

ESTABILIDAD CLÁSICA Y CUANTIZACIÓN MACROSCÓPICA DE SOLITONES EN
CADENAS OSCILATORIAS NO LINEALES ACOPLADAS

PAOLA ANDREA CONCHA OBANDO

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
SAN JUAN DE PASTO
2009

ESTABILIDAD CLÁSICA Y CUANTIZACIÓN MACROSCÓPICA DE SOLITONES EN
CADENAS OSCILATORIAS NO LINEALES ACOPLADAS

PAOLA ANDREA CONCHA OBANDO

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR EL TÍTULO DE FISICO

DIRECTOR:
MSc. ALEJANDRO PÉREZ RIASCOS

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
SAN JUAN DE PASTO
2009

Nota de aceptación

Director

Jurado

Jurado

San Juan de Pasto, Noviembre 2009

“Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores”

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

AGRADECIMIENTOS

A mis padres, por el apoyo brindado para el desarrollo de mi carrera.

A un buen amigo y director del trabajo, Alejandro Pérez, por su tiempo y dedicación.

Al programa de Física y a la Universidad de Nariño, por mi formación profesional.

TABLA DE CONTENIDO

| | |
|---|----|
| INTRODUCCIÓN | 14 |
| 1. OBJETIVOS | 15 |
| 1.1. OBJETIVO GENERAL | 15 |
| 1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS | 15 |
| 2. MODELO FPU | 16 |
| 2.1. SOLITONES | 19 |
| 2.2. MAPAS DE FASE | 20 |
| 3. MECÁNICA CUÁNTICA EN MEDIOS NO LINEALES | 23 |
| 3.1. EFECTOS CUÁNTICOS MACROSCÓPICOS | 23 |
| 3.2. MECÁNICA CUÁNTICA EN SISTEMAS NO LINEALES | 25 |
| 3.3. INTEGRAL DE CAMINO DE FEYNMAN | 27 |
| 3.3.1. Acción clásica. | 27 |
| 3.3.2. Integral de camino. | 28 |
| 3.4. TUNELAMIENTO CUÁNTICO | 29 |
| 3.5. APROXIMACION SEMICLÁSICA. LIMITE WKB | 29 |
| 4. CONDICIONES DE ESTABILIDAD CLÁSICA | 31 |
| 4.1. MÉTODO VARIACIONAL | 31 |
| 4.2. FUNCIONES DE PRUEBA IDÉNTICAS | 32 |
| 4.3. FUNCIONES DE PRUEBA IDÉNTICAS CON PARÁMETROS ADICIONALES | 35 |
| 4.4. FUNCIONES DE PRUEBA CON λ CONSTANTE | 37 |
| 4.5. FUNCIONES DE PRUEBA λ CONSTANTE CON MAYOR PARÁMETROS | 41 |
| 5. CUANTIZACIÓN MACROSCÓPICA DE CADENAS NO LINEALES ACOPLADAS | 47 |
| 5.1. TRATAMIENTO CLÁSICO DEL PROBLEMA | 47 |
| 5.1.1. Funciones de prueba. | 47 |
| 5.1.2. Aproximación Clásica. | 51 |
| 5.2. CUANTIZACIÓN SEMI-CLASICA DE CADENAS NO LINEALES ACOPLADAS | 54 |
| 6. CONCLUSIONES | 60 |
| 7. RECOMENDACIONES | 61 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| 2.1. Diagrama Modelo FPU | 16 |
| 2.2. Modelo FPU cadenas no lineales acopladas | 17 |
| 2.3. Diagrama de fase péndulo simple | 21 |
| 4.1. Diagrama de fase $(\lambda, \dot{\lambda})$ funciones de prueba idénticas | 33 |
| 4.2. Solución numérica para funciones de prueba iguales e integración numérica de las ecuaciones diferenciales de acoplamiento. | 34 |
| 4.3. Diagramas de fase funciones idénticas con parámetros adicionales | 36 |
| 4.4. Solución numérica, para funciones de prueba iguales con parámetros adicionales e integración de las ecuaciones de acoplamiento | 37 |
| 4.5. Diagramas de fase para funciones de prueba con λ constante | 39 |
| 4.6. Solución numérica de las funciones de prueba con λ constante, sistema uno | 40 |
| 4.7. Solución numérica de las funciones de prueba con λ constante, sistema dos | 40 |
| 4.8. Solución numérica de ecuaciones diferenciales de acoplamiento para λ constante, sistemas uno y dos. | 41 |
| 4.9. Diagramas de fase para funciones de prueba con λ constante con parámetros adicionales | 42 |
| 4.10. Módulos al cuadrado de funciones de prueba para λ constante y parámetros adicionales | 43 |
| 4.11. Integración numérica de las ecuaciones diferenciales de acoplamiento, funciones de prueba con λ constante y parámetros adicionales | 44 |
| 4.12. Integración numérica de las ecuaciones de acoplamiento para funciones de prueba con λ constante y parámetros adicionales, para efectos de acoplamiento | 45 |
| 5.1. Módulos al cuadrado de las funciones de onda asociadas a la cadena uno $ \Psi_1(x, t) ^2$ y a la cadena dos $ \Psi_2(x, t) ^2$, para $\kappa = 0.8$ | 49 |
| 5.2. Módulos al cuadrado de las funciones de onda asociadas a la cadena uno $ \Psi_1(x, t) ^2$ y a la cadena dos $ \Psi_2(x, t) ^2$, para $\kappa = 1$ | 49 |
| 5.3. Módulos al cuadrado de las funciones de onda asociadas a la cadena uno $ \Psi_1(x, t) ^2$ y a la cadena dos $ \Psi_2(x, t) ^2$, para $\kappa = 2$ | 50 |
| 5.4. Módulos al cuadrado de las funciones de onda asociadas a la cadena uno $ \Psi_1(x, t) ^2$ y a la cadena dos $ \Psi_2(x, t) ^2$, para $\kappa = 10$ | 50 |
| 5.5. Trayectorias clásicas estables para diferentes κ . | 52 |
| 5.6. Hamiltoniano efectivo clásico con posibles trayectorias para diferentes κ . | 53 |
| 5.7. Trayectorias posibles a nivel cuántico, para diferentes valores de κ . | 56 |
| 5.8. Hamiltoniano Euclidiano con posibles trayectorias para diferentes κ | 57 |

LISTA DE ANEXOS

| | |
|--|----|
| A. Derivada Funcional | 63 |
| B. Formulación analítica de la Acción Euclidiana | 66 |

GLOSARIO

ATENUACIÓN: se denomina atenuación de una señal, sea esta acústica, eléctrica u óptica, a la pérdida de potencia sufrida por la misma al transitar por cualquier medio de transmisión.

COHERENCIA TEMPORAL: está relacionada con la correlación de la fase de la onda en un determinado punto alcanzado por la misma en dos instantes de tiempo diferentes.

COHERENCIA ESPACIAL: hace referencia a una relación de fase definida entre puntos distintos de una sección transversal de un haz luminoso.

CONDENSADO BOSE-EINSTEIN: es el estado de agregación de la materia que se da en ciertos materiales a muy bajas temperaturas. La propiedad que lo caracteriza es que una cantidad macroscópica de las partículas del material pasan al nivel de mínima energía, denominado estado fundamental. El condensado es una propiedad cuántica que no tiene análogo clásico.

DISPERSIÓN: es el fenómeno por el cual un conjunto de partículas que se mueve en una dirección determinada rebota sucesivamente con las partículas del medio por el que se mueve hasta perder una dirección privilegiada de movimiento.

EFEECTO TUNEL: En mecánica cuántica, se refiere a un fenómeno nanoscópico por el que una partícula viola los principios de la mecánica clásica penetrando una barrera potencial o impedancia mayor que la energía cinética de la propia partícula.

FASE: indica la situación instantánea en el ciclo, de una magnitud que varía cíclicamente.

GUÍAS DE ONDA: En electromagnetismo y en telecomunicación, corresponde a cualquier estructura física que guía ondas electromagnéticas.

NO LINEALIDAD: un sistema físico, matemático o de otro tipo es no lineal cuando las ecuaciones de movimiento, evolución o comportamiento que regulan su comportamiento son no lineales.

OSCILADOR: es un sistema capaz de crear perturbaciones o cambios periódicos o cuasiperiódicos en un medio, ya sea un medio material (sonido) o un campo electromagnético (ondas de radio, microondas, infrarrojo, luz visible, rayos X, rayos gamma, rayos cósmicos).

SOLITON: es una onda solitaria que se propaga sin deformarse en un medio no lineal. Se encuentra en fenómenos físicos como solución a ecuaciones diferenciales no lineales.

RESUMEN

En este trabajo se discute la estabilidad clásica de dos cadenas oscilatorias no lineales acopladas y la cuantización macroscópica de solitones en las cadenas. El estudio de las propiedades clásicas de las cadenas no lineales acopladas se realiza por medio del método $\beta - FPU$. Las propiedades de estabilidad del sistema y las soluciones de las ecuaciones dinámicas del mismo se resuelven por métodos variacionales. Estas soluciones clásicas analizadas en el límite semiclásico WKB, permiten la cuantización del sistema y el análisis de fenómenos estrictamente cuánticos como tunelamiento entre las dos cadenas.

ABSTRACT

This work discusses the classical stability of two linearly coupled nonlinear oscillator chains and macroscopic quantization of solitons in these chains. The study of classical properties of nonlinear coupled chains is performed using the $\beta - FPU$ method. Stability properties of the system and solutions of its dynamical equations are established by variational methods. The analysis of classical solutions in the semi-classical WKB limit, allow the quantization of the system and the analysis of quantum phenomena as quantum tunneling from one chain to the other.

INTRODUCCIÓN

El modelo de cadenas oscilatorias no lineales Fermi-Pasta-Ulam (FPU) es aplicado ampliamente para investigaciones en problemas de dinámica no lineal¹. Un campo de investigación es la exploración de energía en cadenas oscilatorias no lineales y la existencia de estructuras aisladas como pulsos localizados. Los solitones son encontrados como soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales planteadas para el sistema oscilatorio.

Dada la complejidad de las ecuaciones diferenciales establecidas para la dinámica de las cadenas no lineales, se hace necesario el estudio del sistema utilizando análisis numérico, utilizando como herramienta el programa MATHEMATICA. En este trabajo se propone realizar un estudio de cadenas no lineales acopladas mediante el modelo β -FPU. Considerando el alto grado de inestabilidad de las soluciones se plantea resolver las ecuaciones diferenciales por medio de métodos variacionales, la idea de la aproximación variacional consiste en insertar funciones de prueba con parámetros libres y determinar el Lagrangiano del sistema, de esta manera mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange para estos parámetros libres se describe la evolución del sistema.

Además, en el sistema de cadenas oscilatorias no lineales se establecen las características del sistema que hacen posible un acercamiento macrocuántico, el estudio se realiza en el límite semiclásico WKB². Considerando el sistema de tal manera que los efectos cuánticos puedan ser relevantes, y en este punto analizar aspectos fundamentales de la mecánica cuántica en medios no lineales e indagar sobre posibles efectos de tunelamiento de solitones entre las cadenas.

¹KOSEVICH YU. A, MANEVITCH L.I,SAVIN A.V. Classical counterpart of macroscopic tunneling quantum dynamics.Phys. Rev. E 77,(2008)

²POMEAU Y.,LE BERRE M., Optical solitons as quantum objects.(2008)

1 OBJETIVOS

1.1. OBJETIVO GENERAL

Resolver las ecuaciones que describen la dinámica de cadenas oscilatorias no lineales, estableciendo condiciones de estabilidad clásica y aplicar métodos de mecánica cuántica no lineal para cadenas acopladas no lineales.

1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

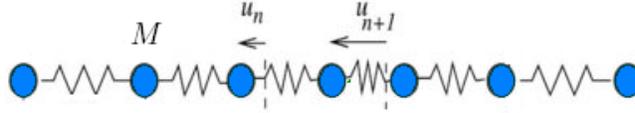
- Estudiar parámetros que rigen la estabilidad de un sistema de cadenas oscilatorias no lineales acopladas, utilizando funciones de prueba.
- Establecer las condiciones de estabilidad clásicas, de un sistema de dos cadenas oscilatorias no lineales acopladas.
- Realizar un estudio semiclásico del sistema de dos cadenas oscilatorias no lineales, utilizando funciones de prueba estables clásicamente.
- Cuantización del sistema de dos cadenas oscilatorias no lineales y aplicación del método WKB para el estudio de tunelamiento cuántico.

2 MODELO FPU

Las cadenas oscilatorias no lineales han sido utilizadas en investigaciones en problemas de dinámica no lineal. El modelo FPU, corresponde a uno de los sistemas de estudio de cadenas oscilatorias no lineales, fue propuesto por primera vez para explicar los fundamentos de la mecánica estadística¹. Un reciente desarrollo es la exploración de energía ubicada en cadenas no lineales, la existencia de estructuras aisladas como pulsos localizados y solitones en altas frecuencias, que son encontrados como solución a las ecuaciones diferenciales parciales. La evidencia experimental se encuentra en varios sistemas como: arreglos no lineales de guías ópticas de ondas, cristales de bajas dimensiones, arreglos de junturas Josephson, sistemas micromecánicos, proteínas de α -hélices y solitones lentos que son descritos en cadenas unidimensionales no lineales encontrados en macromoléculas de ADN y algunos cristales².

En el modelo FPU el sistema se representa por un gran número de masas que interactúan unas con otras por medio de fuerzas no lineales. El planteamiento de las ecuaciones de movimiento y Hamiltoniano además de otras características del sistema se hace considerando una cadena de partículas con masa M cuya interacción es modelada como si las partículas fuesen conectadas por resortes:

Figura 2.1: Modelo FPU.



Por lo tanto, si se considera cadenas oscilatorias no lineales acopladas, se puede hacer uso del Hamiltoniano Fermi-Pasta-Ulam (FPU). Este modelo es ampliamente aplicado al estudio de redes no lineales³:

$$H = \sum_{i=1}^2 \sum_n \left[\frac{1}{2} p_n^{(i)2} + \frac{1}{2} l^{(i)} (u_{n+1}^{(i)} - u_n^{(i)})^2 + \frac{1}{3} \alpha^{(i)} (u_{n+1}^{(i)} - u_n^{(i)})^3 + \frac{1}{4} \beta^{(i)} (u_{n+1}^{(i)} - u_n^{(i)})^4 + \frac{1}{2} (u_n^{(i)} - u_n^{(3-i)})^2 \right]. \quad (2.1)$$

En esta expresión u_n es el desplazamiento de la partícula n -ésima desde su posición de equilibrio en la cadena i -ésima, $p_n^{(i)}$ es el momento de la partícula, $l^{(i)}$, $\alpha^{(i)}$ y $\beta^{(i)}$ son las constantes de fuerza

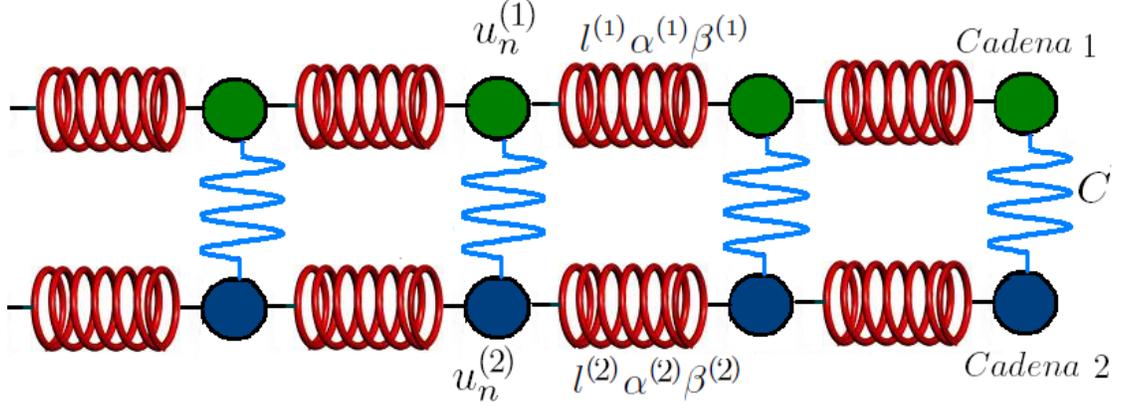
¹BERMAN, G. P, IZARAILEV F. M. The Fermi-Pasta-Ulam problem: 50 years of progress; arXiv:nlin.CD/0411062 v2 14, (2004)

²KOSEVICH YU. A, MANEVITCH L.I, SAVIN A.V. Classical counterpart of macroscopic tunneling quantum dynamics. Phys. Rev. E 77, (2008)

³KOSEVICH YU. A, MANEVITCH L.I, SAVIN A.V. Classical counterpart of macroscopic tunneling quantum dynamics. Phys. Rev. E 77, (2008)

lineal y no lineales, y C describe el acoplamiento lineal entre las cadenas. De manera ilustrativa el sistema se comporta de la siguiente manera:

Figura 2.2: Modelo FPU para dos cadenas no lineales acopladas.



El Hamiltoniano (2.1) describe una dinámica dada por las siguientes ecuaciones de movimiento, $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_n^{(i)} = & l^{(i)}(u_{n+1}^{(i)} + u_{n-1}^{(i)} - 2u_n^{(i)}) \\ & + \alpha^{(i)}[(u_{n+1}^{(i)} - u_n^{(i)})^2 - (u_{n-1}^{(i)} - u_n^{(i)})^2] \\ & + \beta^{(i)}[(u_{n+1}^{(i)} - u_n^{(i)})^3 - (u_{n-1}^{(i)} - u_n^{(i)})^3] + C[u_n^{(3-i)} - u_n^{(i)}]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

⁴Para el estudio del sistema de dos cadenas oscilatorias no lineales acopladas, se hace necesario introducir funciones envolventes continuas para los desplazamientos de las partículas en las cadenas, asumiendo $f_n^{(i)} = u_n^{(i)}(-1)^n$ y $f_n^{(i)} \equiv f(x)_i$. Las funciones $f(x)_i$ son supuestas para variaciones lentas en la escala interatómica en ambas cadenas, de tal manera que $\frac{\partial f_i}{\partial x} \ll 1$, lo cual permite escribir las ecuaciones diferenciales parciales no lineales correspondientes estas funciones.

Para obtener las ecuaciones no lineales de las funciones envolventes para cadenas acopladas, se plantea por separado la dinámica del desplazamiento relativo $v_n^i = u_{n+1}^{(i)} - u_n^i$ y el desplazamiento total $w_n^i = u_{n+1}^i + u_n^i$ de las partículas vecinas más cercanas. Además, en los desarrollos posteriores se considera constantes de fuerza no lineal idénticas para ambas cadenas, $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} \equiv \alpha$ y $\beta^{(1)} = \beta^{(2)} \equiv \beta$.

Las ecuaciones para v_n^i y w_n^i , se obtienen a partir de (2.2):

⁴KOSEVICH YU. A, MANEVITCH L.I, SAVIN A.V. Classical counterpart of macroscopic tunneling quantum dynamics. Phys. Rev. E 77, (2008)

$$\begin{aligned}\ddot{v}_n^{(i)} &= l^{(i)}(v_{n+1}^{(i)} + v_{n-1}^{(i)} - 2v_{n+1}^{(i)}) + \alpha[v_{n+1}^{(i)2} + v_{n-1}^{(i)2} - 2v_n^{(i)2}] \\ &\quad + \beta[v_{n+1}^{(i)3} + v_{n-1}^{(i)3} - 2v_n^{(i)3}] + C(v_n^{(3-i)} - v_n^{(i)}),\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}\ddot{w}_n^{(i)} &= l^{(i)}(w_{n+1}^{(i)} + w_{n-1}^{(i)} - 2w_{n+1}^{(i)}) + \alpha[v_{n+1}^{(i)2} - v_{n-1}^{(i)2}] \\ &\quad + \beta[v_{n+1}^{(i)3} - v_{n-1}^{(i)3}] + C(w_n^{(3-i)} - w_n^{(i)}).\end{aligned}\quad (2.4)$$

Introduciendo desplazamientos relativos continuos $v_n^{(i)} \equiv v(x)_i$ y desplazamientos totales continuos $w_n^{(i)} \equiv w(x)_i$ y expandiendo en las ecuaciones (2.3) y (2.4) las diferencias $u^{(i)n\pm 1} - u_n^{(i)}$ y $w^{(i)n\pm 1} - w_n^{(i)}$ hasta segundo orden, se obtiene las ecuaciones diferenciales para $v(x, t)_i$ y $w(x, t)_i$:

$$\ddot{v}^{(i)} = -l^{(i)}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} - 4l^{(i)}v_i - 4\frac{\partial w_i}{\partial x}(\alpha v_i + \beta v_i^2) - 4\beta v_i^3 + C(v_{3-i} - v_i),\quad (2.5)$$

$$\ddot{w}^{(i)} = l^{(i)}\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + 2\alpha\frac{\partial v_i^2}{\partial x} + 2\beta\frac{\partial v_i^3}{\partial x} + C(w_{3-i} - w_i).\quad (2.6)$$

Considerando dos cadenas idénticas altamente acopladas con $l^{(1)} = l^{(2)} = 1$, se realiza la suma de la ecuación (2.6):

$$\ddot{w}_i + \ddot{w}_2 = \frac{\partial^2(w_1 + w_2)}{\partial x^2} + 2\alpha\frac{\partial(v_1^2 + v_2^2)}{\partial x} + 2\beta\frac{\partial(v_1^3 + v_2^3)}{\partial x}.\quad (2.7)$$

Omitiendo el termino relacionado con las derivadas temporales, se obtiene desde la ecuación (2.7), la siguiente expresión para el desplazamiento del centro de masa estático de las dos cadenas:

$$w_0^{c.m.}(x) = \frac{w_{01}(x) + w_{02}(x)}{2} = -\alpha \int_{-\infty}^x \langle v_1^2 + v_2^2 \rangle dx',\quad (2.8)$$

donde los corchetes angulares denotan promedio en el tiempo. El termino no lineal, proporcional a $\beta \langle v_1^3 + v_2^3 \rangle$ se desprecia del promedio por ser la tercera potencia de v_i . De esta manera en el modelo β -FPU:

$$w_0^{c.m.}(x) = \frac{w_{01}(x) + w_{02}(x)}{2} = 0.\quad (2.9)$$

Con los anteriores resultados, y considerando $v(x)_i = 2f(x)_i$, a partir de (2.5), (2.7) y (2.9), para cadenas acopladas β -FPU, en las cuales se considera $\alpha = 0$, se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales parciales no lineales, para las funciones envolventes $f(x)_i$, $i = 1, 2$:

$$\ddot{f}_i + \omega_{mi}^2 f_i + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} + 16\beta f_i^3 - C f_{3-i} = 0,\quad (2.10)$$

donde $\omega_{mi}^2 = \sqrt{4 + C}$ para el parametro $l^{(i)} = 1$.

