos que los estudiantes tengan un mejor desempeño en matemáticas, estaremos contribuyendo a que más jóvenes culminen sus estudios universitarios.

METODOLOGÍA, MATERIALES

Se abordará la investigación en educación matemática, desde un enfoque constructivista, con estudiantes de grado noveno de la institución educativa CASD, para conocer cómo desarrollan el concepto "solución de problemas mediante sistemas de ecuaciones lineales" implementando la estrategia metodológica de la Ingeniería Didáctica.

De acuerdo con este marco conceptual y metodológico se trabajarán en cuatro fases:

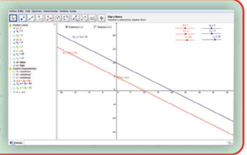
- **Primera fase: Análisis preliminares.** Se elaborará un cuestionario con 10 preguntas aproximadamente con el fin de aplicar una prueba a los estudiantes de grado noveno. El cuestionario contendrá preguntas y problemas que se pueden solucionar mediante sistemas de ecuaciones lineales, y se podrán resolver por diferentes métodos: igualación, sustitución, reducción, gráfico y determinantes. En esta fase se determinarán las necesidades de aprendizaje de los estudiantes.
- **Segunda fase: Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas.** En esta fase se procederá a analizar los resultados encontrados en el análisis preliminar. Se buscará determinar los métodos de resolución que representan mayor dificultad, las preguntas que mejor se comprenden y los pasos que siguen los estudiantes para solucionar los problemas. Se determinarán las variables a estudiar, se diseñarán los contenidos, ayudas educativas e instrumentos de evaluación y recolección de datos, que se utilizarán en la siguiente fase. Uno de los productos de la investigación será una secuencia didáctica utilizando videotutoriales, que se elaborará para contribuir a subsanar las dificultades de aprendizaje encontradas en los estudiantes.
- **Tercera fase: Experimentación.** En esta fase se hará una revisión más profunda del estado del arte y se procederá a realizar las secuencias didácticas que permitan subsanar los problemas detectados. se desarrollará la secuencia didáctica de acuerdo con el plan previsto. El curso tendrá una parte presencial y otra virtual. Las clases presenciales se alternarán en el salón de clases y en la sala de sistemas donde se utilizarán el software GeoGebra y Microsoft Excel para solucionar los sistemas de ecuaciones con mayor dinamismo. Con los videotutoriales los estudiantes se ejercitarán y resolverán sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas. Para verificar la utilidad de la secuencia didáctica se aplicarán varios instrumentos de captura de datos (cuestionarios, entrevistas video grabadas, apuntes de los estudiantes y el investigador). Cada sesión educativa será evaluada para verificar avances en el aprendizaje y replantear temas y conceptos si es necesario.
- **Cuarta fase: Análisis a posteriori y evaluación.** Los resultados del análisis a priori y los resultados encontrados con los instrumentos de evaluación de las sesiones educativas, se contrastarán y se podrá concluir si hubo el aprendizaje deseado o si surgieron otras dificultades no previstas y si se lograron las metas propuestas. Por último se procederá a divulgar los resultados de la investigación.

El proyecto se encuentra en la tercera fase y se compartirá el proceso llevado hasta el momento actual.

CONCLUSIONES PARCIALES

A continuación se destacan algunas de los hallazgos y se presentan a modo de conclusión, sin embargo se debe tener presente que el proyecto se encuentra en desarrollo:

- En el cuestionario preliminar que se aplicó para detectar el conocimiento que tienen los estudiantes sobre la solución de problemas mediante sistemas de ecuaciones lineales, se encontró un desconocimiento total del tema, lo que confirma la necesidad de enseñarlo.
- Para desarrollar la secuencia didáctica se preparó una guía didáctica en formato pdf, donde se explican los métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales, ésta permite que los jóvenes estudien los temas y desarrollen los problemas sin preocuparse por tomar apuntes muy detallados en sus cuadernos.
- De los 38 participantes en el curso, dos no tienen computador, pero todos tiene acceso a internet, lo que permite que la mayoría de ellos estudien y entreguen sus trabajos por correo. Cada estudiante recibió un CD que contiene los programas y materiales necesario para desarrollar el curso.
- Las clases de matemáticas son más divertidas y tienen mayor participación de los estudiantes si se utilizan computadores que cuenten con el software apropiado, por ejemplo GeoGebra o Microsoft Excel.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Hurtado, H. (1995). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática (Primera ed., Vol. 1). (H. Hurtado, Ed.) Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Brousseau, G. (1997). La thèorie des situations didactiques. Recuperado el 17 de noviembre de 2011, de http://math.unipa.it/: http://math.unipa.it/~grim/brousseau_montreal_03.pdf
- Cabero Almenara, J. (Abril de 2006). Bases pedagógicas del e-learning. Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento, 3(1), 10.
- Campos, E. d. (2006). Ingeniería Didáctica. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática., 9.
- Ferrari, M., & Farfán, R. M. (Noviembre de 2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: La construcción de una red de modelos. Relime - Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11(3), 309 - 354.
- Filgueiras, T. C. (2009). Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas - Tésis Doctoral. Ciudad de México, México: Centro de Investigaciones de Ciencia Aplicada y Tecnología Aanzada del Instituto Politécnico Nacional.
- Genicio, M. R., Hernández, C., & Porcinito, S. (2008). Sistema de Ecuaciones Lineales: Secuencia Didáctica para su Enseñanza. (P. Lestón, Ed.) Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21, 21, 128-137.
- George Pólya, G. S. (1978). Problems and Theorems in Analysis I. Berling Heidelberg: Springer-Verlag.
- Giménez Abad, M. J., & Serrano Rey, A. (2007). Propuesta de una ingeniería didáctica: curso de Matemáticas-0. DOAJ -

El aprendizaje de las estructuras multiplicativas a través del juego educativo

Andrés Felipe Ramírez Sánchez[*]
Luis Oscar Alzate Zapata[**]
Leidys Diana Pérez Aguado[***]
Sandra Liliana Valencia[****]

RESUMEN

En nuestra práctica docente, desarrollada en la Institución Educativa Fontidueño Jaime Arango Rojas sede Machado municipio de Bello Antioquia, hemos observado que la mayoría de estudiantes de grados segundo, tercero y cuarto, presentan dificultades para comprender situaciones que involucren la multiplicación y la división. Es por esta razón que nuestro trabajo de investigación estará enfocado al estudio de las estructuras multiplicativas planteadas desde los campos conceptuales de Vergnaud. Esperamos que recurriendo al recurso didáctico del juego educativo, los estudiantes logren una mayor comprensión del concepto. Nuestra investigación se encuentra en etapa de análisis, por lo que aún carecemos de etapa de experimentación y resultados.

Palabras clave: Estructuras multiplicativas, situaciones problema, juego educativo.

[*] Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: andresramirez1@gmail.com
[**] Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: luisoscar2714@yahoo.es
[***] Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: eledepa2020@hotmail.com
[****] Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: medellinz2-759@hotmail.com

INTRODUCCIÓN

Diversos autores como Piaget, Vygotsky, Corbalán, Guzmán, entre otros, reconocen la importancia del trabajo con el juego educativo en la escuela porque favorece el desarrollo de las capacidades y habilidades de razonamiento matemático; es un componente esencial en el desarrollo de los contenidos matemáticos. A pesar de esta reconocida importancia, la enseñanza con la inclusión de los juegos educativos como herramienta o recurso didáctico se encuentra ausente en nuestro sistema educativo. Una de las razones de esta ausencia es el limitado número de estudios de las matemáticas con la inclusión del juego educativo en nuestro contexto y la poca disponibilidad de material de apoyo para los profesores.

Creemos que si podemos dar cuenta en esta investigación de la forma en que los estudiantes participan de juegos educativos que incluyen las estructuras multiplicativas, podríamos tener más elementos para diseñar material didáctico y para orientar la enseñanza de este campo conceptual.

Los estudiantes de la actual sociedad, responden a estímulos muy diferentes a los de antes, son más perceptivos y más activos. No son sólo receptores pasivos, sino que disfrutan siendo partícipes de su proceso de formación. Los maestros debemos ir a la par con los intereses de los estudiantes y buscar estrategias que le permitan atrapar su atención. Nosotros como maestros en formación, tenemos la responsabilidad de movilizar la educación en aras de mejorarla y de responder a las necesidades educativas actuales.

Los lineamientos curriculares están direccionados a la creación de situaciones problema en las que los estudiantes relacionan diversos conceptos y áreas de conocimientos, que permiten a éstos recurrir a saberes previos, para contextualizarlos según el problema que se presenta. Es por esto, que debemos convertirnos en asiduos lectores e investigadores, y fieles a este compromiso pretendemos involucrar el juego educativo con el fin de estudiar las estructuras multiplicativas y poder observar cuáles son los factores que influyen para que los estudiantes de segundo grado de primaria de la Institución Educativa Jaime Arango Rojas se vean encaminados hacia un aprendizaje significativo.

"Las matemáticas, lo mismo que otras áreas de conocimiento, están presentes en el proceso educativo para contribuir al desarrollo integral de los estudiantes con la perspectiva de que puedan asumir los retos del siglo XXI. Se propone una educación matemática que propicie aprendizajes de mayor alcance y más duraderos que los tradicionales, que no solo haga énfasis en el aprendizaje de conceptos y procedimientos si no en procesos de pensamientos ampliamente aplicables y útiles para aprender cómo aprender" (MEN, 1998)

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La enseñanza de las estructuras multiplicativas a través de los juegos educativos en los niveles de básica primaria de la institución, según lo que hemos observado, no está presente ni en los documentos oficiales (PEI, Plan de área, etc.) ni en la práctica cotidiana de los docentes. La ausencia de las situaciones que incluyen las estructuras multiplicativas en la escuela primaria, ha estado enmarcada por el rechazo de los docentes, quienes no tienen en cuenta el juego educativo, pues lo consideran una herramienta didáctica poco adecuada para la enseñanza de los contenidos matemáticos.

Esta investigación surge como respuesta a una necesidad observada en el contexto de la práctica docente, la cual fue llevada a cabo en la institución educativa Jaime Arango Rojas sede Machado de carácter público del barrio Fontidueño del municipio de Bello. Fundamentándonos en nuestro contacto con la institución, apoyándonos en los documentos oficiales y la observación de algunas clases de matemáticas, descubrimos que los estudiantes no reciben una fuerte instrucción en las estructuras multiplicativas a pesar de los requerimientos de los estándares básicos de competencias en matemáticas, del Ministerio de Educación Nacional. (MEN, Estándares Básicos de competencias en matemáticas, 2006)

Se hace necesario mencionar que en la institución de práctica en los grados primero, segundo y tercero es el mismo docente quien enseña todas las áreas en estos grados y hay un solo profesor responsable del área de matemáticas para los grados cuarto y quinto. Debido a esto, consideramos que la enseñanza de las estructuras multiplicativas, apoyada en el recurso didáctico del juego educativo en la escuela es muy importante, pues éste en sí es natural en los seres humanos y los motiva a aprender. (Caillois, 1994). Esta investigación pretende dar respuesta a la siguiente pregunta:

¿Cómo fomentar el aprendizaje de las estructuras multiplicativas a través del juego educativo en los estudiantes del grado segundo en la institución educativa Jaime Arango Rojas sede Machado del municipio de Bello?

MARCO TEÓRICO

Estructuras multiplicativas

A partir de ahora entenderemos las estructuras multiplicativas como un campo conceptual. "Estas estructuras consisten en todas las situaciones que pueden ser analizadas como problemas de proporciones simples y múltiples para los cuales generalmente es necesaria una multiplicación, una división o una combinación de esas operaciones. Varios tipos de conceptos matemáticos están involucrados en las situaciones que constituyen el campo conceptual de las estructuras multiplicativas y en el pensamiento necesario para dominar tales situaciones. Entre tales conceptos están el de función lineal, función no lineal, espacio vectorial, análisis dimensional, fracción, razón, tasa, número racional, multiplicación y división". (Moreira, 2002)

Situaciones problema

Ahora bien, cuando hablamos de las estructuras multiplicativas, necesariamente debemos plantearnos la idea de cómo enseñar este campo conceptual propuesto por Vergnaud. En ese sentido creemos que una de las mejores opciones para que los estudiantes apropien estos conceptos es a través de una situación. Entiéndase ésta como un contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar con ellos mismos y con el profesor, a través del objeto del conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos. A estas situaciones se les denomina Situaciones Problema. (Obando & Múnera, 2003).

Juego Educativo

Veamos la concepción del pedagogo Ovide Decroly sobre este tema: "Los juegos educativos responden a las siguientes características: No constituyen más que una de las muchas formas que puede adoptar el material de los juegos, pero tienen por finalidad principal ofrecer al niño objetos susceptibles de favorecer el desarrollo de ciertas funciones mentales, la iniciación en ciertos conocimientos y también permitir repeticiones frecuentes en relación a la capacidad de atención, retención y comprensión del niño". (Decroly, 2002).

Consideramos que la conceptualización de las estructuras multiplicativas utilizando como mediador el juego en la escuela es importante, y más en el grado segundo, donde el estudiante ya ha pasado por un proceso inicial del aprendizaje de la multiplicación pues "el juego es cultural e histórico en los seres humanos y los motiva a aprender".

(Caillois, 1994). La idea que tenemos es la modificación de un juego tradicional, para que favorezca la comprensión de las estructuras multiplicativas en niños de segundo primaria. El juego aún está en etapa de elección, ya que de este depende gran parte nuestro trabajo. En conclusión queremos que los estudiantes jueguen a la vez que aprendan a multiplicar y dividir desde las estructuras multiplicativas.

El juego que desarrollamos inicialmente en nuestra investigación se llama TRIPLETA, el cual consiste en extraer de una cantidad de fichas una al azar, que corresponde al resultado que debe encontrar el estudiante formándolo con tres fichas vecinas del tablero las cuales deben ser multiplicadas o divididas con el fin de obtener el resultado que indica la ficha.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Caillois, R. (1994). Los juegos y los hombres: La máscara y el vértigo. México D.F.: Fondo de Cultura Económica.

Castro, E., Rico, L., & Castro, E. (1995). Estructuras aritméticas elementales y su modelización. Santa Fé de Bogotá: Grupo editorial iberoamérica.

Decroly, O. (2002). El Juego Educativo. Madrid: Morata.

Edó, M., & Deuloeuf, J. (2005). Juegos, interacción y construcción de conocimientos. Universitat Autónoma de Barcelona.

MEN. (1998). Matemáticas. Lineamientos Curriculares. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Moreira, M. A. (2002). La teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud. Investigaciones en Enseñanza de las Ciencias.v. 7, n. 1, art. 1.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. Relime, 103-129.

Sandoval, C. A. (1996). Investigación cualitativa. Bogotá: ICFES.

13° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa

Experiencias del aula

Razones trigonométricas. Una experiencia de aula

Mauricio Becerra[*]
Fredy Arenas[**]
John Fredy Morales[***]
Evans Urrutia[****]

RESUMEN

Este documento contiene el análisis realizado en la fase de implementación a una de las tareas contenidas en la unidad didáctica razones trigonométricas. La primera parte busca justificar algunas de las razones consideradas para el desarrollo de la propuesta. Seguido a esto, construimos una caracterización de los referentes usados en la perspectiva del análisis didáctico. Luego, mostramos el estudio de caso a una tarea, describiendo las previsiones y los elementos de análisis anteriores a la fase de implementación, junto con las acciones realizadas por los estudiantes en contraste con las acciones previstas. Por último, se presentan unas reflexiones en torno a las debilidades y fortalezas encontradas en la implementación de la tarea y de los aportes de este trabajo a nuestra formación profesional.

Palabras clave: análisis y reflexión sobre la enseñanza, trigonometría, capacidades y dificultades.

[*] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: hemabe2@yahoo.es.

[**] Fundación de Educación Superior Nueva América. Dirección electrónica: fy.arenas@gmail.com.

[***] Universidad de San Buenaventura, Universidad Minuto de Dios.Dirección electrónica: sigma818@hotmail.com.

[****] Fundación de Educación Superior San Martín. Dirección electrónica: urrutia10@gmail.com.

CONTEXTUALIZACIÓN

En la actualidad, muchos profesores usan las razones trigonométricas como una herramienta para solucionar ejercicios relacionados con la resolución de triángulos aplicados en problemas, sin considerar su contexto ni el entorno propio del estudiante. Por lo tanto se plantea la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las capacidades que activan los estudiantes al resolver una tarea que requiere el uso de razones trigonométricas? Teniendo en cuenta esta problemática diseñamos, implementamos y evaluamos una secuencia de tareas que promoviera la construcción del concepto razones trigonométricas a partir de situaciones significantes para el estudiante que hicieran uso de su contexto. Esta propuesta se desarrolló en el marco del proyecto de innovación en el aula de matemáticas de la Institución de Educación Distrital (IED) José Joaquín Castro Martínez en la ciudad de Bogotá.

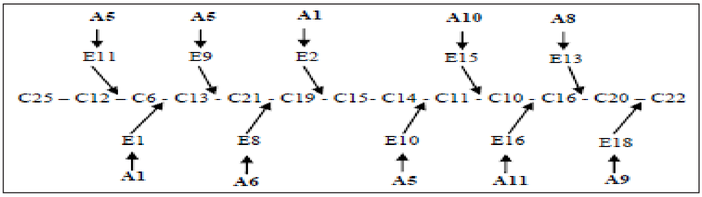
CARACTERIZACIÓN GENERAL DE LOS REFERENTES TEÓRICO-PRÁCTICOS

En la construcción de las tareas para la unidad hemos tenido en cuenta el desarrollo de cada uno de los componentes descritos por Gómez (2007) para el análisis didáctico. Entre estos, el análisis de contenido, para caracterizar la estructura conceptual sobre la cual se contienen las razones trigonométricas, así como los diferentes sistemas de representación que usa, junto con el análisis de los fenómenos y situaciones que se relacionan con el concepto, así como el análisis cognitivo, para describir las diferentes acciones que requieren los estudiantes en el desarrollo de las tareas, explícitas como capacidades, junto con los errores y dificultades en los que podrían incurrir, todo ello enmarcado en un grupo de objetivos que se desarrollan por medio de un conjunto de indicadores. Seguido a esto hemos descrito la relación de estos componentes en función de las tareas, a partir de la construcción de unos caminos de aprendizaje. El análisis de instrucción nos ha permitido caracterizar las acciones propias del profesor en el aula de matemáticas, así como las actuaciones de los estudiantes dirigidas a la solución de las tareas y el desarrollo de los objetivos. Y por último, el análisis de actuación como un recurso de evaluación, en razón del cumplimiento de los objetivos para la unidad, medido en una rúbricas de evaluación que permiten contrastar los hechos previstos con las acciones desarrolladas realmente.

DESCRIPCIÓN GENERAL. ESTUDIO DE CASO A UNA TAREA

El propósito procedimental de esta tarea (La sombra) era conocer la altura del árbol más alto del patio de juegos. A elección propia, los estudiantes debían seleccionar un árbol, y con el uso de la cinta métrica establecer la longitud de la sombra proyectada por este sobre el suelo. Luego, debían evaluar el ángulo de elevación del sol respecto al punto máximo de la sombra proyectada, con el uso de un goniómetro elaborado previamente por ellos. Este procedimiento lo realizarían en horas específicas durante un día, tomando nota de los valores encontrados en una tabla de registros. Seguido a esto, en el aula con ayuda del software Cabri Geometry construirían un modelo gráfico que representara la situación trigonométrica observada por ellos, de manera que fuese posible la variación del ángulo respecto al movimiento de la longitud de la sombra proyectada, y el cálculo de la altura del árbol para cada situación de variación.

En el desarrollo de esta tarea consideramos previamente la estructura del siguiente camino de aprendizaje[1] tomando en cuenta las capacidades requeridas para la solución de la actividad en momentos particulares, así como, la caracterización de algunos errores en los que podrían incurrir los estudiantes asociados a una dificultad específica.



De forma general, cada una de las letras "C" representa una capacidad requerida para el desarrollo de la tarea, contenidas en un orden de solución previamente evaluado, mientras que las letras "E" representan un error posible en el que podrían incurrir los estudiantes en la solución de la tarea, siendo las letras "A" algunas acciones de corrección implementadas por el profesor con el propósito de posibilitarle al estudiante la superación del error. Así, por ejemplo, entre el desarrollo de la capacidad C12 y la capacidad C6, los estudiantes podrían incurrir en un error: el E11. En esta fase, los estudiantes deben establecer una representación gráfica del problema (Capacidad C12) y para ello han de clasificar los triángulos según la longitud de sus lados y la medida de sus ángulos (Capacidad C6). Sin embargo, podrían incurrir en un error al elaborar el modelo gráfico, si estos no reconocen los triángulos rectángulos (Error E11); por ello previendo esta situación, se han desarrollado acciones de corrección específicas para este error en particular (A5: Se le presentaran a los estudiantes representaciones gráficas de triángulos

1 Una descripción en detalle de cada uno de los elementos que se desarrolla en este análisis se encuentra en: Arenas, Becerra, Morales, Urrutia y Gómez (2012).

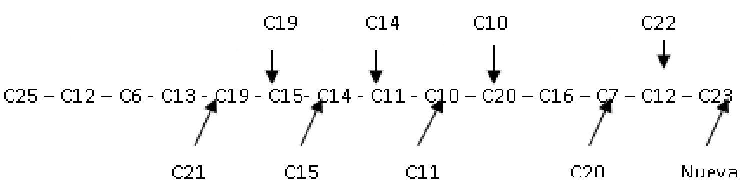
rectángulos y no rectángulos) para que estos identifiquen: los triángulos rectángulos a partir de sus propiedades, los catetos y la hipotenusa. Estas clasificaciones serán presentadas y realizadas por escrito en el cuaderno.

3.1 Fase de implementación

Para la media de la longitud de la sombra el uso de la cinta métrica fue relevado por medidas con objetos no convencionales como lápices, zapatos, entre otros, que permitieron generalizar la unidad como un patrón susceptible de conversión a unidades métricas. Cada uno de los grupos delegó funciones en sus integrantes, y con la instrucción del profesor identificaron el uso de la razón trigonométrica como tema principal de la tarea, y reconocieron también propiedades de tipo algebraico, como despeje de ecuaciones, que usaron en función de la solución. Con los registros tomados, los grupos hicieron uso del Cabri Geometry para modelar los diferentes datos encontrados y verificar gráficamente las soluciones.

3.2 Contraste entre las expectativas de aprendizaje y los resultados de la tarea

Nuestro propósito en este apartado es comparar la previsión descrita en el camino de aprendizaje anterior con el realizado por un grupo de estudiantes. Para ello, nos basamos en la información recogida por los diferentes instrumentos implementados para tal fin, los cuales no serán especificados en este documento. El siguiente esquema muestra el camino construido por los estudiantes en la solución de la tarea, resaltando con las flechas diagonales sus diferencias con el camino de aprendizaje, previsto inicialmente. Por ejemplo, el grupo activó la capacidad C19 en el momento en el que nosotros previmos que activarían la capacidad C21.



Este camino de aprendizaje presenta notorias diferencias con el camino de aprendizaje previsto. Las diferencias son consecuencia del uso de una capacidad no considerada en un tramo del camino de aprendizaje (C21). Los estudiantes identificaron los ángulos de elevación y depresión de acuerdo con la información de la tarea, antes de identificar los elementos del triangulo rectángulo a partir del reconocimiento del ángulo. Pese a ello, los objetivos de aprendizaje no se vieron afectados. Esto debido, a que estas dos capacidades están contenidas en el grupo que potencia directamente el conocimiento trigonométrico (C19: Identifica el cateto adyacente, el opuesto y la hipotenusa a partir del establecimiento del ángulo. C21: Identifica ángulos de elevación y depresión de acuerdo a la información de la tarea). Por tanto, el uso anterior de una de estas capacidades en un camino de aprendizaje no implica una modificación considerable del camino de aprendizaje establecido.

A pesar de que en el diseño la tarea pretendía el desarrollo estratégico de un grupo de capacidades, la tarea en sí misma no solo contribuyó con aspectos considerados previamente por nosotros; también lo hizo con elementos que no habían sido establecidos con anterioridad en las expectativas formuladas. Esto es probablemente una consecuencia de la construcción elaborada de una tarea que potencia muchos más elementos que los puestos en discusión por nosotros. Seguramente descuidamos, en algún nivel, la caracterización específica de los caminos de aprendizaje, y no tuvimos en cuenta todos los elementos que podrían considerar los estudiantes.

3.3. Logros y dificultades

Al proponerse como una tarea extra clase sin la supervisión del profesor, la construcción del goniómetro causó buena parte de las dificultades en la solución de la tarea. El diseño del instrumento por parte de algunos grupos no permitió establecer con claridad los ángulos buscados, influyendo directamente en la solución de la tarea, puesto que se realizaron cálculos con medidas angulares inapropiadas. Del mismo modo, la utilización del goniómetro generó dificultades a la hora de resolver la tarea. Los grados que se establecían para la medida del ángulo fueron expresados únicamente en cantidades enteras, dejando de lado medidas aproximadas más cercanas, que tuvieran en cuenta valores decimales. Esto hizo que el valor para la altura del árbol se modificara considerablemente. Asimismo, las condiciones del clima durante la implementación no favorecieron el desarrollo de la tarea. Las constantes lluvias y la ausencia de sol para el día programado hicieron que se cambiara el día de realización de la tarea, hasta tanto el clima fuese apropiado.

De otro lado, el trabajo en grupo fue una de las principales fortalezas encontradas. Este tipo de agrupamiento posibilitó un ambiente de aprendizaje en el que los estudiantes se sintieron cómodos expresando sus desempeños y dificultades. Cada uno de los grupos desarrolló una dinámica de trabajo particular, en la que sus integrantes asumieron roles específicos a la hora de resolver las tareas. Unos abordaron la construcción gráfica de la situación teniendo en cuenta las observaciones verbales del grupo; otros lideraron el proceso de solución a partir de sus destrezas en el ámbito matemático; y otros mostraron una especial atención en el dominio del Cabri-Geometri, elaborando representaciones y modelos que contribuyeron con la interpretación gráfica de los problemas. Esta organización permitió también elaborar discusiones alrededor de estrategias de solución para la tarea. Los procedimientos fueron evaluados de forma conjunta por los integrantes del grupo en un ejercicio de argumentación, permitiéndoles decidir por una técnica de solución específica, mediante acuerdos.

REFLEXIÓN

Una de las principales contribuciones que ha tenido esta experiencia fue el desarrollo de una visión mejorada y más compleja de los elementos de tipo didáctico con los que a diario trabajamos. El diseño y la planificación de tareas son aspectos que no presentaban ninguna posibilidad de discusión, más allá de cuestiones puntuales, inmersas en planes de estudios que ahora consideramos débiles en su fundamento didáctico.

Del mismo modo hemos desarrollado nuestra capacidad para lograr coherencia entre los objetivos de aprendizaje, las tareas que diseñamos para lograrlos y las actuaciones de profesor y estudiantes en el aula. Así, por ejemplo, cuando los estudiantes abordaron la tarea, lograron reconocer los elementos, relaciones y aplicaciones de las razones trigonométricas en un triángulo cualquiera, aplicándolos para la solución de la tarea. Esto se hizo evidente en el análisis realizado a uno de los instrumentos de observación implementados.

De otro lado, ha sido muy satisfactorio escuchar las reacciones de los estudiantes a la propuesta de implementación de las tareas. Ellos destacan, por ejemplo, cómo el uso de la calculadora y del goniómetro les permitió descubrir escenarios distintos a los convencionales y observar algunas de las aplicaciones de las razones trigonométricas fuera del aula con tareas no rutinarias.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arenas, F., Becerra, M., Morales, F., Urrutia, L. & Gómez, P. (2012). Razones trigonométricas. En Gómez, P. (Ed.), Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1 (pp. 342-414). Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1895/

Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/444/

Transición de lo tridimensional a lo bidimensional [Cuerpos redondos y no redondos]

*Jaison Fernando Ariza Ardila**
*Yeimy Rodríguez García***

RESUMEN

En el presente documento se expone la propuesta a partir de una serie de actividades estructuradas en una unidad didáctica titulada **Transición de lo tridimensional a lo bidimensional [Cuerpos redondos y no redondos]**, gestionado en un Instituto Educativo Distrital, con el fin de potenciar el pensamiento geométrico espacial, en estudiantes de grado cuarto. Se presentan situaciones variadas, creativas y manipulativas con el fin de captar el interés del estudiante por aprender y fomentar la confianza en sus capacidades.

** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: yeimy.rodriguez111@yahoo.com
* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: jaison.punk@hotmail.com

CONTEXTUALIZACIÓN

Para la experiencia de aula, se diseña una unidad didáctica, centrada en el desarrollo del pensamiento geométrico espacial. Esta fue gestionada en la institución educativa distrital Juan del Corral (I. E. D. Juan del Corral), con estudiantes del grado 4 de Educación Básica Primaria. La unidad didáctica aborda determinados aspectos de la geometría tridimensional que son apropiados para alumnos de 8 a 11 años de edad. Se presentan situaciones variadas, creativas y manipulativas con el fin de captar el interés del estudiante por aprender y fomentar la confianza en sus capacidades.

REFERENTES TEÓRICO-PRÁCTICOS BÁSICOS

A través de la historia, el hombre se ha movido en un espacio y ha hecho uso de él; son muchos los autores que han escrito al respecto; para el caso, se tienen en cuenta principalmente los aportes dados por Alsina Claudi y Dickson Linda, autores que tratan la geometría desde el punto de vista disciplinar y pedagógico. Cuando se observa, desde el punto de vista de la geometría, por ejemplo, una figura tridimensional, como un cubo, la atención debe centrarse en su forma y disposición de sus caras, aristas y vértices. Dicha exploración es simplemente visual, pero si se acompaña de una manipulación o construcción del objeto, la comprensión de la estructura (percepción espacial) es más completa (Alsina, C., 1989. P: 15).

Alsina (1997) plantea que la enseñanza de la geometría no necesariamente debe hacerse de manera secuencial, ordenando las dimensiones en 1D, 2D, 3D, como usualmente se hace en la escuela, sino que en función a la situación a analizar y el aspecto a resaltar se determina con qué dimensión es apropiado iniciar el estudio de la geometría.

Desde los lineamientos curriculares (1996), se sugiere que para la enseñanza de la geometría se deben tener en cuenta los niveles propuestos por Van-Hiele, de los cuales solo los dos primeros nos atañen:

- *Nivel 1 (básico) visualización o reconocimiento.* En este nivel los niños perciben las figuras como un todo, o sea de manera global; por lo tanto no reconocen las partes que lo conforman ni sus propiedades geométricas; sin embargo, los niños pueden producir una copia de cada figura particular o reconocerla. Igualmente en este nivel hacen un manejo básico del lenguaje matemático.

El nivel 1, aplicado a la secuencia de actividades, se ve reflejado cuando el niño observa un cubo y lo reconoce inmediatamente, se sabe su nombre, nombra su color y es capaz de identificarlo en algunos objetos del medio, pero ignora que dicho cubo es también un prisma rectangular, que tiene 2 bases cuadradas, 4 caras cuadradas, 12 aristas y 8 vértices. Es decir, que no logra percibir sus componentes, ya que lo ve como un todo.

- *Nivel 2: análisis.* Donde los niños reconocen que las figuras geométricas están formadas por partes y elementos y que están dotadas de propiedades matemáticas sin llegar a relacionarlos, de tal manera que no hacen explicaciones ni interrelaciones entre las figuras.

Aplicando este nivel a la secuencia didáctica, podría decirse que al momento en que al niño se le presentan ciertas figuras tridimensionales, él es capaz de identificar algunos de sus componentes como por ejemplo decir que una pirámide triangular tiene una base cuadrada, 4 caras en forma de triángulo, 8 aristas…, pero al momento de llegar a la clasificación y relación con otras figuras no lo logra, es decir, que no identifica similitudes y diferencias entre figura y figura de manera clara y precisa.

Teniendo en cuenta los anteriores niveles se plantean las siguientes fases por las que tienen que pasar los estudiantes:

- *Fase 1, Interrogación (información): el profesor y los estudiantes se dedican a conversar acerca de las actividades sobre los objetos de estudio; en este nivel se hacen observaciones, surgen preguntas y se introduce un nivel específico de vocabulario. El propósito de estas actividades es doble: el profesor aprende sobre el conocimiento previo que traen los estudiantes acerca del tema que van a abordar, y los estudiantes determinan en qué dirección se va a trabajar el tema a tratar.*

- *Fase 2, Orientación dirigida: los estudiantes exploran el estudio a través de los materiales que el profesor ha ordenado cuidadosamente. Estas actividades deberían revelarles gradualmente a los estudiantes las estructuras características de este nivel (Alsina, C., 1989. P: 87).*

Desde la didáctica, el profesor Alsina [1997] utiliza apartes de los niveles de Van-Hiele para sustentar su teoría; algo en lo que coinciden es que el aprendizaje de la geometría debe ser de lo tridimensional a lo bidimensional, haciendo uso de los sentidos: observar, tocar, manipular…: *"la geometría como estudio de la visualización, medidas y construcción de figuras" (Dickson, L., 1991),* resaltando así un primer nivel de gran importancia para la experiencia.

Para la enseñanza de formas geométricas, después de revisar documentos y referentes didácticos, se establece un orden que va de lo tridimensional a lo bidimensional, ya que al estimular la lógica tridimensional en los niños por medio de los sentidos, adquieren habilidad y construyen su propio conocimiento a través del descubrimiento y exploración, tridimensionalidad que puede ser vista en la realidad próxima a las personas.

La metodología que se aplica corresponde a lo propuesto por el grupo DECA (1992), que propone una secuenciación de actividades en cuatro fases:

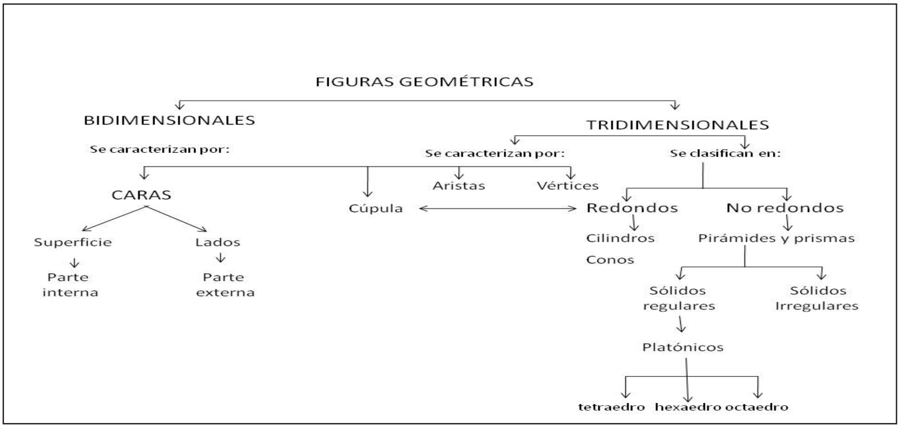
- *Introducción*. Actividades de conocimiento e identificación de las nociones que traen los estudiantes con respecto al concepto a trabajar.
- *Reestructuración*. A partir de los resultados obtenidos se hace una serie de actividades para explicar conceptos.
- *Profundización*. Se amplía lo explicado reforzando los conceptos centrales
- *Institucionalización*. Se corrobora que la secuencia de actividades diseñada sí haya generado un aprendizaje en los estudiantes.

DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA EXPERIENCIA DE AULA

Se propone una unidad didáctica, que es gestionada en un colegio distrital, en grado 4 de la Básica Primaria; en esta se abordan determinados aspectos de la geometría; se trabajan los ejes: formas y espacio, y resolución de problemas, centrándose en el estudio de cuerpos geométricos redondos y no redondos, fundamentalmente el cono, el cilindro, la pirámide de base cuadrangular y el prisma recto; se caracterizan, comparan, se hacen sus representaciones planas desde diferentes puntos de observación y se arman usando redes. Esto como una forma de lograr el paso de lo tridimensional a lo bidimensional.

Tomando como referentes los estándares curriculares de competencias en matemáticas (2006), se determina entonces la temática que se desarrolla en la unidad didáctica: la comparación y clasificación de figuras tridimensionales redondas (conos y cilindros) y no redondas (pirámides triangulares y prismas restos) de acuerdo con sus componentes (caras, aristas, vértices, bases, cúspide…) según corresponda. También se trabajará la construcción de dichas figuras a partir de representaciones tridimensionales, y bidimensionales a través de figuras tridimensionales, lo que permite que los niños identifiquen relaciones de semejanza y diferencia entre figuras. Para que fuera posible la implementación y aplicación de la propuesta, fue necesario documentarse en teorías didácticas en la enseñanza de la geometría y en la ampliación del objeto matemático.

En el siguiente ideograma, se observan los componentes en geometría que orientan la propuesta didáctica:



LOGROS Y DIFICULTADES EVIDENCIADAS

Dentro de la experiencia se desarrolló una serie de logros con el fin de superar dificultades dentro de las cuales se encuentra la mencionada por Alsina (1997, pág. 92) como síndrome de planitud que se caracteriza porque el estudiante no está en capacidad de representar figuras tridimensionales en lo plano, y viceversa; respecto a esta dificultad, se desarrollaron habilidades a través de la práctica por medio de la observación, la caracterización y la representación de figuras en dos y tres dimensiones. Se observan avances en cuanto a la caracterización de cuerpos geométricos: tras la aplicación de la secuencia de actividades los alumnos superan el síndrome de planitud y avanzan al nivel II de Van Hiele, es decir que analizan cuerpos geométricos, los describen y caracterizan haciendo uso del lenguaje matemático.

REFLEXIÓN FINAL

La aplicación de la secuencia didáctica fue pertinente, ya que se tuvo en cuenta el conocimiento previo de los estudiantes, y con esto se planteó una secuencia de actividades que se enlazaran entre sí y que se lograra a cabalidad lo que se pretendía (paso de lo tridimensional a lo bidimensional y viceversa). Todo esto apoyado en la utilización de referentes nos permitió soportar la secuencia de manera teórica combinando un saber con las políticas educativas de la actualidad y la didáctica. El uso de materiales concretos permitió que las clases se desarrollaran de manera más dinámica facilitando la metodología propuesta en cada uno de los diseños, además de los beneficios en la enseñanza de la geometría a través de objetos manipulativos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C. (1997). ¿Por qué geometría? En C. Alsina, *propuestas didácticas para la ESO* (págs. 60-90). Madrid: Síntesis.

Alsina, C. (1991.). *Materiales para la construcción de la geometría.* Madrid: Síntesis.

Alsina, C., Burgués, C., & Fortuny, J. M. (1989). *Invitación a la didáctica de la geometría.* Madrid: Síntesis.

Dickson, L. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* Madrid: Labor.

GRUPO DECA. (1992). "Orientaciones para el diseño y elaboración de actividades de aprendizaje y de evaluación". En: *Revista AULA*, N.° 6, Septiembre.

MEN. (2006). *Estándares básicos de calidad para el área de matemáticas*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio

MEN. (1996). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas.* Santa Fe de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN (2007), *Alcaldía mayor de Bogotá DC: Colegios públicos de excelencia para Bogotá, orientaciones curriculares para el campo de pensamiento matemático.*

Explorar y descubrir para conceptualizar: ¿qué es un poliedro?

*Juan Alberto Barboza Rodríguez**
*Judith del Carmen Bertel Behaine***

RESUMEN
Esta experiencia abordó la problemática relacionada con el aprendizaje y la enseñanza de la geometría y en particular, el proceso de conceptualización y formulación de definiciones de objetos geométricos como los poliedros. El propósito de esta experiencia enmarcada en la Metodología Estudio de Clase (MEC) es el de planificar y orientar una clase que favorezca en los estudiantes la construcción del concepto de poliedro, desde principios pedagógicos y didácticos pertinentes y válidos.
Su pertinencia radica en la generación de ambientes de aprendizaje alternativos, que privilegian la construcción de conocimiento desde la interacción; además, se favorece el proceso de conceptualización tan importante en el desarrollo del pensamiento y las competencias matemáticas.

Palabras-clave: gestión del aula, metodología estudio de clase, explorar, conceptualizar, poliedro.

* Magister en Educación con énfasis en cognición-matemática, miembros del grupo de investigación Acción de Acompañamiento Académico. Universidad de Sucre. Dirección electrónica: baroja7@hotmail.com

* Magister en Educación con énfasis en cognición-matemática, miembros del grupo de investigación Acción de Acompañamiento Académico. Institución Educativa La Unión. Dirección electrónica: judithbertel@hotmail.com

CONTEXTUALIZACIÓN

Esta actividad se inició con la conformación de un grupo de trabajo institucional en torno a la Metodología Estudio de Clase -MEC- en la I. E. Francisco José de Caldas, en el marco del curso B-Learning ofrecido por el MEN en el año 2010. Durante la fase de indagación y planificación, el equipo reflexionó sobre los factores que están incidiendo en las dificultades de los estudiantes para conceptualizar y formular definiciones de objetos geométricos, y sobre los bajos desempeños que se presentaron en relación con el pensamiento espacial y geométrico evaluado en las pruebas Saber 2009. De igual forma, el equipo observó y caracterizó eventos de clase que evidenciaban la problemática objeto de la clase planteada en el marco de la MEC, para luego consolidar el tema seleccionado: los poliedros, y la pregunta problematizadora: ¿Cómo planificar y orientar una clase en geometría que favorezca en los estudiantes la construcción del concepto de poliedro? De acuerdo con lo anterior, se diseñaron las actividades, guías y materiales a utilizar en la clase, desde los referentes teóricos estudiados, particularmente lo propuesto en el modelo Van Hiele.

En la fase de ejecución se implementó y observó en tres sesiones la clase planificada; cada una de ellas se centró en el trabajo en equipo en torno a dos guías de actividades: el uso de materiales manipulables y las TIC. Finalizada cada una de las tres sesiones se hizo la revisión y retroalimentación del trabajo adelantado (reconocimiento de la pertinencia de las acciones emprendidas y ajustes a realizar para afianzar los objetivos propuestos), a partir de los protocolos empleados para la observación de la clase.

Para el año 2012, se inicia un proceso académico para replicar la experiencia en la I. E. La Unión, del municipio de Sincelejo, con la participación de los docentes que orientan el área de matemáticas en el grado octavo, el cual actualmente se viene desarrollando y sistematizando, bajo el apoyo del grupo de investigación Acción de Acompañamiento Académico.

REFERENTES TEÓRICO-PRÁCTICOS BÁSICOS

Las perspectivas teóricas que sustentan esta experiencia se centran en los principios del modelo de enseñanza Van Hiele, propuestos por Alsina Catala, Fortuny Aymemi, Pérez Gómez (1997), en el cual se asumen como fases de enseñanza: información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre, e integración.

En este modelo el profesor cambia el papel de expositor que comúnmente se le atribuye y toma un papel de coordinador de los trabajos.

Por otra parte, se asumen principios importantes para el aprendizaje de la geometría como el razonamiento informal, razonamiento visual, razonamiento formal, los contraejemplos, la predicción y la conjeturación.

Según los Lineamientos curriculares para el área de matemáticas (MEN, 1998), se plantea que los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio, tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento. Esta construcción se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que avanza desde un espacio intuitivo o sensorio-motor (que se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, etc.), a un espacio conceptual o abstracto, relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas, tomando sistemas de referencia y prediciendo los resultados de manipulaciones mentales.

Sobre la conceptualización, Samper de Caicedo, Camargo Uribe y Legazimón de Bernal (2003) manifiestan que las actividades dirigidas a favorecer la formación de conceptos geométricos también favorecen el desarrollo del razonamiento a través de las interacciones de los estudiantes, así como la apropiación de un lenguaje especializado, y el establecimiento de relaciones entre conceptos, lo cual permite la ampliación de la imagen conceptual del objeto geométrico en particular y de otros que el estudiante conoce.

Ahora, si el interrogante que mueve esta experiencia es: ¿Cómo planificar y orientar una clase en geometría que favorezca en los estudiantes la construcción del concepto de poliedro?, sin duda sus respuestas plausibles deben generarse desde los referentes anteriormente presentados y desde otros que estén en la misma dirección y perspectiva.

DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA EXPERIENCIA DE AULA

El problema que se abordó con este estudio de clase se centra en la poca importancia que desde la enseñanza de la geometría se le da al proceso de conceptualizar y definir, lo cual se evidencia en las prácticas de enseñanza de corte transmisionista en las cuales el docente expone la definición y la relaciona con representaciones o ejemplos, limitando la posibilidad de que el estudiante asuma un rol activo y constructivista. Este tipo de situaciones ha traído como consecuencia que los estudiantes no se apropien de conceptos básicos de la geometría o que en su defecto solo lleguen a memorizarlos sin comprenderlos.

En relación con lo anterior y asumiendo una mirada crítica sobre la enseñanza de la geometría, el equipo de la MEC de la I. E Francisco José de Caldas inició un procesos de discusión sobre este tema, especialmente motivados por los bajos resultados que se aprecian en geometría, evidenciados en las actividades de las clases, los desempeños de los estudiantes y los resultados de las pruebas Saber 2009, según los cuales la institución es débil en el componente geométrico-métrico en los grados 5º y 9º. Ante esta realidad se planteó el siguiente interrogante:

¿Cómo planificar y orientar una clase en geometría que favorezca en los estudiantes la construcción del concepto de poliedro?

LOGROS Y DIFICULTADES

Dentro de los principales resultados evaluados y observados por el equipo MEC en relación con el estudio de clase desarrollado, se tienen:

Como logros:

- Se privilegió el uso y construcción de materiales manipulables y con ellos los proceso de exploración, descubrimiento y conceptualización, así como también el trabajo de grupo cooperativo.
- Se evidenciaron en los diferentes grupos amplias discusiones sobre matemáticas, donde aparecieron los cuestionamientos y conjeturas alrededor del concepto de poliedro.
- Fue importante el proceso de justificación del pensamiento y las ideas propuestas.
- Se promovió el proceso de escribir y usar el lenguaje matemático en las diferentes actividades de la clase.
- El desarrollo de la clase desde el abordaje de la pregunta ¿Qué es un poliedro?, contribuyó desarrollar la solución de problemas como enfoque de enseñanza
- Se asumió una propuesta didáctica, centrada en principios pedagógicos pertinentes para el aprendizaje de la geometría, como lo constituye el

modelo Van Hiele.

- Se privilegiaron los principios del NTCM que expresan: "Enseñar capacidad matemática requiere ofrecer experiencias que estimulen la curiosidad de los estudiantes y construyan confianza en la investigación, la solución de problemas y la comunicación". "Los conceptos de geometría y medición se aprenden mejor mediante experiencias que involucren la experimentación y el descubrimiento de relaciones con materiales concretos".

Como dificultades:

- Al iniciar el proceso, la resistencia en algunos decentes del área de matemáticas para asumir comprometidamente el reto, lo que fue superándose en la medida que se interactuaba y se construía la experiencia desde y la metodología MEC.
- Limitado número de computadores para el trabajo planificado.

Para determinar los anteriores logros y dificultades, se diseñó un protocolo de observación y evaluación para valorar las fortalezas y debilidades de lo realizado, atendiendo a los siguientes criterios:

- Metodologías empleadas para el desarrollo de la clase.
- Interacciones profesor-estudiantes.
- Interacciones estudiantes-estudiantes.
- Desarrollo de los aprendizajes en los estudiantes.
- Materiales y recursos utilizados.
- Proceso de evaluación.
- Alcance de objetivos/metas.
- Motivación, interés y participación de los estudiantes.

REFLEXIÓN FINAL

Dentro de este proceso de formación y cualificación docente que está inmerso en la MEC, es importante resaltar las lecciones aprendidas en la realización de la experiencia ¿qué es un poliedro?, en los diferentes aspectos y componentes que se impactan:

- Formación de docentes y fortalecimiento de las prácticas pedagógicas. La MEC propicia espacios para la investigación e innovación en la enseñanza de la matemática y abre escenarios de reflexión pedagógica que potencian la consolidación de comunidades académicas institucionales de docentes que se forman colectivamente y transforman sus prácticas pedagógicas.

- Aportes para el fortalecimiento institucional. La MEC contribuye a que estudiantes, profesores y directivos establezcan compromisos institucionales para fortalecer el trabajo en equipo y fomentar la política institucional.
- Desarrollo de competencias en los estudiantes. La MEC promovió procesos de enseñanza en los cuales los estudiantes interactuaron con materiales manipulables y recursos tecnológicos, y permitió que exploraran, descubrieran y construyeran conocimientos sobre los poliedros y argumentaran sus ideas partir del lenguaje matemático en las diferentes actividades de la clase.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C; Fortuny, J; et al. (1997) ¿Por qué geometría?, Propuesta didáctica para la ESO. Editorial Síntesis. Madrid.

Godino, J.; Ruiz, F. (2002). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Samper, C.; Camargo, L. et al. (2003). Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría. Grupo Editorial Gaia. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional (2009). Curso b-learning en metodología estudio de clase para los docentes de las áreas de ciencias y matemáticas. Módulo Materiales de apoyo. MEN. Bogotá

Ministerio de Educación Nacional (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. Cooperativa Editorial Magisterio. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional (1998). Matemáticas. Estándares de competencias básicas. MEN. Bogotá.

Experiencia de aula: adición y sustracción de números enteros

*Oscar José Becerra Muñoz**
*Maritza Ruth Buitrago Villamil***
*Sonia Constanza Calderón Santos****
*Rodrigo Armando Gómez Angulo*****

RESUMEN

Nuestra experiencia de aula está basada en el diseño e implementación de una unidad didáctica que aborda los elementos que consideramos necesarios para la solución de las dificultades que los estudiantes de grado séptimo encuentran al resolver situaciones de adición y sustracción de números enteros. Presentamos la fundamentación del diseño de la unidad didáctica, seguido del análisis didáctico, la evaluación de la implementación, el balance de la experiencia y algunas reflexiones.

Palabras clave: Números enteros, expectativas de aprendizaje, resolución de problemas, análisis didáctico, sistemas de representación.

* IED San Antonio del Tequendama. Dirección electrónica: oscar_b85@hotmail.com
** IED Serrezuela. Dirección electrónica: marubuvi99@hotmail.com
*** Fundación Ideales – Gimnasio Santa Ana. Dirección electrónica: sonia.calderon@gimnasio-santaana.edu.co
**** Colegio Rochester. Dirección electrónica: denario@hotmail.com

DESCRIPCIÓN GENERAL

Diseñamos una unidad didáctica en la que de manera progresiva, los estudiantes adquirieran destrezas y habilidades matemáticas, superaran errores en el manejo de la adición y sustracción entre números enteros y finalmente lograran la solución de situaciones problema con el uso de estas operaciones. De acuerdo con ello, la unidad didáctica incluyó una prueba diagnóstica, cinco tareas y un examen final en los que se esperaba el logro de tres objetivos propuestos relacionados con el uso de vocabulario específico, la justificación de procedimientos necesarios para la solución de adiciones y sustracciones y la interpretación y solución de situaciones de la vida real que involucren estas operaciones.

CONTEXTO

El diseño de la unidad didáctica implementada está enmarcado en los requerimientos descritos para el grado séptimo de los estándares básicos de competencias en matemáticas (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006) y se ajusta al plan de área propuesto en la institución educativa.

Nuestra unidad didáctica fue implementada en la Fundación Ideales-Gimnasio Santa Ana que es una institución educativa privada, ubicada en el norte de Bogotá y de carácter femenino. El promedio de estudiantes que se maneja por curso oscila entre 14 y 16 niñas.

Durante la implementación se desarrollaron ocho sesiones de 90 minutos cada una, en las que se trabajó en tres tipos de agrupamiento distintos: grupos de 2 o 3 estudiantes, de manera individual o de forma grupal para realizar la socialización de las soluciones obtenidas.

La información que permitió obtener conclusiones se recopiló a partir de las observaciones registradas en el diario del profesor, extrayendo información de la prueba diagnóstica realizada al iniciar la implementación y revisando los diarios de las alumnas, el cuestionario individual de evaluación y el examen final.

REFERENTES TEÓRICO-PRÁCTICOS

Con el análisis didáctico, compuesto por cuatro análisis —contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación—, el profesor puede diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas (Gómez, 2007). A continuación, se presentan los análisis anteriormente mencionados.

Análisis de contenido

Con el propósito de que el profesor identifique y organice los conceptos y procedimientos asociados a un tema matemático concreto, el análisis de contenido (que tiene en cuenta la dimensión cultural donde se trabaja el tema) proporciona un conjunto de herramientas para analizar el contenido matemático desde la perspectiva de las matemáticas escolares (Gómez, 2007). Esas herramientas son denominadas "organizadores del currículo" (Rico, 1997) como la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología.

Describimos este análisis desde la perspectiva de los organizadores del currículo. Identificamos y relacionamos los elementos conceptuales y procedimentales de nuestro tema. De la misma manera, se hizo con los sistemas de representación verbal, simbólica, manipulativa y gráfica. Finalmente, identificamos los fenómenos asociados a la adición y sustracción de números enteros, las subestructuras matemáticas y los contextos numéricos que los organizan.

Análisis cognitivo

En el análisis cognitivo el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción del conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que componen las actividades de enseñanza y aprendizaje (Gómez, 2007).

Abordamos los objetivos propuestos para la unidad didáctica, las capacidades que pretendemos activar en los estudiantes y la contribución de estas para el desarrollo de su competencia matemática, las posibles formas de solución de las tareas propuestas, y las dificultades y errores que los estudiantes pueden presentar.

Análisis de instrucción

En el análisis de instrucción el profesor diseña, analiza y selecciona las tareas que constituirán las actividades de enseñanza y aprendizaje objeto de la instrucción (Gómez, 2007).

Describimos dos recursos utilizados en nuestra unidad didáctica: la sumadora de enteros y las fichas bicolores. La sumadora de enteros consiste en tres rectas numéricas paralelas, con una distancia específica entre ellas. El objetivo es que si representamos números enteros en las rectas de los laterales y trazamos una recta que una ambos números, esta recta corte a la recta numérica del centro en un número que es el resultado de la adición de los números representados inicialmente. Además de obtener resultados, este recurso permite su verificación.

Las fichas bicolores (rojas y negras) tienen valor absoluto igual a 1. Un color indica que la ficha representa un valor positivo y el otro color indica valor negativo.

Estos recursos se emplearon para la solución de algunas tareas en etapas específicas de cada sesión de clase, cumplieron la función de facilitadores en su solución, y permitieron la comprensión de procedimientos y la verificación de las respuestas obtenidas.

La unidad didáctica establece cinco tareas. El desarrollo de estas tareas se debe realizar en etapas y con el empleo de recursos y materiales. Estas etapas son comunes para todas las tareas dependiendo del recurso a utilizar.

Análisis de actuación

El análisis de actuación está vinculado a la evaluación, y en él, el profesor determina las capacidades que los estudiantes han desarrollado y las dificultades que se manifestaron hasta este momento. Se tratan algunos criterios, aspectos e instrumentos que permiten establecer en qué medida los estudiantes lograron los objetivos y en qué medida las tareas contribuyeron a las capacidades y competencias propuestas.

En lo concerniente a los instrumentos de evaluación, tratamos en primera instancia la evaluación informal que realizamos de manera cotidiana y habitual. Para esta evaluación proponemos instrumentos como parrillas de observación, preguntas específicas, diario del alumno y diario del profesor. En segunda instancia, consideramos que la evaluación específica, comprendida por la prueba diagnóstica, las tareas propuestas y el examen final, permite obtener información sobre el proceso de aprendizaje del estudiante para establecer su estado en relación con los objetivos propuestos.

LOGROS Y DIFICULTADES EVIDENCIADAS

En cuanto a los logros, puede concluirse que las tareas se presentaron en una secuencia coherente, que permitió a las estudiantes aplicar de manera progresiva los conceptos y procedimientos relacionados con la adición y sustracción de números enteros.

Por otra parte, los instrumentos utilizados para la recolección y análisis de datos permitieron constatar la efectividad de las tareas y del examen propuesto frente a las expectativas de aprendizaje (objetivos, capacidades y competencias); además, las parrillas de observación evidenciaron cómo cada una de las estudiantes en diferente medida logró los objetivos propuestos de acuerdo con la dificultad de las tareas.

Consideramos afortunado el uso del diario del profesor, pues permitió el registro de las situaciones presentadas durante el desarrollo de la implementación. De esta manera, fue posible apreciar las modificaciones en el número de sesiones en el tiempo previsto para cada etapa de las sesiones y en las instrucciones impartidas por el profesor, con el fin de que él pudiera realizar acciones en la siguiente sesión. Por otra parte, la lista de chequeo de la rúbrica de la tarea se constituyó como un instrumento de gran utilidad por su fácil manejo para la recolección de información. Además, la lista de chequeo de la parrilla de observación permitió constatar paso a paso los procedimientos realizados por las estudiantes y las diferencias de acuerdo con los caminos de aprendizaje previstos.

Dentro de las dificultades evidenciadas, observamos que es necesario poner mayor énfasis en la traducción desde la recta numérica a la expresión aritmética, aspecto que obstaculizó momentos específicos de las sesiones.

REFLEXIÓN FINAL

Consideramos que esta unidad didáctica presenta un gran potencial para implementaciones posteriores. El éxito se puede alcanzar por las siguientes razones:

La unidad didáctica se diseñó con base en un análisis didáctico profundo y detallado, ya que la aplicación de tareas contextualizadas favoreció la consecución de las expectativas de aprendizaje propuestas debido a que se logró cercanía entre las situaciones presentadas y la cotidianidad de las estudiantes.

Las tareas desarrolladas son contextualizadas puesto que fenómenos como el fútbol, el ciclismo y la temperatura, presentados desde el contexto de la adición y sustracción de los números enteros, lograron la puesta en marcha de tareas interesantes y llamativas para las estudiantes.

Se utilizaron materiales y recursos para su solución que, además de favorecer la comprensión de las situaciones expuestas, contribuyeron a la resolución de las tareas y tuvieron un alto grado de aceptación. Esto se puede constatar en la información recopilada en el diario del estudiante y en el cuestionario de individual de evaluación.

El agrupamiento de las estudiantes fomentó la interacción entre ellas, pues fortaleció su capacidad de argumentación para validar los resultados obtenidos durante las sesiones de trabajo, adquiriendo así destrezas en el planteamiento y resolución de problemas y logrando avances significativos en la modelización de las situaciones planteadas. En el cuestionario de evaluación se evidencia el aporte y el agrado que tales interacciones tuvieron para el desarrollo y la solución de las tareas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Becerra, O.; Buitrago, M.; Calderón, C.; Gómez, R.; Cañadas, María C.; Gómez, P. (2012). Adición y sustracción de números enteros. En Gómez, Pedro (Ed.), Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1 (pp. 19-75). Bogotá: Universidad de los Andes. 01 de mayo de 2012, de http://urlm.in/lzdx

Gómez, P. (2007). Capítulo 2. Análisis didáctico. Una conceptualización de la enseñanza de las matemáticas. En Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Gómez, P. & Cañadas, M.C. La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas. Universidad de Granada, España.

Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. (1ed.). Colombia. Imprenta Nacional de Colombia.

Rico, L. (1997). Concepto de currículo desde la educación matemática. En Autor (Ed.), Bases teóricas del currículo de matemáticas en Educación Secundaria (pp. 211-263). Madrid: Editorial Síntesis.

Método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2x2

*Mónica Liliana Bernal**
*Diana Paola Castro***
*Álvaro Andrés Pinzón****
*Yerly Fernando Torres*****
*Isabel María Romero*****

RESUMEN

La presente experiencia de aula expone los apartes del trabajo final elaborado por un grupo cuatro profesores de Bogotá y Cundinamarca en la concentración en Educación Matemática de la Maestría en Educación de la Universidad de los Andes. En esta experiencia se presenta el diseño, la implementación y la evaluación de la unidad didáctica titulada "Método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2x2", fundamentados a partir del procedimiento de análisis didáctico. La unidad didáctica se implementó en la Institución Educativa Compartir Bochica, en la ciudad de Bogotá.

Palabras clave: materiales manipulativos, expectativas de aprendizaje, sistemas de ecuaciones, análisis didáctico.

* IED Los Alpes. Dirección electrónica: molibeva@gmail.com
** IED General Santander. Dirección electrónica: dianapao29@hotmail.com.
*** IE Compartir Suba. Dirección electrónica: aapinzon.mat@gmail.com.
**** Colegio Parroquial San Lucas. Dirección electrónica: fernantotmateus@gmail.com,
**** Universidad de Almería. Dirección electrónica: imromero@ual.es

CONTEXTUALIZACIÓN

Tradicionalmente las prácticas de aula en las que se aborda la solución de sistemas de ecuaciones lineales hacen un especial énfasis en los métodos algebraicos, dejando poco o ningún espacio para el método gráfico. Considerando esta realidad, se determinó diseñar e implementar una unidad didáctica sobre este último método con el fin de potenciar capacidades que el método algebraico por sí solo no desarrolla en los estudiantes.

REFERENTES TEÓRICO-PRÁCTICOS

El diseño propuesto se centra en fortalecer el desarrollo de las competencias del estudio PISA, que se relacionan directamente con los procesos generales establecidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en los Estándares básicos de competencias (MEN, 2006). Rico (2005) indica que la competencia Modelar incluye que el estudiante: estructure el campo o situación que va a modelarse; traduzca la realidad a una estructura matemática; interprete los modelos matemáticos en términos reales: trabaje con un modelo matemático; reflexione, analice y ofrezca la crítica de un modelo y sus resultados; comunique acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones), y dirija y controle el proceso de modelización, por lo que la secuencia didáctica diseñada hace especial énfasis en el desarrollo de esta competencia en la solución de situaciones relacionadas con los sistemas de ecuaciones lineales por el método gráfico, ya que este método permite establecer una relación funcional de las variables y presentarlas de manera sistemática en una gráfica. En el estudio del foco de contenido se identificaron cinco sistemas de representación: verbal, simbólico, numérico, gráfico y ejecutable, y dos subestructuras matemáticas que organizan los fenómenos asociados a los sistemas de ecuaciones lineales; dichas subestructuras dependen de si existe o no una relación funcional entre las variables. A su vez, los fenómenos en los que se contextualizan las tareas fueron clasificados en tres contextos de acuerdo con la acción descrita por las variables: combinar, comparar e igualar. Finalmente, de acuerdo con la cercanía del estudiante con el ámbito de los fenómenos, estos se clasifican en situaciones personales, educativas o laborales, públicas y científicas.

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

La unidad didáctica fue diseñada para once sesiones con siete tareas enfocadas a la consecución de tres objetivos generales: (a) Aplicar el método gráfico para obtener puntos de corte entre rectas y la solución de sistemas de ecuaciones Lineales con dos incógnitas; (b) Comprender la noción de solución de un sistema lineal relacionando la existencia de única solución, infinitas soluciones o ninguna solución con la posición relativa de las rectas en el plano; y (c) Modelar gráficamente situaciones no rutinarias mediante sistemas de ecuaciones lineales estableciendo la relación funcional entre variables.

Dentro del diseño de la unidad didáctica, se construyó una tarea denominada "tarea transversal" contextualizada en el deporte Fórmula 1 y desarrollada en cada una de las sesiones. También se elaboraron dos tareas de transición entre objetivos.

Las tareas propuestas en la unidad didáctica presentan situaciones en las que se requiere que el estudiante realice traducciones entre los diferentes sistemas de representación, es decir, que describa un mismo objeto matemático utilizando lenguaje simbólico, verbal, numérico, gráfico o ejecutable. La siguiente figura muestra la relación entre las sesiones de clase, los objetivos y las tareas diseñadas.

