MÉTODO DE DIRAC APLICADO A SISTEMAS SINGULARES

MERYLIN CRISTINA ORTEGA ORTEGA

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
SAN JUAN DE PASTO
2011

MÉTODO DE DIRAC APLICADO A SISTEMAS SINGULARES

MERYLIN CRISTINA ORTEGA ORTEGA

Trabajo de grado presentado al Departamento de Física como requisito para obtener el grado de Físico

Director:
GERMAN ENRIQUE RAMOS ZAMBRANO
PhD en Física

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
SAN JUAN DE PASTO
2011

Nota de aceptación:

German Enrique Ramos

Director

Yisthbey Giraldo Usuga

Jurado

Alberto Quijano Vodniza

Jurado

San Juan de Pasto, Noviembre 2011

"Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores"

Articulo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

AGRADECIMIENTOS

Ante todo gracias a Dios por permitirme vivir los buenos momentos, difíciles y aún los más tristes que me han dado la madurez y fortaleza para superarme y seguir adelante, por haberme dado sabiduría para culminar mi carrera y no haber dejado que me rinda e iluminarme para salir adelante. Porque todo lo que tengo, lo que puedo y lo que recibo es regalo que él me ha dado.

A mi familia, a mi mamá y a mis tías quien les debo demasiado como para poder expresarlo con palabras, que han estado a mi lado en todo momento, empujándome a mejorar cada día. Gracias por todo su apoyo.

A mi compañero de vida, Danny, quien le ha dado sentido a todo lo que hago, que ha estado conmigo apoyándome siempre para realizar este trabajo y durante bastante tiempo tuvo la paciencia suficiente para apoyarme, darme su comprensión cariño, entrega y su amor, además está junto a mi cuando mas lo necesito.

A mi asesor, German Ramos, por la gran oportunidad que me dio al aceptar dirigirme en esta tesis y compartir conmigo sus conocimientos, su tiempo, su apoyo, por la disponibilidad de entregar su ayuda en todo momento que la necesite, lo cual ha sido un aporte invaluable no solo en el desarrollo de esta tesis sino en mi formación como físico y por tenerme esa gran paciencia durante todo el tiempo de este trabajo.

Quiero agradecer a todos mis amigos que hicieron de ésta carrera una gran experiencia de aprendizaje, a los profesores, que comparten desinteresadamente su conocimiento y al departamento de física por su labor en la formación académica.

Y a todas aquellas personas que de otra forma colaboraron o participaron en la realización de este trabajo, que me han aceptado, enseñado y han hecho lo que soy.

DEDICATORIA

Este trabajo está dedicado a la memoria de mi abuelito Gilberto Ortega (Q.E.P.D), aunque ya no estas a mi lado, te sigo queriendo. Gracias por haber compartido parte de tu vida a mi lado, por tus cuidados y por la alegría que me diste de tener un padre...en el cielo en donde estas recibe este homenaje para ti. En todo momento te llevo conmigo.

RESUMEN

Este trabajo está dedicado a estudiar la mecánica clásica de sistemas singulares desarrollada inicialmente por Dirac. Además se propone resolver algunos problemas con un número finito de grados de libertad como: Toy Model, el Rotor Rígido, el modelo de Christ - Lee que nos permitan tener una mejor comprensión de los vínculos de primera y segunda clase.

ABSTRACT

This work is dedicated to studying the classic mechanics of singular systems developed initially by Dirac. In addition, it propooses to solve some problems with a finite number of degrees of freedom like: Toy Model, rigid rotor and model of Christ - Lee, which allow us to have a better comprehension of the first and second class constrains.

Tabla de Contenido

GLOSARIO

ESPACIO DE CONFIGURACION: Es el espacio definido por las coordenadas y las velocidades.

ESPACIO DE FASE: Está definido por las coordenadas y los momentos.

MATRIZ HESSIANA: Se denomina así a la matriz cuadrada n x n de segundas derivadas parciales de una función f de n variables.

SISTEMAS SINGULARES: Sistemas en los cuales el determinante de la matriz Hessiana es igual a cero, de lo contrario se llama sistema regular.

VINCULOS: Es un tipo de ligadura que surge del Lagrangiano que describe el sistema. Puede ser primario, cuando surge de la definición de momentos canónicos y secundario aparece después de hacer uso de las ecuaciones de movimiento. Además se pueden clasificar en: primera clase cuando tienen corchete de Poisson débilmente cero con todos los vínculos o de lo contrario son llamados de segunda clase.

HAMILTONIANO PRIMARIO: Resulta de adicionar al Hamiltoniano ya conocido, una combinación líneal de los vínculos primarios.

HAMILTONIANO EXTENDIDO: Determina la dinámica del sistema teniendo en cuenta la completa libertad de Gauge, ya que tiene en cuenta todos los vínculos de primera clase, primarios y secundarios.

RANGO DE UNA MATRIZ: El rango de una matriz es el número máximo de columnas linealmente independientes.

IGUALDAD DEBIL: Es el símbolo introducido por Dirac para denotar los vínculos y significa que el corchete de Poisson de los vínculos con alguna variable dinàmica puede ser diferente de cero.

CONDICIONES DE CONSISTENCIA: Imponerlas significa que las derivadas temporales de los vínculos deben anularse.

ITERATIVIDAD: Es una propiedad de los corchetes de Dirac en la cual podemos tomar un subconjunto de vínculos para evaluar estos paréntesis y continuar el proceso de manera que obtenemos el mismo resultado que hacerlo en un sólo paso.

TRANSFORMACION DE GAUGE: Son transformaciones de las variables dinámicas que conectan puntos que corresponden al mismo estado físico. Son generadas por los vínculos de primera clase.

CONDICIONES DE GAUGE: Es la condición impuesta a los vínculos de primera clase para convertirlos en vínculos de segunda clase.

1. INTRODUCCIÓN

La mecánica analítica es una área de la física que estudia el movimiento de los cuerpos, sus causas y pretende interpretar fenómenos físicos observados experimentalmente, además, comprende una serie de métodos cuya característica principal es el tratamiento puramente abstracto, analítico de los sistemas mecánicos. De ésta forma, se separan las consideraciones físicas y geométricas necesarias para definir el movimiento de las consideraciones matemáticas para plantear y solucionar las ecuaciones que describen el sistema.[1] Las primeras son necesarias para formular las coordenadas, enlaces y magnitudes cinéticas de un sistema dado; una vez realizada la definición de un sistema mediante la adecuada selección de las magnitudes anteriores, los métodos de la mecánica analítica permiten obtener las ecuaciones de la dinámica (o las ecuaciones de la estática en su caso) de forma casi automática.

El iniciador de estas técnicas fue Joseph Louis Lagrange, a partir de la publicación de su obra Mécanique Analytique en 1978. Lagrange introdujo numerosos conceptos empleados hoy en día en la mecánica y en las matemáticas, formuló ecuaciones que llevan su nombre, colocó sobre bases sólidas el cálculo de variaciones, fue el inventor de las palabras derivada y potencial, etc.

Otra figura clave en la mecánica analítica fue Wiliam Rowan Hamilton, ya en el siglo XIX (1805-1865). En su obra buscó una gran generalidad desarrollando una teoría por la que el movimiento se puede reducir a la búsqueda y diferenciación de una sóla función (la integral de acción S). El punto de vista de Hamilton resultó muy fértil, siendo básico para otros campos de la mecánica cuántica, desarrollada posteriormente en el siglo XX.[2]

Un planteamiento básico de la mecánica analítica es la descripción del movimiento de las partículas en un sistema mecánico mediante coordenadas generalizadas, ya

[1] J.M. Goicolea,Curso de Mecánica, Vol. I. Universidad Politécnica de Madrid, 2001. sec 1.10
[2] Ibid,

que en muchos casos los vectores posición no son los más convenientes, ésto quiere decir mediante un conjunto cualquiera de coordenadas $\{q_i, \quad i = 1, 2, ..n\}$, que sirven para determinar en forma completa el estado de un sistema mecánico, lo cual significa dar las posiciones (en un instante dado) de todas las partículas dotadas de masa que la conforman. Expresado en ecuaciones, para cada partícula i $(1 \leq i \leq N)$ donde N es el número total de partículas, podremos expresar su vector posición como una función $x_i(q^1, q^2, ...q^{3N})$. Al evolucionar el sistema en el tiempo, las coordenadas generalizadas describen trayectorias $q^k\,(t)$ en el espacio de configuración por lo que podemos definir las velocidades genralizadas $\dot{q}^k$. Las ecuaciones dinámicas que se deducirán permiten la determinación (al menos en principio) de las trayectorias q^k e involucran funciones que dependen de las coordenadas, velocidades generalizadas y el tiempo.[3]

En la mecánica clásica existen dos tipos de ligaduras: las ligaduras mecánicas[4] y las que surgen del Lagrangiano que describe el sistema[5] también llamadas vínculos las cuales serán objeto de nuestro estudio.

