

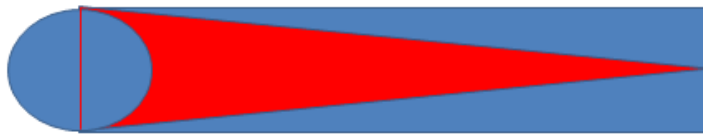
Error En Problema De Área Sombreada

Leonel Delgado Eraso, Universidad de Nariño

1. Planteamiento Del Problema.

Cuando se trabaja en geometría, después de realizar aplicaciones de áreas volúmenes y superficies por lo general los docentes y los textos de matemáticas proponemos ejercicios de calcular áreas sombreadas de figuras geométricas compuestas. Por ejemplo pedimos calcular el área que queda entre un círculo inscrito dentro de un cuadrado de lado x . Problemas como el anterior son fáciles de resolver porque su planteamiento es preciso y no lleva a ambigüedades.

Se planteó un problema en el cual se pregunta calcular el área sombreada entre un semicírculo y un triángulo que se encuentran dentro de un rectángulo, tal como se muestra en la figura, si se sabe el círculo tiene como radio r y el rectángulo mide h de largo. (como caso particular suponer que el vértice del triángulo coincide con la mitad del ancho del rectángulo).



(en esta figura el área sombreada es la de color rojo)

Si resolvemos el problema tal como lo indica la figura podríamos pensar que el problema es elemental y simplemente, se calcularía el área del semicírculo y el área del triángulo y se restan las dos áreas, así:

El área del triángulo es:

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{\text{base} * \text{altura}}{2} = \frac{2r * h}{2} = r * h$$

El área del semicírculo es:

$$A_{\text{semicírculo}} = \frac{\pi * r^2}{2}$$

Por lo tanto, el área sombreada sería:

$$A_{\text{sombreada}} = r * h - \frac{\pi * r^2}{2}$$

Aparentemente, todo está correcto. Asignemos valores al radio del semicírculo y al largo del rectángulo y apliquemos la fórmula obtenida para el área sombreada.

Caso 1.

Supongamos que: $r = 4$ y que $h = 20$, reemplazando en la fórmula, obtenemos que:

$$A_{\text{sombreada}} = r * h - \frac{\pi * r^2}{2} = 4 * 20 - \frac{\pi * 4^2}{2} = 80 - 8 * \pi \approx 54,8673$$

Se pensaría que esta es la respuesta correcta.

Caso 2.

Supongamos que: $r = 4$ y que $h = 5$, reemplazando en la fórmula, obtenemos que:

$$A_{\text{sombreada}} = r * h - \frac{\pi * r^2}{2} = 4 * 5 - \frac{\pi * 4^2}{2} = 20 - 8 * \pi \approx -5,1327$$

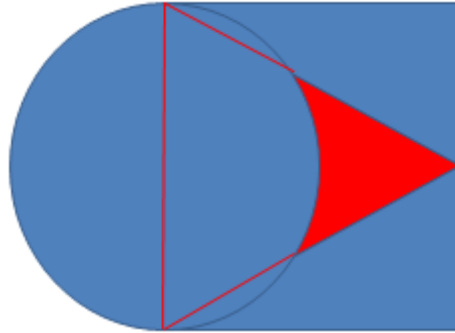
Grave problema, resulto un área negativa.

¿Dónde está el **ERROR**?

SOLUCION DEL PROBLEMA

El problema está en la gráfica, si observamos bien los lados del triángulo para que no corten el círculo debería ser tangentes a este, pero entonces sería imposible construir el

triángulo para obtener la figura de la gráfica. Por lo tanto los de los triángulos corta al círculo, tal como se observa en la siguiente figura.



El problema entonces, parece.

NO es tan sencillo, como

La solución sería

Calcular el área del triángulo, así:

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{\text{base} * \text{altura}}{2} = \frac{2r * h}{2} = r * h$$

Calcular el área del semicírculo, así:

$$A_{\text{semicírculo}} = \frac{\pi * r^2}{2}$$

Calcular el área del semicírculo, menos los dos sectores que se forman con el corte de los lados del triángulo, llamémosla área del semicírculo recortado

$$A_{\text{semicírculo recortado}} = \frac{\pi * r^2}{2} - 2 * \Delta$$

Donde Δ el área de uno de los sectores.

Por lo tanto, el área sombreada sería la diferencia entre el área del triángulo y el área semicírculo recortado

$$A_{sombreda} = A_{triángulo} - A_{semicírculo\ recortado}$$

$$A_{sombreda} = r * h - \left(\frac{\Pi * r^2}{2} - 2 * \Delta \right) = r * h - \frac{\Pi * r^2}{2} + 2 * \Delta$$

la cual sería la respuesta **CORRECTA** calculando el área de uno de los sectores, Δ . (en el caso más sencillo, suponiendo que el área de los sectores, son iguales).

Llevando la gráfica al plano cartesiano y considerando el origen en el corte de las tres figuras, y aplicando algebra lineal y calculo integral se llega a que el valor de Δ , es:

$$\Delta = \frac{r^2}{2} \arcsen\left(\frac{2 * r * h}{r^2 + h^2}\right) - \frac{r^3 * h}{r^2 + h^2}$$

TALLER.

- 1.) Corregir las respuestas incorrectas del caso 1 y 2.
- 2.) Realizar las gráficas a escala, tanto del caso 1 y 2 y comprobar que la respuesta es correcta utilizando Δ .
- 3.) Demostrar la fórmula para Δ .