En un estudio que involucre la amplitud y fase de las excitaciones no lineales, es útil introducir campos complejos $\Psi(x, t)_i$ asociados a cada cadena:

$$f(x, t)_i = \frac{1}{2}[\Psi(x, t)_i + \Psi(x, t)_i^*] \quad (2.11)$$

La ecuación (2.10) con la consideración planteada en (2.11), permite escribir las ecuaciones de acoplamiento para Ψ_i y Ψ_i^* , $i = 1, 2$ de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x^2} + \omega_{mi}^2 \Psi_i\right) + 6\beta |\Psi_i|^2 \Psi_i - \frac{C}{2} \Psi_{3-i} = 0, \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Psi_i^*}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Psi_i^*}{\partial x^2} + \omega_{m2}^2 \Psi_i^*\right) + \beta |\Psi_i^*|^2 \Psi_i^* - \frac{C}{2} \Psi_3^* - i = 0. \quad (2.13)$$

Esta aproximación posibilita describir el sistema de cadenas oscilatorias no lineales como medio continuos. Las ecuaciones diferenciales resultado de la dinámica de cadenas oscilatorias no lineales son numéricamente integrables, y no pueden ser resueltas de manera analítica. Ecuaciones no lineales de este tipo y otras relacionadas, tiene soluciones conocidas estables, donde la dispersión y la no linealidad se contrarrestan para producir amplitud y velocidad de propagación constante, fenómenos que pueden ser explicados desde la teoría de solitones.

2.1. SOLITONES

⁵ El descubrimiento del soliton fue realizado por Norman Zabusky y Martin Kruskal en 1965. Para definir un soliton, se considera el movimiento de una onda descrita por una ecuación no lineal. Una onda viajante que se mueve en el espacio sin cambio en su forma y en particular sin atenuación o dispersión, y está localizada como un solo pulso, es llamada onda solitaria. Un soliton es una onda solitaria con la propiedad adicional que esta preserva su forma cuando interactúa con otras ondas solitarias. Un soliton, el cual difiere completamente de una partícula microscópica normal, posee la dualidad onda-partícula. Las propiedades de onda aparecen en forma de ondas solitarias viajantes, con características del movimiento ondulatorio, entre la cuales se pueden destacar frecuencia, amplitud, periodo, velocidad de fase, difracción, transmisión y reflexión. Las propiedades como corpúsculo se reflejan en la forma estable después de una colisión, análogo a una partícula clásica. Los solitones poseen masa, energía y momento definido.

El estudio que llevo a Kruskal y Zabusky a los solitones, tuvo su origen en el problema FPU. Kruskal y Zabusky a través de series de aproximaciones asintóticas, relacionaron las cuestiones de recurrencia para el sistema de osciladores en el modelo FPU a la ecuación diferencial no lineal:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (2.14)$$

La ecuación 2.14 llamada ecuación KdV, fue deducida por primera vez en 1895 como una aproximación para la descripción de ondas superficiales en el agua moviéndose en un canal y puede aparecer como caso limite en el estudio de redes discretas de osciladores no lineales.

⁵CAMPBELL DAVID K. Nonlinear Science. Alamos Especial issue. pág.227-230

El estudio analítico de una estructura coherente en la ecuación (2.14), se realiza buscando una solución localizada $u_s(\xi)$ que depende solo de $\xi = x - vt$, de esta manera se reduce la ecuación diferencial parcial a una ecuación diferencial ordinaria en ξ . El resultado es integrado de manera explícita y conduce a:

$$u_s(x, t) = 3v \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt). \quad (2.15)$$

Este soliton se propaga con una velocidad uniforme proporcional a la amplitud.⁶ La existencia de solitones en la ecuación KdV, se puede comprender como resultado del balance entre el termino dispersivo $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, que causa que el pulso cambie de forma o se atenué en su movimiento, y el termino no lineal $u \frac{\partial u}{\partial x}$ que tiende a aumentar el tamaño del pulso.

Los solitones son ampliamente aplicados en sistemas como fibras ópticas, polímeros conductores y otros cuasi-sistemas unidimensionales, líneas de transmisión de Josephson, así como las ondas superficiales en el agua. Una de las aplicaciones de solitones es la comunicación efectiva a larga distancia por medio de fibras ópticas. Los solitones en fibras ópticas, están descritos por la ecuación no lineal de Schrödinger. En términos del campo eléctrico complejo $E(x, t)$, esta ecuación se puede escribir de la siguiente manera:

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + |E|^2 E = 0. \quad (2.16)$$

El soliton corresponde a un pulso no lineal moviéndose con una velocidad v a través de la fibra óptica que tiene la forma:

$$E(x, t) = \left(2\omega + \frac{v^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\omega t + \frac{vx}{2}} \operatorname{sech}\left(\left(\omega + \frac{v^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}(x - vt)\right). \quad (2.17)$$

En el limite idealizado, estos solitones se propagan sin deformación, son modos localizados estables para la propagación en la fibra. Una característica intrínseca no lineal de este solitones, que se muestra de forma explícita en la ecuación(2.17), es la relación entre su amplitud (de ahí su energía) y su anchura.

Existen varias técnicas numéricas y técnicas de perturbación analíticas, para el estudio de sistemas físicos no lineales que incluyen soluciones solitonicas. Una condición inicial arbitraria, produce un conjunto de estructuras que viajan con su propia velocidad; la inestabilidad se explica desde la dinámica caótica del movimiento⁷.

2.2. MAPAS DE FASE

De las ecuaciones no lineales de un sistema, se puede extraer información acerca de las propiedades de la solución sin resolver las ecuaciones de movimiento, consideraciones cualitativas se pueden expresar gráficamente en términos de diagramas de energía y diagramas de fase⁸.

⁶INFELD, E., ROWLANDS, G., Nonlinear waves, solitons and chaos. pág.8

⁷BERMAN, G. P, IZARAILEV F. M. The Fermi-Pasta-Ulam problem: 50 years of progress; arXiv:nlin.CD/0411062 v2 14, (2004)

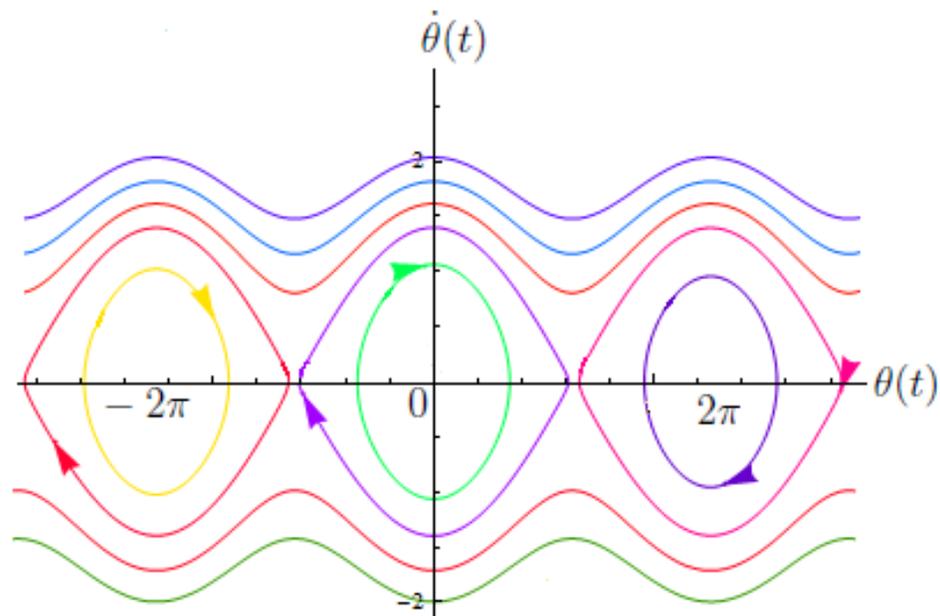
⁸CHOW TAI L. Classical Mechanics. pág.287

Un sistema dinámico puede ser pensado como algo que evoluciona en el tiempo, las variables dinámicas del sistema, tal como q y p , posición y momento canónicos respectivamente, presentan información en un espacio abstracto definido para estas variables denominado espacio de fase, y su dimensión está claramente relacionada con el número de variables incluidas en la dinámica del sistema⁹. Los mapas de fase son configuraciones abstractas generalmente bidimensionales que se obtienen de la combinación de dos variables parametrizadas del sistema de estudio. En un sistema de ecuaciones los mapas de fase poseen la propiedad de mostrar gráficamente el lugar geométrico de las familias de soluciones numéricas dentro del conjunto de infinitos resultados que puede presentar el sistema.

Existen dos tipos de Mapas de Fase especialmente útiles cuando se desea analizar una variable determinada del sistema o cuando se estudia un sistema unidimensional. En estos casos si es necesario recurrir a una variable, los mapas de fase se pueden generar mediante las proyecciones de la variable contra su derivada (q vs \dot{q}) o por la representación de la variable contra sí misma pero evaluada con un retardo τ o sea ($q(t)$ vs $q(t - \tau)$).

Los mapas de fase son utilizados en la identificación de la dinámica de los sistemas complejos a partir de series temporales de sus variables. En el caso del péndulo simple, el comportamiento del movimiento puede ser descrito por el movimiento de un punto en el espacio de fase de dos dimensiones con coordenadas θ y $\dot{\theta}$

Figura 2.3: El comportamiento del péndulo simple es representado por los contornos de las constantes de energía en el plano de fase θ y $\dot{\theta}$. Las curvas cerradas representan oscilaciones periódicas. Las líneas onduladas corresponden a movimientos en los cuales el péndulo se mueve completamente alrededor de su pivote.



El análisis del plano de fase, ayuda a comprender el desarrollo caótico en sistemas dinámicos. Un estado simple de equilibrio puede ser descrito por un punto central, en el que todos los estados

⁹CAMPBELL DAVID K. Nonlinear Science. Alamos Especial issue. pág.221

iniciales de un sistema evolucionan con el tiempo, tal que ellos son atraídos al estado de equilibrio o a trayectorias cerradas. Un estado inestable esta descrito por trayectorias en el espacio de fase que escapan de las orbitas cerradas. El comportamiento caótico de un sistema se caracteriza por la presencia de estados de equilibrio y estados inestables, los cuales presentan gran dependencia de las condiciones iniciales del sistema¹⁰.

¹⁰INFELD, E.,ROWLANDS,G., Nonlinear waves, solitons and chaos.pág.145

3 MECÁNICA CUÁNTICA EN MEDIOS NO LINEALES

3.1. EFECTOS CUÁNTICOS MACROSCÓPICOS

Los efectos cuánticos macroscópicos se refieren a fenómenos que ocurren en escala macroscópica. Se ha comprobado a nivel experimental que tales fenómenos pueden ocurrir en muchos sistemas físicos, se presentan a continuación algunos de estos sistemas y sus efectos cuánticos macroscópicos relacionados¹.

- Efecto Cuántico macroscópico en superconductores. La superconductividad es un fenómeno en el que la resistencia de un material desaparece repentinamente cuando la temperatura es inferior a un determinado valor T_C , conocido como temperatura crítica. El fenómeno se explica con la teoría BCS (Bardeen, Cooper y Schreiffier), en la cual los electrones forman pares y se condensan en un estado de mínima energía, resultando en estados cuánticos altamente ordenados y coherentes. Los pares de electrones no se dispersan por la red y fluyen libremente, dando lugar a la superconductividad. El efecto Josephson en junturas superconductoras y la cuantización de flujo magnético, son algunos ejemplos de tales fenómenos cuánticos macroscópicos.
- Efecto Josephson. El efecto Josephson se produce en dos superconductores que son separados por un dieléctrico. El descubrimiento del efecto Josephson abrió la puerta para una amplia gama de aplicaciones de los superconductores. Propiedades de los superconductores se han explorado para producir interferómetro cuántico superconductor - magnetómetro, voltímetro, generador de ondas electromagnéticas, detector y mezclador de frecuencia, y etc.
- Efecto cuántico macroscópico en helio líquido. La fase líquida del helio representa un estado ordenado. Cuando la temperatura está por debajo de 2,17 K, la fase líquida, referida como He II se convierte en un superfluido. El superfluido tiene una baja viscosidad y su velocidad es independiente de la diferencia de presión en los capilares y su longitud. Tal propiedad se llama superfluidez de ^4He . Transiciones de fase de ^3He , muestran también características de superconductividad y superfluidez.
- Sistemas de spin polarizado en átomos de hidrogeno. Los átomos de hidrógeno son bosones y obedecen las estadísticas de Bose-Einstein. Debido a alta presión, su estado se somete a un cambio cuando su densidad alcanza un alto valor. Por encima de esta densidad crítica, el exceso de átomos son transferidos a un estado que corresponde a un mínimo de energía, y se produce la condensación. En otras palabras, cuando la temperatura está por debajo del valor crítico T_C una cantidad considerable de átomos de hidrógenos en el sistema, ocupan el mismo estado cuántico, a través de la atracción y la coherencia entre ellos.
- Condensación Bose-Einstein de excitones. Un electrón y un hueco puede formar un estado base, o un exciton. Un exciton tiene su propia masa, energía y momento. Es posible que dos excitones con spin opuesto formen una molécula exciton con características de Boson, debido a la fuerza atractiva entre ellos. Cuando la temperatura está por debajo de un cierto valor crítico, una cantidad considerable moléculas exciton condensan al estado base con momento cero, resultando en condensación de Bose-Einstein, y en superfluidez como en el helio líquido.

Bajo determinadas condiciones como muy baja temperatura, alta presión o de alta densidad, un gran número de partículas microscópicas se junta unas con otras y se condensan, resultando en

¹PANG XIAO - FENG, FENG YUAN-PING. Quantum Mechanics in Nonlinear Systems. sec 2.1

estados ordenados y coherentes, de baja energía. En este estado altamente ordenado, el movimiento colectivo de un gran número de partículas es el mismo que el de una sola partícula dando lugar a los efectos cuánticos macroscópicos.

En ausencia de un campo externo, el Hamiltoniano de un determinado sistema físico puede ser descrito por²

$$H = \int \mathcal{H} dx = \int \left[-\frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 - \alpha |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4 \right] dx \quad (3.1)$$

Las unidades del sistema en el cual $m = \hbar = c = 1$ son usadas por conveniencia. El Hamiltoniano (3.1) describe los estados cuánticos macroscópicos incluyendo estados superconductores y superfluidos.

Si (3.1) se escribe de la siguiente manera:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + U_{eff}(\phi), \quad U_{eff}(\phi) = -\alpha \phi^2 + \lambda \phi^4, \quad (3.2)$$

se puede observar que la energía potencial tiene dos extremos $\phi_0 = 0$ y $\phi_0 = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{2\lambda}}$, y el mínimo está localizado en:

$$\phi_0 = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{2\lambda}} = \langle 0 | \phi | 0 \rangle, \quad (3.3)$$

más que en $\phi_0 = 0$. Así, $\phi_0 = 0$ corresponde al estado base normal, mientras que $\phi_0 = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{2\lambda}}$ es el estado base de sistemas cuánticos macroscópicos. Los dos estados base satisfacen $\langle 0 | \phi | 0 \rangle \neq -\langle 0 | \phi | 0 \rangle$, bajo la transformación $\phi \rightarrow -\phi$. La simetría del estado base ha sido destruida debido al termino no lineal $\lambda |\phi|^4$ en el Hamiltoniano. La transición del estado $\phi_0 = 0$ a el estado $\phi_0 = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{2\lambda}}$ y la condensación de partículas, son resultado del rompimiento espontaneo de simetría debido a interacciones no lineales. Considerando la derivada funcional de (3.1), e igualando a cero $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = 0$, se obtiene:

$$\nabla^2 \phi - 2\alpha \phi + 4\lambda |\phi|^2 \phi = 0, \quad (3.4)$$

esta ecuación corresponde a la ecuación no lineal de Schrödinger independiente del tiempo. El estado cuántico macroscópico o el estado base superconductor formado después del rompimiento espontaneo de simetría, es un estado condensado de Bose-Einstein. La condensación de Bose-Einstein es un fenómeno no lineal, el estado es coherente y puede ser descrito por la ecuación Gross-Pitaevskii:

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t'} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} - \lambda |\phi|^3 + V(x') \phi, \quad (3.5)$$

considerando $t' = \frac{t}{\hbar}$ y $x' = x \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}$.

²PANG XIAO - FENG, FENG YUAN-PING. Quantum Mechanics in Nonlinear Systems. sec 2.2

El Hamiltoniano de un sistema condensado fue formulado por Elyutin de la siguiente manera

$$\mathcal{H} = \left| \frac{\partial \phi}{\partial x'} \right|^2 + V(x') |\phi|^2 - \frac{1}{2} \lambda |\phi|^4, \quad (3.6)$$

donde λ es el parámetro de no linealidad y $V(x')$ corresponde al potencial.

Se puede observar que (3.5) es exactamente igual a (3.4) y que (3.6) a (3.1), esto confirma la exactitud de la teoría de condensación Bose-Einstein. La dinámica coherente de las funciones de onda macroscópica condensadas permiten la formación de ondas solitarias no lineales, de esta manera las ecuaciones dinámicas en sistemas cuánticos macroscópicos tienen soluciones solitónicas.

Haciendo una comparación entre los efectos cuánticos macroscópicos y los efectos cuánticos microscópicos, se puede resumir las principales diferencias entre ellos.

1. Los efectos cuánticos microscópicos se producen cuando las partículas están confinadas en un espacio finito, mientras que los efectos cuánticos macroscópicos se deben al movimiento colectivo de las partículas microscópicas en sistemas no lineales.
2. Los efectos cuánticos microscópicos están caracterizados por la cuantización de cantidades físicas, tales como la energía, el momento y el momento angular de las partículas microscópicas. Los efectos cuánticos macroscópicos están representados en discontinuidades en cantidades como la resistencia, voltaje, flujo magnético. Los efectos cuánticos macroscópicos pueden ser observados directamente en experimentos.
3. Los estados cuánticos macroscópicos son estados coherentes y condensados. Los efectos cuánticos microscópicos involucran Bosones y Fermiones, mientras que solo Bosones o combinaciones de Fermiones se encuentran en efectos cuánticos macroscópicos.
4. Los efectos cuánticos microscópicos son efectos lineales y el movimiento de las partículas está descrito por ecuaciones diferenciales lineales, tal como la ecuación de Schrödinger. Por otra parte los efectos cuánticos macroscópicos son efectos no lineales y el movimiento de tales partículas está descrito por ecuaciones diferenciales parciales no lineales tal como la ecuación no lineal de Schrödinger (3.4).

3.2. MECÁNICA CUÁNTICA EN SISTEMAS NO LINEALES

Los efectos cuánticos macroscópicos analizados en la sección 2.1, se deben principalmente a interacciones no lineales. Las ecuaciones dinámicas de tales sistemas son funciones no lineales de la función de onda de las partículas microscópicas, para el estudio de tales sistemas, se plantea el establecimiento de una teoría cuántica correcta.

El concepto de mecánica cuántica en sistemas no-lineales fue propuesto por muchos científicos como Mielnik, Jordania, Gisin, Weinberg y Doebner³. Los principios y teorías de la mecánica cuántica en sistemas no lineales se pueden establecer, considerando como base los efectos cuánticos macroscópicos, la teoría de solitones y las teorías establecidas de superconductividad y superfluidez.

Los principios fundamentales de la mecánica cuántica no lineal pueden ser resumidos de la siguiente manera⁴:

³PANG XIAO - FENG, FENG YUAN-PING. Quantum Mechanics in Nonlinear Systems. pág.83

⁴PANG XIAO - FENG, FENG YUAN-PING. Quantum Mechanics in Nonlinear Systems. sec 3.2

1. Las partículas microscópicas en un sistema cuántico no lineal están descritas por la siguiente función de onda,

$$\phi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}, t)e^{i\theta(\vec{r}, t)}, \quad (3.7)$$

donde la amplitud $\varphi(\vec{r}, t)$ y la fase $\theta(\vec{r}, t)$ de la función de onda son funciones del espacio y del tiempo. 2. En el caso no relativista, la función de onda $\phi(\vec{r}, t)$, satisface la ecuación generalizada no lineal de Schrödinger (NLSE),

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi \pm b |\phi|^2 \phi + V(\vec{r}, t)\phi, \quad (3.8)$$

donde V es un potencial externo y b es un coeficiente de interacción no lineal.

Estas son las dos hipótesis de la mecánica cuántica no lineal, estas ecuaciones son usadas para estudiar el movimiento de electrones superconductores y átomos de helio en estado de superfluido. Ha sido demostrado que (3.8) describe las leyes de movimiento y las propiedades de las partículas microscópicas en sistemas cuánticos no lineales.

La mecánica cuántica no lineal es una integración de superconductividad, superfluidez, y teoría moderna de solitones, y su fundamento experimental esta en los fenómenos cuánticos macroscópicos. De las dos hipótesis se puede deducir:

1. El módulo al cuadrado de la función de onda $\phi(\vec{r}, t)$ dado en(3.7),

$$\left| \phi(\vec{r}, t) \right|^2 = \left| \varphi(\vec{r}, t) \right|^2 = \rho(\vec{r}, t)$$

corresponde a la densidad de masa de las partículas microscópicas en un punto. De esta manera el concepto de probabilidad o interpretación estadística de la función de onda no es tan relevante en la mecánica cuántica no lineal. La función de onda (3.7) tiene forma similar que en mecánica cuántica lineal, pero el significado es completamente diferente. Aquí $\varphi(\vec{r}, t)$ es la envolvente de las partículas microscópicas y $e^{i\theta(\vec{r}, t)}$ es una onda portadora de $\phi(\vec{r}, t)$.

2. La función de onda $\phi(\vec{r}, t)$ representa un soliton o una onda solitaria. La ecuación (3.8) es una ecuación dinámica y tiene soluciones solitónicas. Por consiguiente, una partícula microscópica es un soliton, o esta descrita por un soliton, en mecánica cuántica no lineal.