Aproximadamente en el año 1950, los trabajos de investigación sobre sistemas con vínculos que poseen un número finito de grados de libertad fué desarrollado por Dirac.[6] Posteriormente, P.G. Bergmann y sus colaboradores intentan aclarar la conexión entre los vínculos y las propiedades de invarianza de una teoría. Aunque de éstos trabajos se abrieron las puertas para la cuantización canónica, los métodos eran difíciles de aplicar a teorías de interés físico. Ya en los años sesenta, los vínculos se incorporaron en la cuantización por medio de integrales de camino de Feynman.

Los sistemas con vínculos son sumamente frecuentes en física. Teorías como el electromagnetismo de Maxwell, la gravitación de Einstein y numerosos sistemas

[3]F. Minotti, Apuntes de Mecánica Clásica, 2009.Pág 11

[4]H. Goldstein, Mecanica Clásica, Aguilar, Madrid, 1950. sec 1.3

[5]K. Sundermeyer, Constrained Dynamics, Vol. 169, Springer, New York, 1982. Pág 46,2

[6]P. A. M. Dirac,Lectures in Quantum Mechanics, Benjamin, New York, 1964.Pág 7

mecánicos invariantes ante transfomaciones de Lorentz poseen vínculos que invalidan la aplicación directa del formalismo canónico clásico. Es importante poseer una formulación Hamiltoniana apropiada para sistemas con vínculos si se desea desarrollar un procedimiento válido de cuantización canónica.[7]

A continuación se propone introducir un tratamiento clásico de sistemas descritos por Lagrangianos singulares, es decir, sistemas en los cuales el determinante de la matriz Hessiana es igual a cero,empleando el método de Dirac de la siguiente manera. En el capítulo I se realiza una descripción de la formulación Lagrangiana y Hamiltoniana teniendo en cuenta la presencia de vínculos. El estudio de los vínculos de segunda clase será descrito en el capítulo II y los vínculos de primera clase en el capítulo III. Por último, en el capítulo IV, se da a conocer las conclusiones obtenidas de este trabajo.

[7]Opcit,

2. OBJETIVOS

2.1. Objetivo General

Realizar un estudio del método de Dirac para sistemas singulares con un número finito de grados de libertad aplicado a teorías que poseen vínculos de primera y segunda clase.

2.2. Objetivos Específicos

- Solución de un "Toy Model"para entender la estructura de vínculos de segunda clase.
- Estudio del problema del rotor rigido".
- Análisis del modelo de Christ -Lee y determinación de la estructura de vínculos de primera clase.

3. FORMULACIÓN LAGRANGIANA Y HAMILTONIANA

Consideremos un sistema con N grados de libertad descrito por las coordenadas y las velocidades, variables que describen un espacio de configuración. El estado del sistema está caracterizado por los valores de estas variables, es decir, por un punto en el espacio de configuración. La dinámica está descrita por la acción S dada por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q^i, \dot{q}^i\right) dt, \tag{1}$$

donde L es el Lagrangiano del sistema. El principio variacional establece que las trayectorias del sistema son aquellas que minimizan la acción.[8] Para determinar éstas trayectorias debemos calcular $\delta S = 0$, lo cual conduce a,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i\right] dt = 0, \tag{2}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\right] \delta q^i dt = 0, \tag{3}$$

donde se ha integrado por partes el segundo término de la ecuación (2). Teniendo en cuenta que las variaciones de los δq^i en los puntos inicial y final de las trayectorias son iguales a cero y que estos son linealmente independientes, finalmente se obtiene:

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0 \qquad i = 1, 2, ...N, \tag{4}$$

llamadas ecuaciones de *Euler Lagrange*. La motivación principal para desarrollar el formalismo Hamiltoniano es reescribir las ecuaciones de Euler Lagrange, de segundo orden, en una manera que involucra sólo derivadas de primer orden. El punto de partida de éste formalismo es la introducción de los momentos canónicos a través de

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \qquad i = 1, 2, ...N, \tag{5}$$

[8] Opcit,

en términos de los momentos p_i las ecuaciones de Euler Lagrange se reescriben como

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q^i} = \dot{p}_i\left(q, p\right). \tag{6}$$

Las ecuaciones (5) y (6) son un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden para q, p y por lo tanto hemos logrado nuestro propósito inicial.[9]

Nuestra siguiente tarea es obtener una descripción variacional de las ecuaciones anteriores. Esto se puede conseguir con la introducción del Hamiltoniano canónico H_c definido por

$$H_c = \dot{q}^i p_i - L, \tag{7}$$

el cual es función de (q, p). Para verificar ésto, consideremos la forma diferencial de ésta relación:

$$dH_c = d\dot{q}^i p_i + \dot{q}^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i \tag{8}$$

Utilizando las definiciones (5) y (6) la relación anterior se reduce a:

$$dH_c = \dot{q}^i dp_i - \dot{p}^i dq^i, \tag{9}$$

lo cual garantiza que el Hamiltoniano sea una función de las coordenadas y los momentos canónicos.[10] Por lo tanto podemos concluir que q y p son las variables dinámicas fundamentales de la teoría Hamiltoniana y definen un espacio de fase. Al calcular el diferencial dH_c e igualar con la ecuación (9) se puede deducir

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H_c}{\partial p_i} \qquad\qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_c}{\partial q^i}, \tag{10}$$

llamadas *ecuaciones de Hamilton* las cuales son equivalentes con las ecuaciones de Euler - Lagrange (4).

Ahora, la transición de la formulación Lagrangiana a la Hamiltoniana se basa en el hecho de que es necesario expresar las velocidades $\dot{q}$ en función de las coordenadas

[9] Opcit,

[10] Opcit,

q y los momentos p, para esto la Lagrangiana del sistema debe ser regular, es decir, la matriz Hessiana con determinante distinto de cero

$$W \equiv \det W_{ij} = \det \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \dot{q}^j} \right| \neq 0. \tag{11}$$

Si la Lagrangiana que describe el sistema es singular, ocurre que

$$W = \det W_{ij} = 0. \tag{12}$$

A nivel Lagrangiano esto significa que no es posible despejar todas las aceleraciones a partir de las ecuaciones de Euler Lagrange para lo cual es necesario que el determinante de la matriz Hessiana sea diferente de cero. Desde el punto de vista Hamiltoniano, las ecuaciones que definen los momentos canónicos no pueden ser resueltas para expresar todas las velocidades en términos de las coordenadas y los momentos.[11] Este carácter singular o regular es una característica propia del Lagrangiano. Sea N la dimensión del espacio de fase y R el rango de la matriz, entonces habrán R velocidades que pueden expresarse en función de q,p y $(M = N - R)$ velocidades restantes indeterminadas de la forma:

$$\phi_a(q,p) = 0 \qquad\qquad a = 1, 2, ...M, \tag{13}$$

denominadas *vínculos primarios* porque se obtienen directamente de la definición (5), sin hacer uso de las ecuaciones de movimiento. Los vínculos restringen la dinámica del sistema a un sub-espacio Σ' de dimensión $(2N-M)$ del espacio de fase original Σ de dimensión $2N$.

Al desarrollar la formulación Hamiltoniana para sistemas con vínculos se consideran ecuaciones equivalentes de Lagrange y Hamilton, para lo cual se debe elaborar un mecanismo para obtener unas ecuaciones que incorporen la información de los

[11] Opcit,

vínculos. Escribiremos el principio variacional en términos del H_c como [12]

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \dot{q}^i - H_c\right) dt = 0. \tag{14}$$

Aquí, el Hamiltoniano canónico está definido como en (7) y depende sólo de las variables q y p, lo cual significa que las velocidades que no se pueden despejar no aparecen en H_c.[13] Al estudiar un sistema con vínculos, los problemas se pueden tratar a través del uso de multiplicadores de Lagrange, para lo cual basta considerar la variación de la acción definida por

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \dot{q}^i - H_c - \lambda^a \phi_a\right) dt \tag{15}$$

donde λ^a son los multiplicadores de Lagrange. Por analogía con la ecuación (14) Dirac sugirió que la nueva dinámica del sistema será completamente determinada por el Hamiltoniano primario H_p definido por:

$$H_p = H_c + \lambda^a \phi_a, \tag{16}$$

el cual resulta de adicionar al H_c una combinación lineal de los vínculos primarios. Con éste nuevo Hamiltoniano reescribimos la ecuación (15) de la siguiente manera

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \dot{q}^i - H_p\right) dt. \tag{17}$$

La variación de la ecuación (17) se obtiene considerando variaciones independientes de las q's, p's y λ's

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i} - \lambda^a \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}^i + \frac{\partial H_c}{\partial q^i} + \lambda^a \frac{\partial \phi_a}{\partial q^i} \right) \delta q_i - \phi_a \delta \lambda^a \right] dt = 0, \tag{18}$$