Sesiones →	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11
Objetivos →	APLICAR			COMPRENDER			MODELAR				Ecuacartas
Tareas →	FR		SE		RP	ER		BC	CO/HE	GP	
Partes de	GRAN PREMIO DE BRASIL										Examen
la tarea →	MOTIV	P	E	E	E/R	R	R	R	R	R	
transversal	Planteamiento (P)			Ejecución (E)				Resolución (R)			

FR: figuras con 3 rectas; SE: sistemas equivalente; RP: rectas en el plano; ER: encontrando rectas; BC: bus y carro; CO: copias; HE: Heladería; GP: Gran premio de Brasil (tarea transversal).

Con la intención de amenizar ciertos procesos al momento de resolver las tareas, motivar al estudiante y establecer relaciones y conexiones entre los objetos matemáticos abordados, se diseñó material manipulativo y ejecutable para algunas sesiones. De esta forma, la unidad didáctica incluye tareas en las que se utilizan acetatos superpuestos, una plantilla en Excel, el uso del software Geogebra y un juego llamado Ecuacartas.

La unidad didáctica se implementó durante tres semanas en el Colegio Compartir Bochica de Bogotá, en un grado noveno con estudiantes de edades que oscilaban entre los 15 y 17 años, organizados en parejas mixtas, niño-niña. El grupo estaba compuesto por 44 estudiantes, 24 mujeres y 20 hombres

LOGROS Y DIFICULTADES

El análisis de datos se centró en las estrategias de resolución y el logro de aprendizaje de los estudiantes al desarrollar cada tarea. También se identificaron las capacidades que permitieron el alcance de los objetivos.

En primer lugar se analizó el desarrollo de las tareas, seguido de la valoración en el alcance de los objetivos por parte de los estudiantes a partir de la información obtenida con los siguientes instrumentos:

- grabaciones de vídeo,
- diario del profesor,
- entrevistas informales, y
- diario del estudiante.

Las grabaciones de vídeo brindaron un panorama global de las dinámicas grupales, estrategias de resolución de algunos grupos y actuaciones de los estudiantes que no se pudieron identificar con los otros instrumentos. El diario del profesor integró las estrategias utilizadas por los estudiantes y las capacidades no previstas en la planeación. El diario del estudiante permitió complementar la información registrada por el profesor en su diario y lo registrado en los vídeos.

En el desarrollo de las primeras cuatro tareas se evidenció cierta dificultad de los estudiantes para asociar dichas actividades con la tarea transversal. Esta relación no era explícita por lo que fue necesario hacer una actividad de refuerzo y así resaltar que cada actividad desarrollada tenía elementos que podían contribuir al desarrollo dela tarea transversal, lo cual generó posteriores relaciones con las demás actividades. El trabajo con conceptos como velocidad, distancia y tiempo también favoreció el desarrollo de dicha tarea.

Respecto al uso de material manipulativo y ejecutable, los estudiantes mostraron mayor motivación en la manipulación de los acetatos superpuestos. El uso de Geogebra proporcionó una visión más dinámica del plano cartesiano permitiendo realizar rotaciones, traslaciones y reflexiones tanto de rectas como del plano mismo.

Referente al alcance de los objetivos, encontramos lo siguiente:

Objetivo 1. Aplicación del método gráfico. Los estudiantes no presentaron mayores dificultades en la resolución de las tareas. Como parte de los hábitos desarrollados en los temas previos (función lineal, ecuaciones de primer grado con una incógnita), 90% de las parejas representaron los sistemas de ecuaciones, activando una primera capacidad que consistía en realizar una tabla de valores para luego trazar las rectas; pocos hicieron uso de la relación entre los parámetros de una ecuación y su gráfica.

Objetivo 2. Comprensión del método. Es justo mencionar que el 60% de los estudiantes lograron relacionar el número de soluciones con la posición relativa de las rectas. Centraron su atención en hallar siempre "una solución", sin considerar relevante la disposición de las rectas. En cambio, les resultó relativamente fácil comprender la equivalencia de sistemas.

Objetivo 3. Modelación. Los resultados obtenidos fueron bastante variados. Desde aquellos en los que los estudiantes solo lograron plantear las ecuaciones sin interpretarlas como un sistema, hasta aquellas parejas que lograron solucionar una situación abierta haciendo uso del método gráfico.

Los siguientes son los resultados encontrados al evaluar la solución de la tarea Gran Premio de Brasil F1:

- 100% de los grupos identificó las variables que intervienen en la tarea del Gran Premio de Brasil Fórmula 1.
- 40% logró proponer sistemas de ecuaciones a partir de la información recogida, y de ellos el 50% lo hace de forma estándar.
- 80% asoció la pendiente de la recta con la velocidad de los autos.
- 40% sustituyó valores en las ecuaciones para formar una tabla.
- 30% de los grupos usó el método gráfico para solucionar la tarea y de ellos el 20% usó adecuadamente escalas numéricas para representar las velocidades de los autos.

Pero no solo se obtuvieron resultados relacionados con los tres objetivos. También se observó que los estudiantes desarrollaron habilidades que facilitaron el trabajo cooperativo relacionado con la asignación de responsabilidades y la dinámica de participación; desarrollaron capacidades relacionadas con simplificación de modelos físicos, como el concepto de velocidad en el desarrollo de las tareas Bus y carro, y Gran Premio de Brasil. La representación lineal de la velocidad representó un verdadero reto para varias parejas. También fueron evidentes dificultades al ignorar o tener que promediar aceleraciones y desaceleraciones que se dan en competencias como la Fórmula 1.

El trabajo desarrollado por las parejas mostró compromiso e interés por las tareas. Las presentaciones de sus soluciones a la tarea transversal evidenciaron creatividad y motivación por hacer el trabajo lo mejor posible; se identificaron con facilidad los roles que se asumieron en las parejas

Por último, los estudiantes manifestaron dificultades con la activación de capacidades, relacionadas con la sistematización de la información. En la tarea transversal los datos dados no eran suficientes para su solución y se requería consultar y discriminar más información numérica —por ejemplo, establecer las distancias que separan los carros al partir—.

REFLEXIONES FINALES

El análisis didáctico permitió diseñar una unidad estructurada y coherente. Las expectativas de aprendizaje cubren el foco de contenido y abordan el estándar curricular seleccionado: Identifica diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales. La secuencia de tareas pone en juego los diferentes sistemas de representación del tema, los contextos a partir de su estructura semántica, las situaciones y competencias propuestas en PISA.

Por otra parte, se propuso una representación denominada "Espina de pescado" la cual consideramos útil para el profesor en el momento de relacionar los caminos de aprendizaje para la solución de las tareas, los posibles errores y las posibles actuaciones del maestro. Además, el material elaborado y el software utilizado cumplieron con la intención y expectativas propuestas en la fase de diseño de la unidad didáctica.

Es valioso mencionar que el diseño de la unidad didáctica representa una novedad en su género, pues vincula dos tipos especiales de tareas: de transición entre objetivos y transversal. Las capacidades relacionadas en estas tareas abordan principalmente la competencia Modelar. El desarrollo de estas tareas se facilitó por la forma en que la tarea transversal fue pensada, pues retoma las capacidades desarrolladas en otras tareas para luego aplicarlas en un contexto real y abierto para que el estudiante modele situaciones como la velocidad de móviles con sistemas de ecuaciones lineales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bernal, M. L., Castro, D. P., Pinzón, Á. A., Torres, Y. F. & Romero, I. (en prensa). Método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2x2. En P. Gómez (Ed.), Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1 (pp. 200-260). Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1893/

Institución Educativa Compartir Bochica (2010). PEI: Formación en valores y en empresa para el desempeño en sociedad. Bogotá DC, Colombia: Autor.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En MEN (Ed.) Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas (pp. 46 – 95). Bogotá DC, Colombia: MEN.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998). Matemáticas. Lineamientos Curriculares. Bogotá DC, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Rico, L. (2005). La competencia matemática en PISA. Conferencia impartida en el VI Seminario de Primavera: la Enseñanza de las Matemáticas y el Informe PISA. Madrid, España.

Skovsmose, O. (1999). Hacia una filosofía de la educación matemática crítica. Bogotá: Una Empresa Docente.

"La liga de Cálculo I"
Una experiencia pedagógica y significativa en la Universidad Tecnológica de Bolívar

*Eder Antonio Barrios Hernández**

RESUMEN

El siguiente trabajo tiene como propósito describir el proyecto "La liga de Cálculo I", una experiencia pedagógica y significativa aplicada a estudiantes del primer semestre de la Universidad Tecnológica de Bolívar (Cartagena). La estrategia se viene aplicando desde el primer periodo de 2009 a los estudiantes de las carreras de Ingenierías, Ciencias Económicas y Negocios. El estudio también muestra los resultados obtenidos semestre tras semestre hasta el 2º período de 2011. El proyecto pertenece a la línea de investigación Didáctica de la Matemática cuyo grupo de investigación es el grupo GIIE (Grupo de Investigación e Innovación Educativa).

Palabras clave: Ligas de Cálculo I, experiencia pedagógica y significativa, procesos cognitivos, dificultades, errores.

* Magíster en Educación – Cognición Matemática. Institución: Universidad Tecnológica de Bolívar. Dirección electrónica: ebarrios@unitecnologica.edu.co

INTRODUCCIÓN

El siguiente trabajo tiene como propósito describir la estrategia pedagógica "La liga de Cálculo I" como una experiencia pedagógica y significativa que se aplica desde el 2009 a los estudiantes que cursan el primer semestre en la Universidad Tecnológica de Bolívar. El estudio también muestra los resultados que se han obtenido semestre tras semestre hasta el segundo período de 2011. La estrategia tiene como objetivo contribuir con el mejoramiento del rendimiento académico de los estudiantes de primer semestre de las facultades de Ingeniería, Ciencias Económicas y Negocios, a partir de la resolución de problemas y del fortalecimiento del pensamiento abstracto, lógico-matemático. Asimismo, la estrategia contribuye a disminuir la deserción universitaria, un fenómeno que cada día toma más fuerza en nuestro país.

La estrategia "La liga de Cálculo I" constituye una acción encaminada al mejoramiento de la formación inicial en matemáticas de los estudiantes de primer semestre de la Universidad Tecnológica de Bolívar en las carreras de Ingeniería, Ciencias Económicas y Negocios como una de las formas de apoyar las directrices de la Universidad de mejorar el rendimiento y elevar el nivel académico en estudiantes en matemáticas, y prevenir su retiro en los semestres posteriores. Además, la estrategia pretende atender en forma paralela a las dificultades que se presentan en el aprendizaje de determinados temas del curso de Cálculo I.

CUERPO DEL TRABAJO

Como bien se sabe, las matemáticas constituyen un vehículo mediante el cual tiene lugar el aprendizaje humano complejo. Así, esta ciencia hoy se enfoca hacia el desarrollo de las competencias necesarias para crear, resolver problemas, razonar, argumentar, establecer conexiones, y comunicar resultados.

Son muchas las dificultades que presentan los estudiantes del primer semestre de la UTB en el aprendizaje de esta disciplina; entre otras, podemos citar la confusión que tienen sobre la utilización de fundamentos aritméticos y algebraicos, como son las operaciones básicas y las propiedades de las mismas, y otros relacionados con el razonamiento lógico-matemático y la resolución de problemas, sin los cuales es muy difícil avanzar con éxito en el proceso de formación matemática que las diversas disciplinas exigen.

Investigadores como Arons (1979), Whimbey y Lochhead (1986), Montealegre (1992), Raths y colbs. (1997), Reyes (2004) afirman que un alto porcentaje de los estudiantes que ingresan a la universidad tiene deficiencias para razonar en operaciones formales, y para pensar en forma crítica y creativa. Dichas deficiencias han causado, en diferentes ámbitos, un descenso progresivo del desempeño académico de los estudiantes.

De hecho, para un gran porcentaje (80%) de estudiantes del primer semestre de la UTB la matemática se les convierte en una ciencia muy difícil y, por tanto, muy aburrida debido a su falta de comprensión de la misma como producto de sus falencias en la adquisición de las bases matemáticas. Hasta el año 2008, semestre tras semestre se había detectado que alrededor del 60% de los estudiantes que reciben este curso lo pierde, y un gran porcentaje cancela la asignatura.

En particular, durante el primero y segundo períodos del año 2008, un total de 663 estudiantes, distribuidos en 25 grupos iniciaron el curso de Cálculo I; los resultados en general fueron los siguientes:

Cancelaron la asignatura: 79 estudiantes (12%)

Aprobaron el curso: 222 estudiantes (38%)

Reprobaron la asignatura: 362 estudiantes (62%)

Esta problemática ha generado desde entonces un aumento considerable en la deserción estudiantil de la Universidad, pues, un determinante de la deserción estudiantil es el bajo rendimiento académico, y específicamente en los programas de Ingeniería, Economía y Negocios un determinante es el bajo rendimiento en las matemáticas.

Por consiguiente, dentro de los programas que ofrece la UTB para el fomento de la retención estudiantil, la facultad de Ciencias Básicas se propuso la gran tarea de diseñar y aplicar una estrategia pedagógica de acompañamiento a los estudiantes de Cálculo I conocida como "La liga de Cálculo I". La estrategia, de carácter obligatorio, consiste en un espacio de dos horas presenciales semanales durante todo el semestre donde profesor y estudiante interactúan desarrollando en la clase actividades previamente diseñadas y acordes con las necesidades del educando. Durante el desarrollo de una sesión de liga, se ejercitan contenidos y se aclaran dudas, se refuerzan conceptos básicos de las matemáticas elementales, necesarias como pre requisitos de las matemáticas superiores y el resto de disciplinas, y se desarrollan talleres y otras actividades evaluativas para los estudiantes.

La liga de Cálculo I posee una primera fase de 30 minutos aproximadamente donde se explica la temática a desarrollar mediante la solución de un problema propuesto. En el resto del tiempo se desarrollan actividades individuales y colectivas que propician los aprendizajes de los estudiantes y el trabajo colaborativo. Se orientan tareas para fortalecer el trabajo independiente de los estudiantes.

Las actividades evaluativas tienen un peso del 20% en la evaluación de cada cohorte de los estudiantes, y son programadas por el profesor que atiende el curso de Cálculo I.

Semanalmente los profesores de las ligas interactúan con los profesores del curso de Cálculo I para intercambiar experiencias y controlar el avance de la estrategia.

PROGRAMA DE ESTRATEGIAS Y ACTIVIDADES

Las actividades aquí propuestas propician el desarrollo del pensamiento abstracto y lógico-matemático que apoya al estudiante en su aprendizaje de razonar correctamente, proporcionándole esquemas de razonamiento formal. También estas actividades ayudan al estudiante en los fundamentos aritméticos y algebraicos, así como en el desarrollo de las diferentes operaciones encontradas:

La resolución de problemas

La actividad de resolver problemas ha sido considerada como un elemento importante en el desarrollo de las matemáticas y en el estudio del conocimiento matemático. En diferentes propuestas curriculares recientes se afirma que la resolución de problemas debe ser el eje central del currículo de matemáticas y, como tal, debe ser un objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática. En la medida en que los estudiantes resuelven problemas, adquieren confianza en el estudio de las matemáticas, y desarrollan una mente inquisitiva y perseverante, aumentando su capacidad de comunicarse matemáticamente y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel; esto es, las habilidades cognitivas y metacognitivas, es decir, las habilidades de pensamiento matemático (MEN, 1998; NCTM, 2001).

Uso de sistemas de representaciones en la enseñanza de conceptos matemáticos: sistema numérico, sistema algebraico, sistema gráfico, y sistema verbal

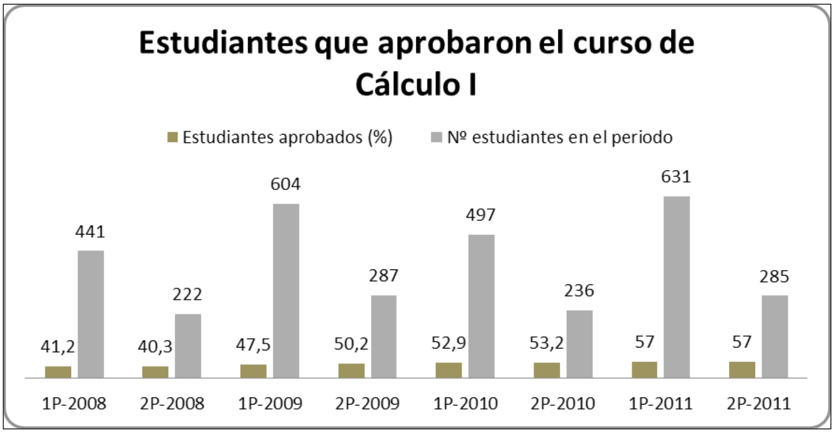
El uso de los sistemas de representación ha sido un eje transversal en la evolución en conceptos matemáticos y en los procesos de enseñanza y aprendizaje, debido a que estos son el medio de acceso a los conceptos matemáticos (Duval, 2004).

El uso de las tecnologías en la enseñanza de las matemáticas

La tecnología es un mediador en el proceso de la enseñanza y aprendizaje, y es fundamental, porque permite visualizar los diferentes sistemas de representaciones (algebraicos, numéricos o tabulares, gráficos y verbales), facilitando la exploración de objetos matemáticos y contribuyendo a la formulación y verificación de hipótesis, con la posibilidad de establecer una mejor correspondencia entre el universo visual y el numérico (Hitt, 1998; López, 2003).

Pensamiento espacial y visualización matemática

Para el desarrollo de esta estrategia, se tuvo en cuenta que "Las capacidades para percibir con exactitud el mundo visual, para realizar transformaciones y modificaciones a las percepciones iniciales propias y para recrear aspectos de la experiencia visual propia, incluso en ausencia de estímulos físicos apropiados, son centrales para la inteligencia espacial" (Gardner, 1999) y que "el pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico", según Hadamard y Einstein, que lo consideraban esencial para el pensamiento creativo en todos los niveles de las matemáticas.



Indicador 1. RESULTADOS

Gráfica 1

La gráfica 1 muestra el comparativo en porcentaje de estudiantes que aprobaron la asignatura de Cálculo I desde el primer semestre de 2009 en la cual se inició la estrategia "La Liga de Cálculo I" hasta el segundo período de 2011.

Indicador 2: Nivel de satisfacción de los estudiantes

Luego de aplicada la encuesta para evaluar el nivel de satisfacción de los estudiantes con la implementación de la estrategia "la Liga de Cálculo I", se obtuvo el siguiente resultado.

Gráfica 2

La gráfica 2 muestra el nivel de satisfacción de los educandos del primer semestre cuando se les aplicó la estrategia "La Liga de Cálculo I".

Fortalezas de la estrategia

- Se espera que la estrategia contribuya al mejoramiento del desarrollo del pensamiento abstracto y lógico-matemático de los estudiantes, reflejado en una mejora en el rendimiento académico y en la disminución en la deserción escolar.
- Fortalecimiento del estudio independiente del estudiante.
- Propicia el trabajo colaborativo de los estudiantes.
- Apropiación y fortalecimiento de la estrategia de resolución de problemas por parte de los estudiantes.
- Flexibilidad en el proceso de evaluación de los estudiantes.

- Incremento de la interacción entre profesores y estudiantes.
- Fortalecimiento del semillero de investigación de la Facultad de Ciencias Básicas de la UTB.
- Formación pedagógica y metodológica de potenciales profesores de matemáticas.

Debilidad de la estrategia

Para evitar un incremento del tiempo de estudio independiente del estudiante que afecte su desempeño en otros cursos el profesor debe contemplar claramente que al ser la asignatura de 4 horas presenciales (4 créditos = 8 horas de trabajo independiente = 12 horas total) el trabajo de las ligas debe estar inmerso dentro de las horas de trabajo independiente.

- El nivel en pedagogía y didáctica de los profesores de las ligas no es el adecuado para propender por una concepción integral del curso de Cálculo I, a pesar del seguimiento que se les hace y las actividades de formación en que participan.
- La condición de profesor catedrático-estudiante genera algunos problemas de disciplina e irrespeto por parte de algunos estudiantes.
- Existe un bajo nivel de compromiso de algunos estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Clements, D. H. & M. T. Battista (1989), "Learning of Geometric Concepts in a Lo-go Environment", Journal for Research in Mathematics Education, vol. 20, núm. 5, pp. 450-467.

Duval Raymond, (2004) Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Cali: Edición e impresión, Merlín I.

Guzman, j; Kieran, C & Squalli, H. (2003) La calculadora multilínea y el surgimiento de estrategias numéricas en alumnos de primero, segundo y tercer grado de secundaria. Revista de Educación Matemática. Vol. 15 No. 2 Editorial Santillana. México.

Gardner, H. (1983). Multiple Intelligences, Basic Books. Castellano "Inteligencias múltiples" ISBN: 84-493-1806-8 Paidos.

Ministerio de Educación Nacional. (1998) Lineamientos Curriculares. Serie Magisterio.1

National Council of Teachers of Mathematics –NCTM. Teaching Mathematics through problem solving, 2001.

El espantapájaros de las matemáticas

*Jeimy Marcela Cortés Suárez**
*Julieth Alexandra Pérez Luna***
*Lennin David López Castañeda****

RESUMEN

Esta es una experiencia de aula, trabajada desde la práctica como estudiantes para docentes de matemáticas,en la que se plantea una manera distinta de ver la matemática, y quitarles el miedo a los estudiantes de poder experimentar y aprender conocimientos que serán útiles en su futuro. El espantapájaros de las matemáticas, como su nombre lo dice, cumple la misma función que un espantapájaros de maíz: alejar a los pájaros, en este caso, el miedo y el rechazo que existe hacia las matemáticas, planteando al espantapájaros como un ser que también siente y desde su representación siempre está dispuesto a dar abrazos, al igual que las matemáticas siempre están dispuestas para quien quiera aprenderlas.

Palabras clave: gestión, rechazo, espantapájaros, interés.

* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: yemacosu@hotmail.com.
** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: julieta_enla_luna@hotmail.com
*** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: yiret42@gmail.com

CONTEXTUALIZACIÓN

La idea surge a partir de la primera sesión de clase, en la cual desde el principio los estudiantes de grado once de la localidad de Usme de Bogotá entre edades de 16-19 años estuvieron predispuestos para trabajar en la clase de matemáticas, pues desde su experiencia había sido algo aburrido y tedioso, sin alguna motivación que los condujera a interesarse por la materia y en especial por el trabajo de los practicantes.

Es por ello que desde la gestión como futuros docentes surge la idea de crear el espantapájaros, para cambiar la perspectiva de una clase, la cual permitió a los estudiantes expresar abiertamente sus pensamientos en relación con las matemáticas y en muchos casos también su opinión con respecto a los practicantes con los cuales trabajaban. Este espantapájaros en cada clase, antes de iniciar con la temática propuesta para la sesión, recibía toda clase de comentarios, opiniones y sentimientos de diversas problemáticas de sus vidasy de las matemáticas en general, lo que les permitió a los estudiantes crear una nueva expectativa acerca de los docentes de matemáticas y cambiar la visión de las clases tradicionales recibidas por mucho tiempo de matemáticas, por una clase que no solamente enseña conocimientos, sino también unos docentes que se interesan de sus problemáticas sociales, personales y de su crecimiento como personas.

REFERENTES TEÓRICO-PRÁCTICOS BÁSICOS

Teniendo en cuenta a Köniz (2000), el miedo es un mecanismo de defensa que desarrollan los seres humanos, así como lo es el dolor; no obstante, con el tiempo, por un mal manejo del mismo, puede crear trastornos en las personas que no les permitan desarrollarse correctamente dentro de una sociedad.

Ahora, el miedo es innato en todas las personas, nadie está exento de sentirlo, todo depende del buen manejo y su misma evolución ya que siempre estará en la vida el cual puede traer beneficios, y no no necesariamente reconocerlo como algo negativo ya que este permite e impulsa, hasta cierto punto en una emoción necesaria para lograr metas propuestas en cada individuo que se desarrolle en la sociedad, (Moana, 2006).

De acuerdo con lo anterior, el miedo mal usado puede llevarnos a crear fobias, las cuales tienen en su mayoría de los casos causas y motivos concretos tales como el rechazo de la sociedad o en este caso el que se puede generar dentro del aula de matemáticas (Köniz, 2000), Solórzano (2009) menciona unas fobias alrededor de las matemáticas que se desarrollan en el aula las cuales son

Matemafobia: habla de una persona que les tiene miedo a las matemáticas; eso es lo que se observa en nuestras aulas, en donde el docente debe ser un intermediario entre esta fobia y el saber que se quiere desarrollar en el alumno por medio de las matemáticas.

Haciendo énfasis en lo mencionado anteriormente, Rodríguez (2007) plantea algunas causas que llevan a que el estudiante desarrolle dicha fobia, entre ellas: pensar que la matemática es para inteligentes; no ven la importancia de su uso en la cotidianidad; los profesores y padres no utilizan situaciones cotidianas para acercar a sus alumnos o hijos a que se interesen por la matemáticas.

Basados en lo anterior, nosotros quisimos hacer una propuesta de aula la cual se llamó El espantapájaros de las matemáticas, como intermediador entre esta fobia y los saberes que conllevan las matemáticas, y de esta manera poder hacer real lo dicho por Albert Einstein:"Nunca consideres el estudio como un deber, sino como una oportunidad para penetrar en el maravilloso mundo del saber".

DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA EXPERIENCIA

En la propuesta,inicialmente se planteóconstruir un espantapájaros para los hombres y otro para las mujeres, pero teniendo en cuenta la igualdad de la sociedad se determinó que sería uno para toda la población, en la cual este espantapájaros representaría cada uno de los estudiantes y ellos tendrían que darle un nombre que los identificara con él, por lo que su construcción fue colectiva y cada estudiante aportó un elemento en su creación. Este cumpliría la función de confidente, pues los estudiantes estuvieron en la libertad de expresar todas sus ideas, sentimientos y opiniones, frente a su problemática social y personal que estuviera influenciando de manera significativo en su vida escolar, lo que les permitió abrirse a los practicantes y crear otro ambiente en el aula. Al iniciar cada clase, si ellos lo deseaban, comunicaban sus inquietudes, dificultades y demás al espantapájaros por medio de una nota que depositaban en el interior de una caja que estaba colgada de su pecho, y que fue el aporte de los practicantes; posteriormente se tomaba un tiempo de la clase y se abría la cajita con el fin de conocer las dificultades que se tenían específicamente con la clase y se resolvían de manera general. Allí aparecieron muchas notas con respecto a la relación que existía entre la filosofía y las matemáticas, dado que la clase de límites inicio desde lo filosófico y no con la definición formal de límite.

El manejo del espantapájaros fue enfocado a realizar una integración entre los practicantes y los estudiantes, permitiendo un mejor desarrollo de las temáticas propuestas en el curso, pues se creó un lazo de confianza, y no sucedió lo que pasa en muchas aulas, en donde por miedo al profesor no se hacen preguntas importantes con respecto al tema o se empieza a ver la matemática como algo alejado de su realidad; por el contrario, en este curso hubo una interacción estudiante-docente todo el tiempo, logrando atraer la atención de los estudiantes y desarrollar la temática, lo que era el objetivo principal de la propuesta.

LOGROS Y DIFICULTADES

El principal logro que se obtuvo con la propuesta del espantapájaros fue superar el paradigma que los estudiantes tenían con respecto a la clase de matemáticas, y en especial con sus docentes, pues la relación que se estableció entre ambas partes permitió el pleno desarrollo de la práctica, situación que se puede relacionar con la enseñanza que se tiene para docentes, ya que es a partir de esta que se crea el ideal del docente que forma no solamente para desarrollar un pensamiento matemático crítico, sino que es también un formador de personas, tarea para la cual es importante involucrarse con la realidad de cada contexto para poder desarrollar una propuesta que interese a los estudiantes y que, además, la vean reflejada en su cotidianidad.

Una pequeña dificultad que se tuvo fue relacionar en cierta medida el propósito del espantapájaros con las matemáticas, ya que como este permitía la expresión de los estudiantes no solamente en un contexto matemático, ellos encontraron este espacio agradable para expresar muchos sentimientos personales, lo que condujo a alejarse, en algunas ocasiones, del propósito de la temática que se estaba trabajando.

EVIDENCIAS

Principalmente, cada estudiante personificó el espantapájaros con un nombre, y clase tras clase se tenía una pregunta; inicialmente fue: ¿Cuál es su mayor temor frente a la vida? Se manifestó que se le pegaría al muñeco su nota, y si lo permitían los practicantes lo leerían; luego fueron surgiendo preguntas donde se consideraba importante el saber un poco de la historia de cada estudiante,lo que enfatizaba la importancia de que el docente considerara a sus estudiantes como personas, así como también que valorara al espantapájaros en el aula como persona. Con ello se logró que se interesaran en la clase, y la vieran como un espacio donde era vital el respeto, el dinamismo y su palabra.En ocasiones, al compartir las lecturas y poemas, y al debatirlas inicialmente,se introducían en el concepto matemático que se manejabaque era la noción de límite; así se resaltaba la importancia de reconocer que, desde el campo literario, el infinito como la existencia de uno va más allá, y cómo desde la vida y desde la cotidianidad un concepto tan abstracto como el límite se podía hilar con la idea de un muñeco existente desde nuestra imaginación. Uno de los logros más significantes en la práctica con un enfoque de gestión fue, a modo de anécdota, que el colegio Santa Marta hizo un simulacro de evacuación:todos salimos del salón, y con todo el grupo 11.01, también salió el espantapájaros;ahíse pudo notar cómo un simple objeto puede significar más trascendencia en la vida de cada uno de los estudiantes. También, al llegar al salón, se saludaba al curso y al espantapájaros, como hábito de buena educación;de la misma forma los estudiantes copiaban esos hábitos; ahora saludaban a aquel muñeco de trapo, el espantapájaros, con el respeto que puede merecer la señora de la tienda, el señor celador del colegio, o cualquiera otra persona, lo que generó una regla fundamental en nuestro curso: el respeto por el otro.

REFLEXIÓN FINAL

No es un secreto para nadie que las matemáticas han sido mal vistas por los estudiantes durante mucho tiempo, debido a que su aprendizaje exige un análisis riguroso y el desarrollo del pensamiento para poder entenderlas.Por ello, desde la gestión del docente es fundamental el diseño de estrategias para que los estudiantes encuentren en esta clase una motivación no solo por entenderlas sino también por hacer su propio ambiente agradable.

Es importante tener en cuenta que esta experiencia de aula se ha generado en un contexto de estudiantes desinteresados por la asignatura de matemáticas que es un tópico que se ha mantenido durante generaciones, el cual depende del rol docente y su gestión quitar el paradigma de que las matemáticas son solo para las personas inteligentes creando en los estudiantes jerarquías de poder dependiendo de su desarrollo de determinado concepto matemático y su dominio, su misión debe ser generar espacios desde la comunicación y creación de propuestas que permitan llevar una cadena, en la cual los estudiantes encuentren un ambiente (agradable) para aprender las matemáticas, y que no solamente se desarrolle durante una clase de matemáticas, sino durante todo su proceso de aprendizaje escolar y para la vida.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Köniz, W. (2000). El miedo desde la perspectiva de la psicología profunda y la astrología. Lucerna: Congreso Mundial de Astrología.

El miedo y sus fundamentos. Moana (2009). Consultado el 5 de Mayo De 2012 España: De la Real Academia Española, Vigésima Segunda Edición 2012, en http://psicologia.ufm.edu/wp-content/uploads/EnsayoMoanaHolla.pdf

Solórzano, M. (2009). ¿Por qué existe el miedo a las matemáticas? Perú, Boletín Redem

Rodríguez, G. (2007).Fobia a las matemáticas, Bucaramanga-Colombia, Obtenido el 25 de marzo de 2012, Las matemáticas del futuro, de http://rrodriguezgonzalez.wordpress.com/2007/01/19/fobia-a-las-matematicas/

Propuesta de enseñanza del concepto de función para estudiantes de Educación Superior

Claudia Cecilia Castro Cortés[*]
Luz Mery Díaz Camacho[**]

RESUMEN

La propuesta que se presenta hace parte de la investigación "Planteamiento didáctico del concepto de función para estudiantes de Educación Superior", y surge de la necesidad de reducir los altos índices de pérdida y deserción en los primeros semestres de Ingeniería. Dicha situación generó una reflexión e interés en la búsqueda de una propuesta que permitiera una mayor comprensión del concepto de función. La propuesta de enseñanza de tipo inclusivo que se construye se encuentra sustentada en unos referentes epistemológicos y teóricos, y hace énfasis en la identificación de los diferentes elementos del concepto, de las formas y cambios de representación.

Palabras clave. Sistema de representación, metodología de trabajo en el aula, función, situación.

[*] Universidad Sergio Arboleda. Dirección electrónica: mathclaudiacastro@yahoo.com
[**] Universidad Sergio Arboleda. Dirección electrónica: dicamelu73@yahoo.es

CONTEXTUALIZACIÓN

El concepto de función es abordado en los cursos de la Educación Básica y Media y posteriormente retomado en los primeros semestres de cálculo en estudiantes de Ingeniería. En diversas investigaciones realizadas por autores como Higueras (1998), Robledo (2003), Azcárate y Deulofeu (1996), entre otros, respecto al concepto de función, se ha identificado en general, que las dificultades de los estudiantes están relacionadas con

- La construcción deficiente del concepto.
- La falta de situaciones significativas en las propuestas de aprendizaje, que está directamente relacionada con modelos pedagógicos tradicionales, utilizados por los profesores.
- Los tipos de actividades desarrolladas con los diferentes registros de representación no propician la comprensión de los elementos inmersos en el concepto.
- La ejercitación de lo simbólico genera el dominio de procesos algorítmicos donde se utiliza el concepto de función, pero los estudiantes se encuentran con dificultades para solucionar situaciones contextualizadas, por la poca comprensión que se alcanza de los elementos como: identificación de variables, relación de dependencia y clasificación de funciones.

La necesidad de superar estas dificultades genera el interés por construir una propuesta de enseñanza que tiene como propósito lograr una mejor comprensión del concepto, disminuir la repetición en los cursos de Cálculo y evitar la deserción de los estudiantes en los primeros semestres.

REFERENTES TEÓRICO-PRÁCTICOS

La propuesta está diseñada con base en i) una revisión sucinta del recorrido histórico y epistemológico, que permitió reconocer las situaciones que dieron origen al concepto y las dificultades u obstáculos que se generaron en su desarrollo; ii) la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990), que implica la conceptualización como núcleo del desarrollo cognitivo, y lo define como la apropiación consciente del concepto que se define como la terna (S, I, R), donde: S: es el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto, I: el conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad y R: el conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento, y a partir de la cual se generó lo propuesta de desarrollo de situaciones inclusivas (que se explican posteriormente) y por último, iii) la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel (1983,) que muestra la importancia del conocimiento previo, como principal factor en la adquisición de nuevos conocimientos y de los roles de los actores del proceso: estudiantes y profesor.

A continuación se muestra el esquema en el que se relaciona la teoría de los campos conceptuales, el aprendizaje significativo y el estudio de la evolución histórico-epistemológica del concepto de función, tomado de Castro, Céspedes, y Díaz (2011), que sustentan la propuesta de enseñanza:

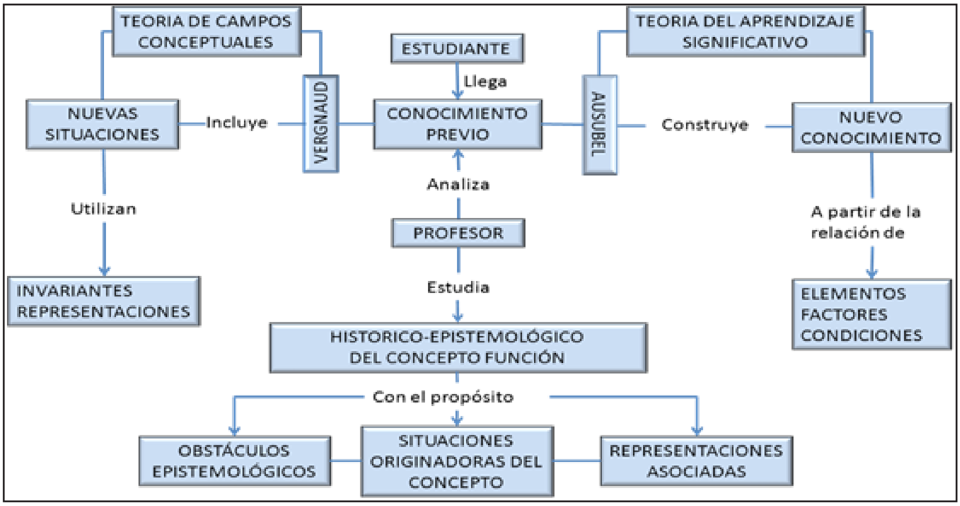


Figura 1. Relación entre la teoría de los campos conceptuales, el aprendizaje significativo y el estudio de la evolución histórico-epistemológica del concepto de función.

EXPERIENCIA DE AULA

Como producto del proceso de investigación, las situaciones diseñadas para el desarrollo del concepto de función se organizaron de forma inclusiva así: de relación, de identificación, de identificación de atributos y de caracterización de funciones, en las que se introducen poco a poco las diferentes formas de representación y los elementos que caracterizan el concepto de función. En el esquema se muestra el modelo de inclusión de las diferentes situaciones y las formas de representación:

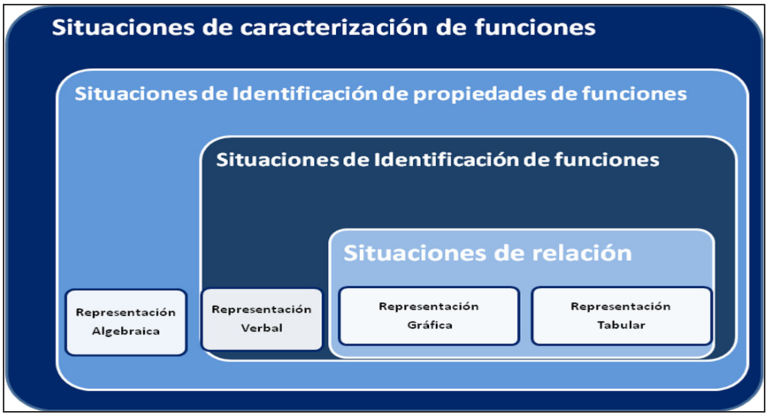


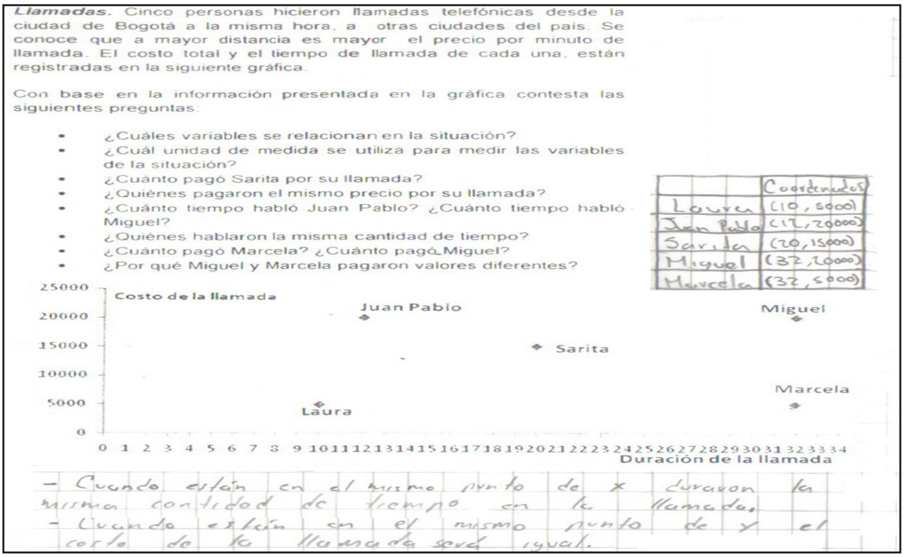
Figura 2. Organización de las clases de situaciones inclusivas para la enseñanza del concepto de función. Fuente: Castro y otros (2011).

¿Cómo se constituyen las situaciones?

Situaciones de relación

Propósito: A partir de la lectura de gráficas y tablas, el estudiante debe identificar las variables con sus unidades de medida, el significado del origen y las escalas utilizadas.

Representaciones: gráfica y tabular; en estas primeras situaciones se propicia el cambio de registro entre estos dos tipos de representación.



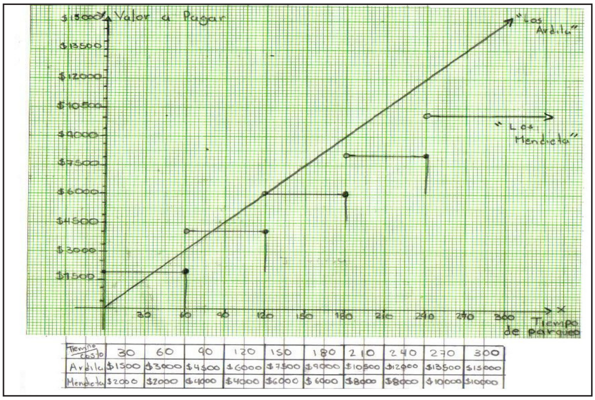
Llamadas. Cinco personas hicieron llamadas telefónicas desde la ciudad de Bogotá a la misma hora, a otras ciudades del país. Se conoce que a mayor distancia es mayor el precio por minuto de llamada. El costo total y el tiempo de llamada de cada una, están registradas en la siguiente gráfica.

Con base en la información presentada en la gráfica contesta las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles variables se relacionan en la situación?
- ¿Cuál unidad de medida se utiliza para medir las variables de la situación?
- ¿Cuánto pagó Sarita por su llamada?
- ¿Quiénes pagaron el mismo precio por su llamada?
- ¿Cuánto tiempo habló Juan Pablo? ¿Cuánto tiempo habló Miguel?
- ¿Quiénes hablaron la misma cantidad de tiempo?
- ¿Cuánto pagó Marcela? ¿Cuánto pagó Miguel?
- ¿Por qué Miguel y Marcela pagaron valores diferentes?

	Coordenadas
Laura	(10, 5000)
Juan Pablo	(12, 20000)
Sarita	(20, 15000)
Miguel	(32, 20000)
Marcela	(32, 5000)

- Cuando están en el mismo punto de x duraron la misma cantidad de tiempo en la llamada.
- Cuando están en el mismo punto de y el costo de la llamada será igual.



Situaciones de Identificación de funciones

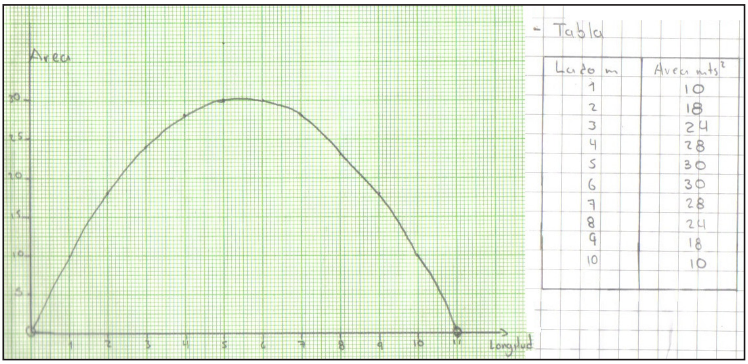
Propósito: Realizar la lectura e interpretación de las gráficas y tablas para identificar entre las relaciones las que son funciones. Además de identificar algunos tipos de funciones como lineal, parte entera y cuadrática.

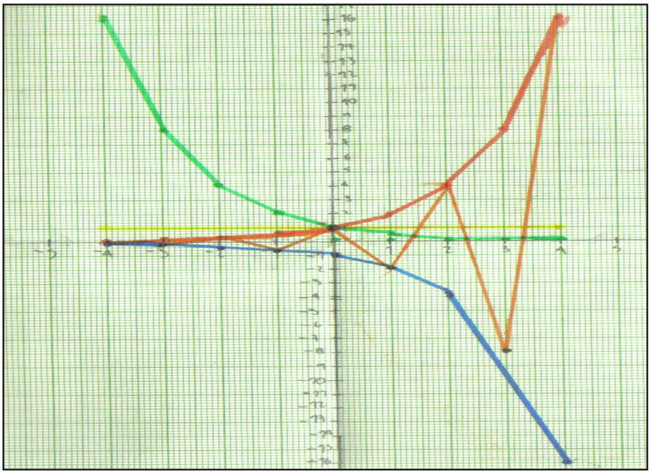
Representaciones: gráfica, tabular y verbal, se determinan las condiciones para que una gráfica y una tabla representen una función.

Situaciones de identificación de propiedades de función

Propósito: Analizar la continuidad, monotonía, periodicidad y simetría de las funciones utilizadas en las situaciones planteadas.

Representaciones: gráfica, tabular, verbal y algebraica; al avanzar en las temáticas se regresa y profundiza en las situaciones analizadas con anterioridad, para complementar su estudio.





Situaciones de caracterización de funciones

Propósito. Determinar las características básicas de las diferentes funciones, por ejemplo, las condiciones para la base y el exponente en una función exponencial, el dominio y codominio, y sus propiedades.

Representaciones. En estas se utilizan todas las representaciones y se busca que los estudiantes realicen los cambios de registro necesarios para dar solución a las situaciones planteadas.

LOGROS Y DIFICULTADES

La metodología que se llevó a cabo para la aplicación de la propuesta está enmarcada en la resolución de problemas de Charnay (1998), en la que se reconoce que solo hay aprendizaje cuando el estudiante se enfrenta a resolver un problema; los roles del estudiante y del profesor son específicos; la clase se desarrolla en pequeños grupos que exponen el desarrollo de sus estrategias justificando cada uno de los procesos; se socializan con el fin de llegar a consensos que permitan al maestro institucionalizar la propuesta, aspectos que propician la participación de los estudiantes en su aprendizaje.

La principal dificultad se presentó al inicio de la aplicación de la propuesta, básicamente por el cambio de metodología dado, ya que este implicaba a los estudiantes abordar las situaciones sin previa explicación que indicaran la estrategia de solución por parte del profesor. Una vez se adoptó la metodología, los estudiantes exponían sus estrategias de solución con mayor seguridad y reconocieron la importancia del proceso de construcción de conocimiento.

REFLEXIÓN

La metodología de resolución de problemas generó en los estudiantes un análisis crítico frente a las situaciones, lo que les permitía dar respuesta en forma sustentada, tomar decisiones y hacer cambios de registro de representación de manera pertinente.

Dado que la propuesta fue aplicada por una de las investigadoras, quien replanteó sus prácticas de enseñanza a partir de la misma, se observó que al modificar el rol del profesor, dando mayor protagonismo al estudiante, se supera la etapa de algoritmación en la que se centra el trabajo de los estudiantes en la mayoría de los cursos de Cálculo, dificultad que se reconoce en las diferentes investigaciones consultadas y mencionadas en la contextualización. Vale la pena decir que aunque la investigación se centró en el concepto de función, el resto del curso de Introducción al Análisis Matemático, se organizó en términos de la resolución de problemas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ausubel, D. (1983). Psicología educativa. México: Trillas.

Azcárate, C., & Deulofeu J. (1996). Funciones y gráficas. Madrid. España: Síntesis.

Castro, C., Céspedes, Y. & Díaz, M. (2011). Análisis del concepto función, para la construcción de una propuesta de enseñanza. Memorias de la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Recife. Brasil.

Charnay, R. (1998). Aprender (por médio de) la resolución de problemas. Em Grand, N. (Ed.), revista de matemática, ciencia y tecnología para los maestros de primaria y pre-primaria, No. 42. (PP. 51-63). Grenable. Documento CRDP.

Higueras, L. (1998). La noción de función: análisis epistemológico y didáctico. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada, Granada.

Robledo, J. (2003). Registros semióticos de representación y matemáticas universitarias (Tesis de maestría). Cali: Universidad del Valle, Cali.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. Recherches en Didáctique des Mathematiques. La Pensée Sauvage: CNRS y Université René Descartes.

Una posibilidad de (re) significar el currículo de matemáticas

*Mónica María García Quintero**

RESUMEN

Este artículo tiene como objetivo presentar las reflexiones de corte teórico y metodológico, que se tejieron alrededor de la (re) significación del currículo de matemáticas del grado quinto, de la I. E. Ciudadela Las Américas. El cuerpo de esta experiencia pedagógica está basado en el reconocimiento y vinculación de los saberes cotidianos de los estudiantes y padres de familia, en los procesos de enseñanza y en los procesos de aprendizaje de las matemáticas. Estos saberes cotidianos fueron constituyentes de los proyectos de aula, desarrollados en la clase de matemáticas, los cuales posibilitaron las interrelaciones entre los estudiantes y el conocimiento matemático, posibilitando así la (re) constitución de sujetos políticos.

Palabras clave. Propósito de formación – orientaciones metodológicas – Saberes cotidianos – Perspectiva sociocultural – Conocimiento matemático- currículo.

* Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: monicam.garciaq@gmail.com.

> *"Los proyectos de aula: una forma de interrelación de conocimientos matemáticos"*
> *"El aula de clase es un espacio de acción social,*
> *que pone en contacto a profesor y estudiante*
> *-seres humanos con un pasado, presente y futuro-*
> *y cómo los procesos de enseñanza de las matemáticas escolares se construyen y negocian en tal espacio y entre tales seres"*
>
> *(Valero, 2002).*

Teniendo como base esta concepción del aula de clase y continuando con esta búsqueda de (re) significar el currículo, se deja de lado el currículo que ignora los saberes cotidianos y que privilegia solamente los contenidos propuestos por el MEN (Ministerio de Educación Nacional). La problematización de este currículo oficial me posibilitó darme cuenta de la importancia de enseñar a cuestionar, a crear, a innovar, a descubrir, a participar en la creación de un currículo de matemáticas contextualizado y coherente con las necesidades e intereses de los estudiantes, en diálogo con las orientaciones metodológicas y los propósitos de formación, componentes por los que se viene apostando en esta propuesta.

En este marco, fui descubriendo lo importantes que son las interrelaciones en la clase de matemáticas y su acción política en la producción de conocimiento, para la identificación y valoración de los saberes cotidianos, la toma de decisiones por parte de los estudiantes, el reconocimiento de la diversidad cultural y la reflexión alrededor de por qué algunos saberes se tornan legítimos y otros no, en determinadas culturas. En este sentido, Santos (1996) argumenta que "[…] El aula de clase se convierte en un campo de posibilidades en las que los profesores y estudiantes tiene que elegir" (Santos, 1996. P. 3. Traducción propia); así, la elección incluye desde acuerdos para el trabajo en el aula de clases como: respeto por la palabra del otro, trabajo en equipo, responsabilidad en los compromisos, hasta la posibilidad de negociar los saberes cotidianos que se vinculan a contenidos matemáticos, abordados en las clases de matemáticas, la participación de algunos miembros de la familia desde sus saberes y las estrategias de evaluación. Lo anterior favorece la producción de conocimiento matemático con una visión más amplia del mismo, porque conecta lo aprendido en clase con la realidad del estudiante, logrando así que él tome posturas críticas y reflexivas desde y para su contexto.

Bajo esta perspectiva, las clases de matemáticas del grado quinto, desarrolladas desde el año 2010, se convirtieron en espacios en donde se vincularon los saberes matemáticos propios de la escuela, con los saberes cotidianos de los estudiantes; estos últimos son los saberes construidos por ellos en su interacción con el otro y con lo otro, a través de situaciones de la vida cotidiana. Esta vinculación se logró gracias a la construcción conjunta de tres proyectos de aula: "El banco y sus matemáticas", "La tienda familiar y sus matemáticas" y "Construyamos con las matemáticas" –proyectos que se describirán más adelante– que posibilitaron que los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje se dieran de una manera crítica, significativa y democrática. Crítica en el sentido en el que se adoptó una postura ética y política al argumentar, por qué eran pertinentes los saberes cotidianos en este contexto escolar, y en especial en el contexto de las matemáticas; significativo, ya que partiendo de esos saberes cotidianos, estaban inmersos los intereses, las necesidades, las motivaciones, por lo que los estudiantes participaron y pudieron descubrir la aplicabilidad de las matemáticas en sus realidades. Y democrática en la forma como se tomaron las decisiones para traer los saberes cotidianos a la clase de matemáticas y la forma de inclusión de dichos saberes en las prácticas escolares. Estos aspectos fueron determinantes para una nueva visión de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva sociocultural. Se hizo evidente, además, cómo los tres elementos presentados anteriormente posibilitaron que las voces de algunos estudiantes, que hasta algún tiempo se limitaban a responder lo que se les preguntara, tomaran fuerza en el salón de clases por la seguridad y claridad al expresar sus ideas, sin temor a ser criticados por sus compañeros.

Así pues, se hace necesario describir primero cada uno de los proyectos, para luego intentar mostrar las relaciones que se tejieron en relación con los contenidos matemáticos abordados:

"El banco y sus matemáticas". Este proyecto surgió en un diálogo que tuvieron los padres con hijos, a la hora de analizar acerca de las acciones del diario vivir utilizando las matemáticas. Las actividades que se generaron alrededor de este diálogo tuvieron que ver con el manejo del dinero –todas las acciones que se realizan en un banco–, el planteamiento y solución de problemas, y demás conocimientos matemáticos que se produjeron a partir de la interacción entre los mismos estudiantes y los saberes cotidianos. Al final, realizamos una feria del Banco y sus matemáticas con el fin de socializar a los compañeros y demás grupos de la Básica Primaria de la Institución los aprendizajes y experiencias vividas en este proyecto.

"La tienda familiar y sus matemáticas". Este proyecto surgió de la misma manera que el anterior, solo que con mayor fuerza, ya que este saber es del diario vivir, tanto de los estudiantes, como de los padres –las ventas informales–. Cada grupo de estudiantes, con cinco mil pesos, debían preparar un producto para la venta y determinar el porcentaje de ganancias, las cuales se utilizaron en la salida pedagógica del final de año. Esta preparación produjo una serie de transformaciones en los estudiantes, puesto que les tocaba tomar decisiones para el qué hacer, cómo y qué comprar, quiénes y qué roles deben cumplir, qué productos generan mayor ganancia y por qué, en fin, situaciones políticas y sociales que les ayudaron a (re) constituirse como sujetos. Las ventas se hicieron tanto en el interior del aula –en plena clase de matemáticas– como en diferentes actividades sociales de la Institución, como la Feria de la Antioqueñidad, el día de la familia, entre otros. Este ejercicio de vender y comprar, hizo que los estudiantes, se acercaran de una manera divertida, contextualizada y significativa con el conocimiento matemático.

"Construyamos con las matemáticas". Este proyecto surgió como motivo de la reconstrucción de una de las escalas de la cancha y algunos de los alrededores de la Institución. Además, al principio del año, este saber cotidiano emergió en uno de los talleres con los padres. En este proyecto de aula, cada equipo de estudiantes debía construir un plano de acuerdo con sus intereses y sueños, para luego construir su respectiva maqueta. Algunos, por ejemplo, construyeron una finca, una iglesia, un edificio, un parque, etc. Al final del periodo socializamos en la clase de matemáticas las maquetas, los planos y los conocimientos producidos, como el perímetro, el área, el volumen, los sólidos. Un ingeniero, tío de una estudiante, fue al aula a explicarnos cómo debíamos construir un plano; un albañil, sin estudios universitarios, padre de otra estudiante, nos compartió algunos truquitos para construir las maquetas, y una mamá que trabaja en una inmobiliaria nos regaló folletos y revistas de planos y maquetas de apartamentos, con el fin de que los estudiantes tuvieran un referente gráfico de cómo realizar los planos. En este proyecto se evidenció mayor participación de los padres.

Es conveniente, para finalizar, mencionar que los saberes cotidianos, se convirtieron en un objeto de estudio en la clase de matemáticas, para transformarse luego en un saber escolar, en términos de Monteiro (2004). Las reflexiones y conclusiones fueron las siguientes:

El currículo de matemáticas es una construcción social, en constante transformación por parte de los sujetos involucrados en los procesos de enseñanza y en los procesos de aprendizaje de las matemáticas, como son: los docentes, los estudiantes y la familia; esta transformación se logró debido a la vinculación de los saberes cotidianos de los estudiantes al contexto escolar, mediatizada por los proyectos de aula, que se desarrollaron en el año escolar, los cuales facilitaron interrelaciones en la clase de matemáticas, posibilitando en los estudiantes (re) constituirse como sujetos políticos y producir conocimiento.

Para (re) significar el currículo, desde una perspectiva sociocultural, es necesario que el maestro tenga una postura ética y política, con una visión integradora, que posibilite la transformación de sus prácticas y la (re) constitución de su ser.

Los proyectos de aula, (re) significaron la clase de matemáticas, desde la puesta en escena de los saberes cotidianos de los estudiantes y su familia; esto tiene que ver con las transformaciones del currículo actual, correspondientes a las orientaciones metodológicas. Al mismo tiempo, posibilitaron interacciones en la clase, donde el trabajo en equipo cobró importancia y favoreció la (re) constitución de sujetos.

Al (re) significar las orientaciones metodológicas y los propósitos de formación, del currículo actual, se posibilitó que los estudiantes produjeran conocimiento matemático, dotado de sentidos de acuerdo con sus saberes cotidianos y con su contexto sociocultural.

Los estudiantes reconocieron que los proyecto de aula fueron una forma diferente de aprender matemáticas, de interactuar con otros y de ver a la familia desde otro lugar en la escuela. También, consideraron que los proyectos les sirvieron para relacionar las matemáticas con las acciones de su vida cotidiana.

Las familias de los estudiantes juegan un papel preponderante en los procesos de enseñanza y en los procesos de aprendizaje de las matemáticas; por ello, el maestro debe posibilitar espacios de encuentro y de reflexión, entre los saberes cotidianos de la familia y el conocimiento escolar. En este sentido los estudiantes reconocieron y validaron los saberes de la familia y permitieron la vinculación de estos en el desarrollo de los proyectos; esto, según ellos, les posibilitó realizar actividades, con aspectos que la profesora no sabía.

Cabe mencionar también que la estrategia metodológica escogida apoyaba el componente de los propósitos de formación, puesto que los estudiantes pudieron tomar decisiones, participar, dialogar, socializar a otros sus experiencias, saberes y conocimientos, reconocer y respetar la palabra del otro, aspectos que caracterizan a un sujeto político.

Para finalizar, es necesario que en las Instituciones educativas, se (re) piense el currículo, desde los contextos socioculturales, en los que está inmersa la comunidad educativa, dotando de sentido los conocimientos matemáticos y la relación con las demás áreas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bajtín, M. (2009). Estética de la creación verbal. (1ª ed. en español). México: Siglo XXI.

Bishop, Alan J. (2005). Aproximación sociocultural a la educación matemática. Valle: Editorial Universidad del Valle

Institución Educativa Ciudadela Las Américas. Plan de área de Matemáticas. Medellín (2009)

Freire, P. (1994). Cartas a quien pretende enseñar. México: Siglo XXI Editores.

García, G. Valero, P. Camelo, F. Mancera, G. Romero, J. Peñaloza G. Samacá, S. (2009). Escenarios de aprendizaje de las matemáticas. Un estudio desde la perspectiva de la educación matemática crítica. Editorial Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). Estándares de competencias de matemáticas. Imprenta Nacional de Colombia

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (1994). Ley general de Educación.

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio

Monteiro, A. (2005) Currículo e Práticas Sociais. Tomado de http://www.asocolme.com/

Sánchez, C. (2000). Los proyectos pedagógicos de aula. Editorial Libros & Libres.

Secretaría de Educación de Medellín. (2006). Proyecto de Recontextualización de planes de áreas. Universidad de Antioquia

Silva da, Tadeu. (2010). Documentos de identidade. Uma introdução às teorias do currículo. Autêntica

Valero, P. (2009) La educación matemática como una red de prácticas sociales. Tomado de http://www.congresoinvestigacioneducacion2009.com/

Propuesta de enseñanza para el paso de lo tridimensional a lo bidimensional

*Deisy Gómez Ardila**
*Lady Cedeño Niño***

RESUMEN

Esta experiencia en el aula ha venido mostrando el proceso y el desarrollo que tienen los estudiantes de 4° en el paso de lo tridimensional a lo bidimensional, resaltando la importancia tanto de las propiedades y características de las figuras como de los materiales didácticos utilizados. Partiendo de los textos teóricos y didácticos se hacen análisis de los procesos realizados por los estudiantes en las diferentes actividades; esto permite determinar una serie de logros y dificultades que se han tenido durante el transcurso de la enseñanza-aprendizaje, y lleva a una reflexión acerca de la propuesto en el diseño de la secuencia de actividades para dirigirlo y proyectarlo a cumplir los objetivos presentes en el momento de planear y diseñar esta secuencia.

Palabras clave: geometría en tres dimensiones, relaciones geométricas, Preparación de clases.

* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: deisy1803@hotmail.com
** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. carito.blue7@hotmail.com

CONTEXTUALIZACIÓN

La experiencia de aula que se relata a continuación se ha venido desarrollando en el marco de la práctica docente de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Para el desarrollo de dicha práctica, se organizó una secuencia de actividades teniendo en cuenta las orientaciones para el diseño y elaboración de actividades de aprendizaje propuesta por el grupo DECA (1992). En el diseño se contempló el uso de diversos materiales didácticos bajo la hipótesis de que el uso de estos potencia el establecimiento de vínculos entre el espacio bidimensional y el tridimensional, a través del reconocimiento de propiedades y características de los sólidos de los polígonos. La experiencia nos ha permitido identificar que la manipulación y la visualización logran desarrollar ciertas habilidades tales como reflexionar sobre aspectos geométricos y sus posibles representaciones, sobre las relaciones entre sus partes, su estructura, además de examinar sus posibles transformaciones. La implementación de la secuencia se ha venido desarrollando en el grado cuarto del Instituto Técnico Juan del Corral, con 33 estudiantes con edades comprendidas entre los 9 y 11 años.

REFERENTES TEÓRICO-PRÁCTICOS BÁSICOS

En los Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas MEN (1998), se indica que para la enseñanza de algunos conceptos geométricos se debe comenzar desde el espacio tridimensional con el fin de:

> Proporcionarle al estudiante la identificación de cuerpos geométricos en la realidad, y para generar en los estudiantes un proceso de comprensión de las representaciones bidimensionales de su mundo (p. 39).

Para la enseñanza de figuras tridimensionales, sus relaciones y diferencias con lo bidimensional, es importante el uso de materiales del geoplano, el tangram y otros recursos didácticos, en tanto que ayudan a los estudiantes a realizar transformaciones y ganar habilidad para controlar sus resultados. De acuerdo con Alsina, Burgués & Fortuny (1987) "el uso de material manipulativo permitirá hacer palpable el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría"; consideramos que el uso de estos materiales puede constituir un entorno interesante en el que es posible concretar conceptos y profundizar en propiedades que a veces una descripción verbal puede esconder.

