

Informe de Investigación
**APLICACIÓN DE FUNCIONES DE GREEN
A PROBLEMAS CON VALORES DE
FRONTERA ASOCIADOS CON
ECUACIONES DIFERENCIALES
ORDINARIAS LINEALES CON
COEFICIENTES VARIABLES NO
HOMOGÉNEAS DE SEGUNDO ORDEN**

Alvaro Rugeles Pérez

Diciembre - 2017

Introducción

En este trabajo se centra el estudio en la ecuación de Airy como prototipo de ecuación diferencial ordinaria de segundo orden lineal con coeficientes variables. La ecuación de Airy desempeña un papel importante en la física. Las soluciones fundamentales de la ecuación de Airy homogénea denominadas funciones de Airy se usan en muchos campos de la física (óptica, mecánica de fluidos, física molecular, física de superficies, física cuántica).

El método de la función de Green se aplica a la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales lineales inhomogéneas, en particular, cuando se resuelven sistemas descritos mediante dichas ecuaciones con condiciones de frontera lineales o condiciones iniciales lineales.

Este Informe consta de dos capítulos. En el primero se presenta una revisión bibliográfica sobre la ecuación de Airy y las funciones de Airy. En el segundo se desarrollan las ideas y herramientas fundamentales del método de la función de Green en forma adecuada para la resolución de problemas basados en la ecuación de Airy.

1. Solución de la ecuación de Airy inhomogénea con condiciones en la frontera

1.1. Formulación de problema

Se considera el problema formulado por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} y''(x) - xy(x) &= f(x), \quad a < x < b, \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) &= d_1; \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = d_2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

en las cuales intervienen como parámetros constantes $a, b, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, d_1$ y d_2 . Este problema está basado en la ecuación de Airy inhomogénea y la incógnita $y(x)$ está sujeta a condiciones de frontera en dos puntos. Las condiciones de frontera son separadas, esto es, cada una afecta a un sólo punto de la frontera. Si por lo menos uno de los términos $f(x), d_1$ y d_2 es diferente de cero, el problema es inhomogéneo. La función $f(x)$ representa una fuente externa y $y(x)$ es la respuesta a dicha fuente.

A continuación se explica el método de la función de Green, aplicado a la solución del problema (3.1).

1.2. El método de la función de Green

1.2.1. Obtención de la ecuación diferencial para la función de Green

En el método de la función de Green la variable x en la ecuación de Airy (3.1) se renombra como x'

$$y''(x') - x'y(x') = f(x'), \quad a < x' < b.$$

La ecuación anterior se multiplica por una función de Green $G(x', x)$ por ahora desconocida, la cual depende de dos puntos x' y x . Luego se integra por x' entre a y b

$$\int_a^b G(x', x) [y''(x') - x'y(x')] dx' = \int_a^b G(x', x) f(x') dx'. \quad (1.2)$$

Realizando integración por partes en el lado izquierdo de la ecuación (3.2) se tiene

$$\begin{aligned} & \left[G(x', x) y'(x') - G_{x'}(x', x) y(x') \right] \Big|_{x'=a}^{x'=b} + \\ & \int_a^b y(x') [G_{x'x'}(x', x) - x'G(x', x)] dx' = \\ & \int_a^b G(x', x) f(x') dx'. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Para comenzar a determinar la función de Green $G(x', x)$ asociada a la solución del problema (3.1), se exige que la integral del lado izquierdo de la ecuación

(3.3) sea igual a $y(x)$

$$y(x) = \int_a^b y(x') [G_{x'x'}(x', x) - x'G(x', x)] dx'. \quad (1.4)$$

De otra parte, $y(x)$ se escribe como

$$y(x) = \int_a^b y(x') \delta(x' - x) dx'. \quad (1.5)$$

Comparando (2.4) con (2.5) se debe cumplir la siguiente ecuación

$$G_{x'x'}(x', x) - x'G(x', x) = \delta(x' - x), \quad a < x < b, \quad (1.6)$$

donde $G_{x'}$ y $G_{x'x'}$ representa la primera y segunda derivada de $G(x', x)$ con respecto a x' . Por lo tanto al reemplazar la ecuación (3.4) en (3.3) y despejando $y(x)$ se obtiene

$$y(x) = - \left[G(x', x) y'(x') - G_{x'}(x', x) y(x') \right] \Big|_{x'=a}^{x'=b} + \int_a^b G(x', x) f(x') dx'. \quad (1.7)$$

Esta es la expresión para $y(x)$ en términos de la función de Green.

1.2.2. Condiciones de frontera para para la función de Green

A continuación se analizan los términos de frontera en (3.7)

$$- [G(x', x) y'(x') - G_{x'}(x', x) y(x')] \Big|_{x'=a}^{x'=b} = -G(b, x) y'(b) + G_{x'}(b, x) y(b) + G(a, x) y'(a) - G_{x'}(a, x) y(a). \quad (1.8)$$

Se aplican en la ecuación (3.8) las condiciones de frontera dadas en la formulación del problema (3.1). Pueden darse los siguientes casos que se examinarán separadamente:

1. $\alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq 0,$
2. $\alpha_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0,$
3. $\alpha_2 \neq 0, \beta_1 \neq 0,$
4. $\alpha_2 \neq 0, \beta_2 \neq 0.$

Caso 1: $\alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq 0.$ Se despeja $y(a)$ y $y(b)$ de (3.1)

$$y(a) = \frac{d_1 - \alpha_2 y'(a)}{\alpha_1},$$

$$y(b) = \frac{d_2 - \beta_2 y'(b)}{\beta_1}.$$

Reemplazando las expresiones anteriores en (3.8) se obtiene

$$\begin{aligned}
 & - [G(x', x) y'(x') - G_{x'}(x', x) y(x')] \Big|_{x'=a}^{x'=b} = \\
 & - \left\{ G(b, x) y'(b) - G_{x'}(b, x) \left[\frac{d_2 - \beta_2 y'(b)}{\beta_1} \right] \right\} + \\
 & \left\{ G(a, x) y'(a) - G_{x'}(a, x) \left[\frac{d_1 - \alpha_2 y'(a)}{\alpha_1} \right] \right\} = \\
 & - \left\{ y'(b) \left[\frac{\beta_1 G(b, x) + \beta_2 G_{x'}(b, x)}{\beta_1} \right] - \frac{d_2}{\beta_1} G_{x'}(b, x) \right\} + \\
 & \left\{ y'(a) \left[\frac{\alpha_1 G(a, x) + \alpha_2 G_{x'}(a, x)}{\alpha_1} \right] - \frac{d_1}{\alpha_1} G_{x'}(a, x) \right\}. \quad (1.9)
 \end{aligned}$$

En (3.9) intervienen las cantidades $y'(a)$ y $y'(b)$ cuyos valores no se especifican en las condiciones de frontera (3.1) por lo tanto son desconocidas. Para eliminar éstas cantidades en (3.9) se imponen las siguientes condiciones sobre la función de Green

$$\begin{aligned}
 \beta_1 G(b, x) + \beta_2 G_{x'}(b, x) &= 0, \\
 \alpha_1 G(a, x) + \alpha_2 G_{x'}(a, x) &= 0.
 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Aplicando (3.10) en (3.9) se obtiene

$$- [G(x', x) y_{x'}(x') - G_{x'}(x', x) y(x')] \Big|_{x'=a}^{x'=b} = \frac{d_2}{\beta_1} G_{x'}(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_1} G_{x'}(a, x). \quad (1.11)$$

Reemplazando (3.11) en la ecuación (3.7) se tiene

$$y(x) = \frac{d_2}{\beta_1} G_{x'}(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_1} G_{x'}(a, x) + \int_a^b G(x', x) f(x') dx'. \quad (1.12)$$

Esta es la solución del problema (3.1) para el caso 1 donde $\alpha_1 \neq 0$ y $\beta_1 \neq 0$, en términos de la función de Green $G(x', x)$, la cual se determina resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (3.6) y (3.10).

Caso 2: $\alpha_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0$. Se despeja $y(a)$ y $y'(b)$ de (3.1)

$$\begin{aligned}
 y(a) &= \frac{d_1 - \alpha_2 y'(a)}{\alpha_1}, \\
 y'(b) &= \frac{d_2 - \beta_1 y(b)}{\beta_2}.
 \end{aligned}$$

Reemplazando las expresiones anteriores en (3.8) se obtiene

$$\begin{aligned}
 & - [G(x', x) y'(x') - G_{x'}(x', x) y(x')] \Big|_{x'=a}^{x'=b} = \\
 & - \left\{ G(b, x) \left[\frac{d_2 - \beta_1 y(b)}{\beta_2} \right] - G_{x'}(b, x) y(b) \right\} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ G(a, x) y'(a) - G_{x'}(a, x) \left[\frac{d_1 - \alpha_2 y'(a)}{\alpha_1} \right] \right\} = \\ & - \left\{ -y(b) \left[\frac{\beta_1 G(b, x) + \beta_2 G_{x'}(b, x)}{\beta_2} \right] + \frac{d_2}{\beta_2} G_{x'}(b, x) \right\} + \\ & \left\{ y'(a) \left[\frac{\alpha_1 G(a, x) + \alpha_2 G_{x'}(a, x)}{\alpha_1} \right] - \frac{d_1}{\alpha_1} G_{x'}(a, x) \right\}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

En (3.13) intervienen las cantidades $y(b)$ y $y'(a)$ cuyos valores no se especifican en las condiciones de frontera (3.1) por lo tanto son desconocidas. Para eliminar éstas cantidades en (3.13) se imponen las siguientes condiciones sobre la función de Green

$$\begin{aligned} \beta_1 G(b, x) + \beta_2 G_{x'}(b, x) &= 0, \\ \alpha_1 G(a, x) + \alpha_2 G_{x'}(a, x) &= 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Aplicando (3.14) en (3.9) se obtiene

$$- [G(x', x) y'(x') - G_{x'}(x', x) y(x')] \Big|_{x'=a}^{x'=b} = -\frac{d_2}{\beta_2} G(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_1} G_{x'}(a, x). \quad (1.15)$$

Reemplazando (3.15) en la ecuación (3.7), $y(x)$ se expresa como

$$y(x) = -\frac{d_2}{\beta_2} G(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_1} G_{x'}(a, x) + \int_a^b G(x', x) f(x') dx'. \quad (1.16)$$

Esta es la solución del problema (3.1) para el caso 2 donde $\alpha_1 \neq 0$ y $\beta_2 \neq 0$, en términos de la función de Green $G(x', x)$, la cual se determina resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (3.6) y (3.14).