[12]Opcit,

[13]Opcit,

por lo tanto, las ecuaciones de movimiento que surgen son

$$\begin{aligned}\dot{q}^i &= \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda^a \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i}, \\ \dot{p}^i &= -\frac{\partial H_c}{\partial q^i} - \lambda^a \frac{\partial \phi_a}{\partial q^i},\end{aligned} \tag{19}$$

y

$$\phi_a = 0. \tag{20}$$

Estas nuevas ecuaciones de Hamilton deberán ser equivalentes a las ecuaciones de Euler Lagrange lo cual se debe demostrar para cada caso particular.[14]

Como lo mencionamos anteriormente las variables fundamentales del formalismo Hamiltoniano son q y p. Por lo tanto, cualquier función relevante que no dependa explícitamente del tiempo, deberá estar escrita en término de estas variables, es decir $F = F(q, p)$. La evolución temporal de esta cantidad está determinada por su derivada con respecto a t

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i, \tag{21}$$

utilizando las ecuaciones de Hamilton (19), la anterior relación se puede escribir

$$\dot{F} = \{F, H_c\} + \lambda^a \{F, \phi_a\}, \tag{22}$$

donde hemos empleado el *paréntesis de Poisson* definido para dos variables dinámicas F y G en el espacio de fase como:

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q^i}\frac{\partial F}{\partial p_i}. \tag{23}$$

Estos corchetes tienen significado sólo para variables F y G que son expresadas en términos de las coordenadas y los momentos ya que los coeficientes λ^a no son generalmente funciones de las coordenadas del espacio de fase, por lo tanto los corchetes de Poisson con estas cantidades no necesariamente están bien definidos.

El Hamiltoniano canónico no está determinado en forma única en todo el espacio de

[14]Opcit,

fase dado que se le puede sumar cualquier combinación lineal de los vínculos, que es cero sobre $\Sigma\prime$. Por lo tanto, éste Hamiltoniano está bien definido sólo sobre el sub-espacio $\Sigma\prime$ definido por los vínculos y se puede extender fuera de éste sub-espacio; es decir, a pesar que la dinámica tiene lugar sobre la superficie $\Sigma\prime$, ésta dinámica recibe contribuciones de su vecindad, entonces sería incorrecto colocar los vínculos iguales a cero desde un principio ya que éstos se anulan en $\Sigma\prime$ pero no en su vecindad.[15] Este hecho se expresa escribiendo

$$\phi_a \approx 0, \tag{24}$$

donde $\approx$ es el símbolo de igualdad débil introducido por Dirac y que en adelante utilizaremos para identificar los vínculos, diferente del símbolo de igualdad fuerte $=$, válido sobre Σ(superficie sin vínculos). De ésta manera podría ocurrir que los vínculos puedan tener paréntesis de Poisson no nulos con las variables canónicas. En consecuencia las igualdades débiles llegan a ser igualdades fuertes sólo después que se han evaluado todos los paréntesis de Poisson.

Finalmente podemos escribir las ecuaciones de movimiento restringida a la superficie de los vínculos como:

$$\dot{F} \approx \{F, H_p\} \tag{25}$$

donde H_p es el Hamiltoniano primario.

3.1. Lagrangiano de Guler

Consideremos el siguiente Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 - \frac{1}{4}\left(\dot{q}_2 - \dot{q}_3\right)^2 \tag{26}$$

cuyos momentos están dados por:

$$p_1 = \dot{q}_1 \qquad p_2 = -\frac{1}{2}\left(\dot{q}_2 - \dot{q}_3\right) \qquad p_3 = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_2 - \dot{q}_3\right), \tag{27}$$

[15] Opcit,

por lo tanto, hay un vínculo que relaciona los momentos p_2 y p_3:

$$p_2 + p_3 = 0. \tag{28}$$

De manera más general, existe otro método para obtener el vínculo a partir de la matriz Hessiana teniendo en cuenta la siguiente ecuación:

$$W_{ji}\dot{q}_i = p_j, \tag{29}$$

al reemplazar los valores de la matriz Hessiana, las velocidades y los momentos, la ecuación anterior nos queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \tag{30}$$

Haciendo uso del rango R de la matriz Hessiana W_{ij}, se puede obtener el número de vínculos ϕ, que es igual a $(N - R)$ donde N es la dimensión de W_{ij}. Para nuestro ejemplo, $R = 2$ y $N = 3$ entonces hay un vínculo. Realizando operaciones elementales sobre las filas de la ecuación(30): $1 * (fila2) + 1 * (fila3)$ se llega al siguiente resultado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_2 + p_3 \end{pmatrix} \tag{31}$$

De la fila de ceros en (31), se obtiene el vínculo:

$$p_2 + p_3 = 0 \tag{32}$$

la cual coincide con (3).

3.2. Condiciones de Consistencia

La exigencia que los vínculos primarios se mantengan durante la evolución temporal del sistema, es decir, que sus derivadas temporales sean (débilmente) cero resulta en la siguiente relación:

$$\dot{\phi}_m (q,p) = \{\phi_m, Hp\} = \{\phi_m, H_c\} + \lambda^n \{\phi_m, \phi_n\} \approx 0. \tag{33}$$

conocida como *condición de consistencia* de los vínculos y que conduce a tres posibles casos.

- Una clase de ecuación se reduce a $0 \approx 0$, es decir, se satisface en $\Sigma\prime$.
- En segundo lugar, se podría obtener una ecuación independiente de los multiplicadores de Lagrage λ^n y que relacione las coordenadas del espacio de fase. Estas ecuaciones constituyen un conjunto de nuevos vínculos llamados *vínculos secundarios* los cuales a diferencia de los vínculos primarios surgen después de hacer uso de las ecuaciones de movimiento y se representan así:

  $$\chi_s (q,p) \approx 0 \qquad\qquad s = 1, 2, ...S. \tag{34}$$

  Donde S es el número total de vínculos secundarios.
- Por último, la ecuación de consistencia puede imponer condiciones sobre los multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos. Estas ecuaciones serían de la forma:

  $$\{\phi_j, H_c\} + \lambda^a \{\phi_j, \phi_a\} \approx 0 \qquad a = 1, 2..M \qquad j = 1, 2..J. \tag{35}$$

donde J es el número total de vínculos. Dirac conjeturó que éstos vínculos deben tratarse de la misma manera que los vínculos primarios. Por lo tanto, su condición de consistencia debe ser analizada nuevamente y estudiar a qué caso de los tres mencionados pertenece. Es posible que aparezcan nuevos vínculos y el procedimiento debe repetirse hasta agotar todas las condiciones de consistencia. Ahora todos los vínculos, primarios, secundarios o de una generación posterior, aparecen al mismo nivel y al final tendremos un total de S vínculos secundarios denotados por

$$\psi_r (q,p) \approx 0 \qquad\qquad r = M+1, M+2, ...M+S, \tag{36}$$

que serán escritos como igualdades débiles de la misma manera que los vínculos primarios. El conjunto de todos los vínculos primarios y secundarios pueden ser escritos de la siguiente manera

$$\varphi_j(q,p) \approx 0 \qquad\qquad j = 1, 2, ...M + S = J, \tag{37}$$

con M los vínculos primarios y S todos los posibles vínculos secundarios.

3.3. Vínculos de Primera y Segunda Clase

Además de la clasificación en vínculos primarios y secundarios, existe una que es mucho más importante, en vínculos de primera y segunda clase. Se define una función $F(q,p)$ o vínculo $\Psi_\alpha\ (q,p)$ en el espacio de fase como de *primera clase* si tiene paréntesis de Poisson débilmente cero con todos los vínculos de la teoría y consigo mismo, es decir,

$$\{\Psi_\alpha\, , \phi_a\} \approx 0, \tag{38}$$

en caso contrario se denomina de *segunda clase* $\Theta_\beta(q,p)$. Toda cantidad que se anula débilmente es fuertemente igual a una combinación lineal de los vínculos,[16] por lo tanto, si F es una función de primera clase, entonces satisface la siguiente igualdad fuerte

$$\{F, \phi_a\} = f_a^b \phi_b. \tag{39}$$

Alguna combinación lineal de los ϕ's es otro vínculo. Calculemos la evolución de una variable dinámica g con el fin de analizar el papel de los vínculos primarios de primera clase ϕ_a. Si g no depende explicitamente del tiempo, su evolución temporal estará determinada por:

$$\dot{g} = \{g, H_c\} + v^a \{g, \phi_a\}\,, \tag{40}$$

la arbitrariedad en la elección de v^a hace que la evolución temporal de g no quede totalmente determinada, para una misma condición inicial $g(t_o) = g_o$. En un instante

[16] Opcit,

t posterior a t_o, g puede tomar diversos valores según la elección que se haga de los coeficientes v^a. Hallemos el valor de g en un intervalo de tiempo pequeño δt posterior a t_o.

