APLICACIÓN DE FUNCIONES DE GREEN EN SISTEMAS LINEALES NO HOMOGÉNEOS DE SEGUNDO ORDEN CON VALORES EN LA FRONTERA

Alvaro Rugeles Pérez

Universidad de Nariño

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

APLICACIÓN DE FUNCIONES DE GREEN EN SISTEMAS
LINEALES NO HOMOGENEOS DE SEGUNDO ORDEN
CON VALORES EN LA FRONTERA

Editorial Universitaria - Universidad de Nariño
Autor: Alvaro Rugeles Pérez

ISBN: 978-958-8609-68-3

Impreso en el Centro de Publicaciones de la Universidad de Nariño
San Juan de Pasto, Nariño, Colombia.
Primera edición, diciembre de 2013.

Diseño de cubierta: Mauricio Riascos

Índice general

Prefacio v

Capítulo 1. Introducción 1
1. Problemas lineales no homogéneos de segundo orden con valores en la frontera 1
2. El método de la función de Green 1
3. Conclusiones 9

Capítulo 2. Problemas con coeficientes constantes 11
1. El método de la función de Green 11
2. Condición de existencia de la función de Green 27
3. Resumen 33

Capítulo 3. Función de Green generalizada 35
1. Problema homogéneo 35
2. Problema homogéneo con coeficientes constantes 40
3. Función de Green generalizada 47
4. El método de las funciones propias 60
5. Resumen 66

Apéndice A. Bibliografía 67

Prefacio

El método de la función de Green representa una línea de aproximación bastante general a la solución de una gran diversidad de problemas que se pueden formulan en términos de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas y condiciones iniciales o de frontera igualmente lineales y no homogéneas. Con el fin de ilustrar e implementar desde un punto de vista matemático las ideas básicas de este método, en el presente texto se ha escogido una clase de problemas que se enuncian mediante una ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea de segundo orden definida sobre cierto intervalo de la variable independiente, más dos condiciones de frontera en los puntos extremos de dicho intervalo. Este tipo de problemas también se conoce como sistemas lineales no homogéneos de segundo orden con valores en la frontera.

En el capítulo 1, luego de la formulación en términos matemáticos de una clase de sistemas lineales no homogéneos de segundo orden con valores en la frontera, se procede a la exposición paso a paso de las ideas básicas del método de la función de Green aplicado a la solución de ese tipo de problemas. En esta dirección, se llega hasta la definición precisa de la función de Green asociada con esos sistemas y a la expresión general de la solución de los mismos en términos de la función de Green y de los datos contenidos en el enunciado del problema que se trata de resolver. En el capítulo 2 se aplican los resultados generales del capítulo anterior para resolver una subclase de sistemas que se caracterizan por contener ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden con coeficientes constantes. Esto conduce al examen de todas las variantes posibles de este tipo de problemas, encontrando para cada una de ellas la función de Green y la solución en términos de esa función de Green. Como resultado adicional importante, se pone de manifiesto la existencia de puntos singulares en la expresión para la función de Green. En el capítulo 3, el estudio de esas singularidades conduce a la introducción de la denominada función de Green generalizada. Previamente, se hace una reseña breve de algunas características fundamentales del sistema homogéneo correspondiente al problema no homogéneo que se ha venido examinando desde el capítulo 1, ya que las mismas resultan indispensables para comprender el origen de las singularidades indicadas y para la definición de la función de Green generalizada. En este orden de ideas, se enuncian las propiedades más destacadas de los valores propios y las funciones propias del problema homogéneo, las cuales permiten establecer que las singularidades están directamente relacionadas con los valores propios del problema homogéneo. A continuación se realiza un análisis que lleva a la definición de la función de Green generalizada, la cual se ilustra aplicándola a la solución de problemas con valores en la frontera basados en ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. Por último, se hace una introducción somera al método de las funciones propias con el fín de relacionarlo con el método de la función de Green y, adicionalmente, obtener una mayor compresión sobre la función de Green generalizada.

Por último, es importante destacar que las ideas y procedimientos básicos del método de la función de Green, los cuales en el presente texto se explican con base en ecuaciones diferenciales ordinarias, se pueden extender a la solución de problemas con valores en la frontera que involucran ecuaciones diferenciales parciales.

CAPíTULO 1

Introducción

1. Problemas lineales no homogéneos de segundo orden con valores en la frontera

En este capítulo se explica el método de la función de Green aplicado a la solución de una clase de problemas lineales no homogéneos de segundo orden con valores en la frontera, que se formulan matemáticamente mediante una ecuación diferencial ordinaria lineal no homgénea de segundo orden con dos condiciones de frontera igualmente lineales y no homogéneas. La formulación matemática de dicha clase de problemas está dada por las ecuaciones

$$\begin{array}{ll} [p(x)\,u'(x)]' + q(x)\,u(x) + \lambda r(x)\,u(x) = f(x)\,, & a \le x \le b, \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = d_1, \qquad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = d_2, & \end{array} \tag{1.1}$$

siendo $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $f(x)$ funciones dadas y λ, a, b, α_1, α_2, β_1, β_2, d_1, d_2 parámetros reales también conocidos. Tanto la ecuación diferencial como las condiciones de frontera son lineales con respecto a la función incógnita $u(x)$. Las condiciones de frontera son separadas, esto es, cada una afecta a un sólo punto de frontera. Si por lo menos uno de los términos $f(x)$, d_1 y d_2 es diferente de cero, el problema es no homogéneo. Generalmente, $f(x)$ juega el papel de fuente externa y $u(x)$ es la respuesta del sistema a dicha fuente. Los problemas del tipo (1.1) también se conocen como problemas de Sturm-Liouville (Charles Sturm (1803-1855), Joseph Liouville (1809-1882)) [1].

A continuación se explica el método de la función de Green, aplicado a la solución del problema (1.1).

2. El método de la función de Green

El operador inverso. La ecuación diferencial de (1.1) puede anotarse de manera compacta en la forma

$$\mathbf{L}[u(x)] = f(x)\,,$$

donde el operador $\mathbf{L}$ que actúa sobre $u(x)$ se define mediante la ecuación

$$\mathbf{L}[u(x)] = [p(x)\,u'(x)]' + q(x)\,u(x) + \lambda r(x)\,u(x)\,. \tag{1.2}$$

De la ecuación $\mathbf{L}[u(x)] = f(x)$, se despeja formalmente $u(x)$

$$u(x) = \mathbf{L}^{-1}[f(x)]\,,$$

siendo $\mathbf{L}^{-1}$ el operador inverso de $\mathbf{L}$. Según la última ecuación, el operador inverso $\mathbf{L}^{-1}$actuando sobre $f(x)$, proporciona la solución $u(x)$ del problema (1.1). Nótese que $u(x)$ tiene que satisfacer simultáneamente la ecuación diferencial y las condiciones de frontera en (1.1). El método de la función de Green permite determinar el operador inverso $\mathbf{L}^{-1}$. Para este fin, se sigue el procedimiento que se desarrolla a continuación.

