4.44. COMUNICACIÓN BREVE 44

Un Criterio de Estabilidad Para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias no lineales Basado en el Teorema de los Círculos de Gershgorin

Danilo Alonso Ortega Bejarano
danylojaja@gmail.com
Dpto. de Matemática y Estadística
Universidad de Nariño

Eduardo Ibargüen Mondragon
edbargun@udenar.edu.co
Dpto. de Matemática y Estadística
Universidad e Nariño

Resumen.

Por medio de los círculos de Gershgorin se determinan regiones en las cuales se encuentran los valores propios de una matriz. En este trabajo, se utilizará esta propiedad para establecer un criterio de estabilidad local para soluciones de equilibrio de sistemas dinámicos definidos a través de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales autónomas.

Palabras claves. Estabilidad, Gershgorin, Ecuaciones diferenciales

- **Presentación del problema.** En 1892, A. M. Lyapunov desarrolló su teoría de la estabilidad para ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales la cual caracteriza el comportamiento de las trayectorias de sistemas dinámicos en el sentido de que trayectorias cercanas entre sí, permanecerán de la misma forma en el futuro. (Hirsch M. and Smale S). Estableció un criterio de estabilidad muy útil para sistemas dinámicos de la forma $\frac{dx}{dt} = f(x)$ Se estudia la estabilidad de algunos modelos biológicos a partir de criterios de estabilidad ya dados y utilizando la definición y teorema de los círculos de Gershgorin se elabora un nuevo criterio que facilite la conclusión de estabilidad o inestabilidad local para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales; debido a que los círculos de Gershgorin son una herramienta útil para saber la ubicación de los valores propios de una matriz cuadrada, ya que algunos criterios de estabilidad dependen del cálculo de valores propios.

- **Marco de referencia conceptual.**

1. Definición de los círculos de Gershgorin:

$Sea\ A\ una\ matriz\ n * n\ real\ o\ compleja$:

$\boldsymbol{Se\ define}$:

$$r_i = |a_{i1}| + |a_{i2}| + \cdots + |a_{i,j-1}| + |a_{i,j+1}| + \cdots + |a_{in}| = \sum_{(j=1, j\neq i)}^{n} |a_{ij}|$$

$r_i\ corresponde\ al\ radio\ de\ cada\ circulo\ de\ gershgorin\ por\ fila.$

$Y\ se\ define$:

$D_i = \{z \in \mathbb{C}: |z - a_{ii}| \leq r_i\}$

$Que\ corresponde\ a\ un\ circulo\ en\ el\ plano\ complejo\ con\ centro\ en\ a_{ii}\ y\ radio\ r_i$

Cada uno de los círculos D_i son los círculos de gershgorin.

(Algebra lineal. Stanley, Grossaman)

2. Teorema de los Círculos de Gershgorin.

$Sea\ A\ una\ matriz\ n * n\ y\ sea$:

$$\boldsymbol{D_i} = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}: |\boldsymbol{z} - \boldsymbol{a_{ii}}| \leq \boldsymbol{r_i}\}$$

$$\boldsymbol{r_i} = \sum_{(\boldsymbol{j}=\boldsymbol{1}, \boldsymbol{j}\neq \boldsymbol{i})}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{a_{ij}}|$$

$Cada\ circulo\ de\ Gershgorin.$

$Entonces\ cada\ valor\ propio\ de\ A\ esta\ contenido\ en\ al\ menos\ uno\ de\ los\ circulos\ \boldsymbol{D_i}$

(Algebra lineal. Stanley, Grossaman)

3. Definición de estabilidad para EDNL.

La estabilidad de un punto de equilibrio x_0 de:

$$x' = f(x)$$

Está determinado por los signos de la parte real de los valores propios de la matriz $J(x_0)$. Un punto de equilibrio x_0 es asintóticamente estable si y solo si: $Re(\lambda_j) < 0; j = 1,2,3, \ldots, n$

(Differential Equations and Dynamical Systems. Perko)

4. Teorema:

Sea x_0 una solución de equilibrio del sistema: $x' = f(x)$. Si todos los valores propios de la matriz $J(x_0)$ tienen parte real negativa, entonces la solucione de equilibrio x_0 es asintóticamente estable.

(Differential Equations and Dynamical Systems. Perko)

- **Metodología.**

Se procede presentar las definiciones y criterios de estabilidad incluidos la definición y el teorema de los círculos de Gershgorin. Para luego utilizarlos en las matrices jacobianas que se obtienen al linealizar un sistema, y de esa manera se plantea y demuestra el criterio de estabilidad basado en los círculos de Gershgorin, para luego aplicarlo a algunos modelos aplicados a la biología, con el objetivo de observar la utilidad del criterio, y relacionar o implicar el nuevo criterio con otros criterios ya dados.

- **Conclusiones.**

Por medio del criterio de estabilidad se determinan condiciones de estabilidad local para las soluciones de equilibrio de sistemas dinámicos. El criterio es muy práctico dado que permite establecer condiciones de estabilidad sin la necesidad de calcular los valores propios de la matriz.

Bibliografía.

Stanley, L. Grossman, S. (2012) *Álgebra Lineal*. Séptima Edición.

Perko, L. (1991). *Differential Equations and Dynamical Systems*. Estados Unidos.

Ibargüen, E. Ceron, M. y Romero, P. (2013). *A simple test for asymptotic stability in some dynamical systems.* Revista de ciencias Universidad del Valle.

Ibargüen, E. Esteva, L. (2016). *Simple mathematical models on macrophages and CTL responses against Mycobacterium tuberculosis.* Revista Sigma Universidad de Nariño.