3. El concepto de operador en mecánica cuántica lineal es aun utilizado en mecánica cuántica no lineal. Sin embargo, los operadores son no lineales, y ciertas propiedades de los operadores lineales no son utilizadas, tal como, el conjugado Hermitico del momento y operadores coordinados. Se construyen operadores no lineales y son usados en mecánica cuántica no lineal. Por ejemplo, la ecuación (3.8) puede escribirse como

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \hat{H}(\phi)\phi. \quad (3.9)$$

El operador Hamiltoniano $\hat{H}(\phi)$ tiene una dependencia no lineal de ϕ y está dada por

$$\hat{H}(\phi) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - b|\phi|^2 + V(\vec{r}, t). \quad (3.10)$$

4. Debido a la no linealidad de los operadores en mecánica cuántica no lineal, ya no es necesario para sus valores propios o estados $\phi(\vec{r}, t)$, satisfacer el principio de superposición lineal, $\phi = \sum_n C_n \phi_n$. Esto implica que la superposición de dos estados, no es necesariamente un estado del sistema. Como consecuencia se tiene la modificación del principio de superposición para mecánica cuántica no lineal. 5. En mecánica cuántica no lineal, las ecuaciones dinámicas son no lineales en la función de onda ϕ . Los operadores Hamiltoniano dependen de la función de onda.

3.3. INTEGRAL DE CAMINO DE FEYNMAN

En fenómenos macroscópicos, como superconductividad y superfluidez, un gran número de grados de libertad se juntan para formar una sola variable colectiva. Las técnicas de integrales de camino han demostrado ser ideales para el análisis de estos sistemas. La integral de camino, es relevante para diversas aplicaciones en física de muchas partículas⁵. En términos generales, existen dos planteamientos básicos para la formulación de la mecánica cuántica: El enfoque operador, basado en la cuantización canónica de observables físicos, así como las correspondientes operadores álgebra, y la integral de camino de Feynman. La integral de camino de Feynman, presenta muchas ventajas, entre las cuales se pueden destacar:

- La integral de camino hace explícito el uso de la mecánica clásica como una plataforma sobre la cual construir una teoría de las fluctuaciones cuánticas. Las soluciones clásicas de las ecuaciones de Hamilton del movimiento son un ingrediente central del formalismo, por esta razón, la integración de camino, ha resultado ser una herramienta indispensable en campos como Caos Cuántico, donde las manifestaciones cuánticas de comportamientos clásicos no triviales son investigadas.
- Las integrales de camino permiten una formulación eficaz de aproximaciones no perturbativas a soluciones de problemas de mecánica cuántica.

3.3.1. Acción clásica. La acción clásica se define ⁶:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt. \quad (3.11)$$

Donde $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ es la función Lagrangiana del sistema y $q_i(t)$ asume valores preestablecidos en t_1 y t_2 , pero puede variar arbitrariamente para valores entre t_1 y t_2 . El movimiento del sistema desde su posición en el espacio de configuración en el tiempo t_1 a su posición en el tiempo t_2 , sigue una trayectoria para la cual la acción (3.11), tiene un valor estacionario. Esto significa que si el conjunto de funciones $q_i(t)$ da un valor máximo (o mínimo) a la integral S , luego un conjunto de variaciones, sin importar que tan cerca estén al conjunto $q_i(t)$, deben hacer que S disminuya (o aumente). En términos del cálculo de variaciones, esto significa:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0, \quad (3.12)$$

⁵FEYNMAN PATH INTEGRAL. pág.(103-104)

⁶CHOW TAI L.Classical Mechanics. pág.(114-115)

donde $q_i(t)$ se sujeta a la condición $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$.

Por lo tanto, el extremo es una curva, que está condicionada por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.13)$$

Las ecuaciones 3.13, corresponden a las ecuaciones clásicas de Lagrange de movimiento. En mecánica clásica, la forma de la integral de acción $S = \int L dt$, permite determinar la acción a lo largo de un conjunto de curvas vecinas, y en ese orden definir la curva de mínima acción. En mecánica cuántica tanto la forma de la integral así como el valor del extremo son importantes.

3.3.2. Integral de camino. ⁷Considerando el sistema, bajo las reglas de la mecánica cuántica, cada trayectoria contribuye a la amplitud total para ir de $q_i(t_1)$ a $q_i(t_2)$. Todas las trayectorias contribuyen por igual a la amplitud total, pero en fases diferentes. La fase de contribución de un determinado camino es la acción de S para el camino en unidades cuánticas de acción \hbar . La probabilidad $P(2, 1)$ para ir de un punto $q_i(t_1)$ en el tiempo t_1 a el punto $q_i(t_2)$ en el tiempo t_2 , es el módulo al cuadrado $P(2, 1) = |K(2, 1)|^2$ de la amplitud $K(2, 1)$, para ir de $q_i(t_1)$ hasta $q_i(t_2)$. Esta amplitud es la suma de la contribución $\phi(q_i(t))$ para cada trayectoria

$$K(2, 1) = \sum \phi(q_i(t)), \quad (3.14)$$

donde la sumatoria se hace sobre todos los caminos desde $q_i(t_1)$ asta $q_i(t_2)$.

La contribución de una trayectoria tiene una fase proporcional a la acción S :

$$\phi(q_i(t)) = C e^{(\frac{i}{\hbar})S[q_i(t)]}, \quad (3.15)$$

la acción es la correspondiente a la del sistema clásico (3.11) y la constante C se escoge normalizando K . En la ecuación (3.15), todas las trayectorias contribuyen igualmente. En el límite clásico, alguna trayectoria tiene que ser más importante. La aproximación clásica corresponde al caso en el que las dimensiones, masas, tiempos, etc, son tan grandes que S es grande en relación con \hbar . Pero en nivel cuántico, S puede ser comparable con \hbar , y todas las trayectorias deben ser sumadas en (3.14). Escribiendo la suma sobre todas las trayectorias, se tiene la integral de camino:

$$K(2, 1) = \int_{q_i(t_1)}^{q_i(t_2)} D(q, p) e^{(\frac{i}{\hbar})S[q_i(t_2), q_i(t_1)]}, \quad (3.16)$$

donde S es la acción clásica de la trayectoria. Considerando la conexión de el Hamiltoniano al Lagrangiano a través de la transformación de Legendre, $H(p_i, q_i) = p_i q_i - L(p_i, q_i)$, la acción

⁷FEYNMAN R.P., HIBBS A.R. Quantum Mechanics and Path Integrals. pág.(27-29)

clásica de una trayectoria $t \mapsto q_i(t)$ está dada por:⁸

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} [p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i)] dt \quad (3.17)$$

Con (3.17) se construye la formulación Hamiltoniana de la integral de camino:

$$K(2, 1) = \int_{q_i(t_1)}^{q_i(t_2)} D(q_i, p_i) \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i)) dt\right]. \quad (3.18)$$

La integración se extiende sobre todas las curvas posibles a través del espacio de fase clásico del sistema el cual comienza y termina en los mismos puntos de configuración $q_i(t_1)$ y $q_i(t_2)$, respectivamente. La contribución de cada trayectoria es ponderada con su acción Hamiltoniana.

3.4. TUNELAMIENTO CUÁNTICO

La conexión de los principios de la acción de mecánica clásica es particularmente aparente en problemas de tunelamiento cuántico⁹, el tunelamiento es un fenómeno en el cual una partícula de energía E , puede tunelar a través de una barrera de potencial de altura $V > E$. La amplitud de transmisión durante el tunelamiento, es proporcional a¹⁰:

$$\exp\left[\frac{-1}{\hbar} \int_{q_0}^q \sqrt{2m(V(q) - E)} dq\right], \quad (3.19)$$

donde q_0 es el punto de retorno clásico. Luego la probabilidad de encontrar la particular que viaja de izquierda a derecha de la barrera $q_0 + b$, donde b corresponde al ancho de la barrera, es proporcional al cuadrado de la amplitud o al factor:

$$\exp\left[\frac{-2}{\hbar} \int_{q_0}^{q_0+b} \sqrt{2m(V(q) - E)} dq\right]. \quad (3.20)$$

Para que la probabilidad no sea despreciable se debe tener

$$2\sqrt{2m(V_m - E)}b \approx \hbar. \quad (3.21)$$

Donde V_m es la altura máxima de el potencial. Esta consideración muestra que el tunelamiento es un fenómeno exclusivamente cuántico y no tiene equivalente clásico.

3.5. APROXIMACION SEMICLÁSICA. LIMITE WKB

Problemas de tunelamiento pueden ser resueltos considerando la aproximación semi clásica, en este límite las teorías son ampliamente gobernadas por las estructuras clásicas con fluctuaciones cuánticas impuestas.

Un método utilizado para el estudio de fenómenos de tunelamiento cuántico, en la aproximación

⁸FEYMAN PATH INTEGRAL. pág.109

⁹FEYMAN PATH INTEGRAL. pág.105

¹⁰MOHSEN R.Quantum Theory of tunneling. pág.10

semiclásica es el método WKB (Wentzel, Kramers y Brillouin). En el límite WKB¹¹ la función de onda es expresada por medio de la acción clásica de Hamilton-Jacobi, $\Phi = A \exp(\frac{iS}{\hbar})$.

En el límite cuasi- clásico, se restringe situaciones donde la acción es mucho más grande que \hbar . El límite WKB es especialmente conveniente para tratar problemas de tunelamiento, porque equivale a calcular la parte imaginaria de la acción (la cual es compleja) y ponerla en el orden correcto de \hbar . El factor de tunelamiento está dado por

$$T = \exp(\frac{-2S_E}{\hbar}), \quad (3.22)$$

donde S_E es la parte imaginaria de la acción, la cual luego entra en el módulo de la función de onda como un exponente real (en lugar del exponente imaginario importante para el límite clásico de la mecánica cuántica).

La parte imaginaria de la acción es calculada en dos pasos:

- Primero se hace el cambio de las variables conjugadas (q, p) en (q, ip) en la formulación clásica Hamilton - Jacobi de la mecánica cuántica, el Hamiltoniano $H(q, p)$ se convierte en $H(q, ip)$.
- En segundo lugar el problema de extremalización de la nueva acción, la acción Euclidiana, es formalmente otro problema de la mecánica clásica. Considerando el Hamiltoniano $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$, asociado al problema de una partícula en un pozo doble de potencial, la acción Euclidiana es calculada con:

$$S_E = \int_{q(t_f)}^{q(t_0)} p dq, \quad (3.23)$$

deducida desde el Hamiltoniano $H_E = -\frac{p^2}{2m} + V(q)$, pero con la misma energía del movimiento clásico. Para este potencial, esto significa una rotación de 180 grados, exhibiendo dos colinas de energía máxima. Los valores de $q(t_0)$ y $q(t_f)$ en la ecuación (3.23) son los puntos de retorno clásicos definidos para $E = V(q)$. Para calcular S_E , se tiene que encontrar la trayectoria que conecte estos puntos, para calcular la integral de camino Euclidiana. Esto se desarrolla resolviendo las ecuaciones de Hamilton para el Hamiltoniano Euclidiano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} &= \frac{\partial H_E}{\partial p} \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{\partial H_E}{\partial q}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

considerando las condiciones iniciales, para el valor conocido $q(t_0)$ y un valor desconocido $p(t_0)$, realizando variaciones asta converger hacia una trayectoria que finalice en $q(t_f)$, que proporciona la acción definida en (3.23). Las ecuaciones (3.24) son obtenidas desde Hamiltoniano clásico del sistema, con el cambio de t en it , y p en ip . Las ecuaciones (3.24) son llamadas ecuaciones Euclidianas de movimiento.

¹¹POMEAU Y.,LE BERRE M., Optical solitons as quantum objects.sec IV

4 CONDICIONES DE ESTABILIDAD CLÁSICA

En este capítulo se presenta el trabajo realizado para alcanzar los objetivos propuestos para el estudio de los parámetros y condiciones que rigen la estabilidad clásica de un sistema de cadenas oscilatorias no lineales acopladas, utilizando funciones de prueba. El estudio de las condiciones de estabilidad de las ecuaciones diferenciales dinámicas, propuestas para el sistema, bajo el modelo β -FPU para cadenas oscilatorias (2.12), se realiza por medio del método variacional y análisis numérico.

Las ecuaciones que describen la dinámica del sistema, permiten aplicar el método variacional, a través de la formulación clásica del Lagrangiano, el cual se determina para funciones de prueba con parámetros libres.

Finalmente, las ecuaciones de Euler-Lagrange posibilitan extraer información del sistema, mediante diagramas de fase para cada uno de los parámetros incluidos, de esta manera se determina en forma numérica la evolución del sistema.

4.1. MÉTODO VARIACIONAL

Las ecuaciones que describen la dinámica de cadenas oscilatorias no lineales acopladas, se construyen asignando funciones complejas $\Psi(x, t)$ a cada una de las cadenas. Las ecuaciones diferenciales de acoplamiento establecidas en la sección 1.1, para el sistema de cadenas, se pueden escribir de la siguiente manera¹:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} + \omega_m^2 \Psi_1 \right) + \beta |\Psi_1|^2 \Psi_1 = c \Psi_2, \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} + \omega_m^2 \Psi_2 \right) + \beta |\Psi_2|^2 \Psi_2 = c \Psi_1, \quad (4.2)$$

donde ω_m es un parámetro asociado a la dinámica de las cadenas, β es la constante de interacción no lineal y c es la constante de acoplamiento lineal entre cadenas. El Lagrangiano L , de las ecuaciones (4.1) y (4.2) está dado por:

$$L(\Psi_1, \Psi_2, \dot{\Psi}_1, \dot{\Psi}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left| \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right|^2 - \omega_m^2 |\Psi_1|^2 - \omega_m^2 |\Psi_2|^2 - \beta (|\Psi_1|^4 + |\Psi_2|^4) + 2c(\Psi_1 \Psi_2^* + \Psi_2 \Psi_1^*) \right) dx. \quad (4.3)$$

El cual se obtuvo mediante el proceso de derivada funcional, descrito en el anexo A.

²La idea de la aproximación variacional consiste en insertar funciones de prueba apropiadas con

¹KOSEVICH YU. A, MANEVITCH L.I., SAVIN A.V. Classical counterpart of macroscopic tunneling quantum dynamics. Phys. Rev. E 77, (2008)

²UZUNOV I.M., KIVSHAR Y.S., MALOMED B.A. Pulse switching in nonlinear fiber directional couplers. Phys. Rev. E. Vol 51, Number 3

parámetros libres en la ecuación (4.3). Posteriormente realizando la integración con respecto a x se encuentra el Lagrangiano, el cual varía con relación a los parámetros escogidos.

Finalmente, con las ecuaciones de Euler-Lagrange para los parámetros ³:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (4.4)$$

se obtiene un nuevo conjunto de ecuaciones diferenciales, las cuales describen la evolución de los pulsos. De las ecuaciones (4.4) se extrae información del sistema considerando los diagramas de fase de los parámetros. Un diagrama de fase es una herramienta útil para el estudio cualitativo del sistema dinámico no lineal, permitiendo una descripción de las principales características del sistema y el análisis de las condiciones en las cuales se presenta mayor estabilidad.⁴

En la utilización del método variacional el punto crítico es la elección adecuada de las funciones de prueba, ya que pueden reflejar, al menos, aproximadamente, la evolución de los pulsos durante el proceso de acoplamiento.

4.2. FUNCIONES DE PRUEBA IDÉNTICAS

En una primera aproximación, el estudio del comportamiento numérico del sistema de cadenas acopladas, se realiza considerando funciones de prueba idénticas, donde

$$\Psi_1(x, t) = \Psi_2(x, t) = \varphi(x, t).$$

Usando la suposición general para la función de prueba propuesta para guías de ondas no lineales⁵, se asume la siguiente forma para $\varphi(x, t)$:

$$\varphi(x, t) = \Psi_{max} \text{Sech}[x\lambda(t)] \exp i\theta(t), \quad (4.5)$$

En esta consideración, la función de onda está asociada a un pulso que depende del parámetro $\lambda(t)$ y una fase $\theta(t)$, con una amplitud máxima $\Psi_{max} = 1$.

Reemplazando la función de prueba (4.5), en la ecuación (4.3) e integrando con respecto a x , se obtiene el Lagrangiano:

$$L(\lambda, \theta, \dot{\lambda}, \dot{\theta}) = \frac{1}{9\lambda(t)^3} \left(12\lambda(t)^4 + 12\lambda(t)^2(-3\omega_m^2 + 6c - 2\beta + 3\dot{\theta}(t)^2) + (12 + \pi^2)\dot{\lambda}(t)^2 \right). \quad (4.6)$$

Las ecuaciones de Euler - Lagrange, determinadas por medio de la ecuación (4.4), para los parámetros $\lambda(t)$ y $\theta(t)$, son:

$$12\lambda(t)^4 - 12\lambda(t)^2(-3\omega_m^2 + 6c - 2\beta + 3\dot{\theta}(t)^2) + 3(12 + \pi^2)\dot{\lambda}(t)^2 = 2(12 + \pi^2)\lambda(t)\ddot{\lambda}(t), \quad (4.7)$$

³CHOW TAI L. Classical Mechanics. pág.118

⁴CHOW TAI L. Classical Mechanics. pág.287

⁵KOSEVICH Y.A., MANEVITCH L.I., SAVIN A.V. Energy transfer in coupled nonlinear phononic waveguides. Journal of Physics: Conference Series 92 (2007)

$$\dot{\theta}(t)\dot{\lambda}(t) - \lambda(t)\ddot{\theta}(t) = 0. \quad (4.8)$$

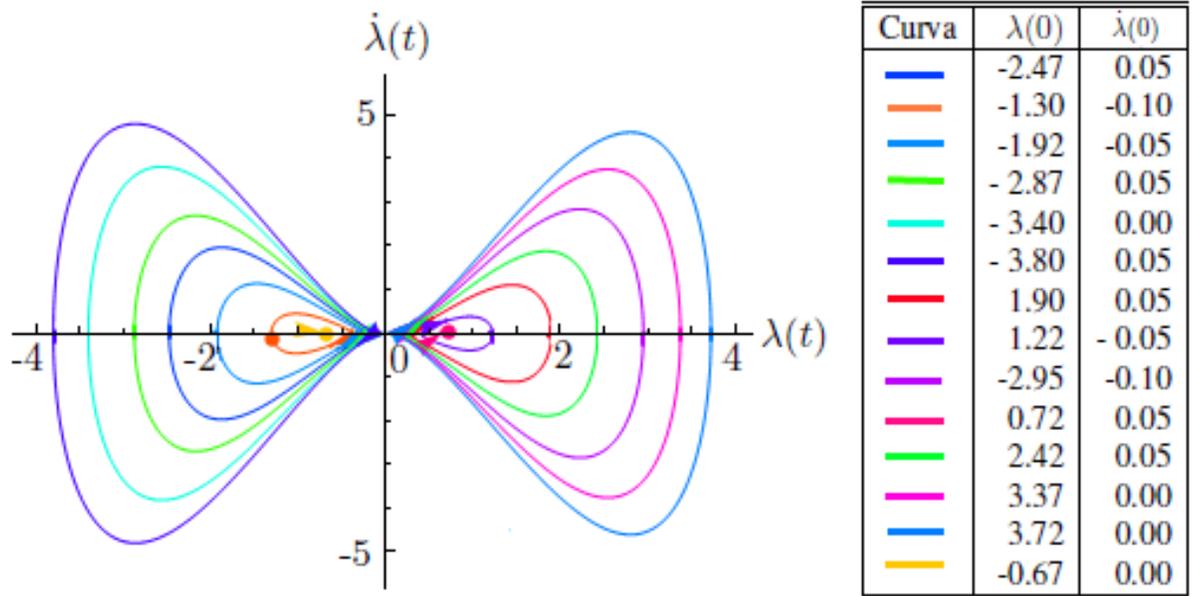
Integrando la ecuación (4.8) se obtiene $\dot{\theta}(t) = c_1\lambda(t)$, donde c_1 es una constante de integración. Con este resultado reemplazando en (4.7) se encuentra una ecuación para el parámetro $\lambda(t)$:

$$12\lambda(t)^4 - 12\lambda(t)^2(-3\omega_m^2 + 6c - 2\beta + 3(c_1\lambda(t))^2) + 3(12 + \pi^2)\dot{\lambda}(t)^2 - 2(12 + \pi^2)\lambda(t)\ddot{\lambda}(t) = 0, \quad (4.9)$$

La ecuación diferencial no lineal de segundo orden (4.9), está asociada únicamente a el parámetro $\lambda(t)$. Mediante el análisis del mapa de fase⁶ de esta ecuación se puede extraer información sin resolverla de forma analítica. El mapa de fase $(\lambda, \dot{\lambda})$ se presenta en la figura 4.1.

Las curvas se construyen para un sistema de cadenas con factor de no linealidad $\beta = 2$ y constante de acoplamiento entre cadenas $c = 0.3$, considerando el parámetro $\omega_m = 1$ y la constante de integración $c_1 = 1$.

Figura 4.1: Diagrama de fase $(\lambda, \dot{\lambda})$ para la ecuación (4.9). Las líneas de cada color corresponden a diferentes condiciones iniciales del sistema especificadas en la tabla. Los diagramas se construyen para el parámetro de no linealidad $\beta = 2$, factor de acoplamiento $c = 0.3$ y constante de integración $c_1 = 1$.



En el diagrama de fase del parámetro λ , las curvas están asociadas a distintas condiciones iniciales relacionadas a diferentes soluciones de la ecuación diferencial. Por cada punto en el diagrama de fase pasa una curva solución con condiciones iniciales únicas. En la figura 4.1, las curvas de colores se asocian a diferentes condiciones iniciales y sus respectivos valores se presentan en la tabla.

⁶CHOW TAI L. Classical Mechanics. pág.291

Las curvas de fase para la ecuación diferencial del parámetro λ , presentan un comportamiento similar a las curvas de fase de un sistema periódico de ondas no lineales⁷, en las que las trayectorias cerradas que emergen desde el origen van alrededor de su centro y perpendicular al eje λ . Cada curva de fase viaja en el sentido de las manecillas del reloj, a medida que el tiempo aumenta. Los puntos de equilibrio, corresponden a soluciones estáticas en las que no hay cambio del sistema con el paso del tiempo.

En el diagrama de fase 4.1, las trayectorias cerradas en torno al centro corresponden a soluciones periódicas y los puntos centrales son las trayectorias en las cuales el sistema es más estable.

Las condiciones iniciales asociadas a uno de los puntos de estabilidad, para el parámetro $\lambda(t)$ son:

- $\lambda(0) = 0.725$ y $\dot{\lambda}(0) = 0.050$.