La función de Green. Se multiplica la ecuación diferencial en (1.1) por una función G por ahora desconocida, que se denominará función de Green. Luego se integra la ecuación resultante entre a y b

$$\int_a^b G\mathbf{L}\left[u\left(x'\right)\right]dx' = \int_a^b Gf\left(x'\right)dx'. \tag{1.3}$$

Aquí la variable muda de integración se ha designado con la letra x'. Sustituyendo (1.2) en el lado izquierdo de (1.3) y aplicando integración por partes se obtiene que

$$\int_a^b G\mathbf{L}\left[u\left(x'\right)\right]dx' = p\left(x'\right)\left[Gu'\left(x'\right) - G'u\left(x'\right)\right]\Big|_a^b + \int_a^b u\left(x'\right)\mathbf{L}\left[G\right]dx'.$$

Se reemplaza este resultado en (1.3)

$$p\left(x'\right)\left[Gu'\left(x'\right) - G'u\left(x'\right)\right]\Big|_a^b + \int_a^b u\left(x'\right)\mathbf{L}\left[G\right]dx' = \int_a^b Gf\left(x'\right)dx'. \tag{1.4}$$

Según se recomienda en el método de la función de Green, G se escoge de tal manera que la integral $\int_a^b u\left(x'\right)\mathbf{L}\left[G\right]dx'$ que aparece en la última ecuación se pueda evaluar así:

$$\int_a^b u\left(x'\right)\mathbf{L}\left[G\right]dx' = \int_a^b u\left(x'\right)\delta\left(x'-x\right)dx' = u\left(x\right), \tag{1.5}$$

donde $\delta\left(x'-x\right)$ es la función delta de Dirac. En (1.5) la letra x representa un parámetro que toma cualquier valor perteneciente al intervalo $(a,\, b)$. La ecuación (1.5) es válida si G satiface la ecuación diferencial

$$\mathbf{L}\left[G\right] = \delta\left(x'-x\right), \qquad a \le x' \le b.$$

Nótese que el lado derecho de esta ecuación depende de x' y x, lo que implica que en general G será función de x' y x, es decir, $G = G\left(x', x\right)$. Se usará en lo sucesivo la notación $G_{x'}$ y $G_{x'x'}$ para nombrar la primera y la segunda derivadas de G con respecto a x'. Usando la expresión (1.2), la anterior ecuación diferencial se puede escribir de manera extendida como

$$\left(p\left(x'\right)G_{x'}\right)_{x'} + q\left(x'\right)G + \lambda r\left(x'\right)G = \delta\left(x'-x\right), \;\; a \le x' \le b. \tag{1.6}$$

Esta es la ecuación diferencial que satisface la función de Green $G(x', x)$. Reemplazando (1.5) en (1.4) y despejando $u(x)$ se tiene

$$u(x) = -p(x')\left[G(x', x)\, u'(x') - G_{x'}(x', x)\, u(x')\right]\Big|_a^b + \int_a^b G(x', x)\, f(x')\, dx'. \tag{1.7}$$

Esta es la expresión para $u(x)$ en términos de la función de Green $G(x', x)$. Las ecuaciones (1.6) y (1.7) son dos resultados importantes que acercan la solución del problema (1.1). La determinación unívoca de la función de Green se completa formulando ciertas condiciones de frontera para la misma. Como se verá a continuación, el examen detallado del término de frontera $-p\left[Gu' - G_x u\right]\Big|_a^b$ que aparece en el lado derecho de (1.7), facilita hacer una escogencia de las condiciones de frontera sobre $G(x', x)$ que sirva efectivamente para avanzar en la solución del problema (1.1). Expandiendo dicho término de frontera, se escribe

$$\begin{aligned} &-p(x')\left[G(x', x)\, u'(x') - G_{x'}(x', x)\, u(x')\right]\Big|_a^b = \\ &-p(b)\left[G(b, x)\, u'(b) - G_{x'}(b, x)\, u(b)\right] + \\ &p(a)\left[G(a, x)\, u'(a) - G_{x'}(a, x)\, u(a)\right]. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Se aplican en (1.8) las condiciones de frontera para u dadas en (1.1). Con este fín, a continuación se examinarán separadamente cuatro casos posibles:

1. $\alpha_1 \neq 0, \;\; \beta_1 \neq 0,$
2. $\alpha_1 \neq 0, \;\; \beta_2 \neq 0,$
3. $\alpha_2 \neq 0, \;\; \beta_1 \neq 0,$
4. $\alpha_2 \neq 0, \beta_2 \neq 0.$

Se ha descartado el caso trivial cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ o $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

Caso 1*:* $\alpha_1 \neq 0, \;\; \beta_1 \neq 0$. Se despeja $u(a)$ de la primera condición de frontera en (1.1) y $u(b)$ de la segunda

$$u(a) = \frac{d_1 - \alpha_2 u'(a)}{\alpha_1}, \qquad u(b) = \frac{d_2 - \beta_2 u'(b)}{\beta_1}.$$

Reemplazando estos resultados en (1.8) y agrupando términos, se escribe

$$\begin{aligned} &-p(x')\left[G(x', x)\, u'(x') - G_{x'}(x', x)\, u(x')\right]\Big|_a^b = \\ &-\tfrac{p(b)}{\beta_1}\left[\beta_1 G(b, x) + \beta_2 G_{x'}(b, x)\right] u'(b) + \\ &\tfrac{p(a)}{\alpha_1}\left[\alpha_1 G(a, x) + \alpha_2 G_{x'}(a, x)\right] u'(a) + \\ &+\tfrac{d_2}{\beta_1} p(b)\, G_{x'}(b, x) - \tfrac{d_1}{\alpha_1} p(a)\, G_{x'}(a, x). \end{aligned} \tag{1.9}$$