El uso de los diferentes materiales mostrará el potencial que estos tiene tienen en el reconocimiento de propiedades y características de los sólidos y los polígonos, a través de la visualización y la percepción. Así se lleva a los estudiantes a una relación y diferenciación entre las figuras bidimensionales y las tridimensionales; también es significativo tener en cuenta que durante esta experiencia se ha logrado que los estudiantes nombren algunos sólidos y polígonos, y los clasifiquen entre regulares e irregulares; de esta manera, los alumnos utilizan diferentes estrategias como remitirse a las propiedades y características para llegar a dicha clasificación, lo que significa que se requiere dar nombres a determinados poliedros y luego a sus clases; esto se puede lograr a partir de ciertas características, y así constituir familias de poliedros, por ejemplo: prismas rectos, pirámides pentagonales etc., iniciando con nombres intuitivos, para dar paso al nombre genérico de cada sólido. Es importante que también cumpla otra característica, haciendo referencia a ella, por ejemplo, pirámide recta con base cuadrada; de esta forma se pueden organizar y comparar los poliedros conocidos, delimitando previamente observaciones o estableciendo criterios de comparación, por ejemplo: poliedros con todas las caras iguales, poliedros con el mismo número de vértices, poliedros con el mismo número de aristas (Guillén, 1997, p. 38).

A partir de la identificación de características y propiedades, es conveniente utilizar el desarrollo plano para que los estudiantes reconozcan qué características y propiedades se mantienen; para trabajar este aspecto, se puede hacer uso de representaciones pictóricas de diferentes sólidos (diseños planos) realizadas por cada niño, y conducirlos a buscar relaciones y diferencias en cuanto a las propiedades y características que se mantienen y las que se pierden, y llevarlos a la comparación y diferenciación de los figuras en tres dimensiones y las figuras planas.

Los sólidos tratados anteriormente están divididos en poliedros y cuerpos redondos; en esta propuesta se manejarán los poliedros, los cuales se definen como: "un sólido delimitado por una superficie cerrada simple, formada por regiones poligonales planas" (Godino, 2002, p.20). Los poliedros que se utilizarán en la enseñanza de las figuras tridimensionales son de tipo regular (tetraedro, hexaedro, octaedro, etc.) e irregular (prisma recto, pirámide, etc.) Los poliedros están constituidos por diferentes elementos que son: caras, vértices y aristas. Para la enseñanza de figuras bidimensionales se tendrán en cuenta los polígonos regulares como el triángulo equilátero, el cuadrado, el pentágono y el hexágono; e irregulares como triángulos y paralelogramos, teniendo en cuenta propiedades como lados y vértices, además de características como largo y ancho.

Para la identificación de características y propiedades de sólidos y figuras planas se hace uso de recursos didácticos como, desarrollos planos, modelos de poliedros y algunos objetos del entorno escolar (muros, salones, baldosas, mesas, etc) que a la hora de ponerlos en juego desde una perspectiva geométrica conlleva a los estudiantes a enriquecer la imagen conceptual de las figuras, esto a través del trabajo y manipulación de los modelos de poliedros y sus diseños planos, los cuales le permiten al estudiante identificar las propiedades y características de los poliedros que se pierden al realizar su diseño plano; construyendo así la idea que las figuras tridimensionales se pueden descomponer o estar formadas por diferentes figuras bidimensionales. (Alsina, Burgués & Fortuny 1988, p. 32).

DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA EXPERIENCIA

Inicialmente se aplicó una prueba diagnóstico con algunas tareas que permitirían ver los conceptos previos frente a las figuras planas y a los sólidos. Las tareas estaban enfocadas a la diferenciación y relación de cuerpos geométricos y figuras planas. Asimismo, en esta prueba se abordaron algunas temáticas como figuras planas y cuerpos geométricos, la identificación de sus propiedades: caras, vértices y aristas (para los sólidos); lados, vértices (para las figuras planas), y tipos de ángulos: llanos, rectos, obtusos, agudos, y la identificación de un desarrollo plano de un cuerpo geométrico determinado.

De acuerdo con los resultados obtenidos en la prueba diagnóstico, se evidenció que los estudiantes no tenían claros los preconceptos en cuanto a reconocimiento de polígonos y poliedros, no destacaban o confundían características y propiedades; teniendo en cuenta estos resultados, se propuso la secuencia de actividades enfocada al paso de lo tridimensional a lo bidimensional.

La primera actividad tuvo como propósito que los estudiantes lograran reconocer, diferenciar y nombrar los cuerpos geométricos (cubo, paralelepípedo, tetraedro, prisma), a través de propiedades (caras, vértices, aristas) y características (largo, ancho y profundo); esto se desarrolló a partir de la identificación de figuras en el entorno escolar y de la visualización y percepción de modelos sólidos presentados por los docentes, permitiéndoles a los estudiantes nombrar algunos poliedros teniendo en cuenta dichas propiedades y características, por ejemplo nombrándolos por el número de caras o forma de las mismas; esto con la guía del profesor.

La segunda actividad permitió que los estudiantes, a través de la manipulación de diferentes sólidos, lograran llegar a una clasificación operatoria, a partir de agrupaciones elementales de clases y de relaciones, no solo clasificando por su forma y color sino que, además, tuvieran en cuenta criterios como: todas las caras congruentes, mismo número de aristas, misma clase de polígono, etc; estos criterios serían dados por las profesoras para que los estudiantes compararan clasificaran y los nombraran respectivamente.

En la tercera actividad los estudiantes reconocían relaciones espaciales asociadas con la visualización, al dar cuenta de que el diseño plano de un sólido no es simplemente dibujar la forma de sus caras, sino que es necesario tener en cuenta la ubicación de dichas caras. En este caso, los estudiantes mostraron una gran habilidad para imaginar los desarrollos planos y plasmarlos; cuando los estudiantes desarmaban los sólidos y veían la coincidencia o no del desarrollo plano hecho por ellos, identificaban que esos desarrollos no eran únicos; entonces, indicaron las diferencias y las relaciones que se encontraron al tener el sólido y su diseño plano; estas relaciones y diferencias se dieron específicamente en cuanto a las propiedades invariantes o las que variaban (caras, lados, vértices, aristas. etc.) y sus características (largo, ancho, profundo). Esta actividad es clave en el desarrollo de esta propuesta, pues muestra el paso que dan los estudiantes de figuras tridimensionales a figuras bidimensionales.

La cuarta actividad se desarrolló teniendo en cuenta lo realizado en las anteriores actividades; en ella se da inicio a un perspectiva más concreta de figuras bidimensionales; para esta actividad, se trabaja con el tangram para que los estudiantes reconozcan diferentes polígonos; también, en esta actividad se hace una explicación más concreta de las propiedades que se han venido trabajando en las diferentes actividades, además de clarificar aspectos específicos de las figuras planas y los poliedros. Esta actividad, aparte de generar la identificación de polígonos, permite desarrollar nociones de paralelismo y perpendicularidad a partir de la construcción del tangram.

Las siguientes actividades se dirigen al trabajo de clasificación de polígonos en regulares e irregulares a partir de criterios como: misma longitud de lados, diferente longitud de lados y mismo número de lados, utilizando el geoplano como recurso didáctico. Con los polígonos ya clasificados en regulares e irregulares se generará, a partir del uso del reloj, la identificación de tipos de ángulos como: agudos, llanos, obtusos y rectos; finalmente se terminan las actividades con una evaluación e institucionalización que pretende recopilar y determinar los conocimientos adquiridos por los estudiantes a lo largo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

REFLEXIÓN

El desarrollo que se ha tenido a lo largo de las sesiones muestra el avance que han tenido los estudiantes para solucionar las situaciones presentadas en cada una de las actividades con relación a la geometría. Lo anterior se evidenció en el trabajo de los estudiantes ya que se han venido adquiriendo fortalezas en las definiciones y la aplicación de estas para solucionar determinadas situaciones, en este caso, las diferencias y las relaciones entre las figuras tridimensionales y las bidimensionales. Al finalizar las actividades presentadas, los estudiantes comprenden que los objetos que se encuentran a su alrededor tienen como componentes figuras planas, de las cuales varían ciertos aspectos que para ellos son relevantes y significativos.

En el diseño de la secuencia de actividades, se evidencia que los estudiantes empiezan a generar, justificar y refutar diferentes ideas en torno a las relaciones y diferencias de los dos tipos de figuras (sólidas y planas); finalmente llega la institucionalización por parte de las profesoras, lo que reafirma o dirige las ideas planteadas por los estudiantes. Lo anterior también se cumple gracias a que los estudiantes se motivan a partir del dibujo y esto permite que su creatividad haga parte del auto-aprendizaje, que les permite adquirir diferentes conocimientos. Dando una mirada frente a los recursos utilizados para cada actividad, es fundamental resaltar que con la ayuda de estos se logra mayor comprensión de cada temática a abordar, ya que en este caso se trabaja con figuras bidimensionales y tridimensionales; la manipulación permite que los estudiantes se familiaricen con el concepto para que luego del manejo de estos se pueda profundizar de una manera más general.

LOGROS

- Desarrollo del pensamiento geométrico, en cuanto a relacionar los objetos del entorno con la geometría, identificando diferentes poliedros, y reconociendo sus propiedades y características de las figuras planas y de los sólidos, haciendo uso de materiales didácticos
- Se identificó la importancia que tiene la planeación y diseño de una secuencia didáctica, como vía o ruta de aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C., Burgués, C., & Fortuny, J. M. (1992) Invitación a la didáctica de la geometría. Madrid: Síntesis.

Godino, J. D., & Ruiz, F. (2003). Geometría y su didáctica para maestros. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/.

Martínez, R. A., & otros (1989) Metodología activa y lúdica de la geometría. Madrid: Síntesis.

Guillén, S. (1997) Poliedros. Madrid: Síntesis.

Grupo DECA (1992). Orientaciones para el diseño y elaboración de actividades de aprendizaje y de evaluación. Aula, N.º 6, 33-39.

El juego como medio de interacción para el aprendizaje de las matemáticas

*Lizeth Katherine Medina Casallas**

RESUMEN

El presente documento tiene como finalidad el mostrar el proceso enseñanza-aprendizaje dado en el colegio I. T. I. Francisco José de Caldas en una práctica docente, abordando tres campos de pensamiento matemático: numérico, métrico y geométrico a partir de una situación fundamental explicitada en algunos juegos. Esta metodología se usa con el fin de hacer que los estudiantes obtengan un aprendizaje significativo de las temáticas propuestas, por medio de un proceso lúdico y dinámico; su objetivo es reflexionar acerca de los propósitos que tiene el maestro frente al proceso que enfrentan los estudiantes, sin pensar solamente en abordar muchos conocimientos para lograr todo lo propuesto por el currículo, sino que, independientemente de esto, se buscó que todo lo que se dio a conocer quedara completamente claro.

Palabras clave: enseñanza, aprendizaje, dificultades, juegos.

* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: kathemedina2305@hotmail.com

CONTEXTUALIZACIÓN

Esta secuencia didáctica se encuentra orientada a la innovación dentro del proceso de enseñanza, sin dejar de lado las necesidades, dificultades y/o deficiencias que tuvieron los estudiantes del grado segundo, del colegio I. T. I. Francisco José de Caldas, ubicado en la ciudad de Bogotá. El proceso llevado a cabo buscaba potenciar en los estudiantes la relación entre las operaciones básicas a través de situaciones contextualizadas, teniendo en cuenta lo propuesto en las políticas educativas. De esta manera, la organización de este trabajo parte de las dificultades y fortalezas encontradas en el diagnóstico realizado al inicio del proceso, abordando tres campos del pensamientos matemático: numérico, geométrico y métrico, estableciendo estrechas relaciones entre estos; todo esto, con el fin de orientar la formación del estudiante a través de actividades que le permitan desarrollar un razonamiento lógico y efectivo, al igual que busque utilizar las matemáticas para interpretar y solucionar los problemas de la vida cotidiana; es indispensable que el estudiante utilice su imaginación, habilidades y destrezas para construir sus propios conocimientos, propiciando la participación activa del niño en la elaboración de dichos aprendizajes. Así, el diseño de las actividades está basado en la teoría de situaciones didácticas propuesta desde Brousseau y fundamentadas en la resolución de problemas, ya que se convierte en un elemento transformador para el desarrollo de las clases. De esta forma, al ser vista la resolución de problemas como metodología de clase, permite el razonamiento de los estudiantes sobre cada uno de los objetos matemáticos que se están trabajando en el aula de forma dinámica, apoyados por la utilización de recursos didácticos, por medio de los cuales, es posible tener un acercamiento real a los objetos matemáticos trabajados.

REFERENTE TEÓRICO-PRÁCTICO

En el aula de clase, es común que el maestro centre más su atención en controlar el comportamiento de sus estudiantes, que en originar formas de razonamiento, que conlleven a pensar matemáticamente. Al enseñar matemáticas no solo se abordan conceptos, métodos y procedimientos propios de esta disciplina, sino, además, una forma de pensar, hacer y comunicar; en este sentido, el quehacer matemático es una práctica que se construye y que, además, se evalúa; en términos de Vinent (2003), constantemente el ser humano está evaluando (cuando nos referimos a calidad frente a eficiencia, aciertos frente a descuidos, culpabilidad frente a inocencia, etc.) ya que siempre hay algo que evaluar.

En síntesis, es un gran reto para los maestros a la hora de evaluar, el reconocer al estudiante como persona, y no como un simple sujeto apto para aprender; sin dejar a un lado la importancia de conocer las ideas previas que poseen sobre temas que se espera trabajar, nos remitimos de nuevo a Vinent (2003) quien menciona: "El gran reto para el maestro consiste en acercarse al escolar, conocer y reconocer las características de su entorno, su manera de sentir la existencia, sus inclinaciones, sus aspiraciones, sus expectativas hacia el futuro y también sus limitaciones (...); de no ser así, la realidad de la escuela continuaría siendo ajena a la del escolar" (p. 14).

En cuanto a las políticas educativas expuestas por el Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998), las siguientes figuras (figura 1. Propuesta curricular para el ciclo A y figura 2. Estándares de calidad para grado segundo) exponen los aspectos relevantes para el desarrollo de este trabajo.

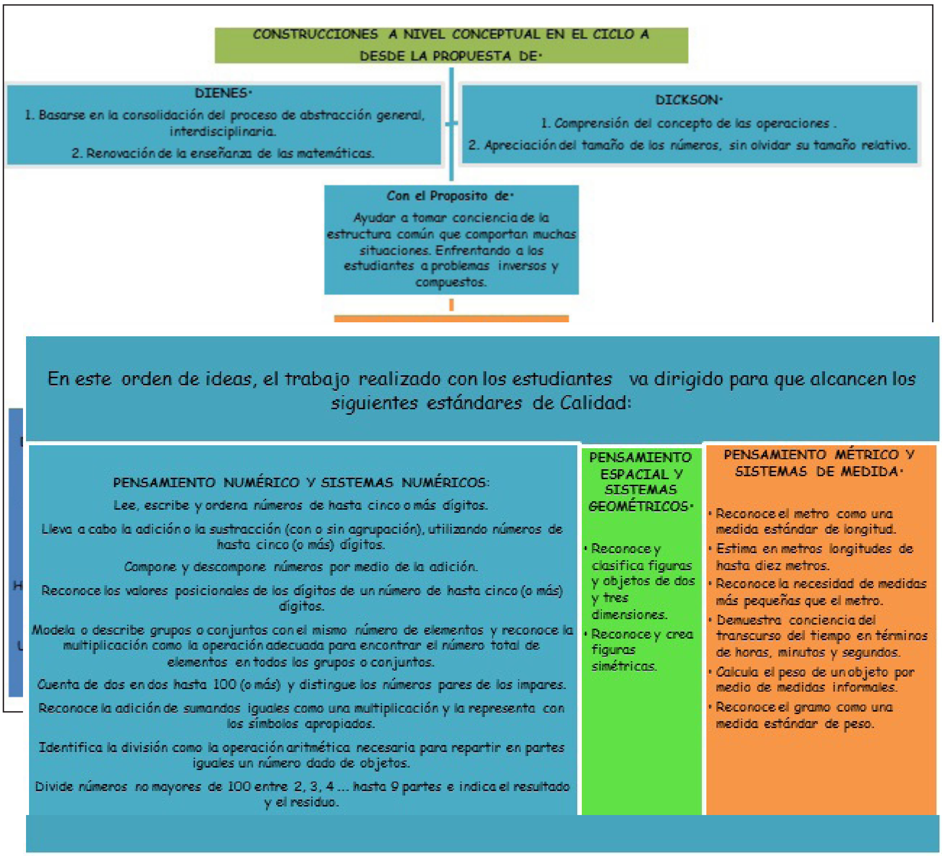


Figura 2. Estándares de calidad para grado segundo

DESCRIPCIÓN GENERAL

El proceso que se llevó a cabo parte de una situación fundamental, distribuida en diferentes situaciones a-didácticas y didácticas, donde el estudiante se involucra en un contexto, y a partir de la exploración va desarrollando habilidades que conllevan a la construcción del conocimiento, teniendo en cuenta problemáticas presentada. Así el proceso parte de la construcción de un nuevo mundo llamado Avilandia, con ayuda de figuras de los mundos Planilandia y Solidandia, las cuales deberán contribuir en dicha construcción y la alimentación de las aves según las especies y tamaños. De esta manera se relacionan los pensamientos geométrico (las figuras, sus componentes y propiedades), numérico (a partir de los cálculos y operaciones con los alimentos) y métrico (al determinar los patrones de medida para la construcción de las casas de las aves). Para el desarrollo de las situaciones a-didácticas, estas se organizan en juegos, ya que es una forma más llamativa de abordar las temáticas, dichos juegos se escogieron según lo expuesto por Castaño (1995), quien menciona que en el proceso de construcción de una operación se inicia en las acciones y poco a poco se va separando de ellas, hasta llegar a representaciones cada vez más estructuradas. Así los juegos usados fueron: la cocunuba, la casa de cambio y la rana sumadora.

Mapa mental de la secuencia de actividades

Partiendo del marco de referencia plantado, se abordarán tres pensamientos matemáticos y la relación entre estos. En la figura 3 se muestra la organización de las actividades propuestas en forma de juegos y la relación con la situación fundamental.

Logros y dificultades

La situación fundamental permitió al estudiante interactuar con el medio y el profesor, a través de actividades que le posibilitaron no solo jugar sino también hacer relaciones, anticiparse a los resultados, debatir, defender sus conjeturas y adquirir un aprendizaje significativo respecto al pensamiento multiplicativo simple y complejo, valor relativo, identificación y reconocimiento de las figuras bidimensionales, secuencias y patrones, entre otros. Así pues, el estudiante manipuló el material y relacionó cada uno de los juegos, logrando que de esta manera, que no solo se pudiera desarrollar una secuencia de actividades con un objeto matemático implícito en dichos recursos didácticos, sino que el estudiante le encontrara un significado a las actividades que estaba desarrollando con el manipulativo tangible. En cuanto al objetivo que se trazó en este trabajo, el cual consistía en diseñar y aplicar una secuencia de actividades teniendo en cuenta la metodología de resolución de problemas para estudiantes de grado segundo, se puede decir, que más que eso se evaluó la pertinencia de cada una de esas actividades, si fueron viables o no.

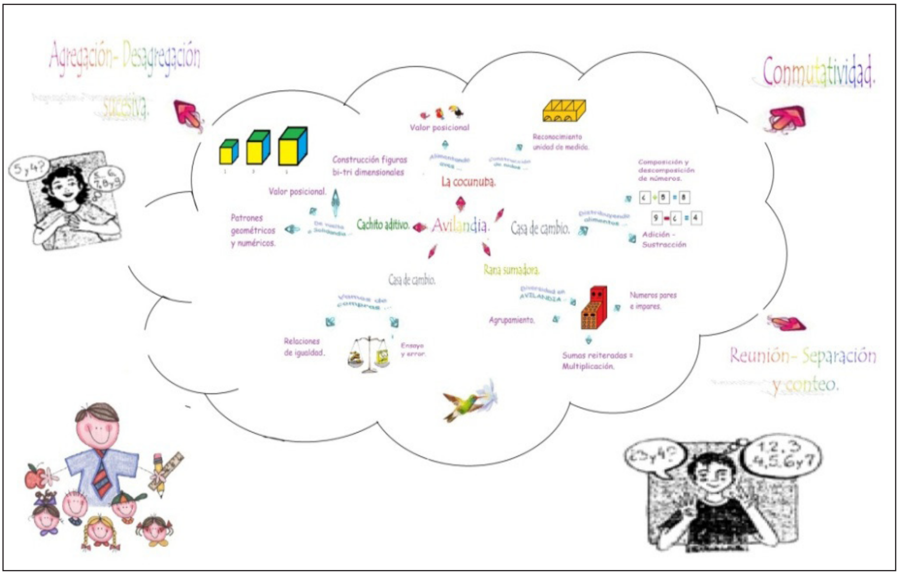


Figura 3. Mapa mental de la secuencia de actividades

REFLEXIÓN FINAL

El trabajo realizado en este proceso, iniciando con la planeación, el uso de recursos didácticos, la gestión del docente en el aula y la evaluación, no solo es la reunión de componentes que se enfatizaron en cada una de las prácticas docentes realizadas anteriormente, sino que, además, involucra más intensidad horaria (cinco horas semanales) y mayor interacción no solo con los estudiantes y profesores, sino también con los padres de familia, ya que la responsabilidad que se adquiere en este proceso es mayor; no solo se aborda una temática específica de un campo del pensamiento matemático sino que se deben relacionar los cinco pensamientos y todos los aspectos correspondientes a los mismos; de esta manera al tener intensidad horaria no solo se debe pensar en impartir parte del conocimiento sino que se debe poder establecer relaciones entre los saberes y los entornos de cada estudiante. Así, el trabajo con estudiantes tan pequeños que están iniciando apenas el ciclo escolar es aún más importante, pues está en el profesor la responsabilidad de hacer del proceso enseñanza-aprendizaje algo significativo, donde los conocimientos sean los acertados y apropiados para no causarles confusiones más adelante con las temáticas a seguir; es en este ciclo donde se puede ayudar a los niños a que se motiven y encuentren el gusto por la matemática a través de las diversas situaciones o, por el contrario, se termine el gusto y sigan de alguna forma rechazando dicha área por su complejidad.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. (J. Centeno, B. Melendo & J. Murillo).

Castaño, J. (1995). Colección Matemática "Hojas Pedagógicas". Serie lo Numérico. Fundación Antonio Restrepo, Ministerio de Educación Nacional. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (2003). La revolución educativa estándares básicos de matemáticas y lenguaje, educación básica y media. Documento bajado de Internet.

Ministerio de Educación Nacional (1998). Serie lineamientos curriculares. Documento bajado de internet.

Vinent, M. (2003) Trazas y miradas. Evaluación y competencias. Una mirada a la evaluación. Documento bajado de Internet. Recuperado en octubre 18 de 2011 de: http://www.bdigital.unal.edu.co/1559/2/01PREL01.pdf

Álgebra lineal y cónicas, relación implícita que se hace explícita

*Albert Stevent Sánchez Diaz**
*Jairo Alberto Acuña Quiroga***
*Jerson Leonardo Caro Reyes****

RESUMEN

Presentamos una experiencia de aula desarrollada en el espacio de formación de Tecnología en el aula del proyecto curricular Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, en la cual se pretende hacer uso por una parte del álgebra lineal para caracterizar las secciones cónicas, y por otra, el hacer uso de las TIC como herramienta en la demostración matemática. En este artículo encontraremos algunos referentes teóricos necesarios para desarrollar la actividad, una descripción breve de la misma, seguida de los diferentes avances obtenidos con el desarrollo de esta, y para finalizar hacemos una reflexión con respecto al aporte brindado por el desarrollo de esta actividad en estudiantes para profesor de matemáticas.

Palabras clave: sistema de representaciones, cónicas, álgebra lineal, actividad, TIC

* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: tnevets@hotmail.com
** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: jaacunaq@correo.udistrital.edu.co
*** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: leonardoreyes0202@hotmail.com

CONTEXTUALIZACIÓN

La experiencia está centrada en cómo los estudiantes para profesor de matemáticas (EPP) del espacio de formación de Tecnología en el aula, de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, hacen uso de algunos conceptos del álgebra lineal para caracterizar las secciones cónicas y cómo hacen uso de las TIC como herramienta de demostración en una situación problema. La necesidad de realizar esta actividad surge de observar el mínimo trabajo que se desarrolla en la licenciatura con respecto al trabajo de álgebra lineal y de las secciones cónicas. Esta última hace parte de los conocimientos básicos en la Educación Básica, y con esto es necesario que nosotros como docentes tengamos un conocimiento más amplio que el que se considera que los estudiantes deben manejar.

REFERENTES TEÓRICOS

Tomamos como referencia, en primer lugar, la definición de cónica que Del Río (1996) plantea en su libro, la cual es:

> El lugar geométrico de los puntos del plano tales que el cociente entre sus distancias a un punto fijo, denominado foco, y a una línea recta, denominada directriz, es siempre el mismo, es decir, es constante, cuando esta constante es menor a la unidad es una elipse, cunado es igual, una parábola y cuando es mayor, una hipérbola (p. 41).

Las secciones cónicas se pueden clasificar en tres: elipse, hipérbola y parábola; cada una de estas se presentan en tres formas canónicas de ecuaciones de segundo grado: la primera para la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ para la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$ Y para la parábola $y^2 = kx$ (Del Río, 1996).

Por su parte, Fraleigh (1998) propone como aplicabilidad del cálculo de los valores propios de una matriz, caracterizando las formas cuadráticas con el producto de dichos valores. Nos propone, además, un camino específico para llevar al aula esta propuesta, en tres pasos, a saber: **1)** Como primer paso propone la conceptualización de lo que se refiere una forma cuadrática, y cómo expresar esta como una matriz simétrica de orden $n \times n$ (donde n es el número de variables de la forma cuadrática). **2)** El cálculo de los valores propios de una matriz *A*, viendo este como los valores que puede tomar la variable λ, en la ecuación $Det(A-\lambda I)=0$. **3)** Finalmente, se encuentra la caracterización de las formas cuadráticas, dependiendo del producto de los valores propios que la representan; en nuestro caso, como trabajamos sobre el plano cartesiano, tendríamos siempre dos variables; por tal razón tendremos siempre una matriz de orden 2×2 y la caracterización es: Parábola si $\lambda_1 \lambda_2 = 0$, Elipse si $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ y Hipérbola si $\lambda_1 \lambda_2 < 0$.

Por otro lado, con la utilización de programas de geometría dinámica se puede evidenciar un proceso de visualización tanto interna como externa en la que según Castro (s. f.) el estudiante interpreta el concepto o el problema, lo manipula mentalmente (uso de las representaciones internas) y lo expresa sobre un soporte material (representaciones externas). En este sentido, la principal ventaja del manejo de las TIC en la educación consiste en que las figuras dejan de ser estáticas, y de forma dinámica permiten observar distintos puntos de vista e incluso interactuar con ellas al modificar ciertas condiciones en el diseño y analizar qué es lo que ocurre (Mora, 2007). De este modo, una vez incluida la computadora en las clases, según Cuevas Vallejos (2000) la computadora se ve como una herramienta que nos permite la creación de ambientes de aprendizaje inteligentes, propósitos generales en la labor cotidiana del docente y/o alumno o como herramienta para generar matemática.

En cuanto a la metodología usada, se tomó como base fundamental la teoría de la objetivación de Radford (2006), donde se propone que una comunidad de aprendizaje tiene como fin la objetivación del saber; además, considera que cada miembro de la comunidad debe dar a conocer a los demás sus procesos realizados frente a determinado problema. Finalmente, en toda comunidad de aprendizaje se plantea el trabajo en grupos pequeños, en donde intervienen tres fases: EL TRABAJO (es el que realizan cada uno de los grupos interactuando entre ellos para la resolución de la situación), INTERCAMBIO (luego de tener conclusiones por cada grupo pequeño, estos comparten y reflexionan con los demás grupos para tener nuevas y más fuertes conjeturas) y DISCUSIONES GENERALES (es un momento donde se valida en cada grupo pequeño, lo obtenido en la fase del intercambio).

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA DE AULA

La experiencia se basa en una construcción planteada en el libro L*ugares geométricos. Cónicas,* de la Editorial Síntesis:

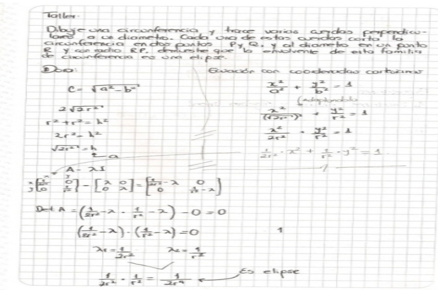
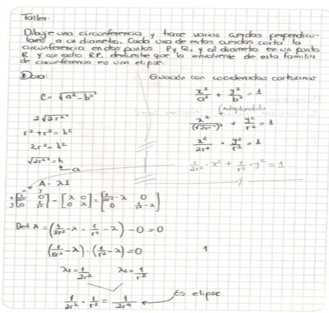
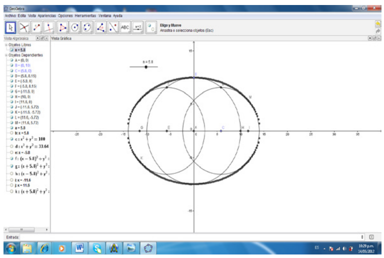
Dibuja una circunferencia y traza varias cuerdas perpendiculares a un diámetro. Cada una de estas cuerdas corta a la circunferencia en dos puntos, P y Q, y al diámetro en uno, R. Traza las circunferencias centradas en R y con radio RP. Demuestre que la envolvente de esta familia de circunferencias es una elipse (p. 198).

Teniendo en cuenta esta situación se propone desarrollarla a partir del trabajo en grupos pequeños en los cuales deberán enfrentar la situación. Posteriormente se realiza una socialización entre los diferentes grupos para generar nuevas conjeturas, y al finalizar generaremos el momento de validación de lo realizado por los diferentes grupos, todo esto basado en la teoría de la objetivación (Radford, 2006).

LOGROS Y DIFICULTADES

A continuación se mostrarán los resultados encontrados en el desarrollo de la actividad. A su vez relacionaremos el uso de las tecnologías en el aula con la resolución de una situación planteada, en la que se pide a los estudiantes usar los valore propios de una función cuadrática en el proceso de la demostración. En la siguiente tabla se evidenciarán dichos resultados:

	Resolución de problemas	*Uso de las tecnologías*
Algebra lineal (valores propios de una matriz)	En el proceso de la resolución de problemas, se observa que los estudiantes tienen la capacidad de tanto de representar de manera matricial una forma cuadrática con dos y tres variables, como encontrar los valores propios de esta matriz, como se observa a continuación: 	En cuanto al uso de las tecnologías en el aula, no se trabajó de forma específica con el cálculo de los valores propios de una matriz. En ese sentido se observa que esta fue una dificultad en el sentido de encontrar valores propios de una matriz de 3x3, puesto que inmersa está una ecuación cúbica, y para obtener los valores propios es necesario utilizar métodos muy complejos como el de Cardano & Tartaglia.

	Resolución de problemas	*Uso de las tecnologías*
Secciones cónicas	Es importante resaltar que los estudiantes ya habían trabajado con secciones cónicas, por tanto, conocían la expresión canónica de estas, entre ellas elipse, hipérbola y parábola. Por otra parte, hubo dificultades en el momento de comprender el hecho de que para poder expresar la ecuación de una cónica en una matriz era necesario hacer de esta una forma cuadrática; por lo tanto, esta debía pasar por el origen del sistema de coordenadas (el caso de la parábola), o que dicho origen sea el punto medio de los focos (como es el caso de la elipse e hipérbola).	En cuanto al uso de las tecnologías con respecto a las secciones cónicas, se usa el programa Geogebra, donde se construyen estas secciones y el programa mismo calcula la ecuación, y es aquí donde se llega a la ecuación canónica de cada una de estas, teniendo como referencia la traslación de la gráfica, tanto en el eje y como en el eje x.
Demostración de la situación	Se observa que hubo dificultad en el desarrollo de la situación, era necesario identificar cuál era la función de la cobertura de la familia de circunferencias, y a partir de esto observar si esta era una forma cuadrática y si así fuese qué clase de cónica sería. Pese a esto, un grupo concluyó partiendo de que esta ya era una cónica, y encontró sus semiejes, como se observa a continuación:  Aunque no se podría ver este proceso como una demostración, sí se aplica todo lo visto en clase que es lo importante de la actividad como tal, como se observa en la siguiente imagen: 	En la demostracion como tal se observa que los estudiantes utilizan el programa geogebra como modelador de la situación, pero no la usan en el desarrollo de la misma. En ese sentido nos vemos en la necesidad de profundizar y, como parte del proceso, de las discusiones generales (Radford, 2006), demostrar con rigor el porqué la cobertura de la familia de las circunferencias es una elipse, a partir de lo visto en clase añadiendo el uso de la derivada parcial y de las tecnologias en el aula como justificación de la demostración específica, como se observa a continuación; cabe resaltar que esta demostracion hará parte de la exposicion del proyecto. 

REFLEXIÓN

Hemos evidenciado que los diferentes software o TIC son utilizados por los estudiantes para profesor como herramienta de modelación de diferentes situaciones, limitando el potencial de estos instrumentos tienen. Es importante que los EPP refuercen el proceso de demostración, ya que fue donde se evidenciaron dificultades, además de los problemas de lograr identificar una forma cuadrática como cónica o de caracterizarlas, lo cual de cierta manera se logró avanzar en el desarrollo del álgebra lineal. En este sentido es donde se observa la importancia de lograr relacionar los diferentes tipos de representación de un mismo objeto matemático, en este caso, las cónicas: desde la expresión algebraica, expresada también de manera matricial, o a través de la representación geométrica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Del Río, José (1996) *Lugares geométricos: Cónicas*. Madrid. Editorial: Síntesis.

Radford, L (2006) Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Relime*, Número especial,pp. 103 -129 Fraleigh, John. (1998) Álgebra lineal. México: Addison-Wesley

Castro, E. (S. F.). *Representaciones y modelización*. Universidad de Granada. [Consulta: 12 de abril de 2012]. Disponible en: http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/CastroE97-2531.PDF

Mora Sánchez, J. A. (2007). *Geometría dinámica en secundaria*". [Consulta: 2 de abril de 2011].

Cuevas Vallejos, C. (2000) ¿Que es software e*ducativo o software para la enseñanza?* [Consulta: 2 de abril de 2011] Disponible en: http://www.matedu.cinvestav.mx/~ccuevas/SoftwareEducativo.htm

¿Cómo se podría enseñar la factorización de polinomios integrando calculadoras simbólicas y lápiz/papel?

*María Fernanda Mejía Palomino**

RESUMEN

En las prácticas de enseñanza es común factorizar polinomios usando un conjunto de reglas para manipular expresiones algebraicas con lápiz/papel. Esto lleva a encasillar a la factorización a una sola representación matemática, la algebraica, y a un proceso matemático, la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos. Por lo que el tiempo de trabajo requerido por un estudiante para expresar un polinomio en su forma factorizada con lápiz/papel no sea corto. Lo anterior puede incidir en las escasas conexiones que se dan entre la factorización y otros conceptos. Sin embargo, la integración de calculadoras simbólicas podría dar paso a mirar cómo lograr otras situaciones de enseñanza que fortalezcan las conexiones de la factorización con otros conceptos, como los ceros de un polinomio.

Palabras clave: factorización de polinomios, técnicas, calculadoras simbólicas.

* Escuela Normal Superior Farallones de Cali. Universidad del Valle. Dirección electrónica: mafanda1216@gmail.com.

CONTEXTUALIZACIÓN

A mediados del año 2000 el Ministerio de Educación Nacional donó a varias instituciones educativas públicas del país un equipo de calculadoras simbólicas y otros artefactos, con el objetivo de mejorar la calidad en la educación en Colombia al incorporar Tecnologías de la Comunicación e Información (TIC). Por esta época varios profesores en ejercicio y en formación aprendieron sobre el uso de estas calculadoras para la enseñanza de las matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 2004).

Por lo anterior, la autora de este trabajo se ha interesado en construir algunas situaciones de enseñanza para la factorización de polinomios con las calculadoras simbólicas (particularmente con el uso del sistema de álgebra computacional (en adelante CAS)) y lápiz/papel (L/P), para ser aplicadas en la institución educativa en la que labora (Mejía, 2004; Mejía, 2011).

Por otra parte, este trabajo toma algunos referentes de la ingeniería didáctica. Esta metodología la define Douady (1995) como el conjunto de secuencias de clase, diseñadas, organizadas y articuladas por el profesor "ingeniero", para lograr que sus estudiantes aprendan.

La ingeniería didáctica se caracteriza porque sus productos son construidos a partir de un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. A diferencia de otras metodologías basadas en la experimentación, en esta se recurre al registro de estudios de caso y su validación es, en esencia, interna, basada en la confrontación entre los análisis a priori y a posteriori (Artigue, 1995).

La experimentación se realizó con 36 estudiantes de un curso de grado noveno, se destinaron tres semanas, 15 horas de clase, se inició el 30 de junio de 2009 y se finalizó el 15 de julio de 2009.

REFERENTES TEÓRICOS

En este apartado se van a presentar dos aspectos centrales en relación con la integración de calculadoras simbólicas, los fenómenos didácticos en ambientes de álgebra computacional y la génesis instrumental.

– *Fenómenos didácticos en ambientes de álgebra computacional.*

La introducción de los ambientes informáticos conduce al estudio de las restricciones y fenómenos didácticos ligados a los saberes matemáticos (transposición computacional). Estas restricciones tienen dos niveles: la representación y tratamiento interno de los saberes en la máquina y la representación y tratamiento en la interfaz. Este trabajo analítico de identificación de las restricciones es fundamental para comprender las funcionalidades del saber puesto en juego en el software (Artigue, 1997), y por otra parte, el conocimiento y prevención de los fenómenos didácticos puede generar situaciones que promuevan las actividades transformacionales como las presentadas por Mounier y Aldon (1996; citado por Lagrange, 2000).

Algunos fenómenos didácticos desde un CAS han sido identificados por Artigue (1997) y por Trouche (2005) como:

- El fenómeno de pseudotransparencia que es el conflicto que se genera entre lo que se ingresa y lo que se ve en la interfaz del software. Son los cambios que ocurren en las maneras de representar los objetos (desde lo interno y la interfaz). Contrariamente a lo que podría pensar, estos desfases perturban más el funcionamiento didáctico que lo que parece.
- El fenómeno de doble referencia: se relaciona con la doble interpretación de un problema, dependiendo del ambiente de trabajo, por ejemplo, el tratamiento en lápiz/papel y un CAS de las actividades de factorización de los polinomios propuestas por Mounier y Aldon (1996; citado por Lagrange, 2000) muestran resultados diferentes que conllevan a la confrontación de las técnicas usadas en cada ambiente.

Los fenómenos didácticos generalmente han surgido en experimentos de bastante tiempo, donde los estudiantes tienen calculadoras a su disposición (tanto en la escuela como en casa). Este parámetro es importante, porque los estudiantes se apropian del manejo de la calculadora y logran obtener un dominio de las técnicas que requieren para realizar las tareas (Trouche, 2005).

En cuanto a la integración de CAS es imposible eludir los fenómenos didácticos que se ligan a los procesos mencionados. Sin embargo, es necesario que el docente los conozca y determine las condiciones favorables para volverlos productivos.

– *La génesis instrumental*

La génesis instrumental es un proceso de construcción de un instrumento por un sujeto, que va desde la utilización de un artefacto a la construcción de esquemas para realizar un tipo de tarea. Un artefacto puede ser material o abstracto, ayuda o sustenta toda actividad humana al hacer un tipo de tarea (las calculadoras o un algoritmo para hallar la solución de una ecuación cuadrática son artefactos), mientras que el instrumento es lo que el sujeto construye desde el artefacto (Trouche, 2005).

Es necesario aclarar que los instrumentos no le están dados al sujeto desde un primer momento; este los elabora a través de actividades de génesis instrumental, en el proceso de instrumentalización y de instrumentación. El proceso de instrumentalización está dirigido hacia el artefacto como: selección, agrupación, descubrimiento, producción e institución de funciones, usos desviados, atribución de propiedades, personalización, transformaciones del artefacto, de su estructura, de su funcionamiento.

El proceso de instrumentación está relacionado con el sujeto, en donde se da la emergencia y la evolución de los esquemas de utilización: su constitución, su evolución por acomodación, coordinación, y asimilación recíproca, la asimilación de artefactos nuevos a los esquemas ya constituidos (Rabardel, s. f.).

Logros y dificultades evidenciadas

Algunas dificultades surgieron en los diseños de las situaciones didácticas porque se dejaron de considerar algunos aspectos a priori que solo en la práctica se evidenciaron. Algunos relacionados con la estructura de las preguntas, el tipo de variables, los conocimientos previos, entre otros. Esto determina que los diseños se nutren cada vez que se confrontan con la práctica.

Por ejemplo, en todas las preguntas los estudiantes hacen uso de la lengua natural. Si bien, los estudiantes se arriesgan a hablar y escribir de las matemáticas, esta tarea no es fácil, porque necesitan de una lengua natural especializada.

A diferencia de otras investigaciones, en el desarrollo de las tareas se necesita que los estudiantes previamente hayan trabajado las técnicas L/P porque el propósito es usarlas para entender o poder usar las técnicas CAS que son nuevas para ellos. No se descarta que en el uso de ambas, se dé mutuamente una mejoría, en algunos episodios se observa cómo los estudiantes rectifican sus resultados en L/P al ver los resultados de aplicar una técnica CAS. De alguna manera la complementariedad de ambas técnicas lleva al surgimiento de una explicación teórica que da cuenta, en parte, de qué es lo que hace esta técnica y para qué sirve, esto propende al mejoramiento del uso de las técnicas (ver tabla 1).

Tabla 1. Diálogo: 30 de junio de 2009 en t1: [13: 33 a 13:42 min.] y t2: [0:00 a 3:00 min.] en relación a la situación 1.

Tarea. La expresión dada es $2x(x-1)+(3x(1-x),$ pero al ingresarla en la calculadora y dar [Enter] de la aplicación Home de la Calculadora se obtiene $-x(x-1),$ ¿qué fue lo que realizó la calculadora?

Juan: la séptima tampoco sé.

Olga: parece que se hubieran reunido términos semejantes

Juan: parece que 3 o 2 hubiesen sido negativos, y que $3x$ y $2x$ nos quedará menos una x.

Juan: ahora no sé, parece que la calculadora lo hizo mal (no dudan de sus procedimientos L/P si no de los resultados de la calculadora). Si multiplico los paréntesis y luego los sumo, multiplico esto por esto (señala en la calculadora los términos que se multiplican). Esto da $3x$–$2x$. Espérate un segundo (escribe el procedimiento en su hoja de respuestas, realiza los productos indicados). Esto más esto da 6x y esto más esto da –$6x$, entonces da cero (parece que realizó de manera incorrecta el producto porque todos los términos son lineales).

María: menos de dónde sale.

Juan: sabes qué, espérate. Tal vez multiplicó solamente uno. Puedo haber hecho esto. Multiplicó esto por esto. Ya sé, multiplicó un solo paréntesis, se reúne aquí y queda (x – 1) por $2x$ más $3x$ porque – $4x$ y da $2x$ negativo (borra lo que escribió $2x + 3x$) luego escribe (x – 1)($3x$– $2x$) y esto aquí da menos uno, digo da uno. Algo da negativo por ahí, una mayor tiene que dar negativo, para que dé menos x. No sé el proceso.

Análisis:

Juan ha escrito en su hoja de respuesta el siguiente procedimiento para mirar qué es lo que ha hecho la calculadora y escribir la explicación en la columna C de la tabla de la situación 1.

2x(x– 1) + (3x(1– x)

2x(x– 1) + 3x– 4x

(x– 1) 3x – 2x

En un inicio del diálogo, Juan efectúa los dos productos y esto lo habría llevado a la siguiente expresión $2x^2-2x+3x-3x^2=-x^2+x$ y al tomar la expresión reducida y al sacar como factor común habían obtenido la respuesta dada por la calculadora. Pero el argumento se desvía porque han efectuado incorrectamente los productos, al realizar la multiplicación de ($3x$(1– x) obtienen $3x$– $4x$, esto nos indica que efectuaron una suma entre $3x$ y x, y no una multiplicación. También reducen $2x$ con –$4x$ y deberían multiplicar $2x$ con (x– 1) .

Al revisarse su hoja de respuesta la justificación que dan es la siguiente: "*se invirtieron los signos en el segundo paréntesis y se unió términos semejantes*". Parece que al final lograron encontrar el procedimiento solicitado porque la descripción se relaciona con la aplicación de una técnica de factorización (factor común por agrupación de términos). Sin embargo, no se muestra el procedimiento de factorización en las pregunta 1.2.b. o 1.2.e.

En cuanto a las técnicas L/P, las de mayor dificultad son las relacionadas con la factorización de polinomios, y la ejecución de una regla vinculada a la forma de la expresión algebraica; muchos estudiantes no distinguían qué técnica seleccionar y cómo usarla, mientras que para realizar los gráficos en L/P no tuvieron inconvenientes en determinar algunas variables visuales que facilitaban hacer un dibujo semejante al obtenido en la calculadora simbólica.

REFLEXIÓN FINAL

Finalmente, estas experiencias han permitido refutar algunas afirmaciones que niegan la posibilidad de trabajo complementario de las calculadoras simbólicas y Lápiz/Papel, los vínculos conceptuales de la factorización de polinomios con otros conceptos y la importancia del trabajo técnico para el desarrollo de la conceptualización. Se hace la invitación, para que los profesores en ejercicio y con acceso con las calculadoras simbólicas hagan uso del sistema de álgebra computacional (CAS) y generen nuevas situaciones de aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1997). Le logiciel «Derive» comme révélateur de phénomènes didactiques lies a l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics*, 33 (2), pp. 133-169.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En: M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución y su relación con el conocimiento. En: M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 61-96). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.

Mejía, M. (2004). *Análisis didáctico de la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas.* (Tesis de pregrado no publicada). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Mejía, M. (2011). *La factorización de polinomios de una variable real en un ambiente de Lápiz/Papel (L/P) y Álgebra Computacional (CAS).* (Tesis de maestría no publicada). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2004). *Tecnología informática: innovación en el currículo de matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media.* Bogotá, Colombia: Enlace Editores.

Lagrange, J-B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics,* 43 (1), pp. 1-30.

Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (ed.), *The didactical Challenge of symbolic Calculator* (pp. 137- 162). New York, E.U.A: Springer.

Rabardel, P. (s.f). Los hombres y las tecnologías II. *Perspectiva cognitiva de los instrumentos contemporáneos.* (M. Aslanides, Trad.) (Trabajo original publicado en 1995).

Unidad didáctica ecuaciones lineales con una incógnita

*Angela Patricia Cifuentes G.**
*Luz Estela Dimate M.***
Aura Maria Rincón V. ***
Myriam Patricia Villegas H.****

RESUMEN

En este documento se presenta el resultado del diseño, la implementación y la evaluación de una unidad didáctica sobre ecuaciones lineales con una incógnita para alumnos entre 13 y 14 años de grado octavo de la Educación Básica Secundaria en Colombia. Para el diseño de esta unidad, se tuvieron en cuenta las dificultades que presentan los estudiantes en la traducción al lenguaje algebraico, el planteamiento, la aplicación del algoritmo y la solución de problemas con ecuaciones lineales de primer grado. Con el fin de que el alumno alcance un aprendizaje efectivo de los procesos algebraicos, se incluyeron dentro de las actividades contextos, fenómenos y situaciones significativas, que conllevan a que la ecuación se use como herramienta fundamental en la resolución de problemas en contextos de la matemática, de otras ciencias y de situaciones reales.

* Gemad. Dirección electrónica: ap.cifuentes278@uniandes.edu.co),
** Gemad. Dirección electrónica: le.dimate241@uniandes.edu.co)
*** Gemad. Dirección electrónica: am.rincon254@uniandes.edu.co)
**** Gemad. Dirección electrónica: mp.villegas133@uniandes.edu.co)

CONTEXTUALIZACIÓN

En el proceso de construcción de la unidad didáctica se seleccionaron tareas y recursos, que ponen en juego de manera secuencial las capacidades de los alumnos y buscan que ellos comprendan el uso de la solución de ecuaciones en contextos propios. La implementación se realizó en el grado octavo de la Institución Educativa Departamental Betulia, de Tena Cundinamarca, durante 11 sesiones aplicando una secuencia de tareas, las cuales contribuyeron al desarrollo de las competencias formular, plantear, transformar y resolver problemas. Estas competencias fueron el punto de partida para establecer los objetivos de la unidad didáctica. El alumno, en el desarrollo de cada tarea, debe poner en juego acciones o capacidades que van orientadas al cumplimiento de cada uno de los objetivos planificados y que se relacionan directamente con el planteamiento de ecuaciones, el algoritmo de la solución y la aplicación de las ecuaciones en la resolución de problemas. Las capacidades se evidencian durante el desarrollo de una tarea mediante secuencias denominadas caminos de aprendizaje. Durante la planificación de la unidad didáctica también se realizaron previsiones para el momento en donde aparecieran errores y dificultades en la transición de una capacidad a otra o durante el paso de un objetivo a otro.

Para el proceso de evaluación de los alumnos se escogieron tareas especiales de las ya seleccionadas para cada objetivo. Para ellas se diseñaron rúbricas en las que se establecieron criterios de éxito, teniendo en cuenta las capacidades clave que se ponen en juego. Al finalizar la implementación de la unidad didáctica, se aplicó un examen final que recogía los temas trabajados en las diferentes sesiones para, con sus resultados, validar el éxito de las actividades. Asimismo, se realizó un seguimiento de la actitud, la participación, el nivel de motivación y el cumplimiento de los caminos previstos de aprendizaje por parte de los alumnos.

Se crearon instrumentos de recolección de datos como el diario del alumno, el diario del profesor, las parrillas de observación, el examen final y la autoevaluación; cada uno de ellos cumplía una función específica. Estos instrumentos dan validez al proceso de evaluación formativa, en la que se valora, no solo el aprendizaje sino también la enseñanza.

REFERENTES TEÓRICO-PRÁCTICOS BÁSICOS

La unidad didáctica está fundamentada en la información que suministra la Ley General de Educación y los estándares de competencias, emanados del

Ministerio de Educación Nacional y en el análisis didáctico, a saber: análisis conceptual, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación, (Rico, 1997a, pp. 387-388). Estos análisis permiten identificar y establecer la diversidad de significados de la ecuación lineal, como también escoger los elementos que serán objeto de instrucción, durante la implementación. A continuación presentamos una breve descripción de cada uno de ellos.

El análisis de contenido es el procedimiento que permite identificar y organizar la multiplicidad de significados de un concepto matemático. En este análisis se consideran los diferentes modos de expresión y de uso del elemento matemático, las conexiones con distintas estructuras, la utilización de diferentes procedimientos, la diversidad de los problemas que pueden interpretarse, abordarse y resolverse. Todo esto con la finalidad de organizar tareas que permitan a los alumnos negociar y construir significados en el aula. A su vez, este análisis está compuesto por tres organizadores del currículo: la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología.

En el análisis cognitivo, el foco de atención es el aprendizaje del estudiante. Se describen las expectativas de aprendizaje, es decir, lo que se espera que los estudiantes aprendan sobre las ecuaciones lineales de primer grado y la forma en que van a desarrollar ese aprendizaje, como también los errores y dificultades que se pueden presentar durante el proceso.

El análisis de instrucción permite diseñar, analizar y seleccionar las tareas que constituyen las actividades de enseñanza y aprendizaje y que son objeto de la instrucción.

Con el análisis de actuación se pretende establecer en qué medida los estudiantes alcanzan los objetivos de aprendizaje y en qué medida las tareas correspondientes, contribuyen al desarrollo de las capacidades y competencias propuestas. Este análisis está directamente relacionado con la evaluación.

DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA EXPERIENCIA DE AULA

La implementación se inició el 27 de marzo del 2011. La unidad se estructuró en cinco partes: la primera correspondió a la aplicación de la prueba diagnóstica, la cual permitió identificar dificultades que presentaban los alumnos en los conocimientos previos-básicos, necesarios para abordar la unidad didáctica y así realizar una sesión de retroalimentación en la que se utilizaron las ayudas previstas para superar las dificultades. La segunda parte fue el desarrollo del primer objetivo: "Utilizar el lenguaje algebraico para traducir enunciados, plantear ecuaciones lineales, aplicando la noción de igualdad y equilibrio en diferentes sistemas de representación"; para ello se presentó a los alumnos, el tema, las expectativas de aprendizaje, el sistema de evaluación, la metodología de trabajo y las tareas correspondientes "El trueque", Traduciendo, "¿Cuáles son ecuaciones? y la balanza". La tercera parte corresponde al desarrollo del segundo objetivo: "desarrollar el algoritmo de la solución de ecuaciones lineales con una incógnita, usando las propiedades fundamentales de las operaciones con números reales, para encontrar valores desconocidos"; para este objetivo se desarrollaron las tareas "Solucionando ecuaciones", "Hacer y deshacer" y "El cuadrado mágico". Estas tareas permiten solucionar ecuaciones aplicando diferentes métodos (balanza, sustitución, transposición de términos y diagrama). La cuarta parte concierne al tercer objetivo: "Utilizar las ecuaciones lineales como herramienta para la solución de problemas"; para este objetivo se diseñaron las tareas "El gato hidráulico", "El granjero" y "La mezcla". La última parte se dedicó a la aplicación de la evaluación final y su respectiva retroalimentación.

LOGROS Y DIFICULTADES

Logros. La nueva experiencia de aprendizaje presentada a los educandos generó en ellos cambio en la forma de afrontar los retos que les impone el área; se observaron estudiantes más críticos, auto-reflexivos, comprometidos con su aprendizaje y responsables con sus deberes. La inclusión de recursos informáticos como "álgebra con papas y Equations Methods", materiales lúdicos como "Hands on Equations" y formas de agrupamiento, posibilitaron el alcance de las expectativas de aprendizaje planificadas.

El papel del docente como orientador y no como instructor fue importante, porque el estudiante se sintió valorado y actor principal de su aprendizaje.

En cuanto al análisis didáctico, se llevó a cabo el 91% de las tareas planificadas para la unidad didáctica. Las capacidades planificadas fueron desarrolladas en su mayoría, favoreciendo el desarrollo de los objetivos propuestos. La verificación de las expectativas nos permite inferir que las tareas contribuyeron al desarrollo de competencias como el uso del "Lenguaje simbólico", "Representar", "Comunicar" y "Usar material manipulativo y tecnológico".

Con la implementación se pudo observar que los estudiantes utilizaron el lenguaje algebraico para traducir enunciados, desarrollaron el algoritmo de la solución de ecuaciones lineales con una incógnita y utilizaron las ecuaciones lineales como herramienta para la solución de problemas "Para esto hicieron uso de los sistemas de representación verbal, simbólico, numérico y manipulativo, plantearon y solucionaron ecuaciones lineales a través de la utilización de las balanzas y de la aplicación de las propiedades fundamentales de las operaciones con números reales, para encontrar valores desconocidos".

Dificultades. Analizando el diseño, se encontró que se planificó mal el tiempo, ya que no se tuvo en cuenta la amplitud del foco de contenido escogido, el número de tareas, la riqueza y cantidad de materiales propuestos, la magnitud de las expectativas y el tiempo para diligenciamiento de algunos de los instrumentos de evaluación.

Otro punto débil fue la redacción de instrucciones en los enunciados de algunas tareas puesto que no fueron claras y suficientes para que los estudiantes las abordaran de forma autónoma.

Se encontró que las actividades extracurriculares que deben cumplirse en los colegios interfieren los procesos llevados en la planificación de una sesión de clases.

El uso de las aulas de informática en una institución oficial como en la que se implementó es limitado, ya que existe por cada centro una o dos, que se aprovechan la mayoría del tiempo por los docentes de informática.

REFLEXIÓN FINAL

El nivel de detalle usado en el diseño de la unidad didáctica permite abordar cada uno de los elementos y variables que intervienen en el proceso de comprensión y aprendizaje de un elemento matemático como las ecuaciones lineales con una incógnita.

La Unidad didáctica propuesta fomenta el uso de las TIC y de algunos materiales, con el fin de aprovechar su potencialidad en relación con la motivación, la autoestima y las expectativas de éxito en la matemática.

La unidad didáctica propuesta está conformada por una secuencia de tareas que involucran una metodología que favorece el aprendizaje constructivo individual y grupal, pues contribuye a crear ZDP y a fortalecer el establecimiento de acuerdos y la toma de decisiones ante los retos planteados.

La fundamentación usada para el diseño de la unidad didáctica hizo que esta fuera coherente, significativa y práctica, ya que la implementación contribuyó contundentemente a que los estudiantes se mantuvieran motivados y construyeran sus conocimientos, permitiendo así el logro de las expectativas propuestas.

La evidencia sobre la movilización de las capacidades nos permite inferir que se desarrollaron competencias matemáticas, especialmente el uso del lenguaje simbólico, representar, comunicar y usar material manipulativo y tecnológico, lo que redundará en los resultados en pruebas, en lo referente al pensamiento variacional y de sistemas algebraicos.

El diseño e implementación de unidades didácticas es un proceso de mejora continua en la medida que permite enriquecer el diseño y adaptarse a nuevas situaciones y/o a diferentes entornos demográficos.

REFERENTES BIBLIOGRÁFICOS

Gómez, P. (2007). Capítulo 2. Análisis didáctico. Una conceptualización de la enseñanza de las matemáticas. En P. Gómez, Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998). Matemáticas. Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá DC, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá DC, Colombia: Autor.

Ponte, J. P. y otros. (1997). Dinámica de aula. En Didáctica da Matemática. Lisboa: Ministerio de Educación, PRODEP.

Rico, L. (1997a). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En L. Rico (Ed.), Bases teóricas del currículo de matemáticas en Educación Secundaria (Pp. 377-414). Madrid: Síntesis.

Zabala, A. (1993). Los enfoques didácticos En C. Coll (ed.). El constructivismo en el aula. Barcelona, Grao.

Enseñanza de nociones básicas de probabilidad por medio del juego de dados

*Yeimy Rodríguez García**

RESUMEN

La siguiente es una propuesta didáctica para la enseñanza- aprendizaje de la probabilidad clásica en el ámbito escolar. El trabajo se desarrolló con estudiantes de grado octavo, haciendo uso de un problema clásico de la probabilidad, propuesto en el siglo XVII por el Príncipe de Toscana a Galileo Galilei.

* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: yeimy.rodriguez111@yahoo.com

CONTEXTUALIZACIÓN

La implementación de la propuesta didáctica se hace en Bogotá, en el colegio distrital José Félix Restrepo, ubicado en el barrio el Restrepo, con estudiantes de octavo grado, para el período del 2011. La experiencia de aula se centra en la enseñanza-aprendizaje de nociones básicas de probabilidad por medio del juego de dados, para lo cual se diseña una unidad didáctica bajo la teoría de situaciones didácticas, propuesta por Brousseau.

REFERENTES TEÓRICO-PRÁCTICOS BÁSICOS

Enseñanza de la probabilidad. El mundo está inmerso en la aleatoriedad y la incertidumbre; históricamente el estudio de la probabilidad se remonta al siglo XVI. Las primeras aplicaciones se relacionaban básicamente con los juegos de azar: los jugadores utilizaron el conocimiento de la teoría de la probabilidad para desarrollar estrategias de apuesta.

En enseñanza-aprendizaje de la probabilidad, Godino (2004) propone actividades de experimentación y estimación frecuencial de probabilidades, donde se facilita a los alumnos "dispositivos generadores de resultados aleatorios", como dados, monedas, fichas, ruletas, etc., con la finalidad de que experimenten y adquieran una experiencia de lo aleatorio. En este proceso es recomendable que el profesor organice la recolección de datos, la representación gráfica de los resultados y la discusión de los mismos, animando a los alumnos a expresar sus creencias previas sobre los fenómenos aleatorios y a contrastarlas con los resultados experimentales.

Los adolescentes, pueden hacer juicios probabilísticos, en situaciones sencillas eligiendo aquella que ofrezca más posibilidades, comienzan resolviendo problemas que impliquen comparación de probabilidades de un mismo suceso A en dos experimentos diferentes sólo en situaciones donde, el número de casos favorables o el número de casos no favorables a A son iguales en ambos experimentos. Posteriormente pasan a resolver problemas en que los casos se pueden poner en correspondencia mediante una proporción. (Godino 2004, p. 229).

Glayman y Varga (1975), citado por Godino, J., Batanero, C. & Cañizares, M. J. (1987), recomiendan un proceso de enseñanza de la probabilidad en tres etapas: la experimentación, el razonamiento elemental y la medida de la probabilidad.

La experimentación: Es la primera etapa para familiarizar al niño con el mundo probabilístico, y consiste en una amplia experimentación, manipulando material variado (dados, peonzas, monedas, bolas, etc.). Cada experiencia se repite muchas veces en las mismas condiciones y luego se propone a los niños que traten de adivinar el resultado con el objeto de que capten las propiedades inherentes a fenómenos aleatorios.

Razonamiento elemental: Es la segunda etapa –razonamiento elemental- consiste en proponer juegos que permitan comparar cualitativamente las probabilidades de ciertos sucesos.

Medida de la probabilidad: Se propone el uso de fracciones, surgidas de las frecuencias, como medida de la probabilidad. El aprendizaje y la utilización de este instrumento se podrán ir haciendo simultáneamente con el estudio de las situaciones y vendrá motivado por ellas (Godino, J., Batanero, C. & Cañizares, M. J., 1987, p. 55).

Propuesta de enseñanza de objetos estocásticos. Según Chamorro (2003), el aprendizaje se genera a través de situaciones didácticas, pero un concepto no puede ser aprendido a partir de una sola clase de situaciones; requiere de aquellas en las que el concepto interviene, las que lo dotan de sentido.

La teoría de las situaciones didácticas propuesta por Guy Brousseau (1986) se basa en una aproximación constructivista, la cual actúa bajo el principio de que una noción se construye en un ambiente de situaciones de enseñanza, creando un discurso hecho tanto por el maestro, como por los alumnos, quienes deben pasar por cuatro situaciones en el aula, mientras se desarrolla una situación didáctica:

- Situaciones de acción: ensayo y error que hace el alumno para resolver el problema.
- Situaciones de formulación: el alumno intercambia información con maestro y compañeros.
- Situaciones de validación: el estudiante justifica la pertinencia y la validez de la estrategia usada, del modelo empleado para la resolución de la situación. Hay un intercambio de información que lleva al alumno a la revisión.
- Situaciones de institucionalización: es un proceso a cargo del profesor; las respuestas de los alumnos deben ser transformadas a través de un proceso de re-descontextualización y re- personalización, para que dichos conocimientos puedan ser convertidos en saberes.

Cuando la situación problema recoge todas las características anteriores, se adapta en su desarrollo a cada una de las situaciones propuestas por Brousseau, (1986), entonces se le reconoce como situación fundamental.

DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA EXPERIENCIA DE AULA

Se diseña e implementa una secuencia didáctica enfocada a la enseñanza-aprendizaje de la probabilidad, el trabajo se desarrolló con estudiantes de grado octavo, haciendo uso de un problema clásico de la probabilidad, propuesto en el siglo XVII por el Príncipe de Toscana a Galileo Galilei:

> « ¿Por qué cuando se lanzan tres dados, obtenemos con más frecuencia la suma 10 que la suma 9, aunque hay las mismas formas de conseguir 9 que 10?».

Dicho problema es llevado al aula como situación fundamental, para la enseñanza de conceptos básicos entre los que se encuentran: experimento aleatorio, espacio muestral, suceso o evento, técnicas de conteo y regla de Laplace. La situación se implementa bajo la metodología de la teoría de situaciones didácticas propuesta por Brousseau, y se trabaja con dispositivos aleatorios de tipo manipulativo: los dados, con la finalidad de que los alumnos experimenten y adquieran una vivencia de lo aleatorio. Durante el proceso fue del todo pertinente el papel del profesor, al momento de diseñar las guías de trabajo para que el alumno hiciese la recolección de datos, en forma ordenada. Además, la representación gráfica de los resultados de los experimentos aleatorios y la discusión de los mismos condujeron a que los alumnos expresasen sus creencias previas sobre los fenómenos aleatorios y a contrastarlas con los resultados.