$$\begin{aligned} g(\delta t) &= g_0 + \dot{g}\delta t = g_0 + \{g, H_p\}\,\delta t \\ &= g_0 + [\{g, H_c\} + v^a\,\{g, \Psi_\alpha\,\}]\,\delta t \end{aligned} \tag{41}$$

dado que los coeficientes v^a son completamente arbitrarios, es posible elegir para éste diferentes valores y obtener valores diferentes para $g(t)$ cuya diferencia es de la forma:

$$\Delta g = \{g, \Psi_\alpha\,\}\,\epsilon^i \tag{42}$$

donde $\epsilon^i = (v - v')\,\delta t$ es un número arbitrariamente pequeño. Ambos valores de la variable deben corresponder al mismo estado físico ya que éste no puede depender de la elección de los coeficientes. Puesto que la transformación generada por la función $\epsilon^i\Psi_\alpha$ relaciona descripciones equivalentes de un mismo estado físico, llegamos a la conclusión que los vínculos primarios de primera clase generan transformaciones de las variables dinámicas ya que conectan puntos de una misma clase de equivalencia, las cuales se conocen como *transformaciones gauge*. Los vínculos Ψ_α no son los únicos generadores de transformaciones de equivalencia ya que puede demostrarse que los vínculos secundarios de primera clase pueden generar transformaciones de equivalencia que no modifican el estado físico de un sistema. Por tal motivo, Dirac conjeturó ampliar el Hamiltoniano primario de la siguiente manera [17]

$$H_E = H_p + \gamma\Phi_\eta \tag{43}$$

donde γ es el multiplicador de Lagrange asociado a los vínculos secundarios de primera clase. En adelante, (43) llamado Hamiltoniano extendido determinará la dinámica del sistema que tendrá en cuenta la completa libertad de Gauge de la

[17] Opcit,

teoría. Este resultado sugiere que las ecuaciones de movimiento se pueden generalizar para permitir no sólo contribuciones dadas por los vínculos de primera clase primarios sino también por los secundarios. En general, éstas ecuaciones, no siempre son equivalentes a las ecuaciones de Lagrange correspondientes. Este hecho condujo a varios autores a definir el Hamiltoniano primario (16) como el generador correcto de la evolución temporal para los sistemas con vínculos. Sin embargo, esto es incorrecto, ya que se puede mostrar que la conjetura de Dirac es cierta para sistemas que sólo poseen vínculos de primera clase.[18] H_p y H_E generan las mismas ecuaciones de movimiento, es decir, los dos Hamiltonianos dan origen a la misma dinámica.

La presencia vínculos en la teoría implica la existencia de coordenadas que no son independientes y pueden ser eliminadas expresándolas en términos de las coordenadas independientes. Los vínculos de segunda clase son eliminados redefiniendo los corchetes de Poisson e introduciendo un nuevo conjunto de paréntesis que actúen sobre los grados de libertad de la teoría llamados *paréntesis de Dirac*, que para dos variables dinámicas en el espacio de fase se definen:

$$\{F,G\}_D = \{F,G\} - \{F,\Theta_i\}\,\Delta^{ij}\,\{\Theta_j,G\} \tag{44}$$

donde Δ_{ij} es la matriz de paréntesis de Poisson construida con vínculos de segunda clase y por definición es una matriz regular cuya inversa es Δ^{ij}. Al ser una matriz anti-simétrica su rango es un número par $2L$.

Ahora, bajo la definición de los paréntesis de Dirac todos los vínculos de segunda clase de la teoría son fuertemente nulos lo cual reduce el número de variables independientes ya que se cumple la propiedad [19]

$$\{F,\Theta_i\}_D = 0, \tag{45}$$

por lo tanto, las igualdades débiles $\approx$ son ahora igualdades fuertes.

[18] Opcit,

[19] Opcit,

Todas las ecuaciones de la teoría se formulan en términos del paréntesis de Dirac, por lo tanto se puede escribir las ecuaciones de movimiento en términos éstos

$$\dot{g}\left(q,p\right) \approx \left\{g, H_p\right\}_D \tag{46}$$

igualdad que aún escribimos con el símbolo $\approx$ ya que están incluidos los vínculos de primera clase.

Hemos logrado escribir la dinámica de un sistema con vínculos de una manera Hamiltoniana, sólo que esta vez, en lugar del paréntesis de Poisson hemos usado el paréntesis de Dirac. Este último, posee todas las propiedades del paréntesis de Poisson y una propiedad importante que es su iteratividad, es decir, si el número de vínculos es demasiado grande, se toma un conjunto más pequeño de vínculos de segunda clase y se evalua el paréntesis de Dirac. Iterando este procedimiento hasta colocar todos los vínculos de segunda clase iguales fuertemente a cero, obtendremos el mismo resultado que evaluar el paréntesis de Dirac en un único paso.

El siguiente problema que debemos considerar es qué hacer con los multiplicadores de Lagrange indeterminados asociados con los vínculos de primera clase. Para ésto se deben transformar los vínculos de primera clase en vínculos de segunda clase, introduciendo condiciones adicionales de forma arbitraria llamadas *Condiciones de Gauge* y que se comportan como nuevos vínculos, de tal manera que el conjunto completo de vínculos junto con las condiciones de Gauge sean sólo vínculos de segunda clase los cuales pueden ser eliminados introduciendo paréntesis de Dirac definidos entre ellos. No hay una manera única de determinarlas aunque las ecuaciones de movimiento nos pueden inducir para su escogencia. El número de condiciones de Gauge impuestas debe ser igual al número de vínculos de primera clase y el paréntesis de Poisson con los vínculos de primera clase debe ser no nulo, así que el determinante de la matriz construida entre las condiciones de Gauge y los vínculos de primera clase es diferente de cero, condición que expresa que el conjunto de vínculos es de segunda clase. Finalmente, el número de grados de libertad de la teoría se puede calcular a través de la siguiente ecuación:[20]

$$K = 2N - 2L - 2R \tag{47}$$

donde $2N$ es el número total de variables canónicas, $2L$ y $2R$ el número de vínculos de segunda clase y primera clase respectivamente.

[20] Opcit,

4. VÍNCULOS DE SEGUNDA CLASE

4.1. Problema Modelo

En éste capítulo se estudiará el ejemplo de un sistema bidimensional descrito por el siguiente Lagrangiano:

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + q_2\dot{q}_1 + (1-\alpha)\ q_1\dot{q}_2 + \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2 \tag{48}$$

donde α y β son constantes arbitrarias cuyos valores nos conducirán a situaciones diferentes. Para este sistema hay dos ecuaciones de movimiento que se obtienen a partir de las ecuaciones de Euler - Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = \ddot{q}_1 + \alpha\dot{q}_2 + \beta\ (q_2 - q_1) = 0 \tag{49}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = -\alpha\dot{q}_1 + \beta(q_1 - q_2) = 0 \tag{50}$$

a diferencia de la ecuación (49), la expresión (50) no es una ecuación de movimiento puesto que no posee el término correspondiente a la aceleración, por lo tanto se la identifica como un vínculo Lagrangiano.[21] Por otro lado, para pasar del formalismo Lagrangiano al Hamiltoniano, primero necesitamos encontrar los momentos canónicos, los cuales están definidos por:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 + q_2, \tag{51}$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = (1-\alpha)\ q_1. \tag{52}$$

Con ellos, podemos calcular la matriz Hessiana para el sistema, que tendrá la forma,

$$W_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{53}$$

[21] Opcit,

y cuyo resultado es independiente del valor particular de α y β, así que para cualquier valor de éstas constantes, estaremos tratando con un Lagrangiano singular, es decir, existe una relación que es consecuencia directa de la ecuación (52) llamada vínculo primario:

$$\phi_1 = p_2 - (1-\alpha)q_1 \approx 0. \tag{54}$$

Definimos el Hamiltoniano canónico H_c asociado al sistema de la siguiente manera:

$$Hc = \dot{q}_i p_i - L \qquad\qquad i = 1, 2, \tag{55}$$

utilizando las ecuaciones (48), (51) y (52); la anterior relación puede ser escrita así

$$Hc = [p_2 - (1-\alpha)q_1]\,\dot{q}_2 + \frac{1}{2}(p_1 - q_2)^2 - \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2), \tag{56}$$

donde el primer término que corresponde al vínculo primario, es una igualdad débil, por lo tanto:

$$Hc \approx \frac{1}{2}(p_1 - q_2)^2 - \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2). \tag{57}$$

Sin embargo, debido a la existencia del vínculo (54), la dinámica del sistema es ahora determinada por el Hamiltoniano primario definido a continuación:[22]

$$Hp = Hc + u\phi_1 = \frac{1}{2}(p_1 - q_2)^2 - \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2) + u\,[p_2 - (1-\alpha)q_1]\,, \tag{58}$$

en el cual u es el multiplicador de Lagrange asociado al vínculo primario. Aquí, H_p es necesario para analizar la consistencia del vínculo, es decir, exigir que $\dot{\phi}_1 \approx 0$ en todo momento, para esto debemos asumir que las coordenadas que definen el espacio de fase en el problema considerado satisfacen los siguientes corchetes de Poisson fundamentales:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \qquad \{q_i, q_j\} = 0 \qquad \{p_i, p_j\} = 0, \tag{59}$$

teniendo en cuenta esto, se obtiene

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi_1, Hp\} = \alpha(p_1 - q_2) - \beta(q_1 - q_2) \approx 0. \tag{60}$$

[22] Opcit,

De acuerdo al formalismo de Dirac, ésta ecuación es un vínculo secundario, puesto que expresa una relación entre las coordenadas del espacio de fase:

$$\phi_2 = \alpha(p_1 - q_2) - \beta(q_1 - q_2) \approx 0. \tag{61}$$

Siguiendo los procedimientos estándar, requerimos determinar la consistencia de éste nuevo vínculo, lo cual da lugar a

$$\dot{\phi}_2 = \{\phi_2, Hp\} = \alpha\beta(q_1 - q_2) - \beta(p_1 - q_2) + u(\beta - \alpha^2) \approx 0, \tag{62}$$

expresión que determina una relación entre las variables del espacio de fase y el multiplicador de Lagrange, lo cual asegura que nuevos vínculos secundarios no sean generados.