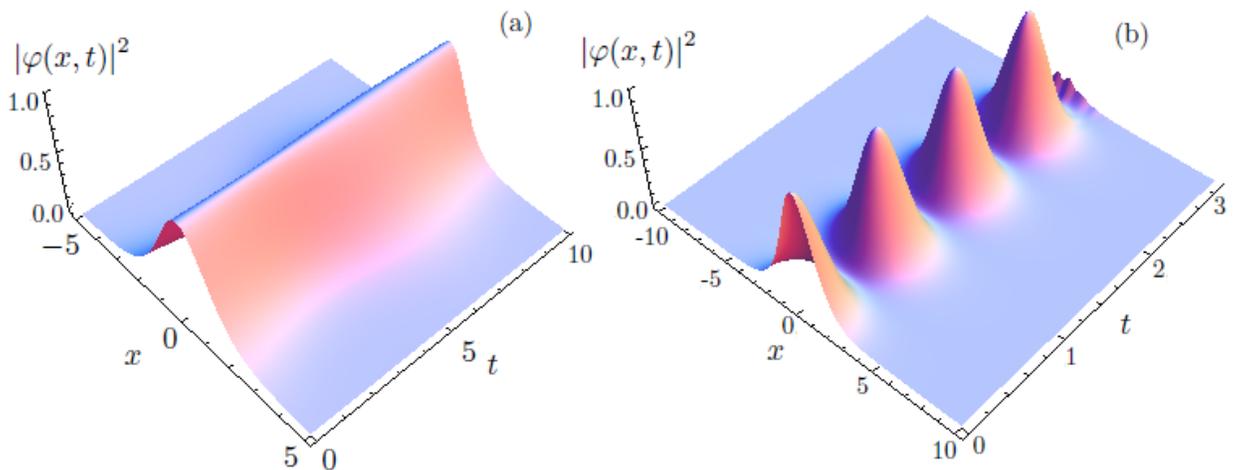
Por otra parte considerando $\dot{\theta}(t) = c_1 \lambda(t)$. Para un valor establecido $c_1 = 1$ en la construcción de los diagramas de fase, las condiciones iniciales para $\theta(t)$ son:

- $\theta(0) = 0.000$ y $\dot{\theta}(0) = 0.725$.

Las condiciones iniciales establecidas para el sistema de cadenas, permiten resolver de forma numérica las ecuaciones de Euler - Lagrange (4.7) y (4.8), con el fin de obtener la construcción numérica de la función de prueba propuesta en la ecuación (4.5), los resultados se presentan en la figura 4.2(a).

Además, los valores establecidos para las constantes de interacción lineal c y no lineal β , junto con la construcción numérica de la función de prueba, permiten la integración numérica de las ecuaciones (4.1) y (4.2), los resultados obtenidos se presentan en la figura 4.2(b).

Figura 4.2: (a) Modulo al cuadrado de la función de prueba $|\varphi(x, t)|^2$ con $\Psi_{max} = 1$. (b) Integración numérica de las ecuaciones diferenciales (4.1) y (4.2) para cadenas con $\beta = 2$, $\omega_m = 4$ y $c = 0.3$.



La simulación numérica del modulo al cuadrado de la función de prueba propuesta en la ecuación (4.5), describe un pulso estable y constante en el tiempo, con una amplitud máxima $\Psi_{max} = 1$, figura (a). El resultado numérico de la integración de las ecuaciones de acoplamiento (4.1) y (4.2),

⁷INFELD, E., ROWLANDS, G., Nonlinear waves, solitons and chaos. pág.147-148

para la función de prueba (4.5) presentado en la figura (b), describe pulsos oscilatorios, constantes y estables para cierto intervalo de tiempo.

Los resultados obtenidos en forma numérica, presentados en la figura 4.2(b), son estables para cierto intervalo de tiempo. Bajo esta consideración, se plantea la inquietud de establecer funciones de prueba idénticas con parámetros adicionales y variaciones en la amplitud del pulso, que permitan ampliar los intervalos de tiempo para la observación de la evolución del sistema en un mayor rango de estabilidad.

4.3. FUNCIONES DE PRUEBA IDÉNTICAS CON PARÁMETROS ADICIONALES

La construcción de funciones de prueba idénticas, que permitan observar el comportamiento estable del sistema, en un rango mayor de tiempo, se plantean para:

$$\Psi_1(x, t) = \Psi_2(x, t) = \varphi(x, t).$$

Teniendo en cuenta la inclusión de parámetros adicionales en la nueva función $\varphi(x, t)$, la función de prueba se asume usando la suposición general para la función de prueba propuesta para guías de ondas no lineales⁸, de la siguiente manera:

$$\varphi(x, t) = \Psi_{max} \text{Sech}[x\lambda(t)] \exp i\theta(t) \exp i\omega t. \quad (4.10)$$

En este caso se incluye el parámetro ω multiplicado por el tiempo en un factor exponencial, y se conservan los términos dependientes del tiempo $\lambda(t)$ y $\theta(t)$. El Lagrangiano del sistema se obtiene reemplazando la función $\varphi(x, t)$ en la ecuación (4.3) e integrando con respecto a x :

$$L(\lambda, \theta, \dot{\lambda}, \dot{\theta}) = \frac{\Psi_{max}^2}{9\lambda(t)^3} \left(12\lambda(t)^2(-3\omega_m^2 + 6c - 2\Psi_{max}^2\beta + 3\omega^2 + \lambda(t)^2 + 3\dot{\theta}(t)(2\omega + \dot{\theta}(t))) + (12 + \pi^2)\dot{\lambda}(t)^2 \right). \quad (4.11)$$

El termino adicional presente en la función de prueba, se observa también en el Lagrangiano del sistema. Además, el Lagrangiano depende nuevamente de los parámetros λ , θ y de sus derivadas temporales. De esta manera las ecuaciones de Euler-Lagrange para el sistema, deducidas a partir de (4.11), para los parámetros $\lambda(t)$ y $\theta(t)$ son:

$$3(4\lambda(t)^4 + (12 + \pi^2)\dot{\lambda}(t)^2) = 2\lambda(t)(6\lambda(t)(-3\omega_m^2 + 6c - 2\Psi_{max}^2\beta + 3\omega^2 + 3\dot{\theta}(t)(2\omega + \dot{\theta}(t))) + (12 + \pi^2)\ddot{\lambda}(t)), \quad (4.12)$$

$$(\omega + \dot{\theta}(t))\dot{\lambda}(t) = \lambda(t)\ddot{\theta}(t). \quad (4.13)$$

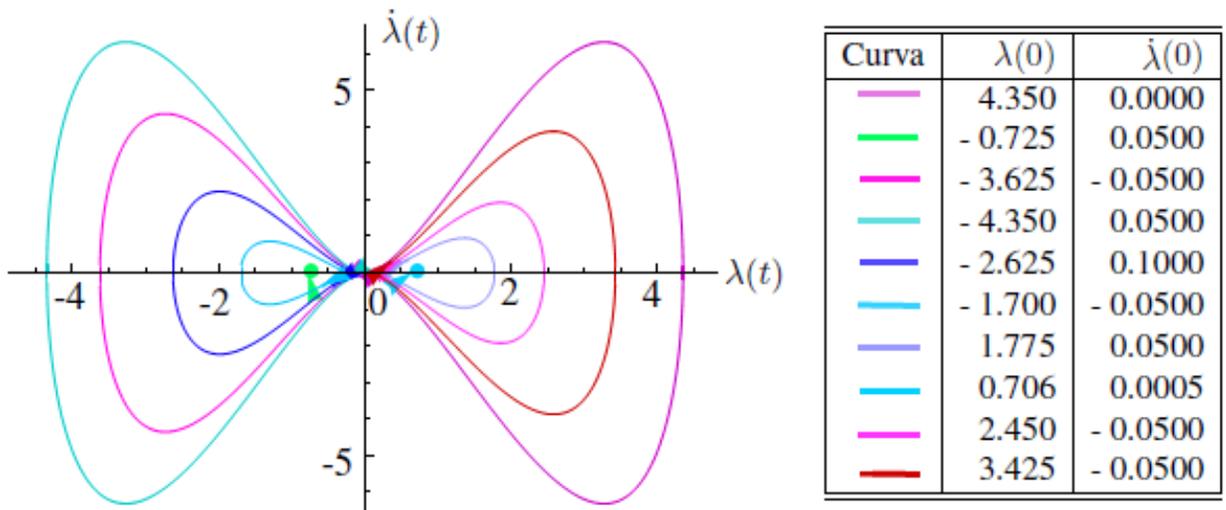
De la ecuación (4.13) se obtiene $\dot{\theta}(t) = -\omega + c_1\lambda(t)$, donde c_1 es a una constante de integración. Este resultado permite determinar una ecuación diferencial para el parámetro $\lambda(t)$, haciendo uso de la ecuación (4.12), y considerando una amplitud máxima $\Psi_{max} = 1$:

⁸KOSEVICH Y.A.,MANEVITCH L.I.,SAVIN A.V.Energy transfer in coupled nonlinear phononic waveguides.Journal of Physics: Conference Series 92 (2007)

$$\frac{3}{2\lambda(t)}(12 + \pi^2)\dot{\lambda}(t)^2 - (12 + \pi^2)\ddot{\lambda}(t) = -6\lambda(t)(3\omega_m^2 - 6c + 2\beta + (1 - 3c_1^2)\lambda(t)^2) \quad (4.14)$$

La ecuación diferencial determinada para el parámetro $\lambda(t)$, se analiza considerando diagramas de fase, los cuales son útiles para ilustrar el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial, y determinar las condiciones en las cuales el sistema presenta mayor estabilidad. Estos diagramas son presentados en la figura 4.3.

Figura 4.3: Diagramas de Fase de la ecuación diferencial para $\lambda(t)$. Las líneas de color corresponden a diferentes condiciones iniciales del sistema, las cuales se describen en la tabla. Los diagramas se construyen considerando el parámetro de no linealidad $\beta = 2$, factor de acoplamiento $c = 0.3$ y las constantes $c_1 = 1$ y $\omega = 2$.



Las trayectorias observadas en la figura 4.3, son atraídas a un punto central en el cual la ecuación (4.14) presenta mayor estabilidad, en esta situación el sistema permanece estático o en equilibrio. Se observa también, en el espacio de fase una serie de trayectorias cerradas y concéntricas en torno a este punto, simétricas con respecto al eje λ y que con el transcurrir del tiempo, se recorren en el sentido de las manecillas del reloj, las cuales corresponden a soluciones periódicas⁹.

Las condiciones iniciales, relacionadas con uno de los puntos de estabilidad en el diagrama de fase para $\lambda(t)$ son:

- $\lambda(0) = 0.706$ y $\dot{\lambda}(0) = 0.0005$.

Considerando la ecuación $\dot{\theta}(t) = -\omega + c_1\lambda(t)$, y los valores establecidos en la construcción del diagrama de fase $c_1 = 1$ y $\omega = 2$, se determinan las condiciones iniciales para $\theta(t)$:

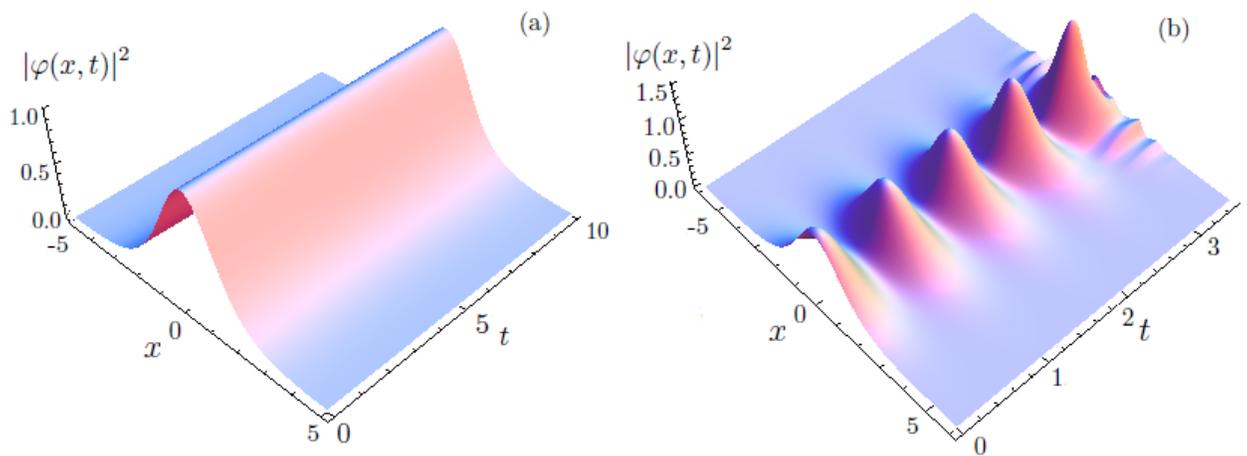
- $\theta(0) = 0$ y $\dot{\theta}(0) = -1.2939$

⁹CHOW TAI L. Classical Mechanics. pág.291

Las condiciones iniciales determinadas para θ y λ , permiten solucionar en forma numérica las ecuaciones diferenciales (4.12) y (4.13), correspondientes a las ecuaciones de Euler-Lagrange para $\lambda(t)$ y $\theta(t)$. Estas soluciones y el valor determinado para el parámetro adicional $\omega = 2$, se incluyen en la ecuación (4.10), para la construcción numérica de la función de prueba propuesta. El resultado se presenta en la figura 4.4(a).

El sistema de cadenas oscilatorias no lineales acopladas, está caracterizado por un factor de no linealidad $\beta = 2$ y un factor de acoplamiento $c = 0.3$. La solución numérica de las funciones de prueba, para este sistema de cadenas acopladas, permite la integración numérica de las ecuaciones (4.1) y (4.2). Los resultados obtenidos se presentan en la figura 4.4(b).

Figura 4.4: (a) Módulo al cuadrado de la función de prueba $|\varphi(x, t)|^2$. (b) Integración numérica de las ecuaciones diferenciales para cadenas acopladas considerando funciones de prueba idénticas, con $\beta = 2$ y factor de acoplamiento $c = 0.3$.



El módulo al cuadrado de la función de prueba se comporta como un pulso constante de amplitud máxima $\Psi_{max} = 1$, figura 4.4(a). La integración numérica de las ecuaciones diferenciales del sistema de cadenas, evoluciona en forma de pulsos oscilantes, restringidos a cierto intervalo temporal, 4.4(b). Por medio de la integración numérica del sistema de cadenas acopladas, para funciones de prueba iguales con el parámetro adicional ω , no se observa cambios significativos en el rango de estabilidad del sistema.

De esta manera, las funciones de prueba idénticas asumidas, no admiten grandes intervalos de tiempo en los que el sistema se comporte de manera estable. Además, considerar funciones de prueba iguales, restringe las observaciones del efecto de acoplamiento entre las cadenas. Estas limitaciones, inducen a pensar en funciones de prueba asociadas a cada una de las cadenas, que presenten características diferentes a las consideradas para funciones de prueba idénticas, en cuanto a la amplitud del pulso y a los parámetros dependientes del tiempo y que a su vez permitan establecer la evolución de los pulsos en intervalos con mayor rango de estabilidad.

4.4. FUNCIONES DE PRUEBA CON λ CONSTANTE

Un aspecto importante que se incluye en las funciones de prueba idénticas, es la dependencia temporal de el parámetro λ , esta característica es replanteada y se considera funciones de prueba aso-

ciadas a cada una de las cadenas, en las cuales el parámetro λ es una constante por determinar para el sistema establecido.

Las funciones de prueba se definen siguiendo el modelo propuesto para pulsos localizados en cadenas no lineales acopladas¹⁰, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\Psi_1(x, t) &= \Psi_{max} \text{Sech}[\lambda x] \cos \theta(t) \exp(-i\Delta(t)), \\ \Psi_2(x, t) &= \Psi_{max} \text{Sech}[\lambda x] \sin \theta(t) \exp(i\Delta(t)).\end{aligned}\quad (4.15)$$

Aquí, Ψ_{max} es la máxima amplitud, el parámetro $\theta(t)$ está relacionado con la medida de distribución de energía entre las cadenas. En las funciones de prueba se incluye la fase $\Delta(t)$ y la constante λ cuyo valor inverso se relaciona con el ancho del pulso, el cual se asume igual para ambas cadenas.

Reemplazando las funciones de prueba $\Psi_1(x, t)$ y $\Psi_2(x, t)$ en la ecuación (4.3) y después de la integración con respecto a x , se obtiene el Lagrangiano del sistema:

$$\begin{aligned}L(\theta, \Delta, \dot{\theta}, \dot{\Delta}) &= \frac{\Psi_{max}^2}{3\lambda} (2\lambda^2 + 12c \cos 2\Delta(t) \sin 2\theta(t) - 6\omega_m^2 \\ &\quad - 3\beta - \beta \cos 4\theta(t) + 6\dot{\Delta}(t)^2 + 6\dot{\theta}(t)^2).\end{aligned}\quad (4.16)$$

El Lagrangiano del sistema (4.16), presenta dependencia de los parámetros $\theta(t)$, $\Delta(t)$ y sus respectivas derivadas temporales. A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange (4.4) de este sistema, las ecuaciones de evolución para Δ y θ son:

$$2c \sin 2\Delta(t) \sin 2\theta(t) + \ddot{\Delta}(t) = 0, \quad (4.17)$$

$$6c \cos(2\Delta(t)) \cos 2\theta(t) + \Psi_{max}^2 \beta \sin 4\theta(t) - 3\ddot{\theta}(t) = 0. \quad (4.18)$$

Asumiendo las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales para los valores $\theta(0) = \Delta(0) = 1$, y $\dot{\theta}(0) = \dot{\Delta}(0) = 0$, se analiza la estabilidad del sistema caracterizado por la constante de no linealidad β y el factor de acoplamiento c , variando las constantes λ y Ψ , incluidas en el pulso inicial. Los diagramas de fase¹¹, para dos sistemas de cadenas se presenta en la figura 4.5.

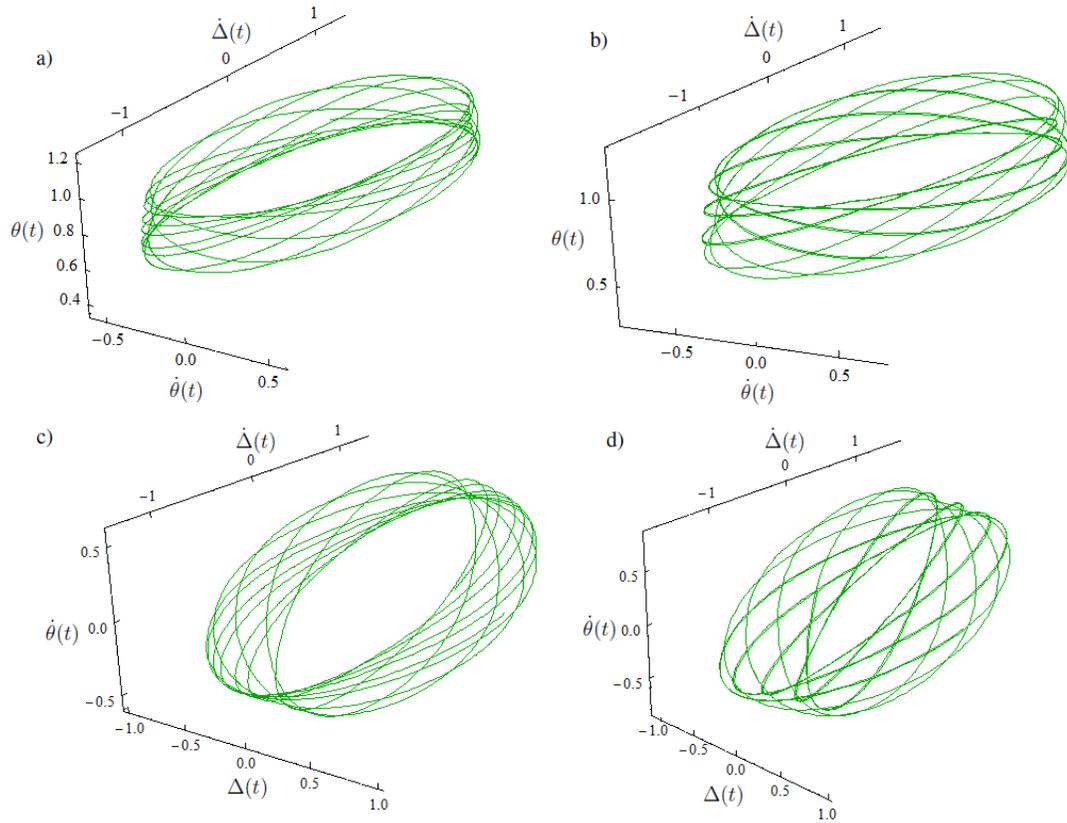
Los diagramas de fase (a) y (c), se construyen considerando un sistema de cadenas con factor de no linealidad $\beta = 2.35$ y acoplamiento entre cadenas $c = 0.51$. El sistema se comporta de forma estable si el pulso presenta una amplitud máxima $\Psi_{max} = 0.20$ y una constante $\lambda = 0.53$. Bajo estas condiciones, se puede observar que las soluciones de las ecuaciones diferenciales para θ y Δ , tienden a permanecer en estado de equilibrio y no divergen.

De manera similar los diagramas de fase (b) y (c), presentan soluciones estables representadas en orbitas periódicas y cerradas, para un sistema de cadenas con $\beta = 1.50$ y acoplamiento $c = 0.80$, con pulsos de amplitud máxima $\Psi_{max} = 0.10$ y $\lambda = 0.50$. Un rasgo importante encontrado en este análisis, está relacionado con la amplitud del pulso, la cual debe ser de un orden menor que 1, para lograr estabilidad del sistema.

¹⁰KOSEVICH YU. A, MANEVITCH L.I, SAVIN A.V. Classical counterpart of macroscopic tunneling quantum dynamics. Phys. Rev. E 77,(2008)

¹¹CHOW TAI L. Classical Mechanics. pág.290-291

Figura 4.5: Diagramas de fase de las ecuaciones diferenciales para $\theta(t)$ y $\Delta(t)$. (a) y (c) corresponden a cadenas acopladas con $\beta = 2.35$ y acoplamiento $c = 0.51$, para pulsos con parámetros $\lambda = 0.53$ y amplitud máxima $\Psi_{max} = 0.2$. Las graficas b) y d), son referentes a cadenas con $\beta = 1.50$ y acoplamiento $c = 0.80$, con pulsos localizados de amplitud máxima $\Psi_{max} = 0.10$ y $\lambda = 0.50$.



Las condiciones iniciales asumidas para cada uno de los sistemas y los valores de las constantes para soluciones estables, se utilizan para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones de Euler - Lagrange (4.17) y (4.18). Las soluciones numéricas para θ y Δ , permiten construir numéricamente las funciones de prueba (4.15). Los resultados para un sistema de cadenas con $\beta = 2.35$ y acoplamiento entre cadenas $c = 0.51$, para un pulso de amplitud máxima $\Psi_{max} = 0.2$ y $\lambda = 0.53$, se presentan en la figura 4.6.