LOGROS, Y DIFICULTADES EVIDENCIADAS

El docente debe entrar a evaluar diversos aspectos sobre su práctica docente como el diseño, la gestión y los resultados de sus clases; entonces en ese orden de ideas es pertinente evaluar la secuencia didáctica que se propone para la enseñanza-aprendizaje de nociones básicas de probabilidad. En cuanto al diseño, se evidencia que la situación fundamental fue del todo pertinente, y esto en parte porque tiene un peso histórico-epistemológico, puesto que, como ya antes se dijo, este es un problema clásico de la probabilidad.

Se identifican y analizan los roles de los estudiantes, el profesor, el entorno, el saber, la actividad y su estructura, a través del planteamiento de una situación fundamental que cuenta con las etapas de acción, formulación, validación e institucionalización.

Con la aplicación y gestión de la secuencia didáctica, se tiene que en cuanto al estado inicial de los alumnos, la mayoría tiene idea respecto a la probabilidad intuitiva, y la relacionan con juegos de azar; también se evidencia un poco de dificultad en la comprensión de los enunciados por lo cual los estudiantes no llegan a hacer inferencias coherentes, además no manejan con certeza qué es un evento equiprobable.

En la fase a-didáctica, los estudiantes realizan experimentos aleatorios, llevando algún tipo de registro de datos en la hoja de trabajo individual, que les permitió generar cierto tipo de conclusión o inferencia probabilística. En la situación de acción, los alumnos se valen del método de ensayo y error para tratar de resolver el problema. El diseño de la situación acción que se gestionó permitió que la mayoría de alumnos identificaran la regla de la suma y la multiplicación, valiéndose de ellas para establecer la cantidad de elementos que conforman un espacio muestral.

En la situación de formulación, se logra que el alumno intercambie información con el maestro y los compañeros. Aquí es importante mencionar que identifican la regla del exponente, y la emplean para determinar el cardinal del espacio muestral haciendo estructuras organizadas.

La situación de validación llevó a los alumnos a justificar la pertinencia de las estrategias abordadas y el modelo empleado para la resolución de la situación fundamental. Se da un intercambio de información que lleva a los estudiantes a la revisión. Una de las estrategias que posiblemente unifican el trabajo de los alumnos, en la resolución del problema, consistió en determinar todo el espacio muestral del experimento aleatorio, estableciendo a través de conteo que 27 veces aparecían la suma de 10, y 25 veces la de 9, al lanzar tres dados. Aquí se notan avances en los fundamentos teóricos usados por los alumnos para el cálculo de probabilidades, ya que consultan y usan la regla de Laplace, además emplean la regla del exponente para determinar espacios muestrales.

En lo que respecta a la institucionalización, que es un proceso a cargo del profesor, este se realiza apoyándose en el trabajo realizado por los estudiantes y las conjeturas elaboradas en torno a la situación fundamental.

En la evaluación, los estudiantes determinan espacios muestrales y aplican alguna técnica de conteo para encontrar el número de resultados diferentes, independientemente de que sea o no la adecuada para llegar a resolver la situación. En general aplican la regla de Laplace para calcular la probabilidad de ocurrencia de los eventos que se le proponen y la expresan en forma de fracción. Una dificultad que se evidenció es que al momento de determinar el espacio muestral del experimento aleatorio los alumnos hacían uso de la regla de la suma y no la del exponente, que era la que realmente se requería.

REFLEXIÓN FINAL

Es importante reflexionar sobre las dificultades que enfrenta el profesor de matemáticas al momento de evaluar el proceso de aprendizaje de sus alumnos; el docente debe contemplar aspectos relacionados con el estudiante y su capacidad matemática, avance cognitivo, entre otros. Además, la evaluación en matemáticas tiene una función social, política, pedagógica y profesional.

El actuar y el proceder de los alumnos involucra que este exprese en sus acciones lo que ¨sabe¨, lo que piensa, lo que cree o, mejor dicho, lo que ha construido. Un estudiante debe ser capaz de expresar sus conjeturas y de defenderlas con fundamentos claros y concisos, pero para poder llegar a hacerlo es necesario pasar por unas fases y vivir procesos, puesto que nada se construye de la nada.

De acuerdo con Chamorro (2003), el aprendizaje se genera a través de situaciones didácticas, pero un concepto no puede ser aprendido a partir de una sola clase de situaciones; requiere de aquellas en las que el concepto interviene, las que lo dotan de sentido. Entonces cabe mencionar que el maestro debe andar en la búsqueda constante de situaciones didácticas para luego proporcionar el medio didáctico en donde el estudiante reconstruye el conocimiento matemático dotándolo de sentido.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azcárate, P. & Cardeñoso, J. M. (2001). Probabilidad. Madrid, España. Editorial Síntesis.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, VII (2), pp. 33-115.

Chamorro C. (2003). Didáctica de las matemáticas para primaria. Parte 1, fundamentación. Herramientas de análisis en didáctica de las matemáticas. Madrid (España): Pearson.

Godino, J., Batanero, C. & Cañizares, M. J. (1987). Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares. Madrid España. Editorial Síntesis.

Godino, Juan D. (2004). Didáctica de las matemáticas para maestros. Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada.

Construyendo una nueva ciudad

*Jaison Fernando Ariza Ardila**
*Edwin David Ferro***

RESUMEN

La presente propuesta está fundamentada en una serie de actividades estructuradas en un proyecto de aula llamado Construyendo una nueva ciudad, gestionado en un Instituto Educativo Distrital, con el fin de potenciar el pensamiento geométrico y los sistemas de medidas en estudiantes de grado cuarto, a partir de la planeación y elaboración de una maqueta que implican el uso de sistemas de coordenadas, la noción de área, perímetro, la aplicación de proporcionalidad, entre otros aspectos.

Palabras clave: proyecto de aula, geometría, sistemas de medidas.

* U. Distrital F. J. C. Dirección electrónica: jaison.punk@hotmail.com
** U. Distrital F. J. C. Dirección electrónica: davidferroud@hotmail.com

CONTEXTUALIZACIÓN DEL PROYECTO

Esta es una renovadora propuesta que por medio de la construcción física, a escala, de una ciudad, potencia los pensamientos matemáticos, específicamente el métrico y el espacial-geométrico. ¿Por qué proyecto de aula? Como lo expresa Olga León (s. f.) el proyecto de aula puede ser visto como una estrategia pedagógica que permite potenciar los aprendizajes, al hacerlos más significativos procesuales y contextualizados, particularmente en cuanto al desempeño sociocultural. En este sentido, posibilita, entre otras cosas, la inserción de la escuela en la vida cotidiana, el abordaje de los intereses propios de los estudiantes, y el establecimiento de conexiones entre todos los procesos de aprendizaje.

Es así como, desde los sistemas de medidas, se trabaja en la comparación y ordenamiento de objetos respecto a atributos medibles, se realizan estimaciones de medida requeridas en la resolución de problemas relativos a la vida social, económica y científica; todo esto a través de la elaboración de objetos que componen la urbe y los cuales están, además, involucrados con la utilización de longitudes áreas, volúmenes y pesos (por ejemplo, la elaboración de un edificio de x metros cúbicos en un espacio de x metros cuadrados).

Respecto al pensamiento geométrico espacial se trabajan la predicción, estimación, comparación y clasificación de figuras de dos y tres dimensiones, se utilizan sistemas de coordenadas para especificar localización y descripción de relaciones espaciales, como también se desarrolla la identificación de congruencias y semejanzas entre figuras. La preparación de un plano por medio de coordenadas cartesianas viabiliza la construcción de conceptos geométricos elaborados mediante especificaciones de localización y de medida, así como la construcción de figuras en dos dimensiones como lo son cuadrados y rectas, y posteriormente en tres dimensiones: sólidos como cubos y paralelepípedos.

El objetivo general del proyecto *Construyendo una nueva ciudad* es, entonces, que a través de él los estudiantes construyan una serie de conexiones entre conceptos geométricos y métricos, a la vez que reflexionan respecto a algunas propiedades y características de la estructura de la ciudad, además de los conocimientos sociales y culturales que están allí implícitos.

EXPLICACIÓN DEL PROYECTO

Partiendo del contexto de la construcción de una ciudad, se distinguen dos fases de acuerdo con su planeación y elaboración.

En una primera parte, el desarrollo bidimensional que implica el trabajo con rectas paralelas y secantes por medio de actividades que consisten en demarcar con tizas sobre el suelo, en la que todos los alumnos determinarían una dirección de tal manera que unos se cruzaban (rectas secantes) y otros partían de diferentes puntos hacia una misma dirección (definirían las direcciones paralelas); esto sirve para la organización de la maqueta respecto a las cuadras y calles. Posteriormente se trabaja con perímetro y área, en las que se reanaliza con actividades, utilizando plantillas para el recubrimiento de superficies, que representan el espacio que ocupan las casas y los edificios; estas actividades están apoyadas por el plano cartesiano (para la ubicación de objetos en el espacio y, además, facilita el sistema de medida que se utilizará en la maqueta).

Teniendo en cuenta lo anterior se trabaja con la construcción de figuras en 2D (cuadriláteros rectangulares) que representan los lotes o espacios que va a ocupar cada edificación dentro de la maqueta. El resultado de esta etapa es un plano de cada barrio que comprende la ciudad (que es la composición de todas las maquetas realizadas por los grupos de estudiantes), donde están ubicados los espacios para las casas, y demás edificaciones con sus respectivas coordenadas y medidas específicas.

La segunda fase se caracteriza por el paso de lo bidimensional a lo tridimensional, lo que implica el trabajo con algunas nociones de volumen que surgen de hacer medidas de longitudes, comparaciones de espacios y relaciones entre áreas. Este proceso se desarrolla a partir de actividades que inician con la construcción y diseño de la estructura bidimensional (plantillas); este es un aspecto fundamental en esta fase que permite la construcción de sólidos (paralelepípedos) que representan las edificaciones de la maqueta, además de otras figuras tridimensionales que son producto de la imaginación de los niños determinando las características geométricas de las figuras tridimensionales.

MARCO TEÓRICO

Para la elaboración de esta propuesta se tienen en cuenta tres aspectos teóricos fundamentales: uno concerniente a los principios didácticos que se identifican en un proyecto de aula; el segundo referente a los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conocimientos matemáticos puestos en juego, y por último, el que se refiere a la metodología empleada.

La didáctica en el proyecto de aula. Olga León (s. f.) identifica tres principios de la didáctica que se llevan a cabo en un proyecto de aula: 1) la explicación, esto es, refiere el diseño debe estar relacionado con las necesidades de formación, tanto como la comprensión por parte del docente del desarrollo del proceso de enseñanza que se va a poner en práctica, es allí donde se estructura cada uno de los momentos del proyecto; 2) la realización, relacionada con las acciones que se llevan a cabo en cada una de las fases, el proyecto debe ser realizable pero, además, debe realizarse para perpetuarse como acción, exigiendo, así, una serie de productos, resultado de cada fase, y 3) la proyección, esto es, el proyecto debe generar impactos en los diferentes ambientes del estudiante, es decir, el conocimiento matemático que se desarrolla debe trascender el aula de clase para que se ponga en práctica en otros contextos de la vida social.

Conocimientos matemáticos. Por una parte, desde el pensamiento geométrico espacial, en cuanto a la ubicación espacial, Godino (2003) resalta:

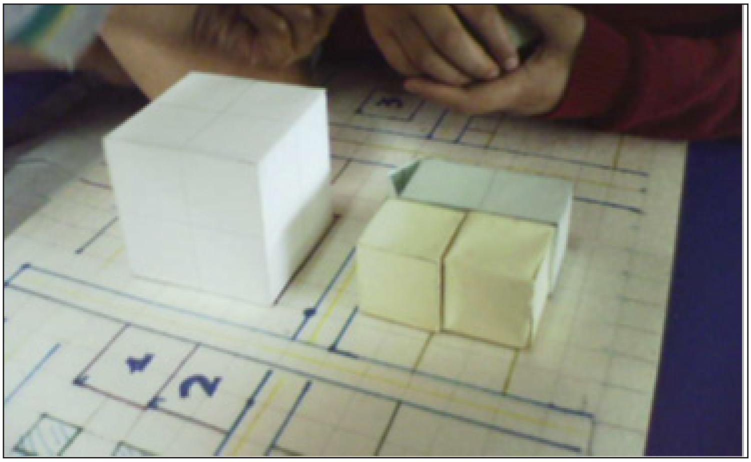
La reflexión sobre las localizaciones y movimientos nos proporciona una manera de describir el mundo y poner un cierto orden en el entorno. También proporciona una oportunidad de construir conceptos matemáticos como los números positivos y negativos (hacia delante y atrás) y destrezas que se relacionan con otros temas, como la realización e interpretación de planos y mapas. Estas experiencias sirven de base para introducir los sistemas de coordenadas.

Por otra parte, la construcción de la maqueta potencia aspectos artísticos por medio de sistemas geométricos, los cuales son vistos por Alsina (1997) como grandes precursores del arte: *"la geometría ha aportado a las artes plásticas y a la arquitectura una gama interesante de elementos básico: formas y figuras, métodos para trazarlas o edificarlas y sistemas de representación (axonometría, perspectivas, planos…)";* desde esta perspectiva, como una postura artística, se profundiza y se genera una mejor apreciación del espacio. En este sentido, desde los niveles de Van Hiele pretendemos el desarrollo del pensamiento geométrico sobre todo del nivel 2 de análisis donde los alumnos comienzan a examinar las propiedades de las figuras y aprenden la terminología técnica, mediante el trabajo de observación, dibujo, medición, y construcción de modelos.

Metodología. Considerando las orientaciones para el diseño y la elaboración de actividades de aprendizaje y evaluación, propuestas por el Grupo DECA (1992) se proponen cuatro fases que dirigieron el proyecto: Primera, las actividades de iniciación e introducción donde se le genera al estudiante un choque cognitivo y comprende que debe transformar y ampliar su conocimiento. Segunda, las actividades de desarrollo y reestructuración, en las que el estudiante establece contacto con los nuevos conocimientos, cuestiona su utilidad y los compara con los anteriores. Tercera, las actividades de aplicación y profundización, donde los estudiantes emplean los nuevos conocimientos en otras actividades y de esta manera amplían el conocimiento. Y cuarta, las actividades de evaluación, que sirven para revisar el proceso en conjunto. Aquí es importante tener en cuenta que todas las actividades deben dar razón del proceso de los estudiantes.

REFLEXIÓN SOBRE EL PROCESO

Sin duda, el proyecto de aula contribuyó a en el desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes; ellos pudieron experimentar junto con los profesores practicantes una propuesta diferente de enseñanza que aporta algo más que meros contenidos matemáticos, favoreciendo la creatividad y el ingenio, además de crear un espacio de autonomía y de trabajo grupal entre los estudiantes.



Los estudiantes lograron comprender y manejar las relaciones entre propiedades de figuras bidimensionales y tridimensionales, y su relación geométrica con otras figuras, relaciones que consiguieron identificar también por medio de la medida a partir de comparaciones.

El establecimiento de un sistema de coordenadas cartesianas permitió a los estudiantes, por un lado, trabajar adecuadamente en la distribución de espacios (calles, carreras, casas y edificios), y por otra parte, facilitó la medición de distancias, áreas, volúmenes, instituyendo entre todos los grupos una medida estándar para los ejes de las coordenadas, que impactarán finalmente en la integración de la ciudad.

Los estudiantes utilizaron implícitamente la razón como recurso en las múltiples fases de construcción, (por ejemplo, los edificios tienen cuatro veces el área de las casas).

El trabajo grupal se vio muy favorecido, ya que el trabajo de cada uno queda obsoleto si no se relaciona con los productos de los demás estudiantes, y finalmente, el trabajo grupal de cada maqueta solo encuentra su complemento en la reunión total de los barrios que constituyen la metrópoli.

En el desarrollo y la aplicación de conocimientos implícitos en cada una de las actividades del proyecto surgió la necesidad de establecer otros conocimientos de tipo geométrico y métrico que no se tuvieron en cuenta en el momento de la planificación pero que fueron apareciendo en el transcurso del proyecto.

ALGUNAS CONCLUSIONES

a. El proyecto de aula es una excelente propuesta metodológica que permite un trabajo más activo y contextualizado, facilita la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y permite la construcción de un aprendizaje más significativo.

b. La organización de una serie de actividades dentro de un proyecto de aula facilita la secuenciación de la enseñanza de las matemáticas y, además, permite hacer uso de una gran cantidad de recursos que se enmarcan en un contexto específico.

c. La realización de actividades con recursos manipulativos tangibles permite un mejor desempeño en el aula y permite que los estudiantes construyan un conocimiento más significativo.

d. El sistema métrico y geométrico, además de potenciar el conocimiento matemático aporta en otros ambientes y contextualizaciones en la vida social de los alumnos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Grupo DECA (1992). *Orientaciones para el diseño y la elaboración de actividades de aprendizaje y evaluación*. Publicado en revista Aula N.° 6, págs. 36-39

Godino, Juan (2002). *Geometría y si didáctica para maestros*. Editorial Universidad de Granada.

Alsina, C. (1997). ¿Por qué geometría? En C. Alsina, *propuestas didácticas para la ESO*. Madrid: Síntesis.

Una propuesta curricular para el desarrollo de actividades en el Club de Matemáticas

*Juan Manuel Barragán Pérez**

RESUMEN

El desarrollo de las actividades de práctica educativa por parte de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, que dan lugar en el Club de Matemáticas del Instituto Pedagógico Nacional, dan como resultado una propuesta curricular para ser desarrollada en el club, buscando establecer una relación entre el desarrollo del talento en matemáticas y los diferentes campos del saber matemático, resumidos en los pensamientos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional. Esta búsqueda desemboca en una manera sistemática de proponer núcleos de actividades para el club de matemáticas, de forma tal que se pueda abarcar mayor cantidad de características del talento en el desarrollo de actividades que estén alrededor de un pensamiento matemático.

Palabras clave: talento, Club de Matemáticas, propuesta curricular, pensamientos.

* Universidad Pedagógica Nacional. Direcciones electrónicas: dma959_jbarragan@pedagogica.edu.co; juanchobarragan@gmail.com

CONTEXTO INSTITUCIONAL

El Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional concibe, entre sus espacios de práctica de inmersión, la oportunidad de participar en proyectos educativos diferentes a los que se llevan a cabo en el aula usual de matemáticas (Comité de Práctica Educativa , 2004). Entre estos proyectos se encuentra el Club de Matemáticas, desarrollado en el Instituto Pedagógico Nacional (IPN), donde participan niños de primaria (con edades aproximadas entre los 6 y 12 años) con interés particular en las matemáticas o que presentan algunas habilidades excepcionales dentro del grupo en el que se desenvuelven.

La experiencia que se brinda es innovadora, ya que se busca desarrollar situaciones diversas teniendo en cuenta los intereses y motivaciones de los niños, fomentando el desarrollo de diferentes habilidades matemáticas, y asimismo propiciando la participación de los estudiantes para expresar sus argumentos e ideas de manera que eso contribuya a un aprendizaje colectivo.

OBJETIVOS PLANTEADOS AL INICIAR EL CLUB

En el siguiente aparte se presentan los objetivos planteados para el club de matemáticas del Instituto Pedagógico Nacional.

Objetivos generales

- Desarrollar diversas actividades matemáticas teniendo en cuenta los intereses y habilidades de los estudiantes de primaria.
- Crear una metodología de estudio diferente a la que los niños desarrollan en sus clases de matemáticas.

Objetivos específicos

Respecto a los niños que participan del Club:

- Estimular algunas habilidades y capacidades matemáticas en los niños.
- Desarrollar la capacidad crítica, analítica y reflexiva de los estudiantes.
- Promover la participación de los niños para que expongan sus puntos de vista y de esta manera se contribuya a un aprendizaje colectivo.

ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DEL TALENTO EN MATEMÁTICAS

Para definir las características contempladas en el club, se tuvieron en cuenta diferentes definiciones y posturas, propuestas por varios autores; algunas de ellas son las siguientes:

En el pensamiento divergente. La inducción, expansión, libertad e informalidad y la fluidez (Soriano, 1993), capacidad de abstracción, de visualización, rapidez de aprendizaje. (Mora, 2009).

Actitudes positivas hacia las matemáticas. Gusto por las matemáticas, dedicación sobre las tareas propuestas, reconocimiento de las capacidades matemáticas (por él u otros) (Mora, 2009).

Factores individuales y sociales. Curiosidad, buen rendimiento académico, rápida concentración en temas de matemáticos u otros de su interés, tenacidad y persistencia en la búsqueda de metas y objetivos. (Mora, 2009). Entre otras.

DEFINICIÓN DE UNA PROPUESTA CURRICULAR PARA EL CLUB DE MATEMÁTICAS

Para la construcción de una secuencia de actividades a desarrollar en el Club de Matemáticas se contemplarán cuatro parámetros: *i*) *Los pensamientos* propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2003) servirán como referente al definir una núcleo temático de actividades, desarrollando cada uno (variacional, espacial, métrico, aleatorio y geométrico) en un ciclo de actividades que busque, además, el desarrollo del *ii*) *talento en matemáticas,* Consideraremos como *iii*) *ejes curriculares* algunos procesos cognitivos presentes en todo acto de enseñanza y aprendizaje. Estos son: razonamiento, modelación, comunicación y representación. Las actividades del club serán pensadas sobre tres *iv*) *estrategias básicas:* la resolución de problemas, establecimiento de conexiones entre el campo matemático y el contexto cotidiano (Secretaría de Educación, 2008).

La articulación de los cuatro parámetros permitirá establecer, de manera sistemática, la secuencia de actividades que se desea desarrollar, tratando de abarcar de mejor manera los diferentes componentes de cada uno de los parámetros establecidos.

A continuación se mostrarán tres actividades como ejemplo para evidenciar la manera en que se busca dicha articulación:

Actividad 1. En un curso de primaria del IPN con 30 estudiantes se realizó una encuesta donde se les preguntaba a los estudiantes cuál era su materia favorita. Los datos obtenidos fueron los siguientes:

Materia favorita de los estudiantes				
Matemáticas	*Inglés*	*Inglés*	*Inglés*	*Inglés*
Español	Música	Música	Música	Matemáticas
Español	Matemáticas	Español	Matemáticas	Informática
Informática	Matemáticas	Matemáticas	Español	Informática
Informática	Música	Informática	Matemáticas	Inglés
Música	Inglés	Informática	Informática	Matemáticas

¿De qué manera se podrán organizar los datos para que se puedan leer más fácilmente? Propongan un sistema para organizar los datos.

¿Podrían proponer una gráfica que muestre los resultados organizados?

Actividad 2. Diseñen una encuesta sobre un tema en particular donde propongan varias respuestas posibles y pregunten a cada uno de los compañeros del club cuál opción escogen de las que ustedes proponen. Después realicen la organización y el gráfico que muestre los resultados.

¿Qué conclusiones se pueden obtener de la encuesta?

Actividad 3. En la siguiente gráfica se muestran los resultados obtenidos al realizar una encuesta a los clientes de una heladería, sobre cuál es el sabor de helado favorito.

¿A cuántos clientes fue dirigida la encuesta?

Si se le pregunta a un cliente al azar, ¿cuál es el sabor que tú consideras que escogerá?, ¿qué sabor no es tan posible que escoja?, ¿por qué?

Estas actividades se hicieron pensando en cómo se desarrollará el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, y ligar con la noción de probabilidad y frecuencia. Se espera que los componentes de talento que prevalecen en la actividad son: la capacidad de abstracción, capacidad de organizar información y la socialización de resultados. Una organización tentativa de cómo se manifiestan los parámetros en cada una de las actividades podría ser la siguiente:

Pensamiento Aleatorio	*Talento*			*Ejes*			*Estrategias*	
	Capacidad de Abstracción	*Organizar información*	*Socializar resultados*	*Comunicación*	*Modelación*	*Razonamiento*	*Abordaje de situaciones Amplias en la cotidianidad*	*Resolución de Problemas*
Actividad 1		x	x	x	x		x	
Actividad 2	x				x		x	
Actividad 3	x					X		x

Cuadro 1. Matriz de de parámetros para las actividades del club de matemáticas

En la siguiente gráfica se muestra de manera más puntual la forma en que se relacionan una a una las componentes de cada actividad:

REFLEXIONES

La manera en que se establece la propuesta curricular para el Club de Matemáticas en el IPN genera una manera sistemática de proponer núcleos de actividades que desarrollen un pensamiento específico, siempre con miras al desarrollo del talento en matemáticas. Además, se ve cómo se pueden ligar las actividades del club con algunas temáticas propias del currículo habitual del aula de matemáticas, sin hacer énfasis directo en cada uno de los conceptos que se trabajan, sino más bien preponderar por el desarrollo del pensamiento allí presente.

Una labor que se propone ahora es la caracterización de los participantes del club de matemáticas dependiendo del *talento actual*, con miras en desarrollar de mejor manera el *talento potencial* que puedan presentar los estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Comité de Práctica Educativa . (2004). *La Práctica Educativa en el Proyecto Curricular de Licenciatura en Matemáticas.* Bogotá : Universidad Pedagógica Nacional.

MEN. (2003). *Estándares Básicos en Competencias Matemáticas.* Bogotá: MEN.

Mora, L. (2009). La diversidad en el aula, un ejemplo: El talento en matemáticas. En *Pedagogía y Saberes* (págs. 131–139). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Secretaría de Educación. (2008). *SERIE Cuadernos de Currículo, Orientaciones curriculares para el campo del pensamiento matemático.* Bogotá: Secretaría de Educación Distrital.

Soriano, E. (1993). *Programs and practices for identifing and nurturing giftedness and talent in Central and South America.* New York: Pergamon Press.

Consideraciones en torno al desarrollo de una clase de matemáticas mediada por la resolución de problemas y el trabajo colaborativo

*Jeny Alexandra Mejía Osorio**
*Laura Bustos Gutiérrez***

RESUMEN

Se presenta una experiencia desde la práctica intensiva que se llevó a cabo en el colegio Francisco José de Caldas en los grados segundo y tercero de primaria, en la cual se retoman, en conjunto, los diferentes énfasis y teorías abordados en el proceso de formación docente, como son: planeación de actividades, recursos didácticos, gestión docente y evaluación, basados en referentes teóricos como el Grupo DECA, la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau y el trabajo colaborativo. Se reconoce cómo el aporte de cada uno de estos proporciona avances y logros en diferentes ámbitos; además, se da a conocer el modelo propio de actividad matemática implementado en el aula por las practicantes. Para ello se presenta la organización de los momentos de la clase y los aportes del mismo.

Palabras-clave: Resolución de problemas, trabajo colaborativo, modelo pedagógico.

* Estudiante Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: allexa03@hotmail.com

** Estudiante Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: xlaurita@hotmail.comrodriguez111@yahoo.com

CONTEXTUALIZACIÓN

En la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los estudiantes deben interactuar entre sí y con el profesor; para ello es necesario organizar la clase en grupos de trabajo y, a su vez, abordar estrategias que propicien espacios de formación y socialización de diversos conocimientos que se abarcan dentro de la misma, ya que cada uno de estos conocimientos debe representar un aprendizaje significativo que se construye de manera autónoma por los estudiantes. Dentro de este contexto, las relaciones que surgen en el aula de clase deben tener un carácter motivador; el profesor debe ser creativo para captar la atención de los estudiantes, y hábil para organizar la clase, de modo que pueda presentarles actividades que sean de su agrado. Dichas actividades le permitirán que la clase sea llamativa, que el ambiente no se torne monótono, sino, que por el contrario, se enriquezca y se convierta en un lugar atractivo para quienes participan en él.

Si bien el trabajo desde la resolución de problemas posibilita que los estudiantes se enfrenten a diversas situaciones problema y las modelen desde las matemáticas, la organización del aula y de los momentos de la clase que se plantean debe ir también en concordancia con tal situación. Con relación a tal planteamiento, desde las diferentes prácticas que hemos desarrollado a lo largo de nuestro proceso de formación como docentes, se identifican referentes como el Grupo DECA, la teoría de las situaciones didácticas, de Brousseau, y el trabajo colaborativo, desde Johnson, D. W., Johnson, R. T., y Holubec, E. J. (1999). Aunque cada uno de estos termine por propiciar avances y logros en diferentes ámbitos, consideramos en este punto necesario el reconocer el modelo propio de actividad matemática implementado en el aula de clase (ver figura 1).

Así, pues, la experiencia de aula que presentamos se basa en los resultados obtenidos en nuestra práctica intensiva con estudiantes de segundo y tercer grado de primaria, del colegio Francisco José de Caldas. Al respecto, exponemos una serie de logros alcanzados con la puesta en práctica de diversas estrategias útiles a la hora de trabajar una temática en el aula, mediada por resolución de problemas y el trabajo colaborativo; reconocemos que se posibilitan diversos avances a partir de una planeación previamente realizada en cada una de las clases y seguidamente nos referimos a la descripción y análisis de la relación existente entre la planeación y la puesta en práctica de cada uno de los momentos de la clase, como medio para alcanzar los objetivos planteados.

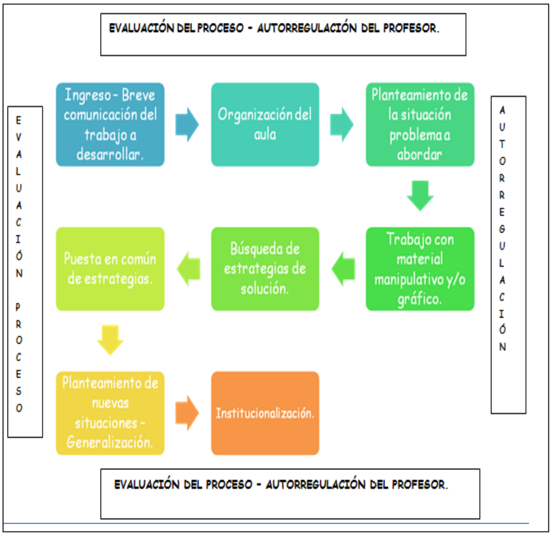


Figura 1: Modelo pedagógico

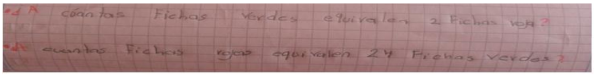
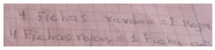
REFERENTES TEÓRICO-PRÁCTICOS

Se plantea el desarrollo de los momentos de la clase, desde la teoría de situaciones didácticas, de Brousseau (1986), en lo referente a situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización, previo planteamiento de una situación fundamental que se desarrolla a lo largo del proceso. En tal sentido, se posibilita un espacio para conjeturar, anticipar y establecer conexiones lógicas entre los datos e informaciones suministrados. Una vez considerado tal diseño, debemos ser conscientes de que no es suficiente el trabajar mediante la resolución de problemas, si antes no consideramos la importancia de una buena organización del aula de clase, que procure elaborar y establecer formas de compartir objetivos y distribuir responsabilidades entre el profesor y los estudiantes, quienes deberán trabajar para construir un conocimiento de manera interactiva y colaborativa. En esta medida, el trabajo colaborativo como estrategia para organizar una clase brinda herramientas que van más allá de la conformación de grupos, pues en dicho trabajo también se asignan roles, se buscan objetivos, se implementan recursos didácticos, se ejecutan tareas y todo esto contribuye al establecimiento de una clase en la que se hace posible discutir, argumentar y justificar las estrategias empleadas en la resolución de un problema. De esta manera, como lo plantea Gómez (2002), el trabajo colaborativo contribuye en la enseñanza y en el aprendizaje de un concepto matemático y en la resolución de problemas, dado que, al estar en grupos de trabajo colaborativo, los estudiantes construyen el conocimiento de manera significativa y autónoma, mediante una ayuda mutua que exige de cada alumno una responsabilidad que determina el éxito de la labor matemática.

DESCRIPCIÓN EXPERIENCIA DE AULA

A continuación se expone de forma sintetizada el modelo pedagógico implementado en una clase de matemáticas con estudiantes de segundo y tercero de primaria en el colegio Francisco José de Caldas.

<table>
<tr><td rowspan="5">Evaluación del proceso – autorregulación del profesor.</td><td>Momentos de la clase</td></tr>
<tr><td>Ingreso – Breve comunicación del trabajo a desarrollar.
Llamado a lista - Trabajo con equivalencias mediante la construcción de balanzas, estimación de pesos y posterior abordaje de problemas mediante el trabajo con material manipulativo (fichas).</td></tr>
<tr><td>Organización del aula → Trabajo individual.
En un primer momento se trabaja mediante grupos con el fin de construir las balanzas. Ya en un segundo momento cada estudiante trabaja individualmente planteando conjeturas sobre el funcionamiento de esta mediante el lado hacia el cual se inclinaría dada la estimación de pesos de diversos elementos usados comúnmente en el estudio (colores, regla, borradores, entre otros).
</td></tr>
<tr><td>Planteamiento de la situación problema a abordar
Una vez realizado el trabajo con diversos objetos por parte de los estudiantes, se da el primer acercamiento al problema, en el que se plantea la tarea de equilibrar la balanza haciendo uso de determinadas equivalencias previamente planteadas tales como (2 lápices → 1 borrador).
Ante tal tarea, los estudiantes reconocen la necesidad de usar nuevos elementos para abordar la situación. Es aquí donde el estudiante siente la necesidad, dados los requerimientos del problema, de modificar y/o complejizar sus estructuras de conocimiento.</td></tr>
<tr><td>Trabajo con material manipulativo y/o gráfico.
Una vez realizado el trabajo con las balanzas, se hace uso de fichas de colores con las cuales se establecen equivalencias. Posteriormente, se establecen conjeturas y conexiones lógicas entre los datos proporcionados.
</td></tr>
</table>

Evaluación del proceso – autorregulación del profesor.	*Búsqueda de estrategias de solución.* Se complejiza el planteamiento de situaciones problema haciendo uso de las relaciones de equivalencia, tales como:   Cada estudiante, mediante trabajo individual y con ayuda del material manipulativo plantea caminos y los aborda buscando dar una solución a la situación.
	Puesta en común de estrategias. Los estudiantes se organizan mediante grupos de trabajo, exponen sus avances y permiten que sus compañeros reconozcan la utilidad del trabajo realizado y los avances logrados, al tiempo que los errores cometidos con el fin de potenciarlos. 
	Planteamiento de nuevas situaciones – Socialización general. Una vez reconocidas las estrategias elaboradas por los grupos de trabajo, en cada uno de estos se plantean nuevas situaciones en las que se aplica lo logrado hasta tal punto y se busca su ampliación. Posteriormente, cada grupo expone sus avances a los demás compañeros realizando una puesta en común de lo logrado en el grupo.
	Institucionalización. Dados los avances evidenciados al seguir el proceso de cada una de los estudiantes durante el abordaje de la situación, se hace una exposición por parte del docente que tiene como fin la validación del trabajo realizado. Es en este punto donde se produce el cambio deseado en los esquemas mentales, dada la incorporación de nuevos aprendizajes.

LOGROS Y DIFICULTADES EVIDENCIADAS

En el proceso llevado a cabo con los estudiantes, reconocemos que se brindaron las herramientas necesarias para que estos estuvieran en posibilidad de acceder al conocimiento de manera no lineal, es decir, no convirtiéndolos en simples receptores sino, por el contrario, permitiéndoles emitir juicios sobre los razonamientos elaborados, posibilitando el reconocimiento de avances y/o dificultades suscitados en el proceso, por ejemplo, en momentos clave del proceso como al verificar conjeturas planteadas o al realizar una socialización. En este sentido, dado que se adoptó un modelo que valoró tanto avances como dificultades que emergían en el proceso de aprendizaje, se reconoció el error como un camino, con lo que se construyó un espacio dinamizador y reflexivo en el que se gestionó en todo momento la interacción entre los estudiantes. Cabe resaltar que el uso de tales procesos de comunicación y reconocimiento de errores posibilitaron grandes avances tanto en el nivel conceptual como en el procedimental y actitudinal; además el planteamiento de situaciones en las que se hizo uso de recursos didácticos permitió a los estudiantes tener una aproximación a lo que se estaba trabajando en el aula; un ejemplo de esto es el trabajo realizado con las balanzas, haciendo uso de fichas de colores para establecer equivalencias. En cuanto a dificultades, cuando se organizó la clase en grupos de trabajo colaborativo, hubo estudiantes que intentaron cambiar de grupo, aquellos a quienes les costó integrarse y algunos que rechazaron el trabajo que se estaba realizando, adoptando una actitud pasiva y poco participativa; no obstante, fue nuestra labor como docentes, la que posibilitó establecer acuerdos en los diferentes grupos, para generar un ambiente propicio para el desarrollo de esta.

REFLEXIÓN FINAL

Para finalizar, hemos de reconocer que todo modelo implica variables que pasan a ser analizadas y modificadas dependiendo de la población con la que se trabaje y los requerimientos de tal actividad. Pero ante todo, lo más importante es estar convencido de que lo que se está haciendo se hace de la mejor manera y plantear, por tanto, una autorregulación del mismo profesor que le permita reconocer qué estrategias están posibilitando el lograr avances en sus estudiantes. Por otra parte, vemos que es posible estructurar la clase de matemáticas a través de un trabajo colaborativo y, a su vez, abordar la resolución de problemas como metodología para enseñar un concepto matemático; sin embargo, los profesores que vinculemos en el aula de clase estrategias de trabajo colaborativo debemos ser conscientes de que no todos los grupos de trabajo son grupos de trabajo colaborativo, y por ello debemos prestar atención a los intereses, expectativas y motivaciones de los estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brousseau, Guy (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. Publicado con el título Fondements et méthodes de la didactiques des Mathématiques en la revista *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* Vol. 7, n. 2, pp. 33- 115.

Gómez Melchor (2002): *Estudio teórico, desarrollo, implementación y evaluación de un entorno de enseñanza colaborativa con soporte informático para matemáticas.* Tesis doctoral dirigida por Evaristo Nafría López y Martín Garbayo Moreno. Universidad Complutense de Madrid (España).

GRUPO DECA. (1992). Orientaciones para el diseño y elaboración de actividades de aprendizaje y de evaluación. Publicado en revista *AULA,* Nº 6, pp. 33-39.

Johnson, D. W., Johnson, R. T., y Holubec, E. J. (1999). El aprendizaje cooperativo en el aula. Buenos Aires Argentina: Editorial Paidós.

La geometría en el aula
"Una propuesta para la interpretación de conceptos e ideas matemáticas y físicas"

Sirwuendy Cardona Posada[*]
José Camilo Rave Builes[**]
Juan Mauricio Muñoz Zapata[***]

RESUMEN

El presente trabajo se desprende de la práctica docente que se está llevando a cabo en el Centro Educativo Femenino de Antioquia (CEFA) en la ciudad de Medellín con estudiantes del grado décimo, el cual tiene como intención primordial retornar la geometría al aula de clase como una herramienta que facilita la interpretación de las ideas matemáticas y físicas, empleando la metodología de aula-taller como fundamento para alcanzar tal fin.

Hasta ahora se ha logrado despertar un relevante interés en el manejo del lenguaje geométrico y una mejor interpretación de algunos conceptos como el teorema de Pitágoras y el número Pi, a partir del uso del material concreto que ayuda al estudiante a alcanzar una mejor apropiación de dichos conceptos.

* Estudiante de Licenciatura en Matemática y Física, Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: sirwendy@gmail.com

** Estudiante de Licenciatura en Matemática y Física, Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: rave066@gmail.com

*** Estudiante de Licenciatura en Matemática y Física, Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: matemauro@une.net.co

CONTEXTUALIZACIÓN

La práctica docente iniciada en el semestre 2011-2, con el grupo de trabajo formado por Sirwuendy Cardona Posada, Juan Mauricio Muñoz Zapata y José Camilo Rave Builes, ha sido encaminada hacia la experiencia de aula, llevada a cabo en el Centro Formativo de Antioquia "CEFA" de carácter femenino que se encuentra ubicado en la ciudad de Medellín (Antioquia), el cual cuenta con una de las mejores aulas-taller de Matemáticas de la ciudad de Medellín. Por tanto, se escoge el CEFA como centro de práctica con el propósito de trabajar con tres grupos diferentes, acompañados por cada uno de los integrantes del grupo de práctica, los cuales realizarán actividades previstas y planeadas durante los seminarios de práctica y los encuentros grupales.

REFERENTE TEÓRICO

El proceso de aprendizaje de la geometría ha estado un poco olvidado en el contexto educativo, limitando así el estudio de esta casi que por completo en el aula de clase. Es por esto que nosotros, como maestros, debemos buscar herramientas que hagan de la geometría (plana y espacial) parte fundamental en el estudio de las ciencias. Por tal motivo, el aporte de Miguel de Guzmán en la enseñanza de las ciencias y de la matemática, el modelo de los esposos Van Hiele, la propuesta de Carmen Samper, entre otros, comprenden el principal sustento teórico para nuestro trabajo. Durante varios años, la enseñanza de la geometría ha sido olvidada en los procesos de aprendizaje de la matemática y en ciertas ocasiones es como si ambas fueran disyuntas; es por esto que Miguel de Guzmán no se equivoca cuando dice que: "Es evidente que desde hace unos veinte años el pensamiento geométrico viene pasando por una profunda depresión en nuestra enseñanza matemática inicial, primaria y secundaria" (p.1). Y es que parece que la geometría no hiciera parte de la matemática y por esto, cada vez es más y más abandonada, pero qué sería de la matemática sin los fundamentos geométricos, y sin las bases para el desarrollo del pensamiento, no solo geométrico sino también espacial, los cuales están constituidos en los Lineamientos Curriculares donde no solo justifican la necesidad de la enseñanza de la geometría sino que, además, están de acuerdo con que esta está siendo olvidada en la enseñanza de la matemática.

Por otro lado, una teoría importante para el desarrollo de esta práctica es la del modelo de los esposos Van Hiele quienes propusieron cinco pasos para la enseñanza de la geometría: visualización o reconocimiento, análisis o descripción, clasificación (abstracto relacional), deducción formal y, por último, el que quizá nunca se utiliza en la enseñanza básica, el rigor matemático.

Estos cinco pasos están enfocados para dar un acercamiento a la construcción de algún concepto utilizado en las diferentes ciencias. Es importante aclarar que la construcción del pensamiento geométrico es cada vez más lenta desde que empieza hasta que termina; por esta razón el modelo de los esposos Van Hiele ayuda a que haya una secuencia en los contenidos y en las unidades didácticas que se pueden diseñar para la valoración de este tema.

Por otro lado, se puede encontrar en los estándares curriculares de matemática que uno de los principales pensamientos a desarrollar en el aula de clase es el pensamiento espacial y sistemas geométricos, y, dependiendo del grado, se pueden encontrar varias recomendaciones para la enseñanza de la geometría. Cabe preguntar si lo que proponen estos estándares es una línea recta que no se puede tergiversar y si sí se puede, cómo se lograría esto, pero este sería otro tema de investigación. Lo importante aquí es el hecho de poder lograr, con este trabajo, uno de los objetivos que es desarrollar el pensamiento espacial y geométrico debido a que es un elemento esencial del pensamiento científico.

Teniendo en cuenta lo anterior y lo que dice Carmen Samper, (2004) "… la geometría no ha llegado a ocupar el sitio preferencial que merece, ni en su enseñanza se ha logrado introducir los cambios que permitan la generación de ambientes que favorezcan el desarrollo de diversos procesos de razonamiento en los aprendizajes" (p. 15), se puede considerar la importancia de hacer ver la geometría no como algo impuesto en el aprendizaje sino más bien como esa parte de la enseñanza que hace notar que todo lo que nos rodea es la permanente aplicación de esta ciencia la cual no por casualidad fue tan importante hace muchísimos años.

Es conveniente hacer ver que la geometría puede ser analizada desde varios puntos de vista, pero para nuestro grupo de práctica es indispensable mostrar que ésta es una colección de características y propiedades de los objetos físicos, situándola como parte fundamental de la ciencia natural y como un componente de la visión y visualización humana, además de esto, y por no decir, la más importante herramienta para la enseñanza de la matemática y la física, sin olvidar que el estudio de la geometría no solo puede limitarse a ese dominio, pues se desconocería la necesidad de dar el paso al mundo matemático, donde los objetos geométricos rebasan su caracterización como idealización de objetos físicos. Por tanto, cabe preguntarse entonces el porqué del abandono actual de la enseñanza de la geometría en las aulas de clase, teniendo en cuenta que la no enseñanza de esta no es un problema que radica solo en el estudiante, sino que, por el contrario, demanda cierta responsabilidad de parte del maestro puesto que es él quien debe marcar la senda o camino que el estudiante debe recorrer para lograr un buen aprendizaje.

DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA EXPERIENCIA DE AULA

El problema es, entonces, lograr una interiorización y óptima interpretación de los conceptos tanto matemáticos como científicos a través de la manipulación de material concreto, lo cual no es una tarea fácil puesto que las herramientas geométricas requeridas para tal fin no se encuentran en los planes de estudio de los estudiantes que serán abordados y por tanto, el pensamiento espacial no esta tan desarrollado como se quisiera.

Por lo anterior, y con el ánimo de llevar al estudiante a un campo más tangible, donde él pueda comprobar sus pensamientos geométricos, la experiencia se lleva a cabo a través de actividades con objetos con los que el aprendiz pueda interactuar, como son las construcciones de algunos cuerpos geométricos importantes y el razonamiento de antiguos teoremas, como el teorema de Pitágoras, usando como soporte lógico demostraciones hechas en papel o cartón lo cual le permite al estudiante re-demostrar el teorema en cuestión y sacar sus propias conclusiones.

Además de ser actividades que enseñan al estudiante, lo sacan del típico contexto académico donde él está sentado esperando a que sea el maestro quien le entregue todo el conocimiento. En este punto es donde experiencias como la de encontrar la relación que genera el tan famoso número pi, actividad esta y muchas de su tipo que se involucran en esta experiencia, dejan de ser simples enseñanzas del colegio y se convierten en momentos de gran importancia en la vida escolar y difícilmente son olvidadas.

Al mismo tiempo que abordar temas desde su punto de vista geométrico estrictamente hablando, las actividades se encaminan también a establecer relaciones entre las demás disciplinas científicas y la geometría, para que así el estudiante encuentre las causales del fenómeno ya no solo desde el campo conceptual y abstracto, sino que además le dé un significado físico o concreto.

Una de las actividades que demuestran la correspondencia que se quiere establecer entre conceptos geométricos y científicos, en general, se explica a través de las gráficas de rectas en el plano y el posterior análisis de la pendiente de las mismas para establecer una relaciones directa con la ley Hooke. Esta experiencia es realizada a través del geoplano y en ella se busca que el estudiante encuentre la relación existente entre las distancias horizontales y verticales que se recorren desde un punto de la recta hasta otro punto de la misma.

LOGROS Y DIFICULTADES

Logros

Además de retornar a la geometría su papel fundamental en la enseñanza de la ciencia, se ha evidenciado en los estudiantes una mejor comprensión de conceptos físicos como la ley de Hooke o el movimiento bidimensional, lo cual ha mejorado su rendimiento académico y le ha entregado la posibilidad de profundizar en los temas de estudio. La constante interacción con cuerpos, figuras y demás permite que el estudiante tenga una mejor concepción del espacio y que su razonamiento acerca del mismo sea más objetivo, permitiéndole establecer relaciones ya no solo entre cuerpos geométricos estándar sino que, además, lo acercan al razonamiento de figuras no convencionales.

Dificultades

Pasar del papel al espacio a través de material no es tarea fácil en la implementación de este tipo de estrategias didácticas, ya que el estudiante está acostumbrado a una enseñanza vertical donde el maestro se encuentra en el punto más alto y él se dedica a recibir información, sin embargo, la constante debe ser la mutua retroalimentación que permite un aprendizaje más profundo. Como es de esperarse, hay quienes prefieren la forma tradicional de abordar la geometría ya que demanda menos esfuerzo por parte del estudiante dándole un papel totalmente pasivo.

REFLEXIÓN FINAL

En cada una de las prácticas se ha podido observar cómo las estudiantes aprenden los conceptos más fácilmente a través de la manipulación del material concreto, además de que disfrutan haciendo, no simplemente copiando, pues la repetición de un procedimiento que muchas veces no se hace consciente sino por simple repetición deja de lado lo que esto significa geométricamente.

Cada vez que como maestros enseñamos pretendemos que nuestros estudiantes aprendan una serie de contenidos planeados en el PEI (plan institucional educativo) de cada institución, en los cuales la geometría es una de las últimas unidades y aunque en los estándares curriculares está contemplada para cada una de los temas, es olvidada por los maestros. Es por ello que como grupo de práctica se desea hacer ver que la geometría es importante para el aprendizaje y que si esta hace parte de cada uno de los temas de matemática o física, la forma de aprender de los estudiantes será mucho más enriquecedora.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Estándares básicos de competencias en Matemáticas. Pdf

Fouz Fernando, Berritzegune de Donosti, *Modelo de Van Hiele para la Didáctica de la Geometría*, http://divulgamat.ehu.es/weborriak/testuakonline/04-05/pg-04-05-fouz.pdf, (18-07-10, 1:10).

Guzmán, de Miguel. Hacia una recuperación del pensamiento geométrico y de la intuición espacial. Enseñanza de las ciencias y la Matemática. Pdf

Grupo de investigación pedagógica-Men; Matemáticas, Lineamientos Curriculares, Cooperativa Editorial Magisterio, pp. 58-59.

Samper, C. Cómo promover el razonamiento en el aula por medio de la geometría. Universidad pedagógica. p. 15

Construcción de la sección cónica circunferencia por medio del uso del geoplano con estudiantes de grado undécimo

*Luz Ángela Cristancho Contreras**

RESUMEN

En la presente experiencia de aula se mostrarán los aspectos que hicieron necesario trabajar con los estudiantes de grado undécimo las cónicas, en especial, la circunferencia, desde lo planteado por el Ministerio de Educación Nacional en los Estándares de Calidad y en los Lineamientos Curriculares, para luego ver la necesidad del uso del geoplano como recurso didáctico para la construcción del objeto matemático, partiendo de las dificultades que presentan los estudiantes en la construcción e identificación de las propiedades de las cónicas, especialmente de la circunferencia. Seguidamente, se expone la descripción general de la experiencia, los logros y dificultades que surgieron en el proceso de enseñanza y se finaliza con la reflexión que generó este proceso de enseñanza-aprendizaje.

Palabras-clave: materiales manipulativos, geoplano, circunferencia, geometría analítica.

* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: Sabaoth89@yahoo.com

CONTEXTUALIZACIÓN

Para la enseñanza-aprendizaje de las cónicas se hace necesario conocer lo establecido por el Ministerio de Educación Nacional (2003) para el grado décimo en los estándares de calidad, específicamente lo referido al Pensamiento espacial y sistemas geométricos, en donde se menciona que: "los estudiantes deben definir la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola e identificar los elementos de cada una y deducir sus ecuaciones en el plano cartesiano". Esto lleva a que para el desarrollo de la circunferencia, se considere relevante la implementación de situaciones problema, enfocadas en la construcción de expresiones que permitan a los escolares hacer procesos de razonamiento.

Pero, aunque en los estándares de calidad se mencione que el momento indicado para la construcción de cada una de las cónicas es en grado décimo, se puede notar que no se cuenta con el tiempo necesario para que estas sean trabajadas a profundidad y al tener gran cantidad de temáticas para trabajar, el estudio de este objeto matemático se hace tan superficial que los estudiantes no cuentan con las herramientas analíticas para deducir las ecuaciones partiendo del plano cartesiano, lo que ocasiona que los estudiantes no logren comprender ni asimilar a cabalidad este objeto matemático.

Asimismo, en los lineamientos curriculares (1998), se sugiere trabajar con los estudiantes haciendo uso de situaciones que hagan que este vea la necesidad de tener una confrontación con el mundo que le rodea y logre establecer relaciones que le ayuden a conceptualizar el objeto matemático que se le pide trabajar, en este caso específico, la circunferencia como lugar geométrico.

En este sentido, es necesario vincular la matemática con situaciones cotidianas de los estudiantes, las cuales ayudan a enriquecer el significado de los conceptos, en tanto que permiten conectarlos con construcciones logradas con anterioridad. Luelmo (1997) citado por Contreras (2002) puntualiza que "las situaciones reales bien elegidas y adaptadas a los estudiantes, constituyen un elemento motivador. Por tanto, los contenidos matemáticos que en ellas pueden aprenderse, no solo adquieren significado desde un punto de vista intelectual" (p. 116).

De esta manera es que el diseño de la actividad tiene un carácter motivador y competitivo, donde se busca que los estudiantes puedan discutir, argumentar, interpretar y analizar una serie de situaciones problema, dirigidas hacia las secciones cónicas (circunferencia). La situación, además, tiene la intención de evaluar cada uno de los logros y dificultades con la apropiación de los conceptos puestos en juego.

REFERENTES TEÓRICO PRÁCTICOS BÁSICOS

El *geoplano* ofrece la oportunidad para que el alumno estudie y descubra la relación entre superficie-volumen, profundice y comprenda los conceptos de áreas y planos geométricos, y asocie contenidos de la geometría con el álgebra y el cálculo. De esta manera, el incorporar el *geoplano* en las clases de matemáticas puede ser considerado simplemente una novedad, o puede significar una oportunidad para que los docentes aborden los contenidos matemáticos de una forma creativa, valiéndose de esta única herramienta para inducir a los escolares a pensar en forma divergente y conducirles a construir conceptos matemáticos propios, para favorecer el desarrollo de procesos de aprendizaje significativo y estimular algunas capacidades cognitivas más complejas.

Ahora bien, respecto a la construcción de las cónicas en el aula de clase es importante resaltar lo que menciona Real (2004), en cuanto a la resolución e interpretación de problemas relacionados con las cónicas en cursos superiores, en donde resalta que "nuestro reto está claro: debemos intentar que los alumnos comprendan, representen y distingan cada una de las cónicas y sus distintas propiedades" (p. 1). En este sentido, la actividad aquí presentada busca que el estudiante tenga un acercamiento tangible y visual con la circunferencia.

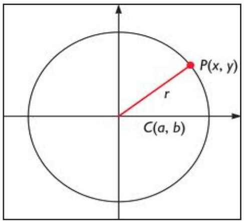


Figura 1

Se hace necesario, entonces, definir lo que esta significa científicamente. Para ello, Vallejo (2010) resalta que la circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro, (ver figura 1). La distancia desde el centro a un punto cualquiera de la circunferencia se llama radio de la circunferencia . La circunferencia es un caso particular de la elipse donde sus 2 semiejes coinciden.

Así, pues, para introducir esta noción, se hace necesario emplear material manipulativo, dado que facilita el aprendizaje del estudiante. En términos de Casanova (2009):

El material como forma de representación y estudio de la geometría es muy rico e importante. Existe la necesidad de recurrir a la concreto. Lo concreto deberá tener el doble fin de ejercitar las facultades sintéticas o las analíticas del alumno, aquellas que le permiten llegar al complejo a través del elemento, o sea construir, la facultad que ellos nos llevan a discernir un objeto, en una globalización, cuyos elementos que forman, nos conducen entonces a analizar el objeto (p. 28).

DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA EXPERIENCIA DE AULA

Esta experiencia de aula se dio en el colegio Restrepo Millán de la ciudad de Bogotá con 31 estudiantes mujeres de la jornada de la tarde, haciendo entrega del material manipulativo tangible (Geoplano circular) el cual consiste de una tabla con 36 puntillas clavadas en forma de circunferencia y una lana (ver figura 2).

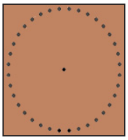


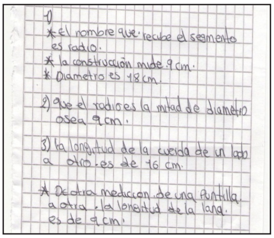
Figura 2

La actividad se dividió en dos partes; en la primera se pedía a las estudiantes que realizaran algunas acciones y se establecían algunos interrogantes, mientras que en la segunda se estableció una situación problema que requiere que con ayuda del geoplano se construya la circunferencia.

Primera parte. Se pide a las escolares que tomen cualquier puntilla de la circunferencia y tracen un segmento de la puntilla hacia el centro, para que obtengan la longitud de este segmento. Se hacen los siguientes cuestionamientos: ¿Qué nombre recibe este segmento de recta perteneciente a la circunferencia? ¿Cuánto mide en la construcción que hiciste? ¿Cómo es la medida del segmento?

Luego, se les pedía que trazaran un radio cualquiera y obtuvieran su magnitud, para que después trazaran un diámetro cualquiera de la misma circunferencia y hallaran su magnitud. Se les preguntó: ¿Qué relación observan entre ambas medidas?

Acto seguido se pide que escojan dos puntillas en cualquier lugar sobre la circunferencia y aten el segmento de uno a otro. Este segmento será una cuerda de la circunferencia. Luego se pide que midan la longitud de la cuerda. Y que repitan esto con otras dos puntillas y las aten con lana ¿Cambia la apariencia de la cuerda? ¿Y su longitud? En esta parte de la actividad, las estudiantes lograron determinar los nombres de los segmentos que construyeron, lo cual se puede observar en la figura 3.


1)
* El nombre que recibe el segmento es radio.
* la construcción mide 9 cm.
* Diametro es 18 cm.

2) que el radio es la mitad de diametro osea 9 cm.

3) la longitud de la cuerda de un lado a otro es de 16 cm.

* De otra medicion de una puntilla a otra. la longitud de la lana. es de 9 cm.

Figura 3

Como en la construcción que hacían debían encontrar la medida exacta de dicho segmento, las estudiantes explicaron que no tenían instrumentos de medida, en este caso regla; por tal motivo se les pidió que se ingeniaran otras formas para medir las distancias entre cualquiera de las puntillas y el centro; así que utilizaron como mecanismo de medida los dedos (*ver figura 4*).

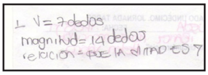

1. V = 7 dedos
magnitud = 14 dedos
relación = que la mitad es 7

Figura 4

Segunda Parte. En esta parte de la actividad se hace la construcción de la circunferencia, y para ello, partiendo de la circunferencia que se forma con las puntillas en la madera, se debía trazar en ella cuerdas de igual longitud. El procedimiento era atar un hilo a una de ellas y llevarlo a cada una de las otras de siete en siete, por ejemplo, hasta haber tocado todas las puntas, para observar que las cuerdas de la circunferencia hechas con el hilo describían otra circunferencia (*ver figura 5*)

Figura 5

De esta manera la situación planteada fue: *Consideremos dos circunferencias concéntricas C y C′ de radios R y r (r<R), respectivamente. Si trazamos rectas tangentes a C′, observamos que estas rectas generan en C cuerdas que son de igual longitud.* En esta parte las estudiantes comenzaron a trazar con la lana rectas tangentes. Esto con el fin de construir una circunferencia; algunas encontraban dificultad al tomar las distancias al atar la lana entre las puntillas; otras, por el contrario, lo hicieron de manera rápida.

Después se les planteó el siguiente interrogante: ¿Qué relación guarda cada una de las tangentes a la circunferencia con respecto al radio? A continuación, en las *figuras 6, 7 y 8,* se muestran las respuestas que dieron las estudiantes:

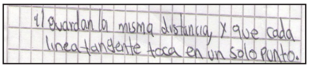


Figura 6

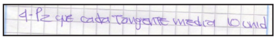


Figura 7

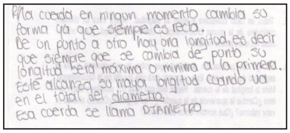


Figura 8

LOGROS Y DIFICULTADES

Dificultades. Algunas de las dificultades que se tuvieron al momento de aplicar la actividad fue que algunas de las estudiantes, al estar acostumbradas a que la clase de matemáticas se desarrolle totalmente en el tablero, no veían el porqué de la actividad, ya que pensaban que sería una pérdida de tiempo. Este concepto se superó al involucrarse en la actividad y darse cuenta de que estaban construyendo un objeto matemático, en este caso particular la circunferencia.

Logros. Se logró propiciar espacios de socialización en el aula de clase que permitieron a las estudiantes interactuar con sus demás compañeras, conociendo diversos puntos de vista sobre las construcciones realizadas y, de la misma forma, utilizando dicho espacio, se pudo llegar a la institucionalización del objeto trabajado en el aula. También, el uso del geoplano como recurso didáctico permitió evidenciar y confirmar que el estudiante, al interactuar con material manipulativo, puede llegar a construir un conocimiento matemático adecuado.

REFLEXIÓN FINAL

La buena utilización de recursos didácticos puede hacer que el estudiante desee enfrentarse ante el maravilloso mundo de las matemáticas no como un receptor sino como un constructor activo de dicho conocimiento. Así es que como docentes de matemáticas debemos crear alrededor de nuestros estudiantes un entorno en el que ellos puedan desarrollar sus construcciones personales, mostrar sin temor sus inquietudes y, por qué no, sugerir algunas estrategias a tratar en el aula de clase, ya que la cuestión más importante es que el estudiante pueda sacarle el mayor provecho al proceso de enseñanza-aprendizaje.

REFERENTES BIBLIOGRÁFICOS

Casanova, G. (2009). ¡Cónicas… por siempre cónicas! Un lugar geométrico. Tesina para optar al título de profesora de matemáticas. Instituto Superior "Fundación SUSUKI". San Miguel, Buenos Aires Argentina.

Ministerio de Educación Nacional (1998). Serie Lineamientos curriculares. Recuperado el 15 de agosto de 2009, de http://cmap.upb.edu.co/rid=1HQVXB4Q7-KVRV2Z-7H9/LINEAMIENTOS%20CURRICULARES.pps.

Ministerio de Educación Nacional (2003). La revolución educativa estándares básicos de matemáticas y lenguaje, educación básica y media. Recuperado el 15 de agosto de 2009, de http://74.125.47.132/search?q=cache:Gpot_P3e8pEJ:www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-70799_archivo.pdf+EST%C3%81NDARES+DE+MATEMATICAS&cd=2&hl=es&ct=clnk&gl=co&client=firefox-a.

Real, M. (2004). Las cónicas: método de aprendizaje constructivo. IES Suárez de Figueroa. Revista suma 46. Junio 2004, pp. 71-77

Vallejo, F. (2010). "Lugares geométricos: elipse, hipérbola, parábola y circunferencia. Aplicaciones y didáctica." Reflexiones y Experiencias Innovadoras en el Aula. Recuperado el 25 de agosto de 2011 de http://www.didacta21.com/documentos/revista/Diciembre10_Vallejo_Lopez_Fernando.pdf

Volumen y capacidad: de las unidades de medida antropométricas a las estandarizadas

Angie Carolina Cruz Cáceres[*]
Yeimy Esperanza Montes Valencia[**]
Ángel Ricardo Vargas Peña[***]

RESUMEN

El presente artículo evidencia una experiencia de aula relacionada con la caracterización y comprensión de las unidades de medida antropométricas y estandarizadas para la enseñanza de las magnitudes de volumen y capacidad a estudiantes de quinto grado a través de la resolución de problemas como metodología de clase.

El trabajo desarrollado tuvo en cuenta diversos contextos y situaciones cotidianas que promovieron un aprendizaje significativo en los estudiantes sobre el sistema métrico, potenciando la comprensión de procesos, tales como: construcción de los conceptos de volumen y capacidad; conservación de magnitudes; estimación de magnitudes; apreciación del rango de las magnitudes; selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos; asignación numérica, y el trasfondo social de la medición.