Habiendo determinado el conjunto de vínculos del sistema procedemos a clasificarlos en vínculos de primera y segunda clase, para ésto calculamos los corchetes de Poisson entre ellos:

$$\{\phi_1, \phi_1\} = 0 \tag{63}$$

$$\{\phi_1, \phi_2\} = \alpha^2 - \beta \tag{64}$$

$$\{\phi_2, \phi_2\} = 0. \tag{65}$$

Puesto que al menos uno de éstos resulta ser diferente de cero, esto garantiza que ϕ_1 y ϕ_2 son vínculos de segunda clase. Con el objetivo de probar la consistencia entre la dinámica Lagrangiana y Hamiltoniana, calculamos las ecuaciones de movimiento en el formalismo Hamiltoniano a partir de los paréntesis de Poisson entre las variables dinámicas y el Hamiltoniano primario haciendo uso de la definición de momentos canónicos (52):

$$\dot{q}_1 = \{q_1, Hp\} = p_1 - q_2 \tag{66}$$

$$\dot{q}_2 = \{q_2, Hp\} = u \tag{67}$$

$$\dot{p}_1 = \{p_1, Hp\} = \beta\,(q_1 - q_2) + u(1 - \alpha) \tag{68}$$

$$\dot{p}_2 = \{p_2, Hp\} = (p_1 - q_2) - \beta\,(q_1 - q_2)\,, \tag{69}$$

las cuales conducen a las ecuaciones de Lagrange de la siguiente forma:

$$\ddot{q}_1 = \dot{p}_1 - \dot{q}_2 = \beta\,(q_1 - q_2) - u\alpha \tag{70}$$

$$\ddot{q}_1 + \beta\,(q_2 - q_1) + \alpha\dot{q}_2 = 0. \tag{71}$$

De manera similar, obtenemos la segunda ecuación de Lagrange

$$\dot{p}_2 = (1 - \alpha)\,\dot{q}_1 \tag{72}$$

$$(p_1 - q_2) - \beta\,(q_1 - q_2) = (1 - \alpha)\,(p_1 - q_2) \tag{73}$$

$$-\alpha\dot{q}_1 - \beta\,(q_1 - q_2) = 0. \tag{74}$$

Las ecuaciones de movimiento a nivel Hamiltoniano indican que la dinámica asociada a la coordenada q_2, (67) es completamente indeterminada, por el hecho de que ésta depende del valor del multiplicador de Lagrange u el cual a priori no ha sido definido.

Debido a que las constantes α y β pueden tomar valores arbitrarios estudiaremos cuatro casos particulares en este ejemplo:

4.1.1. $\alpha = \beta = 0$

La Lagrangiana correspondiente es:

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + q_2\dot{q}_1 + q_1\dot{q}_2 \tag{75}$$

utilizando las ecuaciones de Euler - Lagrange (49) y (50) obtenemos $\ddot{q}_1 = 0$, la cual describe que la velocidad generalizada $\dot{q}_1$es constante. De (51) y (52) calculamos los siguientes momentos canónicos

$$p_1 = \dot{q}_1 + q_2 \tag{76}$$

$$p_2 = q_1 \tag{77}$$

y de la ecuación (77) se obtiene el vínculo primario:

$$\phi_1 = p_2 - q_1 \approx 0. \tag{78}$$

Para encontrar la consistencia de éste, necesitamos definir el Hamiltoniano primario que determinará completamente la dinámica del sistema, para el caso particular se escribe

$$Hp = Hc + u\phi_1 = \frac{1}{2}(p_1 - q_2)^2 + u(p_2 - q_1). \tag{79}$$

Al garantizar que $\dot{\phi}_1 \approx 0$ en todo momento, obtenemos:

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi_1, H_p\} = 0, \tag{80}$$

lo anterior nos permite concluir que no hay más vínculos. Ahora, debemos identificar si el vínculo encontrado es de primera o segunda clase, esto se consigue calculando el corchete de Poisson consigo mismo

$$\{\phi_1, \phi_1\} = 0, \tag{81}$$

como el resultado es igual a cero, ϕ_1 es un vínculo de primera clase, de ésta manera no es posible fijar el valor del multiplicador de Lagrange u.

4.1.2. $\alpha = 0; \beta \neq 0$

Teniendo en cuenta estos valores para α y β la Lagrangiana del sistema es:

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + q_2\dot{q}_1 + \ q_1\dot{q}_2 + \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2 \tag{82}$$

para la cual, las respectivas ecuaciones de movimiento son:

$$\ddot{q}_1 - \beta(q_1 - q_2) = 0 \qquad\qquad \beta(q_1 - q_2) = 0, \tag{83}$$

donde se puede observar la presencia de un vínculo Lagrangiano(50). De la definición de momentos canónicos (51) y (52) se determina el siguiente vínculo primario

$$\phi_1 = p_2 - q_1 \approx 0. \tag{84}$$

El Hamiltoniano primario para ésta teoría es dado por:

$$Hp = \frac{1}{2}(p_1 - q_2)^2 - \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2 + u(p_2 - q_1) \tag{85}$$

que me permite determinar la consistencia del vínculo (84)

$$\dot{\phi}_1 = -\beta(q_1 - q_2) \approx 0 \tag{86}$$

obteniendo una condición sobre las variables dinámicas y de acuerdo al método de Dirac, es un vínculo secundario. Teniendo en cuenta que $\beta \neq 0$, definiremos el nuevo vínculo de la siguiente forma:

$$\phi_2 = q_1 - q_2 \approx 0. \tag{87}$$

Procedemos ahora a calcular la condición de consistencia de éste nuevo vínculo

$$\dot{\phi}_2 = (p_1 - q_2) - u = 0, \tag{88}$$

resultando una función que depende de q, p y u, de la cual se puede determinar el multiplicador de Lagrange de tal manera que nuevos vínculos no son generados. El caso en consideración se caracteriza por la existencia de dos vínculos, con el fin de comprobar si son de primera o segunda clase calculamos sus respectivos corchetes de Poisson

$$\{\phi_1, \phi_1\} = 0 \tag{89}$$

$$\{\phi_1, \phi_2\} = 1 \tag{90}$$

$$\{\phi_2, \phi_2\} = 0 \tag{91}$$

de estos resultados se deduce que ϕ_1 y ϕ_2 son vínculos de segunda clase.

4.1.3. $\alpha \neq 0;\ \beta = 0$

La Lagrangiana para esta situación corresponde a:

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + q_2\dot{q}_1 + (1-\alpha)q_1\dot{q}_2 \tag{92}$$

de ésta, se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\ddot{q}_1 + \alpha\dot{q}_2 = 0 \qquad\qquad \alpha\dot{q}_1 = 0, \tag{93}$$

debido a que el Lagrangiano que describe el sistema es singular, el vínculo primario es:

$$\phi_1 = p_2 - (1-\alpha)q_1 \approx 0. \tag{94}$$

Definimos el Hamiltoniano que determina la dinámica del sistema

$$Hp = \frac{1}{2}(p_1 - q_2)^2 + u\left[p_2 - (1-\alpha)q_1\right] \tag{95}$$

a partir del cual encontramos la consistencia del vínculo primario que nos conduce a

$$\dot{\phi}_1 = \alpha(p_1 - q_2) \approx 0 \tag{96}$$

como $\alpha \neq 0$ tenemos un vínculo secundario definido de la siguiente forma

$$\phi_2 = p_1 - q_2, \tag{97}$$

sobre el, imponemos una nueva condición de consistencia

$$\dot{\phi}_2 = -\alpha u \approx 0 \tag{98}$$

de acuerdo a esto $u \approx 0$, así, deducimos que no existen más vínculos.

Clasificamos éstos vínculos en primera y segunda clase

$$\{\phi_1, \phi_1\} = 0 \tag{99}$$

$$\{\phi_1, \phi_2\} = \alpha \tag{100}$$

$$\{\phi_2, \phi_2\} = 0 \tag{101}$$

de los anteriores resultados, se concluye que los vínculos son de segunda clase.