En (1.9) intervienen las cantidades $u'(b)$ y $u'(a)$ de valores desconocidos. Además, en (1.9) $u'(b)$ y $u'(a)$ se encuentran multiplicadas por factores que dependen sólo de los valores de $G(x', x)$ y $G_{x'}(x', x)$ en los puntos de frontera $x' = a$ y $x' = b$. En el método de la función de Green estos factores se igualan a cero

$$\begin{aligned} \alpha_1 G(a, x) + \alpha_2 G_{x'}(a, x) = 0, \\ \beta_1 G(b, x) + \beta_2 G_{x'}(b, x) = 0, \end{aligned} \tag{1.10}$$

con lo cual se logra eliminar de la ecuación (1.9) las cantidades desconocidas $u'(b)$ y $u'(a)$. Las ecuaciones (1.10) son las condiciones de frontera que debe satisfacer la función de Green. Teniendo en cuenta (1.10), la ecuación (1.9) se simplifica así:

$$-p(x')\left[G(x',x)\,u'(x') - G_{x'}(x',x)\,u(x')\right]\Big|_a^b = \frac{d_2}{\beta_1}p(b)\,G_{x'}(b,x) - \frac{d_1}{\alpha_1}p(a)\,G_{x'}(a,x)\,.$$

Si este resultado se sustituye en (1.7), la expresión para $u(x)$ adquiere la forma

$$\begin{aligned} u(x) &= \tfrac{d_2}{\beta_1}p(b)\,G_{x'}(b,x) - \tfrac{d_1}{\alpha_1}p(a)\,G_{x'}(a,x) + \\ &+ \textstyle\int_a^b G(x',x)\,f(x')\,dx', \qquad (\alpha_1 \neq 0 \text{ y } \alpha_2 \neq 0). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Esta es la solución del problema (1.1) para el caso 1 ($\alpha_1 \neq 0$ *y* $\alpha_2 \neq 0$) en términos de la función de Green $G(x',x)$, la cual se determina resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1.6) y (1.10), para cada conjunto dado de las cantidades $p(x)$, $q(x)$, λ, $r(x)$, a, b, α_1, α_2, β_1, β_2 en (1.1).

Caso 2: $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$. Se despeja $u(a)$ y $u'(b)$ de las condiciones de frontera en (1.1)

$$u(a) = \frac{d_1 - \alpha_2 u'(a)}{\alpha_1}, \qquad u'(b) = \frac{d_2 - \beta_1 u(b)}{\beta_2}.$$

Sustituyendo estas expresiones para $u(a)$ y $u'(b)$ en (1.8) y agrupando términos, se escribe

$$\begin{aligned} &-p(x')\left[G(x',x)\,u'(x') - G_{x'}(x',x)\,u(x')\right]\Big|_a^b = \\ &\tfrac{p(b)}{\beta_2}\left[\beta_1 G(b,x) + \beta_2 G_{x'}(b,x)\right]u(b) + \\ &\tfrac{p(a)}{\alpha_1}\left[\alpha_1 G(a,x) + \alpha_2 G_{x'}(a,x)\right]u'(a) \\ &-\tfrac{d_2}{\beta_2}p(b)\,G(b,x) - \tfrac{d_1}{\alpha_1}p(a)\,G_{x'}(a,x). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Con el fín de eliminar las cantidades desconocidas $u(b)$ y $u'(a)$ que intervienen en (1.12), es suficiente imponer sobre $G(x',x)$ las mismas condiciones de frontera (1.10) que en el caso anterior. Teniendo en cuenta (1.10), la ecuación (1.12) se reduce a

$$\begin{aligned} &-p(x')\left[G(x',x)\,u'(x') - G_{x'}(x',x)\,u(x')\right]\Big|_a^b = \\ &-\tfrac{d_2}{\beta_2}p(b)\,G(b,x) - \tfrac{d_1}{\alpha_1}p(a)\,G_{x'}(a,x). \end{aligned}$$

Reemplazando este resultado en (1.7), $u(x)$ se expresa como

$$\begin{aligned} u(x) &= -\tfrac{d_2}{\beta_2}p(b)\,G(b,x) - \tfrac{d_1}{\alpha_1}p(a)\,G_{x'}(a,x) + \\ &+ \textstyle\int_a^b G(x',x)\,f(x')\,dx', \qquad (\alpha_1 \neq 0 \text{ y } \beta_1 \neq 0). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Esta es la solución del problema (1.1) en términos de la función de Green $G(x',x)$, la cual satisface el sistema formado por las ecuaciones (1.6) y (1.10).

Caso 3: $\alpha_2 \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$. De las condiciones de frontera en (1.1), se tiene

$$u'(a) = \frac{d_1 - \alpha_1 u(a)}{\alpha_2}, \qquad u(b) = \frac{d_2 - \beta_2 u'(b)}{\beta_1}.$$

Estas expresiones se reemplazan en (1.8) y se agrupan términos

$$\begin{aligned}
&-p\left(x'\right)\left[G\left(x',x\right)u'\left(x'\right)-G_{\acute{x}}\left(x',x\right)u\left(x'\right)\right]\Big|_a^b = \\
&-\tfrac{p(b)}{\beta_1}\left[\beta_1 G\left(b,x\right)+\beta_2 G_{\acute{x}}\left(b,x\right)\right]u'\left(b\right)- \\
&\tfrac{p(a)}{\alpha_2}\left[\alpha_1 G\left(a,x\right)+\alpha_2 G_{\acute{x}}\left(a,x\right)\right]u\left(a\right)+ \\
&\tfrac{d_2}{\beta_1}p\left(b\right)G_{\acute{x}}\left(b,x\right)+\tfrac{d_1}{\alpha_2}p\left(a\right)G\left(a,x\right).
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Si se exige que $G\left(\acute{x},x\right)$ cumpla las condiciones de frontera (1.10), se obtiene que en la ecuación (1.14) se eliminan los valores desconocidos $u'\left(b\right)$ y $u\left(a\right)$

$$-p\left(x'\right)\left[G\left(x',x\right)u'\left(x'\right)-G_{\acute{x}}\left(x',x\right)u\left(x'\right)\right]\Big|_a^b=\frac{d_2}{\beta_1}p\left(b\right)G_{\acute{x}}\left(b,x\right)+\frac{d_1}{\alpha_2}p\left(a\right)G\left(a,x\right).$$

Sustituyendo este resultado en (1.7), se obtiene la expresión para $u\left(x\right)$

$$\begin{aligned}
&u\left(x\right)=\tfrac{d_2}{\beta_1}p\left(b\right)G_{\acute{x}}\left(b,x\right)+\tfrac{d_1}{\alpha_2}p\left(a\right)G\left(a,x\right)+ \\
&+\int_a^b G\left(\acute{x},x\right)f\left(\acute{x}\right)d\acute{x},\quad\left(\alpha_2\neq 0 \text{ y } \beta_1\neq 0\right).
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Una vez se resuelva el sistema (1.6) - (1.10) para la función de Green $G\left(\acute{x},x\right)$, la función $u\left(x\right)$ calculada con base en (1.15) será la solución del problema (1.1) para el caso cuando $\alpha_2\neq 0\,,\;\;\beta_1\neq 0$.