[*] Universidad Distrital. Dirección electrónica: angie240@hotmail.com
[**] Universidad Distrital. Dirección electrónica: yesmonva@hotmail.com
[***] Universidad Distrital. Dirección electrónica: anrivarpe2005@hotmail.com

CONTEXTUALIZACIÓN

La experiencia de aula se desarrolló con estudiantes de grado quinto, en una secuencia didáctica cuyos objetivos estuvieron enmarcados en la comprensión de las magnitudes de volumen y capacidad a partir de la determinación de los elementos necesarios para el desarrollo del pensamiento métrico, por medio de actividades que promovieron la construcción consecuente de las unidades de medida para dichas magnitudes.

Dentro del campo del pensamiento métrico, es importante que los estudiantes reconozcan la capacidad y el volumen como dos magnitudes diferentes pero que se relacionan en determinados espacios de aprendizaje. Si "la capacidad de un recipiente es sencillamente el volumen de líquido que puede contener" (Dickson, Gibson y Brown, 1991, p.150) se podría decir que la diferencia no tiene sentido, pero teniendo en cuenta que las unidades que se utilizan para designar el volumen son, en cierta forma, diferentes (litros, metros cúbicos) según Vergnaud (1985), es ineludible constatar las diferencias existentes.

Asimismo, aunque no existan diferencias de tipo lógico, existen las diferencias psicológicas, debido a que los líquidos no tienen una forma propia, y esto hace que no se pueda determinar directamente el volumen, como sucede en el caso de un sólido. Para que este proceso de cálculo de volumen líquido tenga éxito, es necesaria la conservación de la cantidad de una magnitud como uno de los elementos fundamentales para el desarrollo de esta temática con los estudiantes. En este orden de ideas, es evidente la importancia de crear espacios donde el niño, además de estimar las medidas y conservar la magnitud, logre encontrar estrategias para el cálculo del volumen, y obtener, así, la aptitud de comparar en términos cualitativos las capacidades de recipientes de distintas formas, asignar una medida de forma indirecta y hacer uso de algunas fórmulas establecidas. (Rothwell, citado por Dickson et al. 1991).

Del mismo modo, varias investigaciones coinciden en afirmar que no han existido mayores trabajos para el estudio del volumen y la capacidad conjuntamente. Según Kerslake, citado por Dickson et al. (1991), existe un cierto grado de confusión entre los conceptos de volumen y capacidad, definiéndolos como: i) capacidad: "facultad de los envases huecos para alojar, llenar cajas con botes, usar líquidos o áridos que fluyan libremente, como la arena, llenar una taza de té" (p. 143); ii) volumen: utilizada en dos sentidos: volumen interno de un hueco: "lo mismo que la capacidad" (p.143). Volumen externo: "en el sentido de la cantidad de espacio que un objeto toma para sí, es decir, volumen de espacio ocupado" (p. 143).

Finalmente, dichos autores también plantean que la mayoría de las experiencias priorizan el estudio del volumen interno o capacidad y no el volumen externo, lo que conduce a que los estudiantes se preocupen por la memorización de una fórmula u operación numérica, sin comprender su naturaleza.

Teniendo en cuenta lo anterior la pregunta de investigación abarcada durante la gestión de la secuencia didáctica fue: ***¿Qué elementos son necesarios para la comprensión de las magnitudes de volumen y capacidad en estudiantes de grado quinto a partir del uso de diferentes formas de medición?***

REFERENTES TEÓRICO-PRÁCTICOS

La importancia del desarrollo del pensamiento métrico en el estudiante radica en las diferentes aplicaciones y usos que se observan de manera natural y hacen parte de variados procesos que diversas comunidades realizan a partir de nociones y algoritmos matemáticos que permiten solucionar situaciones con relación a la medida. El estudio de la medida y de las diferentes magnitudes en la Educación Básica Primaria permite generar fundamentos importantes con relación a la asignación numérica y de atributos a objetos para poder analizar su longitud, masa, peso, volumen y capacidad, con el fin de solucionar problemas y satisfacer necesidades comunes.

Según Godino (2002), el estudiante inicia el proceso de asimilación de unidades de medida cuando ha desarrollado el lenguaje y se enfrenta a situaciones cotidianas donde empieza a crear patrones concretos, (manos, pisadas, dedos) que le permiten solucionar dicha situación. Por otra parte, los lineamientos curriculares de matemáticas (1998) afirman que la noción de la medida ha sido suplantada por la simple asignación numérica, lo que hace que se desconozca el proceso de medición y su contextualización, en un marco tanto histórico como cotidiano. El proceso de medición, si bien se empieza con estimaciones relacionadas con las imágenes espaciales conformando sistemas geométricos, no permanece en esta fase; pasa a una fase de metrización, donde aun siendo estimaciones, estas son de tipo cualitativo, previas a la asignación numérica, estableciendo así, los sistemas métricos.

En este orden de ideas, para lograr que el estudiante desarrolle integralmente el sistema métrico, se hace necesario alcanzar la comprensión de los siguientes procesos mencionados en lineamientos curriculares de matemáticas (1998):

La construcción del concepto de cada magnitud. ¿Qué es una magnitud? Y ¿Por qué es magnitud? Para esto se debe tener un punto de comparación, que en principio es unidireccional y luego reversible para la construcción de una determinada magnitud.

La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes. Su propósito es la "captación de aquello que permanece invariante a pesar de las alteraciones de tiempo y espacio" (p. 43).

La estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de "capturar lo continuo con lo discreto". "Todo proceso de medida es la reiteración de una unidad" (Brookes citado por el MEN, 1998, p. 43).

La apreciación del rango de las magnitudes. Es la valoración de una magnitud concreta a través de la percepción, ligada "al significado y a la familiaridad que tengan las personas con las unidades de medida y con cierta información" (p. 44), es decir, el acopio de información sobre la medida de cierta magnitudes concretas.

La selección de unidades. Se reconoce la característica concreta del patrón y la característica abstracta de la unidad, pues se pasa de un patrón particular y antropocéntrico a unidad de medida estandarizada y universal.

La asignación numérica. Se otorga un número que determinaría lo que mide cierta magnitud concreta. No obstante, considerado como el proceso más importante, solo es un subproceso del complejo proceso de medición, "y al que no necesariamente hay que llegar para que se pueda decir que sí hubo medición" (p. 45).

El papel del trasfondo social de la medición. Para lograr una verdadera aprehensión es necesario manifestar la importancia de la medición en la vida social y contextualizar los métodos didácticos que se utilizarán para llegar al proceso de medida.

Finalmente, como lo mencionan los Estándares Básicos en Calidad (2006) es importante que los estudiantes reconozcan el conjunto de unidades de medida utilizadas para las diferentes magnitudes (la velocidad, la densidad, la temperatura, capacidad, tiempo) y no solo de las magnitudes más relacionadas con la geometría: la longitud, el área, el volumen y la amplitud angular.

DESCRIPCIÓN GENERAL

Con base en el desarrollo de una secuencia didáctica, según lo propuesto por el grupo DECA (1992), se establecieron fases correspondientes a introducción, desarrollo, profundización y evaluación. El objetivo fundamental de dicha secuencia radicó en la construcción y validación de unidades de medida antropométricas, introduciendo los conceptos de volumen y capacidad a través de la acción de medir. Del mismo modo, se generó la necesidad del uso de medidas estandarizadas para el proceso mismo de medición de las dos magnitudes trabajadas.

En este sentido, las actividades propuestas en cada fase establecieron como punto de partida el contexto social de los estudiantes y sus conocimientos previos (actividades de reconocimiento y diagnostico), pasando por el reconocimiento de las diferencias y relaciones entre volumen y capacidad y las unidades de medida estandarizadas para estas magnitudes (actividades de desarrollo). Luego la construcción de cubos, poliedros y sólidos geométricos (actividades de profundización) y finalmente la integración y puesta en juego de los conocimientos adquiridos (actividad de evaluación).

Vale la pena aclarar que en todo momento se hizo uso de la resolución de problemas como herramienta para la comprensión y aprendizaje de las nociones y conceptos trabajados, y que la evaluación no solo se realizó como actividad final, sino que fue un proceso continuo durante todo el evento.

ANÁLISIS

La implementación de la propuesta didáctica posibilitó un análisis reflexivo sobre la mecanización, pues en muchos casos la importancia que se le da hace creer que lo realmente importante es el resultado y no se analiza el origen del mismo, haciendo que los estudiantes pierdan el sentido a los procesos de medición, como lo afirma Dickson (1984). Por otra parte, la evaluación constante y permanente posibilitó la observación de los niveles de desarrollo obtenidos por cada uno de los estudiantes, respondiendo a las competencias básicas mencionadas por los Estándares Básicos de calidad en Matemáticas (2006). En este caso, la resolución de problemas permitió que los estudiantes le dieran sentido a la acción de medir y la acercaran a contextos más cotidianos. Además, la actuación de los profesores como mediadores en las diferentes situaciones permitió que el estudiante por medio de preguntas, refutaciones y afirmaciones, lograra recordar, analizar, argumentar y validar sus concepciones e ideas frente a las temáticas abordadas.

Con relación al paso de lo concreto a lo abstracto, las actividades de exploración y observación y el uso de diversos recursos manipulativos concretos hicieron que los estudiantes lograran pasar de un contexto netamente concreto a un nivel de formalidad en cuanto al uso de unidades de medida y procesos de conversión entre las mismas. Al mismo tiempo, se enfatizó en el desarrollo de los cinco procesos generales presentes en toda actividad matemática. Estos, a su vez, posibilitaron dar cuenta de la pertinencia de la secuencia didáctica en tanto que las situaciones de observación y manejo de recipientes (conservación y conversión de magnitudes, entre otras) y las conceptualizaciones posteriores a la práctica viabilizaron la determinación de ciertas unidades de medida estandarizadas.

Por último, la construcción de sólidos geométricos permitió integrar y visualizar totalmente el trabajo realizado a lo largo de la implementación de la secuencia, y posibilitó determinar características de ciertas representaciones, utilizando algoritmos y estableciendo las propiedades frente a volumen y capacidad que cada figura cumple.

REFLEXIÓN FINAL

El diseño y la planeación de actividades a través de la resolución de problemas logran direccionar la gestión en el aula, de tal modo que tanto el docente como el estudiante hagan parte activa de la construcción de cada una de las nociones trabajadas, creando desde las aulas una sociedad democrática y crítica. Las actividades innovadoras despiertan el interés en los estudiantes propiciando participación y espacios de diálogo y discusión. El establecer conexiones y hacer uso de la interdisciplinariedad de las temáticas dota de significado muchas de las prácticas docentes y escolares.

Asimismo, la incorporación de nuevos esquemas a partir de conocimientos previos hace que los procesos de medición y conversión de unidades de medida, relacionados con el volumen y la capacidad, recobren sentido en contextos cotidianos, asegurando la comprensión de las diferencias y relaciones entre dichas magnitudes. Finalmente, tanto el uso de recursos didácticos como la evaluación constituyen medios para obtener información y adoptar las medidas necesarias para mejorar y facilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Dickson L, Brown M, Gibson. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Editorial Labor S. A. Ministerio de Educación y Ciencias.

Godino J, (2002) "Medida de magnitudes y su didáctica para maestros". *Proyecto EDUMAT-Maestros*. Edición febrero de 2002. España: Universidad de Granada

Grupo DECA (1992) "Orientaciones para el diseño y elaboración de actividades de aprendizaje y de evaluación". En *Revista Aula de Innovación Educativa*. N.° 6 Año 1992. Pp. 33-38. Editorial Grao.

MEN (1998) *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá: Editorial Magisterio.

MEN (2006) *Estándares básicos de calidad en matemáticas*. Bogotá: Editorial Magisterio.

Vergnaud G (2003) "El niño, las matemáticas y la realidad". *Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: ED Trillas.

Propuesta de enseñanza del concepto de función para estudiantes de Educación Superior

*Claudia Cecilia Castro Cortés**
*Luz Mery Díaz Camacho***

RESUMEN

La propuesta que se presenta hace parte de la investigación "Planteamiento didáctico del concepto de función para estudiantes de Educación Superior", y surge de la necesidad de reducir los altos índices de pérdida y deserción en los primeros semestres de Ingeniería. Dicha situación generó una reflexión e interés en la búsqueda de una propuesta que permitiera una mayor comprensión del concepto de función. La propuesta de enseñanza de tipo inclusivo que se construye se encuentra sustentada en unos referentes epistemológicos y teóricos, y hace énfasis en la identificación de los diferentes elementos del concepto, de las formas y cambios de representación.

Palabras clave. Sistema de representación, metodología de trabajo en el aula, función, situación.

* Universidad Sergio Arboleda. Dirección electrónica: mathclaudiacastro@yahoo.com
** Universidad Sergio Arboleda. Dirección electrónica: dicamelu73@yahoo.es

CONTEXTUALIZACIÓN

El concepto de función es abordado en los cursos de la Educación Básica y Media y posteriormente retomado en los primeros semestres de cálculo en estudiantes de Ingeniería. En diversas investigaciones realizadas por autores como Higueras (1998), Robledo (2003), Azcárate y Deulofeu (1996), entre otros, respecto al concepto de función, se ha identificado en general, que las dificultades de los estudiantes están relacionadas con

- La construcción deficiente del concepto.
- La falta de situaciones significativas en las propuestas de aprendizaje, que está directamente relacionada con modelos pedagógicos tradicionales, utilizados por los profesores.
- Los tipos de actividades desarrolladas con los diferentes registros de representación no propician la comprensión de los elementos inmersos en el concepto.
- La ejercitación de lo simbólico genera el dominio de procesos algorítmicos donde se utiliza el concepto de función, pero los estudiantes se encuentran con dificultades para solucionar situaciones contextualizadas, por la poca comprensión que se alcanza de los elementos como: identificación de variables, relación de dependencia y clasificación de funciones.

La necesidad de superar estas dificultades genera el interés por construir una propuesta de enseñanza que tiene como propósito lograr una mejor comprensión del concepto, disminuir la repetición en los cursos de Cálculo y evitar la deserción de los estudiantes en los primeros semestres.

REFERENTES TEÓRICO-PRÁCTICOS

La propuesta está diseñada con base en i) una revisión sucinta del recorrido histórico y epistemológico, que permitió reconocer las situaciones que dieron origen al concepto y las dificultades u obstáculos que se generaron en su desarrollo; ii) la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990), que implica la conceptualización como núcleo del desarrollo cognitivo, y lo define como la apropiación consciente del concepto que se define como la terna (S, I, R), donde: S: es el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto, I: el conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad y R: el conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento, y a partir de la cual se generó lo propuesta de desarrollo de situaciones inclusivas (que se explican posteriormente) y por último, iii) la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel (1983,) que muestra la importancia del conocimiento previo, como principal factor en la adquisición de nuevos conocimientos y de los roles de los actores del proceso: estudiantes y profesor.

A continuación se muestra el esquema en el que se relaciona la teoría de los campos conceptuales, el aprendizaje significativo y el estudio de la evolución histórico-epistemológica del concepto de función, tomado de Castro, Céspedes, y Díaz (2011), que sustentan la propuesta de enseñanza:

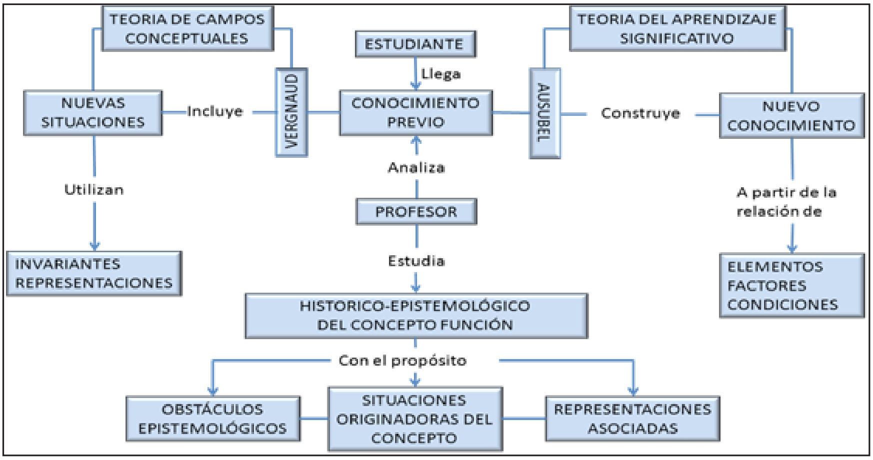


Figura 1. Relación entre la teoría de los campos conceptuales, el aprendizaje significativo y el estudio de la evolución histórico-epistemológica del concepto de función.

EXPERIENCIA DE AULA

Como producto del proceso de investigación, las situaciones diseñadas para el desarrollo del concepto de función se organizaron de forma inclusiva así: de relación, de identificación, de identificación de atributos y de caracterización de funciones, en las que se introducen poco a poco las diferentes formas de representación y los elementos que caracterizan el concepto de función. En el esquema se muestra el modelo de inclusión de las diferentes situaciones y las formas de representación:

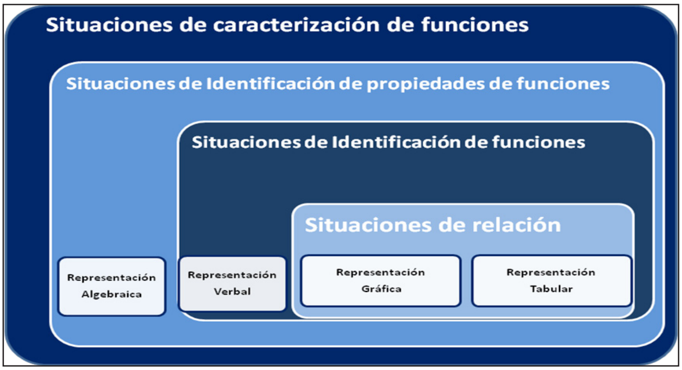
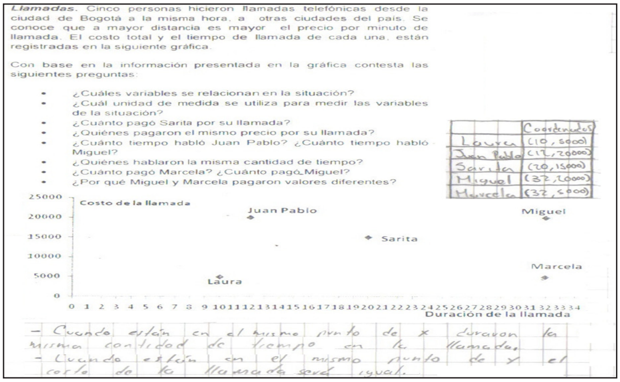


Figura 2. Organización de las clases de situaciones inclusivas para la enseñanza del concepto de función

¿Cómo se constituyen las situaciones?

Situaciones de relación

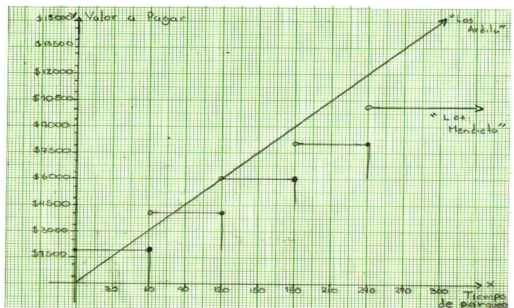


Propósito: A partir de la lectura de gráficas y tablas, el estudiante debe identificar las variables con sus unidades de medida, el significado del origen y las escalas utilizadas.

Representaciones: gráfica y tabular; en estas primeras situaciones se propicia el cambio de registro entre estos dos tipos de representación.

Situaciones de Identificación de funciones

Propósito: Realizar la lectura e interpretación de las gráficas y tablas para identificar entre las relaciones las que son funciones. Además de identificar algunos tipos de funciones como lineal, parte entera y cuadrática.

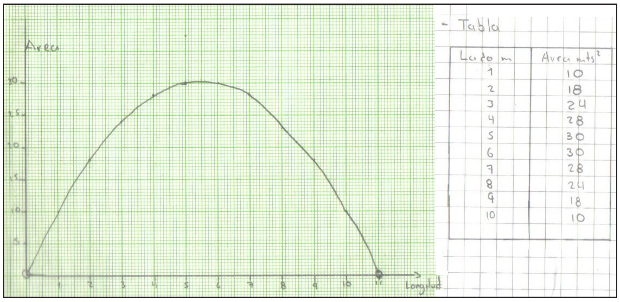


Tiempo / costo	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300
Ardila	$1500	$3000	$4500	$6000	$7500	$9000	$10500	$12000	$13500	$15000
Mendieta	$2000	$2000	$4000	$4000	$6000	$6000	$8000	$8000	$10000	$10000

Representaciones: gráfica, tabular y verbal, se determinan las condiciones para que una gráfica y una tabla representen una función.

Situaciones de identificación de propiedades de función

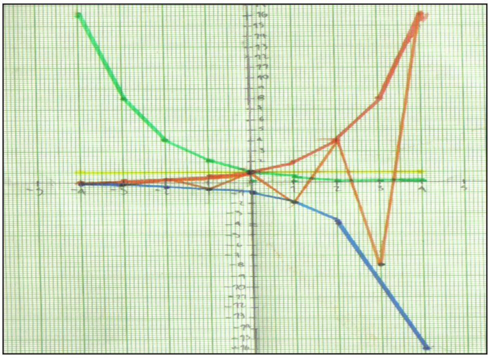
Propósito: Analizar la continuidad, monotonía, periodicidad y simetría de las funciones utilizadas en las situaciones planteadas.



Representaciones: gráfica, tabular, verbal y algebraica; al avanzar en las temáticas se regresa y profundiza en las situaciones analizadas con anterioridad, para complementar su estudio.

Situaciones de caracterización de funciones

Propósito. Determinar las características básicas de las diferentes funciones, por ejemplo, las condiciones para la base y el exponente en una función exponencial, el dominio y codominio, y sus propiedades.



Representaciones. En estas se utilizan todas las representaciones y se busca que los estudiantes realicen los cambios de registro necesarios para dar solución a las situaciones planteadas.

LOGROS Y DIFICULTADES

La metodología que se llevó a cabo para la aplicación de la propuesta está enmarcada en la resolución de problemas de Charnay (1998), en la que se reconoce que solo hay aprendizaje cuando el estudiante se enfrenta a resolver un problema; los roles del estudiante y del profesor son específicos; la clase se desarrolla en pequeños grupos que exponen el desarrollo de sus estrategias justificando cada uno de los procesos; se socializan con el fin de llegar a concesos ¿consensos? que permitan al maestro institucionalizar la propuesta, aspectos que propician la participación de los estudiantes en su aprendizaje.

La principal dificultad se presentó al inicio de la aplicación de la propuesta, básicamente por el cambio de metodología dado, ya que este implicaba a los estudiantes abordar las situaciones sin previa explicación que indicaran la estrategia de solución por parte del profesor. Una vez se adoptó la metodología, los estudiantes exponían sus estrategias de solución con mayor seguridad y reconocieron la importancia del proceso de construcción de conocimiento.

REFLEXIÓN

La metodología de resolución de problemas generó en los estudiantes un análisis crítico frente a las situaciones, lo que les permitía dar respuesta en forma sustentada, tomar decisiones y hacer cambios de registro de representación de manera pertinente.

Dado que la propuesta fue aplicada por una de las investigadoras, quien replanteó sus prácticas de enseñanza a partir de la misma, se observó que al modificar el rol del profesor, dando mayor protagonismo al estudiante, se supera la etapa de algoritmación en la que se centra el trabajo de los estudiantes en la mayoría de los cursos de Cálculo, dificultad que se reconoce en las diferentes investigaciones consultadas y mencionadas en la contextualización. Vale la pena decir que aunque la investigación se centró en el concepto de función, el resto del curso de Introducción al Análisis Matemático, se organizó en términos de la resolución de problemas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ausubel, D. (1983). *Psicología educativa*. México: Trillas.

Azcárate, C., y Deulofeu J. (1996). Funciones y gráficas. Madrid. España: Síntesis.

Castro, C., Céspedes, Y. y Díaz, M. (2011). Análisis del concepto función, para la construcción de una propuesta de enseñanza. *Memorias de la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Recife. Brasil

Charnay, R. (1998). Aprender (por médio de) la resolución de problemas. *Em Grand*, N. (Ed.), revista de matemática, ciencia y tecnología para los maestros de primaria y pre-primaria, n[B] 42. (PP. 51-63). Grenable. Documento CRDP.

Higueras, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada, Granada.

Robledo, J. (2003). *Registros semióticos de representación y matemáticas universitarias* (Tesis de maestría). Cali: Universidad del Valle, Cali.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathematiques*. La Pensée Sauvage: CNRS y Université René Descartes.

Enseñanza de las cónicas desde lo puntual y lo global integrando un ambiente de geometría dinámica

Edinsson Fernández Mosquera[*]

RESUMEN

Se presentarán los resultados de una investigación de intervención didáctica en el aula, que se ubicó dentro del contexto de la enseñanza de las cónicas vistas como lugares geométricos, con la mediación del Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) Cabri Géomètre II Plus. Como productos de esta investigación se dará a conocer la secuencia de *situaciones a-didácticas* que se diseñaron como problemas de construcción geométrica de estas curvas desde el enfoque puntual hacia lo global. La secuencia se diseñó con el propósito de que los estudiantes realizaran, en primera instancia, construcciones, punto por punto, de cada una de las cónicas, y luego, construcciones geométricas donde se utilizara la figura desde un punto de vista global, para caracterizar geométricamente cada una de ellas. Las situaciones se diseñaron desde lo sintético hacia lo analítico trayendo consigo una complementariedad en los enfoques usuales para que los estudiantes comprendieran las propiedades geométricas de las cónicas.

Palabras clave: cónicas, construcciones geométricas, ambiente de geometría dinámica, enfoque puntual-global, lugares geométricos.

[*] Área de Educación Matemática. Departamento de Matemáticas y Estadística. Universidad de Nariño, Pasto – Colombia. Direcciones electrónicas: edi454@yahoo.com, edinfer@udenar.edu.co

CONTEXTUALIZACIÓN

Se presentará un informe de investigación realizado en un curso de *Geometría Analítica* con 25 estudiantes del programa de estudios de Licenciatura en Matemáticas, en la Universidad de Nariño.

En esta investigación se diseñó una secuencia didáctica para el aprendizaje de las cónicas (parábola, elipse e hipérbola) vistas como lugares geométricos y mediados con el Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) *Cabri Géomètre II Plus*.

REFERENTES TEÓRICOS

Para el marco teórico, se tuvieron en cuenta tres dimensiones usuales en el campo de la Didáctica de las Matemáticas de la Escuela Francesa (Artigue, 1995; Brousseau, 2007): la dimensión *histórico-epistemológica*, la dimensión *cognitiva* y la dimensión *didáctica*.

Con la primera dimensión se encontraron los diversos significados, naturaleza y características de las cónicas desde la perspectiva de lugar geométrico, en tres períodos de tiempo. Con la *cognitiva*, lo *global* y *puntual* de los objetos matemáticos, así como las *concepciones*, *dificultades* y *obstáculos* de los estudiantes acerca de la noción de lugar geométrico en el aprendizaje de las cónicas. También se revisó la *visualización matemática* en un AGD, el papel de las *representaciones matemáticas ejecutables* y *dinámicas* para la comprensión de las cónicas y las *construcciones geométricas* como entrada necesaria en los AGD que actuó como mediador (Moreno & Hegedus, 2009). Y con la *didáctica*, se tuvo en cuenta un *análisis de libros de texto* (Fernández & Mejía, 2010) sobre las cónicas en la Educación Superior, la *teoría de las situaciones didácticas* (TSD) (Brousseau, 2007), los AGD como *medio* (Acosta, 2010) organizador de la interacción con el saber matemático. Asimismo, se tuvo en cuenta la tipología de *tareas* en AGD (Laborde, 2008) para gestionar las clases de *Geometría Analítica*.

OBJETIVOS

Los objetivos específicos fueron: 1. Diseñar y aplicar una secuencia didáctica que permita identificar y establecer una relación dialéctica entre los enfoques *puntuales* y *globales* cuando se estudian las cónicas como lugares geométricos en el AGD, en relación con problemas de construcción geométrica y 2. Observar, registrar y analizar la producción de los conocimientos matemáticos alrededor de las cónicas como lugar geométrico realizada por los estudiantes del curso de *Geometría Analítica*, cuando interactúan con el *medio*, a través de las situaciones diseñadas, desde una dialéctica *puntual* y *global*, cuando se involucran en problemas de construcción geométrica.

METODOLOGÍA

En esta investigación, se abordaron los aspectos metodológicos siguiendo las directrices de la *micro-ingeniería didáctica* (Artigue, 1995), por lo que se realizaron las cuatro fases: 1. los análisis *preliminares*; 2. el diseño de las situaciones de enseñanza y sus análisis *a priori*; 3. La experimentación; y finalmente, 4. Los análisis *a posteriori* y la validación y confrontación con los *a priori*.

RESULTADOS

Se expondrán los análisis *a priori* y a *posteriori* del diseño y gestión de la puesta en acto de las situaciones a-didácticas que se prepararon para esta investigación. Uno de los resultados fue el diseño de ocho situaciones desde la dialéctica *puntual-global* integrando *Cabri Géomètre II Plus* en relación a la TSD y la tipología de tareas en un AGD. Asimismo, se presentarán las ideas erróneas que tuvieron los estudiantes acerca de las cónicas, así como las concepciones previas que tuvieron sobre qué significa para ellos un lugar geométrico. En particular, uno de los resultados es que la comprensión *global* del lugar geométrico impera en los estudiantes al ver la figura (cónica) completa, en contraste con la comprensión local o *puntual* que no es muy bien recibida (Jahn, 2002).

CONCLUSIONES

Se presentarán algunas de las más relevantes conclusiones de esta investigación, tales como:

1. El análisis la información recolectada evidenció que las situaciones didácticas planteadas desde las construcciones geométricas *puntuales* permitieron que los estudiantes realizaran construcciones geométricas *globales* en el AGD, a la vez que en este ambiente se dieron retroalimentaciones que posibilitaron caracterizar algunas de las propiedades geométricas de las cónicas, pero al partir de construcciones *globales* los estudiantes no tuvieron en cuenta la naturaleza geométrica de las curvas como lugares geométricos: lo *puntual* de ellas.

2. Lo *puntual* en este trabajo remitió a lo local, en considerar puntos de la gráfica que tenían las propiedades de ser una cónica, lo que conllevó a que se quedaran en un nivel perceptual, en tanto que lo *global* de la gráfica les permitió aproximarse al mundo teórico, aunque lo *global* no fue aprovechado al máximo pues las estrategias de los estudiantes se quedaron en lo figural. Asimismo, con este diseño, se pudo descubrir que de lo *global*, existe la posibilidad de que surja la consideración de lo *puntual,* cuando los estudiantes han pasado por una primera caracterización. Además, el diseño de las situaciones sumado al Cabri, produjo un ambiente educativo, a manera de puente, para pasar de lo *puntual* a lo *global*. La vuelta de ir de lo *global* a lo *puntual* es algo que el profesor debe procurar cuando se busca encontrar invariantes o propiedades geométricas aludiendo a puntos de la curva que son claves para determinar la naturaleza de la curva, tales como el vértice o el foco.

3. Uno de los resultados de esta investigación fue el diseño de una *secuencia de situaciones problema,* y como telón de fondo, el uso del tratamiento didáctico reflejado en él mismo, que dejó entrever el cumplimiento de las hipótesis. En este sentido, fue posible reconocer la importancia de promover las caracterizaciones *puntuales* y *globales* de las *cónicas*. De igual forma, este enfoque se reveló como una posibilidad de integrar la visión *sintética* y la *analítica* para el estudio de las *cónicas* a través de la mediación del AGD Cabri Géomètre, al hacer entrar a los estudiantes en el estudio de las *cónicas* por medio de actividades de construcción geométrica y terminar solicitándoles la correspondiente expresión algebraica.

Por ejemplo, para dar cuenta de la transición de lo puntual a lo global, se pudieron observar en la *situación problema N.° 1 acciones* de los estudiantes usando el *medio* a través de construcciones *robustas* o *blandas* (Laborde, 2005). En este caso, se partió de construir una nube de puntos que por su propia naturaleza fueron estáticos, pero que sirvieron como puntos guía para señalar la trayectoria de un *punto móvil* relacionado con una construcción robusta que los estudiantes debían hallar. Este *punto móvil* debía generar la *cónica* de manera global.

4. La dimensión didáctica permitió profundizar en el *saber matemático* que se enseñó. Se tuvieron en cuenta aspectos matemáticos relativos a los lugares geométricos en las *cónicas*, con el propósito de analizar la especificidad y significación del "saber" matemático en el proceso de aprendizaje. Esto con el fin de hacer una "*transposición didáctica e informática*" transparente y desvinculada de subjetividades. De esta manera, el *saber matemático* fue

consustancial al diseño, no fue un agregado. Como esos conocimientos son tan específicos, se debía abordar de esa manera, tratando de darle sentido a las preguntas: ¿Qué son los *lugares geométricos*? y *¿Cuál era su incidencia en los modelos tradicionales de la enseñanza de estas curvas cuando se trata de aprenderlas*?

5. Desde la perspectiva didáctica de la dialéctica *herramienta-objeto* (Douady, 1993), el uso de la noción de lugar geométrico en el estudio de las cónicas es un ejemplo de este punto de vista, debido a que la secuencia estuvo organizada alrededor de problemas geométricos cargados de una intencionalidad didáctica que les permitió a los estudiantes darles un sentido y significado a las cónicas implicadas. Desde esta dialéctica, se pudo observar que el lugar geométrico jugó el papel de herramienta. Sin embargo, el paso a estudiar las cónicas en tanto objeto matemático fue trabajado por el profesor en la fase de *institucionalización*.

6. Desde este punto de vista dialéctico, se pudo conjugar la caracterización *puntual* y *global* en la secuencia diseñada. Y en consecuencia, el encuadre didáctico fue funcional pero al mismo tiempo llegó a convertirse en un fenómeno didáctico denominado *uso abusivo de la analogía* (Brousseau, 2007), al mostrar el profesor de manera ostensiva dicho método.

En este sentido, se piensa que el *método de los lugares geométricos* se debe enseñar claramente, pero con sutileza, más aun cuando en algunos casos, como los ocurridos en este proceso, se convirtió en un *fenómeno complejo* porque los estudiantes trataban de replicarlo, aunque en ocasiones sin éxito. Esta heurística o método de abordar un problema, a veces surge espontáneamente al resolverlo, pero la mayoría de las veces no sucede así en ellos, por lo que hay que hacerlo ostensivo. En las *fases, momentos* y *devoluciones* de las situaciones se pudo observar que el profesor reiteraba y enfatizaba en el uso del método de los lugares geométricos como una *herramienta* para resolver el problema, pero algunos estudiantes sí lo replicaron pero no lo entendieron.

Por lo tanto, el método de los lugares geométricos se reveló como una *estrategia ganadora* y se vio ampliada al usar el AGD Cabri, el cual pudo haberse integrado a las técnicas habituales de los estudiantes si se hubiese dado una complementariedad entre ambientes como el del lápiz y el papel. No obstante, según Schumman & Green (1997), la selección del ambiente para generar lugares geométricos depende de los objetivos didácticos que persiga el profesor. El problema era encontrar una *estrategia ganadora* que solucionara la situación usando conocimientos geométricos (es decir, con una construcción geométrica robusta) y que fuese la más eficiente entre las estrategias perceptivas y empíricas (una construcción blanda que se aproximaba). Como algunos estudiantes encontraron la *estrategia*, entonces se manifestó como una *herramienta* para resolverlo y no como una forma de cumplir con las expectativas del profesor de que lo entendieran como *objeto* y no solo como herramienta.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta, M. (2010). Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica. En G. García (Presidente de ASOCOLME), Conferencia llevada a cabo en *11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa* (7 al 9 de Octubre de 2010). Asocolme y Colegio Champagnat. Bogotá, Colombia. Recuperado del sitio de Internet Funes, Repositorio Digital de Documentos en Educación Matemática: http://funes.uniandes.edu.co/1169/1/132_ENSEANDO_TRANSFORMACIONES_GEOMTRICAS_CON_SOFTWARE_DE_GEOMETRA_DINMICA_Asocolme2010.pdf

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* (1 era. ed.). (D. Fregona, Trad.). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Douady, R. (1993). Juego de Marcos y la Dialéctica Herramienta-Objeto. En A. Ernesto Sánchez S. & Gonzalo Zubieta B (Eds.). *Lecturas en didáctica de las matemáticas* (pp. 68-87). México: CINVESTAV.

Fernández, E. & Mejía, M. F. (2010). Análisis de textos escolares para el diseño de situaciones de enseñanza. En G. García (Presidente de ASOCOLME), Conferencia llevada a cabo en *11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa* (7 al 9 de Octubre de 2010). Asocolme y Colegio Champagnat. Bogotá, Colombia. Recuperado del sitio de Internet Funes, Repositorio Digital de Documentos en Educación Matemática: http://funes.uniandes.edu.co/1162/1/61_Anlisis_de_textos_escolares_para_el_diseo_de_situaciones_de_Asocolme2010.pdf

Jahn, A. P. (2002, Junio): "Locus" and "Trace" in Cabri-Géomètre: relationships between geometric and functional aspects in a study of transformations. *The International Journal on Mathematical Education, ZDM, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 34 (3), 78-84.

Laborde, C. (2008). Multiple dimensions involved in the design of tasks taking full advantage of dynamic interactive geometry. En *Memorias XVII Encontro de Investigação em Educação Matemática.* Vieria de Leiria, Portugal.

Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions: two sides of the use of the use of dynamic geometry environments. En *10th Asian Technology Conference in Mathematics.* (12-16 de Diciembre). Cheong-Ju: Korea National University of Education, Corea.

Moreno, L. & Hegedus, S. (2009). Co-action with digital technologies. *The International Journal on Mathematical Education, ZDM, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik: Transforming Mathematics Education through the Use of Dynamic Mathematics Technologies,* 41 (4), 505-519.

Schumann, H. & Green, D. (1997). Producing and using Loci with Dynamic Geometry Software. En J. King & D. Schattschneider. (Eds.). *Geometry Turned On! Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research* (pp. 79-87). Washington D. C., EE. UU.: Mathematical Association of America Service Center.

Una experiencia de enseñanza de la integral en la formación inicial de profesores de matemáticas

*Jaime Fonseca González**

RESUMEN

La cuantificación y predicción del movimiento fueron los marcos epistémicos que dieron origen al cálculo en el siglo XVII; el origen, junto con la Resolución de Problemas se emplearon para diseñar una propuesta de enseñanza de la integral en un programa de formación de docentes de matemáticas, en la que se pasa por una fase de construcción de nociones y significados de suma de Riemmann, integral y antiderivada en problemas de movimiento, una fase de ampliación del campo de problemas y significados de la integral, y una fase de argumentación de propiedades de la integral y la antiderivada. En las dos primeras, los estudiantes construyen nociones, significados y propiedades de los conceptos objeto de estudio, siendo el tratamiento por integral definida el de mayor preferencia por los estudiantes.

Palabras claves: integración, observación de la enseñanza, formación inicial de profesores.

* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: jaimejaimef@hotmail.com

CONTEXTUALIZACIÓN

En la enseñanza tradicional del cálculo, suele darse una presentación teórica, deductiva y formal que se aprecia en el índice de los textos, los cuales mantienen la estructura: números reales, funciones, límites, continuidad, derivada, aplicaciones de la derivada, integral y aplicaciones de la integral. Bajo esta presentación, los conceptos y propiedades aparecen como resultados teóricos y dejan de lado el significado e importancia en el cálculo (Alanis, Salinas, 2010). En contraposición, Imaz y Moreno (2009, citados en Alanis, Salinas 2010), expresan que "existen problemas que se han derivado de una confusión: olvidarse de los orígenes del cálculo y sustituirlos por el aparato formal de análisis matemático derivado del cálculo" (pág. 2). Por su parte, Cantoral y Mirón (2000, citados Alanis, Salinas, 2009) exponen que "en la enseñanza del cálculo se logra que los estudiantes deriven, integren y calculen límites elementales, pero no son capaces de dar un sentido más amplio a esas nociones que les haga reconocer, por ejemplo, cuándo un problema requiere de calcular una derivada" (pág. 360). Esta contraposición se hace más fuerte si se tiene en cuenta que el enfoque algebraico y reduccionista, así como el abordaje simplista de los conceptos específicos del análisis, se opone a la resolución de problemas como un medio para el aprendizaje de las matemáticas.

En este contexto, y considerando la resolución de problemas como metodología para el aprendizaje de las matemáticas, en el proyecto curricular de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, específicamente en el Espacio de Formación denominado Matemáticas del Movimiento III, se presenta una propuesta de enseñanza que atiende a la construcción de los conceptos de antiderivada e integral desde la resolución de problemas en la formación inicial de docentes de matemáticas. Se presentará el referente histórico que dirige la propuesta, los momentos que orientan la organización de la propuesta, algunos de los problemas aplicados en la experiencia de aula, las producciones de los estudiantes y los logros y dificultades evidenciadas.

REFERENTES TEÓRICO-PRÁCTICOS BÁSICOS

Para el análisis epistemológico de la integral, se ha considerado el concepto de marco epistémico, el cual permite identificar obstáculos epistemológicos. Muñoz (2010) realizó un estudio epistemológico de la integral, antes y después del siglo XVII; particularmente, en el siglo XVII, Galileo introdujo mediciones para establecer relaciones entre distancia y tiempo, bajo el marco epistémico: ¿Qué relaciones se establecen entre distancias y tiempos de caída de los cuerpos? Con esto, Galileo introdujo las relaciones funcionales y asumió al tiempo como variable independiente en la descripción del movimiento. En el mismo siglo, Newton estudió el movimiento de los cuerpos bajo el marco epistémico: ¿Cómo se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidos los valores de los parámetros en un momento dado y en lugar dado? De este modo, el objetivo era predecir la evolución de un fenómeno de variación.

Kolmogórov (1936) expresa que durante el siglo XVII, las ciencias y la tecnología llevaron a las matemáticas a centrar su atención en la creación de métodos que permitieran el estudio del movimiento y los procesos de cambio. Los matemáticos de este siglo comprendieron la naturaleza y tuvieron en cuenta el carácter práctico de las matemáticas, llevándolas a una nueva etapa de desarrollo; por esto, los nuevos conceptos se justificaron en correspondencia con las relaciones del mundo real. En este momento del desarrollo del cálculo, Newton y Leibniz ofreciendo dos miradas diferentes al estudio de la variación. Leibniz desarrolló sus estudios desde el análisis de lo infinitamente pequeño, en el que la integral se entendió como la suma de un número infinitamente grande de cantidades infinitamente pequeñas, de modo que los diferenciales (aumentos infinitamente pequeños de las cantidades variables), constituyen un concepto básico del cálculo diferencial. Por su parte, Newton, con el método de fluxiones, construyó los conceptos de fluente (cantidad variable) y de sus "fluxiones" (velocidad de su cambio), llegando al problema de encontrar las fluxiones y las relaciones entre las fluxiones con el fluente asignado. Sin embargo, estas dos maneras de abordar los conceptos del cálculo se vincularon con lo que hoy conocemos como fórmula de Newton-Leibniz: si f es una función continua en $[a, b]$, entonces , donde $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$.

Este corto recorrido histórico relaciona el cálculo con problemas reales de estudio del movimiento, en los que la velocidad y la aceleración representaron conceptos físicos que originaron los conceptos derivada, antiderivada e integral desde dos miradas diferentes: la de Leibniz y la de Newton, bajo el problema de cuantificar y predecir el movimiento.

DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA EXPERIENCIA DE AULA

El proceso de enseñanza se ha planeado en tres fases: en la primera fase, los estudiantes construyen nociones y significados de suma de Riemmann, integral y antiderivada en problemas de movimiento. En la segunda, se proponen otros problemas para ampliación del campo de problemas y significados de la integral y la antiderivada. En la tercera, se argumenta sobre propiedades de la integral y la antiderivada. A su vez, cada en cada fase se da un momento de trabajo en grupo para la resolución de los problemas; un momento de socialización de los resultados de la resolución, establecimiento de significados, conjeturas, teoremas, representaciones y estrategias; un momento de institucionalización en la que se organizan los diferentes resultados obtenidos del proceso. Este documento presentará resultados sobre la aplicación de actividades de las dos primeras fases, algunos de los problemas propuestos, se comentan soluciones que muestran avances de los estudiantes en la conceptualización de la integral y su significado para la resolución de problemas del movimiento, así como algunos errores y dificultades evidenciadas en el proceso.

Primera fase. En esta fase, la actividad de aula se centra en la resolución del siguiente problema:

El sistema biela-manivela se compone de una biela AB cuyo extremo A (pie de biela), se desplaza a lo largo de una recta, mientras que el otro extremo B (cabeza de biela), articulado en B con una manivela OB, describe una circunferencia (Ver la ilustración). La cabeza de la biela se mueve con velocidad circular constante, de modo que la función que describe la velocidad del pistón desde que la manivela está alineada con la biela, es $v(t) = 6sen(2t)$, donde t se mide en segundos y $v(t)$ en cm/s. Determine la longitud de la manivela.

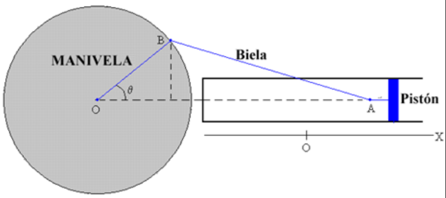


Ilustración I. Problema de movimiento aplicado en la primera I

El proceso de resolución del problema de los estudiantes pasó por cuatro momentos: 1) comprensión del problema. 2) documentación. 3) interpretación de datos y resultados encontrados en las dos primeras fases. 4) solución del problema. Además, las dificultades de los estudiantes para la resolución de este problema fueron: el conocimiento previo de los estudiantes sobre la velocidad hace que la definan en todos los casos, como v = d/t; suponer que la distancia recorrida es la longitud del arco de la curva de la función de velocidad; desconocer una relación entre la velocidad y la distancia recorrida cuando la velocidad es variable; la existencia de dos velocidades (la velocidad constante a la que gira la biela y la velocidad a la que se mueve el pistón); la relación entre el movimiento de la biela y el del pistón; la interpretación de velocidades negativas o cero en el movimiento del pistón. Los errores más frecuentes identificados en la solución del problema son: los estudiantes no reconocen t en la fórmula, como el tiempo de recorrido a la velocidad considerada, sino como el tiempo del recorrido, es decir, $t = 0.1$, $t = 0.2$, $t = 0.3, \ldots$; los estudiantes saben que deben integrar o calcular el área bajo la curva, pero no saben por qué representa la distancia recorrida, por lo que se les cuestionan las razones; consideran que el desplazamiento del pistón es igual a la longitud del círculo generado por el movimiento de la biela.

Como resultado, los grupos de trabajo presentaron razonamientos para resolver el problema, los cuales responden a acercamientos de los puntos de vista de Newton y Leibniz: emplean fórmulas físicas de movimiento uniforme acelerado para aproximarse a la solución. Retoman la situación desde el movimiento de la manivela, que tiene velocidad circular constante, y por medio de la derivada y la forma de la fórmula obtenida, identifican la longitud de la manivela. Retroceden en el razonamiento de la razón de cambio para obtener la velocidad, llevándolos a la antiderivada. Emplean aproximaciones de área empleando software como Excel o Geogebra, previa interpretación del significado del área bajo la curva de la función de velocidad.

Segunda fase. Para esta fase, se proponen otros problemas de movimiento y se sugiere que para cada uno, realicen una solución numérica mediante cálculos en Excel y una solución analítica por antiderivada, comparando los resultados de las dos soluciones. En esta actividad, los estudiantes se familiarizan con métodos y conceptos desarrollados por sus compañeros para resolver el primer problema y comprender las definiciones y afirmaciones que surgieron en la institucionalización. Sin embargo, mayoritariamente los estudiantes encuentran más fácil la relación entre la situación, los datos, la incógnita, cuando abordan el problema desde la integral o la suma de Riemann, que cuando lo hacen por la antiderivada. Esto, porque el producto de las magnitudes relacionadas en el dominio y codominio de la función les indica la magnitud con la cual relacionar el área, mientras que por el método de la antiderivada, a los estudiantes se les dificulta dar significado a la constante de integración y la antiderivada. Un tipo de problema que resulta fructífero para la actividad matemática de los estudiantes es aquel que indaga por una descripción de movimiento, cuando tiene como dato la velocidad de aceleración de un móvil, o cuando se presenta al estudiante solo la representación tabular o gráfica de la aceleración, pues permite llevar a otra forma equivalente del teorema fundamental del cálculo o a diferentes métodos numéricos de integración. Además, es recomendable involucrar, no solo la posición de los objetos en unos ciertos instantes, sino la gráfica de posición.

Tercera fase. Se recopilan todas las conjeturas y fórmulas que hasta el momento se han obtenido desde la resolución de los problemas propuestos y la institucionalización de los resultados, se retoman las definiciones, y los estudiantes, en trabajo colectivo, buscan sugerir argumentos para justificar su validez. La recolección de datos de esta fase aún se está realizando, así que para este reporte no se presentan resultados ni reflexiones.

REFLEXIÓN FINAL

El desarrollo histórico del cálculo indica que conceptos como derivada e integral emergieron, por una parte, del estudio de los problemas del movimiento, principalmente en física, y por otra parte, del cálculo de cuadraturas, pero los resultados convergen con el teorema fundamental del cálculo. Al considerar el desarrollo histórico y la resolución de problemas para el diseño e implementación de problemas para la enseñanza del concepto de integral, los estudiantes construyen significados y representaciones de los conceptos, y establecen fórmulas y conjeturas sobre el comportamiento de tales objetos. Se identifica en los estudiantes, preferencia por el método de la integral para resolver problemas, y las principales dificultades se observan en la significación de la antiderivada y la integral definida, a pesar de que la relación entre función y derivada es fácilmente concebida por los estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alanís, J., Salinas, P. (2009) Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (México), Vol. 12, N.° 3, 2009, pp. 355-382. Recuperado el 15 de diciembre de 2011 de http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33511859004.

Alanis, J., Salinas, P. (2010). Cálculo de una variable: acercamientos newtonianos y leibniziano integrados didácticamente. Revista El Cálculo y su Enseñanza (México) Vol. II, 2010. Recuperado el 10 de enero de 2012 de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/

Kolmogórov, A. (1936). Matemáticas. La Gaceta. Traducción de B., Fernández y E., Pastor. Recuperado el 15 de marzo 2011 de http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/Gaceta/historia91b.pdf.

Muñoz G., (2010). Hacia un campo de prácticas sociales como fundamento para rediseñar el discurso escolar del cálculo integral. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Clame. Vol. 13 N.°4, pp. 283-302.

Una propuesta de aula para la enseñanza del número real por medio de una secuencia de actividades en la que se construye el número de oro a partir del uso de algunas representaciones del número real

*Francy Paola González Castelblanco**

RESUMEN

Se considera como un hecho documentado las dificultades que hay frente a la enseñanza del sistema numérico de los reales. El presente trabajo se propuso responder a esta necesidad mediante el diseño y la implementación de una secuencia de actividades, con estudiantes de media vocacional (grado once), enfocada a mejorar la comprensión de dicho concepto desde tres aspectos: 1. El reconocimiento de la noción de infinito actual y potencial; 2. el reconocimiento de la naturaleza numérica de sus elementos; 3. algunas representaciones asociadas al número real y la manera en que estas se complementan. En el presente documento se mencionan brevemente los referentes teóricos que sustentan el diseño de la propuesta para aula y los resultados que se obtuvieron de su aplicación.

Palabras clave: números reales, sistemas de representación asociados al número real, evolución histórica del concepto de número real, análisis y reflexión sobre la enseñanza.

* U. D. Fco. J. de Caldas. Dirección electrónica: ninapiamonte@gmail.com

CONTEXTUALIZACIÓN

Es reconocida la importancia de la enseñanza del número real, entre otros aspectos, porque este concepto es base para la comprensión de otros conceptos como el de variable (Bonilla, 2001) y los conceptos previos a la enseñanza del cálculo (Artigue, 1998). Por ello el concepto de número real según los estándares (Ministerio de Educación Nacional, (MEN), 2003, p. 20-21) comienza a ser estudiado en los colegios desde grado octavo y se prolonga durante la media vocacional.

Se han identificado algunas dificultades en la enseñanza del concepto de número real por varios autores, entre ellos García (2003, p. 12) y Romero (1997, p. 13), para quienes estas dificultades pueden residir, entre otros aspectos, en dificultades con respecto al objeto matemático, a su origen epistemológico o a su forma de enseñanza.

Frente a lo anteriormente expuesto, se reconoce que las dificultades asociadas a la enseñanza del concepto del número real significan una dificultad al momento de alcanzar lo exigido por el MEN. Pensando en una posible vía de solución a esta dificultad, se consideró pertinente el diseño y la implementación de una secuencia de actividades enfocada a mejorar la comprensión que sobre el número real tiene un grupo de estudiantes de grado once, a partir de una situación problema en la que se construye el número de oro utilizando algunas representaciones del número real.

REFERENTES TEÓRICO-PRÁCTICOS

El componente histórico ligado al concepto de número real cumple una función importante en su enseñanza. Desde el MEN (2003) este componente histórico es útil para desarrollar algunos aspectos que hacen parte del pensamiento numérico a partir de situaciones en las que se involucran magnitudes medibles en términos de una unidad de medida y magnitudes que no lo son, y en situaciones relativas a los números reales tales como la aritmetización de procesos infinitos y la construcción de las nociones de inconmensurabilidad, irracionalidad, completitud y continuidad. (MEN, 2003 p.15)

De acuerdo con lo anterior se consideró pertinente involucrar el desarrollo histórico del concepto de número real en el marco teórico, con la intención de identificar allí los sistemas de representación que se involucraron en la secuencia de actividades. Para esto el estudio del número real se planteó en tres etapas:

1. Descubrimiento de la inconmensurabilidad: se abarcan brevemente algunos aspectos importantes de los sistemas numéricos que conforman el

sistema de los números reales, haciendo énfasis en el estudio de los libros de *Los elementos,* de Euclides. Se estudia el trabajo se Zenón de Elea sobre las cuatro paradojas del movimiento, el trabajo de Eudoxo de Cnido que se expone en el libro V de *Los elementos*.

2. Fracciones decimales y continuas, y los números irracionales: referido principalmente al uso de las expresiones decimales con expansión infinita y no periódica y a las fracciones continuas infinitas para representar números irracionales.
3. Formalización del número real: se estudia principalmente la formalización de los números reales que hace Dedekind.

Posteriormente se estudia la importancia de los sistemas de representación en la enseñanza y el aprendizaje de las estructuras numéricas a partir de un documento de Castro, Romero y Rico (1999). Allí se establece cuáles tipos de sistemas de representaciones están asociados al sistema de los números reales y finalmente se involucran algunas apreciaciones acerca del infinito actual y potencial a partir de los documentos de Waldegg (1996) y Garbín y Azcárate (2000 y 2002).

El trabajo se desarrolló en etapas que fueron diseñadas, planificadas y ejecutadas de acuerdo con las necesidades de la investigación; también se pensó en reducir el efecto del carácter subjetivo del investigador en el análisis de datos buscando una mayor confianza en los resultados obtenidos. Para ello se utilizaron métodos y estrategias de validez interna de los datos, tales como la prueba de la línea de base y la triangulación de datos de recursos o métodos; también se utilizaron descriptores de baja frecuencia como por ejemplo: vídeos, entrevistas, aplicación de instrumentos de indagación que sustentan los datos y las conclusiones obtenidas al analizar cada una de las etapas en las que se desarrolló la secuencia.

DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA EXPERIENCIA DE AULA

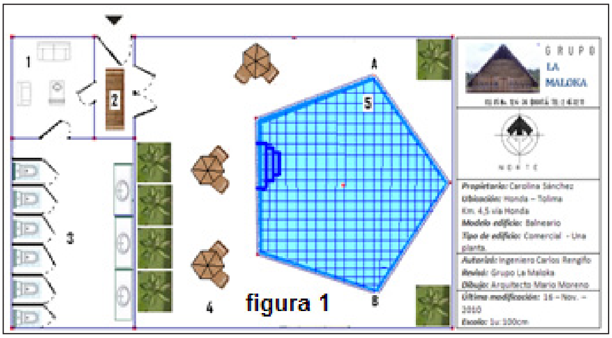


figura 1

El trabajo se desarrolló en un colegio ubicado en las cercanías del municipio de Cota (Cundinamarca) durante los días 21, 23 y 25 de febrero, 2, 4 y 8 de Marzo y 5, 11 y 13 de abril de 2011 con un promedio de 80 minutos por sesión. La secuencia de actividades se basa en una situación problema que brevemente plantea la siguiente situación: una firma de arquitectos tiene el trabajo de diseñar los planos de un balneario (figura 1), para lo cual se deben tomar las medidas de las estancias que conforman el plano del lugar.

La secuencia de actividades se implementó de acuerdo con el desarrollo de cuatro etapas:

La primera es el reconocimiento de la conmensurabilidad. Se logra a partir del trabajo sobre las estancias 1, 2, 3 y 4 del plano. En esta etapa el estudiante debe enfrentar el problema de medición de magnitudes conmensurables aplicando a estas el algoritmo de Euclides. Como resultado de esta medición se encuentra una razón, luego se analizan los tipos de expansiones decimales de los cocientes de las razones y se caracterizan para el caso del número racional y, finalmente, se trabajan las fracciones continuas finitas como otra forma de representación de dichas longitudes, asociando su carácter finito al hecho de que provengan de un número racional.

La segunda etapa es el reconocimiento de la inconmensurabilidad. Se logra a partir del trabajo sobre la estancia 5 del plano. En esta etapa el estudiante se enfrenta al problema de la inconmensurabilidad de segmentos cuando, al aplicar el algoritmo de Euclides a los segmentos que se busca medir, este proceso es infinito; en este caso no es posible encontrar una razón que exprese la longitud de dichos segmentos. Para determinar la medida del segmento se utiliza el sistema de aproximaciones (Federici, 2002) de donde resulta la sucesión de Fibonacci.

La tercera etapa es la imposibilidad de representar mediante un número racional la longitud de la diagonal del pentágono en términos de su lado como unidad de medida. Se recurre a las fracciones continuas buscando expresar cada término de la sucesión de cocientes de Fibonacci, (que es una razón) mediante una fracción continua infinita. El carácter infinito de las fracciones continuas se asocia con una medida no racional de la longitud buscada del segmento.

La cuarta etapa es la prueba de esta imposibilidad lo que se logra mediante la generalización de la fracción continua equivalente al término enésimo de la sucesión de cocientes de la sucesión de Fibonacci, que es generalizable de la forma: $x = 1 + \frac{1}{x}$ de donde al igualar a cero y resolver la ecuación cuadrática se obtiene que $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que es la longitud buscada del segmento.

LOGROS Y DIFICULTADES EVIDENCIADAS Y REFLEXIÓN FINAL

El trabajo brindó a los estudiantes la posibilidad de utilizar otras representaciones del número real que usualmente no se involucran en el proceso de enseñanza de este concepto, y permitió articularlas en un sistema de representación que favoreció la comprensión y la complementariedad de los esquemas y procesos que subyacen a esta estructura numérica.

Es importante señalar algunos de los avances evidenciados por la prueba de línea de base inicial y final, con respecto a las variables que allí se querían analizar. La primera variable está relacionada con la idea de infinito actual y potencial en una situación de infinita divisibilidad planteada en distintos lenguajes. Frente a este aspecto se considera como un avance el que los estudiantes usaran los conceptos de sucesiones convergentes y límites para enfrentar dichas situaciones.

La segunda variable está relacionada con el reconocimiento de la naturaleza de los conjuntos numéricos que componen los reales. Frente a este aspecto los estudiantes lograron tipificar el número racional de acuerdo con el tipo de expansión periódica que tiene y reconocieron el número irracional de acuerdo con su expansión infinita y no periódica, reconociendo en estos características y propiedades asociadas a diferentes usos del número real en situaciones de medición de magnitudes conmensurables e inconmensurables.

La tercera variable tiene que ver con la capacidad de reconocer diferentes formas de representación del número real y asociarlas con procesos infinitos. Frente a esta variable es importante destacar que los estudiantes lograron identificar el algoritmo de Euclides, razones como comparación entre magnitudes y como cocientes, las fracciones continuas finitas e infinitas, sucesiones convergentes, todas estas como herramientas que les permitieron entender los procesos infinitos y aritmetizarlos.

Finalmente una dificultad para el desarrollo del trabajo fue la colaboración prestada por el colegio. A pesar de que en varias oportunidades se resaltaron los beneficios de la propuesta, no se ofreció la colaboración suficiente y fue difícil concertar los espacios para llevarla a cabo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aliaga, F. (S.f.), Bases epistemológicas y proceso de investigación psicoeducativa, Universidad de Valencia, Recuperado el 16 de diciembre de 2011, de: http://www.uv.es/aliaga/curriculum/ProcesoGeneraldeInvestigacion.pdf.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y Aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? Relime, 1 (001), 40-55.

Bonilla, M., Rojas, P., Barón, C., Vergel, R., Romero, J., Sánchez, N., et al., (2001). Una reflexión sobre la construcción de los objetos matemáticos. Transición Aritmética-Álgebra, módulo 3. Grupo editorial GAIA. Bogotá.17-21.

Federici, C. (2002). En este saber he creído, de este saber he vivido. Ed. Universidad Nacional, Bogotá.

Garbin, S., Azcárate, C., (2000) Infinito actual e inconsistencias: Acerca de la incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16 – 17 años, Enseñanza de las ciencias, 20 (1), 87 – 113.

Garbin, S., (2002), ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos, Relime, 8 (002), 169 – 193.

García, G., Serrano, N., & Díaz, H. (2003). ¿Qué hay detrás de las dificultades que presenta la comprensión del concepto de número real?, Red Académica UPN., p. 11.

Ministerio de Educación Nacional, 2003. Estándares Básicos de Matemáticas y Lenguaje.

Romero, I. (1997). La introducción al número real en enseñanza secundaria: Una experiencia de investigación acción, Ed. Mathema, España.

Romero, I., Rico, L., (1999), Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria. EMA, 4 (2), 117 – 151.

Waldegg G., (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el infinito actual, Revista Mexicana de investigación educativa, 1 (1), 107-122.

Propuesta metodológica para la conceptualización de la noción de derivada a través de su interpretación geométrica

*Rossmajer Guataquira López**
*María Sildana Castillo Torres***
*Hellen Carolina Carranza Sanabria****

RESUMEN

Esta propuesta metodológica (en vía de desarrollo) presenta el esquema de una secuencia de actividades dirigida a estudiantes de décimo, once y primeros semestres de universidad. Busca propiciar la conceptualización de la noción de derivada a través de su interpretación como la pendiente de la recta tangente a un punto y el razonamiento geométrico respecto a la misma. Emplea, para ello, Geogebra, como una forma de representar dinámicamente la derivada; los niveles de razonamiento de Van Hiele y la teoría de conceptualización de Vinner, para el planteamiento de la secuencia; y una adaptación de las "Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría" de Samper y otros (2003), para el esquema de las actividades.

Palabras clave. Derivada, conceptualización, razonamiento geométrico.

** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: rossmajer@yahoo.com.
** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: sildanak@hotmail.com.
*** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: carito9026@gmail.com.