4.1.4. $\beta = \alpha^2$

Para éste valor particular de β la Lagrangiana del sistema es dada por:

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + q_2\dot{q}_1 + (1-\alpha)q_1\dot{q}_2 + \alpha^2(q_1 - q_2)^2, \tag{102}$$

para ella, las ecuaciones de movimiento son:

$$\ddot{q}_1 - \alpha^2(q_1 - q_2) + \alpha\dot{q}_2 = 0 \qquad \alpha\dot{q}_1 - \alpha^2(q_1 - q_2) = 0. \tag{103}$$

El sistema presenta el siguiente vínculo primario:

$$\phi_1 = p_2 - (1-\alpha)q_1 \approx 0 \tag{104}$$

y su consistencia será determinada ahora por el Hamiltoniano primario

$$Hp = \frac{1}{2}(p_1 - q_2)^2 - \frac{\alpha^2}{2}(q_1 - q_2)^2 + u\left[p_2 - (1-\alpha)q_1\right], \tag{105}$$

del cual deducimos que:

$$\dot{\phi}_1 = \alpha(p_1 - q_2) - \alpha^2(q_1 - q_2) \approx 0 \tag{106}$$

para todo α. De acuerdo a esto, se obtiene una relación entre las coordenadas del espacio de fase, así, podemos afirmar que hay un vínculo secundario que definimos a continuación.

$$\phi_2 = (p_1 - q_2) - \alpha(q_1 - q_2). \tag{107}$$

Exigiendo la consistencia de ϕ_2 obtenemos:

$$\dot{\phi}_2 = -\alpha^2\phi_2 \approx 0 \tag{108}$$

y como $\phi_2 \approx 0$, esto implica que no hay más vínculos. Calculando los parentesis de Poisson entre los vínculos obtenidos es posible mostrar que son de primera clase, lo que garantiza que el multiplicador u se mantiene completamente indeterminado.

4.2. Eliminación de los Vínculos de Segunda Clase

Nuestro objetivo ahora es eliminar todos los vínculos de la teoría. Los vínculos de segunda clase podran ser eliminados introduciendo los corchetes de Dirac, mientras que los vínculos de primera clase introduciendo condiciones de Gauge. Esta última situación se analizará en el siguiente capítulo.

4.2.1. Caso $\alpha = 0,\ \beta \neq 0$

El problema se caracteriza por el hecho que cuatro variables en el espacio de fase se suponen inicialmente independientes. Sin embargo, la existencia de los dos vínculos determinan que únicamente dos de ellas lo son, de las ecuaciones (84) y (87) se consideran p_1 y q_1 como grados de libertad. Introducimos los parentesis de Dirac que entre dos variables dinámicas A y B en el espacio de fase se definen de la siguiente manera:

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \sum_{i,j=1}^{m} \{A, \phi_i\} \Delta^{ij} \{\phi_j, B\} \tag{109}$$

donde m es el número total de vínculos de segunda clase y Δ^{ij} es la inversa de la matriz Δ_{ij} construida con ellos. Para el caso particular tendrá la forma

$$\Delta_{ij} = \begin{pmatrix} \{\phi_1, \phi_1\} & \{\phi_1, \phi_2\} \\ \{\phi_2, \phi_1\} & \{\phi_2, \phi_2\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{110}$$

y su respectiva inversa Δ^{ij} es dada por

$$\Delta^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{111}$$

Ahora, calculamos los corchetes de Dirac entre las variables independientes:

$$\{q_1, q_1\}_D = \{q_1, q_1\} - \sum_{i,j=1}^{2} \{q_1, \phi_i\} \Delta^{ij} \{\phi_j, q_1\} \tag{112}$$

reemplazando el valor de los corchetes de Poisson que aparecen en la expresión anterior y expandiendo la sumatoria resulta:

$$\{q_1, q_1\}_D = -\sum_{i=1}^{2} \{q_1, \phi_i\} \left[\Delta^{i1} \{\phi_1, q_1\} + \Delta^{i2} \{\phi_2, q_1\}\right] = 0. \tag{113}$$

De igual manera

$$\begin{aligned} \{q_1, p_1\}_D &= \{q_1, p_1\} - \sum_{i,j=1}^{2} \{q_1, \phi_i\} \Delta^{ij} \{\phi_j, p_1\} \\ &= 1 - \{q_1, \phi_1\} \Delta^{11} + \{q_1, \phi_2\} \Delta^{21} - \end{aligned}$$

$$\{q_1, \phi_1\} \Delta^{12} - \{q_1, \phi_2\} \Delta^{22} = 1. \tag{114}$$

Teniendo en cuenta que los parentesis de Dirac satisfacen las mismas propiedades de los corchetes de Poisson, se tiene que

$$\{p_1, q_1\}_D = -1. \tag{115}$$

Finalmente, el último parentesis de Dirac entre las variables p_1 y p_1 nos conduce a:

$$\begin{aligned} \{p_1, p_1\}_D &= \{p_1, p_1\} - \sum_{i,j=1}^{2} \{p_1, \phi_i\} \Delta^{ij} \{\phi_j, p_1\} \qquad (116) \\ &= \{p_1, \phi_1\} \Delta^{11} + \{p_1, \phi_2\} \Delta^{21} - \{p_1, \phi_1\} \Delta^{12} - \{p_1, \phi_2\} \Delta^{22} = 0 \end{aligned}$$

Concluimos que $\{q_1, p_1\}_D = 1$ es el único paréntesis de Dirac diferente de cero entre los grados de libertad de la teoría.

4.2.2. Caso $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$

Nuevamente de los dos vínculos de segunda clase (94) y (97), se asume que q_1 y q_2 son variables independientes. Antes de calcular los paréntesis de Dirac entre ellas, calculamos la matriz de vínculos

$$\Delta_{ij} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{117}$$

cuya inversa es dada por

$$\Delta^{ij} = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{118}$$

Los corchetes de Dirac se calculan siguiendo un procedimiento análogo al anterior, esto nos permite deducir las siguientes relaciones:

$$\{q_1, q_1\}_D = 0 \tag{119}$$

$$\{q_1, q_2\}_D = \frac{1}{\alpha} \tag{120}$$

$$\{q_2, q_1\}_D = -\frac{1}{\alpha} \tag{121}$$

$$\{q_2, q_2\}_D = 0. \tag{122}$$

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, vemos que la presencia de vínculos modifican completamente la estructura de los corchetes de Poisson (59).

4.3. El Rotor Rígido

Trataremos el problema del rotor rígido como una partícula libre restringida a moverse en una superficie esférica de radio r. En este caso la Lagrangiana que describe el sistema es:[23]

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i - x_4(x_ix_i - r^2) \qquad i = 1,2,3 \tag{123}$$

donde x_4 es un multiplicador de Lagrange, que permite incorporar la ligadura mecánica $x_ix_i - r^2 = 0$ a la dinámica del sistema, así, el problema quedará descrito por el siguiente conjunto de variables x_1,x_2,x_3,x_4. Utilizando las ecuaciones de Euler - Lagrange, las ecuaciones de movimiento del sistema tienen la forma:

$$m\ddot{x}_1 + 2x_4x_1 = 0, \tag{124}$$

$$m\ddot{x}_2 + 2x_4x_2 = 0, \tag{125}$$

[23]N. K. Falck and A. C. Hirshfeld, Eur. J. Phys: Dirac Bracket: the rotator rigid 1983

$$m\ddot{x}_3 + 2x_4x_3 = 0, \tag{126}$$

$$r^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0. \tag{127}$$

El primer paso para el cambio de la formulación Lagrangiana a la Hamiltoniana es encontrar los momentos canónicos:

$$p_u = \frac{\partial L}{\partial x_u} \qquad\qquad u = 1, 2, 3, 4 \tag{128}$$

de donde deducimos que

$$p_i = m\dot{x}_i \qquad\qquad i = 1, 2, 3, \tag{129}$$

$$p_4 = 0 \tag{130}$$

con ellos, la matriz Hessiana asociada al sistema tiene la siguiente forma:

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{131}$$

Puesto que det $W_{ij} = 0$, la Lagrangiana (123) describe una teoría singular. El vínculo primario se obtiene a partir de la ecuación (130) y está dado por:

$$\phi_1 = p_4 \approx 0. \tag{132}$$

Ahora, introducimos el Hamiltoniano primario del sistema, definido así:

$$Hp = Hc + u\phi_1 = \frac{1}{2m}p_ip_i + p_4\dot{x}_4 + x_4(x_i^2 - r^2) + up_4, \tag{133}$$

con el fin de garantizar que el vínculo primario se conserve durante la evolución temporal del sistema, analizamos su consistencia teniendo en cuenta que las variables del espacio de fase (q_u, p_v) satisfacen los siguientes corchetes de Poisson

$$\{q_u, p_v\} = \delta_{uv} \qquad\qquad u, v = 1, 2, 3, 4. \tag{134}$$

De las relaciones (133) y (134) se deduce que:

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi_1, Hp\} = r^2 - x_i x_i \approx 0. \tag{135}$$