Los módulos al cuadrado de las funciones $|\Psi_1(x, t)|^2$ y $|\Psi_2(x, t)|^2$, mostrados en la figura 4.6, se presentan como pulsos oscilantes y periódicos, que evolucionan en el tiempo de manera estable. El comportamiento alternante de las funciones de prueba está relacionado con el parámetro θ .

De forma similar se construye numéricamente las funciones de prueba para un sistema compuesto por cadenas oscilatorias con $\beta = 1.50$ y acoplamiento $c = 0.80$, para pulsos de amplitud máxima $\Psi_{max} = 0.10$ y $\lambda = 0.50$. Los resultados se presentan en la figura 4.7.

Los módulos al cuadrado de las funciones $|\Psi_1(x, t)|^2$ y $|\Psi_2(x, t)|^2$, en la figura 4.7 se presentan nuevamente como pulsos oscilantes y periódicos, que evolucionan en el tiempo de manera estable.

La solución de la integración numérica de las ecuaciones diferenciales de acoplamiento, para cada uno de los sistemas estudiados se muestra en la figura 4.8

Figura 4.6: Solución numérica de módulos al cuadrado de las funciones de onda asociadas a la cadena uno $|\Psi_1(x, t)|^2$ y a la cadena dos $|\Psi_2(x, t)|^2$. Para un sistema de cadenas con $\beta = 2.35$, $c = 0.51$, $\Psi_{max} = 0.2$ y $\lambda = 0.53$.

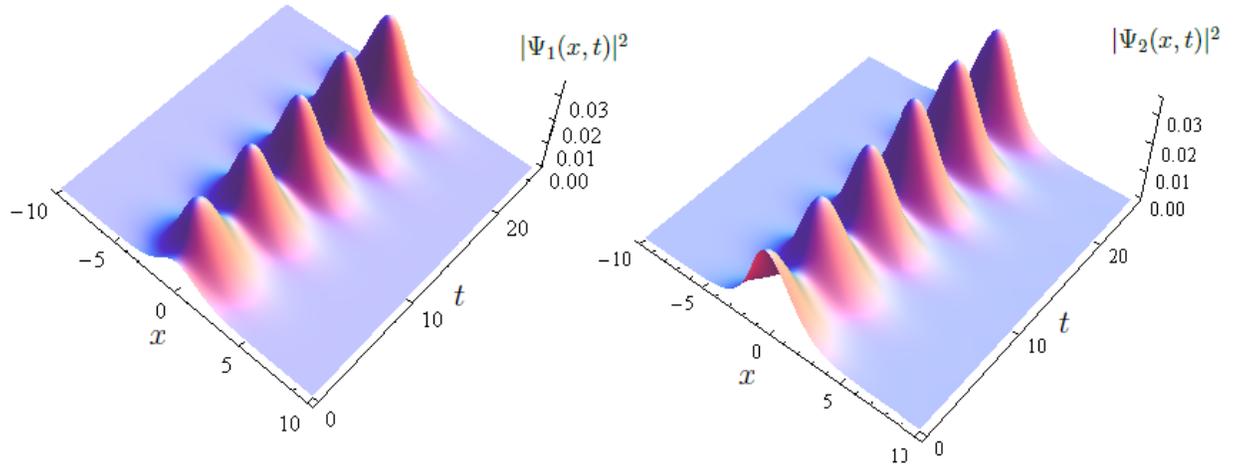
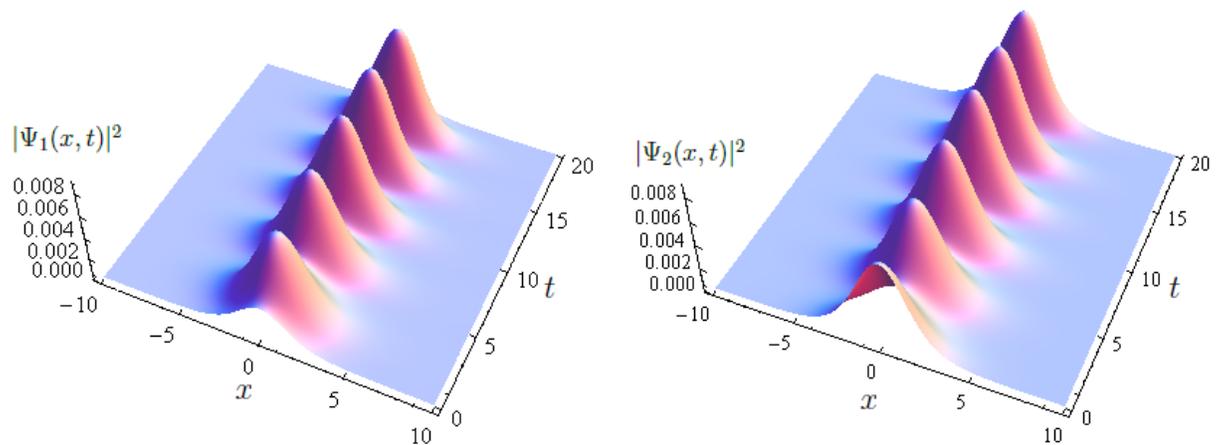
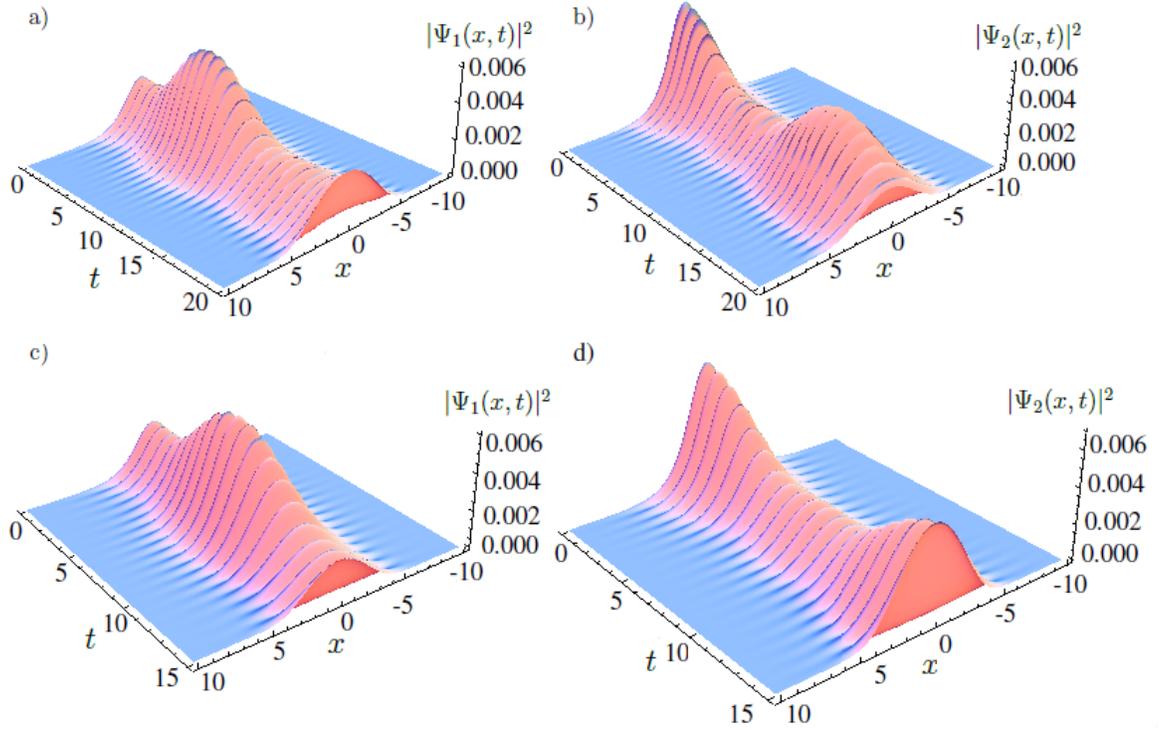


Figura 4.7: Solución numérica de módulos al cuadrado de las funciones de onda asociadas a la cadena uno $|\Psi_1(x, t)|^2$ y a la cadena dos $|\Psi_2(x, t)|^2$, para un sistema de cadenas con $\beta = 1.50$, $c = 0.80$, $\Psi_{max} = 0.10$ y $\lambda = 0.50$.



Los módulos al cuadrado de las soluciones de las ecuaciones diferenciales, para la cadena uno $|\Psi_1(x, t)|^2$ y a la cadena dos $|\Psi_2(x, t)|^2$, presentan un comportamiento oscilatorio y alternante entre las cadenas. En la figura 4.8, (a) y (b) corresponden a soluciones de un sistema de cadenas con $\beta = 2.35$ y acoplamiento entre cadenas $c = 0.51$, para un pulso de amplitud máxima $\Psi_{max} = 0.2$ y $\lambda = 0.53$. Por otra parte, (c) y (d), corresponden a soluciones de un sistema de cadenas oscilatorias con $\beta = 1.50$ y acoplamiento $c = 0.80$, para pulsos de amplitud máxima $\Psi_{max} = 0.10$ y $\lambda = 0.50$.

Figura 4.8: Módulos al cuadrado de las soluciones numéricas de las ecuaciones de acoplamiento para la cadena uno $|\Psi_1(x, t)|^2$ y a la cadena dos $|\Psi_2(x, t)|^2$. (a) y (b) corresponden a un sistema de cadenas con $\beta = 2.35$, $c = 0.51$, $\Psi_{max} = 0.2$ y $\lambda = 0.53$. (c) y (d) corresponden a un sistema de cadenas considerando $\beta = 1.50$, $c = 0.80$, $\Psi_{max} = 0.10$ y $\lambda = 0.50$.



Las soluciones numéricas de las ecuaciones de acoplamiento, se presentan como pulsos localizados oscilantes, que logran permanecer estables durante mayor tiempo. El sistema muestra alta sensibilidad a las condiciones iniciales y a los parámetros propios de la cadena, en donde es de gran importancia la forma asumida para el pulso de prueba. Las características que presenta este sistema llevan a considerar funciones de prueba en las que se incluyan parámetros adicionales, con el fin de establecer mayores rangos de estabilidad.

4.5. FUNCIONES DE PRUEBA PARA λ CONSTANTE CON PARÁMETROS ADICIONALES

Considerando los resultados obtenidos para funciones de prueba con λ constante, se plantean las siguientes funciones en las cuales se incluye el parámetro ω , las ecuaciones se formulan siguiendo el modelo propuesto para pulsos localizados en cadenas no lineales acopladas ¹²:

$$\begin{aligned}\Psi_1(x, t) &= \Psi_{max} \text{Sech}[\lambda x] \cos \theta(t) \exp\left(-\frac{i}{2}\Delta(t)\right) \exp -i\omega t, \\ \Psi_2(x, t) &= \Psi_{max} \text{Sech}[\lambda x] \sin \theta(t) \exp\left(\frac{i}{2}\Delta(t)\right) \exp -i\omega t.\end{aligned}\quad (4.19)$$

¹²KOSEVICH YU. A, MANEVITCH L.I, SAVIN A.V. Classical counterpart of macroscopic tunneling quantum dynamics. Phys. Rev. E 77, (2008)

En las ecuaciones, Ψ_{max} es la amplitud máxima del pulso, $\theta(t)$ es un parámetro asociado a la distribución de la energía entre las cadenas, $\Delta(t)$ es una fase y el parámetro adicional ω es relacionado a través del término exponencial.

Las funciones de prueba (4.19) se reemplazan en la ecuación (4.3) y después de la integración con respecto a x se obtiene el Lagrangiano del sistema:

$$L(\Delta, \theta, \dot{\Delta}, \dot{\theta}) = \frac{\Psi_{max}^2}{6\lambda} (12\omega \cos 2\theta(t) \dot{\Delta}(t) + 3\dot{\Delta}(t)^2 + 2(-6\omega_m^2 + 2\lambda^2 - 3\Psi_{max}^2\beta + 6\omega^2 - \Psi_{max}^2\beta \cos 4\theta(t) + 12c \cos \Delta(t) \sin 2\theta(t) + 6\dot{\theta}(t)^2)). \quad (4.20)$$

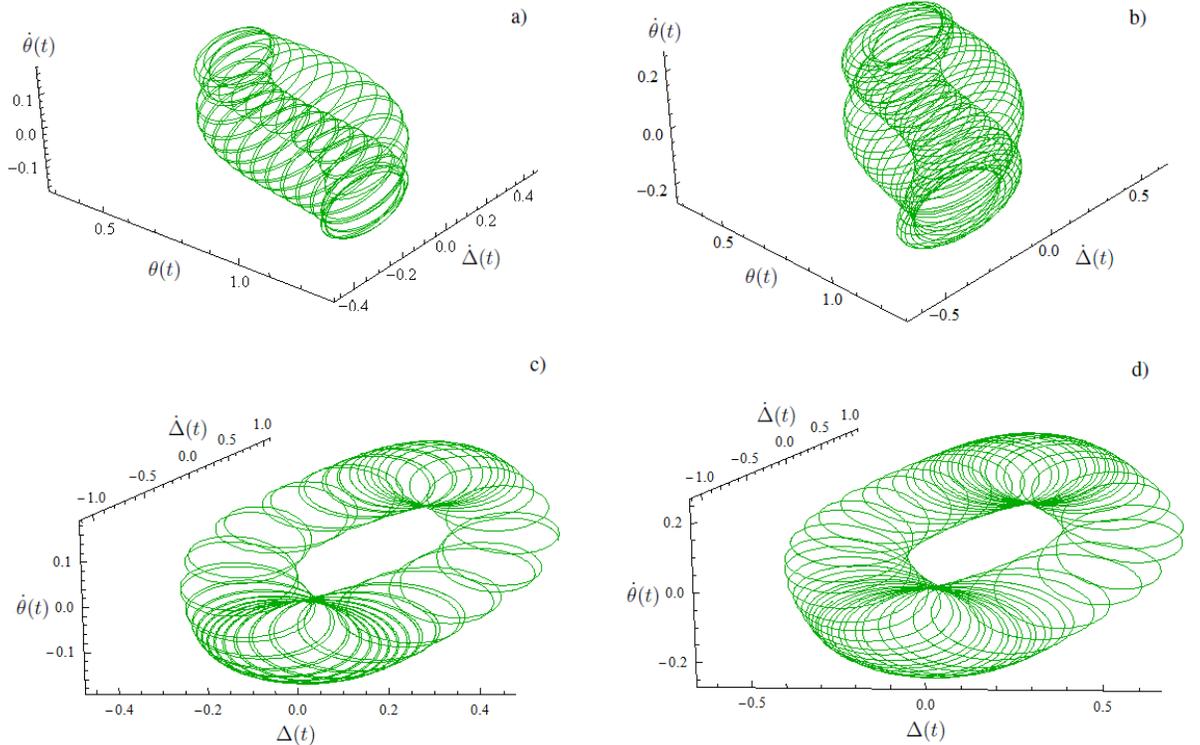
A partir de (4.20), las ecuaciones de Euler-Lagrange para $\Delta(t)$ y $\theta(t)$ son:

$$4 \sin 2\theta(t) (c \sin \Delta(t) - \omega \dot{\theta}(t)) + \ddot{\Delta}(t) = 0, \quad (4.21)$$

$$6c \cos \Delta(t) \cos 2\theta(t) + \Psi_{max}^2 \beta \sin 4\theta(t) - 3(\omega \sin 2\theta(t) \dot{\Delta}(t) + \ddot{\theta}(t)) = 0. \quad (4.22)$$

Asumiendo las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales para los valores $\theta(0) = \Delta(0) = 1$, y $\dot{\theta}(0) = \dot{\Delta}(0) = 0$, la estabilidad del sistema se estudia para variaciones de las constantes β y c , considerando el pulso inicial variable para valores asignados a las constantes λ y Ψ_{max} . Los diagramas de fase, para dos sistemas de cadenas se presentan en la figura 4.9.

Figura 4.9: Diagramas de fase de las ecuaciones diferenciales (4.21) y (4.22). a) y c) corresponden a cadenas con $\beta = 3.22$ y acoplamiento $c = 0.6$. b) y d) corresponde a cadenas con $\beta = 2.62$ y acoplamiento $c = 0.42$. Para pulsos con parámetros $\lambda = 0.5$, $\omega = 4$ y amplitud máxima $\Psi_{max} = 0.3$.

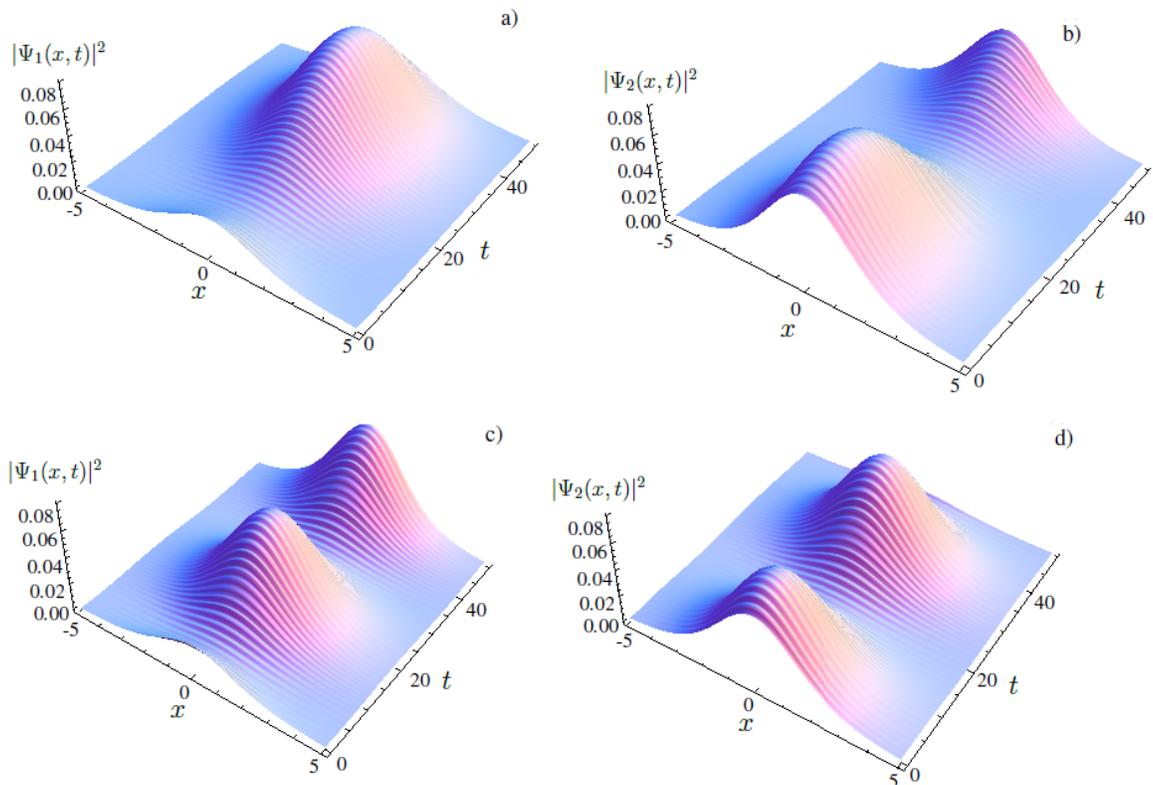


En los diagramas de fase se observa las soluciones para θ y Δ , estas son estables y no divergen para las condiciones determinadas ¹³. Las soluciones se encuentran asociadas a los valores característicos del sistema y valores establecidos en los pulsos iniciales, principalmente en la amplitud del pulso, la cual debe considerarse en un rango de valores menores que uno.

La estabilidad en este caso se relaciona con la capacidad del sistema para permanecer en un estado cíclico o periódico, las variaciones de frecuencia y amplitud, son los aspectos más relevantes para mantener el sistema estable, durante periodos de tiempo más largos¹⁴.

Las condiciones iniciales asumidas para el sistemas y los valores de las constantes para soluciones estables, se utilizan para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones de Euler - Lagrange (4.21) y (4.22). Para un pulso de amplitud máxima $\Psi = 0.3$ y $\lambda = 0.5$, se presentan en la figura 4.10.

Figura 4.10: Módulos al cuadrado de las funciones de prueba asociadas a la cadena uno $|\Psi_1(x, t)|^2$ y a la cadena dos $|\Psi_2(x, t)|^2$, construidos numéricamente. a) y b) corresponden a cadenas con $\beta = 3.22$ y acoplamiento $c = 0.6$, mientras que c) y d) a cadenas con $\beta = 2.62$ y acoplamiento $c = 0.42$. Para pulsos con parámetros $\lambda = 0.5$, $\omega = 4$ y amplitud máxima $\Psi_{max} = 0.3$.



Los módulos al cuadrado de las funciones de prueba $|\Psi_1(x, t)|^2$ y $|\Psi_2(x, t)|^2$, se presentan como pulsos oscilantes y periódicos, que evolucionan en el tiempo de manera estable. El parámetro θ

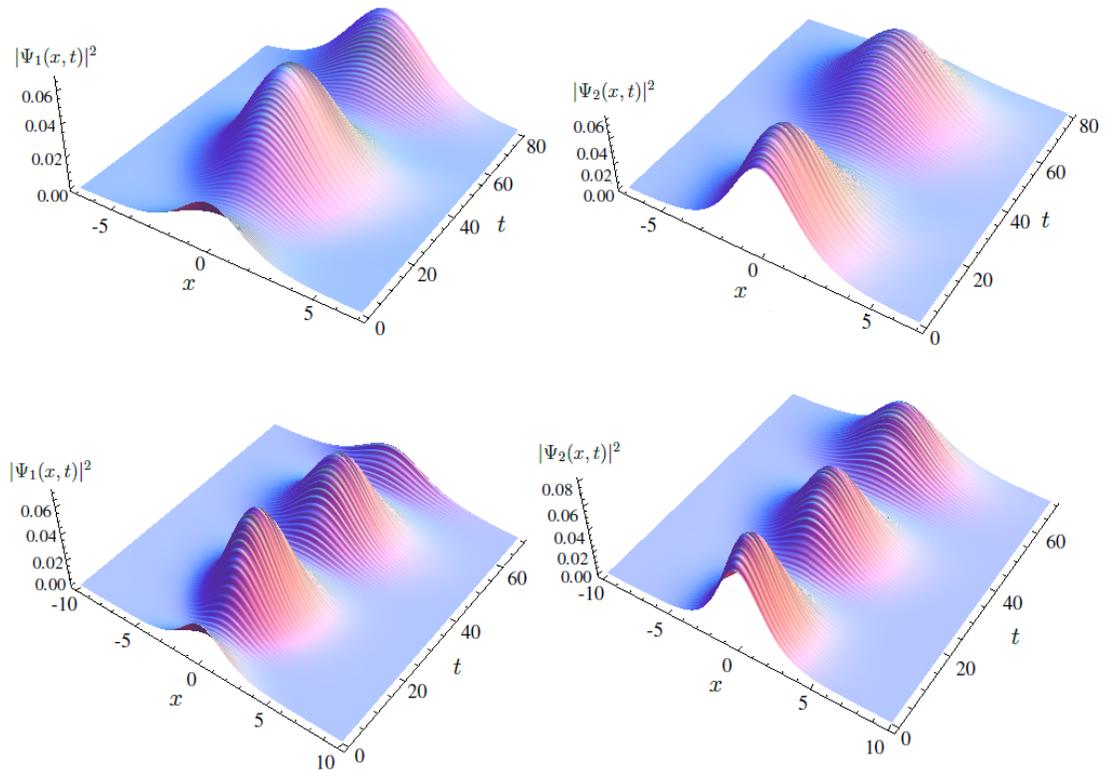
¹³CHOW TAI L. Classical Mechanics. pág.289

¹⁴Infeld, E, Rowlands, G. Nonlinear waves, solitons and chaos. pág.144-145

está asociado al comportamiento alternante de las funciones de prueba y el parámetro adicional ω controla con el número de oscilaciones en un rango de tiempo para el pulso.

Los valores para las constantes introducidas al sistema por medio de las funciones de prueba Ψ_{max} , ω , λ , y los valores determinados para los parámetros propios del sistema de ecuaciones de acoplamiento β y c , permiten observar el comportamiento numérico de las soluciones de las ecuaciones diferenciales (4.1) y (4.2), considerando las funciones de prueba (4.15) y (4.19). La solución de la integración numérica de las ecuaciones diferenciales de acoplamiento, se muestran en la figura 4.11.

Figura 4.11: Integración numérica de las ecuaciones diferenciales de acoplamiento (4.1) y (4.2), $|\Psi_1|^2$ para la cadena uno y $|\Psi_2|^2$ para la segunda cadena. (a) y (c) corresponden a cadenas con $\beta = 3.22$, $\omega_m = 4$ y acoplamiento $c = 0.6$; (b) y (d) cadenas con $\beta = 2.62$, $\omega_m = 4$ y acoplamiento $c = 0.42$. Pulsos con parámetros $\lambda = 0.5$, $\omega = 4$ y amplitud máxima $\Psi_{max} = 0.3$.

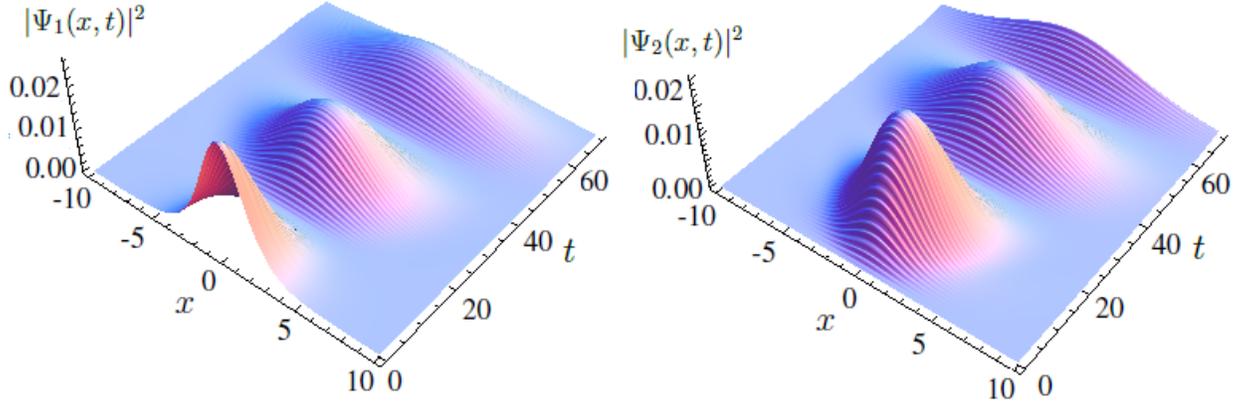


La solución numérica de las ecuaciones de acoplamiento para los dos sistemas considerados en la figura 4.11, se presenta como pulsos estables de amplitud reducida. Los pulsos se alternan entre cada una de las cadenas, formando paquetes oscilantes los cuales oscilan también con frecuencia propia. El parámetro ω permite observar el sistema de forma estable para rangos de tiempo más amplios.

El análisis del sistema, a través de funciones de prueba diferentes, en las cuales se considera el parámetro λ constante y se agrega un parámetro adicional ω , permite observar, el efecto del aco-

plamiento lineal entre cadenas no lineales, aplicando un pulso inicial sobre una de las dos cadenas, mientras la otra cadena permanece inicialmente en reposo, figura 4.12.

Figura 4.12: Integración numérica de las ecuaciones (4.1) y (4.2) para los parámetros $\beta = 2.62$, $\omega_m = 4$ y acoplamiento $c = 0.42$. Pulso inicial con $\Psi_{max} = 0.3$, $\lambda = 0.5$ y frecuencia $\omega = 4$ en la cadena uno; la cadena dos permanece inicialmente en reposo.



En la figura 4.12, se analiza la dinámica del sistema de dos cadenas no lineales acopladas linealmente, bajo la excitación de un soliton estacionario en una cadena¹⁵, mientras que la otra cadena permanece inicialmente en reposo con condiciones iniciales $\Psi_2(0, x) = 0$ y $\dot{\Psi}_2(0, x) = 0$. Como resultado de la interacción entre cadenas, la excitación inicial localizada en una cadena comienza a trasladarse periódicamente entre las cadenas acopladas, con pulsos localizados de menor energía que en el caso de la excitación inicial con solitones estacionarios en las dos cadenas, resultados que fueron presentados en la figura 4.11 (b) y (c), en este caso las cadenas evolucionan en el tiempo de forma oscilante alternando entre las cadenas.

El sistema de cadenas oscilatorias no lineales acopladas linealmente, muestra alta sensibilidad a las condiciones iniciales y a los parámetros propios de la cadena, en donde es de gran importancia la forma asumida para el pulso de prueba. Las funciones de prueba, que incluyen el parámetro ω presentan un sistema más estable y no divergente, que permite observar la evolución de los pulsos.

En este capítulo, se ha estudiado la dinámica del sistema compuesto por cadenas oscilatorias no lineales, para diferentes funciones de prueba. Con la técnica variacional, basada en la inclusión de parámetros variables en las funciones de prueba se realizó el análisis de la estabilidad del sistema. En primer lugar, asumiendo funciones de prueba idénticas, se observó soluciones numéricas estables restringidas a intervalos cortos de tiempo que no admite la observación de efectos de acoplamiento entre las cadenas.

Para funciones de prueba diferentes, el efecto de acoplamiento entre cadenas se observa en la integración numérica de las ecuaciones diferenciales (4.1) y (4.2). Asumir funciones de prueba con λ constante permite observar soluciones estables mediante las cuales se puede analizar la evolución del sistema clásicamente.

¹⁵Kosevich, Yu.A. Manevitch, L.I. Savin, A.V. Classical counterpart of macroscopic tunneling quantum dynamics. Physical Review E. 77, (2008)

El sistema presenta mayor estabilidad, para cadenas no lineales acopladas, con las características descritas en la sección 3.5, en donde se incluye un parámetro adicional ω a las funciones de prueba con λ constante.

En el siguiente capítulo, se estudia la dinámica clásica del sistema, haciendo uso de las condiciones de estabilidad determinadas en este capítulo, mediante la formulación adecuada de las funciones de prueba. El estudio de la evolución clásica del sistema, es posteriormente replanteado, para considerar las condiciones que se deben imponer sobre el sistema, para que los efectos cuánticos sean relevantes.

5 CUANTIZACIÓN MACROSCÓPICA DE CADENAS OSCILATORIAS NO LINEALES ACOPLADAS

En este capítulo se presenta la cuantización macroscópica del sistema compuesto por dos cadenas oscilatorias no lineales acopladas. En la primera parte se realiza un acercamiento clásico, planteando las ecuaciones que describen la dinámica del sistema, a través de una simulación numérica directa, el sistema es analizado planteando funciones de prueba. La formulación de las funciones de prueba se realiza teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el estudio de la estabilidad del sistema presentado en el capítulo anterior.

Posteriormente por medio de la aproximación semi clásica, se formula la segunda parte del estudio de las cadenas oscilatorias no lineales acopladas, en la que se indaga la posibilidad de acercarse al sistema desde un punto de vista cuántico. Para este proceso se estudia las características y condiciones que el sistema debe cumplir para reformular las ecuaciones dinámicas y plantear el sistema cuánticamente. Finalmente en el sistema cuantizado se estudia el tunelamiento entre dos cadenas oscilatorias no lineales.

5.1. TRATAMIENTO CLÁSICO DEL PROBLEMA

Las ecuaciones que describen la dinámica de cadenas oscilatorias no lineales acopladas, se construyen asignando funciones complejas $\Psi(x, t)$ a cada una de las cadenas, tal como se describió en la sección 1.1. Las ecuaciones diferenciales de acoplamiento establecidas para el sistema de cadenas (2.12), se pueden escribir de la siguiente manera ¹:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} + \omega_m^2 \Psi_1 \right) + \beta |\Psi_1|^2 \Psi_1 = c \Psi_2, \quad (5.1)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} + \omega_m^2 \Psi_2 \right) + \beta |\Psi_2|^2 \Psi_2 = c \Psi_1, \quad (5.2)$$

donde ω_m es un parámetro asociado a la dinámica de las cadenas, β es la constante relacionada con la interacción no lineal de las partículas presentes en cada una de las cadenas y c es la constante de acoplamiento lineal entre cadenas.

5.1.1. Funciones de prueba. Las ecuaciones diferenciales de acoplamiento (5.1) y (5.2), que describen la dinámica de cadenas no lineales, no tienen una solución analítica general, el sistema es analizado por medio de una simulación numérica directa, empleando funciones de prueba. En el capítulo 3, se presento el estudio de la dinámica del sistema, para analizar las condiciones sobre las cuales este presenta mayor estabilidad, con estas consideraciones y siguiendo el modelo planteado para guías de onda² no lineales se plantean las siguientes funciones de prueba, para el análisis clásico del sistema:

¹Kosevich, Yu.A. Manevitch, L.I. Savin, A.V. Classical counterpart of macroscopic tunneling quantum dynamics. *Physical Review E*. 77, (2008)

²Kosevich, Yu. A. Manevitch, L.I. Savin, A.V. Energy transfer in coupled nonlinear phononic waveguides. *Journal of Physics: Conference Series* 92 (2007)

$$\Psi_1(x, t) = \frac{\exp[i(-\omega t)]}{\cosh[\lambda(x - Vt)]} \cos \theta \exp[-\frac{i}{2}\Phi], \quad (5.3)$$

$$\Psi_2(x, t) = \frac{\exp[i(-\omega t)]}{\cosh[\lambda(x - Vt)]} \sin \theta \exp[\frac{i}{2}\Phi], \quad (5.4)$$

En las funciones de prueba (5.3) y (5.4), ω corresponde a la frecuencia del soliton, la constante λ cuyo valor inverso se relaciona con el ancho del pulso, se asume igual para ambas cadenas, y el parámetro constante V está relacionado con el movimiento del soliton. Por su parte, Ψ_{max} es la amplitud máxima de la función de prueba, la cual según los resultados obtenidos en el capítulo anterior, debe restringirse para ordenes menores que 1, con el fin de garantizar estabilidad en el sistema. Además, en las funciones de prueba se incluye la fase $\Phi(t)$ y el parámetro $\theta(t)$, el cual está relacionado con la medida de distribución de energía entre las cadenas.

Por medio de las ecuaciones de acoplamiento (5.1) y (5.2), y las funciones de prueba (5.3) y (5.4), se determina las ecuaciones de evolución para $\Phi(t)$ y $\theta(t)$ ³:

$$\dot{\Phi} = \frac{3\beta}{\omega} \Psi_{max}^2 \cos 2\theta + \frac{c}{\omega} \cos \Phi \cot 2\theta, \quad (5.5)$$

$$\dot{\theta} = \frac{c}{2\omega} \sin \Phi. \quad (5.6)$$

Las ecuaciones de evolución (5.5) y (5.6), pueden escribirse de manera equivalente para la fase Φ y el parámetro z , donde $z = \cos 2\theta$ y $\sqrt{1 - z^2} = \sin 2\theta$, de la siguiente manera:

$$\dot{\Phi} = \frac{2c}{\omega \kappa} z + \frac{c}{\omega} \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \cos \Phi, \quad (5.7)$$

$$\dot{z} = -\frac{c}{\omega} \sqrt{1 - z^2} \sin \Phi. \quad (5.8)$$

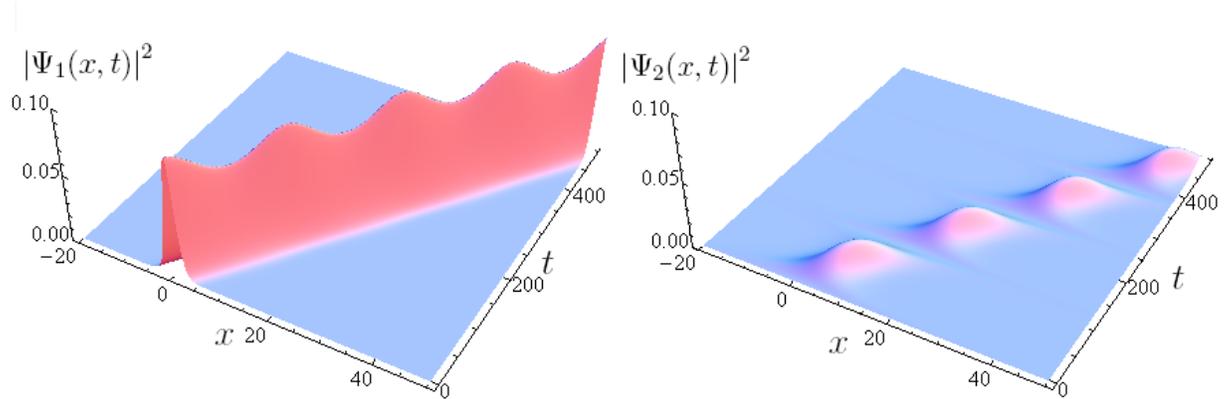
Donde se asume $\kappa = \frac{2c}{3\beta} \Psi_{max}^2$.

Por medio de métodos numéricos se solucionan las ecuaciones para $\Phi(t)$ y $z(t)$, con el fin de analizar el comportamiento numérico de las funciones de onda asociadas a la cadena uno $|\Psi_1(x, t)|^2$ y a la cadena dos $|\Psi_2(x, t)|^2$. Las características que presentan las funciones de prueba están relacionadas directamente con las variaciones de el parámetro κ y la constante de acoplamiento lineal entre cadenas c .

Las soluciones numéricas se construyen para los valores que permiten estabilidad clásica del sistema, determinados en el capítulo 3. Para este caso se consideran funciones de prueba de amplitud máxima $\Psi_{max} = 0.3$ y frecuencia del soliton $\omega = 4$ para las dos cadenas. El factor de acoplamiento entre las cadenas se establece en $c = 0.1$ y se observan los resultados de variaciones del parámetro $\kappa \leq 1$. La figura 5.1.1 corresponde a $\kappa = 0.8$ y la figura 5.1.1 corresponde a $\kappa = 1$.

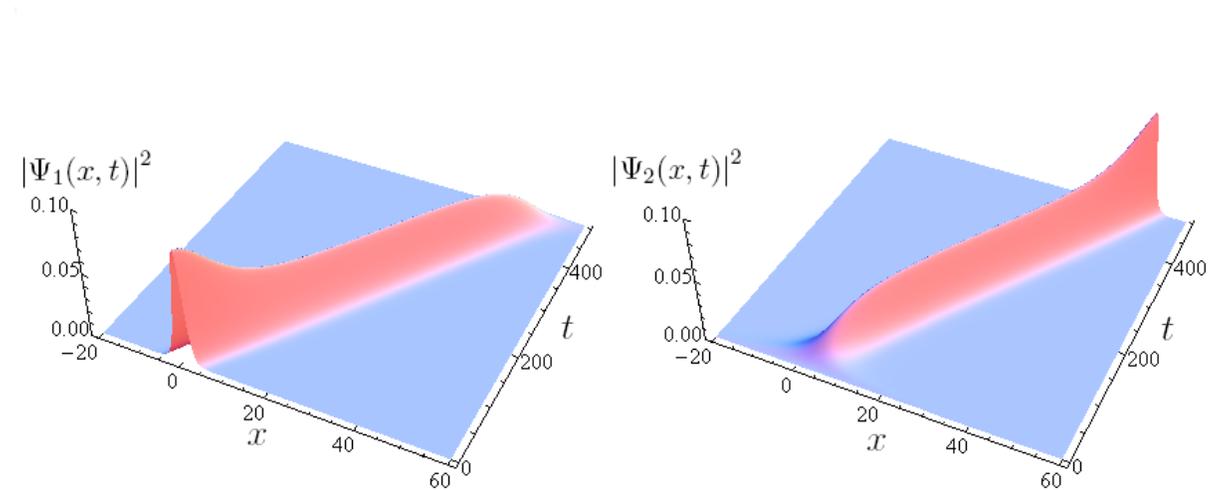
³Kosevich, Yu.A. Manevitch, L.I. Savin, A.V. Classical counterpart of macroscopic tunneling quantum dynamics. Physical Review E. 77, (2008)

Figura 5.1: Módulos al cuadrado de las funciones de onda asociadas a la cadena uno $|\Psi_1(x, t)|^2$ y a la cadena dos $|\Psi_2(x, t)|^2$, con frecuencia $\omega = 4$ en las dos cadenas y factor de acoplamiento $c = 0.1$ entre las cadenas. Con los parámetros $V = 0.1$ y $\kappa = 0.8$.



Para $\kappa = 0.8$, figura 5.1.1, se observan pulsos oscilatorios y que permanecen sin dispersión a medida que evolucionan en el tiempo. El modulo al cuadrado de la función de onda asociado a la cadena uno $|\Psi_1(x, t)|^2$ presenta mayor amplitud, que los pulsos correspondientes a la cadena dos $|\Psi_2(x, t)|^2$.

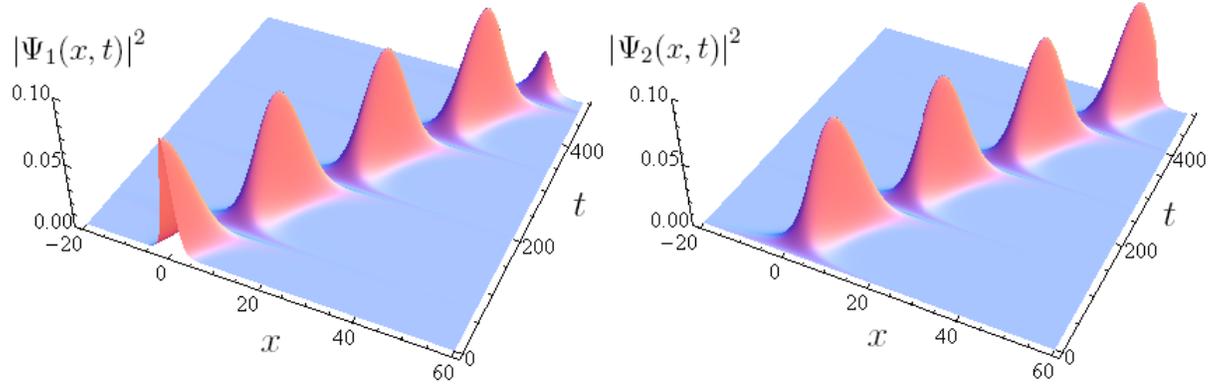
Figura 5.2: Módulos al cuadrado de las funciones de onda asociadas a la cadena uno $|\Psi_1(x, t)|^2$ y a la cadena dos $|\Psi_2(x, t)|^2$, con frecuencia $\omega = 4$ en las dos cadenas y factor de acoplamiento $c = 0.1$ entre las cadenas. Con los parámetro $V = 0.1$ y $\kappa = 1$.



Para $\kappa = 1$, figura 5.1.1, se observan pulsos oscilatorios que permanecen sin dispersión aparente, a medida que transcurre el tiempo. Los periodos de oscilación para este caso corresponden a tiempos más grandes que en el caso de $\kappa = 0.8$.

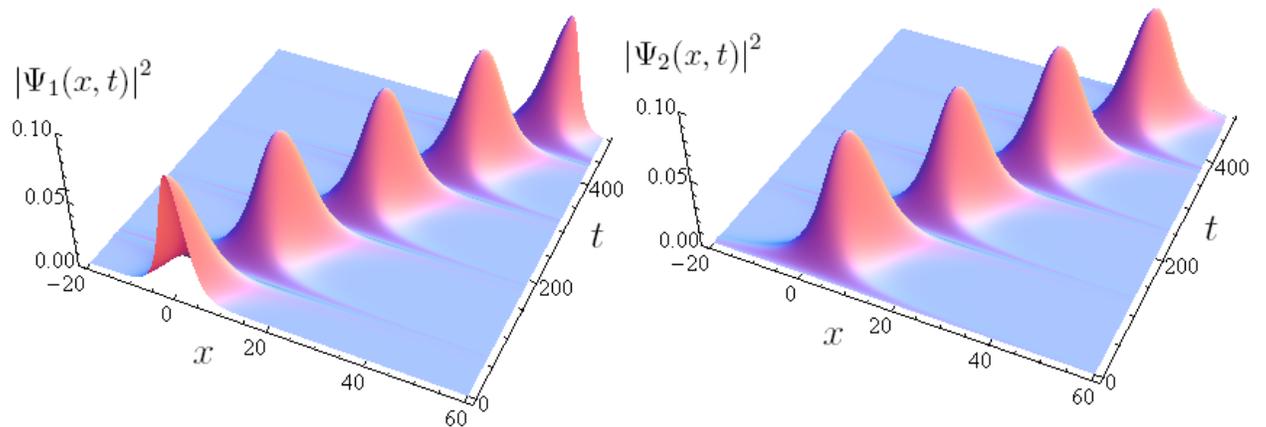
Para el análisis de las funciones de prueba considerando variaciones del parámetro $\kappa > 1$, se plantea

Figura 5.3: Módulos al cuadrado de las funciones de onda asociadas a la cadena uno $|\Psi_1(x, t)|^2$ y a la cadena dos $|\Psi_2(x, t)|^2$, con frecuencia $\omega = 2$ en las dos cadenas y el parámetro $V = 0.1$. El factor de acoplamiento entre las cadenas se fija para $c = 0.2$ y el parámetro $\kappa = 2$.



la solución numérica de las ecuaciones de evolución para $\Phi(t)$ y $z(t)$, considerando nuevamente los parámetros de estabilidad determinados en el capítulo 3. Las funciones de prueba se establecen para una amplitud máxima $\Psi_{max} = 0.3$ y frecuencia del soliton $\omega = 4$ para las dos cadenas. El factor de acoplamiento entre las cadenas se establece en $c = 0.2$ y se observan los resultados de variaciones del parámetro $\kappa =$. La figura 5.1.1 corresponde a $\kappa = 2$ y la figura 5.1.1 corresponde a $\kappa = 10$.

Figura 5.4: Módulos al cuadrado de las funciones de onda asociadas a la cadena uno $|\Psi_1(x, t)|^2$ y a la cadena dos $|\Psi_2(x, t)|^2$, con frecuencia $\omega = 4$ en las dos cadenas y el parámetro $V = 0.1$. El factor de acoplamiento entre las cadenas se considera para $c = 0.2$ y el parámetro $\kappa = 10$.



Para valores de $\kappa > 1$ se observa en las figuras 5.1.1 y 5.1.1, pulsos oscilantes que evolucionan

sin dispersión en el tiempo. Los pulsos oscilan de manera alternante entre cadenas, pasando entre valores máximos y mínimos de amplitud, el aumento en el valor de la constante de acoplamiento del sistema se ve reflejado en un mayor número de oscilaciones en intervalos de tiempo más cortos.

Las variaciones del parámetro κ , afectan directamente la solución numérica de las funciones de prueba, los resultados pueden variar significativamente dependiendo del rango en el cual este parámetro se encuentre, por lo tanto el parámetro κ junto con las ecuaciones de evolución para $\Phi(t)$ y $z(t)$, son de gran importancia para el análisis de la aproximación clásica del sistema de cadenas oscilatorias no lineales acopladas.

5.1.2. Aproximación Clásica. Considerando que $z(t)$ corresponde a la posición y $\Phi(t)$ corresponde a el momento conjugado canónico del sistema de dos cadenas oscilatorias no lineales acopladas, la descripción clásica se realiza por medio del planteamiento del Hamiltoniano efectivo del sistema, en términos de las variables canónicas conjugadas z y Φ , por medio de las ecuaciones de movimiento se tiene ⁴:

$$\dot{\Phi} = -\frac{\partial H_{eff}}{\partial z}, \quad (5.9)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H_{eff}}{\partial \Phi}, \quad (5.10)$$

el Hamiltoniano efectivo corresponde a:

$$H_{eff} = -\frac{c}{\omega\kappa}z^2 + \frac{c}{\omega}\sqrt{1-z^2}\cos\Phi. \quad (5.11)$$

Considerando $\dot{z} = 0$ en la ecuación de evolución para la posición (5.8), se obtiene las condiciones asintóticas $z \pm 1$ y las condiciones de equilibrio $\Phi = n\pi$ (en donde n es un entero), para el sistema de dos cadenas no lineales acopladas.

El interés se centra en los valores del Hamiltoniano efectivo, para los estados de equilibrio. Con el objetivo de preservar la conexión con la energía potencial en el sentido habitual que imponen que, en los puntos de equilibrio, esta energía potencial se encuentra en un extremo⁵.

Se reemplaza en (5.11), los valores de las condiciones asintóticas $z = 1$ y las condiciones de equilibrio para $\Phi = 0$, para determinar:

$$H_{pot} = -\frac{c}{\omega\kappa}. \quad (5.12)$$

Aquí, la energía potencial depende del parámetro κ , la constante de acoplamiento c y la frecuencia del soliton ω . Las posibles trayectorias estables clásicamente se determinan igualando la energía potencial del sistema dada por (5.12), con el Hamiltoniano efectivo (5.11), esto conduce a la siguiente relación:

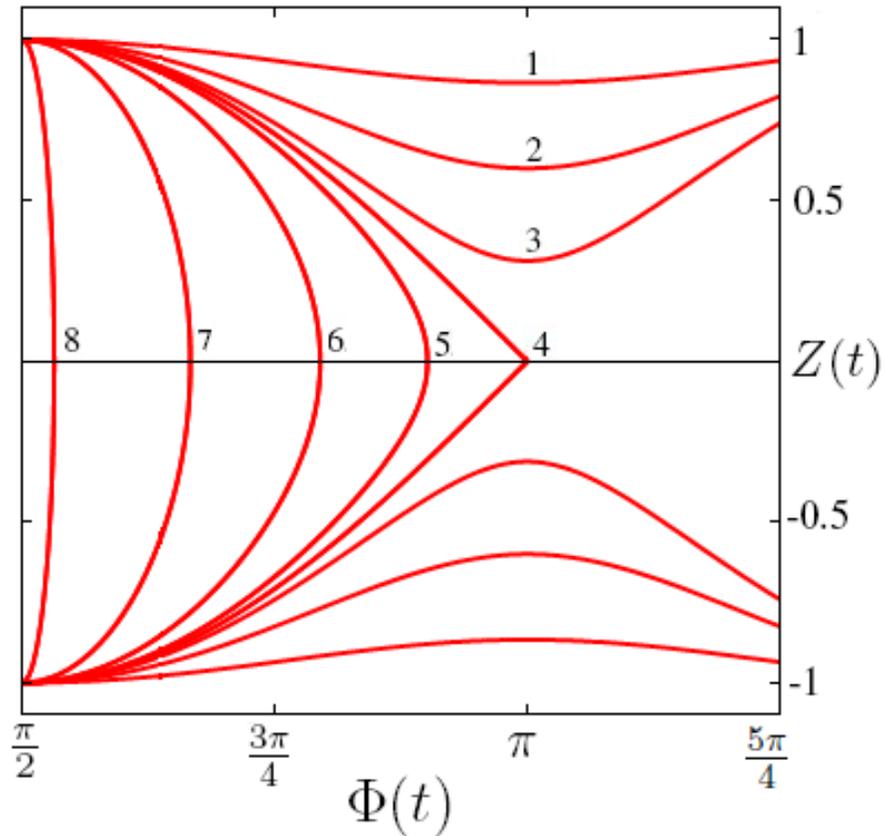
⁴Kosevich, Yu.A. Manevitch, L.I. Savin, A.V. Classical counterpart of macroscopic tunneling quantum dynamics. Physical Review E. 77, (2008)

⁵Pomeau, Y. Le Berre, M. Optical solitons as quantum objects. Sección III

$$(\kappa \cos \Phi)^2 + z^2 = 1 \quad (5.13)$$

Las posibles trayectorias clásicas estables para el sistema se presentan en la figura 5.1.2, construidas numéricamente por medio de la solución de las ecuaciones de evolución (5.7) y (5.8), las cuales cumplen además, con la condición establecida en (5.13).

Figura 5.5: Posibles trayectorias clásicas estables. La grafica que muestra la relación de las funciones $z(t)$ y $\Phi(t)$, las cuales se obtienen de la solución numérica de las ecuaciones de evolución (5.7) y (5.8). Las líneas 1-8 corresponden, respectivamente a los valores de $\kappa = 0.5, 0.8, 0.95, 1, 1.05, 1.25, 2, 10$.

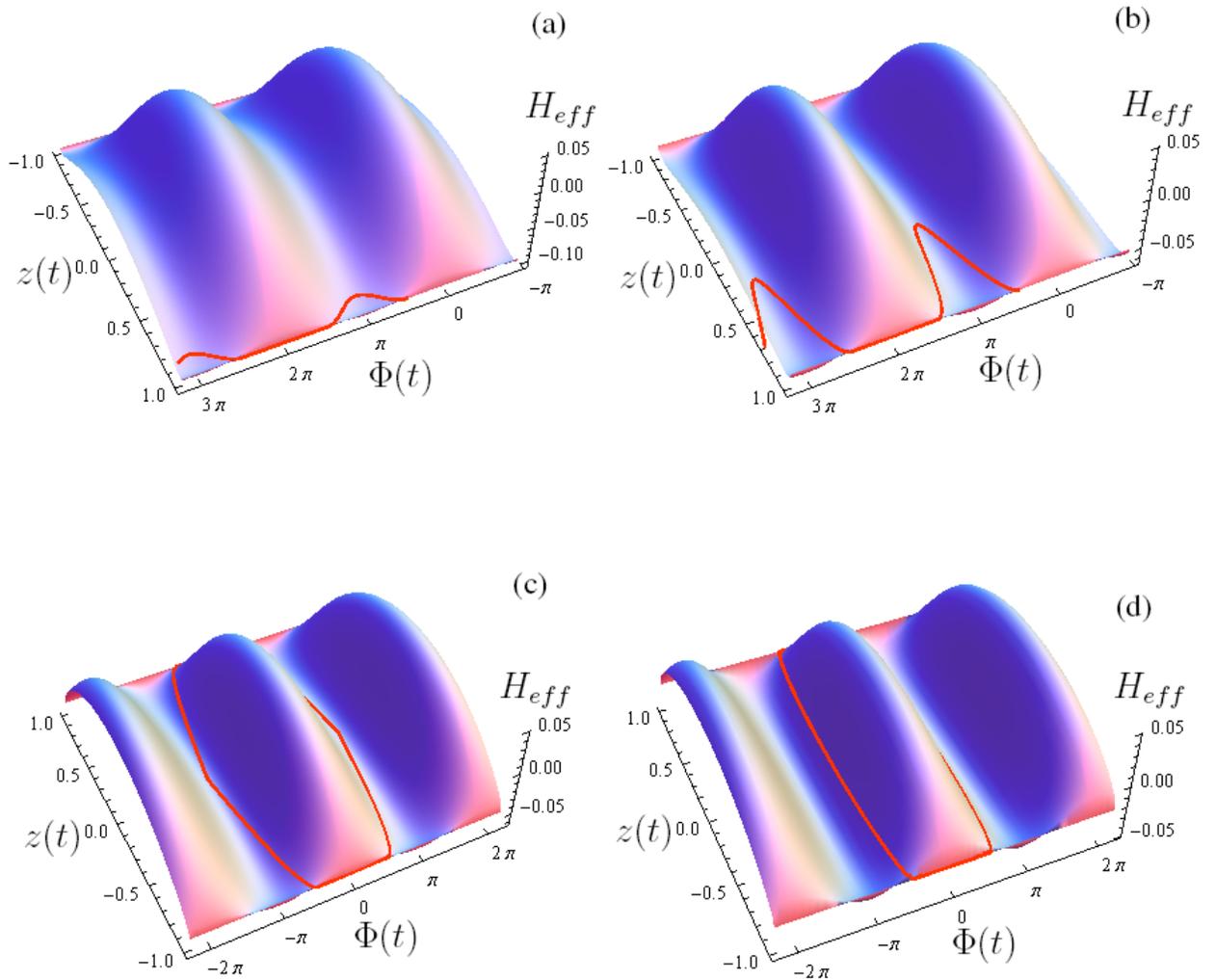


En la figura 5.1.2, las trayectorias para valores de $\kappa \geq 1$ corresponden a soluciones posibles, que siguen una trayectoria clásica, mientras que las soluciones para $\kappa < 1$ no están unidas por una trayectoria clásica permitida.

El Hamiltoniano efectivo se construye numéricamente haciendo uso de la ecuación (5.11) y las ecuaciones de evolución para Φ y z , los resultados se presentan en la figura 5.1.2, junto con las respectivas trayectorias clásicas para diferentes valores de κ .

En las figuras 5.1.2(a) y 5.1.2(b), el Hamiltoniano efectivo se construye para valores de κ menores que uno, aquí el soliton no cuenta con suficiente energía para crear una trayectoria que sobrepase el potencial y encuentre puntos de conexión.

Figura 5.6: Hamiltoniano efectivo clásico con posibles trayectorias para diferentes κ . En la figura (a) $\kappa = 0.5$, en la figura (b) $\kappa = 0.8$, tanto en la figura (a) como en la figura (b) se muestra la imposibilidad de tunelamiento. En la figura (c) para $\kappa = 1$ y en las figura (d) para $\kappa = 2$ se observa una trayectoria que posibilita sobrepasar la barrera de potencial del Hamiltoniano.



Por el contrario, para valores de $\kappa \geq 1$, figura 5.1.2(c) y 5.1.2(d), se observa la conexión clásica establecida para las trayectorias solución del sistema.

Considerando los puntos que no permiten curvas clásicas de conexión entre posibles soluciones, se plantea la inquietud de analizar el tunelamiento cuántico en estas regiones prohibidas clásicamente, para el sistema compuesto por dos cadenas oscilatorias no lineales acopladas. Usando los conceptos de mecánica cuántica para medios no lineales, descritos en el capítulo 2, se plantea un enfoque cuántico del sistema en la siguiente sección, por medio de la aproximación semi clásica, con el fin de analizar fenómenos cuánticos como tunelamiento.

5.2. CUANTIZACIÓN SEMI-CLASICA DE CADENAS NO LINEALES ACOPLADAS

Para el estudio del sistema a nivel cuántico, se hace uso de la aproximación semi clásica, en el límite WKB, basándose en los conceptos de mecánica cuántica en medios no lineales descritos en el capítulo 2.

Las ecuaciones Euclidianas de movimiento son encontradas multiplicando el momento conjugado Φ por i , sección 2.5. El Hamiltoniano Euclidiano se obtiene desde su forma clásica (5.11), a través del cambio $\cos \Phi$ por $\cos i\Phi = \cosh \Phi$. Con esta transformación el Hamiltoniano Euclidiano esta descrito por:

$$H_E = -\frac{c}{\omega\kappa}z^2 + \frac{c}{\omega}\sqrt{1-z^2}\cosh\Phi. \quad (5.14)$$

La dinámica semi-clásica es dirigida por un nuevo conjunto de ecuaciones Euclidianas. Las ecuaciones de Hamilton para las variables conjugadas (z, Φ) se deducen del Hamiltoniano Euclidiano (5.14), mediante las ecuaciones de movimiento⁶:

$$\dot{\Phi} = -\frac{\partial H_E}{\partial z}, \quad (5.15)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H_E}{\partial \Phi}. \quad (5.16)$$

El nuevo conjunto de ecuaciones para la posición y el momento conjugado canónico son:

$$\dot{z} = \frac{c}{\omega}\sqrt{1-z^2}\sinh\Phi, \quad (5.17)$$

$$\dot{\Phi} = -\frac{2c}{\omega\kappa}z + \frac{c}{\omega}\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\cosh\Phi. \quad (5.18)$$

Para la exploración de soluciones solitonicas, se debe analizar el comportamiento de las ecuaciones (5.17) y (5.18), cuando estas son independientes del tiempo⁷.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{c}{\omega}\sqrt{1-z^2}\sinh\Phi \\ 0 &= -\frac{2c}{\omega\kappa}z + \frac{c}{\omega}\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\cosh\Phi. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Del sistema de ecuaciones (5.19) se obtiene las condiciones asintóticas para z :

$$z_{asint} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{\kappa}{2}\right)^2}. \quad (5.20)$$

⁶CHOW TAI L. Classical Mechanics. Seccion 5.2

⁷Pomeau, Y. Le Berre, M. Optical solitons as quantum objects. Seccion IV

Las condiciones asintóticas para z , ecuación (5.20), son validas para valores de:

$$\kappa \rightarrow 0,$$

esta condición es impuesta al sistema para la exploración de las posibles trayectorias para los solitones en la aproximación semi-clásica.

Las trayectorias estables, en la aproximación semi-clásica se establecen, considerando el Hamiltoniano Euclidiano (5.14), para la condición asintótica $z = 1$ cuando $\kappa \rightarrow 0$, y la condición de equilibrio $\Phi = 0$:

$$H_{Easint} = -\frac{c}{\omega\kappa}. \quad (5.21)$$

Igualando las ecuaciones (5.21) y (5.14), se tiene:

$$-\frac{c}{\omega\kappa} = -\frac{c}{\omega\kappa}z^2 + \frac{c}{\omega}\sqrt{1-z^2}\cosh\Phi$$

De la anterior expresión se obtiene la condición impuesta sobre las trayectorias posibles a nivel cuántico:

$$(\kappa \cosh \Phi)^2 + (z)^2 = 1. \quad (5.22)$$

Las trayectorias estables en la aproximación semi-clásica para el sistema, se presentan en la figura 5.2, construidas numéricamente por medio de la solución de las ecuaciones de evolución Euclidianas para la posición (5.17) y el momento (5.18) canónico conjugado. Estas trayectorias cumplen además, con la condición establecida en (5.22), validas para valores de $\kappa \rightarrow 0$.

Por medio del proceso de cuantización del sistema, las trayectorias que no presentaban conexión clásica pueden enlazarse en el régimen cuántico. Las trayectorias cuánticas permitidas, líneas 1-6 en la figura 5.2, muestran la posibilidad de tunelamiento cuántico de solitones entre las dos cadenas no lineales acopladas.

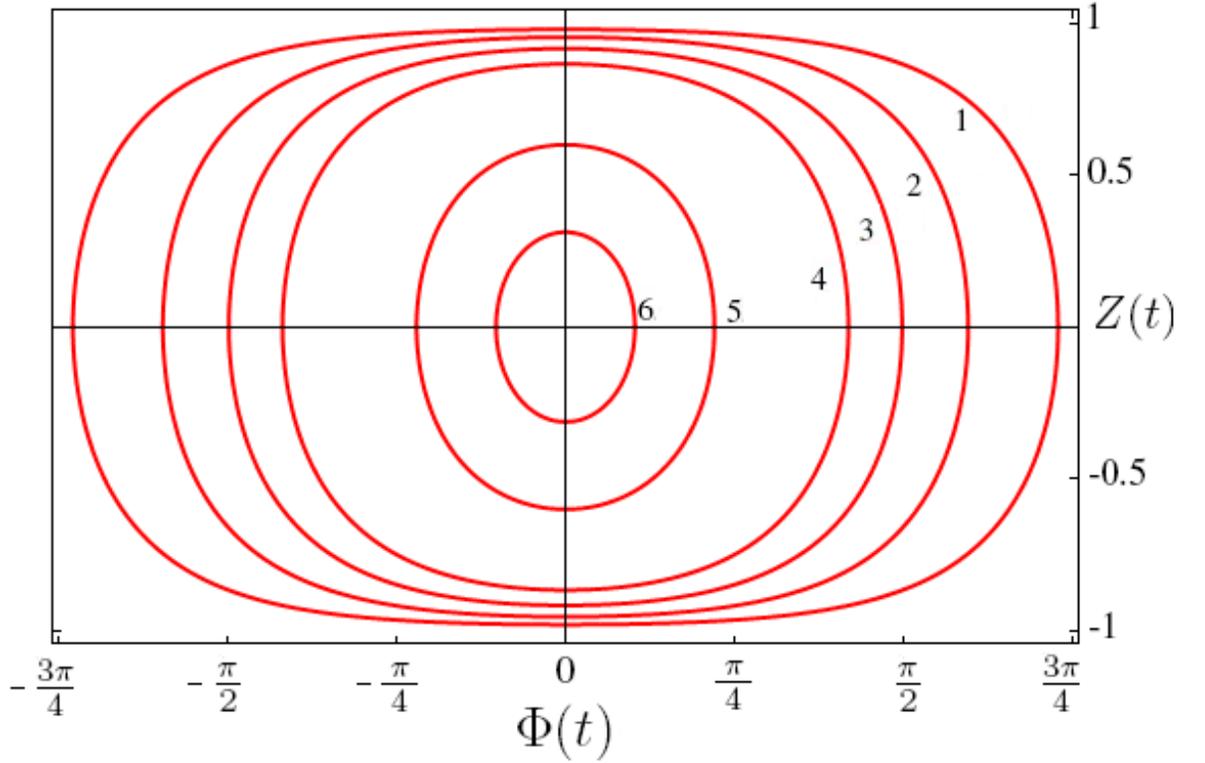
El Hamiltoniano Euclidiano se construye numéricamente haciendo uso de la ecuación (5.14) y las nuevas ecuaciones de evolución para Φ y z , los resultados se presentan en la figura 5.8, junto con las respectivas trayectorias en el nivel cuántico para diferentes valores de κ , que cumplen con la restricción $\kappa \rightarrow 0$.

En las figuras 5.8(a), 5.8(b), 5.8(c) y 5.8(d), el Hamiltoniano Euclidiano se construye para valores de κ menores que uno.

A nivel cuántico, el soliton cuenta con suficiente energía para crear una trayectoria que recorre el potencial y encuentra puntos de conexión. Estas trayectorias corresponden a trayectorias no permitidas clásicamente, las cuales pueden recorrerse en una aproximación cuántica.

Con el fin de determinar la acción Euclidiana asociada a el tunelamiento, en el limite semi-clásico, se tiene en cuenta, como en el caso de una partícula en un pozo doble de potencial, que calcular la probabilidad de tunelar a través de la región prohibida clásicamente, para el soliton, corresponde

Figura 5.7: Representación numérica $z(t)$ Vs $\Phi(t)$, resultado de la solución numérica de las ecuaciones para posibles trayectorias con diferentes valores de κ . Las líneas 1-6 corresponden, respectivamente a los valores de $\kappa = 0.8, 0.6, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2$.



a calcular la probabilidad de transición para tunelar a través de la región permitida semi-clásicamente en la integral de camino Euclidiana, como se estableció en la sección 2.5, por medio de la formulación de la acción⁸:

$$S_E = \int_{q[0]}^{q[t_f]} p dq, \quad (5.23)$$

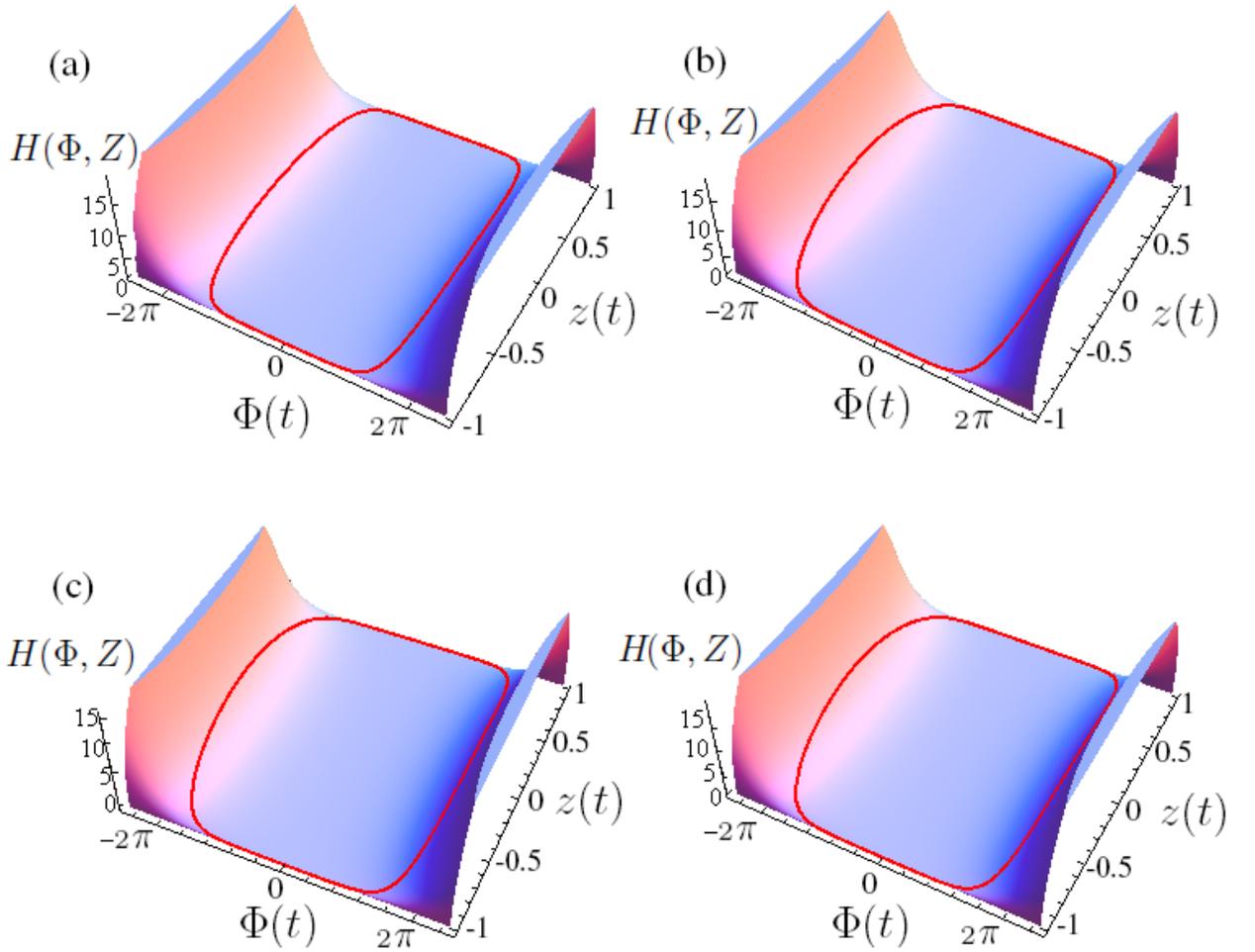
donde p hace referencia al momento conjugado y q la posición, los límites $q[0]$ y $q[t_f]$ son los puntos límites clásicos definidos por el potencial. Para desarrollar la integración dada por la acción, es necesario escoger un conveniente camino de integración, en el plano Euclidiano.

La acción Euclidiana a lo largo de la trayectoria semi-clásica dada por (5.23), se escribe para el sistema de cadenas oscilatorias no lineales de la siguiente manera:

$$S_E = \int_{z[0]}^{z[t_f]} \Phi dz, \quad (5.24)$$

⁸Pomeau, Y. Le Berre, M. Optical solitons as quantum objects. Sección IV A.

Figura 5.8: Hamiltoniano Euclidiano con posibles trayectorias para diferentes κ . En la figura (a) se muestra el Hamiltoniano cuantizado con la trayectoria para $\kappa = 0,2$, en la figura (b) se muestra el Hamiltoniano y trayectoria para $\kappa = 0,5$, en la figura (c) se muestra el Hamiltoniano y la trayectoria para $\kappa = 0,6$ y en la figura (d) el Hamiltoniano y la trayectoria se grafica para $\kappa = 0,8$.



haciendo uso de la ecuación de evolución Euclidiana para la posición z , dada por la ecuación (5.16), se obtiene:

$$dz = \frac{c}{\omega} \sqrt{1 - z^2} \sinh \Phi dt.$$

Con este resultado, la acción Euclidiana (5.24), toma la forma:

$$S_E = \frac{c}{\omega} \int_{-1}^1 \Phi \sinh \Phi \sqrt{1 - z^2} dt, \quad (5.25)$$

Se busca analizar la ecuación (5.25), en el límite $\kappa \rightarrow 0$, el cual corresponde a la condición impuesta sobre el sistema, para la aproximación semi-clásica.

Utilizando la ecuación 5.22 se puede determinar Φ en términos de z :

$$\Phi = \cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{\kappa}\right)$$

La acción Euclidiana, finalmente, esta descrita por:

$$S_E = \int_{-1}^1 \cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{\kappa}\right) dz. \quad (5.26)$$

El término contenido en la integral puede reescribirse teniendo en cuenta el proceso, descrito en el Anexo B, para determinar la solución analítica de la acción Euclidiana. Mediante este proceso se obtiene:

$$S_E = \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{1-z^2}}\right) dz. \quad (5.27)$$

Considerando el siguiente resultado:

$$\int_{-1}^1 \ln(2\sqrt{1-z^2}) dz = -2 + \ln 16.$$

La acción Euclidiana asociada a tunelamiento en el límite $\kappa \rightarrow 0$, es:

$$S_E = -2 \ln \frac{\kappa}{\kappa_c} \quad (5.28)$$

Donde parámetro $\kappa_c = 4/e$.

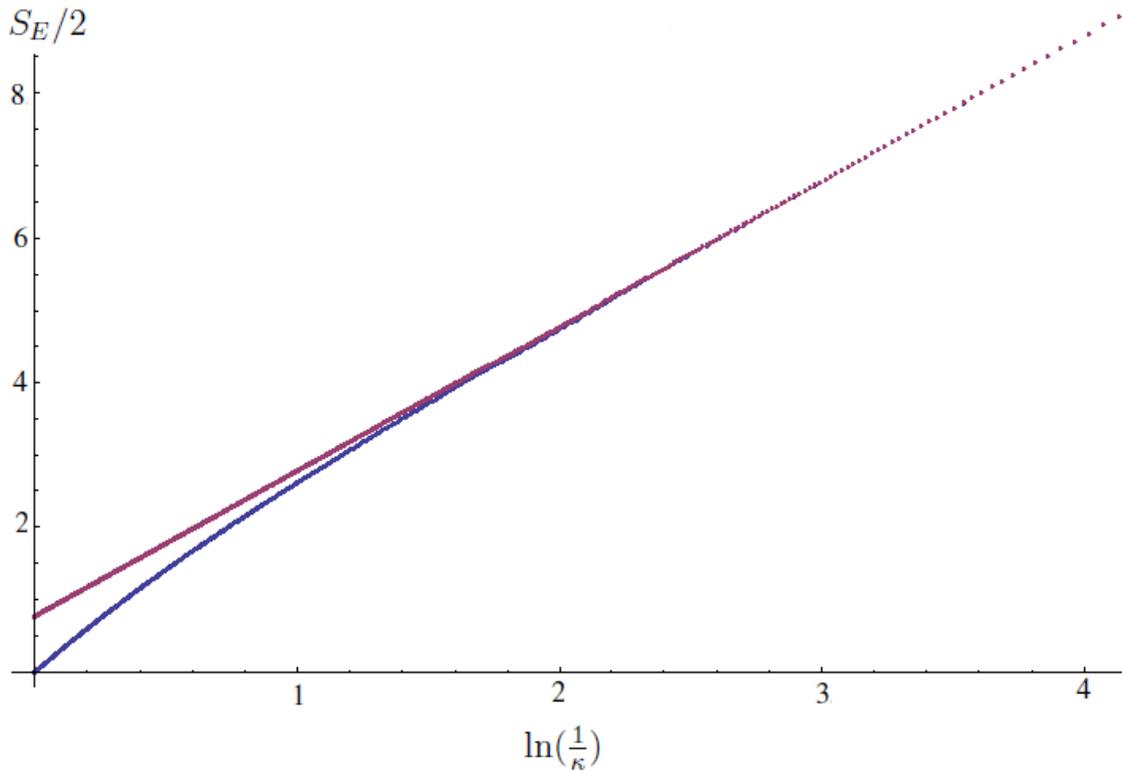
El resultado numérico de la integración de la acción Euclidiana (5.26) se presenta en la figura 5.2, junto con la grafica numérica de la acción Euclidiana determinada para (5.28). La acción Euclidiana, dada por (5.26) y (5.28), se presenta como función del inverso del parámetro κ .

La línea roja en la figura 5.2 corresponde a la integración numérica de la acción dada por la ecuación (5.26), por su parte la línea azul en la figura 5.2 corresponde a la acción Euclidiana graficada para la ecuación (5.28), para distintos valores del inverso del parámetro κ .

En la figura 5.2, comparando los resultados para la acción (5.28), calculada de forma analítica y la acción (5.26) determinada por medio de integración numérica, se observa que las graficas se ajustan mejor para valores de $\kappa \rightarrow 0$, la cual corresponde a la condición impuesta sobre el sistema, para la aproximación semi-clásica.

La acción Euclidiana asociada a tunelamiento, obedece la ecuación (5.28), para los casos considerados de funciones de prueba, definidos para el sistema de cadenas oscilatorias no lineales en el capítulo 3, los cuales garantizan la estabilidad clásica del sistema. En el proceso de aproximación

Figura 5.9: $S_E/2$ versus inverso del parámetro κ . Línea roja corresponde a grafica numérica de 5.26, la línea azul corresponde a la grafica numérica de 5.28



semi clásica en el límite WKB, el factor importante, para ser considerado es la tendencia a cero del parámetro κ , esta condición, además de las restricciones sobre las posibles trayectorias semi clásicas (5.22), permiten la formulación de la acción Euclidiana. También se ha observado en los resultados numéricos de la acción Euclidiana, el importante papel de las variables conjugadas z y Φ , en la dinámica del sistema.

6 CONCLUSIONES

El sistema de dos cadenas oscilatorias no lineales acopladas, presenta gran sensibilidad a las condiciones iniciales y a las características propias del sistema, en el capítulo 3, se ha estudiado la dinámica del sistema, para diferentes funciones de prueba. Con la técnica variacional, basada en la inclusión de parámetros variables en las funciones de prueba se realizó el análisis de la estabilidad del sistema. De los resultados obtenidos se puede concluir:

- Asumiendo funciones de prueba idénticas, se observó soluciones numéricas estables restringidas a intervalos cortos de tiempo, esta característica está ligada a la sensibilidad del sistema a las condiciones iniciales y a los valores característicos de las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema. Por otra parte, las funciones iguales no permiten la observación de los efectos de acoplamiento entre las cadenas.
- Para funciones de prueba diferentes, el efecto de acoplamiento entre cadenas se observa en la integración numérica de las ecuaciones diferenciales (4.1) y (4.2). Asumir funciones de prueba con λ constante permite observar soluciones estables y definidas en grandes intervalos de tiempo, los valores de los parámetros propios del sistema como la constante de acoplamiento entre las cadenas y el factor de no linealidad, juegan un importante papel en la estabilidad del sistema.
- Un aspecto importante para considerar, en el estudio de la evolución del sistema, es la inclusión de pulsos de prueba con λ constante, para pulsos iniciales con amplitud en un orden menor que uno.
- En el estudio de la dinámica del sistema para solitones en cadenas no lineales acopladas, mediante los resultados obtenidos, se puede observar mayor estabilidad si se considera funciones de prueba diferentes, que incluyan frecuencia adicional a la fase, tal como las consideradas en (4.19), con pulsos en un límite de pequeñas amplitudes, para cadenas caracterizadas en la sección 3.5.

La segunda parte del trabajo, relacionada con la cuantización macroscópica del sistema, a través de la aproximación semi-clásica, desarrollado en el capítulo 4, se puede concluir:

- El análisis clásico, realizado considerando funciones de prueba estables determinadas en el capítulo 3, permite la formulación de las ecuaciones de evolución de la posición y momento conjugado canónico del sistema, los cuales están caracterizados por el parámetro ω , la constante de acoplamiento entre cadenas c y un nuevo parámetro κ , este último permite observar diferentes comportamientos en la evolución del sistema.
- En la aproximación clásica, las soluciones estables para valores de $\kappa > 1$, presentan trayectorias de conexión clásica, mientras que las soluciones estables para valores de $\kappa < 1$ corresponden a trayectorias no conectadas clásicamente.
- Las trayectorias prohibidas clásicamente, encuentran conexión a nivel cuántico en el límite cuando $\kappa \rightarrow 0$, siguiendo las condiciones establecidas (5.22), para la dinámica Euclidiana.
- La acción Euclidiana asociada a tunelamiento, obedece la ecuación (5.28), para los casos considerados de funciones de prueba. También se ha observado en los resultados numéricos de la acción Euclidiana, el importante papel de las variables conjugadas z y Φ , en la dinámica del sistema. De esta manera, los efectos de tunelamiento de solitones entre dos cadenas no lineales acopladas, pueden afectar el sistema para el límite donde el parámetro $\kappa \rightarrow 0$.

7 RECOMENDACIONES

- Analizar el sistema de ecuaciones diferenciales propuesto para dos cadenas oscilatorias no lineales acopladas, considerando la dinámica caótica del sistema.
- Para calcular la verdadera transmisión para el soliton en dos fibras ópticas acopladas, se tiene que multiplicar la acción sin dimensiones S_E por un apropiado coeficiente $s^{(1)}$ que depende de las propiedades de las fibras, esto da finalmente la acción física $S_E^{phys} = s^{(1)}S_E$ en dimensiones de \hbar , este proceso esta descrito en el trabajo realizado por Martine Le Berre, para solitones opticos como objetos cuánticos. Se plantea la posibilidad de determinar el coeficiente de transmisión entre dos cadenas no lineales acopladas, determinando las propiedades de las cadenas.
- Mediante la caracterización del sistema y con el coeficiente de transmisión, es posible determinar el límite entre el régimen cuántico y el régimen semi-clásico, para fibras ópticas de núcleo de silica, trabajo desarrollado por Martine Le Berre, en el estudio de solitones opticos como objetos cuánticos. Se sugiere nuevamente un estudio de dos cadenas oscilatorias no lineales acopladas en las que se pueda establecer este límite.
- Se propone estimar la longitud típica necesaria, para que un soliton pueda tunelar de una cadena a la otra. Tal como el desarrollo propuesto para fibras ópticas, en el trabajo de solitones como objetos cuánticos.

BIBLIOGRAFIA

KOSEVICH, YU. A., MANEVITCH, L.I., SAVIN, A.V. Classical counterpart of macroscopic tunneling quantum dynamics. Phys. Rev. E 77, 2008.

MOHSEN, R., Quantum Theory of tunneling. World Scientific Publishing Co.

POMEAU, Y., LE BERRE, M., Optical solitons as quantum objects; arXiv:0804.3130v1 [physics.optics] 20 Apr 2008.

PANG XIAO - FENG, FENG YUAN-PING., Quantum mechanics in Nonlinear Systems. World Scientific Publishing Co. 2005.

BERMAN, G. P., IZARAILEV, F. M., The Fermi-Pasta-Ulam problem: 50 years of progress; arXiv:nlin. CD/0411062 v2 14 Dec 2004.

FEYNMAN, R.P., HIBBS, A.R., Quantum Mechanics and Path Integrals. McGraw-Hill.

KOSEVICH, YU. A., MANEVITCH, L.I., SAVIN, A.V. Energy transfer in coupled nonlinear phononic waveguides: transition from wandering breather to nonlinear self-trapping. Journal of Physics: Conference Series 92 (2007).

CAMPBELL DAVID K. Nonlinear Science. Los Alamos Science Special issue 1987.

CHOW TAI L., Classical Mechanics. Jhon Wiley & Sons, Inc. 1995.

INFELD E., ROWLANDS G., Nonlinear waves, solitons and chaos. Cambridge University Press. 1992.

Los funcionales asignan un número real a cada función de una clase bien definida. Definiendo el conjunto A de funciones. El funcional S asigna a cada miembro $f \in A$, un número real definido por $S(f)$.

$$S : A \longrightarrow R$$

Por ejemplo, definiendo $F(y) = \int_0^1 y(x)^2 dx$. Luego $F[y = x] = \frac{1}{3}$, y $F[y = \sin \pi x] = \frac{1}{2}$.

La derivada funcional es una generalización de la derivada usual que se presenta en el cálculo de variaciones. En una derivada funcional, en lugar de diferenciar una función con respecto a una variable, se diferencia una funcional con respecto a una función.

La derivada funcional en términos de un límite que involucra la delta de Dirac δ , se define por:

$$\frac{\delta F[\Psi(x)]}{\delta \Psi(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{F[\Psi(x) + \epsilon \delta(x - y)] - F[\Psi(x)]}{\epsilon} \right]. \quad (\text{A1})$$

Aplicando la definición (A1), se pueden considerar los siguientes casos específicos de derivadas funcionales.

- Funcional de la forma $F = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) dx$:

$$\frac{\delta F}{\delta \Psi(y)} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y) dx = 1.$$

- Funcional de la forma $F = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^2(x) dx$:

$$\frac{\delta F}{\delta \Psi(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (2\Psi(x)\delta(x - y) + \epsilon \delta^2(x - y)) dx \right] = 2\Psi(y).$$

- Funcional de la forma $F = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx$, derivada con respecto a $\Psi(y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta \Psi(y)} &= \frac{\delta}{\delta \Psi(y)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x)\Psi^*(x) dx \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (\delta(x - y)\Psi^*(x) dx) \right] = \Psi^*(y). \end{aligned}$$

- Funcional de la forma $F = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx$, derivada con respecto a $\Psi^*(y)$:

$$\begin{aligned}\frac{\delta F}{\delta \Psi^*(y)} &= \frac{\delta}{\delta \Psi(y)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \Psi^*(x) dx \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (\delta(x-y) \Psi(x) dx) \right] = \Psi(y).\end{aligned}$$

- Funcional de la forma $F = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} \phi dx$

$$\begin{aligned}\frac{\delta F}{\delta \Psi(y)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} [\Psi(x) + \epsilon \delta(x-y)] \phi dx - \right. \\ &\quad \left. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \phi dx \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} [\delta(x-y)] \phi dx = -\phi'(y).\end{aligned}$$

- De forma similar se establecen las siguientes derivadas funcionales:

$$\frac{\delta}{\delta \Psi(x, t)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} \right|^2 dx \right] = -\frac{\partial^2 \Psi^*(x, t)}{\partial x^2}.$$

$$\frac{\delta}{\delta \Psi^*(x, t)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} \right|^2 dx \right] = -\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2}.$$

$$\frac{\delta}{\delta \Psi(x, t)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} \right|^2 dx \right] = -\frac{\partial^2 \Psi^*(x, t)}{\partial t^2}.$$

$$\frac{\delta}{\delta \Psi^*(x, t)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} \right|^2 dx \right] = -\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2}.$$

De esta manera el Lagrangiano del sistema de cadenas oscilatorias no lineales, corresponde a una funcional descrita por:

$$\begin{aligned}L(\Psi_1, \Psi_2, \dot{\Psi}_1, \dot{\Psi}_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left| \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right|^2 - \omega_m^2 |\Psi_1|^2 \right. \\ &\quad \left. - \omega_m^2 |\Psi_2|^2 - \beta(|\Psi_1|^4 + |\Psi_2|^4) + 2c(\Psi_1 \Psi_2^* + \Psi_2 \Psi_1^*) \right) dx.\end{aligned}$$

Derivando funcionalmente el Lagrangiano, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales, que describen la dinámica del sistema.

Derivando funcionalmente el Lagrangiano con respecto a Ψ_1^* , se obtiene las ecuaciones diferenciales de acoplamiento asociadas a la cadena uno:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} + \omega_m^2 \Psi_1 \right) + \beta |\Psi_1|^2 \Psi_1 = c\Psi_2, \quad (\text{A2})$$

La ecuación diferencial de acoplamiento asociada a la cadena dos, se obtiene derivando funcionalmente el Lagrangiano con respecto a Ψ_2^* :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} + \omega_m^2 \Psi_2 \right) + \beta |\Psi_2|^2 \Psi_2 = c\Psi_1. \quad (\text{A3})$$

Las ecuaciones diferenciales de acoplamiento conjugadas asociadas a la cadena uno y dos, se obtienen diferenciando funcionalmente el Lagrangiano (A11), con respecto a las funciones Ψ_1 y a Ψ_2 , respectivamente:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi_1^*}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1^*}{\partial x^2} + \omega_m^2 \Psi_1^* \right) + \beta |\Psi_1^*|^2 \Psi_1^* = c\Psi_2^*. \quad (\text{A4})$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi_2^*}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2^*}{\partial x^2} + \omega_m^2 \Psi_2^* \right) + \beta |\Psi_2^*|^2 \Psi_2^* = c\Psi_1^*. \quad (\text{A5})$$

Mediante el concepto de derivada funcional, se puede formular las ecuaciones diferenciales que describan la evolución del sistema, a partir del Lagrangiano del sistema. O como en el caso de las ecuaciones diferenciales para el sistema de dos cadenas oscilatorias no lineales acopladas, establecer el Lagrangiano, por medio de las ecuaciones diferenciales del sistema.

B. Formulación analítica de la Acción Euclidiana

En la acción Euclidiana descrita por:

$$S_E = \int_{z_i}^{z_f} \cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{|\kappa|}\right) dz, \quad (\text{B1})$$

El término contenido en la integral puede reescribirse teniendo en cuenta el siguiente proceso:

$$x = \cosh y$$

$$2x = e^y + e^{-y},$$

multiplicando la anterior ecuación por el término e^y se obtiene:

$$(e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0,$$

solucionando la ecuación cuadrática y simplificando términos se obtiene:

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1},$$

$$y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}),$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}).$$

Por lo tanto:

$$\cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{\kappa}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{1-z^2} - \sqrt{1-z^2 - \kappa^2}}{\kappa}\right). \quad (\text{B2})$$

Considerando que $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ para $x \ll 1$ y escribiendo el término $\sqrt{1-z^2 - \kappa^2}$ de la siguiente manera:

$$\sqrt{1-z^2 - \kappa^2} \approx \sqrt{1-z^2} \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{1-z^2}},$$

para valores de $\kappa \ll 1$:

$$\sqrt{1-z^2 - \kappa^2} \approx \sqrt{1-z^2} - \frac{\kappa^2}{2\sqrt{1-z^2}},$$

reemplazando este resultado en la ecuación B2:

$$\cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{\kappa}\right) = \ln\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{1-z^2}}\right).$$

Con este resultado la acción Euclidiana tiene la forma:

$$S_E = \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{1-z^2}}\right) dz. \quad (\text{B3})$$