CONTEXTUALIZACIÓN

Existe –según nuestra propia experiencia como estudiantes bachilleres y universitarias y según los estudios realizados por investigadores en educación como Dolores y Cantoral (2000)– una gran cantidad de estudiantes bachilleres y universitarios que presentan dificultades en la comprensión de la noción de derivada. En reconocimiento de este problema y de las prácticas educativas que se realizan en las aulas de clase (muchas de ellas enfocadas en la representación algebraica de la derivada), en el espacio de formación denominado Tecnología en el Aula de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, surge esta secuencia de actividades como una propuesta metodológica de enseñanza mediante la cual se busca potenciar la conceptualización de la noción de derivada (a través de su interpretación geométrica) en jóvenes de últimos grados de bachillerato y primeros semestres de universidad, haciendo uso del software Geogebra como un medio de visualización e interacción con la derivada, del diseño de siete actividades estructuradas de acuerdo con los niveles de razonamiento de Van Hiele, de los planteamiento acerca de conceptualización de Vinner y de una adaptación de la propuesta didáctica denominada *"Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría",* planteada por Samper y otros (2003) para promover la conceptualización de un objeto geométrico inventado, denominado Kuid.

MARCO DE REFERENCIA

Matemático. En matemáticas, podemos hablar de pendiente de una línea recta o de una línea curva. Una línea recta tiene pendiente constante a lo largo de todos sus puntos, puesto que ella es la misma en cualquier punto de la recta, pero, en el caso de la pendiente de una curva no sucede lo mismo y ello da origen al concepto de derivada de una función. La derivada de una función se puede considerar respecto a ella o a un punto de ella. Para efectos de esta propuesta solo la consideraremos respecto a un punto de ella.

Legal y didáctico. El Ministerio de Educación Nacional, en sus *Estándares curriculares de matemáticas* (MEN 2007, p. 69), propone que la enseñanza de la derivada en la Educación Básica Secundaria se realice interpretándola como el valor de la pendiente de la tangente a una curva, y trabajarla a partir de argumentos geométricos modelados en problemas de contextos matemáticos y de otras ciencias.

En cuanto a la enseñanza de la derivada, Hitt (2003) propone que el docente desarrolle en los estudiantes habilidades de visualización, para la construcción de pensamiento matemático, y en este sentido, Font (2005) incita a trabajar con un software la interpretación geométrica de la derivada en un punto, para que el alumno visualice todas las tangentes de una función, de tal forma que pueda expresar simbólicamente las pendientes de las rectas tangentes de la misma. Al respecto, Dolores (2000) propone el trabajo de la derivada como un enfoque geométrico y computacional, teniendo en cuenta que el **enfoque geométrico** trabaja la derivada por medio de la recta tangente de un punto, y el **enfoque computacional**[1] realiza una visualización dinámica de la derivada, a partir del comportamiento que tiene la misma en la aproximación de las rectas secantes a la recta tangente.

Metodológico. El diseño de las actividades tiene en cuenta la recomendación didáctica dada por Samper y otros (2003), para construir situaciones de conceptualización de objetos geométricos, considerando el concepto que será objeto de estudio, a partir de su punto de vista matemático y didáctico y de la construcción del concepto desde sus diversas propiedades.

Asimismo, tienen en cuenta que la cercanía entre la imagen conceptual y el concepto depende de la cantidad de experiencias que tenga el estudiante con una gran variedad de imágenes conceptuales del objeto de estudio, pues como lo afirman Vinner y Hershkowitz "*adquirir un concepto significa adquirir un mecanismo de construcción e identificación mediante el cual será posible identificar o construir todos los ejemplos del concepto, tal como éste está concebido por la comunidad matemática*" (Citado por Samper y otros, 2003, p. 9).

La implementación en el aula de estas actividades se lleva a cabo de acuerdo con las recomendaciones didácticas que se detallan en cada actividad (apartados que se han realizado de acuerdo con las recomendaciones de Samper y otros (2003)), especificando la finalidad, las acciones que debe realizar el docente, la explicación de cómo funciona la actividad y su conexión con el nivel de Van Hiele. En algunas actividades se requiere el uso del software Geogebra, el cual debe ser implementado como una herramienta que permite la visualización dinámica de la derivada de acuerdo con las instrucciones de uso que se dan en la actividad correspondiente. Al final de cada actividad, se sugiere socializar las respuestas dadas por los estudiantes, llegando a acuerdos que sean dirigidos por el docente según la intención de cada actividad.

---

[1] En la propuesta hemos implementado el software Geogebra debido a que este es un software libre de acceso gratuito.

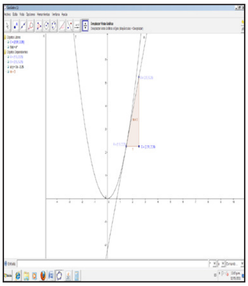
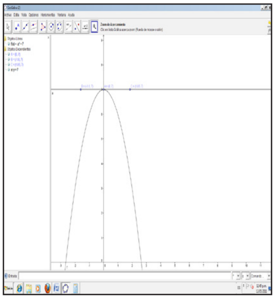
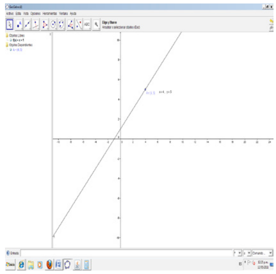
DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA EXPERIENCIA

Las actividades propuestas están comprendidas por la intencionalidad de la actividad, los materiales y los prerrequisitos conceptuales y procedimentales que deben tener los estudiantes, además de las fichas con los kuid (nuestro kuid es la derivada en un punto) a presentar. Para efectos de este documento (por cuestiones de espacio) solo daremos a conocer la intencionalidad de cada una de las actividades de acuerdo con el nivel de Van Hiele al que corresponden y una parte de la primera actividad.

SECUENCIA DE ACTIVIDADES		
Nivel según Van Hiele	*No*	*Intencionalidad:*
Tipo 1: Visualización	1	El descubrimiento, por el alumno, de las características esenciales del Kuid, a través del análisis de ejemplos y contraejemplos.
Tipo 2: Análisis o Descripción	2	Los estudiantes deben identificar características del kuid, a partir de la construcción de distintos ejemplos del mismo.
	3	Trabajar con una propiedad del kuid, haciendo al estudiante responsable de las construcciones que realiza con base en las sesiones anteriores.
Tipo 3: Clasificación	4	Seleccionar ejemplos con una propiedad común.
Tipo 4: Deducción Formal	5	Perfeccionamiento de la definición de Kuid, a partir del estudio de casos poco conocidos del mismo.
	6	Recoger las ideas intuitivas desarrolladas en torno al concepto de kuid y concretarlas en una definición formal.
Tipo 5: De rigor	7	Invitar a los alumnos a dar explicaciones y justificaciones para avalar las propiedades del kuid trabajadas durante toda la secuencia, usando el concepto de kuid ya adquirido.

Actividad no. 1. Descripción de la actividad: Para el desarrollo de la actividad el maestro proyectará (mediante el uso de computador o retroproyector) las imágenes de los Kuid (Derivada en un punto) sobre un telón o tablero, de manera secuencial, manteniendo ocultas las figuras posteriores a las que se están analizando. El alumno tiene que realizar contrastes entre la figura recientemente destapada y aquellas que ya ha tenido la oportunidad de analizar.

Este ejercicio requiere de un análisis totalmente abstracto, sin la intervención de herramientas manuales. El alumno debe operar mentalmente sobre las figuras, descomponiéndolas con el fin de reconocer sus partes constitutivas (función, recta tangente y pendiente) y efectuar una comparación entre las imágenes y la información que estas presentan. Las primeras tres imágenes, de las nueve que se le presentan al estudiante, son las siguientes:

 $m = 3$ en la recta tangente a, es el Kuid de f(x) = x^{2}, con $x = 1.5$. Imagen 1	¿Es , el Kuid de , con $x = 0$?  Imagen 2	La imagen 2 no presenta un Kuid. ¿$y = 5$ es el Kuid de , con $x = 4$?  Imagen 3

LOGROS Y DIFICULTADES

Las ventajas que posee la secuencia de actividades radica, por una parte, en que esta es producto de una adaptación de la propuesta de Samper y otros (2003) para promover la conceptualización de un objeto geométrico, y por otra, que esta está fundamentada en el trabajo visual y manipulativo de la derivada, aunque tiene como dificultad el hecho de que se encuentra en vía de desarrollo, y, por tanto, aún no ha sido validada en el contexto para el cual ha sido diseñada: grados 10° y 11° y primeros semestres de universidad, para hacer de esta una propuesta más consistente.

REFLEXIÓN FINAL

A partir de la experiencia propia y de consultas realizadas consideramos que el trabajo geométrico, visual y manipulativo de la derivada que proponemos puede contribuir a la motivación de los estudiantes frente al tema, además de facilitarles la comprensión y conceptualización del mismo y de potenciarles su razonamiento geométrico. También consideramos que el camino investigativo recorrido por las docentes Samper, Camargo y Leguizamón (2003) y los logros obtenidos por ellas en dicho camino garantizan en gran medida buenos resultados en la aplicación de esta propuesta, puesto que estamos considerando a la derivada (desde su interpretación geométrica, como la pendiente de la recta tangente a un punto) como aquel Kuid del que hablan estas docentes, un Kuid ya no pensado para primaria sino para los últimos años de colegio y principios de universidad.

Referencias bibliográficas

Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En: El futuro del cálculo infinitesimal (Cap. 5) [En línea]. (Consultado el 13/04/2011). Disponible en: http://cimate.uagro.mx/pub/Crisologo/ArticuloICME8.pdf

Font (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. Universidad de Barcelona. [En línea]. (Consultado el 24/08/2012). Disponible en: http://start.funmoods.com/results.php.

Hitt F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. Boletan de la Asociación Matemática Venezolana, (Vol. X, No. 2). [En línea]. (Consultado el 23/08/2012). Disponible en: http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/fernandoHitt.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Matemáticas. Estándares Básicos de Competencias. MEN. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Samper, C., Camargo, L., y Leguizamón, C. (2003). Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría. Asociación Colombiana de Matemática Educativa, ASOCOLME, Cuaderno No. 6. (Consultado: 21/04/2011). Disponible en línea en: http://asocolme.com/documento/publicaciones/cuadernos/cuaderno%206%20 razonamiento.pdf.

La argumentación en estudiantes de grado noveno cuando realizan actividades de generalización

*Diego Fernando Izquierdo R.**
*Jose María Granados M.***
*María Nubia Soler A.****

RESUMEN

El uso de la argumentación en el aula de matemáticas ha sido objeto de estudio y de vital importancia en el campo de la educación matemática. En este trabajo queremos describir la forma en que algunas actividades de generalización pueden potenciar los procesos de argumentación de los estudiantes dentro de nuestras prácticas pedagógicas. Se rediseñaron y ajustaron algunas tareas sobre generalización, las cuales se implementaron en cursos de matemáticas de grado noveno de dos instituciones educativas, una en Bogotá y otra en Soacha, Cundinamarca. Estas tareas permitieron evidenciar nuevas formas de desarrollar la actividad matemática en el aula y de fortalecer el desarrollo de habilidades argumentativas en los estudiantes.

Palabras clave: argumentación, razonamiento, generalización.

* Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: diegoiz@hotmail.com.
** Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: granados315@hotmail.com.
*** Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: nsoler@pedagogica.edu.co.

CONTEXTUALIZACIÓN

El tema de interés de esta experiencia de aula está asociado al trabajo de grado "Descripción de los procesos argumentativos en actividades de generalización que realizan estudiantes de grado noveno", que se desarrolla en el programa de Maestría en Docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y que hace parte de la línea de investigación denominada "Argumentación y Prueba".

Una de las preocupaciones de nuestro trabajo de grado surge al encontrar que algunos estudiantes presentan dificultades para sustentar o defender sus ideas, evidenciando así escasas habilidades argumentativas. La enseñanza tradicional de la matemática ha priorizado la repetición de ejercicios y algoritmos memorizados sin profundización conceptual, reduciendo el trabajo del alumno a copiar y reproducir el conocimiento propuesto por el profesor, y deja de lado procesos básicos y necesarios como la argumentación matemática. El dejar en un segundo plano el desarrollo de este proceso ha generado que los estudiantes evidencien dificultad para dar cuenta del cómo y por qué de los procesos, justificar estrategias y procedimientos, formular hipótesis, hacer conjeturas, predecir, encontrar patrones y expresarlos matemáticamente, aspectos que son considerados por el MEN (2006) como esenciales en la formación matemática escolar.

REFERENTES TEÓRICOS

Desde el MEN (2006), se propone el *razonamiento* como uno de los cinco procesos generales que se contemplan en los lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Este proceso se inicia en los primeros grados y debe permitir generar habilidades como "percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones" (p. 54). En grados superiores, este proceso de razonamiento se trabaja directamente con proposiciones y cadenas argumentativas e intentos de validar o invalidar conclusiones. La *argumentación* "implica saber dar y pedir razones, probar y refutar, y ojalá avanzar hacia la demostración formal" (p. 56).

De acuerdo con el MEN (2006) uno de los procesos que se tienen en cuenta para definir qué es ser matemáticamente competente es: "Usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración" (p. 51). Investigaciones como la de Mason, Burton & Stacey (1989) reportan que estos procesos están estrechamente relacionados con el álgebra y específicamente con la generalización. Estos autores ofrecen la siguiente definición de generalización: "Generalizar significa descubrir alguna ley general que nos indique: qué parece ser cierto (una conjetura); por qué parece que es cierto (una justificación); dónde parece que es cierto, esto es, un planteamiento más general del problema". Mason, Graham, Pimm & Gowar (1999) sugieren que se deben tener en cuenta las siguiente fases en el proceso de generalización: 1) la visión de la regularidad (ver), 2) su exposición verbal (decir, expresar) y 3) su expresión escrita (registrar).

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

La actividad se desarrolló en dos aulas de dos colegios oficiales en una clase de Álgebra con estudiantes de grado noveno. Inicialmente se entregó a cada estudiante una hoja con la respectiva tarea de generalización, pidiéndoles que trabajaran en grupos de tres estudiantes. Además, se indicó que luego de responder cada pregunta, esta debía ser socializada con los demás grupos. La tarea propuesta a los estudiantes denominada "Bordes" fue tomada de Mason et al. (1999), ajustada a condiciones particulares del trabajo de grado.

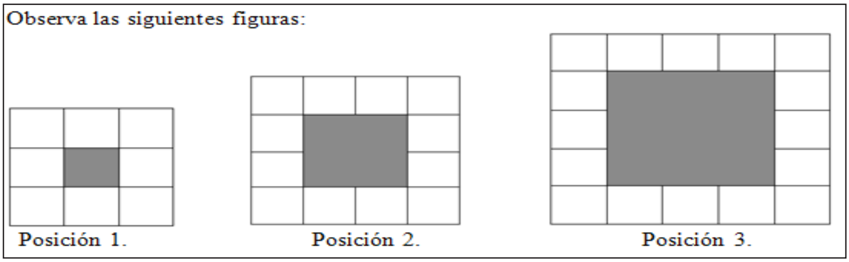


Figura 1. Tarea propuesta

A los grupos de estudiantes se les pidió que dibujaran la figura correspondiente a la posición número 4, y justificaran por qué la dibujaron de esa manera. Los estudiantes comenzaron a explorar las figuras de las posiciones dadas, observando regularidades. Luego empezaron a desplegar diferentes argumentos para tratar de explicar por qué dibujaron la figura de la posición pedida.

En un segundo momento se pidió a los estudiantes que buscaran diferentes formas para contar los cuadrados unitarios de los bordes que aparecen en la figura de la posición número 3 y que trataran de escribir en qué consistían cada una de esas maneras de contar. Esta pregunta fue clave para comenzar el proceso de generalización y de argumentación, pues empezaron a preguntarse de qué manera sería posible el conteo sin hacerlo solo de uno en uno.

Luego se preguntó si las diferentes formas de contar los cuadrados unitarios de los bordes de la figura número 3 funcionarían para figuras en las posiciones número 1, 2 y 4, y para figuras que se encuentren en posiciones lejanas. Los estudiantes relacionaron la figura 3 con las anteriores y encontraron en que algunas maneras de contar los cuadrados unitarios no funcionaban para casos anteriores y posteriores.

En el siguiente momento, se indagó por la figura que se encuentra en la posición 50, preguntando por el número de cuadrados unitarios de los bordes de esta figura. Allí los estudiantes empezaron a plantear conjeturas, algunas de ellas falsas, y se les dificultaba un poco argumentarlas. Ellos empezaron a manifestar verbalmente explicando las relaciones entre las formas de contar y las figuras de la posición pedida. Al final algunos grupos llegaron a la respuesta por diferentes caminos.

Por último se les indicó que calcularan y escribieran el número de cuadrados unitarios de la figura que se encuentra en cualquier posición. Por ejemplo, en la posición enésima. Los estudiantes después de manipular números, reglas y propiedades trataron de llegar a una representación simbólica, en este caso la generalización.

LOGROS Y DIFICULTADES EVIDENCIADAS

Pudimos evidenciar en esta actividad que la mayoría de los estudiantes dibujó la figura de la posición 4, pero en algunos de ellos se presentó dificultad para argumentarlo de manera escrita.

Los estudiantes inicialmente no comprendieron la pregunta que hacía referencia a las diferentes formas de contar los cuadrados unitarios de las figuras, y al sugerirles que una forma podría ser contar de uno en uno, ellos comprendieron que debían contar por agrupamiento como por ejemplo de dos en dos tres en tres, etc. Sin embargo, como logro se puede destacar que algunos estudiantes sugirieron otras formas para contar los cuadrados unitarios. Las formas encontradas para contar los cuadrados unitarios de uno en uno, de dos en dos etc., al momento de la socialización de la actividad fueron probadas para las primeras posiciones, pero se reconoció la dificultad para utilizarlas en posiciones lejanas, lo que llevó a descartarlas y reconocer otro tipo de agrupamiento que parecían ser más adecuados.

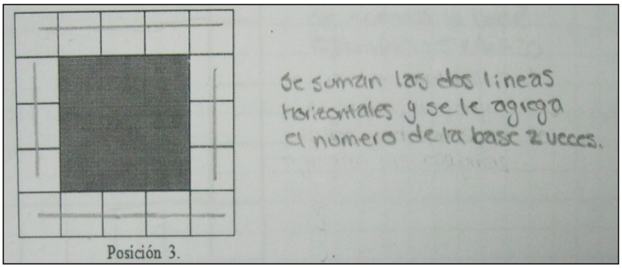


Figura 2. Trabajo grupo G1

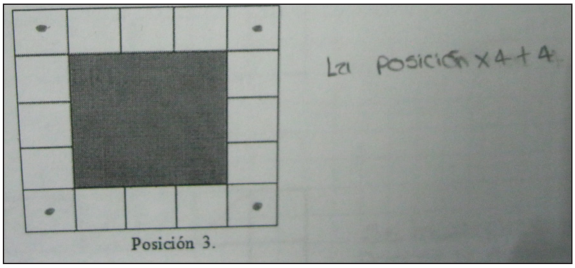


Figura 3. Trabajo grupo G1

Hasta este momento las preguntas llevaron a los estudiantes a encontrar los cuadrados unitarios de la posición número 50. Los argumentos para dar respuesta a esta pregunta fueron justificados por expresiones aritméticas y verbales.

Algunos estudiantes lograron escribir en forma algebraica una expresión que permitía encontrar el número de cuadrados unitarios de cualquier figura, otros describían la forma, pero no de manera algebraica, solo presentaban ejemplos.

Se observó en el trabajo de uno de los grupos, que llegaron a dos expresiones algebraicas que funcionaban para calcular el número de cuadrados unitarios de la posición enésima y utilizaron como argumento el hecho de que para calcular el número de cuadros de la posición 50 y otras posiciones les daba lo mismo.

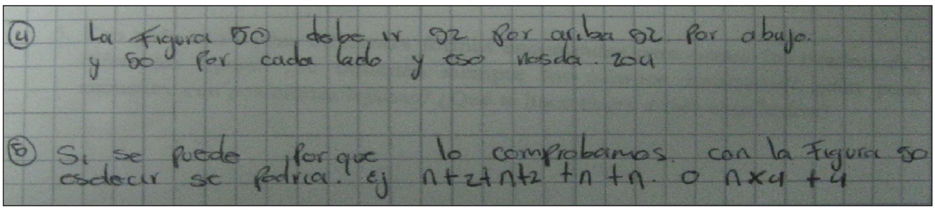


Figura 4. Trabajo grupo G2

REFLEXIONES FINALES

La tarea propuesta a nuestros estudiantes privilegia el trabajo en grupo, que es valorado y visto como una forma de producción de conocimiento. Al realizar una observación detenida a la forma como los estudiantes desarrollan la tarea, se pueden evidenciar los procesos de argumentación que ellos utilizan, los recursos que utilizan para defender sus ideas y las formas que crean para tratar de convencer a sus compañeros, aportando y potenciando así al desarrollo del pensamiento algebraico.

Este tipo de actividades de generalización permite desarrollar habilidades algebraicas y argumentativas en los estudiantes. En este caso específico, la actividad permitió dar significado a las expresiones algebraicas, porque están directamente relacionadas con las formas de contar los cuadrados unitarios de cualquier figura.

El papel del docente en este tipo de actividades termina siendo de moderador y director de la discusión, pues los estudiantes en ocasiones pierden el camino cuando utilizan diferentes tipos de argumentos para probar y defender sus hipótesis. Importante entonces es el hecho de que la clase deja de ser un "monólogo" por parte del docente y se convierte en un espacio de construcción participativa en donde el estudiante reconoce que puede aportar a la clase y, lo que es más importante, se siente parte de ella.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Santa Fe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Mason, J., Burton, L., Stacey, K. (1989). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Labor, Ministerio de Educación y Ciencia.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1999). *Raíces del álgebra/Rutas hacia el álgebra*. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Una propuesta alternativa para la enseñanza de la teoría de conjuntos

*Joel Fernando Morera Robles**
*Carlos Daniel Hurtado Sánchez***
*William Jiménez Gómez****

RESUMEN

Este documento describe la experiencia educativa, desarrollada en el Instituto Pedagógico Nacional en el año 2012-I en estudiantes de grado undécimo por dos profesores de matemáticas en formación de la Universidad Pedagógica Nacional, como propuesta didáctica para abordar la asignatura de Probabilidad desde la enseñanza de la teoría de conjuntos, en la que se buscaba edificar una secuencia de actividades como propuesta de innovación a partir del estudio de los dieciséis conectores lógicos (los conectores de Pierce de forma binaria como operadores lógicos) y sus relaciones con la teoría de conjuntos, en la Educación Media, con el fin de realizar un contraste entre la enseñanza de la teoría de conjuntos desde lo tradicional (conectores aristotélicos) a lo convencional (16 conectores lógicos).

Palabras clave: Pierce, innovación curricular, teoría de conjuntos, probabilidad y desarrollos múltiples.

* Estudiante Licenciatura en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: joemore05@gmail.com

** Estudiante Licenciatura en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: wariordh@hotmail.com

*** Docente Instituto Pedagógico Nacional. Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: williamajg@hotmail.com

CONTEXTUALIZACIÓN

La experiencia educativa tuvo lugar en el Institutito Pedagógico Nacional (IPN), que es un establecimiento educativo de carácter estatal, pero con un régimen especial, dependiente de la Universidad Pedagógica Nacional; dicha institución tiene por objetivo el generar un "mejoramiento continuo de la educación al servicio público, mediante la investigación y la innovación", siendo así, un centro experimental por excelencia de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) y de sus profesores en formación.

Con relación a lo anterior y a los continuos cambios sociales, culturales y económicos que presenta nuestro país y en particular a sus 85 años, el IPN presta atención a la diversidad de población que subyace de dichos cambios y que hace parte de la institución, en la cual, su currículo aporta a la "integridad de seres en todas sus dimensiones". En consecuencia, el modelo de aprendizaje del IPN está basado en los *múltiples desarrollos*, donde la inteligencia no es vista como algo unitario que se agrupa en capacidades específicas con un distinto nivel de generalidad, sino como un conjunto de inteligencias múltiples, distintas e independientes que se deben desarrollar de forma distinta dependiendo del individuo y su entorno.

Durante la experiencia formativa de la Licenciatura en Matemáticas, de la UPN, se presentó la oportunidad de desarrollar la práctica educativa en aula, en el curso 1101 con énfasis en Ciencias Sociales y 1104 con énfasis en Ciencias Naturales, para orientar la asignatura de Probabilidad en la que una de las temáticas a abordar fue la teoría de conjuntos; estos grupos están conformados por estudiantes entre los 15 y 16 años, de estratos dos, tres y cuatro, y se caracterizan porque:

Son estudiantes totalmente activos en discusiones y en interacción en el trabajo en equipo, evidencian una posición de reflexión frente al saber errado y están dispuestos a desplazarlo o reconstruirlo de ser necesario, porque afirman que a partir de eso pueden enriquecer sus conceptos, y por tanto, reconocer que su papel en el aprendizaje no puede ser neutral. Ellos están dispuestos a colaborar en la aclaración de dudas que generan sus compañeros, además muestran una actitud de respeto hacia el maestro y al grupo clase en general. Son seres participativos, constructivos, y reconocedores de la importancia de los contenidos propuestos en la enseñanza para la construcción de sus estructuras conceptuales.

La descripción anterior de los dos grupos, evidenciada por el profesor titular del curso, los profesores en formación y la psicóloga del nivel, motivó a los autores de la presente experiencia a generar una propuesta de enseñanza para la teoría de conjuntos que permitirá potenciar capacidades y actitudes que los estudiantes presentan frente a las matemáticas.

MARCO TEÓRICO-PRÁCTICO

Dentro de la experiencia educativa realizada en el IPN, nuestro trabajo estuvo enmarcado básicamente por un desarrollo teórico y práctico de algunos conceptos matemáticos y unos referentes conceptuales, en los que se resaltan los siguientes:

El talento en matemáticas[1]. Se tuvo en cuenta la propuesta realizada por Werdelin (1958, citado en Jiménez W. y Rojas S. 2010), en la que se propone una caracterización para determinar si un individuo presenta este tipo de talento; dichas características son:

1. *La habilidad de comprender la naturaleza de los problemas, símbolos, métodos y reglas en matemáticas.*
2. *La aptitud para aprender (las matemáticas), retenerlas en la memoria y reproducirlas.*
3. *La facilidad para combinarlas (las matemáticas) con otros problemas, símbolos, métodos y reglas.*
4. *La competencia para emplearlas en la resolución de tareas matemáticas.*

DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA EXPERIENCIA EDUCATIVA

Teniendo en cuenta que uno de los propósitos de la práctica educativa de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la UPN es desarrollar conocimiento profesional en el que se privilegie la creación de propuestas de enseñanza innovadoras, uno de los propósitos de la Práctica en Aula fue generar una propuesta para la enseñanza de la teoría de conjuntos, a desarrollar en el primer semestre de 2012, a partir de:

1. *Indagación teórico-matemática.* Se realizó un trabajo autónomo de los practicantes orientado por el profesor tutor, en donde se generaron nuevos

[1] Jiménez W. Rojas S. Características de talento matemático asociadas a la visualización en contextos algebraicos. P. 28. Bogotá (2010).

conceptos en la teoría de conjuntos; esta indagación se encuentra enmarcada en los dieciséis conectores de Pierce y una construcción realizada por parte de los practicantes, docente tutor y los estudiantes del IPN.

2. *Consultas teórico-didácticas.* Se realizó una consulta didáctica en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de la teoría de conjuntos en la educación formal, con el fin de tener en cuenta las particularidades que se presentaban en el momento de llevar estos conceptos al aula. Es importante señalar que en este proceso, se presentaron varias dificultades, porque los conceptos a trabajar no se abordan usualmente en el currículo escolar, no solo para los estudiantes sino para los docentes, que se vieron en la necesidad de adecuar estos conceptos a convenios trabajados con anterioridad en la clase.

3. *Desarrollo de la gestión de clase.* Se realizaron propuestas innovadoras de clase, respondiendo de esta manera a las consultas realizadas previamente del tema. Las actividades propuestas y la gestión de clase se encuentran debidamente sustentadas, en lo posible, sobre teorías didácticas, que se adecuaron y llevaron posteriormente a las gestiones de clase.

En general, en el desarrollo de las propuestas de clase, se trabajó de cerca el talento matemático de estudiantes y practicantes; durante este tiempo se desarrolló un grupo de propuestas de clase alternas para abordar los temas básicos de teoría de conjuntos en la Educación Media; entre los convenios institucionales se encuentran los dieciséis conectores de Pierce en su correspondiente base binaria, los cuales produjeron la necesidad de generar contenidos no tradicionales en la Educación Media, de los cuales se describirán a continuación:

Número del conector	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Denominación
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1: Verdad
4	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	
2	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0: Falso
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	

Tabla 1. Los 16 conectores lógicos en base binaria.

La propuesta de contenidos a desarrollar fue la siguiente:

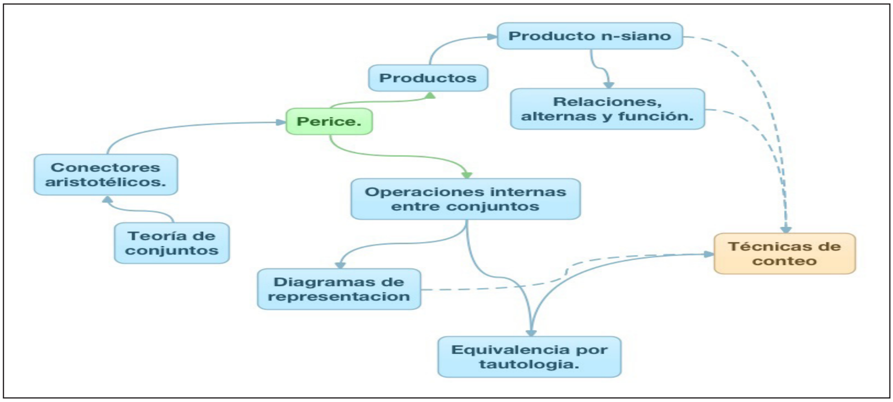


Figura 2. Red conceptual implementada en la institución.

LOGROS Y DIFICULTADES

Durante nuestra práctica en la institución, se resaltan algunos logros como el desarrollo de propuestas de clase alternativas, con actividades innovadoras adecuadas a representaciones gráficas y algebraicas tradicionales, que potencian el talento en matemáticas en el aula, haciendo uso de las inteligencias lógico-matemáticas y viso-espaciales de los estudiantes; también se logró abordar con estudiantes y profesores temas nuevos de la teoría de conjuntos que ampliaron nuestro estudio y entendimiento de conceptos, tanto personal como educativo.

En contraste con estos logros, durante nuestra experiencia educativa se resaltan algunas dificultades como problemas para abordar la enseñanza de estos nuevos conceptos y la actividad de adecuar el currículo, los marcos didácticos y las representaciones existentes a estos nuevos conceptos de la teoría de conjuntos; también se presentaron complicaciones para estructurar las propuestas de clase, teniendo clara la manera de abordar dicha enseñanza en la gestiones de clase, para responder al talento matemático y la resolución de problemas.

REFLEXIÓN FINAL

La culminación de esta experiencia educativa aportó una primera versión de material educativo para docentes que deseen abordar la teoría de conjuntos de una forma alternativa en la Educación Media; además, aportó a los profesores en formación una serie de herramientas tanto matemáticas, como didácticas y metodologías, para abordar de una forma diferente nuevos conceptos en esta rama de las matemáticas, siempre en vista de potenciar el talento en matemáticas y las inteligencias lógico-matemáticas y las viso-espaciales en los estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

García M., Oostra A. & Gómez J. (2001). Simetría y lógica. La notación de Pierce para los 16 conectivos binarios. Memorias del XII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

Jiménez W. & Rojas S. (2010). Características de talento matemático asociadas a la visualización en contextos algebraicos. Tesis de Maestría. Universidad Pedagógica Nacional, UPN, Colombia.

Zalamea F. (1993). Una jabalina lanzada hacia el futuro: anticipos y aportes de C. S. Peirce a la lógica matemática del siglo XX. Universidad Nacional de Colombia. Mathesis, Vol 9 391–404.

El diseño del laboratorio de física como herramienta para la resignificación de conceptos matemáticos

Carlos Eduardo León S.[*]
Jefer Camilo Sáchica[**]
Cesar Biosca[***]
Marlon Gama[****]
David Maldonado[*****]
Michael Ocampo[******]

RESUMEN

La presente ponencia resume el inicio de la construcción de un laboratorio de física y matemáticas en el programa de la Licenciatura en Matemáticas y Tecnologías de la Información, de la Universidad La Gran Colombia. Se presenta la experiencia en el diseño de la primera actividad y de los constructos teóricos y prácticos que se tuvieron en cuenta. Esta experiencia de aula está avalada dentro de la conformación de un semillero de investigación de la facultad, y muestra cómo a partir de un sistema masa-resorte se pueden construir algunos conceptos fundamentales como el período de funciones, el comportamiento de las mismas y destacar la importancia del modelado de datos para su respectivo análisis y obtener así una aproximación por medio de la matemática.

* Universidad La Gran Colombia. Semillero de investigación Mathema. Dirección electrónica: carlos.leon@ugc.edu.co

** Universidad La Gran Colombia. Semillero de investigación Mathema. Dirección electrónica: jefer.camilo@ugc.edu.co

*** Universidad La Gran Colombia. Semillero de investigación Mathema. Dirección electrónica: cealbi@gmail.com

**** Universidad La Gran Colombia. Semillero de investigación Mathema. Dirección electrónica: marlon.gama@hotmail.com

***** Universidad La Gran Colombia. Semillero de investigación Mathema. Dirección electrónica: davidc75814@hotmail.com

****** Universidad La Gran Colombia. Semillero de investigación Mathema. Dirección electrónica: michaelma012@hotmail.com

JUSTIFICACIÓN DE LA PROPUESTA

La física, a lo largo de la historia, ha abastecido a las matemáticas de situaciones y planteamientos en donde han nacido conceptos matemáticos, creciendo una relación constituyente entre las dos ciencias, pero según Arrieta (2003), el peso de los fenómenos físicos en clase es escaso, a pesar de que nociones y procedimientos matemáticos han surgido del proceso de comprender fenómenos físicos reales.

En la actualidad en nuestro ambiente escolar es común encontrar actividades desprovistas de significado para el estudiante. Esta falta de significación es reportada por Cordero y Martínez (2001) a raíz de privilegiar argumentos de corte analítico que toman los conceptos matemáticos como objetos elaborados, alejados totalmente de argumentos situacionales.

Por esta razón se pretende que en el tránsito entre diferentes disciplinas científicas se pueda estudiar la generación de un conocimiento matemático, dotado de un contexto significativo y de las actividades y herramientas que permiten su construcción (Buendía, 2004). Además, se ha adquirido una interpretación disyunta del conocimiento matemático con respecto al conocimiento en otras áreas; por ejemplo, la periodicidad es un concepto que está presente en la matemática y en la física escolar, y forma parte de una sola cultura científica del estudiante, pero en el discurso escolar suelen estar separadas, a tal punto que lo periódico viene a ser relativo dependiendo del referente (matemático y físico) que se tenga en cuenta.

Buendía (2004) propone un ejemplo de esta dificultad: en Cálculo una función es o no periódica según cumpla o no la definición, mientras que al estudiar lo periódico con osciladores, se habla de funciones casi periódicas, pareciendo que exista una confrontación entre la periodicidad definida a partir de una función y los comportamientos periódicos asociados a fenómenos, lo que impone una separación disciplinar que no favorece un conocimiento científico articulado, si solamente se estudia este concepto de forma individual y sin conexión entre las dos disciplinas.

Buendía agrega que esta situación obliga a considerar dos aspectos primordiales para el estudio de la matemática:

- Lo que sucede en la clase de matemáticas está ligado a lo que sucede en otras clases y con lo que sucede fuera de ellas (contexto sociocultural).
- La naturaleza misma del conocimiento matemático.

Es entonces el saber matemático impartido en el aula, un saber vivo, que evoluciona y que busca una relación directa con saberes de otras disciplinas, generando en el conocimiento matemático un carácter social que lo convierte en una herramienta de argumentación del individuo en un contexto socio-cultural determinado.

SEMILLERO DE INVESTIGACIÓN MATHEMA

Al discutir la problemática descrita anteriormente, dentro de los espacios académicos en el programa de Licenciatura en Matemáticas y Tecnologías de la información de la Universidad La Gran Colombia y al atender las políticas institucionales de investigación, se conforma el Semillero de Investigación *Mathema*, el cual cuenta con dos profesores y cuatro estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas, y tiene como misión contribuir con la formación disciplinar de los estudiantes interesados en la enseñanza experimental de las matemáticas mediante una contextualización y resignificación del conocimiento en escenarios físicos como el laboratorio para propiciar espacios de reflexión, debate de ideas y conceptos matemáticos, estimulando capacidades y aptitudes propias del trabajo en investigación.

Antiguamente la Licenciatura tenía la denominación en Matemáticas y Física, y contaba con laboratorios de cinemática para el trabajo de los estudiantes. Con el tiempo dichos espacios, se trasladaron al Colegio de la Universidad, y se perdió esta oportunidad de práctica para los futuros licenciados. Con este proyecto se pretende recobrar los laboratorios, no solamente en su estructura física sino desde su concepción, al entenderse el laboratorio como una herramienta de exploración de los diferentes aspectos de la relación entre física y matemáticas.

METODOLOGÍA DE TRABAJO

El semillero mathema inició sus encuentros el día 14 de marzo, en las instalaciones de la Universidad. Se llegó a acuerdos en cuanto a los horarios y productos que se esperan presentar por parte del grupo (se programaban encuentros cada ocho días de dos horas). En una primera fase, se discutió la importancia de un conocimiento físico que debe tener el docente de matemáticas y de la percepción que se puede tener de la física como un escenario de resignificación de las matemáticas (Lévy-Leblond, J.M, 1999).

En la segunda fase, se estudiaron los conceptos físicos y matemáticos que utilizaríamos para la realización del primer laboratorio, se realizó una consulta bibliográfica y se explicaron las bases del laboratorio que se quería realizar.

En una tercera fase se llevó a cabo la experimentación, construyendo los dispositivos que se utilizarían y las tareas de cada integrante del grupo. La idea inicial era analizar el movimiento armónico amortiguado que generaba un cuerpo suspendido en un resorte. Como el grupo aún no está reconocido por la Universidad, los recursos para el laboratorio han sido provistos por los mismos miembros del semillero de investigación. En esta fase se han hecho grabaciones y protocolos de cada sesión de experimentación para su posterior análisis, etapa que aún no se ha iniciado.

LOGROS Y DIFICULTADES

En cuanto a los logros, los estudiantes han visto una necesidad en su formación, en la adquisición de conocimientos en física y en el análisis de fenómenos. Además, se han utilizado herramientas tecnológicas que los estudiantes no habían considerado pertinentes para el análisis de fenómenos físicos. Los estudiantes han sido capaces de comprobar físicamente algunos resultados que solamente tenían un significado analítico desde las matemáticas, y se ha privilegiado mucho la interacción de ideas desde la discusión y el trabajo en equipo.

A pesar de estos avances, se han presentado dificultades como la falta de presupuesto lo que nos ha impedido conseguir equipos para una mejor medición de los fenómenos que se están estudiando. El presupuesto que se aspira a manejar en este semillero se dará proporcionalmente a la entrega de resultados alrededor del objetivo de la construcción del laboratorio de física y matemáticas.

LABORATORIO 1. ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO AMORTIGUADO COMO HERRAMIENTA PARA LA RESIGNIFICACIÓN DE ALGUNOS CONSTRUCTOS MATEMÁTICOS

Con el estudio y análisis de datos del movimiento de un sistema masa-resorte suspendido de forma vertical, se han encontrado una serie de elementos matemáticos interesantes para ser profundizados, ya que desde el punto de vista de las matemáticas la modelación de la naturaleza resulta interesante puesto que permite construir funciones y representaciones aproximadas de esta y otorgar una cierta simetría que esté de acuerdo con ciertas leyes que rijan un determinado fenómeno; es por esto que se ha decidido comenzar esta etapa de fundamentación puesto que en este caso el análisis del movimiento periódico permite:

- A partir de las leyes de Newton, representar este sistema mediante una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes cuya solución se sabe que se comporta como una combinación lineal de funciones periódicas, que se muestra en el periodo de oscilación del sistema. Con esto se pretende identificar el concepto de periodicidad y relacionarlo tanto en la física como en la matemática, además de proponer el análisis de este sistema como una herramienta para la construcción significativa de este concepto.
- Que con los datos obtenidos se manifieste una disminución en la amplitud del oscilador que teóricamente tiene un comportamiento de tipo exponencial; esto permite encontrar un escenario interesante para el modelamiento de datos en vía de reconocer en la naturaleza este tipo de funciones, además de resignificar el concepto de asíntotas de una función.
- Encontrar el valor de la constante de elasticidad del resorte a partir del modelado de datos y ajustarlos por mínimos cuadrados a una recta; aquí se puede plantear una estrategia didáctica para estudiar los diferentes elementos de la ecuación de la recta, comparar el comportamiento de los diferentes valores de la constante y qué significan físicamente estos valores de la constante.
- Que con los datos obtenidos obtener un promedio experimental del coeficiente de amortiguamiento del aire. Aquí es necesario emplear el concepto de función inversa, además de reconocer las implicaciones física que tendrían los diferentes valores del coeficiente de amortiguamiento y analizar así el movimiento del sistema masa-resorte inmersos en diferentes fluidos, con lo que se puede obtener un conjunto de funciones que caractericen una familia de funciones, solución de la ecuación diferencial más general.
- A partir de los datos obtenidos, los valores de las constantes del sistema y el modelado de la ecuación experimental, analizar el error entre la curva teórica para este sistema y los valores graficados; con esto determinar un escenario propicio para realizar mejoras experimentales que permitan disminuir la incertidumbre del experimento y los instrumentos de medida.

Con lo anterior, es posible determinar una aprehensión de los movimientos amortiguados, comparar las oscilaciones con respecto a otros medios y, por ende, reconocer cómo se representa esto en la variación de las oscilaciones dependiendo de las relaciones entre la frecuencia angular de oscilación y la frecuencia de amortiguamiento y, por tanto, construir las curvas de posición frente a tiempo que las caracterizan.

Por último, como un objetivo fundamental, esta práctica pretende encontrar una aproximación en serie de la función característica del sistema masa-resorte por medio de interpolaciones, empleando el software mathematica 7, esto con el fin de reconocer los métodos numéricos como una herramienta útil para la resolución de problemas de modelado de una manera óptima.

Palabras-clave: planteamiento de problemas, *relación de la educación matemática con otras áreas,* funciones trigonométricas, formación profesional

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arrieta J. L. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*, Tesis de Doctorado. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.

Buendía G, (2004), *Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones.* Tesis de Doctorado. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.

Cordero, F. y Martínez, J. (2001). La comprensión de la periodicidad en los contextos dis-creto y continuo. En G. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 14, pp. 422–431). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Lévy-Leblond, J.M. (1999). Física y matemáticas. En F. Guénard y G. Lelièvre (Eds.), *Pen-sar la matemática*. (Cuarta edición.) Barcelona, España: Tusquets Editores.

Concepciones de la probabilidad en dos contextos académicos

*Christian Camilo López Mora**
*William Jiménez Gómez***

RESUMEN

En el programa de licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, se realiza una práctica educativa denominada: "práctica en aula", en la cual los profesores en formación realizan propuestas para la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos. En este trabajo se presenta de manera general el desarrollo de una propuesta de enseñanza y aprendizaje de las concepciones de la Probabilidad en grado undécimo del Instituto Pedagógico Nacional en la ciudad de Bogotá. Esta propuesta generó incentivo para ahondar en el estudio de las concepciones de la probabilidad de estudiantes de secundaria con el fin de iniciar la validación de actividades para este tema como aporte a un currículo específico.

* Estudiante Licenciatura en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: Camilopez777@gmail.com

** Docente Instituto Pedagógico Nacional. Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: williamajg@gmail.com

CONTEXTUALIZACIÓN

En el 2011-II, el estudiante Camilo López cursa el espacio académico; "*Práctica en aula*" en el Instituto Pedagógico Nacional con el profesor tutor William Jiménez, práctica que se implementa en la materia de Probabilidad en dos cursos: énfasis en Ciencias Sociales (1101) y énfasis en Matemáticas (1102); en el primer curso (1101) se evidencia en el desarrollo de las clases realizadas una preferencia de los educandos a problemas en contextos vivenciales o cercanos a ellos, mientras que en el curso (1102) prima la participación de estudiantes que generan un ambiente para la justificación de conjeturas, la propuesta de diferentes estrategias de solución a un problema; el interés de los educandos se encuentra en la solución de problemas en diferentes contextos, pero con una preferencia en el uso del lenguaje simbólico matemático. Es de aclarar que en este Colegio, existen a partir de grado décimo, cuatro énfasis: énfasis en sociales, matemáticas, artes o biología, en los cuales los estudiantes optan de manera voluntaria y relativa a su desempeño académico formar parte de estos grupos.

Una actividad propuesta, al inicio del curso, para el contenido temático: "*concepciones de la probabilidad*" implementada en los dos cursos, permitió indagar y construir algunas hipótesis en la preferencia de las concepciones de asignación de la probabilidad: subjetiva, frecuentista y clásica, relativa al contexto, hipótesis que a la luz de un marco teórico competente permiten ser contrastadas, clarificadas con un motivo de permitir el inicio a un proceso de indagación en trabajos posteriores.

MARCO TEÓRICO-PRÁCTICO BÁSICO

Para el desarrollo de esta propuesta, se consolidó un marco teórico compuesto por un marco didáctico y un marco matemático, en donde se estableció la metodología de enseñanza como un proceso activo y dinámico, la importancia del aprendizaje y la evaluación como procesos igualmente inherentes para la educación Matemática con sentido, objetivo y formalidad en un ámbito escolar. Se proponen situaciones que involucren al educando para que reconozca la importancia de relacionar conocimientos nuevos con otros de anclaje para acoplarlos y generar un aprendizaje significativo, (Rodríguez, 2004).

En la propuesta de enseñanza, se proyectó la interacción activa por parte del alumno en donde plantee conjeturas, discuta sus ideas tanto con el profesor como con otros compañeros, para validarlas, refutarlas o reformularlas, sin olvidar la reflexión que se debe tener para evaluar y contrastar resultados obtenidos (verificación), con base en un ambiente de la resolución de problemas; lo anterior desde el punto de vista del marco didáctico. En el marco matemático para la propuesta de "*concepciones de la probabilidad*", se tuvieron en cuenta las siguientes definiciones, tomadas de (Fernández, en prensa), y (Chávez, 1995).

<table>
<tr><th colspan="2">Concepciones de la probabilidad</th></tr>
<tr><th>Clásica</th><th>Frecuencial</th></tr>
<tr><td>"La visión clásica de la probabilidad posibilita el cálculo de las probabilidades antes de que cualquier prueba sea realizada. Bajo esta concepción la probabilidad se define como el cociente entre los resultados favorables y todos los resultados posibles que se puedan determinar en un espacio muestral, en el que se asume la equiprobabilidad de los resultados. $P = \frac{\text{Resultados favorables}}{\text{Resultados posibles}}$

" (Fernández, En prensa, Cap.3)

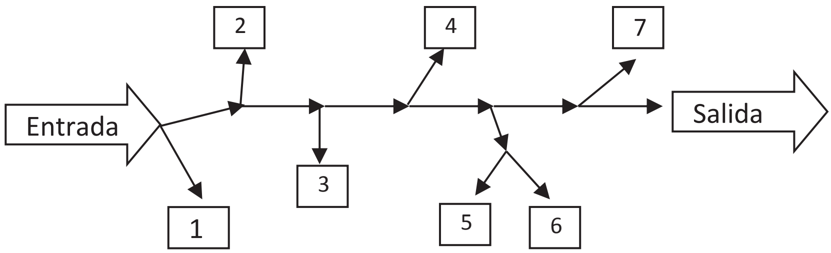
"Si A es un suceso que acontece si se verifica cualquiera de h sucesos A1,…,Ah y que no acontece si se verifica cualquiera de los sucesos Ah+1,…,An, entonces:
$p(A) = \frac{h}{n} =$ Número de casos favorables del suceso A / Número de casos probables" (Chávez, 1995, p.202)</td><td>"Utiliza la frecuencia relativa de un evento, en la repetición de una serie de pruebas, para determinar la probabilidad de un evento. Los seguidores de esta concepción utilizan una aproximación experimental a posteriori para estimar las probabilidades luego de que muchas pruebas hayan sido realizadas. Bajo esta mirada, se debe realizar un número suficiente de pruebas para observar todos los posibles resultados y para obtener suficientes datos para establecer patrones en los resultados, esperando que las frecuencias relativas reflejen las probabilidades teóricas, si es que se pueden asignar desde la concepción clásica" (Fernández, En prensa, Cap.3)

"Si A es un suceso de un cierto experimento aleatorio, al repetir el experimento n veces y hacer que $n \to \infty$, la frecuencia relativa f de A tiende a un límite". (Chávez, 1995, p.202)</td></tr>
<tr><th colspan="2">Subjetiva</th></tr>
<tr><td colspan="2">"Esta concepción de la asignación de probabilidades incluye la evaluación de probabilidades basada en creencias personales, que usualmente se sustentan en patrones implícitos de preferencias entre decisiones e intuiciones primarias, basadas en un conocimiento ingenuo o en experiencias previas. Para un subjetivista, las probabilidades proporcionan un grado de confianza en eventos inciertos. Aunque los subjetivistas también consideran la simetría desde una concepción clásica y la frecuencia desde una concepción frecuencial, ellos usualmente revisan sus probabilidades basados en un modelo de "experiencia del aprendizaje" (Fernández, En prensa, Cap.3)</td></tr>
</table>

DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA EXPERIENCIA EDUCATIVA

Para el desarrollo de la propuesta titulada: "*Concepciones de la probabilidad*", se propusieron varios problemas, sin embargo miremos el siguiente:

- Laura es una estudiante del Instituto Pedagógico Nacional que decide ir almorzar al centro comercial Unicentro. En total existen 7 restaurantes a los cuales ella puede ingresar y cada uno está ubicado como lo muestra el siguiente gráfico:



Laura se encuentra en la entrada; si ella decide avanzar ya no puede regresar (siguiendo siempre el orden de las flechas). Considerando que ella ha comido 2 veces en el restaurante 1, una vez en el restaurante 5, y tres veces en el restaurante 3, ¿a cuál restaurante entraría Laura? ¿Por qué? ¿Qué aspectos se podrían tener en cuenta para que Laura decida ir al restaurante número 3 y no al restaurante número 7?

RESULTADOS

En el curso (1101): Se planteó la hipótesis de que los estudiantes se posicionarían en una única concepción de la probabilidad (clásica, frecuentista o subjetiva), pero las respuestas observadas y propuestas en clase muestran la relación de dos o más concepciones para darle una mayor justificación a la respuesta propuesta. La mayoría de alumnos buscan en sus conocimientos de anclaje, herramientas que les sean útiles para proponer y construir estrategias de solución dentro de un marco matemático en otras ramas, por ejemplo: la búsqueda constante de una sucesión, (entablar relaciones entre las frecuencias o los números impares), son procesos mentales realizados por los educandos para construir, interpretar, comprender, organizar y aplicar tanto la información que existe en el medio que los rodea como aquellos conocimientos de ya construidos en su estructura cognitiva, (Cruz , 2006).

En el curso (1102): Se inicia la socialización con la respuesta de un grupo que puede ser clasificada en una concepción subjetiva, ya que se habla de la importancia del gusto de Laura para elegir un restaurante en donde almorzar; sin embargo, el curso no acepta dicha respuesta, ya que se evidencia la necesidad de referirse a un gusto por un restaurante pero basándose en las frecuencias o en los datos propuestos en el problema, se concluye que se habla del gusto de Laura dependiente de las frecuencias dadas, y por lo tanto se referencia una asignación de probabilidad en un inicio de la concepción subjetiva, pero el fortalecimiento y la relación con la concepción frecuentista. Un grupo da la siguiente respuesta que permite ubicarse fijamente en la concepción frecuentista para la solución del problema. **Respuesta del grupo**: "*Viéndolo desde la estadística se hablaría de la frecuencia relativa*"; se presenta luego la relación de una concepción frecuentista con una concepción clásica, para esto se observa la figura 1:

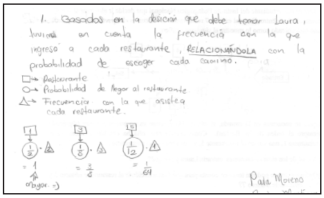


Figura 1

Por último los grupos empiezan a referenciar asignación de probabilidad desde una concepción clásica, en la figura 2:

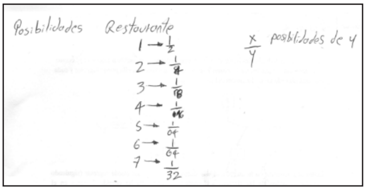


Figura 2

REFLEXIÓN FINAL

Después del desarrollo de la propuesta, se evidenció que en el curso (1101), se priorizaron las respuestas guiadas a la concepcion subjetiva y frecuentista de la probabilidad, mientras que en el curso de (1102), se priorizaron la respuestas guiadas a la concepción frecuentista y clásica de la probabilidad. Por esta razón, pensamos que el contexto académico en el que se encuentran los estudiantes puede ser un factor de importancia en las preferencias de las concepciones de la probabilidad.

Por medio de esta propuesta se reveló la importancia del trabajo de las concepciones de la probabilidad para el desarrollo competente de un curso de probabilidad con estudiantes de secundaria, partiendo de los distintos significados que poseen los estudiantes en torno a la noción de probabilidad en un problema de incertidumbre; en este mismo sentido, se reveló un incentivo al diseño de actividades encaminadas a identificar y caracterizar las concepciones de la probabilidad en un suceso aleatorio.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Chávez, H. (1995). "Cálculo", Capítulo 5: "Probabilidad". Santillana. Bogotá. Colombia.

Cruz, M. (2006). "La enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas". Tomo 1. La habana. Cuba. Documento recuperado el 25 de octubre del 2011 de http://www.matematicaparatodos.com/varios/resolucion_de_problemas.pdf

Fernández, F. (en prensa). "Curso de probabilidad". Capítulo 3. En prensa. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá. Colombia. Documento entregado por el profesor Felipe Fernández curso de probabilidad en septiembre del 2010. UPN. Bogotá. Colombia.

Instituto Pedagógico Nacional, (2011). "Plan de área de Matemáticas" .Instituto Pedagógico Nacional. Bogotá. Colombia. Documento de trabajo entregado por el profesor tutor William Jiménez en Agosto del 2011. IPN. Bogotá. Colombia

Rodríguez, M. (2004). "La teoría del aprendizaje significativo". Pamplona. España. Documento recuperado el día 12 de mayo del 2009 de http://cmc.ihmc.us/papers/cmc2004-290.pdf

Enfoque didáctico para la conceptualización de la parábola como lugar geométrico integrando Cabri Géomètre II Plus

*Claudia Andrea Moncayo**
*José Luis Pantoja Cabrera***
*Edinsson Fernández Mosquera****

RESUMEN

La enseñanza de la parábola suele restringirse al enfoque de la geometría analítica. El presente estudio consistió en una propuesta didáctica que acercó a los estudiantes a la comprensión del significado de parábola como lugar geométrico mediante el diseño e implementación de una estrategia didáctica basada en el uso e integración del ambiente de geometría dinámica Cabri Géomètre II Plus. En su diseño, puesta en práctica y sistematización, se consideraron las fases de una micro-ingeniería didáctica: análisis preliminares, planeación del estudio, diseño de actividades y análisis de resultados. El estudio retrató el clima intelectual percibido en clases y permitió constatar que el progreso en el desempeño matemático de los estudiantes se hace factible por la mediación del Cabri a partir de diseños planificados.

Palabras clave: micro-ingeniería didáctica, parábola, lugar geométrico, Cabri Géomètre II Plus.

* Área de Educación Matemática, Departamento de Matemáticas y Estadística. Universidad de Nariño, Pasto-Colombia. Dirección electrónica: wedna28@hotmail.com

** Área de Educación Matemática, Departamento de Matemáticas y Estadística. Universidad de Nariño, Pasto-Colombia. Dirección electrónica: leo_no_kiba@yahoo.com

*** Área de Educación Matemática, Departamento de Matemáticas y Estadística. Universidad de Nariño, Pasto-Colombia. Direcciones electrónicas: edi454@yahoo.com, edinfer@udenar.edu.co

CONTEXTUALIZACIÓN

Esta experiencia en el aula pretendió ser un aporte a la didáctica de la geometría escolar, proponiendo una estrategia didáctica (Brousseau, 1997) que, en primer lugar, tomó como objeto de enseñanza el concepto de parábola definido a partir de la propiedad foco-directriz; y, en segundo lugar, integró el ambiente de geometría dinámica Cabri Géomètre II Plus para el diseño.

REFERENTES TEÓRICO-PRÁCTICOS BÁSICOS

En este trabajo el marco teórico fue orientado por la metodología de *micro-ingeniería didáctica* (Artigue, 1995), que sirvió de base para el diseño de las situaciones didácticas (Brousseau, 2007), en la medida en que proporcionan un fundamento teórico basado en tres dimensiones de análisis, clásicas en la Didáctica de las Matemáticas de la Escuela Francesa.

Estas tres dimensiones fueron: la *histórico-epistemológica*, la *cognitiva* y *la didáctica*. La primera se asoció a las características de la evolución del saber matemático en juego; la segunda relacionó las características cognitivas de los sujetos que recibieron la enseñanza como por ejemplo: la caracterización de los errores, obstáculos y dificultades, y la última se refirió a las características del funcionamiento del sistema didáctico y el campo de las restricciones donde se situó la investigación.

Estas dimensiones se relacionan entre sí dentro de la estructura de la situaciones didácticas (ver figura 1), que se refieren al conjunto de interacciones entre los tres componentes del sistema didáctico: el saber (a enseñar), el profesor (que quiere enseñar ese saber) y el estudiante (que quiere aprender ese saber).

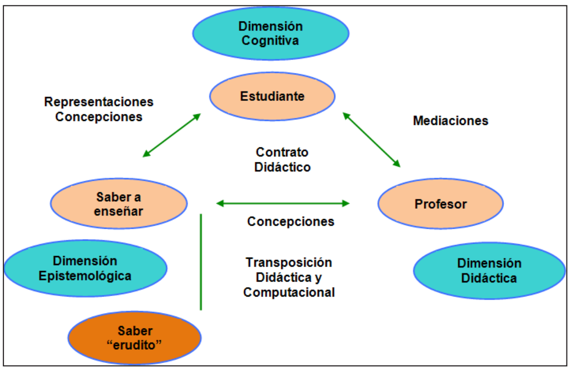


Figura 1: Tres aspectos relativos a los marcos teóricos: la estructura de la situación didáctica, las interacciones que se pueden dar entre un saber, el profesor y los estudiantes, la consideración de la transposición informática por la integración de TIC.

La estrategia didáctica que se propuso ha sido configurada y orquestada en torno de una secuencia de actividades cuyo objeto fue facilitar en estudiantes de noveno grado, la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico al interactuar con el ambiente Cabri II Plus. Tal interacción se evidenció a través de cuatro actividades específicas, como se enuncia a continuación:

- Construcción geométrica de la parábola a través de los conceptos de mediatriz y de distancia de un punto a la recta.
- Construcción de una parábola como una configuración geométrica, analizando después las partes que la componen.
- Construcción geométrica de la parábola con base en la propiedad de la circunferencia.
- Construcción de una parábola como lugar geométrico en Cabri Géomètre II Plus.

DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA EXPERIENCIA EN EL AULA

La experiencia en el aula, se dividió en tres etapas o fases:

En primer lugar, la fase de análisis preliminares. En ella se efectuó un acercamiento histórico y epistemológico al concepto de parábola como lugar geométrico, definido a partir de la propiedad foco–directriz. Luego se analizaron algunos elementos que atañen al proceso de aprendizaje del referido concepto de parábola. Finalmente se presentó un análisis didáctico que, en cierta medida, indicó el estado de la enseñanza actual del concepto de parábola y el panorama que se vislumbra a raíz del impacto de los ambientes de geometría dinámica. Asimismo, se explicó el enfoque de las situaciones didácticas propuestas en secuencia.

En segundo lugar, la fase de planeación y diseño de actividades. En esta parte se realizó la presentación de la propuesta experimental en sí, abordando aspectos tanto del componente investigativo como de lo relacionado con la instauración de las actividades en el aula. En el diseño de las situaciones didácticas se dio a conocer el enunciado de cada una de estas, los saberes implicados, las dificultades previstas y los diferentes momentos que fueron asignados para la organización y ejecución del trabajo de los estudiantes.

En último lugar, el análisis de resultados. Al término de la realización de esta investigación, se analizaron los resultados obtenidos a partir de la experimentación con estudiantes de las situaciones didácticas diseñadas.

Con esto se buscó contrastar las actuaciones adoptadas por los estudiantes durante la etapa experimental con respecto al diseño preestablecido. Esto se efectuó con el fin de lograr extraer las conclusiones más pertinentes que se derivaron del estudio y de sugerir algunas recomendaciones.

LOGROS, Y DIFICULTADES EVIDENCIADAS

Las situaciones propuestas lograron el elemento motivador esperado, constituyéndose así en un reto para los estudiantes y produciendo la movilización de diversos saberes alrededor de la temática estudiada. Así pues, fue posible propiciar las condiciones necesarias para el desarrollo de una dinámica en la que la interacción del estudiante con el ambiente Cabri *Géomètre* II Plus y la puesta en común de sus ideas favorecieron la eclosión del conocimiento esperado.

La metodología de trabajo, pese a que los estudiantes no estaban lo suficientemente familiarizados con situaciones de enseñanza donde la intervención directa del profesor sea tan exigua, ni mucho menos interactuar con un "*medio*" (Acosta, 2010) material que les proveyera un campo de experimentación tan amplio, los involucró convenientemente en los procesos de análisis, conjeturación, validación y elaboración de estrategias o heurísticas.

La integración del ambiente Cabri *Géomètre* II Plus al sistema didáctico, además de suponer una oportunidad novedosa para estudiar la parábola como lugar geométrico, produjo un alto grado de motivación entre los estudiantes, como ellos mismos lo manifestaran al término de la secuencia. Esto permitió generar un clima de participación activa en el que se facilitó la comunicación de las producciones individuales y colectivas de los estudiantes.

Afortunadamente, dado el reducido número de estudiantes con los que se trabajó esta micro-ingeniería didáctica, se puede afirmar que ninguna de las decisiones organizativas tomadas por los investigadores ocasionó mayores inconvenientes.

REFLEXIÓN FINAL

La recolección de información y análisis de resultados de cada una de las situaciones permitió caracterizar las estrategias de aprendizaje utilizadas por los estudiantes, pudiéndose concluir que:

- La *primera situación*: construcción geométrica de la parábola a través de los conceptos de mediatriz y de distancia de un punto a la recta, se situó en el nivel espacio-gráfico donde las heurísticas de tipo exploratorio dominaron las acciones de los estudiantes, satisfaciendo únicamente las restricciones visuales y deduciendo la propiedad foco-directriz empíricamente al verificar el dibujo de la parábola; esto favoreció los procesos de medición y razonamiento visual sobre las representaciones en la pantalla.