Siguiendo el método de Dirac, la ecuación obtenida es un vínculo secundario, ya que expresa una relación entre las coordenadas del espacio de fase

$$\phi_2 \equiv r^2 - x_i x_i \approx 0, \tag{136}$$

exigiendo que $\dot{\phi}_2 \approx 0$ se determina

$$\dot{\phi}_2 = -\frac{2}{m} p_i x_i \approx 0, \tag{137}$$

obteniendo un nuevo vínculo,

$$\phi_3 = p_i x_i \approx 0; \tag{138}$$

al calcular su consistencia se observa que

$$\dot{\phi}_3 = \frac{1}{m}(p_i p_i - 2m x_4 x_i x_i) \approx 0, \tag{139}$$

resultando una función que depende de las variables del espacio de fase, así concluimos que se genera un nuevo vínculo

$$\phi_4 = p_i p_i - 2m x_4 x_i x_i \approx 0. \tag{140}$$

Exigiendo nuevamente la consistencia de esta última relación se obtiene

$$\dot{\phi}_4 = -2mu x_j x_j = -2mur^2 \approx 0 \qquad j = 1, 2, 3, \tag{141}$$

de acuerdo a esto, $u \approx 0$ y por lo tanto no más vínculos son generados. Al calcular los corchetes de Poisson entre los vínculos encontrados, verificamos que son de segunda clase. Las ecuaciones de movimiento en el formalismo Hamiltoniano son:

$$\dot{x}_j = \{x_j, H_p\} = \frac{1}{m} p_j \qquad j = 1, 2, 3, \tag{142}$$

$$\dot{p}_j = \{p_j, H_p\} = -2x_4 x_j \qquad j = 1, 2, 3, \tag{143}$$

donde podemos comprobar la equivalencia con las ecuaciones de Lagrange de la siguiente forma:

$$\ddot{x}_j = \frac{1}{m}(-2x_4 x_j) \qquad j = 1, 2, 3, \tag{144}$$

$$m\ddot{x}_j + 2x_4 x_j = 0. \tag{145}$$

Inicialmente tenemos ocho variables de las cuales cuatro se consideran independientes. Los vínculos (132),(136),(138) y (140) me permiten eliminar como grados de libertad x_4 y p_4. Además, debido a la complejidad en la estructura de los vínculos, se decide calcular los corchetes de Dirac para las variables x_j y p_j, los cuales se definen de acuerdo a la relación (109). En ella la matriz de vínculos, en éste caso particular toma la forma

$$\Delta_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2mx_i x_i \\ 0 & 0 & -2x_i x_i & -4p_i x_i \\ 0 & 2x_i x_i & 0 & 2p_i p_i + 4mx_4 x_j x_j \\ -2mx_i x_i & 4p_i x_i & -2p_i p_i - 4mx_4 x_j x_j & 0 \end{pmatrix} \tag{146}$$

y su correspondiente inversa es:

$$\Delta^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta^{-1}_{12} & \Delta^{-1}_{13} & \Delta^{-1}_{14} \\ \Delta^{-1}_{21} & 0 & \Delta^{-1}_{23} & 0 \\ \Delta^{-1}_{31} & \Delta^{-1}_{32} & 0 & 0 \\ \Delta^{-1}_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{147}$$

donde

$$\Delta^{-1}_{12} = -\Delta^{-1}_{21} = \frac{2p_i^2 + 4mx_4 x_i^2}{4mx_i^2 x_i^2} \qquad \Delta^{-1}_{13} = -\Delta^{-1}_{31} = \frac{4p_i x_i}{4mx_i^2 x_i^2} \tag{148}$$

$$\Delta^{-1}_{14} = -\Delta^{-1}_{41} = -\frac{1}{2mx_i^2} \qquad \Delta^{-1}_{23} = -\Delta^{-1}_{32} = \frac{1}{2x_i^2} \tag{149}$$

lo anterior debido a que la matriz es antisimétrica.

Los corchetes de Dirac para las variables x_j y p_j son:

$$\{x_j, x_j\}_D = 0 \tag{150}$$

$$\{x_j, p_j\}_D = \delta_{ij} - \frac{2x_i xj}{r^2} \tag{151}$$

$$\{p_j, p_j\}_D = -\frac{1}{r^2}(p_i x_j - x_i p_j). \tag{152}$$

Según lo anterior, la ecuación (150) permanece invariante con relación al corchete de Poisson, los otros resultados cambiaron por la presencia de vínculos.

5. VÍNCULOS DE PRIMERA CLASE

El objetivo de éste capítulo es eliminar los vínculos de primera clase que aparecen en el problema modelo y en el modelo de Christ and Lee. Para ello introducimos tantas condiciones de Gauge como vínculos de primera clase existan.

5.1. Vínculos de Primera Clase en el Problema Modelo

5.1.1. Caso $\alpha = 0$, $\beta = 0$

Aquí tenemos un vínculo de primera clase

$$\phi_1 = p_2 - q_1 \approx 0. \tag{153}$$

Puesto que las condiciones de Gauge que se imponen en el sistema son arbitrarias, imponemos la siguiente:

$$\phi_2 = p_1 \approx 0, \tag{154}$$

ya que con ella el corchete de Poisson entre (153) y el vínculo (154) es diferente de cero. Sobre la condición de Gauge (154), garantizamos su consistencia:

$$\{\phi_2, H_E\} = u_1 \approx 0, \tag{155}$$

donde H_E es el Hamiltoniano extendido y u_1 es el multiplicador de Lagrange asociado a los vínculos secundarios de primera clase, este resultado que me permite fijar su valor. Por lo tanto, el vínculo que era primera clase (153), es ahora de segunda clase y se lo elimina calculando los parentesis de Dirac. Las coordenadas independientes escogidas para este caso particular son q_1 y q_2. Recordando la definición de corchetes de Dirac:

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \sum_{i,j=1}^{m} \{A, \phi_i\} \Delta^{ij} \{\phi_j, B\} \tag{156}$$

los elementos de la matriz Δ_{ij} de vínculos de segunda clase para este caso particular es:

$$\{\phi_1, \phi_1\} = 0 \qquad \{\phi_1, \phi_2\} = -1 \qquad \{\phi_2, \phi_2\} = 0, \tag{157}$$

y su correspondiente inversa Δ^{ij} tiene la forma,

$$\Delta^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{158}$$

Los corchetes de Dirac entre las variables independientes son:

$$\{q_1, q_1\}_D = 0 \tag{159}$$

siguiendo el procedimiento anterior

$$\{q_1, q_2\}_D = -1 \tag{160}$$

Finalmente, se calcula el último paréntesis de Dirac:

$$\{q_2, q_2\}_D = 0. \tag{161}$$

Los vínculos reducen el espacio de fase y además modifican los parentesis de Poisson originales. Se podría considerar como una condición de Gauge alternativa

$$\phi_2 = q_2 \approx 0, \tag{162}$$

sin embargo, se obtienen resultados inconsistentes ya que todos los corchetes de Dirac son igual a cero.

5.1.2. caso $\beta = \alpha^2$

Existen dos vínculos de primera clase:

$$\phi_1 = p_2 - (1 - \alpha)q_1 \approx 0, \tag{163}$$

$$\phi_2 = (p_1 - q_2) - \alpha(q_1 - q_2) \approx 0, \tag{164}$$

siendo que $\alpha \neq 0$ es un valor arbitrario, con el propósito de determinar una condición de Gauge apropiada escogeremos por conveniencia $\alpha = 1$, sólo momentaneamente, luego α permanecera arbitrario. En éste caso, las relaciones (163) y (164) se expresan como:

$$\phi_1 = p_2 \approx 0 \qquad\qquad \phi_2 = p_1 - q_1 \approx 0, \tag{165}$$

teniendo en cuenta ésta estructura de vínculos, consideramos las siguientes condiciones de Gauge:

$$\phi_3 = q_2 \approx 0 \qquad\qquad \phi_4 = p_1 \approx 0. \tag{166}$$

Sobre ellas debemos garantizar su consistencia

$$\{\phi_3, H_E\} = \{\phi_3, H_c + u\phi_a + u_1\phi\} = u \approx 0 \tag{167}$$

$$\{\phi_4, H_E\} = \alpha^2 (q_1 - q_2) + u(1 - \alpha) + \alpha u_1 \approx 0 \tag{168}$$

donde u y u_1 son los multiplicadores de Lagrange asociados al vínculo primario y secundario de primera clase respectivamente (163) y (164). Con el resultado obtenido puedo determinar los valores de u y u_1(167),(168).

Teniendo en cuenta que el número de vínculos es igual al número de coordenadas iniciales del espacio de fase no hay grados de libertad, es decir, todas las coordenadas son dependientes entre sí. Sin embargo, en el objetivo de calcular los paréntesis de Dirac, escogemos hacerlo para la variable q_1. En este caso la correspondiente inversa de la matriz de vínculos Δ^{ij} es

$$\Delta^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha-1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \frac{-1}{\alpha(\alpha-1)} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{169}$$

A la restricción $\alpha \neq 0$, debemos agregarle otra condición teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la matriz inversa, que $\alpha \neq 1$, ya que para este valor, la matriz no está definida. Calculando los paréntesis de Dirac para q_1 se determina que:

$$\{q_1, q_1\}_D = \frac{1}{\alpha - 1}. \tag{170}$$

Comparando los corchetes de Dirac con los corchetes de Poisson, podemos decir que los vínculos modifican su estructura.