Caso 4: $\alpha_2\neq 0,\;\;\beta_2\neq 0$. Se despeja $u'\left(a\right)$ y $\acute{u}(b)$ de las condiciones de frontera en (1.1)

$$u'\left(a\right)=\frac{d_1-\alpha_1 u\left(a\right)}{\alpha_2},\qquad u'\left(b\right)=\frac{d_2-\beta_1 u\left(b\right)}{\beta_2},$$

y se reemplazan en (1.8); agrupando términos se tiene

$$\begin{aligned}
&-p\left(x'\right)\left[G\left(x',x\right)u'\left(x'\right)-G_{\acute{x}}\left(x',x\right)u\left(x'\right)\right]\Big|_a^b = \\
&\tfrac{p(b)}{\beta_2}\left[\beta_1 G\left(b,x\right)+\beta_2 G_{\acute{x}}\left(b,x\right)\right]u\left(b\right) \\
&-\tfrac{p(a)}{\alpha_2}\left[\alpha_1 G\left(a,x\right)+\alpha_2 G_{\acute{x}}\left(a,x\right)\right]u\left(a\right) \\
&-\tfrac{d_2}{\beta_2}p\left(b\right)G\left(b,x\right)+\tfrac{d_1}{\alpha_2}p\left(a\right)G\left(a,x\right).
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Como en los casos anteriores, la escogencia de las condiciones de frontera (1.10) sobre $G\left(\acute{x},x\right)$, conlleva a la eliminación de las cantidades desconocidos $u\left(a\right)$ y $u\left(b\right)$ en la ecuación (1.16), la cual se reduce a

$$-p\left(x'\right)\left[G\left(x',x\right)u'\left(x'\right)-G_{\acute{x}}\left(x',x\right)u\left(x'\right)\right]\Big|_a^b=-\frac{d_2}{\beta_2}p\left(b\right)G\left(b,x\right)+\frac{d_1}{\alpha_2}p\left(a\right)G\left(a,x\right).$$

Sustituyendo estos términos de frontera en (1.7), la solución $u\left(x\right)$ del problema (1.1) se expresa como

$$\begin{aligned}
&u\left(x\right)=-\tfrac{d_2}{\beta_2}p\left(b\right)G\left(b,x\right)+\tfrac{d_1}{\alpha_2}p\left(a\right)G\left(a,x\right)+ \\
&+\int_a^b G\left(\acute{x},x\right)f\left(\acute{x}\right)d\acute{x},\quad\left(\alpha_2\neq 0 \text{ y } \beta_2\neq 0\right).
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Para calcular el lado derecho de esta ecuación, previamente se tiene que resolver el sistema (1.6) - (1.10) para la función de Green $G\left(\acute{x},x\right)$.

Con el examen de los cuatro casos anteriores, se completa la exposición de las ideas básicas del método de la función de Green aplicado a la solución del problema (1.1). A continuación se resumen los resultados obtenidos.

- La función de Green $G(\acute{x}, x)$ del sistema (1.1) se define como la solución del problema de valores de frontera formulado mediante las ecuaciones (1.6) y (1.10), la cuales se reunen así:

$$\begin{gathered}(p(\acute{x})\, G_{\acute{x}})_{\acute{x}} + q(\acute{x})\, G + \lambda r(\acute{x})\, G = \delta(\acute{x} - x), \qquad a \le \acute{x} \le b, \\ \alpha_1 G(a,x) + \alpha_2 G_{\acute{x}}(a,x) = 0, \qquad \beta_1 G(b,x) + \beta_2 G_{\acute{x}}(b,x) = 0.\end{gathered} \tag{1.18}$$

- La solución $u(x)$ del problema (1.1) en términos de la función de Green $G(\acute{x}, x)$ estará dada por una de las expresiones (1.11), (1.13), (1.15) o (1.17), la cuales se resumen a continuación:

$$u(x) = -p\,[Gu' - G_{\acute{x}} u]\big|_a^b + \int_a^b G(\acute{x}, x)\, f(\acute{x})\, d\acute{x}. \tag{1.19}$$

  En esta fórmula el término de frontera $-p\,[Gu' - G_{\acute{x}} u]\big|_a^b$ se evalúa teniendo en cuenta los siguientes casos:

  Caso 1

$$\begin{gathered}-p\,[Gu' - G_{\acute{x}} u]\big|_a^b = \\ \tfrac{d_2}{\beta_1} p(b)\, G_{\acute{x}}(b,x) - \tfrac{d_1}{\alpha_1} p(a)\, G_{\acute{x}}(a,x) \;\text{ si } \alpha_1 \neq 0 \text{ y } \beta_1 \neq 0,\end{gathered} \tag{1.20}$$

  Caso 2

$$\begin{gathered}-p\,[Gu' - G_{\acute{x}} u]\big|_a^b = \\ -\tfrac{d_2}{\beta_2} p(b)\, G(b,x) - \tfrac{d_1}{\alpha_1} p(a)\, G_{\acute{x}}(a,x) \;\text{ si } \alpha_1 \neq 0 \text{ y } \beta_2 \neq 0,\end{gathered} \tag{1.21}$$

  Caso 3

$$\begin{gathered}-p\,[Gu' - G_{\acute{x}} u]\big|_a^b = \\ \tfrac{d_2}{\beta_1} p(b)\, G_{\acute{x}}(b,x) + \tfrac{d_1}{\alpha_2} p(a)\, G(a,x) \;\text{ si } \alpha_2 \neq 0 \text{ y } \beta_1 \neq 0,\end{gathered} \tag{1.22}$$

  Caso 4

$$\begin{gathered}-p\,[Gu' - G_{\acute{x}} u]\big|_a^b = \\ -\tfrac{d_2}{\beta_2} p(b)\, G(b,x) + \tfrac{d_1}{\alpha_2} p(a)\, G(a,x) \;\text{ si } \alpha_2 \neq 0 \text{ y } \beta_2 \neq 0.\end{gathered} \tag{1.23}$$

  Los resultados (1.18) - (1.23) son válidos para cualquier problema concreto de la forma (1.1). Con el siguiente ejemplo se ilustra la aplicación de estos resultados.

EJEMPLO 1. Aplicando el método de la función de Green, resolver el problema sencillo de valores de frontera

$$\begin{gathered}u'' = x, \qquad 0 \le x \le 1, \\ u(0) = d_1, \quad u(1) = d_2.\end{gathered} \tag{1.24}$$

La ecuación diferencial en (1.24) se conoce como ecuación de Euler.