- La segunda situación: construcción de una parábola como una configuración geométrica analizando después las partes que la componen, se situó en el nivel empírico-teórico, favoreciendo las conexiones que se establecen entre los aspectos geométricos de la teoría y el espacio-gráfico de la noción de parábola.
- La tercera situación: construcción geométrica de la parábola con base en la propiedad de la circunferencia, se situó en un plano transitorio entre lo experimental y teórico. Su puesta en acto aunque permitió relacionar los procesos experimentales con los conceptos sobre equidistancia de los radios de una misma circunferencia, la relación de perpendicularidad entre radios y tangentes, no permitió la relación entre lo experimental y lo teórico de la relación geométrica que guardan los puntos de la mediatriz a un segmento.
- La cuarta situación: construcción de una parábola como lugar geométrico en Cabri, se situó en la concepción funcional, porque propició el reconocimiento del carácter dinámico y de dependencia lógica de los puntos del lugar geométrico respecto del foco y de los puntos sobre la directriz.
- Desde los análisis del contenido e interacción didáctica se concluyó que:
  - El estudiante fue avanzando paulatinamente en la comprensión de parábola como lugar geométrico, pasó de la simple visualización del nivel espacio-gráfico, a la utilización de la propiedad foco-directriz, y más tarde la constituyó como una herramienta conceptual para la validación de parábolas y la identificación de sus elementos más representativos.
  - Las actividades propuestas permitieron a los estudiantes identificar fenómenos visuales, donde se observó un punto moviéndose bajo las condiciones pedidas, al tiempo que pudo ir dibujando su trayectoria, identificándola como un conjunto de puntos sucesivos no colineales relacionados por la propiedad foco-directriz y cuya posición dependía de otro punto que se movía sobre una recta; esto permitió al estudiante llegar a la noción de parábola como lugar geométrico desde un perspectiva dinámica.

- La implementación de las cuatro situaciones indujo a que el estudiante interactuara con relaciones geométricas y otros conceptos, desde una perspectiva dinámica, y le permitió la transición del nivel de percepción visual al nivel teórico. Cabe destacar que durante la aplicación de la micro–ingeniería, en la etapa experimental, se presentaron dificultades para que los estudiantes verbalizaran por escrito las relaciones y propiedades visualizadas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta, M. (2010). Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica. En G. García (Presidente de ASOCOLME), Conferencia llevada a cabo en 11° *Encuentro Colombiano Matemática Educativa* (7 al 9 de Octubre de 2010). Asocolme y Colegio Champagnat. Bogotá, Colombia. Recuperado del sitio de Internet Funes, Repositorio Digital de Documentos en Educación Matemática: http://funes.uniandes.edu.co/1169/1/132_ENSEANDO_TRANSFORMACIONES_GEOMTRICAS_CON_SOFTWARE_DE_GEOMETRA_DINMICA_Asocolme2010.pdf

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.

Balacheff, N., & Kaput, J. (1996). Computer-Based Environments in Mathematics. En A. Bishop; K. Clements; C. Keitel; J. Kilpatrick & C. Laborde (eds.). *International handbook of mathematics education* (pp. 469-501). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* (1 era. ed.). (D. Fregona, Trad.). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Goldenberg, P. & Cuoco, A. (1998). What is dynamic geometry. En R. Lehrer y D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space.* (pp. 351–368). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Chazan (eds.). *Designing learning environments for developing understanding of geometry y space.* Mahwah: Erlbaum.

Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions: two sides of the use of the use of dynamic geometry environments. En *10th Asian Technology Conference in Mathematics.* (12-16 de Diciembre). Cheong-Ju: Korea National University of Education, Corea.

Propuesta ambiental e inclusiva de matemáticas

*Sandra Milena Mora Barón**

RESUMEN

A continuación se presenta una propuesta que se está llevando a cabo en el colegio OEA de la localidad de Kennedy en Bogotá, donde se promueve el desarrollo matemático en un aula inclusiva a través del planteamiento de una campaña ambiental; es decir, la situación principal es el "planteamiento de una campaña ambiental" para el colegio, pero durante el proceso se verán enfrentados a problemas que se resolverán a través de conceptos matemáticos propios del grado que cursan. Dicha experiencia se plantea según varios documentos legales, principalmente la distribución de temáticas y ámbitos de aprendizaje por ciclos dados por la SED y los estándares de calidad para el área de matemáticas, así como la malla curricular de la institución.

Palabras-clave: diversidad, necesidades especiales, proceso de resolución.

* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: Mora.sammy@gmail.com

CONTEXTUALIZACIÓN

La experiencia de aula que se presenta inició en marzo del 2012 y finalizó en junio del mismo año; dicha experiencia es el trabajo propuesto para el espacio de formación práctica intensiva de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas; dentro del espacio se diseña y se lleva a cabo una secuencia de actividades. La metodología, los recursos utilizados, el marco y las actividades que componen dicha secuencia fueron elaborados por la autora de este escrito, analizados por la docente a cargo del espacio en la Universidad y por docentes del colegio OEA para ser aprobados y llevados a cabo en el colegio en un grado sexto en el cual hay una estudiante de baja visión.

La propuesta se diseña con base en los estándares y la malla curricular del colegio, además de tener en cuenta el ámbito de aprendizaje para ese ciclo, dado por la SED (Secretaría de Educación del Distrito) que en el caso de sexto es el compromiso ambiental, enfocado en la actual dificultad que presentan los estudiantes hacia el área de matemáticas, tratando así de mostrar a los alumnos el área desde otros puntos de vista y utilidades.

REFERENTES TEÓRICO-PRÁCTICOS BÁSICOS

A continuación se presentan los aspectos básicos que se tuvieron en cuenta para la elaboración de la secuencia de actividades. En este marco se tienen en cuenta aspectos relacionados con las NEES (necesidades educativas especiales), inclusión, aspecto legal, conceptos matemáticos y metodología.

Necesidades educativas especiales (NEES). Según Espejo (2001) se entiende por estudiante con necesidad educativa especial a aquel a quien, con o sin discapacidad, se le dificulta adquirir un contenido curricular en la interacción en el contexto escolar, y por lo cual requiere un apoyo educativo diferente o adicional. Por otro, lado es importante ver las características de la población con limitación visual; una de ellas es la deficiencia visual mínima, o baja visión, definida por Rosich (1996) como la visión parcial que se expresa cuando una persona presenta dificultades para percibir imágenes con uno o ambos ojos, aunque la luz y la distancia sean las propias, siendo necesario el uso de lentes u otro objeto para normalizar la visualización.

NEES y matemáticas. Gross (2004) propone que algunas de las razones comunes de las dificultades matemáticas en niños de primaria y secundaria son: **Dificultades específicas de aprendizaje, debidas al** manejo del leguaje; **pensar en abstracto, pues l**os estudiantes memorizan pero se les dificulta comprender; **dificultades espaciales, esto es, que** pueden ser lentos a la hora de adquirir un concepto de número porque pierden la cuenta de los grupos de objetos que intentan contar; **problemas con el lenguaje matemático,** ya que la matemática exige mucho de la comprensión lingüística de los niños; **la necesidad de sobre-aprender, porque** la enseñanza puede presentarles un nuevo concepto, antes de que ellos hayan tenido ocasión de dominar la temática anterior; **motivación, ansiedad y dependencia, pues** las dificultades matemáticas también pueden surgir del modo de sentirse el niño con las matemáticas. Muchos autores han comentado que las matemáticas despiertan complejas emociones, quizá porque, más que cualquier otra materia, está abierta al fracaso absoluto.

Inclusión. Se tomará el ámbito pedagógico, ya que la mayor parte del proceso socio-educativo se vive en el aula; es por ello que se considera vital que en el aula existan profesores capaces de trabajar con la diversidad, reconociendo al estudiante con discapacidad como un sujeto en el aula con iguales derechos y deberes que cualquier otro, como se hace evidente en el Plan sectorial de educación 2008-2012 al mencionar que "*la calidad, componente esencial del derecho a la educación y prioridad del plan; la equidad, medio para evitar la segmentación social; la diversidad, fundamento del reconocimiento del otro; y la inclusión e integración educativa de poblaciones, particularmente aquellas en situación de vulnerabilidad*".

Aspecto legal. Los documentos de aspecto legal que se tuvieron en cuenta fueron: los estándares curriculares del MEN correspondientes a grado 6, de donde se resalta el estándar "*Utilizar números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida",* dado que es uno de los que globalizan el trabajo que se está desarrollando; por otro lado, de la malla curricular del colegio, se toman las temáticas del área correspondientes a la mitad del año escolar para ser aplicados; también se tienen en cuenta los documentos dados al colegio por la SED, de los cuales se extraen los ámbitos de aprendizaje correspondientes a ciclo 3, el cual corresponde al compromiso ambiental.

Conceptos matemáticos. Los principales conceptos a manejar, tomados de la malla curricular, corresponden al manejo de los números naturales, sus operaciones y propiedades, sistemas de numeración, números fraccionarios y planteamiento y resolución de problemas. Se entenderá por problema la definición manejada por el Grupo de Matemáticas Escolares de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas: "*una situación que debe ser modelada, en* *la cual está presente una pregunta –que se deriva de la misma situación– y el procedimiento y la solución no se obtienen de manera inmediata ni simple*".

Esto con el fin de que los estudiantes vean la aplicación y utilidad de las operaciones en diferentes situaciones y no solo se queden con el algoritmo y ya, pues como menciona Castro (1988); *"Las operaciones de suma y resta con los números naturales deben constituirse paulatinamente en un recurso disponible para resolver situaciones con distintos significados".* Aunque la autora hace énfasis en la suma y la resta con naturales únicamente, este planteamiento se adopta también para las operaciones de multiplicación y división, tanto en naturales como en fraccionarios.

Metodología. El trabajo que se está implementando esta soportado en la teoría de las situaciones didácticas (TSD) de Brousseau: se trabajará una situación fundamental y con base en ella *los estudiantes deben tomar decisiones que les permitan organizar su actividad de resolución del problema planteado"* (Gutiérrez & Velásquez, 2011).

DESCRIPCIÓN GENERAL

Luego de una semana de observación, se realiza un primer acercamiento a los estudiantes, donde, además de reconocer algunas características de su desarrollo social, se logró situar al curso en niveles en cuanto a la comprensión de ciertas temáticas del grado sexto. De acuerdo con lo anterior y el marco teórico presentado, se plantea la siguiente situación: "Se realiza un concurso donde los estudiantes deben presentar una campaña ambiental que se pueda desarrollar en la institución con el fin de mejorar su estética y embellecimiento". Esperan tu propuesta.

En un primer momento se les plantea a los estudiantes que para elaborar la campaña deben saber bien qué es una campaña ambiental, cuáles son sus beneficios, cuáles se pueden desarrollar en la institución y cuáles ya se están implementando en el colegio; con la excusa de averiguar dichos datos se les presenta a los estudiantes una serie de ejemplos para que se apropien del tema ambiental; después, se les presenta una serie de situaciones respecto a las lecturas las cuales deberán solucionar y para hacerlo deberán realizar operaciones básicas con números naturales; a continuación se les presenta una lectura más específica de cada una de las campañas ya trabajadas donde se revisan balances y efectos de las mismas en Egipto, Grecia y Roma, empezando así a trabajar los sistemas de numeración y las nociones estadísticas a partir de una explicación de la docente.

En un segundo momento se les plantea a los estudiantes la siguiente situación didáctica extraída y dependiente de la fundamental: "El plazo para presentar la propuesta se está agotando, además de ello se han dado a conocer las pautas para la presentación de la propuesta ambiental las cuales son: Debe ser viable para el colegio–Debe ser económica– Debe ser aplicable en el menor tiempo posible– Debe ser de interés social y cultural– Debe estar planteada bajo la reglamentación del colegio". Al igual que en el primer momento se les presenta una serie de situaciones respecto a algunas campañas ambientales las cuales deberá solucionar, pero en este caso para llegar a la solución de las situaciones deberán realizar operaciones de potenciación, radicación y logaritmación para determinar la viabilidad de algunas campañas, al tiempo que piensan en la viabilidad de la campaña propia; después de ello desarrollarán otras situaciones referentes a costos que acarrean ciertas campañas donde aplicarán operaciones con números fraccionarios.

Finalmente durante la semana ambiental, programada por el colegio, los estudiantes aplicarán la campaña que elaboraron durante el curso.

LOGROS Y DIFICULTADES EVIDENCIADAS

Logros. Durante el período de aplicación que se ha desarrollado hasta el momento se ha evidenciado que los estudiantes presentan mayor interés en el área.

Los estudiantes presentan interés y compromiso ambiental.

Al ver la relación de las operaciones matemáticas con situaciones reales se les facilita el desarrollo de las mismas.

Gran porcentaje de los estudiantes expresa haber empezado a tener un gusto por las matemáticas.

Dificultades. En un comienzo se desarrolla un trabajo en grupo que no permite ver las debilidades de algunos estudiantes.

Se ha realizado un trabajo acelerado debido a las pérdidas de clase por varias actividades del colegio.

REFLEXIÓN FINAL

Es gratificante ver el interés que presentan estudiantes hacia el área y especialmente hacia la parte ambiental. Con respecto al conocimiento matemático, si bien es fundamental y más aún cuando se articulan recursos para su aprendizaje, no constituye un todo en la labor docente, debido a que este se ve influenciado por diversos factores, reconociendo que la labor debe enfrentarse a diversos aspectos propios del aula y de los estudiantes, como lo son: la comunicación, el desinterés de los estudiantes, la falta de bases para el desarrollo del campo matemático, la asistencia de estudiantes de NEES, la sociabilidad de los estudiantes, entre otros.

En este orden de ideas, existe otro aspecto como lo es el trasfondo social tanto de las matemáticas, como de los estudiantes. En este sentido, creo, se debe cuestionar el aporte que se puede generar, a través de mi labor y el conocimiento matemático, a la sociedad y cómo esto puede ayudar a un desarrollo equitativo, justo e inclusivo dentro de la comunidad. Crear desde las aulas una sociedad justa, cooperativa y ambiental no es fácil, teniendo en cuenta que las matemáticas siempre se han visto aisladas de las otras temáticas, pero llevando a cabo está experiencia me doy cuenta de que no solamente sí es posible sino que es una ayuda para hacer que los estudiantes le encuentren el sentido a las matemáticas viéndolas desde su aplicación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas.* Revista Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 7, n2.

Castro, E; Rico, L & Castro M, E. (1988). *Números y operaciones.* Editorial Síntesis.

Grupo de Matemáticas Escolares de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. (1999). *La enseñanza de la aritmética escolar y la formación del profesor.* Bogotá DC. Editorial Gaia.

Gutiérrez, M. & Velásquez, L. (2011) "Secuencia de actividades para grado octavo basada en la solución de problemas que permite la comprensión de la los diversos conjuntos numéricos y el paso de aritmética-algebra". Universidad Distrital Francisco José de caldas, Bogotá DC.

MEN. Estándares Curriculares para Matemáticas. (2007)

Plan Sectorial de Educación del Distrito Capital 2008-2012.

Rosich N. & otros. (1996) "La matemática y la deficiencia sensorial". España: Editorial Síntesis.

SED (Secretaría de Educación del Distrito) (2011). Bogotá: "Ámbitos de aprendizaje por ciclos".

Diseño e implementación de una propuesta docente de trigonometría mediante el análisis didáctico

*María Fernanda Mora**
*Eliana Ximena Nieto***
*Diana Lucía Polanía****
*Marta Lilia Romero*****

RESUMEN

En este trabajo describimos el diseño de una propuesta de clase para el tema razones trigonométricas, y exponemos los principales resultados de su implementación. Para realizar este diseño e implementación hemos seguido un procedimiento denominado análisis didáctico. Este procedimiento nos ha permitido analizar distintos aspectos de la enseñanza y el aprendizaje de las razones trigonométricas y seleccionar los significados, representaciones, fenómenos y materiales y recursos mejor adaptados a nuestro contexto. Son estos cuatro aspectos los pilares que sustentan nuestra propuesta. A partir de la implementación llevada a cabo en una institución educativa de Bogotá, exponemos los puntos fuertes y débiles detectados.

Palabras clave: razón trigonométrica, análisis didáctico, organizadores del currículo, propuesta docente, implementación.

* Colegio Juana Escobar I. E. D. Dirección electrónica: mf.mora75@gmail.com;
** I. E. D. El Cerro de Chía. Dirección electrónica: ex.nieto@gmail.com
*** Editorial Norma. Dirección electrónica: dianapolania@gmail.com
**** I. E. D Pompilio Martínez. Dirección electrónica: marlira28@yahoo.es

CONTEXTUALIZACIÓN

Realizamos este trabajo bajo el marco de la concentración en Educación Matemática de la Maestría en Educación de la Universidad de los Andes. Se trata de un trabajo que se ha desarrollado a lo largo de dos años y que ha girado en torno al diseño, la implementación, la evaluación y el balance de una propuesta docente sobre razones trigonométricas. Fundamentamos el diseño y lo sometemos a un análisis crítico que nos permite evidenciar las fortalezas, oportunidades, debilidades y amenazas de esta propuesta. Llevamos a cabo la implementación en el grado 1003 de la Institución Educativa Departamental (IED) Pompilio Martínez, ubicada en el municipio de Cajicá. Puede encontrarse la descripción completa de este trabajo en Mora et al. (2012).

REFERENTES TEÓRICO-PRÁCTICOS BÁSICOS

La propuesta la diseñamos, implementamos y evaluamos siguiendo un procedimiento denominado análisis didáctico (Rico, 1997; Gómez, 2002). Este procedimiento consiste en analizar un tema matemático desde distintas perspectivas con el propósito de conocer aspectos de ese tema, importantes desde el punto de vista de su enseñanza y aprendizaje. En particular, el análisis didáctico es útil para planificar una secuencia didáctica de un tema matemático considerando las cuatro dimensiones del currículo: cultural o conceptual, cognitiva o de desarrollo, ética o formativa y social, que al contemplarlas en el nivel de planificación docente se traducen, respectivamente, en contenido, objetivos, metodología y evaluación. El análisis didáctico considera cada aspecto curricular de la planificación como un análisis particular: análisis de contenido (dimensión de contenidos), cognitivo (objetivos), de instrucción (metodología) y actuación (evaluación). A su vez, estos análisis se estructuran en torno a organizadores del currículo (Rico, 1997). Para el análisis de contenido, los organizadores utilizados son la estructura conceptual, la fenomenología y los sistemas de representación. Para el análisis cognitivo, son las expectativas, las limitaciones y las hipótesis que realizamos sobre lo que los estudiantes harán ante determinadas tareas. Para el análisis de instrucción son los materiales y recursos, las componentes de la tarea y la resolución de problemas, y para el análisis de actuación, son los instrumentos para valorar aspectos relacionados con la enseñanza y la evaluación.

El análisis didáctico, en otras palabras, es un proceso sistemático que se sigue para planificar un conjunto de clases en torno a un tema específico y con el que se propicia la aplicación de una propuesta fundamentada, susceptible de un balance fino debido a la multiplicidad de elementos de análisis bajo los cuales se elabora y del diseño de propuestas de mejora, ubicando el aspecto que lo requiera; por tanto, puede y, de hecho, debe ser cíclico. Los ejemplos de análisis didáctico en diferentes temas están en aumento debido a la inclusión de este proceso en programas de formación de profesores de matemáticas. En relación con números naturales, por ejemplo, se encuentra la descripción de un análisis de contenido en Rico L., Marín A., Lupiáñez J. & Gómez P., 2008.

DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA DOCENTE

Exponemos la propuesta docente dividiéndola en tres partes que nos permiten asociarla a su implementación: inicio, desarrollo y cierre.

El inicio tiene por objetivo identificar cómo se encuentran los alumnos respecto al manejo y conocimiento de los conceptos previos. Tras realizar el análisis de contenido –en particular, estudiando la estructura conceptual del tema razones trigonométricas– y adaptarlo al contexto en el que se realiza la implementación, identificamos como conceptos previos la clasificación de ángulos y triángulos, la desigualdad triangular y la simplificación de expresiones algebraicas. Elaboramos una prueba diagnóstica para identificar el estado de los alumnos sobre estos conceptos.

El desarrollo tiene por objetivo que los estudiantes alcancen las expectativas de aprendizaje planteadas. El análisis de contenido junto con el análisis cognitivo que realizamos nos permitió identificar las distintas expectativas de aprendizaje que pretendíamos. En particular, enunciamos los objetivos siguientes:

Objetivo 1. Identificar las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo y en la circunferencia unitaria, y utilizarlas para hallar medidas de lados y ángulos en las situaciones propuestas.

Objetivo 2. Reconocer la importancia de las razones trigonométricas para hallar la medida de ángulos y lados que no se pueden medir directamente y hacerlo en las situaciones planteadas.

Para diseñar las tareas docentes que llevarían a cabo los alumnos, tomamos en cuenta elementos evidenciados en el análisis de contenido y el análisis cognitivo, complementado con el análisis de instrucción. Estos elementos nos llevaron a diseñar cinco tareas: escalera, características, rueda de Chicago, canicas y altura del farol. En ellas recogimos los significados que consideramos más relevantes en el tema, poniendo el énfasis en el establecimiento de relaciones entre la razón trigonométrica, el triángulo rectángulo y la circunferencia; empleamos una variedad de representaciones e intercambios de información entre ellas; abordamos los fenómenos más significativos, colocando las tareas en contextos reales que permiten hacer una interpretación por fuera de la matemática; y diseñamos una serie de materiales y recursos con los que buscábamos contribuir a que los alumnos desarrollasen los objetivos pretendidos. Concretamente, en la primera fase de la tarea de la escalera el material debía poderse manipular y organizarse de formas distintas que llevaran a identificar propiedades geométricas (que la pendiente no depende del número de escalones), y a establecer relaciones entre profundidad, altura y longitud de la escalera. En el caso de canicas y rueda, con las que se quería desarrollar la competencia de deducir generalidades y formularlas con lenguaje simbólico, se necesitaba que el número de datos con el que contara fuese elevado lo que llevó a que optáramos por programas dinámicos como Cabri o GeoGebra. Algunos de los materiales y recursos utilizados pueden resumirse en las figuras 1 y 2.

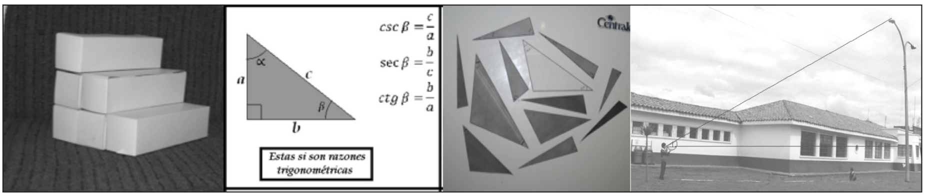


Figura 1. Prismas de base cuadrada (tarea escalera). Guía para identificar criterios para referirse a la razón trigonométrica en triángulos (tarea características). Triángulos en imán (tarea características). Farol medido con un teodolito (tarea altura del farol).

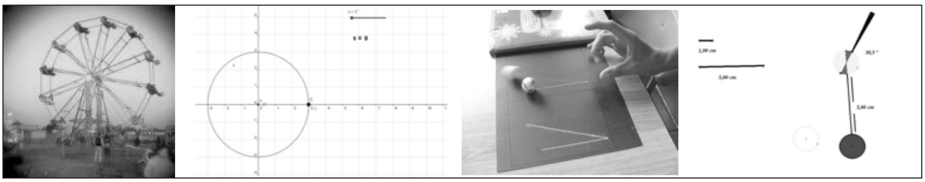


Figura 2. Imagen a partir de la cual se plantea la tarea de la rueda de Chicago. Construcción en GeoGebra para deducir propiedades de las razones trigonométricas (tarea, características). Experimentación con canicas para hallar la medida de un ángulo (tarea canicas). Construcción en Cabri para

generalizar la situación de la canica a cualquier radio y distancia (tarea, canicas).

El cierre tiene por objetivo institucionalizar lo trabajado y contar con una evidencia más del desempeño de cada uno de los alumnos, analizando qué capacidades están activando. Para ello, diseñamos un examen en el que cada pregunta se relaciona con las capacidades que se pretendieron desarrollar con la propuesta. Las preguntas del examen se encuentran contextualizadas en situaciones diferentes a las trabajadas en las sesiones de la fase de desarrollo.

LOGROS Y DIFICULTADES EVIDENCIADAS Y REFLEXIÓN FINAL

La valoración de todo el proceso la realizamos a partir de instrumentos que diseñamos tras realizar el análisis de actuación. Estos instrumentos nos permitieron registrar datos y analizarlos. A partir de este análisis encontramos distintas conclusiones, entre las cuales aquí destacaremos las que enumeramos a continuación, relacionadas con las representaciones empleadas y el uso de materiales y recursos:

- La utilización de los recursos Cabri y GeoGebra facilitó el alcance de las capacidades en las cuales estuvo involucrada, ya que permitió incluir la representación tabular y fomentar con esta la búsqueda y hallazgo de regularidades. También, permitió incluir la representación gráfica. En la tarea canicas, por ejemplo, permitió encontrar, entre otras relaciones, lo que pasaba con el ángulo cuando la distancia se agrandaba "el ángulo debe ser más pequeño".
- La presencia de materiales concretos permitió la medición directa y la validación de hipótesis a partir de los mismos. Utilizar el transportador implicó realizar estimaciones para evitar errores relacionados con valores muy grandes para un ángulo muy pequeño por mala utilización del instrumento de medida.
- La relación que en GeoGebra se hace entre grados y radianes permitió identificar relaciones que cuentan con una representación gráfica que sirve como un buen referente para las estimaciones.
- Contar con una representación concreta de la situación, como en el caso de la escalera, con los prismas, las canicas, con la experimentación real, y la altura del farol permitió que la asociación entre los elementos de la situación y los de la representación gráfica se realizara durante la mayor parte del proceso de solución, aunque con la presencia de errores sobre todo en la representación simbólica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. Revista EMA, 7 (3), pp. 251-293.

Mora, M.; Nieto, e.; Polanía, D.; Romero, M. & González, M. (2012). Razones trigonométricas vistas a través de múltiples lentes. En Gómez, Pedro (Ed.), Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1 (pp. 261-341). Bogotá: Universidad de los Andes.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona, España: Ice -Horsori.

Rico L., Marín A., Lupiáñez J. & Gómez P. (2008). Revista *SUMA,* 58, pp. 1-16.

Una conexión geométrica y métrica con estudiantes de grado quinto del I. E. D. Juan del Corral: El casino

*Geraldine Bustos Motavita**
*Deysi Ivonne Latorre Verano***
*Ximena Moreno Ojeda****
*Julieth Alexandra Pérez Luna *****

RESUMEN

Esta experiencia de aula da a conocer el desarrollo de un proyecto de aula en grado quinto como propuesta metodológica para el abordaje de la enseñanza de conceptos como: perímetro, semejanza y reconocimiento de las figuras bidimensionales inmersas en figuras tridimensionales, en el marco de la geometría y el pensamiento espacial, llamada "El Casino". Por ello, se presentará una descripción de las actividades diseñadas con base en la implementación de recursos didácticos y en la resolución de problemas de acuerdo con los criterios metodológicos planteados por el grupo DECA: iniciación e introducción, desarrollo y reestructuración, aplicación y profundización.

Palabras clave: recursos didácticos, materiales manipulativos, magnitudes, geometría.

* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: babylu1102@hotmail.com

** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: d.ivonne025@hotmail.com

*** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: ximenamorenoojeda@hotmail.com

**** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: julietaenlaluna@hotmail.com

CONTEXTUALIZACIÓN

La presente experiencia de aula estuvo enmarcada en el espacio de formación de Práctica Intermedia II (quinto semestre), del proyecto curricular Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, orientada al uso de recursos didácticos, como medio facilitador de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Dicha experiencia se dio en las instalaciones de la institución educativa distrital Juan del Corral, sede B, con estudiantes de grado quinto de la jornada tarde, con quienes se llevó a cabo un proyecto de aula llamado: "El Casino", en el cual se construyeron sólidos en cartulina, que representaban diferentes elementos que componen un casino; entre ellos: el dominó, las cartas, el tragamonedas, la ruleta, los cuales se utilizaron como recurso didáctico para la enseñanza de conceptos como: área, perímetro, dentro del pensamiento numérico, y semejanza y reconocimiento de las figuras bidimensionales inmersas en las tridimensionales, en relación con el pensamiento espacial.

Dicha propuesta de trabajo presenta una serie de actividades, diseñadas bajo los criterios del grupo DECA: iniciación e introducción, desarrollo y reestructuración, aplicación-profundización y de evaluación, que permite reconocer los avances de los estudiantes y las dificultades presentadas en cada etapa o fase; además de las funciones semióticas identificadas según los criterios de Godino y Batanero (1994), donde se involucran diferentes recursos didácticos, como herramienta para del proceso enseñanza-aprendizaje, por medio del cual los estudiantes son los constructores del propio conocimiento.

REFERENTES TEÓRICO-PRÁCTICOS. CONSTRUCCIÓN DE UN CASINO EN UN PROYECTO DE AULA

La construcción del proyecto de aula "Casino" permite enfocar la adquisición de conceptos en contextos reales y cercanos al diario vivir de los estudiantes. Es por esto que se hace imprescindible pensar en el pensamiento espacial, ya que desde temprana edad el niño está en contacto con este; según Godino, D. & Ruiz, F. (2003) "*Las primeras interacciones del niño pequeño con su entorno, previas al desarrollo del lenguaje, se basan casi totalmente en experiencias espaciales… (p.67).* Estos contactos en las primeras etapas de desarrollo tienen que darse tanto visuales como manipulativas, por lo cual es pertinente la interacción con diferentes figuras visuales desde lo bidimensional y manipulativas desde lo tridimensional, con el objetivo de lograr un óptimo aprendizaje de los componentes elementales de las mismas.

Para la comprensión geométrica, se tomaron como referencia los niveles Van Hiele. Según Godino, D. & Ruiz, F. (2003) en el nivel 0, el estudiante indica la semejanza entre dos figuras, pero esto solo puede hacerlo de forma visual, por lo cual se considera preciso dar paso al reconocimiento de la semejanza entre figuras por medio de objetos tangibles; en el nivel 1 el estudiante puede hacer diferentes procesos de medición, y por ello, se les pedirá construir y determinar semejanzas, perímetros, áreas, volúmenes, etc., entre figuras. Inicialmente los niños tienen un concepto intuitivo del significado de semejanza, como lo indica Godino, D. & Ruiz, F. (2003) "*Una primera definición de figuras semejantes que se puede dar a los alumnos es que son figuras que "tienen el mismo aspecto" pero tamaños diferentes" (p. 89)*, pero esta definición se va transformando cuando los niños perciben por medio de ejemplos visuales, que los triángulos pueden tener un mismo aspecto, pero que aun así no son semejantes, y por medio de la medición comprobar la semejanza entre las figuras para posteriormente dar una definición más precisa: "*Dos figuras son semejantes si todos los ángulos son congruentes y las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales*" *(Godino, D. & Ruiz, F., 2003:74).*

Ahora bien, la enseñanza de las magnitudes es muy importante, pues ayuda a que los niños perciban aspectos sobre la medida en los objetos; al respecto Olmo, M. (1993) menciona que las magnitudes y la medida deberían estar siempre presentes en la enseñanza por varias razones: una de ellas es que son un tópico en el que confluyen aspectos geométricos, aritméticos y de resolución de problemas y, además, permiten que los niños desarrollen destrezas y habilidades, y por ello se considera importante trabajar el área y volumen interno.

Por un lado, el área se puede identificar desde las figuras o superficies planas, a través de la percepción de cubrir objetos; a su vez, Olmo, M. (1993) afirma que "*los niños no perecen entender fórmulas como la herramienta para calcular áreas, sino que prefieren, en un principio, utilizar para ello otras estrategias, como puede ser el contar cuadrados" (p. 46).* De esta manera se potencia el entendimiento de la aplicación de fórmulas dado que la comprensión de la estructura de las fórmulas aplicadas es visible una vez construido el concepto de área.

En cambio, el volumen interno es una tarea más difícil para los niños, puesto que tienen que elaborar representaciones mentales del objeto a partir de las diferentes cosas que se perciben por medio de todos los sentidos, aunque los principales son la visualización y el permanente contacto con los objetos. Por lo anterior se trabajó el volumen desde la perspectiva de Piaget (1948), de "*empaquetamiento*" a partir de la manipulación de sólidos, con el fin de evitar errores en su comprensión.

DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA EXPERIENCIA DE AULA

La presente propuesta se encuentra constituida por siete actividades, en las que predomina el uso de recursos didácticos como: guías, cartulina, tijeras, regla, papel silueta, aserrín, entre otros que cumplen funciones tanto semióticas como ostensivas, actuativas, intensivas y extensivas (Godino & Batanero 1994).

En la primera actividad, los estudiantes reconocieron los sólidos necesarios para la construcción de un casino (prismas, sólidos pitagóricos, sólidos de revolución-cilindro), a partir de la elaboración de cada una de las figuras en cartulina y con base en unas instrucciones para la desarrollo de las mismas. La siguiente actividad sugería el reconocimiento de la existencia de figuras semejantes dentro del entorno y la comprensión del concepto de perímetro en diferentes figuras planas. A continuación, los estudiantes construyeron el piso del casino con triángulos, cuadrados y rectángulos, y seguido de esto llenaron las figuras del casino, construidas en la primera sesión, con aserrín con base en una unidad de medida (cubo pequeño), tomando apuntes simultáneamente de la cantidad de unidades necesarias para rellenar las figuras; ello se da con el objetivo de introducir el concepto de volumen como capacidad, y el de área, como recubrimiento. En la cuarta sesión, se cimentaron las nociones necesarias para la construcción de figuras tridimensionales a partir de una bidimensional y, a su vez, que a partir de una figura tridimensional, se lograra representar en un plano bidimensional. Para su realización, en el centro del salón se ubicó el piso del casino, y sobre este, las máquinas que lo componían; y los estudiantes plasmaban en una hoja su representación bidimensional del casino.

El objetivo en la quinta actividad fue el de retroalimentar los conceptos de área y perímetro introducidos en clases anteriores. Tal como la sesión anterior, en la actividad seis se reforzó el concepto de semejanza, entendiéndola como la conservación de la forma y la proporcionalidad de los lados; por ello, los estudiantes midieron la cara de la máquina tragamonedas (cubo) y crearon dos figuras semejantes a ella, las cuales guardaban proporción entre sí.

En la séptima sesión de clase, se reconoció la interiorización de los conceptos trabajados a los largo de las sesiones por medio de situaciones problema cercanas al contexto cultural de los estudiantes; para ello, se les formularon tres preguntas sobre área, perímetro y semejanza. Para estas se usaron figuras tridimensionales: cubos, prismas rectangulares y paralelepípedos, además de un plano en el cual estaba inmersa una figura a la cual hallaron el perímetro y el área.

LOGROS, Y DIFICULTADES EVIDENCIADAS

El aprendizaje de la geometría es esencial para los seres humanos, dado que responde a necesidades de la vida cotidiana como: la orientación en el espacio, las estimaciones de entornos, formas, distancias, entre otras. Por tanto, como resultado del proyecto de aula "El Casino", el cual estuvo diseñado bajo la implementación de recursos didácticos como fuente de motivación para el aprendizaje de las matemáticas, se determinó que el involucrar materiales manipulativos y tangibles en el aula de clase permite llevar a cabo un ambiente favorable en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; ello se debe a que los estudiantes manifiestan su gusto por aprender jugando. Allí, el uso del recurso obliga a la búsqueda de estrategias que permitan la construcción de un sólido y, por ende, el estudiante, a partir de dicha necesidad, construye por sí mismo conceptos que le son esenciales para lograr su objetivo e identifica los materiales mínimos para cumplir su cometido.

En la actividad del paso de lo tridimensional a lo bidimensional, los estudiantes evidenciaron la importancia de la conservación de la unidad de medida y el uso de la regla, el compás y el transportador para mantener una escala determinada en la elaboración de un plano. Además, los estudiantes comprendieron cómo se plasma una figura tridimensional en un contexto bidimensional, reconociendo implícitamente la inmersión de las figuras planas en los sólidos.

La actividad de semejanza permitió a los estudiantes reconocer qué se entiende como la conservación de la forma y la proporcionalidad de los lados, además de permitirles construir implícitamente los conceptos de divisores de un número para conseguir la razón de la proporción. Además, los recursos usados en esta sesión fueron los sólidos que conforman el casino, construidos con anterioridad, papeles de colores y regla, recursos bastante pertinentes, ya que permitían al estudiante encontrarse con una situación problema, actuar sobre la situación, manipular entre abstractos y concretos, dando paso a una interiorización adecuada del concepto a trabajar.

Respecto a la actividad de áreas y perímetros, se hizo uso de la cartulina como material manipulativo por medio del cual se disponía una unidad de medida (en este caso un cuadrado), con el cual se rellenaba un espacio, y finalmente se determinaba el área por la cantidad de cuadrados que completaban dicho espacio; a su vez, el perímetro se consideraba como la cantidad de lados de cuadrados que enmarcaban el espacio, tanto a horizontal como vertical.

En la actividad de volumen interno se logró determinar que los recursos utilizados (sólidos, y aserrín) fueron pertinentes, ya que los estudiantes identificaban que a medida que se llenaba el sólido con aserrín, se cubría un espacio.

REFLEXIÓN

La presente experiencia fue un paso muy importante en nuestra labor como docentes, ya que aprendimos la importancia del uso del recurso didáctico como ente mediador entre el aprendizaje y la enseñanza de los conceptos matemáticos tratados. Asimismo, destacamos que el trabajo más laborioso para el buen docente es el de encontrar un buen recurso que permita contextualizar los objetos abstractos que presenta esta ciencia, sin generar obstáculos que dificulten la comprensión de los mismos, llevando a los alumnos al entusiasmo por aprender con gusto y no por obligación. Por otra parte, comprendimos que para que el estudiante consiga un aprendizaje significativo de los conceptos, es fundamental relacionar el entono sociocultural de ellos, con el fin de formar no solo para la clase de matemáticas sino para la vida.

Ahora bien, estamos convencidos de que la educación necesita docentes, con una puesta en juego diferente, que motiven, estimulen y generen estrategias para el proceso de enseñanza-aprendizaje; docentes comprometidos con una educación de calidad, que estén en constante investigación sobre las "nuevas olas de la educación", un docente capaz de gestionar propuestas interesantes y eficaces sobre dicho proceso.

REFERENTES BIBLIOGRÁFICOS

Alsina, C. 2001. ¿Por qué geometría? Madrid: Síntesis.

Batanero, C. 2003. Sistemas numéricos y didáctica para maestros. Madrid: Universidad de Granada.

Godino, D. & Ruiz, F. 2003. Geometría y su didáctica para maestros. Madrid: Universidad de Granada.

Olmo, M. 1993. Superficie y volumen ¿algo más que el trabajo con fórmulas? Madrid: Síntesis.

Ministerio de Educación Nacional. 1998. Lineamientos curriculares. Bogotá. Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. 2007. Estándares básicos de competencias matemáticas. Bogotá.

La lectura como medio para la comprensión de conceptos de la teoría de números en el tercer ciclo

Edimer Santos Barón[*]

RESUMEN

Se presenta aquí una experiencia de aula que se viene desarrollando en el ciclo III, grados sexto y séptimo del Colegio El Tesoro de la Cumbre IED de la ciudad de Bogotá, con el objetivo de usar la literatura[1] para acercar a los estudiantes en la comprensión de las matemáticas, en relación con los conceptos básicos de la teoría de números; además de motivar a los estudiantes en la lectura, se pretende que ellos desarrollen habilidades y competencias matemáticas, apoyados desde el área de lenguaje en la lectura y comprensión de textos literarios.

Palabras clave: Motivación – Comprensión – Competencias – Teoría de números – Lectura

[*] Estudiante Maestría Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia – Sede Bogotá. Dirección electrónica: edisan86@yahoo.com

[1] Malditas matemáticas de Carlo Frabetti para grado sexto y El diablo de los números de Hans Magnus Enzensberger para el grado séptimo

INTRODUCCIÓN – CONTEXTUALIZACIÓN

La matemática como los demás campos de pensamiento (MEN, 2007) requieren de un lenguaje, para el caso particular un lenguaje científico o específico (D'Amore, 2006) por lo que se necesita de ciertas habilidades y competencias (MEN, 2008) para poder dominar o por lo menos lograr comprender ciertos aspectos de este lenguaje; la palabra resulta ser el primer acercamiento, luego la literatura. Como expresión escrita, la palabra se convierte en herramienta para lograr la comprensión esperada del lenguaje específico de las matemáticas y, en consecuencia, las competencias lectoras resultan muy importantes para entender parte de ese lenguaje; una parte se hace a través de la escuela y en el diario vivir, donde la literatura y el lenguaje se convierten en medio de comunicación para interpretar el mundo de la ciencia, en nuestro caso, las matemáticas, y mostrar una versión de nuestro entorno inmediato, manifestando una mirada casi personal de ese entorno.

El colegio El Tesoro de La Cumbre IED, de la localidad de Ciudad Bolívar en la ciudad de Bogotá usa la comunicación como eje principal del currículo, y la competencia lectora es una de las más importantes; además de ser herramienta motivacional para algunos de los estudiantes, es de gran importancia para cada uno de los campos de pensamiento (MEN, 2007) puesto que en cada campo se hace necesario plantear diversas lecturas para desarrollar actividades de comprensión, interpretación y argumentación. Por lo menos dos veces en el período, específicamente en el campo matemático, se plantearon para el presente año, en los grados sextos y séptimos, libros completos como apoyo a la asignatura y como complemento a las actividades propias del quehacer matemático; además de ser parte del currículo de matemáticas para dichos grados son base para evidenciar la comprensión de algunos elementos generales de la teoría de números como lo es la divisibilidad (incluyendo el MCD y el mcm) además de los conceptos de número primo y número compuesto.

REFERENTES TEÓRICO-PRÁCTICOS

La aritmética existe desde tiempos inmemorables al igual que la geometría. En la Antigüedad se usaban como herramienta para resolver problemas de su cotidianidad; fueron los pitagóricos los que empezaron a estudiar las relaciones entre números independientemente de sus aplicaciones; los números figurados son un claro ejemplo de este hecho: la expresión pitagórica para ello es "Todo es número o relación entre números" (Pitágoras, siglo V a. C.); se considera que desde allí se da inicio a lo que se conoce como *Teoría de n*úmeros o aritmética teórica ya que se tenía, en la época, una definición para número como multiplicidad de unidades (*Elementos*, Libro VII) y "la aritmética teórica surge a partir del concepto de número" (Aleksandrov, Kolmogorov & Laurentiev (1981, p.34). El libro de *Elementos* de Euclides (Libro VII) se ha considerado como fundamento para la teoría de números; allí están presentes las definiciones de número par, impar, unidad, número primo, entre otras, y el algoritmo para determinar el máximo común divisor de dos o más números o, en caso contrario, si dos números son primos entre sí, conocido con el nombre del Algoritmo de Euclides. Los números primos han sido inspiración para muchos trabajos en el campo de la aritmética; como evidencia se encuentran los trabajos de Diofanto y Fermat, donde se trabajó específicamente con números enteros y la resolución de ecuaciones con raíces enteras.

La aritmética se aborda desde el currículo de matemáticas (MEN, 2006) como pensamiento numérico y sistemas numéricos, donde es necesaria una relación entre lo que el estudiante hace en su entorno inmediato y la matemática en sí misma; por lo tanto, los números no deben ser abstractos sino que deben permitir identificar ciertas relaciones. Una consideración al respecto la plantean Aleksandrov et al. (1981):

Los números abstractos en si no tienen propiedades tangibles y en general se puede decir muy poco sobre ellos. [...] el objeto de la aritmética son las relaciones entre números, pero estas relaciones son las imágenes abstractas de las relaciones cuantitativas reales entre colecciones de objetos; así, podemos decir que la aritmética es la ciencia de las relaciones cuantitativas reales consideradas abstractamente, esto es, simplemente como relaciones. La aritmética, como vemos, no surge del pensamiento puro como pretenden los idealistas, sino que es reflejo de propiedades definidas de las cosas reales; surge de una larga experiencia práctica de muchas generaciones (p. 37).

De este modo se plantea como estándar el hecho de "Generalizar propiedades y relaciones de los números naturales (ser par, impar, múltiplo de, divisible por, conmutativa, etc.)" (MEN, 2003, p. 16), reflejando la intención de priorizar, en los primeros años de escolaridad, las relaciones que se pueden establecer entre los números, al mismo tiempo que se van familiarizando con los conjuntos numéricos. En la pruebas PISA[1] (OCDE[2], 2006) se plantea como *cantidad* un factor importante para la comprensión y desarrollo de las matemáticas, resaltando el uso de los números para representar cantidades y características cuantificables de los objetos del mundo real, convergiendo

1 Programa para la evaluación internacional de alumnos

2 Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico

con el MEN (2006) en la intención de orientar el pensamiento numérico a través de la resolución de problemas y el aprendizaje significativo.

Santos (2007) plantea que resulta esencial en la educación matemática que los estudiantes reflexionen abiertamente sobre los conceptos matemáticos, los problemas matemáticos y las diversas estrategias para su resolución durante el aprendizaje de las matemáticas. Esto requiere, entre otros aspectos, considerar la resolución de problemas como una forma de pensar, donde quien los resuelve (los problemas) continuamente desarrolla diversas habilidades y estrategias de uso de las matemáticas (Santos, 2007), donde se incluye implícitamente la comprensión lectora del problema para identificar sus posibles vías de acceso y de resolución.

Dentro de la resolución de problemas y el aprendizaje significativo crítico (Moreira, 2001) se plantean aspectos relevantes al actuar del profesor y del estudiante, con el objetivo de lograr un aprendizaje con sentido, es decir, donde el aprender un contenido con significado se convierte en "aprender su lenguaje, no solo palabras –también otros signos, instrumentos y procedimientos– aunque principalmente palabras, de forma sustantiva y no arbitraria" (Moreira, 2001). La lectura y la escritura juegan un papel fundamental en la construcción de los conceptos, y no solo en matemáticas sino en cualquier ciencia y, por lo tanto, la pregunta sobre lo que se lee y sobre lo que se escribe es muy importante para lograr desarrollar dichas habilidades y "cuando se aprende a formular preguntas –relevantes, apropiadas y sustantivas– se aprende a aprender y nadie nos impedirá aprender lo que queramos" (Moreira, 2001). Una motivación es la lectura, y la pregunta se convierte en herramienta de aprendizaje para la comprensión del texto y de los contenidos propios del campo de pensamiento matemático, pues es a través de la argumentación a una pregunta o sobre un tema que se puede hacer un acercamiento a lo que el estudiante sabe o cree saber.

Por otro lado "el aprendizaje significativo es progresivo, es decir, los significados van siendo captados e internalizados y en este proceso el lenguaje y la interacción personal son muy importantes" (Moreira, 2001). La resolución de problemas es una manera de realizar este acercamiento, y la lectura matemática, una herramienta para identificar aspectos generales.

Los libros tratan la fobia hacia las matemáticas, cada uno de ellos desde perspectivas diferentes: *Malditas matemáticas*, a través de un recorrido por el país de los números donde el personaje es Alicia y es guiada por Lewis Carroll (autor de *Alicia en el país de las maravillas*) a través del territorio matemático y busca que Alicia reconozca la importancia de las matemática; por otro lado se encuentra *El Diablo de los n*úmeros, donde un niño a quien no le agradan las matemáticas empieza a soñar cosas relacionadas con dicho campo; este personaje es guiado por un diablo, que le muestra mediante pequeñas historias la construcción de los números, propiedades y regularidades de los números, de tal manera que el diablo va complejizando los conceptos matemáticos haciendo que el niño se interese de tal forma en las matemáticas que empiece a encontrarse con conceptos cada vez más elaborados.

DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA EXPERIENCIA DE AULA

La experiencia de aula se aborda en el Colegio El Tesoro de La Cumbre IED, en la ciudad de Bogotá, en los cursos de sexto y séptimo de la jornada de la tarde, donde se busca que a través de la lectura de los libros *Malditas matemáticas* y *El Diablo de los Números* los estudiantes adquieran destrezas en la lectura (interpretación, argumentación), en la comprensión de conceptos de la teoría de números (número primo, divisibilidad, MCM, mcm), todo ello basado en la resolución de problemas y el aprendizaje significativo crítico (Moreira, 2001), buscando a través de preguntas orientadoras y actividades simultáneas en los campos de matemáticas y lenguaje que los estudiantes empiecen a cambiar su mirada sobre las matemáticas y empiecen a descubrir lo maravillosas que son. A la par de este aprendizaje, se logre avanzar en la comprensión y producción de textos literarios, pues es a través de la escritura como se exteriorizan los conceptos y nociones que cada uno tiene en su mente y en su pensamiento. En el colegio la lectura no es un hábito y se convierte en sí misma en un reto y, como consecuencia, la resolución de problemas se dificulta debido a la falta de comprensión lectora en los estudiantes.

LOGROS

Los estudiantes identifican aspectos de la teoría de números, por ejemplo, el significado de número primo, el mcm y el MCD identificando su uso como herramienta en la solución de problemas matemáticos y problemas asociados. Además, algunos de ellos producen textos basados en un tema. El acercamiento a las matemáticas a través de la lectura permitió, en un porcentaje no mayor al 15%, un cambio de actitud hacia la asignatura a medida que se avanzaba en la lectura, puesto que los estudiantes se preguntan sobre los conceptos que abordan los textos y sobre cómo se ilustran y se abordan en el libro.

DIFICULTADES

Algunos de los estudiantes aún no han reconocido la importancia de la lectura en matemáticas o en cualquier otro campo de pensamiento, debido a que un 70% de los estudiantes tienen grandes problemas de comprensión, interpretación y argumentación, además de la producción escrita, y ello se debe a la falta de continuidad en la escuela (se tienen estudiantes que vienen del proceso de regreso a la escuela[3]) y de la falta de actividades propias de lectura en la escuela. El tiempo y la necesidad de avanzar en el currículo limitan un poco el progreso en la lectura y su comprensión del texto, pues se debe avanzar en los contenidos sin dejar de lado la lectura del libro.

REFLEXIÓN FINAL

A través de la lectura se puede acercar a los estudiantes a que cambien o mejoren su perspectiva sobre las matemáticas, ya sea por medio de lecturas específicas sobre un tema matemático, sobre historia de las matemáticas o simplemente sobre anécdotas de las matemáticas, puesto que la lectura es una herramienta de aprendizaje en sí misma, ya que muestra al estudiante otra manera de ver el mundo y le ayuda a comprender aspectos de este que él cree no saber o conocer; sin embargo, es necesario tener un proceso y una continuidad del mismo, pues la base de la lecto-escritura viene desde los primeros años de escolaridad y de la familia; por eso se debe motivar y acercar al estudiante desde el inicio de su formación escolar a la lectura y a la comprensión, interpretación y argumentación de la misma, ya que generar hábitos de lectura en estudiantes de secundaria es dispendioso, requiere de tiempo y del acompañamiento de diversas áreas del conocimiento, y el tiempo que conlleva esta tarea no se ve reflejado en el currículo y, por lo tanto, lograr que los estudiantes tomen este camino es un gran reto para los profesores.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aleksandrov, A., Kolmogorov, A. y Laurentiev, M. (1981). *La Matemática: su contenido, métodos y significados*. Madrid: Alianza Editorial.

D'Amore, (2006). Matemática, didáctica de la matemática y lenguaje. En *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 251 – 292). Bogotá: Magisterio.

Enzensberger, H. M. (1997). *El diablo de los números.* Madrid: Ediciones Siruela.

[3] Programa de la Alcaldía de Bogotá que busca reintegrar a niños y jóvenes en edad escolar que hayan sido apartados por problemáticas sociales o que simplemente están en extraedad y no son aceptados en aula regular.

Frabetti, C. (2000). Malditas matemáticas, Alicia en el país de los números. Madrid: Alfaguara.

MEN (1998) Lineamientos Curriculares de matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, Ed. Magisterio.

MEN (2003). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional

MEN (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional

MEN (2007). Colegios Públicos de excelencia para Bogotá. Recuperado de http://www.sedbogota.edu.co/AplicativosSED/Centro_Documentacion/anexos/publicaciones_2004_2008/99198-Pensamientomate_bja.pdf

Moreira, M. A. (2005) Aprendizaje Significativo Crítico. España: Indivisa, pp. 83 – 102. Recuperado de http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/771/77100606.pdf

OCDE (2006). PISA, Marco de la Evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura.

Santos L. (2007). La Resolución de Problemas Matemáticos: Fundamentos Cognitivos. México: Trillas

Disposiciones e intenciones en un escenario de investigación para una clase de matemáticas: el caso de un "compartir nutritivo"

*Andrés Triana**
*Sindy Cortés***
*Gabriel Mancera****
*Francisco Camelo*****

RESUMEN

Se presenta la planeación, aplicación y análisis de un escenario de investigación, pensado para un grupo de estudiantes del grado sexto en el marco de un proyecto de investigación (García y Valero, 2011). Para ello, se da cuenta de un marco conceptual que posibilita proponer una actividad para identificar aspectos relevantes de las disposiciones–intenciones–acciones que manifiestan los estudiantes, justificado al aceptarlos como agentes sociales, y al aprendizaje dialógico (Alro y Skovsmose, 2004) como una herramienta preponderante en el aula.

Palabras clave: relaciones interpersonales, el papel del profesor y aspectos afectivos.

* Carlos Pizarro Leongómez IED. Dirección electrónica: agtrianap@gmail.com,
** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. IED. Dirección electrónica: udsindylorena@gmail.com
*** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: gmancerao@udistrital.edu.co
**** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: fjcamelob@udistrital.edu.co.

La puesta en escena de este "compartir nutritivo" se realiza como parte de las acciones que se han desarrollado en el proyecto de investigación *Estudio del papel de los escenarios y ambientes de aprendizaje de las matemáticas en los procesos de inclusión en las clases*, cofinanciado en Colombia por Colciencias en conjunto con las Universidades Pedagógica Nacional y Distrital Francisco José de Caldas y, en Dinamarca, por Aalborg University. Dicho proyecto nace como parte de las acciones que la línea de investigación Diversidad en Educación Matemática, del grupo Didáctica de la Matemática, viene realizando en busca de una propuesta que brinde oportunidades para que los estudiantes de Educación Básica y Media encuentren razones para involucrarse en las actividades matemáticas que los profesores les proponen. En particular, este proyecto apunta al siguiente interrogante: *¿Los ambientes en las clases producidos por los escenarios de aprendizaje de las matemáticas crean oportunidades para que los estudiantes encuentren razones para aprender?* (García y Valero, 2011).

Para dar cuenta de dicho propósito, el equipo de investigación ha implementado estrategias que involucra tanto trabajo teórico como práctico, lo que ha posibilitado poner en juego las apropiaciones conceptuales que los miembros del equipo han alcanzado en tres colegios, para los cuales se han diseñado, implementado y analizado diversas actividades. Este documento da cuenta de una propuesta desarrollada en uno de tales colegios, ubicado en la localidad de Bosa (Bogotá, Colombia), para niños de sexto grado (10 a 16 años).

REFERENTES TEÓRICO-PRÁCTICOS BÁSICOS

Tradicionalmente, en las clases de matemáticas se considera a los niños como sujetos cognitivos, esto es, los niños están dispuestos para aprender y es función del docente preparar actividades organizadas y planeadas con base en la consideración de factores principalmente de contenido matemático. Lo anterior deja de lado aspectos como por qué un estudiante se involucra en algún tipo de discusión en el aula, la forma en que se da dicha comunicación y lo que implica el aprendizaje de nuevos conceptos matemáticos.

En la búsqueda de alternativas que posibiliten involucrar los aspectos mencionados al final del párrafo anterior, debemos aceptar que los estudiantes son sujetos que sobrepasan el ámbito de lo individual. Parafraseando a Valero (2006, p.2), fue necesario aceptar que tanto el sujeto como el objeto mismo de conocimiento están en relación con otras personas y con el contexto donde se lleva a cabo la interacción, lo que implica para el caso de la educación matemática, que el aprendizaje de las mismas debe darse en un diálogo continuo y permanente entre los actores involucrados en un contexto específico.

En este sentido, al aceptar que tanto lo social como el diálogo eran factores determinantes para nuestra propuesta, estábamos también aceptando que para involucrar a los estudiantes en las actividades, debíamos tener claro sobre qué dialogar, cómo y cuándo hacerlo, por lo que un nuevo constructo teórico emergió como preponderante: debíamos prestar atención a *disposiciones-intenciones-acciones* (Skovsmose, 1999) de los estudiantes, pues en esta tríada podría estar un camino hacia la posibilidad de encontrar en los estudiantes sus razones para aprender.

Ahora bien, al ahondar en dicha tríada encontramos que el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las instituciones educativas puede interpretarse como una *acción*, la cual es deliberada, consciente e intencionada, donde la persona puede escoger y hay una claridad en el objetivo que se persigue. Dicha acción se relaciona de manera determinante con las *intenciones* y las *disposiciones* de la persona. Las intenciones pueden entenderse como guías para la acción que provienen de la habilidad de la persona para dirigirse hacia un objeto no presente, y es la acción, la que intentará satisfacer las intenciones de una persona. Al mismo tiempo, las intenciones se relacionan con las disposiciones de la persona, en tanto *antecedentes* y contextos históricos en que la persona se encuentra.

Por lo anterior, la tríada *disposiciones-intenciones-acciones* nos posibilitó un marco para entender tanto la enseñanza como el aprendizaje de las matemáticas desde la perspectiva de la educación matemática crítica y nos posibilitó interpretar que un proceso de educación crítico no se realiza si las personas involucradas en él no tienen la intención de actuar.

Bajo este panorama, se constituye en una tarea imprescindible: conocer tanto el contexto como a los estudiantes. En Camelo y Peñaloza (2009, p. 66) planteamos que "[…] partimos por aceptar que a menudo se lanzan juicios sobre un asunto sin conocerlo ni siquiera someramente", por lo que nos hemos dado a la tarea de organizar situaciones que posibiliten tal compresión; una de tales situaciones la ilustramos a continuación.

DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA EXPERIENCIA DE AULA

En busca de identificar disposiciones e intenciones de los estudiantes para abordar desde allí la negociación y construcción de una propuesta que contribuya a que ellos asuman posturas más críticas en la clase de matemáticas, se decidió plantear una actividad, donde los estudiantes debían documentar su historia de vida, resaltando aspectos del pasado, del presente y de sus perspectivas de futuro.

En la documentación realizada por los estudiantes encontramos estilos de presentación muy diversos: *collage* con fotos, ensayos sustentados con fotografías, presentaciones en Power Point, Word, Excel e incluso un vídeo con una composición musical de rap. Cabe señalar que algunos estudiantes buscaron documentar historias felices, tristes, anécdotas que han marcado sus vidas familiares y materiales, tales como sus sentires (y los de su familia y vecinos).

De esta experiencia se estableció que: i) en la presentación de las instrucciones de la actividad a desarrollar, los estudiantes buscan establecer un "listado" de acciones a modo de tareas que el profesor ha enunciado como ejemplos; ii) la mayoría de presentaciones buscó la utilización de medios electrónicos y uso de software (particularmente los recursos que ofrece el paquete de office); iii) a los estudiantes les agrada trabajar en colectivos, pero no tienen habilidades para distribuirse las responsabilidades ni organizar un plan de acción, iv) es evidente un apoyo familiar en la realización de las tareas, v) el número de estudiantes es un obstáculo que, sumado a la infraestructura del salón de clases, hace casi imposible que se consiga una comunicación fluida por el inmenso ruido que se desarrolla.

Teniendo en cuenta lo anterior, se propone –en un segundo momento– un proyecto donde se sugiriere a las matemáticas como estrategia para decidir respecto a la logística de un "compartir nutritivo", evento que da clausura a una actividad anterior que buscó vislumbrar, por una parte, la realidad familiar, social y geográfica en la que los estudiantes se encuentran inmersos y, por otra, el ambiente en que se desarrollan las actividades matemáticas en el colegio, particularmente en el aula de la clase. La actividad se centró en aceptar los postulados que han posibilitado juntar la modelación matemática con las expectativas de la educación matemática crítica (Araujo, 2009), por lo que para este proyecto se condensaron las siguientes fases: i) Contextualización del proyecto, ii) Trabajo por equipos, iii) Presentación y escogencia del menú y iv) Compartir. Cada una de estas fases comprendió:

- Contextualización: Uno de los profesores explica las intenciones de la actividad considerando los siguientes puntos: i) Hacer un reconocimiento al trabajo y el empeño realizado por los estudiantes, en la actividad anterior; ii) presentar el "compartir nutritivo" como un proyecto, dónde se entrega

$200.000 y se les pide que propongan un menú nutritivo, para unas "onces compartidas". Por "onces nutritivas" se entiende una porción que aporta alrededor de 300 Kcal y contiene los alimentos de tres tipos: formadores, reguladores y energéticos. Para ello los estudiantes se organizaron en cuatro grandes grupos y comenzaron a trabajar con la ayuda de un docente.

- Trabajo por equipos: Dada la poca experticia que tienen los niños en este tipo de proyectos, con antelación cada profesor asesor cuenta para el trabajo con su grupo con una pequeña base de datos con información de tipo de alimentos de la canasta familiar –precio e información nutricional–; este referente se pretende clasificar. El propósito general es entonces que los estudiantes diseñen un proyecto utilizando la modelación matemática como herramienta de investigación y análisis de datos y elaboren representaciones de sus resultados, en función de la escogencia de un menú argumentado desde sus decisiones grupales respecto a los conceptos matemáticos y nutricionales que emplearon.
- Presentación y escogencia del menú: se presentan las propuestas de menú de cada grupo y estrategias logísticas diferentes que se someten a votación grupal.
- Compartir: se pone en escena la estrategia concertada en la fase anterior.

LOGROS Y DIFICULTADES EVIDENCIADAS

Como primera medida, las dificultades de la experiencia que se relaciona pueden enmarcarse como obstáculos políticos, ya que relacionan variables de tipo físico, en tanto el aula usual de clase de matemáticas maneja altos niveles de ruido (hecho que dificultó el trabajo en grupos). En cuanto a la sistematización y clasificación de la información, la institución no cuenta con redes de Internet inalámbrico de acceso libre para soportar las búsquedas que se necesiten.

Por otro lado, ratificamos aspectos de las disposiciones de los niños, tales como: su baja experticia en el desarrollo de proyectos de investigación, su tendencia intencional de escoger bajo el criterio de la estimación y el gusto; identificamos los grupos de trabajo mejor consolidados junto con sus líderes –quiénes motivan acciones–, ratificamos su disposición de encaminar sus acciones de aprendizaje hacia el uso de medios electrónicos o virtuales, y reflexionamos en general sobre el trabajo del docente y sus moderadores en función del desarrollo del escenario mediante el uso del enfoque de la Educación Matemática Crítica (Skovsmose, 1999 y 2000).

REFLEXIÓN FINAL

Hemos podido establecer características específicas de la cultura de la clase de matemáticas del 602, imprescindibles para pensar, ahora, en estrategias de un diseño efectivo de enfoques temáticos que promuevan en los niños el pensamiento crítico, basado en argumentos de tipo matemático.