5.2. Modelo de Christ and Lee

El modelo está descrito por la siguiente Lagrangiana:[24]

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \left(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1\right)x_3 + \frac{1}{2}x_3^2\left(x_1^2 + x_2^2\right) - V\left(x_1^2 + x_2^2\right) \tag{171}$$

donde V es el potencial en función de las coordenadas. Para ella hay tres ecuaciones de movimiento que se obtienen a partir de las ecuaciones de Euler - Lagrange

$$\ddot{x}_1 + \dot{x}_2 x_3 - x_3^2 x_1 + \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 \tag{172}$$

$$\ddot{x}_2 - \dot{x}_1 x_3 - x_3^2 x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0 \tag{173}$$

$$x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1 - x_3\left(x_1^2 + x_2^2\right) = 0. \tag{174}$$

Esta última, es un vínculo Lagrangiano ya que no posee el término correspondiente a la aceleración. Ahora, encontramos los momentos canónicos y con ellos el valor de la matriz Hessiana:

$$p_1 = \dot{x}_1 + x_2 x_3 \tag{175}$$

$$p_2 = \dot{x}_2 - x_1 x_3 \tag{176}$$

$$p_3 = 0, \tag{177}$$

por lo tanto,

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{178}$$

[24]M. E. V. Costa and H.O. Girotti, Phys. Rev. Quantization of gauge-invariant theories through the Dirac-bracket formalism

Encontrando su determinante, comprobamos que la Lagrangiana (171) es singular. El vínculo primario para el caso se obtiene a partir de la ecuación (177):

$$\phi_1 = p_3 \approx 0. \tag{179}$$

Antes de exigir que $\dot{\phi}_1 \approx 0$, determinamos el Hamiltoniano primario para el sistema:

$$H_p = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + (x_1 p_2 - x_2 p_1)\, x_3 + V\left(x_1^2 + x_2^2\right) + u_1 p_3, \tag{180}$$

con el cual analizamos la consistencia del vínculo primario

$$\dot{\phi}_1 = -\left(x_1 p_2 - x_2 p_1\right) \approx 0, \tag{181}$$

al obtener una relación entre las coordenadas del espacio de fase se afirma que hay un vínculo secundario que se define en la forma:

$$\phi_2 = x_1 p_2 - x_2 p_1 \approx 0. \tag{182}$$

De acuerdo al método de Dirac, se repite los pasos hechos con el vínculo primario, calculamos su consistencia y se obtiene

$$\dot{\phi}_2 \approx 0 \tag{183}$$

de tal manera que no surgen más vínculos. Puesto que los corchetes de Poisson entre ellos son todos cero, se establece que los vínculos encontrados son de primera clase.

Las ecuaciones de movimento en el formalismo Hamiltoniano consistentes con las ecuaciones encontradas a nivel Lagrangiano son:

$$\dot{x}_1 = \{x_1, H_p\} \approx p_1 - x_2 x_3 \tag{184}$$

$$\dot{x}_2 = \{x_2, H_p\} \approx p_2 + x_1 x_3 \tag{185}$$

$$\dot{x_3} = \{x_3, H_p\} \approx u_1, \tag{186}$$

$$\dot{p}_1 = \{p_1, H_p\} \approx -p_2 x_3 - \frac{\partial V}{\partial x_1} \tag{187}$$

$$\dot{p}_2 = \{p_2, H_p\} \approx p_1 x_3 - \frac{\partial V}{\partial x_1} \tag{188}$$

$$\dot{p}_3 = \{p_3, H_p\} \approx x_2 p_1 - x_1 p_2. \tag{189}$$

En este problema se sugieren como condiciones de Gauge las siguientes [?]:

$$\phi_3 = b - c \arctan\frac{x_2}{x_1} \approx 0 \qquad\qquad \phi_4 = x_3 \approx 0 \tag{190}$$

donde b y c son constantes diferentes de cero. Para éste caso, la matriz Δ^{ij} tiene la forma:

$$\Delta^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{191}$$

Aquí, consideramos como grados de libertad x_1y p_1. Los únicos parentesis de Dirac diferentes de cero entre estas variables son:

$$\{x_1, p_1\}_D = 1 - \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}. \tag{192}$$

6. CONCLUSIONES

Las conclusiones principales de este trabajo basadas en la descripción clásica de los sistemas con vínculos se resumen de la siguiente forma:

- Estudiamos la formulación Hamiltoniana para sistemas con vínculos, los cuales se manifiestan al calcular los momentos canónicos y verificar que las velocidades no se pueden expresar en función de las coordenadas y momentos. Ello indica que no todas las coordenadas son independientes.

- Se describe el paso de la formulación Lagrangiana a la Hamiltoniana cuando el Lagrangiano que describe el sistema tiene vínculos. Además se determinan las ecuaciones de Hamilton consistentes con las ecuaciones de Lagrange para estos casos.

- La principal característica de la presencia de vínculos es que reducen el espacio de fase, es decir, si la dimensión del espacio de fase original es 2N, $2L$ y $2R$ el número de vínculos de segunda clase y primera clase respectivamente, tendremos un subespacio de dimension 2N-2L-2R.

- Teniendo en cuenta los resultados obtenidos vemos que los vínculos modifican la estructura de los corchetes de Poisson originales. Para vínculos de primera clase, las condiciones de Gauge obtenidas determinan los paréntesis de Dirac.

- Los multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos de primera clase permanecen indeterminados. Se trata de eliminar ésta arbitrariedad introduciendo condiciones de Gauge que se comportan como nuevos vínculos, de tal manera, que todo el conjunto sean sólo vínculos de segunda clase, los cuales se eliminan introduciendo los paréntesis de Dirac entre los grados de libertad de la teoría.

- Dirac conjeturó que todos los vínculos de primera clase primarios y secundarios eran generadodres de transformaciones gauge por lo cual propuso introducir un

Hamiltoniano extendido que involucre estos vínculos y con él, escribir las ecuaciones dinámicas para el sistema. Este Hamiltoniano determinará la dinámica del sistema ya que refleja la completa libertad de gauge de la teoría.

- La lagrangiana que describe el Toy Model posee constantes arbitrarias α y β cuyos valores nos permiten obtener vínculos de primera y segunda clase.

- El rotor rígido es un problema característico de vínculos de segunda clase, aqui se calcularon los paréntesis de Dirac entre x_j y p_j debido a la complejidad de los vínculos con el fin de eliminarlos.

- El Modelo de Christ - Lee es un problema con un número finito de grados de libertad que posee vínculos de primera clase, en el se imponen condiciones de Gauge con el fin de convertirlos en vínculos de segunda clase y poderlos eliminar.

7. BIBLIOGRAFÍA

Referencias

J.M. Goicolea, *Curso de Mecánica*, Vol. I. Universidad Politécnica de Madrid, 2001. Págs 485.

F. Minotti, *Apuntes de Mecánica Clásica*, 2009. Págs 144.

H. Goldstein, *Mecanica Clásica*, Aguilar, Madrid, 1950. Págs 648.

K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Lectures Notes in Physics, Vol. 169, Springer, New York, 1982.Págs 338.

P. A. M. Dirac, Can. J. Math. **2**, 129 (1950).

P. A. M. Dirac, Can. J. Math. **3**, 1 (1951).

P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A246**, 236 (1958).

P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A246**, 333 (1958).

P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*, Benjamin, New York, 1964. Págs 87.

V. Tapia, *La estructura Canónica de la Relatividad General*, Universidad Nacional, 2008. Págs 81.

N. H. Christ and T. D. Lee, Phys. Rev.Dirac Bracket: the rotator rigid, **22,** 939 (1980).

M. E. V. Costa and H.O. Girotti, Phys. Rev.Quantization of gauge-invariant theories through the Dirac-bracket formalism **24**, 12 (1981) Págs 3.

N. K. Falck and A. C. Hirshfeld, Eur. J. Phys **4**, 5 (1983). Págs 9.

P. G. Bergmann and J. H. M. Brunnings, Rev. Mod. Phys., **21**, 480 (1949).

P. G. Bergmann, R. Penfield, R. Schiller and H. Zatzkis, Phys. Rev., **80**, 81 (1950).

P. G. Bergmann and R. Schiller, Phys. Rev., **89**, 4 (1953).

P. G. Bergmann and I. Goldberg, Phys. Rev., **98**, 531 (1955).

L. D. Faddeev, Theor. Math. Phys. (USSR) **1**, 1 (1970).

P. Senjanovic, Ann. Phys. (N.Y.) **100,** 227 (1976).

M. C. Bertin, B. M. Pimentel, P. J. Pompeia, Mod. Phys. Lett.**A 20**(2005) 2873.