Caso 3: $\alpha_2 \neq 0, \beta_1 \neq 0$. Se despeja $y'(a)$ y $y(b)$ de (3.1)

$$\begin{aligned} y'(a) &= \frac{d_1 - \alpha_1 y(a)}{\alpha_2}, \\ y(b) &= \frac{d_2 - \beta_2 y'(b)}{\beta_1}. \end{aligned}$$

Reemplazando las expresiones anteriores en (3.8) se obtiene

$$\begin{aligned} & - [G(x', x) y'(x') - G_{x'}(x', x) y(x')] \Big|_{x'=a}^{x'=b} = \\ & - \left\{ G(b, x) y'(b) - G_{x'}(b, x) \left[\frac{d_2 - \beta_2 y'(b)}{\beta_2} \right] \right\} + \\ & \left\{ G(a, x) \left[\frac{d_1 - \alpha_1 y(a)}{\alpha_2} \right] - G_{x'}(a, x) y(a) \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ y'(b) \left[\frac{\beta_1 G(b, x) + \beta_2 G_{x'}(b, x)}{\beta_1} \right] - \frac{d_2}{\beta_1} G_{x'}(b, x) \right\} + \\
& \left\{ -y(a) \left[\frac{G_{x'}(a, x) + \alpha_1 G(a, x)}{\alpha_2} \right] + \frac{d_1}{\alpha_2} G(a, x) \right\} \quad (1.17)
\end{aligned}$$

En (3.17) intervienen las cantidades $y'(b)$ y $y(a)$ cuyos valores no se especifican en las condiciones de frontera (3.1) por lo tanto son desconocidas. Para eliminar éstas cantidades en (3.17) se imponen las siguientes condiciones sobre la función de Green

$$\begin{aligned}
\beta_1 G(b, x) + \beta_2 G_{x'}(b, x) &= 0, \\
\alpha_1 G(a, x) + \alpha_2 G_{x'}(a, x) &= 0.
\end{aligned} \quad (1.18)$$

Aplicando (3.18) en (3.9) se obtiene

$$- [G(x', x) y'(x') - G_{x'}(x', x) y(x')] \Big|_{x'=a}^{x'=b} = - \frac{d_2}{\beta_1} G_{x'}(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_2} G(a, x). \quad (1.19)$$

Reemplazando (3.19) en la ecuación (3.7), $y(x)$ se expresa como

$$y(x) = - \frac{d_2}{\beta_1} G_{x'}(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_2} G(a, x) + \int_a^b G(x', x) f(x') dx'. \quad (1.20)$$

Esta es la solución del problema (3.1) para el caso 3 donde $\alpha_2 \neq 0$ y $\beta_1 \neq 0$, en términos de la función de Green $G(x', x)$, la cual se determina resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (3.6) y (3.18).

Caso 4: $\alpha_2 \neq 0, \beta_2 \neq 0$. Se despeja $y'(a)$ y $y'(b)$ de (3.1)

$$\begin{aligned}
y'(a) &= \frac{d_1 - \alpha_1 y(a)}{\alpha_2}, \\
y'(b) &= \frac{d_2 - \beta_1 y(b)}{\beta_2}.
\end{aligned}$$

Reemplazando las expresiones anteriores en (3.8) se obtiene

$$\begin{aligned}
& - [G(x', x) y'(x') - G_{x'}(x', x) y(x')] \Big|_{x'=a}^{x'=b} = \\
& - \left\{ G(b, x) \left[\frac{d_2 - \beta_1 y(b)}{\beta_2} \right] - G_{x'}(b, x) y(b) \right\} + \\
& \left\{ G(a, x) \left[\frac{d_1 - \alpha_1 y(a)}{\alpha_2} \right] - G_{x'}(a, x) y(a) \right\} = \\
& - \left\{ -y(b) \left[G_{x'}(b, x) + \frac{\beta_1}{\beta_2} G(b, x) \right] + \frac{d_2}{\beta_2} G(b, x) \right\} + \\
& \left\{ -y(a) \left[G_{x'}(a, x) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} G(a, x) \right] + \frac{d_1}{\alpha_2} G(a, x) \right\} \quad (1.21)
\end{aligned}$$

En (3.21) intervienen las cantidades $y(b)$ y $y(a)$ cuyos valores no se especifican en las condiciones de frontera (3.1) por lo tanto son desconocidas. Para eliminar éstas cantidades en (3.21) se imponen las siguientes condiciones sobre la función de Green

$$\beta_1 G(b, x) + \beta_2 G_{x'}(b, x) = 0, \quad (1.22)$$

$$\alpha_1 G(a, x) + \alpha_2 G_{x'}(a, x) = 0.$$

Aplicando (3.22) en (3.9) se obtiene

$$- [G(x', x) y'(x') - G_{x'}(x', x) y(x')] \Big|_{x'=a}^{x'=b} = -\frac{d_2}{\beta_2} G(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_2} G(a, x). \quad (1.23)$$

Reemplazando (3.23) en (3.7), $y(x)$ se simplifica así

$$y(x) = -\frac{d_2}{\beta_2} G(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_2} G(a, x) + \int_a^b G(x', x) f(x') dx'. \quad (1.24)$$

Esta es la solución del problema (3.1) para el caso 4 donde $\alpha_2 \neq 0$ y $\beta_2 \neq 0$, en términos de la función de Green $G(x', x)$, la cual se determina resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (3.6) y (3.22).

Examinando los resultados anteriores se concluye que tanto la ecuación diferencial (3.6) como las condiciones de frontera (3.10), (3.14), (3.18) y (3.22) para la función de Green son comunes para los 4 casos examinados. Por lo tanto la función de Green es la misma para todos los casos y se rige por las ecuaciones

$$G_{x'x'}(x', x) - x'G(x', x) = \delta(x' - x), \quad a < x' < b,$$

$$\beta_1 G(b, x) + \beta_2 G_{x'}(b, x) = 0, \quad (1.25)$$

$$\alpha_1 G(a, x) + \alpha_2 G_{x'}(a, x) = 0.$$

Analizando las expresiones (3.12), (3.16), (3.20) y (3.24) para $y(x)$ se observa que se diferencian en los términos de frontera.

1.2.3. Determinación de la función de Green

A continuación se resuelve el problema (3.25) con respecto a la función de Green. Teniendo en cuenta que en la ecuación diferencial que aparece en (3.25) interviene la función delta de Dirac $\delta(x' - x)$ la cual presenta una singularidad en el punto $x' = x$ ($\delta(0) = \infty$). Es conveniente dividir el intervalo $a < x' < b$ en dos subintervalos: $a < x' < x$ y $x < x' < b$, excepto en el punto $x' = x$. En cada subintervalo se tiene $\delta(x' - x)|_{x' \neq x} = 0$, entonces la ecuación diferencial en (3.25) se reduce a

$$G_{x'x'}(x', x) - x'G(x', x) = 0, \quad \text{para } x' \neq x. \quad (1.26)$$

La solución general de la ecuación diferencial de Airy homogénea dada en (3.26) es

$$G(x', x) = \begin{cases} C_1 A_i(x') + C_2 B_i(x'), & a < x' < x \\ C_3 A_i(x') + C_4 B_i(x'), & x < x' < b, \end{cases} \quad (1.27)$$

donde $A_i(x')$ y $B_i(x')$ son las funciones de Airy, que son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea (3.26) y C_1, C_2, C_3 y C_4 son cantidades constantes con respecto a la variable x' . Para determinar éstas cantidades se utilizan las condiciones de frontera del problema (3.25), con este fin se escriben las siguientes expresiones

$$G(a, x) = C_1 A_i(a) + C_2 B_i(a), \quad G(b, x) = C_3 A_i(b) + C_4 B_i(b),$$

$$G_{x'}(a, x) = C_1 A_i'(a) + C_2 B_i'(a), \quad G_{x'}(b, x) = C_3 A_i'(b) + C_4 B_i'(b).$$

Con base en las expresiones anteriores las condiciones de frontera en (3.25) se reescriben como

$$[\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] C_1 + [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] C_2 = 0, \quad (1.28)$$

$$[\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] C_3 + [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] C_4 = 0. \quad (1.29)$$

Las ecuaciones (3.28) y (3.29) son insuficientes para determinar las cantidades C_1, C_2, C_3 y C_4 . Se necesitan de otras dos ecuaciones que se obtienen examinando el comportamiento de la función de Green $G(x', x)$ en el punto $x' = x$ y así poder completar la definición de la función de Green en todo el intervalo $a < x' < b$. Con este fin se integran los dos lados de la ecuación diferencial en (3.25) sobre un intervalo infinitesimal alrededor del punto $x' = x$, es decir, en el intervalo $x^- < x' < x^+$

$$\int_{x^-}^{x^+} G_{x'x'}(x', x) dx' - \int_{x^-}^{x^+} x' G(x', x) dx' = \int_{x^-}^{x^+} \delta(x' - x) dx'. \quad (1.30)$$

En (3.30) intervienen las siguientes integrales:

1. $\int_{x^-}^{x^+} G_{x'x'}(x', x) dx'$.
2. $\int_{x^-}^{x^+} x' G(x', x) dx'$.
3. $\int_{x^-}^{x^+} \delta(x' - x) dx'$.

El resultado de la primera integral es

$$\begin{aligned} \int_{x^-}^{x^+} G_{x'x'}(x', x) dx' &= G_{x'}(x', x) \Big|_{x'=x^-}^{x'=x^+} \\ &= G_{x'}(x^+, x) - G_{x'}(x^-, x). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Para calcular la segunda integral se adiciona una nueva condición a la función de Green $G(x', x)$ que sea continua en el punto $x' = x$, es decir

$$G_{x'}(x^+, x) = G_{x'}(x^-, x), \quad (1.32)$$

con esta condición, la segunda integral es igual a cero ya que el integrando $x'G(x', x)$ es continuo y se integra en un intervalo infinitesimal donde el área bajo la curva es cero

$$\int_{x^-}^{x^+} x'G(x', x) dx' = 0. \quad (1.33)$$

Finalmente, la tercera integral debido a las propiedades que posee la función delta de Dirac $\delta(x' - x)$, ésta es igual a 1

$$\int_{x^-}^{x^+} \delta(x' - x) dx' = 1. \quad (1.34)$$

Reemplazando los resultados (3.31), (3.33) y (3.34) en (3.30) se tiene

$$G_{x'}(x^+, x) - G_{x'}(x^-, x) = 1. \quad (1.35)$$

La ecuación (3.35) representa una condición que debe satisfacer la función de Green $G(x', x)$. Teniendo en cuenta (3.27) la ecuación (3.35) se reescribe

$$A'_i(x)C_1 + B'_i(x)C_2 - A'_i(x)C_3 - B'_i(x)C_4 = -1. \quad (1.36)$$

Finalmente la condición de continuidad de la función de Green $G(x', x)$ en $x' = x$ dada por (3.32), con base a (2.17) adquiere la forma

$$A_i(x)C_1 + B_i(x)C_2 - A_i(x)C_3 - B_i(x)C_4 = 0. \quad (1.37)$$

Con los resultados obtenidos en (3.28), (3.29), (3.36) y (3.37) se completa el sistema de cuatro ecuaciones necesarias para encontrar las cantidades C_1 , C_2 , C_3 y C_4 , presentes en la función de Green $G(x', x)$ dada en (3.27). Por lo tanto el sistema a resolver es el siguiente

$$\begin{aligned} [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A'_i(a)] C_1 + [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B'_i(a)] C_2 &= 0, \\ [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A'_i(b)] C_3 + [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B'_i(b)] C_4 &= 0, \\ A'_i(x) C_1 + B'_i(x) C_2 - A'_i(x) C_3 - B'_i(x) C_4 &= -1, \\ A_i(x) C_1 + B_i(x) C_2 - A_i(x) C_3 - B_i(x) C_4 &= 0. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Se aplica la regla de Cramer del álgebra lineal a la solución del sistema (3.38). Si $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es un sistema de ecuaciones, \mathbf{A} es la matriz de coeficientes del sistema, $\mathbf{x} = (C_1, C_2, C_3, C_4)$ es el vector columna de las incógnitas, y \mathbf{b} es el vector columna de los términos independientes, entonces la solución al sistema se presenta así

$$C_j = \frac{\det(\mathbf{A}_j)}{\det(\mathbf{A})}, \quad j = 1, 2, 3 \text{ y } 4 \quad (1.39)$$

donde \mathbf{A}_j es la matriz resultante de reemplazar la j -ésima columna de \mathbf{A} por el vector columna \mathbf{b} . Además el determinante de la matriz \mathbf{A} debe ser diferente de

cero.

Se comienza escribiendo el sistema (3.38) en forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.40)$$

donde

$$\begin{aligned} a_{11} &= \alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a), & a_{21} &= 0, \\ a_{12} &= \alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a), & a_{22} &= 0, \\ a_{13} &= 0, & a_{23} &= \beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b), \\ a_{14} &= 0, & a_{24} &= \beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b), \\ \\ a_{31} &= A_i'(x), & a_{41} &= A_i(x), \\ a_{32} &= B_i'(x), & a_{42} &= B_i(x), \\ a_{33} &= -A_i'(x), & a_{43} &= -A_i(x), \\ a_{34} &= -B_i'(x), & a_{44} &= -B_i(x). \end{aligned}$$

Con base a la ecuación (3.39) las cantidades C_1 , C_2 , C_3 y C_4 son

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\det(\mathbf{A}_1)}{\det(\mathbf{A})} \\ &= [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] \left\{ -B_i(x) [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] + \right. \\ &A_i(x) [\beta_1 B_i(b) + \alpha_2 B_i'(b)] \left. \right\} / [A_i'(x) B_i(x) - A_i(x) B_i'(x)] \times \\ &\left\{ \beta_1 A_i(b) [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] + \beta_2 A_i'(b) [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] \right. \\ &\left. - [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] \right\}, \quad (1.41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{\det(\mathbf{A}_2)}{\det(\mathbf{A})} \\ &= [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] \left\{ B_i(x) [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] - \right. \\ &A_i(x) [\beta_1 B_i(b) + \alpha_2 B_i'(b)] \left. \right\} / [A_i'(x) B_i(x) - A_i(x) B_i'(x)] \times \\ &\left\{ \beta_1 A_i(b) [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] + \beta_2 A_i'(b) [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] \right. \\ &\left. - [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] \right\}, \quad (1.42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3 &= \frac{\det(\mathbf{A}_3)}{\det(\mathbf{A})} \\
&= \left[\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b) \right] \left\{ -B_i(x) \left[\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a) \right] + \right. \\
&\quad \left. A_i(x) \left[\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a) \right] \right\} / \left[A_i'(x) B_i(x) - A_i(x) B_i'(x) \right] \times \\
&\quad \left\{ \beta_1 A_i(b) \left[\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a) \right] + \beta_2 A_i'(b) \left[\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a) \right] \left[\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b) \right] \right\}, \tag{1.43}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_4 &= \frac{\det(\mathbf{A}_4)}{\det(\mathbf{A})} \\
&= \left[\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b) \right] \left\{ B_i(x) \left[\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a) \right] - \right. \\
&\quad \left. A_i(x) \left[\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a) \right] \right\} / \left[A_i'(x) B_i(x) - A_i(x) B_i'(x) \right] \times \\
&\quad \left\{ \beta_1 A_i(b) \left[\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a) \right] + \beta_2 A_i'(b) \left[\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a) \right] \left[\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b) \right] \right\}. \tag{1.44}
\end{aligned}$$

Con los resultados de las cantidades C_1 , C_2 , C_3 y C_4 dadas por las ecuaciones (3.41), (3.42), (3.43) y (3.44) respectivamente, se procede a reemplazarlos en (3.27) para la función de Green $G(x', x)$

$$G(x', x) = \begin{cases} h_1(x) \left\{ \left[\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a) \right] A_i(x') - \right. \\ \quad \left. \left[\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a) \right] B_i(x') \right\} & a < x' < x \\ h_2(x) \left\{ \left[\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b) \right] A_i(x') - \right. \\ \quad \left. \left[\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b) \right] B_i(x') \right\} & x < x' < b \end{cases}, \tag{1.45}$$

donde α_1 , α_2 , β_1 y β_2 son constantes dadas en (3.1). además $h_1(x)$ y $h_2(x)$ son

funciones que dependen de x y tienen la forma

$$h_1(x) = \left\{ A_i(x) [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] - B_i(x) [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] \right\} / \\ \left[A_i'(x) B_i(x) - A_i(x) B_i'(x) \right] \left\{ \beta_1 A_i(b) [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] + \right. \\ \left. + \beta_2 A_i'(b) [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] - [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] \times \right. \\ \left. [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] \right\}, \quad (1.46)$$

$$h_2(x) = \left\{ A_i(x) [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] - B_i(x) [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] \right\} / \\ \left[A_i'(x) B_i(x) - A_i(x) B_i'(x) \right] \left\{ \beta_1 A_i(b) [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] + \right. \\ \left. + \beta_2 A_i'(b) [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] - [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] \times \right. \\ \left. [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] \right\}. \quad (1.47)$$

La ecuación (3.45) es la función de Green asociada al problema (3.25) con valores en la frontera, la cual satisface la ecuación diferencial homogénea (3.26), las condiciones de frontera presentes en (3.25), la condición de continuidad (3.32) y la condición de discontinuidad de su primera derivada (3.35). En la figura 1 se muestra la gráfica de la función de Green y de su primera derivada con los siguientes parámetros: $x = 0$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = 8$, $\beta_2 = -1$, $a = -5$ y $b = 5$

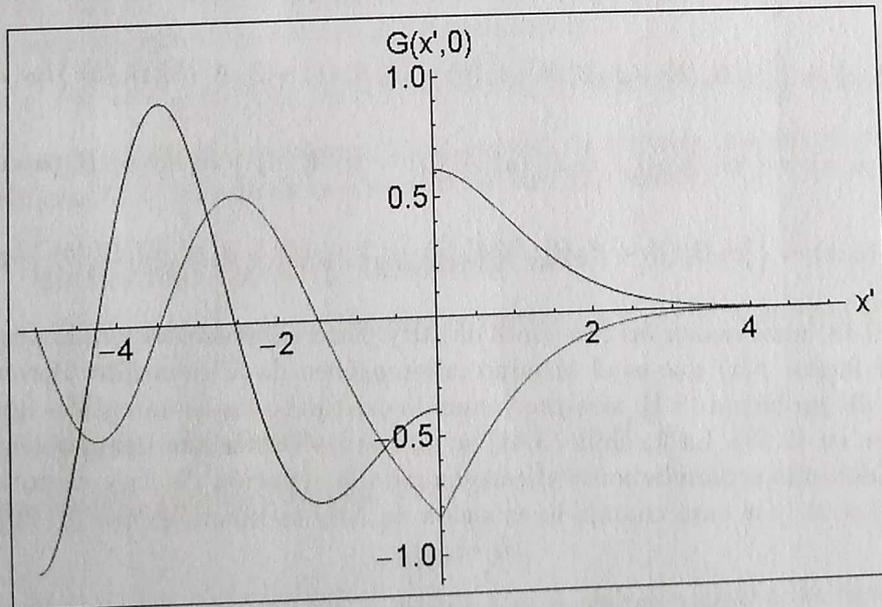


Figura 1: Gráfica de $G(x', x)$ (rojo) y $G_{x'}(x', x)$ (azul) para $x = 0$.

1.2.4. Solución del problema (3.1) en términos de $G(x', x)$

Resumiendo los resultados (3.12), (3.16), (3.20) y (3.24), la solución del problema con valores en la frontera (3.1) se escribe así

$$y(x) = \begin{cases} \frac{d_2}{\beta_1} G_{x'}(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_1} G_{x'}(a, x), & \alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq 0 \\ -\frac{d_2}{\beta_2} G(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_1} G_{x'}(a, x), & \alpha_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0 \\ -\frac{d_2}{\beta_1} G_{x'}(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_2} G(a, x), & \alpha_2 \neq 0, \beta_1 \neq 0 \\ -\frac{d_2}{\beta_2} G(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_2} G(a, x), & \alpha_2 \neq 0, \beta_2 \neq 0 \end{cases} +$$

$$\begin{aligned} & h_1(x)[\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] \int_a^x A_i(x') f(x') dx' - \\ & h_1(x)[\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] \int_a^x B_i(x') f(x') dx' + \\ & h_2(x)[\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] \int_x^b A_i(x') f(x') dx' - \\ & h_2(x)[\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] \int_x^b B_i(x') f(x') dx', \end{aligned} \quad (1.48)$$

donde

$$\begin{aligned} G(a, x) &= \left\{ [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] A_i(a) - [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] B_i(a) \right\} h_1(x), \\ G(b, x) &= \left\{ [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] A_i(b) - [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] B_i(b) \right\} h_2(x), \\ G_{x'}(a, x) &= \left\{ [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] A_i'(a) - [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] B_i'(a) \right\} h_1(x), \\ G_{x'}(b, x) &= \left\{ [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] A_i'(b) - [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] B_i'(b) \right\} h_2(x). \end{aligned} \quad (1.49)$$

En (3.48) intervienen las funciones de Airy. Esta expresión es válida para cualquier fuente $f(x)$ que es el término inhomogéneo de la ecuación diferencial de Airy del problema (3.1), siempre y cuando existan todas las integrales que intervienen en (3.48). La fórmula (3.48) se aplicará a la solución del problema (3.1) considerando separadamente el caso cuando la ecuación de Airy es homogénea ($f(x) = 0$), y el caso cuando la ecuación de Airy es inhomogénea ($f(x) \neq 0$).

1.3. Ecuación de Airy homogénea

El este caso se plantea el siguiente problema

$$y''(x) - xy(x) = 0, \quad a < x < b, \quad (1.50)$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = d_1, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = d_2,$$

donde $a, b, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, d_1$ y d_2 son constantes conocidas. En lo sucesivo se considera el caso cuando $\alpha_1 \neq 0$ y $\beta_1 \neq 0$.

La solución de la ecuación diferencial en (3.50) se obtiene mediante el uso de la fórmula (3.48) para $y(x)$ en términos de la función de Green. teniendo en cuenta que $f(x)$ es igual a cero, la expresión (3.48) se reduce a

$$y(x) = \frac{d_2}{\beta_1} G_{x'}(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_1} G_{x'}(a, x). \quad (1.51)$$

Remplazando (3.49) para las expresiones $G_{x'}(b, x)$ y $G_{x'}(a, x)$ en (3.51) se tiene

$$y(x) = \frac{d_2}{\beta_1} \left\{ [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] A_i'(b) - [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] B_i'(b) \right\} h_2(x) - \frac{d_1}{\alpha_1} \left\{ [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] A_i'(a) - [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] B_i'(a) \right\} h_1(x), \quad (1.52)$$

donde $a, b, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, d_1, d_2, h_1(x)$ y $h_2(x)$ están dados en (3.1), (3.46) y (3.47) respectivamente. En (3.52) intervienen las funciones de Airy y sus primeras derivadas evaluadas en a y b

En la figura 2 se presenta la gráfica de la solución $y(x)$ en (3.52) del problema (3.50) para los siguientes valores de los parámetros

$$a = -5, \quad b = 5, \quad \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 0, \quad d_1 = -5, \quad \beta_1 = 8, \quad \beta_2 = -1, \quad \text{y } d_2 = 1.$$

La solución (3.52) del problema (3.50), servirá de referencia cuando se resuelva el problema (3.1) basado en la ecuación de Airy con fuente.

1.4. Ecuación de Airy inhomogénea

A continuación se aplican diferentes fuentes ($f(x) \neq 0$) a la solución $y(x)$ cuando $\alpha_1 \neq 0$ y $\beta_1 \neq 0$.

1.4.1. Fuente constante

Este tipo de fuente se expresa como

$$f(x) = K, \quad (1.53)$$

donde K es una constante. En la figura 3 se muestra la gráfica de una fuente constante cuando $K = 3$.

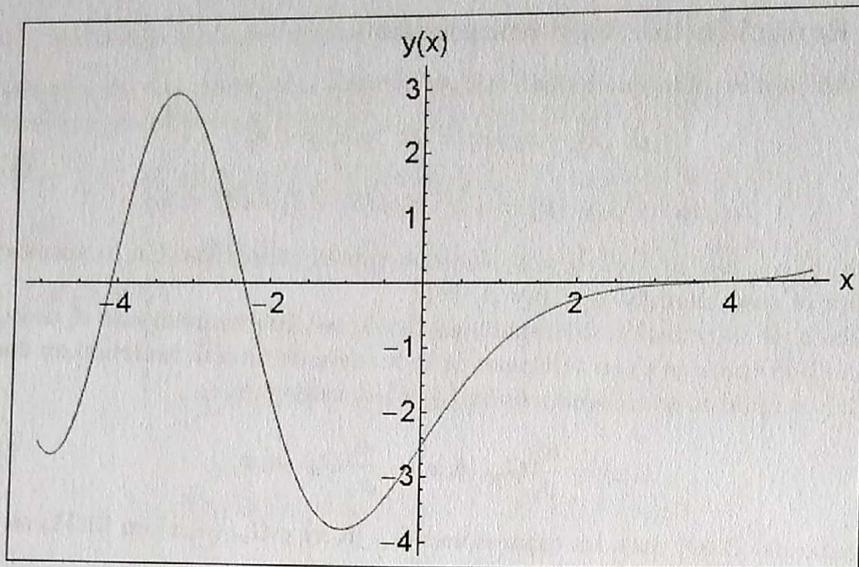


Figura 2: Gráfica de la solución $y(x)$ para la ecuación de Airy homogénea.

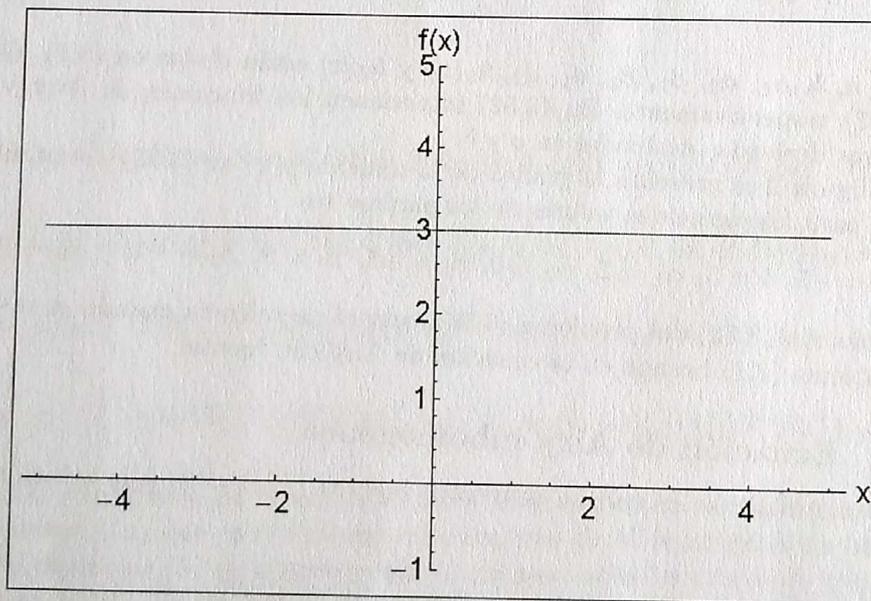


Figura 3: Gráfica de una fuente constante $K = 3$.

Reemplazando (3.53) en (3.48) se tiene

$$\begin{aligned}
 y(x) = & \frac{d_2}{\beta_1} \left\{ [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] A_i'(b) - [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] B_i'(b) \right\} h_2(x) - \\
 & \frac{d_1}{\alpha_1} \left\{ [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] A_i'(a) - [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] B_i'(a) \right\} h_1(x) + \\
 & h_1(x) K \left\{ [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] \int_a^x A_i(x') dx' - \right. \\
 & \quad \left. [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] \int_a^x B_i(x') dx' \right\} + \\
 & h_2(x) K \left\{ [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] \int_x^b A_i(x') dx' - \right. \\
 & \quad \left. [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] \int_x^b B_i(x') dx' \right\}, \tag{1.54}
 \end{aligned}$$

donde $a, b, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, d_1, d_2, h_1(x)$ y $h_2(x)$ están dados en (3.1), (3.46) y (3.47) respectivamente. En (3.54) aparecen cuatro integrales las cuales se dan a continuación

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_a^x A_i(x') dx' \\
 &= \frac{{}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x - {}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{a^3}{9}\right) a}{3^{2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \\
 & \quad \frac{\sqrt[3]{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left[{}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{a^3}{9}\right) a^2 - {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x^2 \right]}{4\pi}, \tag{1.55}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_a^x B_i(x') dx' \\
 &= \frac{{}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x - {}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{a^3}{9}\right) a}{\sqrt[3]{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \\
 & \quad \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{3}\right) \left[{}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{a^3}{9}\right) a^2 - {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x^2 \right]}{4\sqrt[3]{3} \pi}, \tag{1.56}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_x^b A_i(x') dx' \\
&= \frac{{}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{b^3}{9}\right) b - {}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x}{3^{2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \\
&\quad \frac{\sqrt[6]{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left[{}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x^2 - {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{b^3}{9}\right) b^2\right]}{4\pi}, \quad (1.57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_x^b B_i(x') dx' \\
&= \frac{{}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{b^3}{9}\right) b - {}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x}{\sqrt[6]{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \\
&\quad \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{3}\right) \left[{}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x^2 - {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{b^3}{9}\right) b^2\right]}{4\sqrt[3]{3} \pi}. \quad (1.58)
\end{aligned}$$

En (3.55), (3.56), (3.57), y (3.58) intervienen la función gamma definida como

$$\Gamma(n) = (n-1)!,$$

y las series hipergeométricas de la forma

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \dots (a_p)_n x^n}{(b_1)_n (b_2)_n \dots (b_q)_n n!},$$

donde

$$(a)_n = a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1).$$

Para verificar la solución $y(x)$ en (3.54), se comprobaron las siguientes propiedades:

1. Satisface la ecuación diferencial de Airy con fuente constante

$$y''(x) - xy(x) = K.$$

2. Cumple las dos condiciones en la frontera dadas en (3.1)

- $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = d_1.$
- $\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = d_2.$

En la figura 4 se muestra la gráfica de la solución $y(x)$ con fuente constante, asignando los siguientes valores

$$a = -5, b = 5, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 0, d_1 = -5, \beta_1 = 8, \beta_2 = -1, \text{ y } d_2 = 1.$$

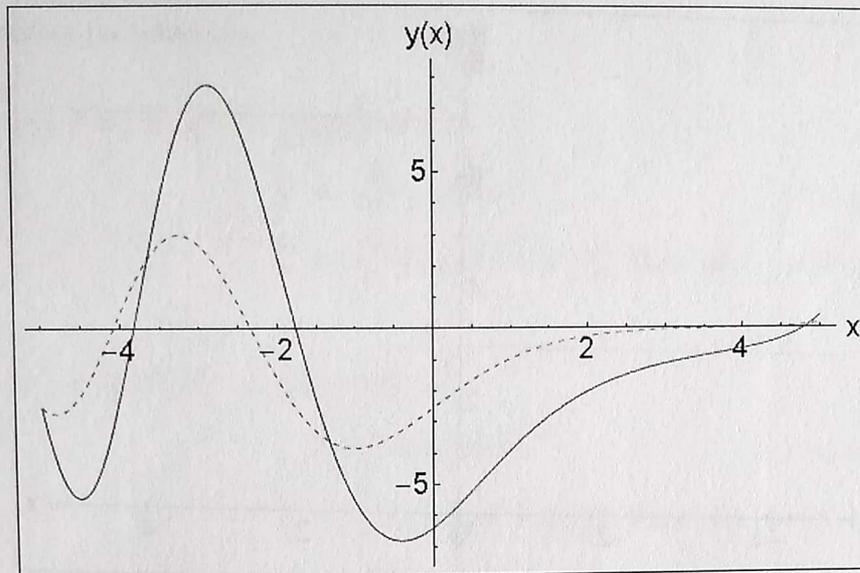


Figura 4: Gráfica de la solución $y(x)$ del problema (3.1) producida por una fuente constante $K = 3$ (línea azul), comparada con la solución de la ecuación de Airy sin fuentes (línea discontinua).

1.4.2. Fuente tipo función escalón

Este tipo de fuente se expresa como

$$f(x) = K_1 + K_2 H(x - x_1), \quad (1.59)$$

donde K_1 , K_2 y x_1 son constantes y $H(x - x_1)$ es la función escalón definida así

$$H(x - x_1) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ 1, & x > x_1. \end{cases} \quad (1.60)$$

En la figura 5 se muestra la gráfica de la fuente (3.59), con los siguientes valores de los parámetros

$$K_1 = 3, \quad K_2 = 4 \text{ y } x_1 = 0.$$

Reemplazando (3.59) en la solución $y(x)$ dada por (3.48), se tiene

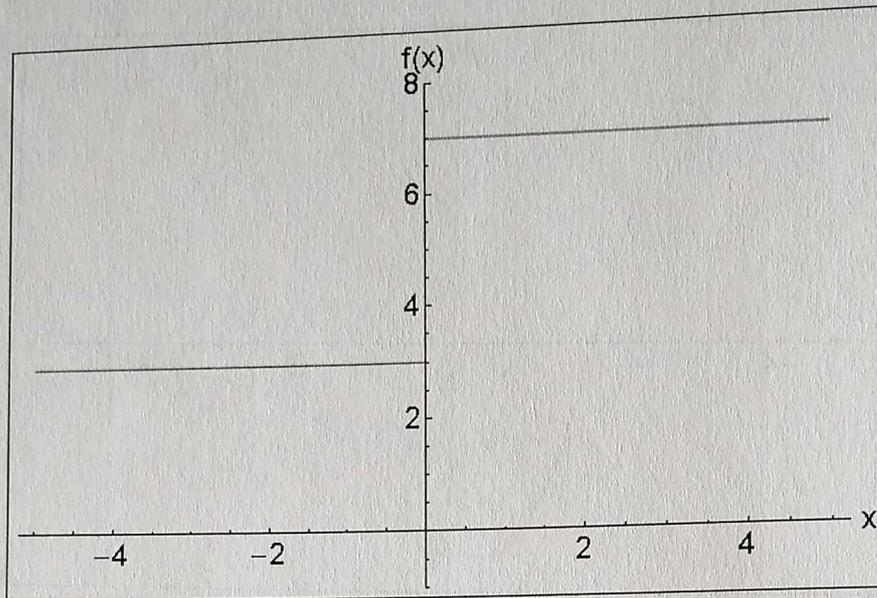


Figura 5: Gráfica de fuente tipo función escalón.

$$\begin{aligned}
 y(x) = & \frac{d_2}{\beta_1} \left\{ [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] A_i'(b) - [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] B_i'(b) \right\} h_2(x) - \\
 & \frac{d_1}{\alpha_1} \left\{ [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] A_i'(a) - [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] B_i'(a) \right\} h_1(x) + \\
 & h_1(x) \left\{ [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] \int_a^x A_i(x') [K_1 + K_2 H(x' - x_1)] dx' - \right. \\
 & \left. [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] \int_a^x B_i(x') [K_1 + K_2 H(x' - x_1)] dx' \right\} + \\
 & h_2(x) \left\{ [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] \int_x^b A_i(x') [K_1 + K_2 H(x' - x_1)] dx' - \right. \\
 & \left. [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] \int_x^b B_i(x') [K_1 + K_2 H(x' - x_1)] dx' \right\}. \tag{1.61}
 \end{aligned}$$

Se calculan las integrales

$$\int_a^x [K_1 + K_2 H(x' - x_1)] A_i(x') dx' = \begin{cases} K_1 \int_a^x A_i(x') dx', & x' < x_1 \\ K_1 \int_a^x A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^x A_i(x') dx', & x' > x_1 \end{cases},$$

$$\int_a^x [K_1 + K_2 H(x' - x_1)] B_i(x') dx' = \begin{cases} K_1 \int_a^x B_i(x') dx', & x' < x_1 \\ K_1 \int_a^x B_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^x B_i(x') dx', & x' > x_1 \end{cases},$$

$$\int_x^b [K_1 + K_2 H(x' - x_1)] A_i(x') dx' = \begin{cases} K_1 \int_x^b A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^b A_i(x') dx', & x' < x_1 \\ K_1 \int_x^b A_i(x') dx' + K_2 \int_x^{x_1} A_i(x') dx', & x' > x_1 \end{cases},$$

y

$$\int_x^b [K_1 + K_2 H(x' - x_1)] B_i(x') dx' = \begin{cases} K_1 \int_x^b B_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^b B_i(x') dx', & x' < x_1 \\ K_1 \int_x^b B_i(x') dx' + K_2 \int_x^{x_1} B_i(x') dx', & x' > x_1 \end{cases}.$$

Reemplazando los cuatro resultados anteriores en (3.61), se escribe

$$y(x) = \frac{d_2}{\beta_1} \left\{ [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] A_i'(b) - [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] B_i'(b) \right\} h_2(x) -$$

$$\frac{d_1}{\alpha_1} \left\{ [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] A_i'(a) - [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] B_i'(a) \right\} h_1(x) +$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{11}(x) K_1 \int_a^x A_i(x') dx' - h_{12}(x) K_1 \int_a^x B_i(x') dx' + \\ h_{21}(x) \left[K_1 \int_x^b A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^b A_i(x') dx' \right] - \\ h_{22}(x) \left[K_1 \int_x^b B_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^b B_i(x') dx' \right], \quad x < x_1 \\ \\ h_{11}(x) \left[K_1 \int_a^x A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^x A_i(x') dx' \right] - \\ h_{12}(x) \left[K_1 \int_a^x B_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^x B_i(x') dx' \right] + \\ h_{21}(x) \left[K_1 \int_x^b A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^b A_i(x') dx' \right] - \\ h_{22}(x) \left[K_1 \int_x^b B_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^b B_i(x') dx' \right], \quad x > x_1 \end{array} \right. , \quad (1.62)$$

donde

$$\begin{aligned} h_{11}(x) &= [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] h_1(x), \\ h_{12}(x) &= [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] h_1(x), \\ h_{21}(x) &= [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] h_2(x), \\ h_{22}(x) &= [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] h_2(x). \end{aligned} \quad (1.63)$$

En (3.62) aparecen nuevamente las integrales I_1 , I_2 , I_3 y I_4 dadas en (3.55), (3.56), (3.57) y (3.58), respectivamente, e intervienen cuatro integrales más que se presentan a continuación

$$I_5 = \int_{x_1}^x A_i(x') dx'$$

$$= \frac{{}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x - {}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x_1^3}{9}\right) x_1}{3^{2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} +$$

$$\frac{\sqrt[3]{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left[{}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x_1^3}{9}\right) x_1^2 - {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x^2 \right]}{4\pi}, \quad (1.64)$$

$$\begin{aligned}
I_6 &= \int_{x_1}^x B_i(x') dx' \\
&= \frac{{}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x - {}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x_1^3}{9}\right) x_1}{\sqrt[3]{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \\
&\quad \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{3}\right) \left[{}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x_1^3}{9}\right) x_1^2 - {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x^2\right]}{4\sqrt[3]{3} \pi}, \quad (1.65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_7 &= \int_{x_1}^b A_i(x') dx' \\
&= \frac{{}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{b^3}{9}\right) b - {}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x_1^3}{9}\right) x_1}{3^{2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \\
&\quad \frac{\sqrt[3]{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left[{}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x_1^3}{9}\right) x_1^2 - {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{b^3}{9}\right) b^2\right]}{4\pi}, \quad (1.66)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_8 &= \int_{x_1}^b B_i(x') dx' \\
&= \frac{{}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{b^3}{9}\right) b - {}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x_1^3}{9}\right) x_1}{\sqrt[3]{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \\
&\quad \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{3}\right) \left[{}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x_1^3}{9}\right) x_1^2 - {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{b^3}{9}\right) b^2\right]}{4\sqrt[3]{3} \pi}. \quad (1.67)
\end{aligned}$$

Para verificar la solución $y(x)$ en (3.62), con ayuda del programa Mathematica se comprobaron las siguientes propiedades:

1. Satisface la ecuación diferencial de Airy con fuente función de paso

$$y''(x) - xy(x) = \begin{cases} K_1, & x < x_1 \\ K_1 + K_2, & x > x_1 \end{cases}$$

2. Cumple las dos condiciones en la frontera dadas en (3.1)

- $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = d_1$.
- $\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = d_2$.

En la figura 6 se muestra la gráfica de la solución $y(x)$ con fuente función de paso, asignando los siguientes valores

$$a = -5, \quad b = 5, \quad x_1 = 0, \quad \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 0, \quad d_1 = -5, \quad \beta_1 = 8, \quad \beta_2 = -1, \quad \text{y } d_2 = 1.$$

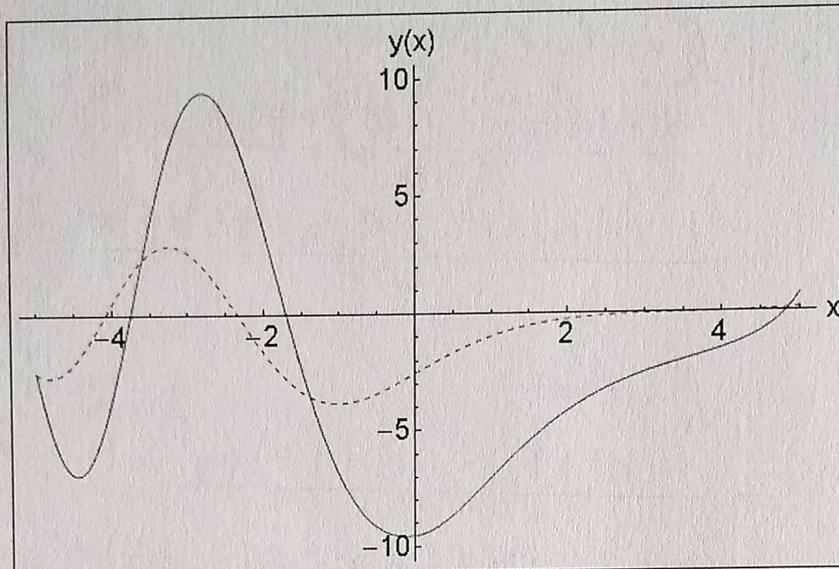


Figura 6: Gráfica de la solución $y(x)$ del problema (3.1) producida por una fuente de la forma función de paso (línea azul), comparada con la solución de la ecuación de Airy sin fuentes (línea discontinua).

1.4.3. Fuente pulso rectangular

Este tipo de fuente se expresa como

$$f(x) = K_1 + K_2 H(x - x_1) - K_3 H(x - x_2), \quad (1.68)$$

donde K_1 , K_2 , K_3 , x_1 y x_2 son constantes, además $H(x - x_1)$ y $H(x - x_2)$ son funciones tipo escalón (ver (3.60)).

En la figura 7 se muestra la gráfica de la fuente (3.68), con los siguientes valores de los parámetros

$$K_1 = 3, K_2 = 4, K_3 = 5, x_1 = -2 \text{ y } x_2 = 2.$$

Reemplazando (3.68) en la solución $y(x)$ dada por (3.48), se tiene

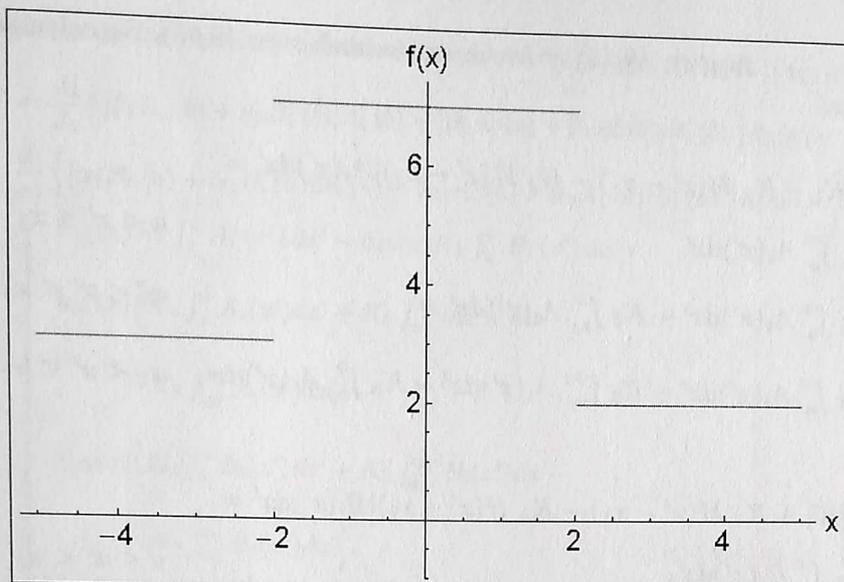


Figura 7: Gráfica de fuente tipo pulso rectangular.

$$\begin{aligned}
 y(x) = & \frac{d_2}{\beta_1} \left\{ [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] A_i'(b) - [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] B_i'(b) \right\} h_2(x) - \\
 & \frac{d_1}{\alpha_1} \left\{ [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] A_i'(a) - [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] B_i'(a) \right\} h_1(x) + \\
 & h_{11}(x) \int_a^x A_i(x') [K_1 + K_2 H(x' - x_1) - K_3 H(x' - x_2)] dx' - \\
 & h_{12}(x) \int_a^x B_i(x') [K_1 + K_2 H(x' - x_1) - K_3 H(x' - x_2)] dx' + \\
 & h_{21}(x) \int_x^b A_i(x') [K_1 + K_2 H(x' - x_1) - K_3 H(x' - x_2)] dx' - \\
 & h_{22}(x) \int_x^b B_i(x') [K_1 + K_2 H(x' - x_1) - K_3 H(x' - x_2)] dx', \quad (1.69)
 \end{aligned}$$

donde $h_{11}(x)$, $h_{12}(x)$, $h_{21}(x)$ y $h_{22}(x)$ están dados en (3.63). Se calculan las integrales

$$\int_a^x [K_1 + K_2 H(x' - x_1) - K_3 H(x' - x_2)] A_i(x') dx' = \begin{cases} K_1 \int_a^x A_i(x') dx', & a < x' < x_1 \\ K_1 \int_a^x A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^x A_i(x') dx', & x_1 < x' < x_2 \\ K_1 \int_a^x A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^{x_2} A_i(x') dx' - K_3 \int_{x_2}^x A_i(x') dx', & x_2 < x' < b \end{cases},$$

$$\int_a^x [K_1 + K_2 H(x' - x_1) - K_3 H(x' - x_2)] B_i(x') dx' = \begin{cases} K_1 \int_a^x B_i(x') dx', & a < x' < x_1 \\ K_1 \int_a^x B_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^x B_i(x') dx', & x_1 < x' < x_2 \\ K_1 \int_a^x B_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^{x_2} B_i(x') dx' - K_3 \int_{x_2}^x B_i(x') dx', & x_2 < x' < b \end{cases},$$

$$\int_x^b [K_1 + K_2 H(x' - x_1) - K_3 H(x' - x_2)] A_i(x') dx' = \begin{cases} K_1 \int_x^b A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^{x_2} A_i(x') dx' - K_3 \int_{x_2}^b A_i(x') dx', & a < x' < x_1 \\ K_1 \int_x^b A_i(x') dx' + K_2 \int_x^{x_2} A_i(x') dx' - K_3 \int_{x_2}^b A_i(x') dx', & x < x' < x_2 \\ K_1 \int_a^x A_i(x') dx' - K_3 \int_x^b A_i(x') dx', & x_2 < x' < b \end{cases},$$

y

$$\int_x^b [K_1 + K_2 H(x' - x_1) - K_3 H(x' - x_2)] B_i(x') dx' = \begin{cases} K_1 \int_x^b A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^{x_2} A_i(x') dx' - K_3 \int_{x_2}^b A_i(x') dx', & a < x' < x_1 \\ K_1 \int_x^b A_i(x') dx' + K_2 \int_x^{x_2} A_i(x') dx' - K_3 \int_{x_2}^b A_i(x') dx', & x < x' < x_2 \\ K_1 \int_a^x A_i(x') dx' - K_3 \int_x^b A_i(x') dx', & x_2 < x' < b \end{cases}.$$

Reemplazando los cuatro resultados anteriores en (3.69), se tiene

$$\begin{aligned}
 y(x) = & \frac{d_2}{\beta_1} \left\{ [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] A_i'(b) - [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] B_i'(b) \right\} h_2(x) - \\
 & \frac{d_1}{\alpha_1} \left\{ [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] A_i'(a) - [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] B_i'(a) \right\} h_1(x) + \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & h_{11}(x) K_1 \int_a^x A_i(x') dx' - h_{12}(x) K_1 \int_a^x B_i(x') dx' + \\
 & h_{21}(x) \left[K_1 \int_x^b A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^{x_2} A_i(x') dx' - \right. \\
 & \quad \left. K_3 \int_{x_2}^b A_i(x') dx' \right] - \\
 & h_{22}(x) \left[K_1 \int_x^b B_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^{x_2} B_i(x') dx' - \right. \\
 & \quad \left. K_3 \int_{x_2}^b B_i(x') dx' \right], \qquad a < x < x_1 \\
 & h_{11}(x) \left[K_1 \int_a^x A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^x A_i(x') dx' \right] - \\
 & h_{12}(x) \left[K_1 \int_a^x B_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^x B_i(x') dx' \right] + \\
 & h_{21}(x) \left[K_1 \int_x^b A_i(x') dx' + K_2 \int_x^{x_2} A_i(x') dx' - \right. \\
 & \quad \left. K_3 \int_{x_2}^b A_i(x') dx' \right] - \qquad \qquad \qquad (1.70) \\
 & h_{22}(x) \left[K_1 \int_x^b B_i(x') dx' + K_2 \int_x^{x_2} B_i(x') dx' - \right. \\
 & \quad \left. K_3 \int_{x_2}^b B_i(x') dx' \right], \qquad \qquad \qquad x_1 < x < x_2 \\
 & h_{11}(x) \left[K_1 \int_a^x A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^{x_2} A_i(x') dx' - \right. \\
 & \quad \left. K_3 \int_{x_2}^b A_i(x') dx' \right] \\
 & h_{12}(x) \left[K_1 \int_a^x B_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^{x_2} B_i(x') dx' - \right. \\
 & \quad \left. K_3 \int_{x_2}^b B_i(x') dx' \right] - \\
 & h_{21}(x) \left[K_1 \int_x^b A_i(x') dx' + K_3 \int_x^b A_i(x') dx' \right] - \\
 & h_{22}(x) \left[K_1 \int_x^b B_i(x') dx' - K_3 \int_x^b B_i(x') dx' \right], \qquad x_2 < x < b
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Las integrales que intervienen en (3.70) se calculan análogamente a las expresiones (3.55), (3.56), (3.57), (3.58), (3.64), (3.65), (3.66) y (3.67). Para verificar la solución $y(x)$ en (3.70), con ayuda del programa Mathematica se comprobaron las propiedades:

1. Satisface la ecuación diferencial de Airy con fuente tipo pulso rectangular

$$y''(x) - xy(x) = \begin{cases} K_1, & x < x_1 \\ K_1 + K_2, & x_1 < x < x_2 \\ K_1 + K_2 - K_3, & x > x_2 \end{cases} .$$

2. Cumple las dos condiciones en la frontera dadas en (3.1)

- $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = d_1$.
- $\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = d_2$.

En la figura 8 se muestra la gráfica de la solución $y(x)$ con fuente pulso rectangular, se asigna los siguientes valores

$$a = -5, b = 5, x_1 = -2, x_2 = 2, \alpha_1 = 2, \\ \alpha_2 = 0, d_1 = -5, \beta_1 = 8, \beta_2 = -1, \text{ y } d_2 = 1.$$

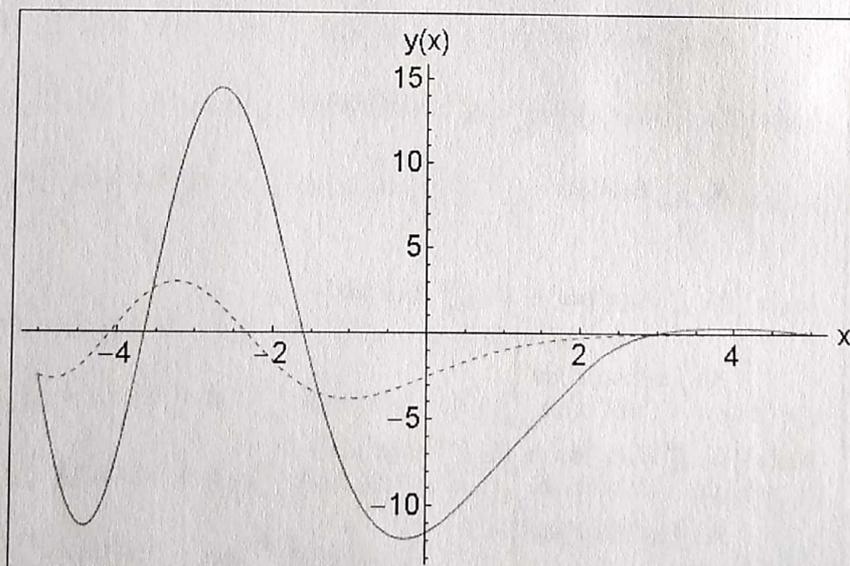


Figura 8: Gráfica de la solución $y(x)$ del problema (3.1) producida por una fuente tipo pulso rectangular (línea azul), comparada con la solución de la ecuación de Airy sin fuentes (línea discontinua).

1.4.4. Fuente sinusoidal

Este tipo de fuente se expresa como

$$f(x) = C \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right), \quad (1.71)$$

donde C y l son constantes.

En la figura 9 se muestra la gráfica de la fuente (3.71), con los siguientes valores de los parámetros $C = 5$ y $l = 2$.

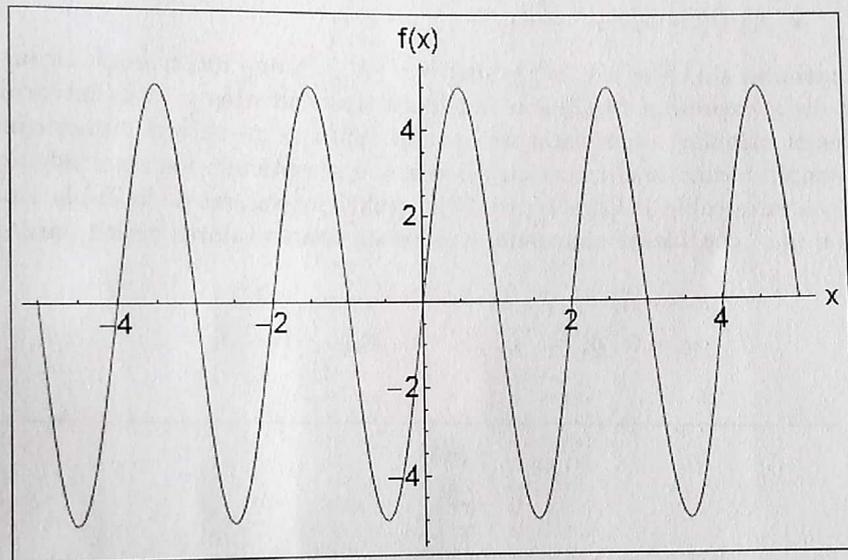


Figura 9: Gráfica de fuente sinusoidal.

Reemplazando (3.71) en la solución $y(x)$ dada por (3.48), se tiene

$$y(x) = \frac{d_2}{\beta_1} \left\{ [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] A_i'(b) - [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] B_i'(b) \right\} h_2(x) -$$

$$\frac{d_1}{\alpha_1} \left\{ [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] A_i'(a) - [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] B_i'(a) \right\} h_1(x) +$$

$$h_{11}(x) \int_a^x C A_i(x') \sin\left(\frac{2\pi}{l}x'\right) dx' - h_{12}(x) \int_a^x C B_i(x') \sin\left(\frac{2\pi}{l}x'\right) dx' +$$

$$h_{21}(x) \int_x^b C A_i(x') \sin\left(\frac{2\pi}{l}x'\right) dx' - h_{22}(x) \int_x^b C B_i(x') \sin\left(\frac{2\pi}{l}x'\right) dx', \quad (1.72)$$

donde $h_{11}(x)$, $h_{12}(x)$, $h_{21}(x)$ y $h_{22}(x)$ están dados en (3.63). Para verificar la solución obtenida en (3.72) es correcta, se utiliza el programa Mathematica y se comprueba las siguientes propiedades:

1. Satisface la ecuación diferencial con fuente sinusoidal

$$y''(x) - xy(x) = C \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right)$$

2. Cumple las dos condiciones iniciales dadas en (3.1)

- $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = d_1$.
- $\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = d_2$.

Las funciones $\sin\left(\frac{2\pi}{l}x'\right) A_i(x')$ y $\sin\left(\frac{2\pi}{l}x'\right) B_i(x')$ que intervienen en las integrales de la expresión (3.72) son funciones trascendentes y éstas integrales no se pueden calcular analíticamente, por lo tanto se resuelven numéricamente. Por ejemplo tomando el intervalo $-5 < x < 5$ se obtienen los resultados que se muestran en la tabla 1. En la figura 10 se grafica los valores de la Tabla 1 para la solución $y(x)$ con fuente sinusoidal con los siguientes valores de los parámetros

$$a = -5, b = 5, C = 5, l = 2, \alpha_1 = 2, \\ \alpha_2 = 0, d_1 = -5, \beta_1 = 8, \beta_2 = -1, \text{ y } d_2 = 1.$$

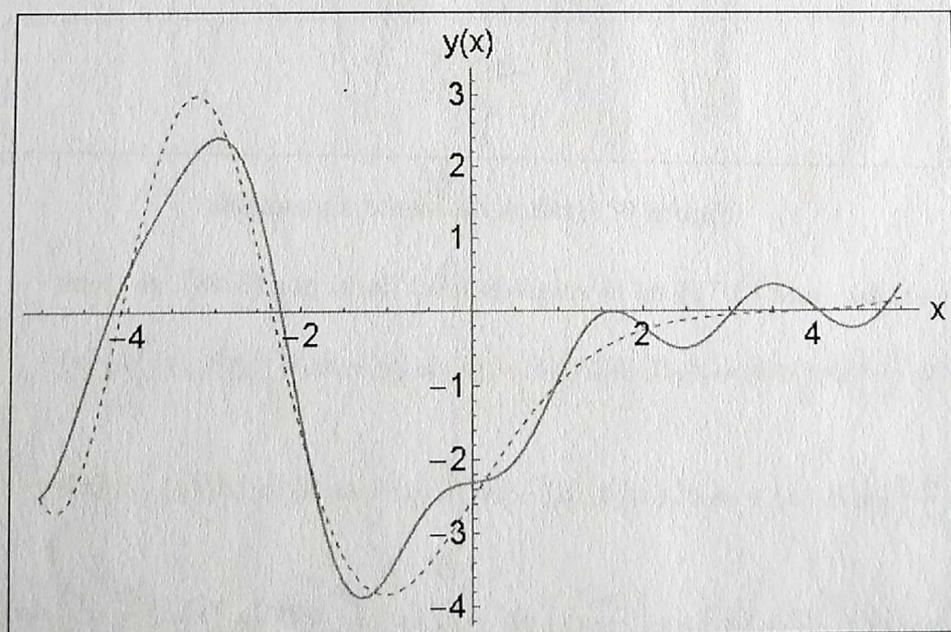


Figura 10: Gráfica de la solución $y(x)$ del problema (3.1) producida por una fuente sinusoidal (línea azul), comparada con la solución de la ecuación de Airy sin fuentes (línea discontinua).

x	y(x)	x	y(x)
-5	-2.5	0	-2.30791
-4.9	-2.35735	0.1	-2.29363
-4.8	-2.11489	0.2	-2.26631
-4.7	-1.80031	0.3	-2.21437
-4.6	-1.44135	0.4	-2.12893
-4.5	-1.06325	0.5	-2.00481
-4.4	-0.686837	0.6	-1.84108
-4.3	-0.327237	0.7	-1.6412
-4.2	0.00646659	0.8	-1.41262
-4.1	0.310907	0.9	-1.16615
-4	0.58742	1	-0.914804
-3.9	0.840558	1.1	-0.672571
-3.8	1.07634	1.2	-0.453044
-3.7	1.30044	1.3	-0.268102
-3.6	1.5166	1.4	-0.126785
-3.5	1.72539	1.5	-0.0344439
-3.4	1.92344	1.6	0.00773882
-3.3	2.10334	1.7	0.00282227
-3.2	2.25406	1.8	-0.0422269
-3.1	2.36193	1.9	-0.11724
-3	2.41207	2	-0.209847
-2.9	2.39003	2.1	-0.306673
-2.8	2.28355	2.2	-0.394616
-2.7	2.08417	2.3	-0.462067
-2.6	1.78858	2.4	-0.499979
-2.5	1.39947	2.5	-0.502659
-2.4	0.925884	2.6	-0.468236
-2.3	0.38297	2.7	-0.398738
-2.2	-0.208873	2.8	-0.299807
-2.1	-0.825325	2.9	-0.180054
-2	-1.43988	3	-0.0501537
-1.9	-2.02578	3.1	0.0782604
-1.8	-2.55804	3.2	0.193763
-1.7	-3.01531	3.3	0.286274
-1.6	-3.3814	3.4	0.348041
-1.5	-3.64641	3.5	0.374384
-1.4	-3.8073	3.6	0.364135
-1.3	-3.86786	3.7	0.319725
-1.2	-3.83812	3.8	0.246926
-1.1	-3.73324	3.9	0.154286
-1	-3.572	4	0.0522919
-0.9	-3.37503	4.1	-0.0476208
-0.8	-3.16299	4.2	-0.134131
-0.7	-2.95476	4.3	-0.197057
-0.6	-2.76592	4.4	-0.22823
-0.5	-2.60761	4.5	-0.222148
-0.4	-2.4858	4.6	-0.176318
-0.3	-2.40119	4.7	-0.0912742
-0.2	-2.34947	4.8	0.0297577
-0.1	-2.32219	4.9	0.181512

Cuadro 1: Valores numéricos de la solución $y(x)$.



ACUERDO N° 003
(Enero 30 de 2017)

EL COMITÉ CURRICULAR Y DE INVESTIGACIÓN DEL DEPARTAMENTO DE FÍSICA
DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DE LA UNIVERSIDAD DE NARIÑO

En ejercicio de sus atribuciones legales, reglamentarias y estatutarias, y

CONSIDERANDO:

Que el docente tiempo completo Álvaro Rugeles Pérez adscrito al Programa de Física, solicitó al Comité Curricular y de Investigaciones el aval para registrar el proyecto de investigación "Aplicación de funciones de Green a problemas con valores de frontera asociados con ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes variables no homogéneas de segundo orden" en la Vicerrectoría de Investigaciones de la Universidad de Nariño.

Que este proyecto es una gran oportunidad para la proyección internacional del Grupo de Geofísica, al cual pertenece el docente Álvaro Rugeles Pérez.

Que la política del Departamento de Física es respaldar los procesos de investigación en correspondencia con su parte misional y en virtud de que contribuyen a elevar la calidad del Programa de Física y

ACUERDA:

PRIMERO: Avalar la solicitud de registro del proyecto "Aplicación de funciones de Green a problemas con valores de frontera asociados con ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes variables no homogéneas de segundo orden" presentado por el docente Álvaro Rugeles Pérez en el Sistema de Investigaciones.

SEGUNDO: Aprobar el proyecto de investigación "Aplicación de funciones de Green a problemas con valores de frontera asociados con ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes variables no homogéneas de segundo orden" a cargo del docente Álvaro Rugeles Pérez, a partir del Semestre A de 2017 con una descarga de dos (2) horas una vez se cuente con el Acuerdo de inscripción emitido por la VIPRI.

TERCERO: La Vicerrectoría de Investigaciones, Postgrados y Relaciones Internacionales y el Departamento de Física anotarán lo de su cargo.

CUARTO: El proyecto tendrá una duración de un (1) año contados a partir del semestre A de 2017 y hasta el semestre A de 2018.

COMUNIQUESE Y CUMPLASE:

Dado en San Juan de Pasto, a los treinta (30) días del mes de enero de dos mil diecisiete (2017).

ALVARO RUGELES PEREZ
Presidente
Comité Curricular y de Investigaciones
Departamento de Física

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
ARCHIVO Y CORRESPONDENCIA
OSCAR ECHEVERRY

31/01/17





1. TÍTULO

APLICACIÓN DE FUNCIONES DE GREEN A PROBLEMAS CON VALORES DE FRONTERA ASOCIADOS CON ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS LINEALES CON COEFICIENTES VARIABLES NO HOMOGÉNEAS DE SEGUNDO ORDEN

2. RESUMEN DEL PROYECTO

En este proyecto se propone la construcción de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes variables no homogéneas de segundo orden, cuando se exige el cumplimiento de dos condiciones de frontera, utilizando el método de la función de Green. Se toma la **ecuación de Airy** como prototipo de este tipo de ecuación. Esto permitirá elaborar un algoritmo general para la solución de este tipo de problemas.

En el tratamiento matemático del problema planteado se aplicarán métodos análogos a los utilizados en el estudio de sistemas lineales no homogéneos de segundo grado con coeficientes constantes y condiciones de frontera [1], generalizándolos a sistemas con coeficientes variables.

En la exposición del proyecto se presenta un marco teórico relacionado con las ecuaciones diferenciales ordinarias y el método de la función de Green.

Este tipo de proyectos de investigación es de gran importancia ya que permite estandarizar los métodos de resolución de problemas asociados con ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas de segundo orden con coeficientes variables, las cuales juegan un papel fundamental en variados campos tanto de la física como de otras ciencias naturales y de la ingeniería.

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Los problemas de valores de frontera son una consecuencia casi inevitable del uso de la matemática para el estudio de los problemas que surgen en el mundo real. Por esto, uno de los problemas fundamentales en ciencia e ingeniería es la construcción de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales cuando se tiene una fuente especificada y la ecuación diferencial debe satisfacer ciertas condiciones de frontera [2]. La aproximación a la solución de un problema con valores de frontera específico se puede hacer siguiendo muchos caminos o métodos. En este proyecto se aplicará un método que requiere la construcción de una función auxiliar conocida como función de Green, que proporciona una herramienta potente para la aproximación a la solución [3, 4]. Por tanto, es importante desarrollar un procedimiento general basado en la función de Green para la resolución de esta clase de problemas.

Para avanzar en esta dirección se implementará el método de la función de Green para resolver en forma general el problema asociado con la **ecuación de Airy** no homogénea (como prototipo de ecuación diferencial ordinaria lineal con coeficientes variables de segundo grado), exigiendo el cumplimiento de dos condiciones de frontera. Este problema se tomará como prototipo de problemas con valores de frontera asociados a ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes variables no homogéneas de segundo orden.

4. MARCO TEORICO

Ecuación de Airy

Se considerará la ecuación de Airy [5]

$$y' - xy = 0, \quad (1)$$

llamada así en honor del astrónomo británico George Biddell Airy (1801–1892).

Para valores reales de x la solución de la ecuación de Airy puede expresarse así:

$$y = C_1 A_i(x) + C_2 B_i(x), \quad (2)$$

donde $A_i(x)$ y $B_i(x)$ son la función de Airy de primera y segunda clase, respectivamente. Las funciones de Airy admiten la siguiente representación integral

$$A_i(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{1}{3}t^3 + xt\right) dt$$

$$B_i(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{1}{3}t^3 + xt\right) + \sin\left(\frac{1}{3}t^3 + xt\right) \right] dt. \quad (3)$$

Las funciones de Airy se usan en muchos campos de la física clásica y cuántica [6]. En la física clásica se aplican en: óptica y electromagnetismo, mecánica de fluidos, elasticidad, ecuación del calor, física no lineal. En la física cuántica en: ecuación de Schrödinger, partícula en un campo uniforme, potencial $|x|$, aproximación uniforme de la ecuación de Schrödinger, evaluación de los factores de Franck-Condon, distribución de Wigner semiclásica, transformación de Airy de la ecuación de Schrödinger). La importancia y actualidad de la ecuación de Airy y de las funciones de Airy se evidencia en los trabajos publicados en la literatura científica de los últimos 30 años, por ejemplo [7 – 17].

En este proyecto se formula el siguiente problema de valores de frontera

$$y' - xy = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = d_1,$$

$$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = d_2, \quad (4)$$



el cual se resolverá aplicando la función de Green correspondiente [1, 3]. La función de Green recibe ese nombre por el matemático británico George Green, que desarrolló el concepto hacia 1830. El método de la función de Green se ha convertido en una herramienta potente para abordar la resolución de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas bajo ciertas condiciones de contorno. En la construcción de la función de Green para el problema (4) se usarán las funciones de Airy.

5. OBJETIVOS DEL PROYECTO

OBJETIVO GENERAL

Implementar el método de la función de Green aplicado a la solución de problemas de valores de frontera asociados con ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas con coeficientes variables de segundo orden.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Hacer una revisión de las funciones de Airy

Desarrollar analíticamente en forma general el método de la función de Green aplicado a la solución del problema (4).

Construir la función de Green para el problema (4) para unas condiciones de frontera dadas.

Construir la solución del problema (4) para una fuente y unas condiciones de frontera dadas, usando la función de Green correspondiente

6. METODOLOGÍA

La metodología que se adoptará para alcanzar los objetivos del proyecto tiene como punto de partida el conocimiento de:

- Las propiedades de las soluciones fundamentales de una ecuación diferencial ordinaria homogénea de segundo orden.
- Las propiedades de las funciones de Airy que son soluciones fundamentales de la ecuación diferencial de Airy homogénea.
- Las ideas básicas del método de la función de Green.

Este conocimiento se encuentra en artículos de investigación y textos científicos.

Con base en este conocimiento se desarrollará al máximo de manera analítica el método de la función de Green aplicado a problemas con valores en la frontera asociados a ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas de segundo orden.



Luego, este formalismo matemático se aplicará de en forma analítica a la ecuación de Airy no homogénea con valores de frontera (problema (4)).

A continuación, con base en los resultados analíticos, se construirán aproximaciones numéricas de la función de Green asociada al problema (4) para ejemplos concretos de fuentes y de condiciones de frontera.

Por último, usando las aproximaciones numéricas de la función de Green, se construirán aproximaciones numéricas del problema (4) para las fuentes y condiciones de frontera correspondientes.

Por último, se analizarán los resultados obtenidos.

7. RESULTADOS Y PRODUCTOS ESPERADOS

Se espera deducir una expresión analítica de forma general para la solución del problema (4) en términos de la función de Green correspondiente.

Se espera obtener aproximaciones numéricas de la solución del problema (4) para ejemplos concretos de fuentes y de condiciones de frontera.

Se espera elaborar un procedimiento general para la solución de problemas de valores de frontera asociados a ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes variables no homogéneas de segundo orden.

A este proyecto se vinculará un estudiante de pregrado del Programa de Física para que realice su Trabajo de Grado.

Los resultados obtenidos se publicarán en forma de artículo y se presentará en un evento científico.