SOLUCIÓN: Comparando (1.24) con (1.1), se establecen las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} &p(x) = 1,\ q(x) = 0,\ \lambda = 0,\ f(x) = x, \\ &a = 0,\ b = 1,\ \alpha_1 = \beta_1 = 1,\ \alpha_2 = \beta_2 = 0. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Según (1.25), el sistema (1.24) pertenece al caso 1: $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$. Por tanto, la solución $u(x)$ se expresa mediante (1.19), aplicando el caso 1 dado por (1.20). Teniendo en cuenta (1.25), de (1.19) y (120) se tiene

$$u(x) = d_2 G_{x'}(1, x) - d_1 G_{x'}(0, x) + \int_0^1 G(x', x)\, x' dx', \tag{1.26}$$

donde la función de Green $G(x', x)$ se halla resolviendo el sistema (1.18), el cual considerando (1.25), toma la forma

$$\begin{aligned} &G_{x'x'} = \delta(x' - x), \\ &G(0, x) = G(1, x) = 0. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Se integra la ecuación diferencial de (1.27), tomando x fijo

$$\begin{aligned} &G_{x'} = H(x' - x) + A, \\ &G = (x' - x)\, H(x' - x) + Ax' + B, \end{aligned}$$

siendo $H(x' - x)$ la función de Heaviside definida como

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}.$$

Exigiendo el cumplimiento de las condiciones de frontera dadas en (1.27), se tiene

$$\begin{aligned} &G(0, x) = 0 = 0 + 0 + B, \\ &G(1, x) = 0 = (1 - x) + A + B. \end{aligned}$$

De donde $B = 0$, $A = x - 1$ y

$$G(x', x) = (x' - x)\, H(x' - x) + (x - 1)\, x'.$$

Esta expresión puede reescribirse en la forma

$$G(x', x) = \begin{cases} (x - 1)\, x', & 0 \le x' \le x \\ (x' - 1)\, x, & x \le x' \le 1 \end{cases}. \tag{1.28}$$

Interpretación física. La función $u(x)$ del problema (1.24) puede interpretarse físicamente como la deflexión estática de una cuerda homogénea con los extremos fijos cuando se le aplica una distribución de fuerzas $f(x) = x$. En este marco, la función de Green gobernada por (1.27) adquiere un significado físico claro. Concretamente, $G(x', x)$ representa la deflexión, como una función de x', debida no a la distribución $f(x) = x$ sino a una carga puntual $\delta(x' - x)$ actuando en el punto $x' = x$. En la Fig. 1.1 se presenta la gráfica de la funcion de Green (1.28) como una función de x' para $x = 0.6$. El resultado concuerda con lo esperado en este caso.

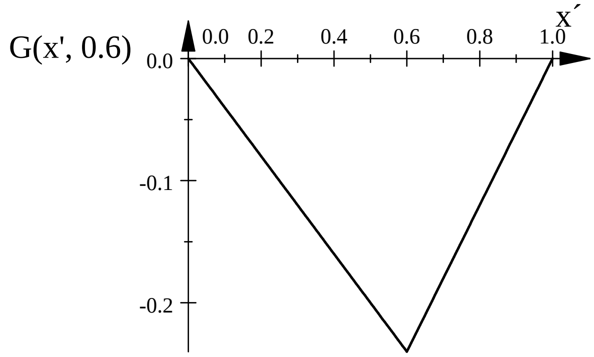

Figura 1.1. Funcion de Green del ejemplo 1.

Según (1.28), G es simétrica: $G(x', x) = G(x, x')$. Esto es, la deflexión en x' causada por una carga unidad en x es igual a la deflexión en x debida a una carga puntual en x'. Este resultado se ilustra gráficamente en la Fig. 1.2.

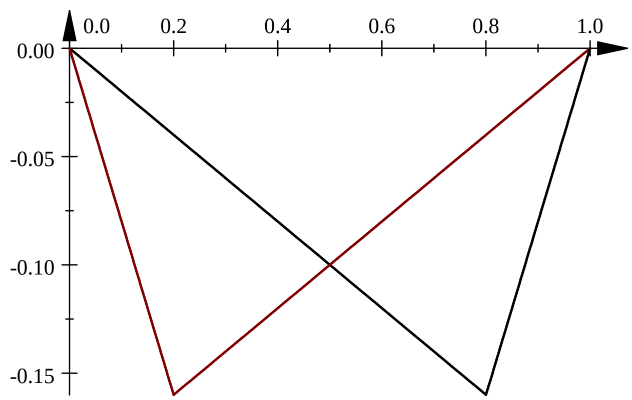

Figura 1.2. La funcion de Green es simétrica.

Ahora se puede interpretar (1.26). Teniendo en cuenta la simetría de la función de Green, se tiene que $G(x', x)$ es la deflexión en x producida por una carga unidad en x'. Entonces es claro que $G(x', x)x'dx'$ representa la deflexión en x debida a una carga $x'dx'$ en x', y por tanto, la integral que aparece en la ecuación (1.26) expresa la superposición en x de todas las deflexiones individuales. Por último, aplicando la función de Green (1.28) en la expresión (1.26), se tiene

$$u(x) = (d_2 - d_1)\,x + d_1 + (x - 1)\int_0^x x'^2 dx' + x\int_0^x (x' - 1)\,x'dx',$$

de donde la solución $u(x)$ del problema (1.24) se escribe así:

$$u(x) = \frac{x^3}{6} + \left(d_2 - d_1 - \frac{1}{6}\right)x + d_1. \tag{1.29}$$

3. Conclusiones

De los resultados obtenidos aplicando el método de la función de Green a la solución del problema (1.1) conviene destacar algunas conclusiones y observaciones.

- En los cuatro casos examinados, la función de Green $G\left(x', x\right)$ del problema (1.1) se define como la solución del mismo sistema (1.18).
- Comparando los sistemas (1.1) y (1.18), se destacan dos observaciones. Primero, tanto $u(x)$ como $G(x', x)$ satisfacen la misma ecuación diferencial pero con fuentes diferentes. La función de Green está asociada a una fuente puntual $\delta\left(x' - x\right)$, mientras que $u(x)$ responde a la fuente $f(x)$. Segundo, las condiciones de frontera para $G(x', x)$ dadas en (1.18) son homogéneas, mientras que las condiciones de frontera para $u\left(x\right)$ en el problema original (1.1) en general pueden ser inhomogéneas. Lo que realmente importa es que la función de Green $G(x', x)$ gobernada por el sistema (1.18) garantice que la función $u\left(x\right)$ dada por las fórmulas (1.19) - (1.23) solucione de modo simultáneo tanto la ecuación diferencial como las condiciones de frontera en (1.1).
- Es relevante señalar que la función de Green siempre es independiente de la fuente $f(x)$ que interviene en la formulación del problema original (1.1), por tanto, la misma función de Green permite calcular $u(x)$ para diferentes $f(x)$.
- La expresión (1.19) para $u(x)$ consta de unos términos de frontera más la integral $\int_a^b G\left(x', x\right) f\left(x'\right) dx'$, la cual expresa el principio de superposición que es válido gracias a la propiedad de linealidad del sistema (1.1) con respecto a $u(x)$.
- Los resultados obtenidos se pueden aplicar a cualquier sistema concreto que encaje en la forma general dada por (1.1), permitiendo automatizar en cierto grado la solución de los problemas particulares.

En el capítulo 2 se aplicará el método de la función de Green, en particular los resultados del presente capítulo, a la solución completa del problema lineal no homogéneo de segundo grado (1.1) para el caso cuando la ecuación diferencial en (1.1) tiene coeficientes constantes.

CAPíTULO 2

Problemas con coeficientes constantes

En este capítulo se examinará la clase de problemas no homogéneos de la forma

$$\text{(2.1)}\qquad \begin{array}{l} \text{Ecuación diferencial:} \\ (\exp(cx)\,u')' + \lambda \exp(cx)\,u = \exp(cx)\,F(x), \qquad a \le x \le b, \\ \text{Condiciones de frontera:} \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = d_1, \qquad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = d_2, \end{array}$$

siendo $F(x)$ una función dada, al igual que las constantes c, λ, a, $\int b$, α_1, α_2, β_1, β_2, d_1, d_2. La ecuación diferencial en (2.1) se puede escribir de manera más sencilla, para lo cual se expande el primer término y se simplica por $\exp(cx)$

$$u''(x) + cu'(x) + \lambda u(x) = F(x).$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes.

1. El método de la función de Green

Se observa que el problema (2.1) es un caso particular del problema (1.1). Para resolver el sistema (2.1) mediante el método de la función de Green, a continuación se aplican y desarrollan algunas de las ideas y resultados del capítulo 1. Comparando el sistema (2.1) con el sistema (1.1), se establecen las equivalencias

$$\text{(2.2)}\qquad p(x) = \exp(cx),\ q(x) = 0,\ r(x) = \exp(cx),\ f(x) = \exp(cx)\,F(x).$$

Primero se determinará la función de Green para el problema (2.1), la cual debe satisfacer el sistema (1.18). Teniendo en cuenta (2.2), (1.18) adquiere la forma

$$\text{(2.3)}\qquad \begin{array}{l} (\exp(cx')\,G_{x'})_{x'} + \lambda \exp(cx')\,G = \delta(x' - x), \qquad a \le x' \le b, \\ \alpha_1 G(a,x) + \alpha_2 G_{x'}(a,x) = 0, \qquad \beta_1 G(b,x) + \beta_2 G_{x'}(b,x) = 0. \end{array}$$

Una manera de resolver este problema es la siguiente. Se divide el intervalo $a \le x' \le b$ en dos partes: $a \le x' < x$ y $x < x' \le b$. Nótese que se ha excluido el punto $x' = x$ en el cual $\delta(x' - x)\,|_{x'=x} = \infty$. En cada subintervalo se tiene $\delta(x' - x)\,|_{x'=x} = 0$, entonces la ecuación diferencial en (2.3) se reduce a

$$(\exp(cx')\,G_{x'})_{x'} + \lambda \exp(cx')\,G = 0 \qquad \text{para } x' \ne x,$$

o bien,

$$\text{(2.4)}\qquad G_{x'x'} + cG_{x'} + \lambda G = 0 \qquad \text{para } x' \ne x,$$

donde el factor común $\exp(cx') \neq 0$ se ha simplificado. La solución de (2.4) se escribe en la forma

$$G = \begin{cases} Ag_1(x') + Bg_2(x'), & a \leq x' < x \\ Cg_1(x') + Dg_2(x'), & x < x' \leq b \end{cases}, \tag{2.5}$$

siendo $g_1(x')$, $g(x')$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (2.4) y A, B, C, D constantes por ahora desconocidas. Además, $g_1(x')$ y $g_2(x')$ son funciones continuas y dos veces derivables. Con base en (2.5), se evaluan las cantidades $G(a,x)$, $G_{x'}(a,x)$, $G(b,x)$ y $G_{x'}(b,x)$

$$\begin{aligned} G(a,x) &= Ag_1(a) + Bg_2(a), \qquad & G(b,x) &= Cg_1(b) + Dg_2(b), \\ G_{x'}(a,x) &= Ag_1'(a) + Bg_2'(a), \qquad & G_{x'}(b,x) &= Cg_1'(b) + Dg_2'(b), \end{aligned}$$

y se reemplazan en las condiciones de frontera en (2.3). Reagrupando términos se tiene

$$\begin{aligned} &[\alpha_1 g_1(a) + \alpha_2 g_1'(a)]\,A + [\alpha_1 g_2(a) + \alpha_2 g_2'(a)]\,B = 0, \\ &[\beta_1 g_1(b) + \beta_2 g_1'(b)]\,C + [\beta_1 g_2(b) + \beta_2 g_2'(b)]\,D = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Estas dos ecuaciones son importantes pero son insuficientes para determinar las constantes A, B, C, D. El siguiente paso consiste en coser las dos partes de G dadas en (2.5) en el punto $x' = x$ con el fin de obtener la función de Green para todo el intervalo $a \leq x' \leq b$. Lo anterior se realiza de la siguiente manera. Se integran ambos lados de la ecuación diferencial en (2.3) sobre un intervalo alrededor del punto $x' = x$, concretamente, sobre el intervalo $x - \varepsilon \leq x' \leq x + \varepsilon$, donde ε es un número positivo,

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} (\exp(cx')\, G_{x'})_{x'}\, dx' + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \lambda \exp(cx')\, G dx' = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \delta(x' - x)\, dx',$$

de donde,

$$(\exp(cx')\, G_{x'})\Big|_{x'=x-\varepsilon}^{x'=x+\varepsilon} + \lambda \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \exp(cx')\, G dx' = 1.$$

Tomando en la ecuación anterior el límite cuando $\varepsilon \to 0$ y teniendo en cuenta la continuidad de $\exp(cx')$ en el intervalo $a \leq x' \leq b$, se tiene

$$\exp(cx)\,(G_{x'}(x+0,x) - G_{x'}(x-0,x)) + \lambda \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \exp(cx')\, G dx' = 1,$$

donde con la notación $G_{x'}(x+0,x)$ se designa el límite de $G_{x'}(x',x)$ cuando $x' \to x$ por la derecha y con $G_{x'}(x-0,x)$ el mismo límite pero por la izquierda. Si se exige que $G(x',x)$ sea continua en $x' = x$, entonces el límite que aparece en la anterior ecuación se hace igual a cero y dicha ecuación se escribe así:

$$G_{x'}(x+0,x) - G_{x'}(x-0,x) = \exp(-cx). \tag{2.7}$$

La ecuación (2.7) representa una condición que debe satisfacer la función de Green $G(x',x)$, la cual consiste en que su primera derivada tiene una discontinuidad de salto igual a $\exp(-cx)$ en el punto $x' = x$. Esta discontinuidad es producida por la función delta de Dirac $\delta\left(x' - x\right)$ que aparece en el lado izquierdo de la ecuación diferencial en (2.3) y por la condición de continuidad en dicho punto impuesta a $G\left(x', x\right)$. Teniendo en cuenta (2.5), la condición (2.7) adquiere la forma

$$g_1'\left(x\right) A + g_2'\left(x\right) B - g_1'\left(x\right) C - g_2'\left(x\right) D = -\exp\left(-cx\right). \tag{2.8}$$

Esta es otra ecuación que sirve para ayudar a determinar las constantes A, B, C, D. De otra parte, la condición de continuidad de $G\left(x', x\right)$ en $x' = x$ se expresa así

$$G\left(x+0, x\right) - G\left(x-0, x\right) = 0.$$

Combinando esta ecuación con (2.5) resulta

$$g_1\left(x\right) A + g_2\left(x\right) B - g_1\left(x\right) C - g_2\left(x\right) D = 0.$$

Con esta ecuación más las ecuaciones (2.6) y (2.8) se completa el siguiente sistema de ecuaciones para hallar las constantes A, B, C, D

$$\begin{aligned}
&\left[\alpha_1 g_1\left(a\right) + \alpha_2 g_1'\left(a\right)\right] A + \left[\alpha_1 g_2\left(a\right) + \alpha_2 g_2'\left(a\right)\right] B = 0,\\
&\left[\beta_1 g_1\left(b\right) + \beta_2 g_1'\left(b\right)\right] C + \left[\beta_1 g_2\left(b\right) + \beta_2 g_2'\left(b\right)\right] D = 0,\\
&g_1\left(x\right) A + g_2\left(x\right) B - g_1\left(x\right) C - g_2\left(x\right) D = 0,\\
&g_1'\left(x\right) A + g_2'\left(x\right) B - g_1'\left(x\right) C - g_2'\left(x\right) D = -\exp\left(-cx\right).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Ya que en (2.9) algunos de los coeficientes de A, B, C, y D dependen de x, entonces, al resolver el sistema (2.9) con respecto a A, B, C, y D, en general se obtendrán funciones de x: $A = A\left(x\right)$, $B = B\left(x\right)$, $C = C\left(x\right)$ y $D = D\left(x\right)$. La expresión (2.5) se escribe de manera más completa asi:

$$G\left(x', x\right) = \begin{cases} A\left(x\right) g_1\left(x'\right) + B\left(x\right) g_2\left(x'\right), \; a \le x' \le x \\ C\left(x\right) g_1\left(x'\right) + D\left(x\right) g_2\left(x'\right), \; x \le x' \le b \end{cases}. \tag{2.10}$$

A diferencia de (2.5), en (2.10) ya está incluido el punto $x' = x$. La función de Green (2.10) sirve para calcular la solución $u\left(x\right)$ del problema (2.1), utilizando la expresión (1.19) y una de las fórmulas (1.20) - (1.23), según el caso al que pertenezca cada problema particular. Teniendo en cuenta (2.2), las ecuaciones (1.19) - (1.23) adquieren la forma

$$\begin{aligned}
u\left(x\right) = &-\exp\left(cx'\right)\left[G\left(x', x\right) u'\left(x'\right) - G_{x'}\left(x', x\right) u\left(x'\right)\right]_{x'=a}^{x'=b} + \\
&+ \int_a^b G\left(x', x\right) \exp\left(cx'\right) F\left(x'\right) dx',
\end{aligned} \tag{2.11}$$

con

$$\begin{aligned}
&-\exp\left(cx'\right)\left[G\left(x', x\right) u'\left(x'\right) - G_{x'}\left(x', x\right) u\left(x'\right)\right]_{x'=a}^{x'=b} = \\
&\tfrac{d_2}{\beta_1}\exp\left(cb\right) G_{x'}\left(b, x\right) - \tfrac{d_1}{\alpha_1}\exp\left(ca\right) G_{x'}\left(a, x\right) \qquad \text{si } \alpha_1 \ne 0 \text{ y } \beta_1 \ne 0 \text{ (caso 1)},\\
&-\tfrac{d_2}{\beta_2}\exp\left(cb\right) G\left(b, x\right) - \tfrac{d_1}{\alpha_1}\exp\left(ca\right) G_{x'}\left(a, x\right) \qquad \text{si } \alpha_1 \ne 0 \text{ y } \beta_2 \ne 0 \text{ (caso 2)},\\
&\tfrac{d_2}{\beta_1}\exp\left(cb\right) G_{x'}\left(b, x\right) + \tfrac{d_1}{\alpha_2}\exp\left(ca\right) G\left(a, x\right) \qquad \text{si } \alpha_2 \ne 0 \text{ y } \beta_1 \ne 0 \text{ (caso 3)},\\
&-\tfrac{d_2}{\beta_2}\exp\left(cb\right) G\left(b, x\right) + \tfrac{d_1}{\alpha_2}\exp\left(ca\right) G\left(a, x\right) \qquad \text{si } \alpha_2 \ne 0 \text{ y } \beta_2 \ne 0 \text{ (caso 4)}.
\end{aligned}$$

En la expresión (2.10) para la función de Green las funciones $g_1\left(x'\right)$, $g_2\left(x'\right)$, como se indicó arriba, son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes (2.4). La forma de estas funciones depende de los valores de c y λ en (2.4). A continuación se determinan $g_1(x\acute{})$, $g_2(x\acute{})$ para los tres casos posibles:

1. $c^2 - 4\lambda > 0$,
2. $c^2 - 4\lambda = 0$,
3. $c^2 - 4\lambda < 0$.