Teniendo en cuenta lo anterior debe partirse por entender que enseñar no consiste únicamente en trasladar conocimientos a la mente de los estudiantes (como sujetos cognitivos a quienes se les ofrece la posibilidad de aprender únicamente centrados en una reflexión sobre los contenidos a estudiar), sino principalmente en crear las condiciones favorables para que ellos puedan formar sus propios conocimientos (en tanto sujetos que se relacionan familiar, social y culturalmente como personas con gustos, disgustos, creencias, sentimientos, entre otras). Así se establece que para el diseño de enfoques temáticos deben conjugarsen las disposiciones e intenciones de aprendizaje de los niños del 602 y poner en consideración otras dimensiones en la comprensión de quiénes son como estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alro, H., & Skovsmose, O. (2004) *Dialogic learning in collaborative investigation*. Nordic Studies in Mathematics Education, 9(2), 39-59.

Araujo, J. (2009) Uma Abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. En: *Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*. 2 (2) p.55-68.

Camelo, F. y Peñaloza, G. (2009) El trabajo colaborativo como estrategia para la formación continuada de profesores. En G. García, P. Valero, F. Camelo, G. Mancera, J. Romero, G. Peñaloza y S. Samacá. Escenarios de aprendizaje de las matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

García, G. y Valero, P. (2011) *Estudio del papel de los escenarios y ambientes de aprendizaje de las matemáticas en los procesos de inclusión en las clases*. Proyecto de investigación en desarrollo cofinanciado por Colciencias. Documento no publicado.

Skovsmose, O. (1999) *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*: una empresa docente. Bogotá.

Skovsmose, O. (2000) Escenarios de investigación. *Revista EMA,* 6 (1) pp. 3 –26. Bogotá.

Valero, P. (2006) ¿De carne y hueso? La vida social y política de la competencia matemática. *Foro Educativo Nacional.*24, 25 y 26 de octubre. Bogotá.

La educación inclusiva, ¿Una realidad o simple utopía?

*Ingrid Catherine Velasco Bustos**
*Esperanza Montes Valencia***

RESUMEN

Este documento permite vislumbrar, atendiendo a las actuales normativas legales, la inclusión educativa en Colombia, teniendo en cuenta la aplicación de una secuencia de actividades; sin embargo, también reconoce la importancia los mecanismos que permiten que esto sea real, entre ellas tenemos para la población con discapacidad visual la adaptación de material. Todo esto en el marco del quehacer docente en el aula de matemáticas.

Palabras clave: política educativa, alumnos discapacitados, análisis y reflexión sobre la enseñanza, metodología de trabajo en el aula.

* Semillero de Investigación SIIDLyM. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: icvelascob@correo.udistrital.edu.co.

** Semillero de Investigación SIIDLyM. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.Dirección electrónica: Yesmonva@hotmail.com.

CONTEXTUALIZACION

Este trabajo corresponde a una experiencia llevada a cabo por estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica Énfasis en Matemáticas (LEBEM) de la Facultad de Ciencias y Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, quienes atendiendo a las nuevas políticas de inclusión educativa, realizaron un proyecto correspondiente a la aplicación de una secuencia didáctica en el área de matemáticas, trabajo que involucró a estudiantes en condición de discapacidad (población ciega), en aulas inclusivas en instituciones educativas distritales en la ciudad de Bogotá D. C. De esta manera, se ha decidido exponer a continuación los aspectos pedagógicos y didácticos que ha conllevado el trabajo con población en condición de discapacidad, atendiendo a factores como la apropiación conceptual por parte del docente entre los cuales se destacan: la adaptación de material, las áreas tiflológicas y la signografía braille.

REFERENTES TEÓRICO-PRÁCTICOS

Las implicaciones que contiene la experiencia de aula llevada a cabo están enmarcadas teóricamente a partir de ejes macro los cuales corresponden a formación investigativa de estudiantes para profesor (EPP) de la LEBEM, concepciones de la discapacidad, inclusión educativa y la resolución de problemas como metodología.

En este orden de ideas y teniendo en cuenta el origen de la LEBEM, el grupo de investigación Crisálida[1] consideró que los estudiantes deberían tener desde el inicio de su formación, encuentros con el mundo de la vida escolar, esto argumentado desde dos aspectos: en primer lugar, porque es necesario especificar los conocimientos pedagógicos y didácticos, en el pleno desarrollo de las disciplinas en las que se realiza el ejercicio docente; y en segundo lugar, porque ellos son conocimientos complejos, reconstructivos y prácticos, o en otras palabras, que se constituyen en el docente a través de la reflexión documentada sobre las propias prácticas.

Por tanto, el énfasis del proyecto consiste en formar profesores/investigadores, y parte del hecho de entender la investigación como una indagación disciplinada, en donde un individuo o grupo se ponen en la tarea de ubicar una situación problema o tema de investigación y enfrentarlo; de ahí que se exige una formulación clara sobre qué es aquello que se pretende realizar en la indagación, es decir, sus objetivos, que en concordancia con un marco

---

1 Grupo de investigación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, conformado por docentes del Proyecto Curricular de Licenciatura en Educación Básica Énfasis en Matemáticas.

conceptual es posible proponer unos procedimientos mediante los cuales sea plausible alcanzarlos (Rodriguez, 1999, pág. 74).

Asimismo, para entender el porqué de las necesidades educativas especiales se debe reconocer qué se entiende y qué características posee la población en condición de discapacidad visual. Esta discapacidad comprende desde la baja visión hasta la ceguera. Si se tiene en cuenta que la visión constituye una de las fuentes de mayor información para el ser humano, como lo afirman Aguirre & Otros (s.f), la existencia de estas diferencias tiene como consecuencia los desfases en el proceso de aprendizaje, originando necesidades específicas relacionadas con la forma en como se percibe la información para el conocimiento del medio físico y social; la identidad y la autonomía personal; la necesidad de conocer y asumir su situación visual, reconociendo potencialidades y limitaciones; finalmente, las necesidades correspondientes al acceso a la información escrita, solventada de alguna manera con el sistema de lecto-escritura Braille y la tiflotecnología.

Respecto a la inclusión, entendida como el proceso de participación en la sociedad en la que viven, implica "reducir los factores de vulnerabilidad derivados de las limitaciones" (Violo, 2011, pág. 195) haciendo alusión al modo en que se debe dar respuesta a la diversidad. Es por ello que se habla de un sistema educativo inclusivo, cuando este tiene como fundamento básico responder a ciertos parámetros que estipulan como: la no discriminación, la pertinencia, el máximo acoplamiento con la realidad, características de la población atendida, la equidad y la calidad.

Un aspecto fundamental en el desarrollo del álgebra es el álgebra–geométrica que comprende la sustitución de los números por segmentos de recta y las operaciones entre ellos, mediante construcciones geométricas, teniendo en cuenta la homogeneidad de los términos. Así: la suma de dos números se obtiene prolongando sobre el primero un segmento igual al segundo; la diferencia de dos números se obtiene recortando del primero un segmento igual al segundo; el producto de dos números es el área del rectángulo; la suma y la diferencia de productos se remplazan por la adición y sustracción de rectángulos. Es por ello que el lenguaje algebraico contiene sus propias reglas de manipulación, que deben ser aprendidas y manejadas con el propósito de convertirlo en un medio potente e ideal para comunicar ideas complejas y abstractas, y expresar generalizaciones (Mason J. Graham A. Pimm D. & Goward N, 1999).

Para el diseño metodológico se tuvieron en cuenta dos aspectos: uno de ellos fue el enfoque de Mejía y Barrios (2008) quienes proponen diferentes enfoques para la enseñanza del álgebra en la escuela, entre los que se encuentra la enseñanza desde un estudio de procedimientos; esta hace alusión a la resolución de problemas; adicionalmente, la LEBEM ha utilizado la metodología de resolución de problemas para la construcción y reconceptualización de saberes en los EPP. Por tal razón, la propuesta se llevó a cabo en un aula inclusiva, y fue trabajada a partir de esta metodología, ya que como lo menciona Miró (2006):

Esta nos permite desarrollar el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental a la par. El conocimiento conceptual es flexible y no está ligado con un tipo específico de problemas y por consiguiente se puede generalizar. Y por su parte, El conocimiento procedimental es la habilidad de una persona para ejecutar una secuencia de acciones que resuelvan un problema. El conocimiento procedimental está ligado a un tipo específico de problemas y por consiguiente no se puede generalizar (pág. 3).

De tal manera que las actividades que se planearon generan el desarrollo gradual de ambos tipos de conocimiento y de las interacciones que ocurren entre ambos durante la resolución.

Lo que se pretende con esta propuesta es cambiar el modelo tradicional de enseñanza, que según Miró (2006) consiste en la transmisión de un conocimiento acabado y abstracto que tiende a adoptar un estilo expositivo, por un nuevo modelo, en donde el conocimiento matemático no es algo acabado sino algo en plena construcción, y el estudiante será partícipe y constructor de su propio aprendizaje.

DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA EXPERIENCIA DE AULA

Teniendo en cuenta las nuevas políticas educativas en Colombia, la Universidad Distrital insiste en la importancia de una educación de calidad para los individuos; es por ello que se diseñó y aplicó una propuesta para la enseñanza del trinomio cuadrado perfecto a partir del álgebra-geométrica, implementada en un aula inclusiva en grado noveno en una institución educativa distrital en la ciudad de Bogotá D. C.

Para ello, se realizó el diseño de una secuencia didáctica a partir del modelo DECA[2], la cual contó con cuatro bloques de actividades: iniciación

[2] Es un modelo para el diseño de actividades enmarcadas dentro del desarrollo constructivista del conocimiento; consiste en el desarrollo de estrategias globales del pensamiento, en donde el alumno sea el propio artífice de su aprendizaje, de esta manera el saber será usado en el momento presente y en las etapas siguientes de su vida. (Castillejo, Fernández, De la Fuente, Hernando, Pérez, Pineda, Rojo & Santamaria, 2011)

e introducción, formulación y comunicación, aplicación y profundización, y finalmente la actividad de evaluación, realizada en cuatro sesiones de una hora con 30 minutos por cada actividad. Y se mencionan a continuación:

Fase	*Tipo de actividad*	*Recursos*	*Roles*
Introducción	Actividad 1 Crear en el estudiante un primer acercamiento de forma general a los casos de factorización.	Guía: Instrumento semiótico: recolección de procedimientos y respuestas Pentominó: conservación y congruencias entre áreas.	Docente: Planteará diferentes aspectos pertinentes para guiar la actividad. Estudiante: Buscará estrategias que permitan dar solución.
Rreestructuración	Actividad 2 Propiciar en los estudiantes la asimilación de la temática de la traducción del lenguaje algebraico al geométrico.	Guía: Instrumento semiótico para recolección de procedimientos y respuestas. Pentominó: determinación de segmentos a partir de áreas y perímetros.	Docente: Vislumbra las estrategias utilizadas y responde a las inquietudes de los estudiantes. Estudiante: Expondrá sus inquietudes y buscará estrategias para dar solución.
Profundización	Actividad 3 Introducir al estudiante en la noción del trinomio cuadrado perfecto.	Material manipulativo tangible que constará de 5 figuras (dos cuadrados, dos rectángulos y patrón del cuadrado) que permitirá determinar el trinomio cuadrado perfecto.	Docente: Se encargará de dar explicaciones pertinentes y presidirá la socialización de las estrategias y logros obtenidos. Estudiante: Buscará estrategias y expondrá los logros obtenidos.
Institucionalización	Evaluación Se evaluará el desarrollo del trinomio cuadrado perfecto.	Guía: Instrumento semiótico: las situaciones propuestas en la hoja para recolección de procedimientos y respuestas obtenidas por los estudiantes	Docente: Observará y evaluará el proceso llevado a cabo. Estudiante: Aplicará los conocimientos previos y los adquiridos durante el proceso.

LOGROS Y DIFICULTADES EVIDENCIADAS

- Los estudiantes en condición de discapacidad visual presentan bajos niveles de apropiación conceptual, respecto a los estudiantes videntes que cursan el mismo grado académico.
- El proceso de resignificación de un concepto, para un estudiante en condición de discapacidad visual requiere de una serie de aspectos tales como: adaptación de material y el tiempo estimado para la explicación.
- La adaptación de material viabiliza el mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje, puesto que permite un acercamiento y una representación del objeto matemático a trabajar.
- La inclusión escolar debe ser integral; en este sentido la parte socio-afectiva prima ante cualquier conocimiento de índole académica.

REFLEXIÓN FINAL

Por medio de esta propuesta enfocada en el desarrollo de una secuencia de actividades, fue posible reconocer que la labor inclusiva dentro de un aula de matemáticas fue posible gracias a la adaptación de material. De ahí que reconocer que los mecanismos de apropiación conceptual fueron eficaces para el aula en general lleva a pensar que es posible que los estudiantes con limitación visual interioricen los conceptos algebraicos utilizados mediante material que facilite su aprendizaje. Sin embargo, vale la pena resaltar que este es un trabajo de todos: en primer lugar, de los entes gubernamentales quienes gestionan las garantías para la permanencia de los estudiantes en las aulas regulares y de los docentes quienes día a día deben concebir como una realidad la inclusión educativa.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aguirre & otros. (s.f). *Manual de atención al alumnado con necesidades específicas de apoyoeducativo derivadas de discapacidad visual y sordo ceguera.* España: Junta de Andalucía Consejería de Educación.

Castillejo, Fernández, De la Fuente, Hernando, Pérez, Pineda, Rojo & Santamaria. (2011). *Grupo Deca. Orientaciones para el diseño y elaboración de actividades de aprendizaje y de evaluación.* buenastareas: Recuperado de: http://www.buenastareas.com/ensayos/Grupo-Deca/1566988.html.

Crisalida, G. (s.f). *proyecto de innovación.* Bogotá: Recuperado de: programasocrates.uniandes.edu.co/pdfs/proyect_creesiendo.doc.

Mason J. Graham A. Pimm D. & Goward N. (1999). *Rutas hacia al álgebra* . Bogotá: Universidad Pedagógica y tecnológica de Colombia.

Mejía, G. & Barrios, N. (2008). *El álgebra-geométrica como recurso didáctico para iniciar a los estudiantes de octavo en el álgebra escolar.Tesis de grado.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Miró, M. (2006). *una metodologia activa para la resolucion de problemas.* Badajoz: ASEPUMA.

Rodriguez, J. (1999). *Hacia una eduación de calidad.* Bogotá: En: Temas de Acreditación. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Violo, Í. (2011). *Disc-cionario, diccionario de las Discapacidades, Habilidades y Diversidad Humana.* Recuperado de: https://sites.google.com/site/discapacidadvenezuela/.

13° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa

Actividades Especiales

Mesa Temática

Sujeto, interculturalidad y educación matemática

*Armando Aroca Araújo**
*Carolina Tamayo***
*Aldo Parra****
*Luz Adriana Cadavid*****
*Cristhian Camilo Fuentes******

PRESENTACIÓN

Mirar la ciencia como un constructo dinámico, no determinado y no acabado, que resulta de las relaciones del hombre con la naturaleza permite hacer una reflexión del conocimiento de la humanidad teniendo en cuenta los procesos históricos y los contextos socioculturales de los sujetos, como lo plantea Caraça (1984):

> La ciencia… se nos presenta como un organismo vivo, impregnado de condición humana, con sus fortalezas y sus flaquezas y subordinado alas grandes necesidades del hombre en la lucha por el entendimiento y la libertad; se nos presente en fin, como un gran capítulo de la vida humana social.

No es un hombre aislado quien desde su ingenio y creatividad accede de forma consciente al conocimiento; es ese sujeto en interrelación con la conciencia socialmente constituida en su cultura que se transforma y puede, a su vez, aportar a la transformación de la comunidad. Las matemáticas como ciencia son también una forma de mirar el mundo desde esas relaciones hom-

* Coordinador de Mesa. Magíster en Educación con énfasis en Educación Matemática. Profesor de la Universidad del Atlántico.

** Magíster en Educación con énfasis en Educación Matemática. Profesora de la Universidad de Antioquia.

*** Magíster en Educación Matemática. Profesor de la Universidad Central de Colombia.

**** Doctoranda en Educación Matemática. Profesora de la Universidad de Antioquia. Docente de tiempo completo en una institución educativa oficial de Educación Básica y Media.

***** Maestría en Educación Matemática. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

bre-naturaleza; por tanto, hacen parte de un conocimiento en movimiento, un conocimiento vivo que tiene sentido a partir de la realidad concretada en las actividades y necesidades de los seres humanos. Las matemáticas no son únicamente la construcción formalista generada desde algunas escuelas de pensamiento: ellas hacen parte de los conocimientos propios de las culturas del mundo; ellas se mueven en las prácticas sociales. Desde esta reflexión estamos de acuerdo con lo que enuncia D'Ambrosio cuando dice con respecto al programa Etnomatemática en su dimensión histórica:

> La percepción y las explicaciones para todas esas dimensiones [individual, social, planetaria, cósmica, histórica] dependen, esencialmente del contexto sociocultural-natural, y demanda una postura transdisciplinar y transcultural en el análisis del conocimiento. Las implicaciones pedagógicas son obvias y se manifiestan en las tendencias educativas identificadas como multiculturalismo e interdisciplinariedad. Esas tendencias demandan una visión más amplia de la historia, intentando identificar los orígenes emanados de los pueblos para la producción del conocimiento… (D'Ambrosio, 2004, p. 15).

Cuando estamos en el aula de matemáticas, guiados por unos currículos orientados desde diferentes estamentos, es importante repensar el papel de la escuela para compartir con los estudiantes un conocimiento [matemático] que no es solamente el que está expuesto en las formas propias de la cultura euro-céntrica. Es necesario recordar que las matemáticas son un producto de la realidad, de la vida, de lo que los hombres han hecho, hacen y proyectan hacer.

Al relacionar la educación matemática con el contexto sociocultural o de analizar los contenidos matemáticos desarrollados en el aula de clases y su vínculo con la sociedad, el Programa de Investigación en Etnomatemática plantea algunos retos muy complejos, por ejemplo, el factor uniforme de las matemáticas escolares con respecto a los lineamientos y estándares establecidos por el Ministerio de Educación Nacional. Esto retos se podrían referir a las tensiones existentes en el desarrollo de la clase de matemáticas y las necesidades, expectativas e intereses de comunidades indígenas, afrocolombianas, campesinas, sectores aislados o marginalizados o del mismo entorno donde está inscrita la institución educativa.

Como lo mencionamos anteriormente para el enfoque sociocultural y la Etnomatemática, es necesario presentar una educación matemática pertinente en contenidos y en las necesidades de las comunidades. Con respecto a este elemento, el Ministerio de Educación Nacional (1998) menciona que la educación matemática debería conducir al estudiante a la apropiación de los elementos de su cultura y a la construcción de significados socialmente compartidos, desde luego sin dejar de lado los elementos de la cultura matemática universal. De igual forma menciona que este proceso debe iniciar por la identificación del conocimiento matemático informal de los estudiantes en relación con las actividades prácticas de su entorno y admitir que el aprendizaje de las matemáticas no es una cuestión relacionada únicamente con aspectos cognitivos, sino que involucra factores de orden afectivo y social, vinculados con contextos de aprendizaje particulares. Se presenta, así, la necesidad la formulación de investigaciones en educación matemáticas que integren la cultura, el contexto y las necesidades de las comunidades de la nación, lo cual, a su vez, está relacionado con los artículos 7, 8, 70 y 72 de la Constitución Política colombiana, pues en estos el Estado reconoce y se compromete a la protección de esta diversidad cultural y étnica. Algunos ejemplos son las investigaciones presentadas por autores como Gerdes (1999, 2007), Bishop (1999, 2005) y Knijnik (1996) quienes presentan propuestas curriculares en educación matemática, basados en un currículo, incluyente, humanizador y democrático, que tiene en cuenta la cultura y la realidad de las comunidades.

OBJETIVO GENERAL

Presentar algunos elementos de discusión sobre la relación entre las matemáticas, la sociedad y la cultura, y la incidencia de estos en el aula de clase para la apropiación del conocimiento por parte estudiantes y maestros.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Analizar diferentes tensiones referidas al currículo escolar, relativo al conocimiento [matemático] desde y para las prácticas sociales, a partir de una mirada histórico-cultural.

2. Proponer algunos elementos pedagógicos, curriculares y sociales que contribuyan a la reflexión sobre las tensiones presentes en el aula de matemáticas.

3. Analizar procesos de legitimación del conocimiento [matemático] desde grupos culturales o minorías étnicas.

PREGUNTAS PARA PRESENTAR A LOS PARTICIPANTES

1. ¿Cuáles tensiones emergen al analizar el currículo escolar, relativo al conocimiento [matemático], desde y para las prácticas sociales, a partir de una mirada que considere los procesos históricos y culturales?

2. ¿Son las matemáticas escolares incluyentes de otras prácticas, saberes y lenguajes cuando están basadas en los lineamientos y "estándares" del Ministerio de Educación Nacional?

3. ¿Cómo se generan los procesos de legitimación del conocimiento [matemático] desde grupos sociales (grupos laborales, niños en cierto rango de dad, campesinos, entre otros) y minorías étnicas?

ACTA DE DISCUSIÓN MESA TEMÁTICA

Sujeto, interculturalidad y educación matemática

12 de octubre del 2012. Universidad de Antioquia.
XIII Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.

Profesor investigador (Pi): ¿Qué tan lejos ha llegado?

Pescador [P]: Pa' fuera,

[Pi]: ¿Qué tan lejos?

[P]: ¡Bastante!

[Pi]: ¿Qué es bastante?

[P]: Bastante quiere decir como allá… de las últimas boyas afuera que vienen los barcos mercantes

[Pi]: ¿Y eso más o menos a qué distancia queda?

[P]: Eso queda cómo a… más o menos a… mejor dicho como de aquí pa' fuera ¡sí!

[Pi]: Pero dígame algo que me oriente más, "de aquí pa' fuera" ¡no me dice mucho!

[P]: ¡Bueno, como a 30 brazas!

La mesa tomó como punto de partida tres preguntas, que cada uno de los miembros de ella modificó o interpretó desde sus posiciones teóricas y empíricas. En consecuencia, dichas preguntas sirvieron como punto de partida, mas no representan el consenso pleno de los expositores, así como tampoco lo consignado en esta relatoría representa una especie de acuerdo entre todos. Es por esto que estas tensiones se reflejen en la discusión misma, lo cual le confiere una riqueza mayor a la reflexión en torno a la educación matemática desde una perspectiva cultural, histórico-cultural o sociocultural. Estas preguntas fueron las siguientes:

1. ¿Cuáles tensiones emergen al analizar el currículo escolar, relativo al conocimiento [matemático], desde y para las prácticas sociales, a partir de una mirada que considere los procesos históricos y culturales?
2. ¿De qué manera las matemáticas escolares pueden ser incluyentes de otras prácticas, saberes y lenguajes matemáticos cuando están basadas en los lineamientos y «estándares» del Ministerio de Educación Nacional?
3. ¿Cómo la interculturalidad posibilita desde los grupos socioculturales visualizar el (por) venir de los mismos, en defensa de sus proyectos de vida y en relación con el conocimiento [matemático]?

DISCUSIÓN

La educación es un espacio donde se presentan tensiones sobre aquel que tiene sus propias expectativas. Expectativas sobre el ser y el convivir. Estas tensiones se podrían presentar de la siguiente forma:

- Formación : individual-comunitaria
- Identidad: ciudadanía-minoría étnica
- Racionalidad: lógica-cosmovisión
- Conocimiento: fragmento especial-integral; saber-(ser, sentir, convivir)
- Escuela-Educación1
- Docente: Técnico-mediador/activista.

[1] La tensión escuela-educación es la que incluye las categorías de formación, identidad, racionalidad y conocimiento, es decir, es superior en jerarquía a las dicotomías menores. El problema general entonces es cómo la educación indígena entra en tensión con la estructura de escuela que propone el Gobierno.

En este sentido, ella debe propender por la formación individual y comunitaria. La educación debe ser integral; es un proceso indefinido que tiene en cuenta los intereses de una comunidad al estar en contacto permanente con ella. La educación debe actuar en función de la atención a los intereses del otro y de la comunidad. Se debe conocer el conocimiento del otro con cautela. Y en este sentido se debe concebir el conocimiento como una construcción dinámica, entendida en los planos social e individual.

Los peligros que encierra una educación sin planificación, para el caso de grupos culturales, es que se pueden fosilizar saberes ancestrales. He aquí el peligro de escolarizar la cultura.

En consecuencia, se propone ratificar la educación propia, pero también dar cuenta de la universalidad, y es una postura político-cultural, sin que esto deje de lado tres concepciones equivalentes e importantes a saber: propiedad (es nuestro), pertinencia (sirve para nosotros), apropiación (lo hacemos a nuestra manera).

Se debe entonces propender por la diferencia: en la idea opuesta se aprende. En la educación propia se está atento a entender el conocimiento del otro, para incorporarlo como herramienta en la lucha por la sobrevivencia, sin permitir que altere los elementos profundos y distintivos de las identidades grupales. Por ejemplo, los saberes y haceres ajenos se adecuan, adaptan y reinterpretan en términos del saber indígena (no podría ser de otro modo) para servir a los intereses del grupo cultural.

- Educación ancestral-Educación propia
- Culturizar la escuela /escolarizar la cultura

Los intereses de la escuela, en un contexto rural, vistos desde la teoría de la actividad, posibilitan mirar las relaciones de los seres humanos, su relación con las prácticas sociales, y permiten así el reconocimiento histórico de las actividades humanas en dialéctica con el conocimiento matemático. Así, las prácticas sociales dejan de estar al servicio de las matemáticas escolares, al entender el conocimiento como una construcción colectiva de comunidad pero que también llega al sujeto como parte importante de este proceso.

Los lineamientos y estándares enuncian o dejan ver acuerdos con una mirada histórico-cultural, pero, a la vez, emergen en el discurso contradicciones epistemológicas. La discusión debe centrarse a partir de la perspectiva histórico-cultural, en la significación y sentido de los intereses de la cultura. Esto implica un cuestionamiento a la alienación curricular. Hay unas necesidades sociales manifiestas allí, pero se van a la larga por un solo camino; asuntos como el hambre, la paz, el cuidado del medioambiente no emergen explícitamente. Sabemos que existe el discurso de la interculturalidad, mas falta una reflexión para la significación y el sentido personal.

El asunto de la alienación curricular pretende poner sueños donde no hay necesidad real: ellos deberían saber esto, ellos necesitan saber lo otro.

Es por ello que debe haber un cambio en los procesos de enseñanza de las matemáticas. En la etnomatemática hay una opción de descolonizar los currículos matemáticos, donde se vean las matemáticas como un producto cultural y social, una construcción humana, más compleja. Y partir de este enfoque significa pensar qué es matemática, qué es la cultura, qué es la etnomatemática. En este sentido se plantean las siguientes preguntas:

- ¿Cómo diseñar un currículo flexible, integrador, del contexto sociocultural de estudiante?
- ¿Qué metodología de clase debería tener un profesor al integrar del contexto sociocultural de estudiante?
- ¿Cómo evaluar desde un currículo integrador, del contexto sociocultural de estudiante?
- Investigar la práctica docente y el contexto ¿cómo?

En una educación que tenga en cuenta la cultura, surgen procesos de identidad, desde y para las prácticas sociales. Muestra tensiones en cuanto al devenir de las prácticas sociales, como por ejemplo, el reclamo de varias comunidades indígenas sobre lo propio.

En consecuencia, el currículo no es solo preguntarnos por el qué y el porqué de enseñar. Desde esta perspectiva es pensar en torno a quién y para qué contexto. El currículo se manifiesta como un dominante y entre los actores que ejercen acción sobre él, y puesto que las prácticas sociales están en continuo movimiento, no se produce ni legitima el mismo conocimiento. Las prácticas sociales se transforman si el conocimiento se transforma, y viceversa y, por ende, el currículo también debe hacerlo.

ALGUNOS PLANTEAMIENTOS DEL PÚBLICO

¿Qué se necesita realmente para contextualizar un problema? El problema tiene complejidad por la diversidad cultural, pues él está de acuerdo con los contextos. Las necesidades son diferentes en todas las comunidades.

Castramos, imponemos, conocimientos y desechamos su identidad cultural. Y esto no es lo mejor, pues somos sujetos en un colectivo que se mueve en un ambiente cultural.

Este tipo de presentaciones nos ponen a pensar sobre la incidencia que debe tener el contexto en el currículo de matemática; además, nos ayuda a pensar las matemáticas como una actividad social y una construcción cultural.

BIBLIOGRAFÍA SUGERIDA

Albis, S. & Sánchez, C. (1997). Conservación del patrimonio matemático nacional, Lecturas Matemáticas, vol. 18, pp.83-93.

Albis, V. (1987). Antropología y Matemáticas, Mathesis: Filosofía e Historia de las Matemáticas, vol. 3, pp. 163-167.

Albis, V. (1989). Temas de etnomatemáticas, Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, vol. 1, pp. 98.

Aroca, A. (2008). Análisis a una figura tradicional de las mochilas arhuacas: comunidad indígena arhuaca. Sierra Nevada de Santa Marta, Colombia, Bolema: Boletim de Educação Matemática, vol. 21, núm. 30, pp. 150-166.

Aroca, A. (2008). Pensamiento geométrico en las mochilas arhuacas. Revista UDCA. Actualidad & Divulgación Científica, vol. 11, núm. 2, pp. 71-83.

Aroca, A. (2008). Una propuesta metodológica en etnomatemáticas, Revista UDCA. Actualidad & Divulgación Científica, vol. 11, núm. 1, pp. 67-76.

Aroca, A. (2009). Geometría en las mochilas arhuacas. Por una enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva cultural, Cali, Programa Editorial Universidad del Valle.

Aroca, A. (2010). Una experiencia de formación docente en Etnomatemáticas: estudiantes afrodescendientes del Puerto de Buenaventura, Colombia, Horizontes, vol. 28, núm.1, pp.87-95.

Aroca, A. (2012). Etnografía del saber matemático de los pescadores de Buenaventura. Revista UDCA. Actualidad & Divulgación Científica. En imprenta.

Barton, B. (1996). Making Sense of Ethnomathematics: Ethnomathematics is Making Sense, Educational Studies in Mathematics, vol. 31, pp. 201-233.

Barton, B. (1999). Ethnomathematics and Philosophy, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, vol.31, núm. 2, pp. 54-58.

Barton, B. (1999a). Ethnomathematics and Mathematics Education: Building an Equitable Future: Proceedings of First International Conference on Ethnomathematics (ICEM1), CD Rom, Granada, España: Universidad de Granada.

Barton, B. (2008a). Cultural and Social Aspects of Mathematics Education: responding to Bishop's challenge, En: Clarkson, P y Presmeg, N. (eds.), Critical Issues in Mathematics Education: major contributions of Alan Bishop, New York, Springer, pp. 121-133.

Berger, P. (1993). La construcción social de la realidad, Argentina, Amorrortu Editores.

Bishop, A. (1999). Actividades relaciones con el entorno, y cultura matemática. En: Enculturación matemática, la educación matemática desde una perspectiva cultural. Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica S. A. Cap. 2, p. 39-84.

Bishop, A. (2005). Aproximación sociocultural a la educación matemática. Ed. Merlín D. Universidad del Valle. Instituto de Educación y pedagogía. Cali.

Blanco, H. (2006). La etnomatematica en Colombia. Un programa en construcción, Bolema: Boletim de Educação Matemática, vol. 19, núm. 26, pp. 49-75.

Blanco, H. (2008). La educación matemática desde un punto de vista sociocultural y la formación de licenciados en matemáticas y etnoeducadores con énfasis en matemáticas, Boletín de la Asociación Colombiana de Matemática Educativa, vol. 1, núm. 1, pp.4-7.

Blanco, H. (2008). El papel de la Red Latinoamericana de Etnomatemática en la conformación de una comunidad académica, Revista Latinoamericana de Etnomatemática, vol. 1, núm. 2, pp.137-147.

Blanco, H. (2008). Entrevista al profesor Ubiratan D'Ambrosio, Revista Latinoamericana De Etnomatemática, vol. 1, núm. 1, pp. 21-25.

Blanco, H. y Aldo Parra (2009). Entrevista al profesor Alan Bishop, Revista Latinoamericana de Etnomatemática, vol. 2, núm. 1, pp. 69-74.

Blanco, H. (2011). La postura sociocultural de la educación matemática y sus implicaciones en la escuela, Revista Educación y Pedagogía, vol. 23, núm. 59, pp. 59-66.

Caraça, B. J. (1984). Conceitos fundamentais da matemática. Lisboa: Livraria Sà Da Costa Editora.

Carraher, T., Carraher, D. y Analúcía Schlielmann (1993). Na vida dez, na escola zero, tercera edición, Brasil, Cortez.

Davídov V. (1988). La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico. Investigación psicológica teórica y experimental. Moscú: Progreso.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomatematics and its Place in the History and Pedagogy of Mathematics, For the Learning of Mathematics, vol. 5, núm. 1, pp. 44-48.

D'Ambrosio, U. (1998). Etnomatemática se ensina?, Bolema: Boletim de Educação Matemática, vol. 3, núm. 4.

D'Ambrosio, U. (2002). Etnomatemática: elo entre tradições e modernidade, Belo Horizonte, Autêntica.

D'Ambrosio, U. (2004). Etnomatemática e educação, en: Knijnik, G., Wanderer, F. y Oliveira, C. J. (eds.), Etnomatemática, currículo e formação de profesores, Santa Cruz do Sul, EDUNISC, pp. 39-52.

D'Ambrosio, U. (2004). Um enfoque trnasdisciplinar á educação e á história da matemática, em: Bicudo, M. A. V. & Borba, M. C. Educação matemática: pesquisa em movimiento. São Paulo: Cortez editora.

D'Ambrosio, U. (2011). Educação para una sociedade em transição, Brasil, EDUFRN.

D'Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos, Uno, vol. 27, pp. 51-76.

Enríquez, W., Millán, B. y Armando Aroca, A (2012). Análisis a los diseños de los sombreros de iraca hechos en Colón - Génova, Nariño, Revista Actualidad y Divulgación Científica, vol. 15, núm. 2, (Aceptado para publicación).

Ferreira, E. S. (1996). "A Cultura Matemática encontrada pelos colonizadores nas Américas do Sul e Central", en: International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics, Braga.

Ferreira, E. S. (1997). Etnografia dos conhecimentos matematicos e formacao do professor indi o no amamzonas, Alfabetizacao e Cidadania, vol. 6, pp. 59-66.

Fuentes, C. (2011). Algunos procedimientos y estrategias geométricas utilizadas por un grupo de artesanos del municipio de Guacamayas en Boyacá, Colombia, Revista Latinoamericana de Etnomatemáticas, vol. 4, núm. 1, pp. 55-67.

Fuentes, C. (2010). Prácticas Cotidianas y Conocimientos Matemáticos, Estudio de Caso con Modistas en Bogotá, Colombia. Publicado en: Revista Latinoamericana de Etnomatemática; Volumen 3, Número 1; pp. 31-44; Agosto 2010. Disponible en http://www.etnomatematica.org/v3-n1-febrero2010/fuentes.pdf

Fuentes, C. (2011). Estrategias geométricas utilizadas por un grupo de artesanos del municipio de Guacamayas en Boyacá, Colombia. Publicado en: Revista Latinoamericana de Etnomatemática, Volumen 4, Número 1; pp. 55- 67; Febrero 2011. Disponible en http://www.etnomatematica.org/v4-n1-febrero2011/fuentes.pdf

Fuentes, C. (2012). La Etnomatemática como mediadora en los procesos de la reconstrucción de la historia de los pueblos, el caso de los artesanos del municipio de Guacamayas en Boyacá, Colombia" Publicado en: Revista Latinoamericana de Etnomatemática, Volumen 5, Número 2; pp. 66-79; Agosto 2012. Disponible en http://etnomatematica.org/v5-n2-agosto2012/Fuentes.pdf

Gerdes, P. (1994). Geometria Sona: Volume 3, Maputo, Instituto Superior Pedagógico.

Gerdes, P. (1995). Women and Geometry in Southern Africa. Some suggestions for further research, Maputo, Globo.

Gerdes, P. (2002). LUSONA. Recreações geométricas de África, Maputo, Moçambique editora Ltda.

Gerdes, P. (2007). Etnomatemática: reflexões sobre Matemática e diversidade cultural, Ribeirão, Edição Húmus.

Gerdes, P. (2010). Desenhos de Angola. Viver a matemática, São Paulo, Editorial Diáspora.

Gerdes, P. (2010a). Da etnomatemática a arte-design e matrizes cíclicas, Belo Horizonte, Editora Autêntica.

Jaramillo, D. (2011). La educación matemática en una perspectiva sociocultural: tensiones, utopías, futuros posibles, Revista Educación y Pedagogía, vol. 23, núm. 59, pp. 13-36.

Jaramillo, D., Lady Berrío (2011). Prácticas sociales y prácticas escolares en la escuela indígena: ¿una dialogía posible?, Horizontes, vol. 29, núm. 1, pp. 89-99.

Knijnik, G. (1996). Exclusão e Resistência: educação matemática e legitimidade cultural, Porto Alegre, Artes Médicas.

Knijnik, G. (1999). Ethnomathematics and the Brazilian Landless People Education. Zentralblatt fur didaktik der Mathematik, vol. 3, núm. 31, pp. 96-99.

Knijnik, G. (2006). Educação Matemática, culturas e conhecimento na luta pela terra, Santa Cruz do Sul, Editora da Universidade de Santa Cruz do Sul -- EDUNISC.

Knijnik, G. (2011). Wittgenstein y las matemáticas en la forma de vida de los campesinos Sin Tierra de Brasil, Perspectivas metodológicas, vol. 11, pp. 36-48.

Mariño, G. (1983). El dibujo espontáneo y la concepción del espacio en los adultos de los sectores populares, Bogotá, Dimensión Educativa.

Mariño, G. (1985). Cómo opera matemáticamente el adulto del sector popular, Constataciones y propuestas, Bogotá, Dimensión Educativa.

Mariño, G. (1990). La resta desde los sectores populares, en: Centro Laubach de educación popular básica de adultos, consejo de educación de adultos de América latina, La enseñanza de la matemática con los adultos de los sectores populares: Experiencias e investigaciones, Bogotá, Dimensión Educativa, pp. 151-157.

Mariño, G. (2003). La educación matemática de jóvenes y adultos. Influencias y trayectos, Revista Decisio, núm. 4, Disponible en: http://tariacuri.crefal.edu.mx/decisio/d4/sab6-1.php?revista=4&saber=6, Acceso en: 15/02/2012.

Miarka, R. (2011). Etnomatemática: do ôntico ao ontológico, Tesis doctoral, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Orientador: Maria Aparecida Viggiani Bicudo, Disponible en: http://www.etnomatematica.org/home/?p=1605, Acceso en: 05/01/2012.

Monteiro, A. (2002). A etnomatemática em cenários de escolarização, Reflexão e Ação, vol. 10, núm. 1, pp. 92-108.

Monteiro, A. (2004). Algumas reflexões sobre a perspectiva educacional da Etnomatemática. Zetetike (UNICAMP), vol. 12, núm. 22, pp. 9-32.

Monteiro, A. y M. Vaggione (2006). A Construção de Conceitos Matemáticos em propostas curriculares centradas na Perspectiva de Projetos, Movimento (Niterói), vol. 14, pp. 1-11.

Monteiro, A. y Jackeline Mendes (2011). Prácticas sociales y e organización curricular: cuestiones y desafíos. Revista Educación y Pedagogía, vol. 23, núm. 53, pp. 37-46.

Moura, M. O. (2001). A atividade de ensino como ação formadora. En: Castro, Amélia Domingues e CARVALHO, Ana Maria Pessoa de (org.) Ensinar a ensinar. São Paulo: Pioneira Thomson Learning Ltda. 143-162.

Páramo, G. y Víctor Albis (1987). Antropología y matemáticas, Mathesis, vol. 3, núm. 2, pp. 163-167.

Páramo, G. (1989). Lógica de los mitos: lógica paraconsistente. Una alternativa en la discusión sobre la lógica de los mitos, Ideas y Valores, núm. 79, pp.

Páramo, G. (1993). Mito, lógica y geometría. Algunas razones para la aplicación de métodos formales al estudio del mito, Colombia. Ciencia y Tecnología, vol. 10, núm. 4, p. 11-13.

Páramo, G. (1994). Mito y consistencia lógica, Aleph, núm. 90, pp. 4–14.

Parra, A. (2009). Matemáticas en el mundo Nasa, Bogotá, Ministerio de Cultura de Colombia.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de objetivación. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática educativa. Número especial, p. 103-120.

Rey, M. y Armando Aroca (2011). Medición y estimación de los albañiles, un aporte a la Educación matemática, Revista UDCA. Actualidad & Divulgación Científica, vol.14, núm. 1, p. 137-147.

Suarez, I., Acevedo, M. y Crescencio Huertas (2009). Etnomatemática, Educación Matemática e Invidencia, Revista Latinoamericana de Etnomatemática, vol. 2, núm. 1, pp. 18–51.

Scandiuzzi, P. P. (1998). Matemática indígena e Eduação. Educação, vol. 21, núm. 36, pp. 127-135.

Scandiuzzi, P. P. (1999). A luta do Povo Kuikuro no início do terceiro milênio, sob o ponto de vista de um etnomatemático, Educação (Porto Alegre). vol. 22, núm. 39, pp. 135-146.

Scandiuzzi, P. P. (2006). A educação escolar indígena e a cência indígena kuikuro, Costa Rica, akademikaglobal.

Scandiuzzi, P. P. (2009). Educação Indígena X Educação Escolar Indígena: uma relação etnocida em uma pesquisa etnomatemática, São Paulo, UNESP.

Sierra, Z. (2010). Pedagogías desde la diversidad cultural: una invitación a la investigación colaborativa intercultural. En Revista PERSPECTIVA, vol. 28, núm.

1, (Junio-Julio). pp. 157-190. Florianópolis. Recuperado el 11 de septiembre de 2011 http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/perspectiva/article/view/2175-795X.2010v28n1p157

Silva da, Z.R. (2010). Educação e intercultura para além da fronteira. En revista Espaço Pedagógico-REP, v. 17, n. 2, (Julio/Diciembre). pp. 211-222. Passo Fundo.

Silva da, T. T. (1998): " Descolonizar el Currículo: estrategias para una pedagogía crítica". En Gentili, P. (Comp.): Cultura, política y Currículo (Ensayos sobre la crisis de la escuela pública). Buenos Aires: Editorial Lozada. Recuperado el 14-09-2011 en http://cem7.edu.ar/index.php?option=com_content&view=article&id=168&Itemid=183

Silva, da T. T. (1995). El proyecto educacional moderno ¿Identidad terminal? En revista Propuesta Educativa, n. 13, p. 5-10, dic. 1995. Recuperado el 10-06-2011 en https://docs.google.com/document/d/1YytgRWdSAsYRubwID_qEL4h_h32ru-JecrB2LCWkHMc0/edit?hl=en_US&pli=1

Silva da, T. T(1999). O currículo como fetiche. A poética e a política do texto curricular. Belo Horizonte, Autêntica

Silva da, T. T. (2010). Documentos de identidade. Uma introduçao às teorias do currículo. 3° edición. Belo Horizonte, Autêntica

Smith, L. (2008). Critical and indigenous methodologies. California: Norman K. Edts.

Tamayo, C. (2010). Relación entre las prácticas sociales y la matemática escolar: El caso de la organización de datos. Trabajo presentado para optar al título de Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia

Tamayo, C. (2012). (Re) significación del currículo escolar indígena, relativo al conocimiento matemático, desde y para las prácticas sociales: el caso de los maestros indígenas Dule de Alto Caimán.

Urbano, R. (2010). Geometría en las esculturas del Parque Arqueológico de San Agustín, Revista Latinoamericana de Etnomatemáticas, vol. 3, núm. 1, pp. 45-66.

Velasco, J. (1992). La matemática de los motilones o baríes, Lecturas Matemáticas, vol. 13, núm. 1-3, pp. 105-110.

Walsh, C. (2008). Interculturalidad, plurinacionalidad y decolonialidad: las insurgencias político-epistémicas de refundar el Estado. En Revista Tabula Rasa, núm. 9, pp. 131-152. Colombia

Zambrano, J. (2012). Prácticas matemáticas en una plaza de mercado, Revista Latinoamericana de Etnomatemáticas, vol. 5, núm. 1, pp. 35-61.

Elementos de reflexión en torno a la Evaluación en Educación Matemática

*Gloria Inés Neira Sanabria**

RESUMEN

Hablar de evaluación sin referirse a todo el sistema educativo y a todos los procesos de enseñanza y aprendizaje no es posible, pues ella hace parte, y determina y es determinada por la concepción y los enfoques que se tengan acerca de la educación en general, de la calidad pretendida, y de la educación matemática en particular.

Palabras clave: evaluación, aprendizaje, matemáticas, calidad, equidad.

* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: gneira@udistrital.edu.co

PRIMERA PREMISA

La evaluación es indiscutiblemente parte importante en cualquier proceso educativo.

Cualquiera que sea la concepción que se tenga de "evaluación", cualesquiera sean las formas de llevarla a cabo, y cualesquiera sean las argumentaciones y valoraciones que demos a la hora de justificar la necesidad, la pertinencia, la importancia de evaluar cualquier proceso en general, y el educativo en particular, es innegable el consenso general acerca de la pertinencia y urgencia de abordar el tema como parte integrante e integradora de una educación de calidad.

¿Por qué? Porque la evaluación se constituye en el referente por excelencia que se tiene para valorar si se ha "*aprendido*" o no, si se han logrado los objetivos o metas trazados, si todo va bien con respecto a unos propósitos iniciales que se han considerado básicos; o en palabras de Díaz Godino (2003) con el EOS, si el saber personal se adecua al saber institucional, si no hay disparidad de significados o conflictos semióticos relativos entre estas dos dimensiones, sea la que sea la concepción que se profese de aprendizaje y de enseñanza.

Al abordar el problema de la evaluación hay por lo menos dos dimensiones claramente diferenciadas: una de corte filosófico-epistemológico-cognitivo, y otra logística, en cuanto se interesa por el mero acto de medir, sean esas mediciones de carácter cuantitativo o cualitativo con el fin de dar estadísticas, puntajes, asignar puestos según resultados obtenidos, con las consecuencias que ello conlleva, por ejemplo, con el acceso a las universidades, cómo se utilizan los resultados del ICFES, pruebas SABER 11, o las posibilidades laborales en las empresa, según los resultados de los antiguos ECAES, hoy llamados SABER PRO.

En la educación pública hay muchas variables o circunstancias coyunturales que particularizan el proceso educativo, factores que no se tienen en cuenta cuando se evalúa…, es decir, con el mismo rasero se miden colegios privados y públicos, estudiantes de diferentes estratos, con historias de vida distintas: estudiantes reinsertados tanto de la guerrilla como de los grupos paramilitares, pandillas, padres de familia atracadores…, toda una problemática social que incluso es más profunda y vital que la de si aprendió o no unos contenidos, en contraposición con la mayoría de colegios privados. Aún así, los colegios públicos son clasificados y valorados según los resultados de las pruebas tanto nacionales como internacionales de acuerdo con los estándares básicos propuestos. Como claramente lo expresa el escritor español Javier Marías (2010) en ¡**Enséñame, si puedes**!", "en la situación actual, no se puede hacer casi nada contra los alumnos que no dejan dar la clase e impiden a sus compañeros estudiar y aprender. Abordar el problema dando cursillos a los profesores sobre cómo tratar a muchachos conflictivos es tan inútil como lo sería dar instrucciones a las mujeres maltratadas sobre cómo convivir con maridos conflictivos. Y considera un fraude a la sociedad que hoy se esté perjudicando tanto a los primeros como a los segundos".

SEGUNDA PREMISA

Las formas de evaluar no son independientes ni de las concepciones ni de los enfoques que se compartan acerca de una educación de calidad. Por ejemplo, la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura OREALC/UNESCO (2008) plantea un concepto de calidad de la educación conformado por cinco dimensiones: equidad, relevancia, pertinencia, eficacia y eficiencia, estrechamente imbricadas y necesarias todas dentro de un enfoque de derechos humanos, y afirma la necesidad de incorporarlas como la única manera acertada para la evaluación de tal concepción de educación. Es decir, se pone de manifiesto que la evaluación no puede convertirse en una rueda suelta pues es inherente a toda la dimensión ontológica del proceso educativo.

Sean las que fueren las formas de evaluación: acumulativa, por procesos, por competencias, y sean estas discursivas, comunicativas, cognitivas, propositivas, actitudinales…., han de emerger de la articulación de los diferentes componentes del currículo y, a su vez, deben propiciar métodos y enfoques de enseñanza, en un verdadero proceso dinámico y dialéctico; por ejemplo, si es por procesos, y la segunda nota borra la primera, se supone que los contenidos de la segunda involucran los de la primera. Si ahora no se exige de memoria sino analizar, interpretar y explicar, se supone que las clases ya no son solo memorísticas, de datos, sino de análisis, consecuentemente. Si se hace una reforma educativa profunda como la del Japón en donde el currículo ahora es formar para ser ciudadanos del mundo: ya no geografía e historia del Japón sino geografía e historia del mundo, donde las metas son "ser mejores personas" manejo del tiempo libre, valores, cibernética… ¿cómo se evaluaría dentro de una reforma así? Al igual que si nuestras clases siguen el esquema: explicación, ejemplo, ejercicio… ¿qué tipo de evaluaciones corresponden a tal esquema?

TERCERA PREMISA

Se evalúa con tres finalidades por lo menos: en primer lugar, porque se tiene interés en el conocimiento; desde esta perspectiva se miran los errores como síntomas de dificultades, de obstáculos, de conflictos, como aquella conducta que no sigue las reglas institucionales, y se reconoce en los errores que cometen los estudiantes creatividad, comprensiones divergentes de las preguntas formuladas; se consideran la fuente de indagación más importante, pues los obstáculos pueden inferirse de los errores en las prácticas, y de la dificultad experimentada por los que participan en ellas, con la finalidad expresa de construir un camino de aprendizaje, de comprensión, de cognición que supere tales dificultades y obstáculos.

En segundo lugar, para uno mismo darse cuenta si entendió o no, si está encaminado a lograr exitosamente aquello propuesto. En efecto, no hay otra forma de saber si uno interiorizó un proceso, sino poniéndolo en práctica y eso es lo que en términos generales busca un profesor cuando hace "previas". Además de dar cuenta de que las personas están aprendiendo y de que se necesita para reportar notas y dotar de referentes estadísticos operativos a la Institución, se tiene como premisa el criterio que parece ser que una persona no puede poner en práctica algo que no ha interiorizado bien. Según Neira (2000), parece ser que los obstáculos emergen en el momento de enfrentarse a una actividad, a un problema.

Y en tercer lugar, se evalúa formalmente para entregar planillas y sacar estadísticas. Al respecto y acerca de la inequidad existente en algunas pruebas, Acosta (2012), al referirse a las pruebas SABER PRO, afirma que "las matemáticas, aunque están situadas administrativamente entre las ciencias básicas, no comparten métodos de investigación ni esquemas de validación con las otras disciplinas allí agrupadas (...); por consiguiente, un examen común no permite de ninguna manera reflejar la formación específica de un matemático". Y acerca del análisis de los resultados, los califica de desconsoladores, al citar por ejemplo, que en las preguntas abiertas, un gran porcentaje de estudiantes obtuvo un puntaje inferior a 30 sobre 100: de los 267 estudiantes próximos a graduarse de matemáticos en 2009, ¡75 no pudieron responder ni siquiera una pregunta abierta!

A MANERA DE CONCLUSIÓN

Con respecto al hecho indiscutible de que la evaluación es una parte de todo el proceso educativo, los *Estándares básicos de competencias en matemáti-*

cas explícitamente afirman que se hace necesario concebir las matemáticas como creación humana, resultado de la actividad de grupos culturales ubicados en una sociedad y en un periodo histórico determinado y, por tanto, "como una disciplina en desarrollo, provisoria, contingente y en constante cambio". Ello implica, a su vez, pasar de una enseñanza orientada solo hacia el logro de objetivos específicos relacionados con los contenidos del área... a una enseñanza que apoye a los estudiantes en el desarrollo de competencias matemáticas, científicas, tecnológicas, lingüísticas y ciudadanas. "Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos".

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Díaz-Godino, J. (2003). Teoría de las funciones semióticas: Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. Granada: Universidad de Granada. Recuperado el 5 de marzo de 2009 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semióticas/monografiatfs.pdf

Marías, J. (2010) ¡Enséñame, si puedes!" "Dejarse enseñar" Recuperado el 12 de mayo de 2012 de http://www.lanacion.com.ar/753207

PREALC/UNESCO (2008), Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura.

Acosta Gempeler, A. En: UN Periódico Impreso No. 154 (2012) Universidad Nacional de Colombia

Neira, Gloria. (2000). El paso del álgebra al cálculo: punto fundamental para lograr una comprensión significativa en matemáticas. Revista Ingeniería, (Universidad Distrital Francisco José de Caldas). n.° 1, 87-92

Mesa Temática

La evaluación del aprendizaje en matemáticas

Eliécer Aldana Bermúdez[*]
Graciela Wagner Osorio[**]

RESUMEN

La evaluación del aprendizaje, en general, ha sido un tema de gran interés para muchos investigadores, y en concreto, la evaluación en matemáticas es un campo conceptual de estudio y de debate; prueba de ello son los espacios que ha ido alcanzando en los congresos a escalas local, regional, nacional e internacional, como por las publicaciones de libros y artículos que aparecen en revistas especializadas. Por tanto, este artículo constituye un aporte más a la reflexión en torno a la evaluación del aprendizaje en matemáticas como debate en esta mesa temática.

Palabras clave: evaluación, aprendizaje, matemáticas, objetivo, método.

[*] Universidad del Quindío. Dirección electrónica: eliecerab@uniquindio.edu.co.
[**] Universidad del Quindío. Dirección electrónica: gwagner@uniquindio.edu.co.

1. LA EVALUACIÓN, UNA PRÁCTICA PARA REFLEXIONAR

Chevellar (1986) propone el estudio de la evaluación como parte del funcionamiento en la relación de la tríada, **profesor, saber matemático, estudiante**, es decir, que esas relaciones que se establecen en el aula pueden mostrar diferencias entre unos y otros en los resultados, en cuanto a que todas las materias tienen su propia didáctica: las formas de enseñar y el proceso de transposición didáctica que cada profesor hace de su asignatura tienen incidencia en los resultados cuantitativos y en la promoción o no de estudiantes; así, por ejemplo, podría preguntarse: ¿por qué con este profesor pasan todos y por qué a este se le quedan todos? Entonces nos preguntamos: ¿en cuál de los dos paradigmas quisiera estar usted?

El concepto de evaluación difiere de unos actores del proceso docente educativo, a otros, por las concepciones que se tienen de ella. La evaluación se ha convertido en un juicio de valor para quienes aprenden o se espera que construyan un objeto matemático del conocimiento en el caso de las matemáticas escolares (Stufflebeam y Shinkifield, 1987).

La evaluación del aprendizaje en matemáticas comporta un campo de dificultades en las que se pueden mencionar: en el aspecto institucional, el asignar por la normativa un valor numérico o categoría a las respuestas dadas por un estudiante en determinada parcela del conocimiento; esto implica que el valor asignado da cuenta de cuánto conocimiento tiene ese sujeto en un espacio académico que configura en últimas su formación profesional y que garantiza su idoneidad, competencia profesional y laboral. En la práctica no existe un modelo de evaluación, y de consenso de comunidad académica. Castro et al. (1993) plantean que la evaluación como elemento del currículo no está aislada y, por tanto, debe impregnar las etapas que conforman la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

La evaluación del aprendizaje en matemáticas desde la óptica del profesor pone de manifiesto que los estudiantes no tienen interés por la materia, desconocen los métodos de estudio, tiene dificultad para hacer abstracciones en este nivel de escolaridad, no traen las bases necesarias de los niveles anteriores, otros no han hecho una buena elección de la carrera, poco nivel de comprensión lectora, falta de capacidad para atreverse a pensar de manera divergente, el nivel alcanzado de los estudiantes universitarios no se corresponde con un nivel de pensamiento matemático avanzado. Por su parte, Webb (1992) afirma que *"Entender la evaluación como un aspecto integral de instrucción proporciona un marco para pensar sobre evaluación, instrucción y sus interacciones".*

La evaluación del aprendizaje de las matemáticas, vista desde el sujeto que aprende, pone en evidencia que el fracaso escolar en este campo del conocimiento tiene que ver con las prácticas de evaluación que el maestro hace en el aula de clase; por ejemplo, es muy notorio que los estudiantes manifiesten que: el profesor enseña una cosa y evalúa otra, los ejemplos que hace en clase son de menos grado de dificultad que los que pone en el parcial, el tiempo para responder es corto en relación con la cantidad de tareas planteadas en la prueba escrita, el docente no tiene en cuenta las diferencias individuales y los ritmos de aprendizaje, muchos toman represalias por las mismas relaciones de poder que se gestan en el aula de clase. Los estudiantes aseveran que la evaluación se convierte en una forma de control y de poder; otros, la consideran casi un "trauma", porque su objetivo está basado en una forma de "presión psicológica"; algunos ponen de manifiesto que el solo término parcial connota para ellos "bloqueo mental". De Guzmán (1998) afirma que no basta con que el docente de matemáticas universitario conozca en profundidad la asignatura, sino que consiga que el estudiante comprenda las ideas y los métodos que debe aprender.

La evaluación siempre ha sido un proceso cuestionable porque se trata de buscar la objetividad dentro de un proceso subjetivo en muchos de los casos. De otra parte, la evaluación del aprendizaje en la universidad se ha convertido en uno de los indicadores de calidad del sistema educativo. Algunos estudios han demostrado que la evaluación determina el aprendizaje de los estudiantes y no el currículo oficial (Biggs, 2005).

Al respecto, algunos estudios realizados por Broabfoot y Black (2004) cuestionan los modos predominantes de evaluación, porque tienden a reforzar nociones sobre el currículo y el aprendizaje que no son acordes con las demandas actuales como el aprender a aprender, el aprendizaje por competencias y el aprendizaje para la vida; estos autores plantean que este tipo de aprendizaje ha sido enfocado más hacia el manejo de técnicas, en lugar de centrar su estudio en el análisis de la calidad del aprendizaje. En el ambiente universitario esta dificultad es de interés en medio de las reformas que se generan a favor de los cambios con la concepción misma del currículo, del aprendizaje y como consecuencia de la evaluación (Billing, 2007; González, 2006; Jongbloed, 2002; Mollis y Marginson 2002).

2. LA EVALUACIÓN EN MATEMÁTICAS Y SU RELACIÓN CON EL CURRÍCULO

La evaluación en matemáticas y los diseños curriculares en matemáticas para la Educación Básica especialmente, en los ámbitos nacional e internacional, como lo plantea García (2003), han tenido cambios sustanciales; los cambios en el sistema de evaluación han estado ligados a los cambios curriculares en cada etapa, producto de una concepción de currículo como una actividad social y cultural de una comunidad y sociedad del momento, y de la introducción del carácter social y cultural del conocimiento matemático, principalmente en su dimensión educativa, (Rico y Sierra, 1997). La evaluación está condicionada institucionalmente, en cuanto es un proceso subjetivo, que se realiza de acuerdo con las normas creadas por una comunidad, y responde a políticas exigidas por la institución escolar. Por tal razón, como lo plantea García (2003, p: 10), "sus resultados no son objetivos, son procesos construidos, afectados por marcos axiológicos institucionales y sociales".

En este sentido, Romberg (1989) reconoce que la enseñanza de las matemáticas ha empezado a cambiar, pero que aún los procedimientos de valoración son obsoletos, ya que estos requieren otra visión del conocimiento, del aprendizaje y de la enseñanza. Algunos investigadores como Chevellar (1991) sitúan el estudio de la evaluación como parte del funcionamiento didáctico en la relación de la tríada profesor, saber matemático y el estudiante. La evaluación es parte del contrato didáctico, lo cual hace que no se convierta en una acción periférica del proceso didáctico, pues hace parte de las reglas, las estrategias y los procesos de enseñanza, de aprendizaje y de comunicación. Por su parte, Godino y Batanero (1994) también analizan la noción de significado desde el punto de vista didáctico para estudiar las cuestiones relativas a la evaluación del conocimiento matemático institucional.

3. RELACIÓN ENTRE OBJETIVOS, CONTENIDOS Y MÉTODO, CON LA EVALUACIÓN EN MATEMÁTICAS

El modelo pedagógico articula cambios en las prácticas de enseñanza y de aprendizaje, e incluye cambios en la organización del espacio, los tiempos y los tipos de relación entre los estudiantes, los profesores y la administración.

Los objetivos en el proceso de enseñanza-aprendizaje responden a la pregunta: **¿para qué**? Describen lo que deben lograr los alumnos en cuanto al aprendizaje de nuevos conocimientos y desarrollo de habilidades matemáticas, el desarrollo de capacidades mentales y la formación de convicciones de carácter educativo. Los contenidos responden: **¿Qué** debo enseñar a mis estudiantes? Deben ser organizados en torno al logro de los objetivos que el profesor persigue en el contrato didáctico con sus estudiantes, deben recoger los campos conceptuales, en este caso, de las matemáticas que hacen que el sujeto que aprende dé cuenta de los saberes propios del campo disciplinar de las matemáticas que configuran el perfil profesional. El método debe responder a la pregunta: ¿**Cómo** lo hago para alcanzar los objetivos previstos en un espacio académico determinado? Tiene como objeto final la construcción de un campo conceptual de la matemática que social y culturalmente muestra el nivel alcanzado por el sujeto después de un proceso de valoración integral (Couso, et al., 2005).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Biggs (2005). *Calidad del aprendizaje universitario.* Madrid: Narcea.

Billing, D. (2007). Teaching for transfer of core/key skills in higher education: Cognitive skills. *Higher education.* 53 (6), 483-516.

Broabfoot, P., y Black, P. (2004). Redefining assessment. The first ten years of assessment in education. Assessment in education.*11 (1),* 1-27.

Couso, D., Badillo, E., Perafán, G. A., y Aduriz-Bravo, A. (2005). *Unidades didácticas en ciencias y matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Godino, J. D., Batanero, C. (1994). Significado personal e institucional de los objetosmatemáticos (Institutional and personal meaning of mathematical objects). *Recherches en didactiques des mathèmatiques, 14 (3)*, 325-355.

García, G. O. (2003). Currículo y evaluación en matemáticas. Un estudio en tres décadas de cambio en la educación básica. Bogotá: Magisterio.

González, I. (2006). Dimensiones de la evaluación en el espacio europeo de educación superior. *Electronic journal of research in educational psychology.4 (3),* 445-468.

Chevellard, I. (1991). La transposicióndidáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: AIQUE.

Jongbloed, B. (2002). Lifelong learning: Implications for institutions. *Higher education, 44 (3/4),* 413-431.

Mollis, M., y Marginson, S. (2002). The assessment of universities in Argentina and Australia: Between autonomy and heteronomy. *Higher education, 43 (3),* 311-330.

Rico, L., y Sierra, M. (1997). Antecedentes del currículo de matemáticas. En L, Rico (ed.). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.

Romberg, T. A. (1989). Evaluation: a coat of many colours. En robitailled (ed.). Evaluation and Assessment Mathematics Education. París: UNESCO.

MATEMÁTICA EDUCATIVA
13° Encuentro Colombiano

Diseño, diagramación y conversión digital:
Sello Editorial Universidad de Medellín

La fuente usada para las páginas interiores es Egyptian505 BT a 11 puntos

ISBN: 978-958-8815-11-4
9 789588 815114

ASOCIACIÓN COLOMBIANA
DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
ASOCOLME

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN