

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/303875551>

# Electromagnetic wave propagation in media with fractional dielectric response

Conference Paper · September 2012

---

CITATIONS

0

READS

53

3 authors, including:



[Victor Giraldo Buesaquillo Gómez](#)  
Los Andes University (Colombia)

2 PUBLICATIONS 0 CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Bright source of entangled photon pairs using optical cavities [View project](#)

# Propagación de ondas electromagnéticas en medios con respuesta dieléctrica fraccional

## Electromagnetic wave propagation in media with fractional dielectric response

Victor Giraldo Buesaquillo Gómez<sup>a\*</sup>, Alejandro Pérez Riascos<sup>b</sup>, Alvaro Rugeles Pérez<sup>c</sup>.

<sup>a</sup>Departamento de Física. Universidad de Nariño, Pasto.

<sup>b</sup>Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, México, D.F.

<sup>c</sup>Departamento de Física. Universidad de Nariño, Pasto.

Aceptado Octubre; Publicado en línea Enero.

ISSN 2256-3830.

### Resumen

En este trabajo se estudia la propagación de ondas electromagnéticas en medios dispersivos con una respuesta dieléctrica dada por el modelo de Havriliak-Negami. En este modelo el campo de polarización del medio se expresa por medio de derivadas de orden fraccional del campo eléctrico. A partir de las ecuaciones de Maxwell en medios materiales se deduce una ecuación de onda para el campo eléctrico que contiene derivadas temporales fraccionales. Se obtienen soluciones para ondas planas, esféricas, cilíndricas y paquetes de ondas en estos medios. Los resultados obtenidos describen la propagación de ondas electromagnéticas en algunos polímeros.

**Palabras Claves:** Havriliak-Negami, Cálculo Fraccional, Ondas Electromagnéticas.

### Abstract

In this paper we study the propagation of electromagnetic waves in dispersive media with a dielectric response given by the Havriliak-Negami model. In this model the polarization field is defined in terms of fractional order derivatives of the electric field. Starting from Maxwell's equations in material media we obtain a wave equation for the electric field containing temporal fractional derivatives. We study solutions for waves in different geometries and for wave packets in fractional media. The results describe the propagation of electromagnetic waves in some polymers.

**Keywords:** Havriliak-Negami, Fractional Calculus, Electromagnetic Waves.

## 1. Introducción

Para obtener información de las propiedades de un material es común analizar la permitividad compleja  $\epsilon^*$  [1], ya que es fácil de medir y permite estudiar la estructura molecular. Esta propiedad está relacionada con la respuesta del material ante un estímulo electromagnético y uno de los primeros modelos empleados en describir este fenómeno es la ley de relajación de Debye [1], sin embargo, diversos estudios sobre propiedades dieléctricas de muchos sistemas

\* vicbfisico@gmail.com

como polímeros, alcoholes y cristales [2] se analizan en términos de modelos dieléctricos empíricos más generales, como los propuestos por Cole y Cole, Davidson y Cole, y Havriliak y Negami, todos en función de la frecuencia [3,4]. El modelo de Havriliak-Negami se puede obtener a partir de una ecuación diferencial fraccional del campo de polarización [5].

Existen diversas disciplinas en las que se requiere conocer con precisión las propiedades de los materiales y esto se logra mediante el uso del cálculo fraccional. En el área del desarrollo de semiconductores el óxido de circonio amorfo dopado con lantano es uno de los dieléctricos más prominentes para reemplazar el óxido de silicio y se cita debido a que manifiesta el tipo de relajación anómala que se estudia en este trabajo [6]. En el área de la biología también existen modelos paramétricos para describir la variación de las propiedades dieléctricas de los tejidos como función de la frecuencia relacionadas con el modelo de Havriliak-Negami [7]. Por su parte, las medidas sobre la exposición de cuerpos humanos a la radiación electromagnética requiere una cantidad de datos suficientes sobre las propiedades dieléctricas de los tejidos para obtener resultados óptimos [8]. Con esto se mencionan algunas de las áreas en las que se han reportado aplicaciones al uso del cálculo fraccional en física.

En este artículo se hace un estudio de los fenómenos físicos presentados dentro de dieléctricos cuya respuesta es dada por el modelo de Havriliak-Negami, que aquí se denominan medios con respuesta electromagnética fraccional o en su forma resumida medios fraccionales. Para tal objeto, en la sección 3 se deduce la ecuación de onda a partir de las ecuaciones de Maxwell [9,10]. Posteriormente en la sección 4 se hace el estudio de la propagación de pulsos y paquetes eléctricos en medios con respuesta dieléctrica anómala [11,12]. Finalmente en la sección 5 se estudia este fenómeno considerando diferentes geometrías. En el proceso de obtención de la transformada inversa de Laplace se usan métodos numéricos que permiten estudiar las características del campo eléctrico [13].

## 2. Medios fraccionales

En esta sección se consideran mecanismos tales como la polarización electrónica y atómica debidas a las perturbaciones producidas en los modos de vibración de los electrones y átomos respectivamente; la polarización orientacional debida a la modificación de la orientación de los dipolos y finalmente la polarización por migración de cargas [1]. Donde los mecanismos de polarización inducida se suelen simbolizar por  $\vec{P}_\infty(\vec{r}, t)$  y la polarización orientacional por  $\vec{P}_0(\vec{r}, t)$  [14]. Todos los mecanismos considerados son causados por una acción externa que excita el sistema, el cual responde con una acción restauradora para retornar al estado de equilibrio original. La rapidez a la cual avanza este mecanismo es proporcional al grado de desviación producido y el tiempo involucrado en este proceso se denomina tiempo de relajación  $\tau$ . Estos mecanismos se estudian a través de la permitividad relativa  $\hat{\epsilon}$  que está directamente relacionada con la respuesta del medio y es medible. En presencia de un dieléctrico la densidad de flujo eléctrico se expresa por [1,15]:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{D}_0(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t), \quad (1)$$

donde  $\vec{D}_0(\vec{r}, t)$  es la densidad del flujo eléctrico en el espacio libre y  $\epsilon_0$  es la permitividad del vacío. Para ciertos procesos se puede, también, suponer que la densidad de flujo eléctrico es proporcional al campo eléctrico aplicado:  $\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{E}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \hat{\epsilon} \vec{E}(\vec{r}, t)$ , donde  $\epsilon$  es la permitividad del material y  $\hat{\epsilon}$  es la permitividad relativa. De igual manera sucede con la polarización:  $\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}(\vec{r}, t)$ , siendo  $\chi_e$  la susceptibilidad eléctrica del medio. Para estos casos se cumple que  $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$  [1]. Sin embargo, en medios materiales más generales, el campo de polarización  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  del medio asociado a un campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  recibe diferentes contribuciones. En el caso de los mecanismos de polarización inducida  $\vec{P}_\infty(\vec{r}, t)$  el aporte es [4,12,14]:

$$\vec{P}_\infty(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi_\infty \vec{E}(\vec{r}, t) = (\epsilon_\infty - \epsilon_0) \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (2)$$

donde  $\epsilon_\infty$  y  $\chi_\infty$  son las contribuciones de los procesos de alta frecuencia a la constante dieléctrica y a la susceptibilidad. Por otra parte, la polarización orientacional  $\vec{P}_0(\vec{r}, t)$  contribuye con [1,4,12,14]:

$$\vec{P}_0(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi(t - \tau) \vec{E}(\vec{r}, \tau) d\tau, \quad (3)$$

siendo  $\epsilon_0$  la permitividad eléctrica en el vacío y  $\chi(t)$  la susceptibilidad eléctrica del material. La función  $\chi(t)$  está relacionada con la respuesta del material y su dependencia temporal da como resultado un índice de refracción dependiente de la frecuencia. Formas más generales de  $\chi$  pueden incluir la intensidad del campo eléctrico (medios no lineales) o depender de la dirección (medios anisótropos) [16]. Teniendo en cuenta que  $\vec{P}(\vec{r}, t) = \vec{P}_\infty(\vec{r}, t) + \vec{P}_0(\vec{r}, t)$  e introduciendo (2) y (3) en (1) se obtiene:

$$\begin{aligned}\vec{D}(\vec{r}, t) &= \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + (\epsilon_\infty - \epsilon_0) \vec{E}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi(t - \tau) \vec{E}(\vec{r}, \tau) d\tau \\ &= \epsilon_\infty \vec{E}(\vec{r}, t) + (\epsilon_{es} - \epsilon_\infty) \int_{-\infty}^t \xi(t - \tau) \vec{E}(\vec{r}, \tau) d\tau,\end{aligned}\quad (4)$$

siendo  $\epsilon_0 \chi(t) = (\epsilon_{es} - \epsilon_\infty) \xi(t)$ , además  $\xi(t)$  es la respuesta del material, y  $\epsilon_{es}$  es la permitividad estática. Por medio de la transformada de Laplace, que para la función  $g(t)$  se define por:

$$\tilde{g}(s) = \mathcal{L}[g(t)] \equiv \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt, \quad (5)$$

la ecuación (3) se reduce a [4,12]:

$$\vec{P}(\vec{r}, s) = \epsilon_0 \tilde{\chi}(s) \vec{E}(\vec{r}, s), \quad (6)$$

con lo que la ecuación (4) queda expresada por [4,12]:

$$\vec{D}(\vec{r}, s) = \epsilon_\infty \vec{E}(\vec{r}, s) + (\epsilon_{es} - \epsilon_\infty) \tilde{\xi}(s) \vec{E}(\vec{r}, s). \quad (7)$$

En (7) aparece la transformada de Laplace de la respuesta del medio  $\tilde{\xi}(s)$  que está relacionada con la susceptibilidad eléctrica por [4,12]:

$$\epsilon_0 \tilde{\chi}(s) = (\epsilon_{es} - \epsilon_\infty) \tilde{\xi}(s), \quad (8)$$

donde las constantes  $\epsilon_{es}$  y  $\epsilon_\infty$  son las permitividades estática y cuando  $t \rightarrow \infty$ , respectivamente. La importancia de la ecuación (8) es que está relacionada con la permitividad compleja mediante la ecuación  $\epsilon_0 \hat{\epsilon}(\omega) = \epsilon_\infty + \epsilon_0 \tilde{\chi}(i\omega)$ , lo que posibilita diversas técnicas que permiten medir directamente la función  $\tilde{\xi}(s)$ , de lo cual surgen diversos modelos que representan algunas características encontradas en ciertos medios materiales. Una de las respuestas más estudiadas es la de Debye  $\tilde{\chi}_D(s) = (1 + s\tau)^{-1}$  [1], sin embargo, es aplicable en un número limitado de casos; por tanto surgen generalizaciones de éste modelo que llevan a la respuesta de Havriliak-Negami dada por [2,3,5,12]:

$$\tilde{\xi}_{HN}(s) = \frac{1}{(1 + (s\tau)^\alpha)^\beta} \quad 0 < \alpha, \beta \leq 1, \quad (9)$$

en estas respuestas  $\tau$  es un tiempo característico que depende del tipo de material. El modelo (9) permite describir la respuesta electromagnética de diversas estructuras como son los polímeros, tejidos biológicos, entre otros. Las técnicas de medida se recopilan en lo que se denomina espectroscopia dieléctrica de banda ancha, la cual permite estudiar la estructura molecular, abarcando un rango de frecuencias de  $10^{-4}$  a  $10^{11} Hz$  [17]. En la ecuación (9), el caso  $\beta = 1$  se conoce como respuesta de Cole-Cole [18,3,5]:

$$\tilde{\xi}_{CC}(s) = \frac{1}{1 + (s\tau)^\alpha}. \quad (10)$$

Y cuando  $\alpha = 1$  queda como resultado el modelo de Davidson-Cole [18,3,5]:

$$\tilde{\xi}_{DC}(s) = \frac{1}{(1 + s\tau)^\beta}. \quad (11)$$

Para  $\alpha = \beta = 1$ , todos estos casos recuperan el modelo de Debye. A diferencia del modelo de Debye que describe la respuesta electromagnética del material como osciladores sobre amortiguados, la respuestas (9)-(11) describen al medio como un sistema viscoelástico descrito por osciladores fraccionales o casos más generales que se definen en términos de la derivada de Riemann-Liouville [19] que se define por [20,21]:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} f(\tau) d\tau, \quad (12)$$

donde  $\alpha \geq 0$  es el orden real de la derivada perteneciente al intervalo  $n - 1 \leq \alpha < n$  con  $n$  entero, además,  $t > a$  y  $t > 0$ . Por esta razón, los medios estudiados en este trabajo se denominan medios con respuesta electromagnética

