APROXIMACIÓN DE RAÍCES COMPLEJAS CON EL MÉTODO DE NEWTON

Juneth Andrea Terán Tarapués
Catalina María Rúa Alvarez
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Colombia
e-mail: juneth0102@hotmail.com cmra03@gmail.com

XIII Coloquio Regional de Matemáticas y III Simposio de Estadística
San Juan de Pasto, Colombia
18 al 20 de mayo de 2016

Palabras claves

Método de Newton, Raíces complejas, Convergencia, Cayley, Fractales.

Resumen

El método de Newton es uno de los métodos más importantes en la literatura cuando se trata de encontrar una buena aproximación para la solución de ecuaciones no lineales. No parece muy extraño, que podamos pensar en trabajar con este método para aproximar raíces complejas, pero ¿Cómo hacerlo?.

En esta ponencia se expondrán las bases para el estudio de este método "ampliado", su interpretación geométrica, la convergencia a la que nos enfrentamos y la obtención de su algoritmo para ser aplicado en lenguaje C.

Empezaremos pensando en una fórmula para determinar aproximaciones de raíces de funciones de variable compleja, dicha formula es muy parecida a la de Newton para números reales:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \text{ para } n = 1, 2, ...$$

Evidentemente ahora trabajaremos con números complejos, es decir, la aproximación inicial z_0 que consideramos es un complejo y lo serán también la nueva "sucesión"

$\{z_1, z_2, ...\}$, las respectivas funciones y derivadas evaluadas en los puntos de la "sucesión" y la parte más importante para nuestro caso: la raíz. Además, la derivada sobre funciones de variable compleja debe cumplir con ciertas particularidades. También debemos considerar las condiciones locales sobre la convergencia.

La interpretación geométrica del método en el caso complejo, es muy parecida a la dada para el caso de números reales, pero con ciertas características , por ejemplo, ¿qué es la tangente de una función compleja?, ¿Cómo graficar en el plano complejo?.

Uno de los problemas en los que nos enfocaremos en esta presentación es el enunciado por Cayley en el año 1879: "¿Si se parte de un punto aleatorio del plano complejo, a qué raíz de la función $z^3 - 1 = 0$ convergirá el método de Newton?". La respuesta a este problema conduce sorprendentemente a una figura de naturaleza fractal.

El hecho de poder relacionar el método de Newton con fractales, es una de las aplicaciones más curiosas e interesantes que atraen a investigadores y estudiantes a explorar esta área de la matemática aplicada.

Finalmente, se explicará el algoritmo del método de Newton para raíces complejas y se exhibirá su implementación en lenguaje C.

Referencias

[1] Burden R., Faires, D., Análisis Numérico. 8th. Edition, Thomson Brooks/Cole, México, (2001). ISBN 970-686-134-3.

[2] Lily Yau, Adi Ben-Israel, The Newton and Halley Methods for Complex Roots, The American Mathematical Monthly 105, (1998). pp 806-818.

[3] Watts C., Evaluating Newton's Method for Approximating Real and Complex Roots of Various Functions, Math 4395-Senior Project, University of Houston, (2009).

[4] Z. Nehari, Introduction to Complex Analysis, Allyn & Bacon, Boston, (1961).

[5] G. Rubiano, Método de Newton, Mathematica y Fractales: Historia de una página, Boletín de Matemáticas Nueva Serie, Volumen XIV No.1, (2007). pp 44-63.