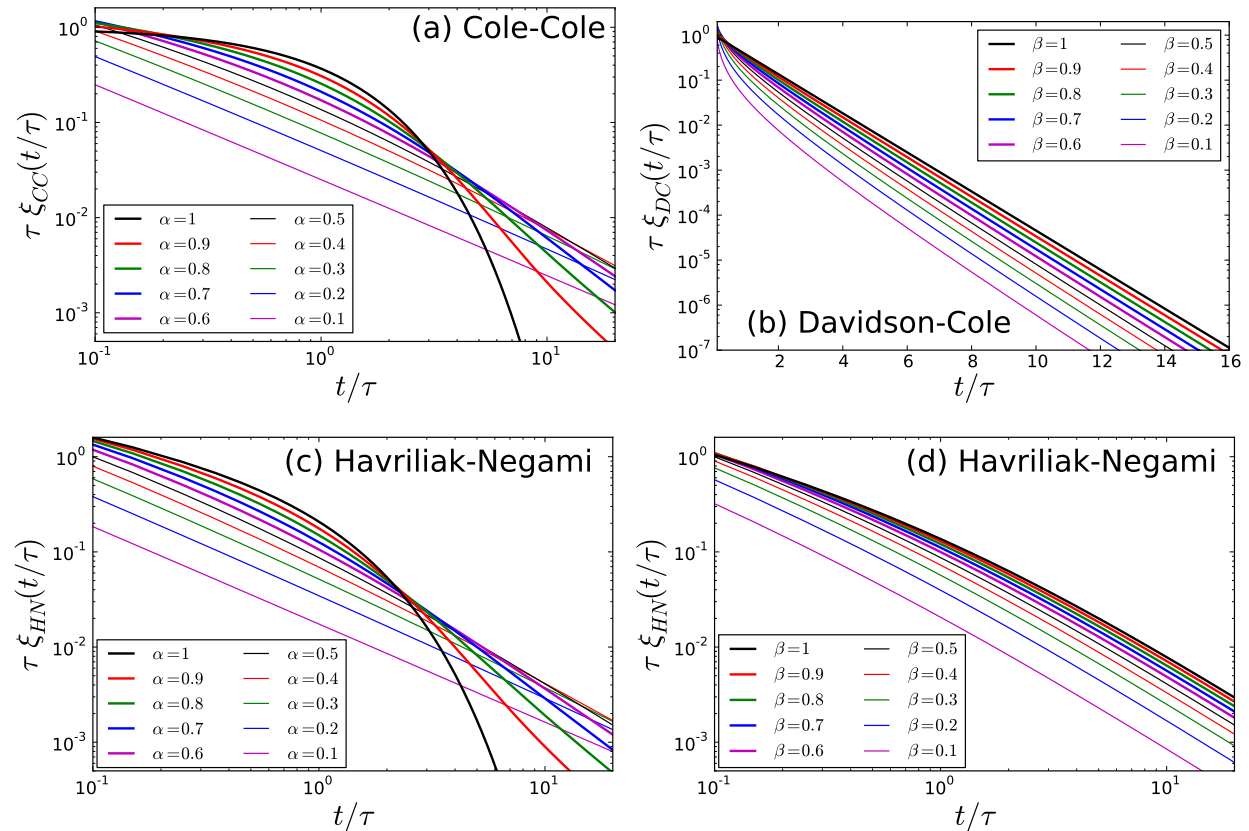


Figura 1. Respuesta de un material fraccional (18) como función del tiempo. (a) Respuesta de Cole-Cole  $\xi_{CC}(t)$  en escala logarítmica. Se obtienen respuestas con comportamientos con decaimiento exponencial (similares a las respuestas de Debye  $\alpha = 1$ ) y respuestas que decaen como una ley de potencias. (b) Respuesta de Davidson-Cole  $\xi_{DC}(t)$  en escala semilogarítmica. Se obtienen respuestas que principalmente decaen exponencialmente (la respuesta de Debye se da cuando  $\beta = 1$ ). En algunos casos se observa que para  $t < \tau$  la respuesta sigue una ley de potencias. (c) Respuesta de Havriliak-Negami  $\xi_{HN}(t)$  en escala logarítmica para  $\beta = 0.5$  y  $\alpha$  variable. El resultado es similar a la respuesta de Cole-Cole. (d) Respuesta de Havriliak-Negami  $\xi_{HN}(t)$  en escala semilogarítmica con  $\alpha = 0.5$  y  $\beta$  variable. El comportamiento es similar a la respuesta de Davidson-Cole.

fraccional o en forma simplificada medios fraccionales. En la Figura 1 se presentan los resultados para  $\xi_{CC}(t)$  y  $\xi_{DC}(t)$  obtenidos a partir de la ecuación (18). Se observa que medios con respuesta de Cole-Cole pueden tener un comportamiento exponencial o de ley de potencias dependiendo de los valores de  $\alpha$ . En el caso de Davidson-Cole para  $\beta < 1$  se observa un pequeño intervalo inicial  $t < \tau$  en el que la respuesta decae como una ley de potencias, para  $t > \tau$  todos los casos analizados representan un decaimiento exponencial. El análisis del modelo de Havriliak-Negami muestra comportamientos similares con decaimientos exponenciales o de leyes de potencias dependiendo de los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ .

Por otra parte, la ecuación (9) también se puede estudiar en el dominio del tiempo. A partir de la expansión en serie de la ecuación (9) se deduce la transformada inversa de Laplace de  $\tilde{\xi}_{HN}(s)$ . Reescribiendo los términos de la definición (9) resulta:

$$\tilde{\xi}_{HN}(s) = (s\tau)^{-\alpha\gamma} \left( 1 + \frac{1}{(s\tau)^\alpha} \right)^{-\gamma}, \quad (13)$$

donde se presta especial atención al segundo factor ya que es de la forma  $(1 + x^{-1})^{-\gamma}$  y por lo tanto permite utilizar la expansión en serie de Taylor [22], dada por la expresión:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(t)|_{t_0}}{n!} (t - t_0)^n, \quad f^n(t) = \frac{df^n(t)}{dt^n}, \quad (14)$$

para escribir la ecuación (13) así:

$$\tilde{\xi}_{HN}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\gamma + n)}{n! \Gamma(\gamma)} (s\tau)^{-\alpha(n+\gamma)}, \quad (15)$$

y si se multiplica tanto en el numerador como en el denominador por el factor  $\Gamma(\alpha(n + \gamma))$  resulta:

$$\tilde{\xi}_{HN}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n) (-1)^n t^{\alpha n}}{n! \Gamma(\alpha(n + \gamma)) \Gamma(\gamma)} \tau^{-\alpha(n+\gamma)} dt. \quad (16)$$

Recordando la función de Mittag-Leffler generalizada,  $E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+n)}{n! \Gamma(\alpha n + \beta) \Gamma(\gamma)} z^n$ ,  $0 < \alpha, \beta, \gamma \leq 1$  [3], la ecuación (16) se reduce a:

$$\tilde{\xi}_{HN}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \tau^{-\alpha\gamma} t^{\alpha\gamma-1} E_{\alpha,\alpha\gamma}^{\gamma} \left( - \left( \frac{t}{\tau} \right)^{\alpha} \right) dt, \quad (17)$$

y finalmente comparando con la transformada de Laplace (5) se establece que [3]:

$$\xi_{HN}(t) = \frac{t^{\alpha\gamma-1}}{\tau^{\alpha\gamma}} E_{\alpha,\alpha\gamma}^{\gamma} \left( - \left( \frac{t}{\tau} \right)^{\alpha} \right), \quad (18)$$

resultado que da la respuesta de Havriliak-Negami en el dominio del tiempo. En el modelo de relajación de Havriliak-Negami se determina la polarización  $\vec{P}$  utilizando una ecuación pseudo-diferencial fraccional auxiliar dada de la siguiente manera [9,12]:

$$(\tau^{\alpha} {}_0 D_t^{\alpha} + 1)^{\beta} \vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 (\epsilon_s - \epsilon_{\infty}) \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (19)$$

donde aparecen términos en derivadas fraccionales que están elevados a una potencia arbitraria. Por otra parte, se puede demostrar que la respuesta de Cole-Cole se obtiene con el uso de osciladores fraccionales. En primera medida se supone que las cargas negativas  $-Q$ , del medio fraccional, se desplazan una pequeña distancia  $\vec{x}$  respecto a las cargas positivas  $+Q$  y se forman dipolos por acción del campo eléctrico, que tienen un momento dipolar promedio  $Q\vec{x}$  [1]. En consecuencia, como condición primaria, la polarización del material es [1]:

$$\vec{P}(t) = N_e Q \vec{x}(t), \quad (20)$$

donde  $Q$  es la carga fundamental,  $N_e$  es el número de dipolos por unidad de volumen y  $\vec{x}$  es el desplazamiento relativo de los centroides de las cargas positivas y negativas que se supone está definido por un oscilador fraccional [23]:

$$\nu_0^{2-\alpha} {}_0 D_t^{\alpha} x(t) + \nu_0^{\alpha} x(t) = \frac{f_0}{m} g(t), \quad (21)$$

donde la fuerza externa es determinada por el campo eléctrico aplicado al material y tiene una amplitud  $f_0 = QE_0$ . En la ecuación (21)  ${}_0 D_t^{\alpha}$  es el operador derivada fraccional de Riemann-Liouville de orden  $1 \leq \alpha < 2$ , ecuación (12). Además  $t$  es la variable de tiempo y  $\nu_0$  es la frecuencia propia de vibración. Es necesario incluir el término  $\nu_0^{\alpha-2}$  para corregir las discrepancias en las unidades. La función  $g(t)$  es la función fuente. Se puede tomar como condición inicial  $g(t) = \nu_0 \delta(t)$  donde  $\delta(t)$  es la función delta de Dirac. Esta función fuente representa el pulso inicial de la fuerza aplicada al oscilador y  $f_0$  es la amplitud del pulso [23]. Reorganizando (21) y reemplazando  $g(t)$  por  $\nu_0 \delta(t)$  resulta:

$${}_0 D_t^{\alpha} x(t) + \nu_0^{\alpha} x(t) = \frac{QE_0}{m} \nu_0^{\alpha-2} \nu_0 \delta(t). \quad (22)$$

La ecuación (22) es un caso particular de una ecuación diferencial lineal fraccional que se estudia en [20]. El resultado correspondiente es el siguiente:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[-\nu_0^{\alpha} t^{\alpha}] \frac{QE_0}{m} \nu_0^{\alpha-2} \nu_0 \delta(\tau) d\tau \\ &= \frac{QE_0}{m} \nu_0^{\alpha-1} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\nu_0^{\alpha})^n (t-\tau)^{\alpha n}}{\Gamma[\alpha(n+1)]} \delta(\tau) d\tau \\ &= \frac{QE_0}{m} \nu_0^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\nu_0^{\alpha})^n}{\Gamma[\alpha(n+1)]} t^{\alpha(n+1)-1}, \end{aligned} \quad (23)$$

donde  $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}$  es la función de Mittag-Leffler de dos términos y por tanto se obtiene:

$$x(t) = \frac{QE_0}{m} (\nu_0 t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[-(\nu_0 t)^\alpha]. \quad (24)$$

Ahora todo es cuestión de utilizar (1), (20) y (24) para obtener, en una dimensión:

$$D(t) = \epsilon_0 E_0 + N_e \frac{Q^2 E_0}{m} (\nu_0 t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[-(\nu_0 t)^\alpha]. \quad (25)$$

Por medio de la transformada de Laplace, ecuación (5), se obtiene:

$$\hat{\epsilon} = 1 + \frac{N_e Q^2}{m \epsilon_0} \frac{\nu_0^\alpha}{s^\alpha + \nu_0^\alpha} = 1 + \frac{N_e Q^2}{m \epsilon_0} \frac{1}{(s\tau)^\alpha + 1}, \quad (26)$$

para lo cual se ha considerado  $\tau = \frac{1}{\nu_0}$ . Al tomar  $s = i\omega$ , la expresión (26) tiene una parte imaginaria debida a la dispersión producida por el material, tal como sucede en un material normal. Comparando la ecuación (26) con la ecuación (7) se deduce que la respuesta de dicho material es:

$$\xi(s) = \frac{1}{1 + (s\tau)^\alpha}. \quad (27)$$

La ecuación (27) es precisamente la respuesta de Cole-Cole y por tanto, un material con este tipo de respuesta se puede describir a partir de osciladores fraccionales, lo que se convierte en una evidencia que dicho fenómeno es no local. Un caso más general es el modelo de Havriliak-Negami el cual está implícito en los desarrollos de la siguiente sección.

### 3. Ecuación de onda

Una vez descritos los materiales fraccionales, en esta sección se obtiene la función de onda de ondas electromagnéticas en estos medios. Se consideran materiales no magnéticos, sin cargas libres ni corrientes. Para este caso las ecuaciones de Maxwell toman la forma [9,15]:

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = 0, \quad (28)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (29)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad (30)$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (31)$$

donde se supone la relación constitutiva  $\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{H}$  para el campo magnético. Por otra parte, el campo de desplazamiento  $\vec{D}(\vec{r}, t)$  está relacionado con el campo  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  mediante la expresión [1]:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon_\infty \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t), \quad (32)$$

$\vec{P}$  es la suma de las contribuciones de (2) y (3). Combinando las ecuaciones (28)-(31) y teniendo en cuenta que  $\nabla \cdot \vec{P} = 0$  se obtiene la ecuación para el campo  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  [9,11,12]:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\epsilon_\infty}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (33)$$

donde  $c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0)$ . La ecuación (33) junto con la relación (19) proponen un problema de cálculo fraccional establecido recientemente y cuya solución constituye un campo activo de investigación en matemáticas, física, métodos numéricos, entre otros. Por medio de la ecuación (6), al tomar la transformada de Laplace de (33) para el caso en que  $\vec{E}(\vec{r}, t) = 0$  cuando  $t \geq 0$ , se obtiene [9,11]:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, s) - s^2 \left( \frac{n(s)}{c} \right)^2 \vec{E}(\vec{r}, s) = 0, \quad (34)$$

donde:

$$n(s) = \sqrt{\epsilon_{\infty} + \tilde{\chi}(s)}. \quad (35)$$

La ecuación (34) permite hallar la transformada de Laplace del campo eléctrico en diferentes geometrías y condiciones iniciales. En la siguiente parte se analiza la propagación de ondas en una geometría plana para diferentes tipos de respuesta fraccional.

#### 4. Pulsos y paquetes de onda en medios fraccionales

Se considera un problema modelo en el que las ondas electromagnéticas se propagan en la dirección del eje  $x$  en el medio fraccional con una fuente ubicada en la posición  $x = 0$ . De esta manera  $\vec{E}(\vec{r}, s) = E(x, s)\hat{y}$ , donde  $\hat{y}$  denota un vector unitario en la dirección  $y$  y la ecuación de (34) toma la forma [9]:

$$\frac{\partial^2 E(x, s)}{\partial x^2} - s^2 \left( \frac{n(s)}{c} \right)^2 E(x, s) = 0, \quad x > 0. \quad (36)$$

La condición de frontera  $E(0, t) = F(t)$  que establece:

$$E(0, s) = \tilde{F}(s). \quad (37)$$

En términos de la función de respuesta  $\tilde{\xi}(s)$ , por medio de (8),  $n(s)$  está determinada por:

$$n(s) = \sqrt{\epsilon_{\infty} + (\epsilon_{es} - \epsilon_{\infty})\tilde{\xi}(s)}. \quad (38)$$

Teniendo en cuenta ondas electromagnéticas que se propagan en  $x > 0$  y la condición inicial en  $x = 0$ , la solución de (36) es:

$$E(x, s) = \tilde{F}(s)e^{-\frac{n(s)}{c}sx}, \quad (39)$$

donde, finalmente el campo eléctrico  $E(x, t)$  se recupera al obtener la transformada inversa de Laplace, de esta manera:

$$E(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{F}(s)e^{-\frac{n(s)}{c}sx}]. \quad (40)$$

Hasta la fecha no se conocen soluciones analíticas de (40) para medios con respuesta fraccional dado que la función  $n(s)$  no permite aplicar los métodos convencionales para calcular la transformada inversa de Laplace. En algunos

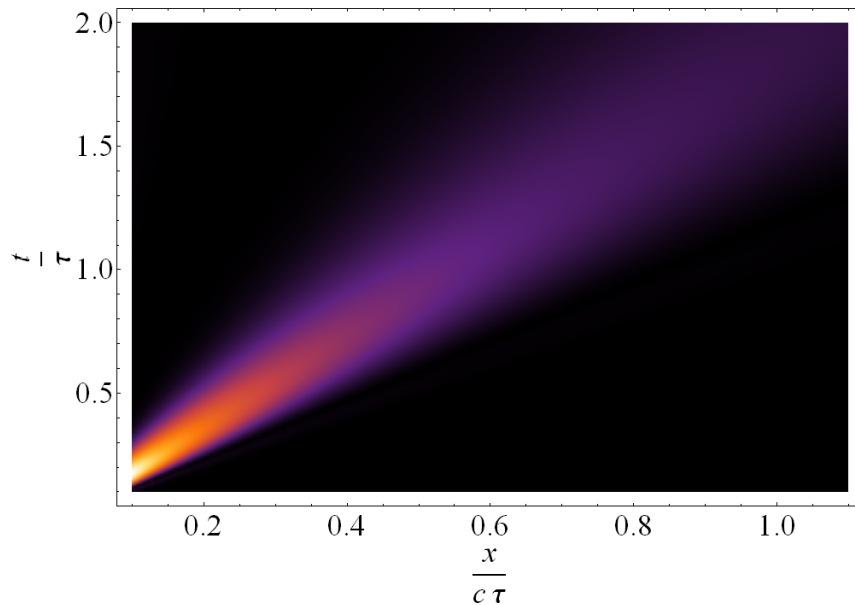


Figura 2.  $|E(x, t)|$  en un material con respuesta de Havriliak-Negami con  $\alpha = \beta = 0.5$  y con  $\kappa = 1.5$ . La condición inicial es un pulso  $E(0, t) = \delta(t)$ .



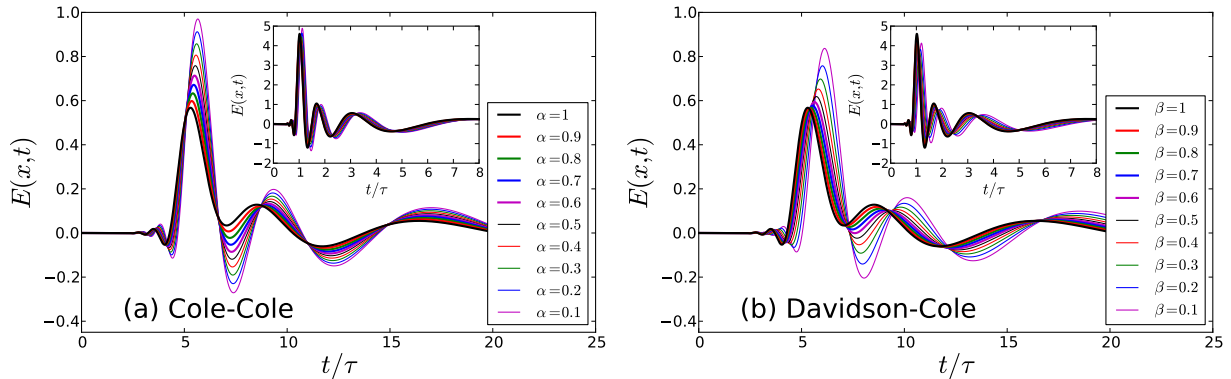


Figura 3. Campo eléctrico  $E(x, t)$  como función del tiempo para  $x = 5c\tau$ , se analizan materiales con las respuestas presentadas en la Figura 1 con la condición inicial  $E(0, t) = \delta(t)$ . (a) Respuesta de Cole-Cole. (b) Respuesta de Davidson-Cole. En estas figuras los cuadros internos muestran el campo eléctrico cuando  $x = c\tau$ .

casos asintóticos se han desarrollado algunos resultados, pero la solución de (40) es un problema abierto. En lo que sigue se utilizan métodos numéricos para la inversión numérica, con el fin de analizar  $E(x, t)$  en diferentes medios. El método empleado se describe en detalle en el apéndice 7.

En la Figura 2 se estudia el caso de una perturbación en  $x = 0$  dada por  $F(t) = \delta(t)$ , por lo tanto  $\tilde{F}(s) = H(s)$  donde  $H(s)$  denota a la función de Heaviside. Se obtiene  $|E(x, t)|$  para un material con respuesta de Havriliak-Negami con  $\alpha = \beta = 0.5$ . En esta figura se hace evidente el efecto dispersivo que tiene el material. Además, con el fin de establecer las variaciones en el campo eléctrico para las diferentes respuestas analizadas en la Figura 1, en la Figura 3 se presenta  $E(x, t)$  en las posiciones  $x_1 = c\tau$  y  $x_2 = 5c\tau$ . En  $x_2$  la perturbación electromagnética ha penetrado lo suficiente en el material de tal manera que los campos en los medios fraccionales difieren significativamente con respecto a la respuesta de Debye. En  $x_1$  los cambios son menores. Por otra parte, si se tratara del vacío,  $E(x, t) = \delta(x - ct)$ , el retraso temporal en el medio material se observa en los diferentes tiempos en los que se da el máximo de  $E(x, t)$ .

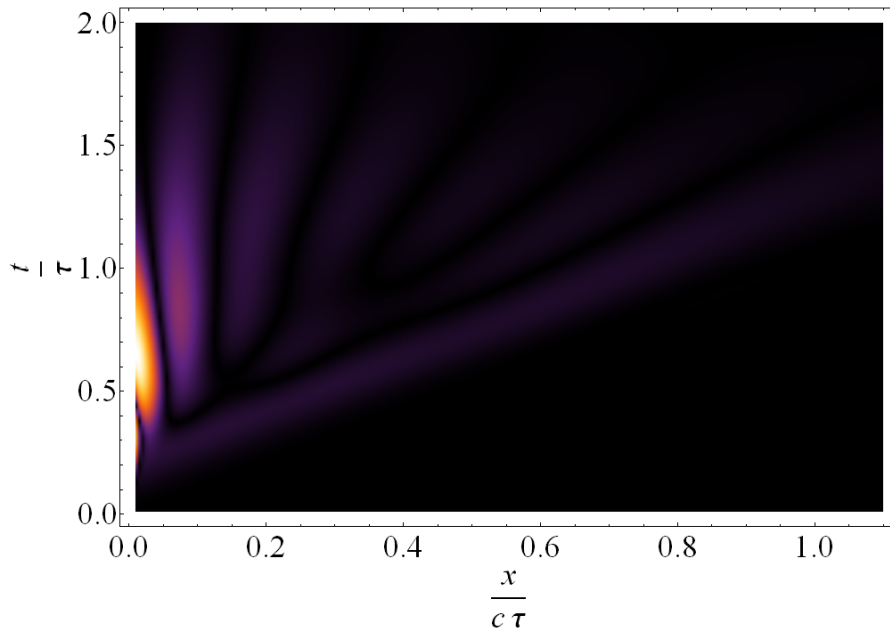


Figura 4.  $|E(x, t)|$  en un material con respuesta de Havriliak-Negami con  $\alpha = \beta = 0.5$  y con  $\frac{\epsilon_{e,s}}{\epsilon_{\infty}} = 1.5$ . La condición inicial es un paquete de ondas  $E(0, t) = 2 \operatorname{sech}(a(x - x_0 - \omega t)) \sin(a(x - \omega t))|_{x=0}$ , con  $a = 8$ ,  $\omega = 2$ ,  $x_0 = -0.5$ .

Adicionalmente, la forma de  $n(s)$  en (38) representa un índice de refracción que depende de las diferentes frecuencias del espectro de la perturbación en  $x = 0$ . En la Figura 4 se presenta  $|E(x, t)|$  para una condición que se asemeja a un solitón [16]. Dado que el medio es únicamente dispersivo, este paquete de ondas no mantiene su forma inicial durante la evolución temporal.

## 5. Ondas cilíndricas y esféricas en medios fraccionales

Ahora se plantea un problema en el que las ondas electromagnéticas son generadas en una línea recta orientada a lo largo del eje  $z$ , inmerso en un medio fraccional y se analiza la componente  $z$  del campo. La ecuación de onda (34) en coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$  para la componente  $z$  del campo es dada por:

$$\nabla^2 E_z(\rho, \phi, z, s) - \beta^2 E_z(\rho, \phi, z, s) = 0, \quad (41)$$

siendo  $\beta^2 = s^2 \left(\frac{n(s)}{c}\right)^2$  y  $c$  la velocidad de la luz. Suponiendo que la componente  $E_z(\rho, \phi, z, s)$  no depende de las coordenadas  $\phi$  y  $z$ , entonces,  $E_z(\rho, s)$  cumple:

$$\rho^2 \frac{d^2 E_z(\rho, s)}{d\rho^2} + \rho \frac{dE_z(\rho, s)}{d\rho} - \beta^2 E_z(\rho, s) = 0. \quad (42)$$

Las soluciones de la ecuación (42) son las funciones asociadas de Bessel y una solución particular para ondas viajeras que son nulas cuando  $\rho \rightarrow \infty$  es:

$$E_z(\rho, s) = F(s)K_0(\beta\rho), \quad (43)$$

donde  $K_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(s+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$ , por lo tanto:

$$E(\rho, t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)K_0(\beta\rho)]. \quad (44)$$

Con la ecuación (44) se obtiene el campo eléctrico a una distancia  $\rho$  del eje del cilindro y su variación en el tiempo. Si el material en el que se genera el pulso es uno cuya respuesta es la de Havriliak-Negami entonces el espectro de la onda, a determinado radio  $\rho$  del cilindro, es como se observa en la Figura 5. En la Figura 3 el máximo del pulso de la onda es cercano a la unidad, mientras que en la Figura 5 es de alrededor de 0.5 unidades de campo eléctrico, lo cual quiere decir que bajo las nuevas condiciones, la onda se atenúa más rápidamente.

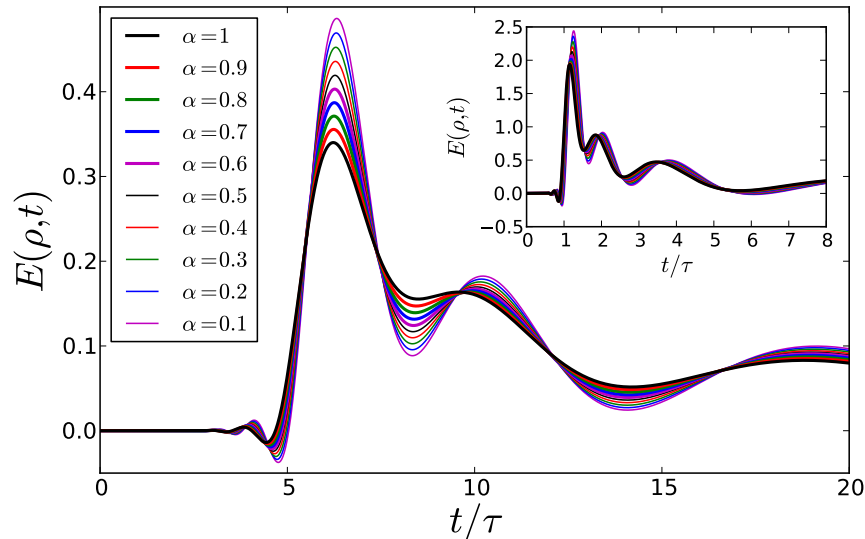


Figura 5.  $E(\rho, t)$  en coordenadas cilíndricas en un medio con respuesta de Havriliak-Negami con  $\beta = 0.5$  y  $\kappa = 1.5$ . Se presenta un pulso de una onda cilíndrica para  $\rho = 5c\tau$ . En el recuadro se grafica el pulso cuando  $\rho = c\tau$ .

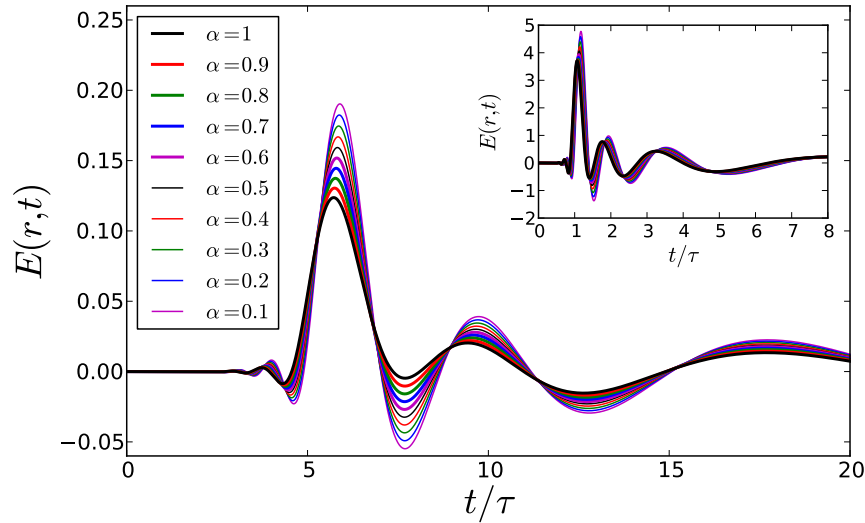


Figura 6.  $E(r, t)$  en coordenadas esféricas en un material con respuesta de Cole-Cole con  $\beta = 0.5$  y con  $\kappa = 1.5$ . La condición inicial es un pulso  $E(0, t) = \delta(t)$ . Se presenta un pulso de una onda esférica para  $r = 5c\tau$ . En el recuadro se grafica el pulso cuando  $r = c\tau$ .

Por otra parte, cuando se trata de resolver la ecuación (34) en coordenadas esféricas, resultan ecuaciones acopladas de difícil solución, no obstante, en condiciones especiales se puede obtener, para la componente radial del campo  $E_\rho(r, \theta, \phi)$ , y asumiendo que no depende de las coordenadas  $\theta$  y  $\phi$ , la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dr} \left\{ r^2 \frac{dE_r(r, s)}{dr} \right\} - \beta^2 r^2 E_r(r, s) = 0, \quad (45)$$

ecuación que se puede escribir también de la forma:

$$\frac{d^2}{dr^2} (r E_r(r, s)) - \beta^2 (r E_r(r, s)) = 0, \quad (46)$$

cuya solución es dada por:

$$E_r(r, s) = \frac{F(s)}{r} e^{-\beta r}, \quad (47)$$

y resulta:

$$E(r, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{F(s)}{r} e^{-\beta r} \right]. \quad (48)$$

La ecuación (48) es un resultado que se puede ver como la expresión para las ondas generadas por una carga puntual cuando se activa un pulso del tipo delta de Dirac en un medio homogéneo y sin fuentes cuya respuesta es la de Havriliak-Negami. El espectro de la onda, a determinado radio  $r$  de la esfera, es graficado en la Figura 6. En dicha Figura la atenuación del campo eléctrico es más pronunciada, a medida que el pulso avanza, de lo que se aprecia en la Figura 4, lo que significa que la geometría desde la que se observa el fenómeno influye en cuanto a su atenuación, sin embargo, no parecen haber cambios significativos en la forma del espectro del pulso. De esta manera, los resultados presentados en esta sección muestran la variedad de fenómenos asociados a la ecuación (33). Trabajos futuros pretenden analizar lo que sucede en interfaces que pueden ser vacío-material fraccional, dos materiales fraccionales, o material no lineal y medio fraccional.

De esta manera, en este trabajo se definen las características físicas que determinan los medios fraccionales, para luego deducir la ecuación de onda de un pulso electromagnético que se propaga en un medio de dichas características. En este sentido se analiza los mecanismos de polarización relevantes que se presentan en los medios fraccionales y así encontrar el desplazamiento eléctrico que es necesario para deducir la ecuación de onda a partir de las ecuaciones de Maxwell. La ecuación de onda se resuelve con el uso de la transformada de Laplace, sin embargo, para obtener la transformada de Laplace inversa fue necesario el uso de métodos numéricos. Finalmente se analiza el problema planteado en diferentes geometrías para establecer las consecuencias que ello conlleva.

## 6. Conclusiones

Se resuelve la transformada de Laplace de la ecuación de onda unidimensional de un pulso eléctrico que se propaga en un material, en coordenada cartesianas, cilíndricas y esféricas. La solución está relacionada con la respuesta del material. Dado que no fue posible obtener una expresión analítica para la transformada inversa de Laplace de la solución se realizó la inversión numérica utilizando diferentes modelos de respuesta y se compararon con el resultado obtenido con el modelo de Havriliak-Negami el cual es uno de los modelos más generales asociado al carácter fraccional del problema. El campo eléctrico se propaga de distintas formas en relación con los parámetros que definen el modelo de Havriliak-Negami, es decir, que los campos en los medios fraccionales difieren significativamente con respecto a la respuesta de Debye, que es el modelo más simple.

## 7. Agradecimientos

Se agradece al Sistema de Investigaciones de la Universidad de Nariño por la financiación del proyecto de investigación MÉTODOS VARIACIONALES Y DE CÁLCULO FRACCIONAL EN TEORÍA DE SOLITONES, en el marco del cual se elaboró éste artículo.

### Apéndice: Método de Zakian

El método de Zakian para obtener la transformada de Laplace inversa  $f(t)$  de la función  $F(s)$  utiliza la siguiente serie infinita de evaluaciones ponderadas del dominio de la función [13]:

$$f(t) = \frac{2}{t} \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} \left\{ K_i F \left( \frac{\alpha_i}{t} \right) \right\}, \quad (49)$$

donde las constantes  $K_i$  y  $\alpha_i$  para  $n = 5$  están dadas en la Tabla 1. Este método es rápido y fácil de implementar y hay un parámetro arbitrario,  $n$ , para ser determinado. El valor de  $n$  puede ser optimizado para obtener soluciones precisas. El método de Zakian es satisfactorio para funciones que tienen un término exponencial positivo,  $e^t$ .

<b>i</b>	$\alpha$	$K$
1	12.83767675 + $j$ 1.666063445	-36902.08210 + $j$ 196990.4257
2	12.22613209 + $j$ 5.012718792	+61277.02524 - $j$ 95408.62551
3	10.93430308 + $j$ 8.409673116	-61277.02524 + $j$ 95408.62551
4	8.776434715 + $j$ 11.92185389	+4655.361138 - $j$ 1.901528642
5	5.225453361 + $j$ 15.72952905	-118.7414011 - $j$ 141.3036911

Tabla 1

En esta Tabla aparecen los primeros cinco valores necesarios al usar el método de Zakian para la transformada inversa de Laplace. La constante  $j$  es el número imaginario de los números complejos  $j = \sqrt{-1}$

En la Figura 7 se compara el método de inversión numérico de Zakian de las funciones  $f(t) = e^{-t}$  y  $f(t) = J_0(t)$  con las funciones analíticas respectivas.

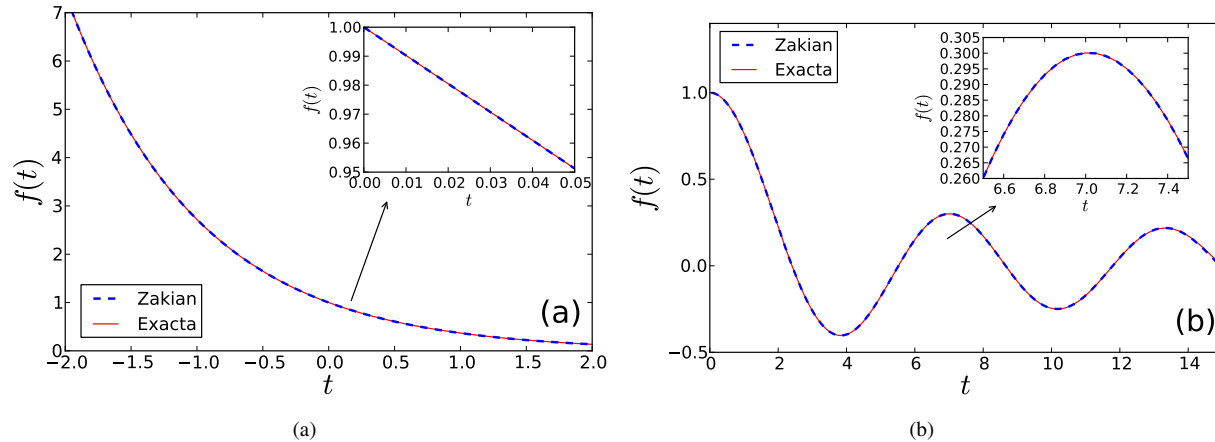


Figura 7. Método de Zakian de inversión numérica. En (a) aparece la función  $f(t) = e^{-t}$  cuya transformada de Laplace es  $\frac{1}{s+1}$ . En (b) se analiza la función  $f(t) = J_0(t)$  con transformada de Laplace dada por  $\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ .

## Referencias

- [1] Constantine A Balanis. *Advanced engineering electromagnetics*, volume 205. Wiley New York, Arisona, USA, 4th edition, 1989.
- [2] Justyna Trzmiel, Agnieszka Jurlewicz, and Marek Teuerle. Comparison of the two-power-law generalized Mittag-Leffler and Havriliak-Negami dielectric relaxation responses. In *Solid Dielectrics (ICSD), 2010 10th IEEE International Conference on*, pages 1–4, Potsdam, Germany, 2010. IEEE.
- [3] E Capelas de Oliveira, Francesco Mainardi, and Jayme Vaz Jr. Models based on Mittag-Leffler functions for anomalous relaxation in dielectrics. *The European Physical Journal Special Topics*, 193(1):161–171, June–November 2011.
- [4] F Alvarez, A Alegria, and J Colmenero. Relationship between the time-domain kohlrausch-williams-watts and frequency-domain Havriliak-Negami relaxation functions. *Physical Review B*, 44(14):7306, April–October 1991.
- [5] Paulius Miskinis. The Havriliak-Negami susceptibility as a nonlinear and nonlocal process. *Physica Scripta*, 2009(T136):014019, January–October 2009.
- [6] CZ Zhao, M Werner, S Taylor, PR Chalker, AC Jones, Chun Zhao, et al. Dielectric relaxation of la-doped zirconia caused by annealing ambient. *Nanoscale Research Letters*, 6(1):1–6, 2010.
- [7] S Gabriel, RW Lau, and Camelia Gabriel. The dielectric properties of biological tissues: III. parametric models for the dielectric spectrum of tissues. *Physics in medicine and biology*, 41(11):2271, April 1996.
- [8] J.Z. Bao, S.T. Lu, W.D. Hurt, M.E. Belt, D.D. Cox, and P.J. Henry. Dielectric measurements of brain tissues in the frequency range between 45 mhz and 26.5 ghz. In *The Eighteenth Annual Meeting of the Bioelectromagnetics Society*. The Eighteenth Annual Meeting of the Bioelectromagnetics Society, 1996.
- [9] Matthew Frank Causley. *Asymptotic and numerical analysis of time-dependent wave propagation in dispersive dielectric media that exhibit fractional relaxation*. PhD thesis, The State University of New Jersey, 2011.
- [10] Vasily E Tarasov. Universal electromagnetic waves in dielectric. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 20(17):175223, 2008.
- [11] Patrick O Kano and Moysey Brio. Application of Post’s formula to optical pulse propagation in dispersive media. *Computers & mathematics with applications*, 59(2):629–650, 2010.
- [12] RT Sibatov, VV Uchaikin, and DV Uchaikin. Fractional wave equation for dielectric medium with Havriliak-Negami response. In *Fractional Dynamics and Control*, pages 293–301. Springer, 2012.
- [13] Hassan Hassanzadeh and Mehran Pooladi-Darvish. Comparison of different numerical laplace inversion methods for engineering applications. *Applied mathematics and computation*, 189(2):1966–1981, 2007.
- [14] R Masot. *Desarrollo de un sistema de medida basado en espectroscopía de impedancia para la determinación de parámetros fisicoquímicos en alimentos*. PhD thesis, Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Valencia, Spain, 2010.
- [15] Friedrich W Hehl et al. *Foundations of classical electrodynamics: Charge, flux, and metric*, volume 33. Springer, 2003.
- [16] Robert W Boyd. *Nonlinear optics*. Academic press, New York, NY, USA, 2003.
- [17] B.J. Ryszard. Dielectrics experimental techniques. In *Presentación*. Ryszard, B.J., 2011.
- [18] H Schiessel, R Metzler, A Blumen, and T Nonnenmacher. Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 28(23):6567–6584, July 1995.

- [19] Masataka Fukunaga and Nobuyuki Shimizu. Initial condition problems of fractional viscoelastic equations. *ASME DETC 2003*, pages 2–6, 2003.
- [20] Igor Podlubny. *Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions*, volume 198. Academic press, New York, NY, USA, 1998.
- [21] Kenneth S Miller and Bertram Ross. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. *John Wiley & Sons*, 1993.
- [22] George B Arfken, Hans J Weber, and Frank E Harris. *Mathematical methods for physicists*. Academic press, 5th edition, 2001.
- [23] Ya E Ryabov and A Puzenko. Damped oscillations in view of the fractional oscillator equation. *Physical Review B*, 66(18):184201, May-November 2002.