Caso 1: $c^2 - 4\lambda > 0$. En este caso, como soluciones linealmente independientes de la ecuación (2.4), se pueden tomar las funciones [2]

$$g_1(x\acute{}) = \exp\left(-\frac{c}{2}x\acute{}\right)\cosh(kx\acute{}), \quad g_2(x\acute{}) = \exp\left(-\frac{c}{2}x\acute{}\right)\sinh(kx\acute{}), \tag{2.12}$$

siendo $k = \frac{\sqrt{c^2-4\lambda}}{2} > 0$. Teniendo en cuenta (2.12), la expresión para $G(x\acute{}, x)$ dada por (2.10) se escribe así:

$$G(x\acute{}, x) = \exp\left(-\tfrac{c}{2}x\acute{}\right) \times \begin{cases} [A(x)\cosh(kx\acute{}) + B(x)\sinh(kx\acute{})], & a \le x\acute{} \le x \\ [C(x)\cosh(kx\acute{}) + D(x)\sinh(kx\acute{})], & x \le x\acute{} \le b \end{cases} \tag{2.13}$$

y la derivada de $G(x\acute{}, x)$ con respecto a $x\acute{}$ es

$$G_{x\acute{}}(x\acute{}, x) = \exp\left(-\tfrac{c}{2}x\acute{}\right) \times \begin{cases} \left(k\sinh(kx\acute{}) - \tfrac{c}{2}\cosh(kx\acute{})\right)A + (k\cosh(kx\acute{}) - \tfrac{c}{2}\sinh(kx\acute{}))B, & a \le x\acute{} \le x \\ (k\sinh(kx\acute{}) - \tfrac{c}{2}\cosh(kx\acute{}))C + (k\cosh(kx\acute{}) - \tfrac{c}{2}\sinh(kx\acute{}))D, & x \le x\acute{} \le b \end{cases}. \tag{2.14}$$

Con el fín de hallar A, B, C y D se procede de la siguiente manera. Las funciones dadas en (2.12) y sus primeras derivadas se evaluan en $x' = a$, $x' = b$ y $x' = x$ y luego se sustituyen en el sistema de ecuaciones (2.9). Después de realizar algunas simplificaciones y reagrupar términos, (2.9) adquiere la forma

$$\begin{aligned} &h_1A + h_2B = 0, \\ &h_3C + h_4D = 0, \\ &\cosh(kx)A + \sinh(kx)B - \cosh(kx)C - \sinh(kx)D = 0, \\ &\gamma_1A + \gamma_2B - \gamma_1C - \gamma_2D = -\exp\left(-\tfrac{c}{2}x\right), \end{aligned} \tag{2.15}$$

donde

$$\begin{aligned} h_1 &= \left(\alpha_1 - \tfrac{1}{2}\alpha_2c\right)\cosh(ka) + \alpha_2k\sinh(ka), \\ h_2 &= \left(\alpha_1 - \tfrac{1}{2}\alpha_2c\right)\sinh(ka) + \alpha_2k\cosh(ka), \\ h_3 &= \left(\beta_1 - \tfrac{1}{2}\beta_2c\right)\cosh(kb) + \beta_2k\sinh(kb), \\ h_4 &= \left(\beta_1 - \tfrac{1}{2}\beta_2c\right)\sinh(kb) + \beta_2k\cosh(kb), \\ \gamma_1 &= k\sinh(kx) - \tfrac{c}{2}\cosh(kx), \\ \gamma_2 &= k\cosh(kx) - \tfrac{c}{2}\sinh(kx). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Se resuelve el sistema (2.15) con respecto a A, B, C, D. Con este fin, se multiplica la tercera ecuación en (2.15) por $-\gamma_1$ y la cuarta por $\cosh(kx)$, luego se suman y se despeja B

$$B = D - \frac{\cosh(kx)\exp\left(-\frac{c}{2}x\right)}{\gamma_2\cosh(kx) - \gamma_1\sinh(kx)}.$$

Teniendo en cuenta las fórmulas para γ_1 y γ_2 dadas en (2.16), la anterior expresión se transforma así:

$$B = D - \frac{1}{k}\cosh(kx)\exp\left(-\frac{c}{2}x\right). \tag{2.17}$$

Ahora se multiplica la tercera ecuación en (2.15) por $-\gamma_2$ y la cuarta por $\sinh(kx)$, se suman y se despeja A

$$A = C + \frac{1}{k}\sinh(kx)\exp\left(-\frac{c}{2}x\right). \tag{2.18}$$

Sustituyendo (2.17) y (2.18) en la primera ecuación del sistema (2.15) se tiene

$$h_1C + h_2D = \frac{1}{k}\left[h_2\cosh(kx) - h_1\sinh(kx)\right]\exp\left(-\frac{c}{2}x\right). \tag{2.19}$$

A continuación, de la segunda ecuación en (2.15) se despeja C, se reemplaza en (2.19) y se despeja D

$$D = \frac{h_3}{(h_1h_4 - h_2h_3)k}\left[h_1\sinh(kx) - h_2\cosh(kx)\right]\exp\left(-\frac{c}{2}x\right), \tag{2.20}$$

donde h_1, h_2, h_3 y h_4 se toman de (2.16). La ecuación (2.20) expresa a D como una función de x y de los parámetros que definen el problema (2.1). Ahora se sustituye (2.20) en la segunda ecuación en (2.15) y se despeja C

$$C = -\frac{h_4}{(h_1h_4 - h_2h_3)k}\left[h_1\sinh(kx) - h_2\cosh(kx)\right]\exp\left(-\frac{c}{2}x\right). \tag{2.21}$$

Por último, se reemplaza (2.20) en (2.17) y (2.21) en (2.18), lo que da, respectivamente, los valores de B y

$$B = \frac{h_1}{(h_1h_4 - h_2h_3)k}\left[h_3\sinh(kx) - h_4\cosh(kx)\right]\exp\left(-\frac{c}{2}x\right), \tag{2.22}$$

$$A = -\frac{h_2}{(h_1h_4 - h_2h_3)k}\left[h_3\sinh(kx) - h_4\cosh(kx)\right]\exp\left(-\frac{c}{2}x\right). \tag{2.23}$$

De esta manera se completa la determinación de A, B, C, D. Los valores dados en (2.20) a (2.23) se sustituyen en la expresión (2.0) para la función de Green:

$$\begin{array}{l} \text{Caso } c^2 - 4\lambda > 0\text{: } G(x', x) = \dfrac{\exp\left[-\frac{c}{2}(x + x')\right]}{(h_1h_4 - h_2h_3)k}\times \\ \begin{cases} \left[h_3\sinh(kx) - h_4\cosh(kx)\right]\left[h_1\sinh(kx') - h_2\cosh(kx')\right], & a \le x' \le x \\ \left[h_1\sinh(kx) - h_2\cosh(kx)\right]\left[h_3\sinh(kx') - h_4\cosh(kx')\right], & x \le x' \le b \end{cases} \end{array}, \tag{2.24}$$

con h_1, h_2, h_3 y h_4 definidos en (2.16) y k en (2.12). Usando funciones exponenciales, la expresión anterior adquiere la forma

$$G(\acute{x},x)=\begin{cases} A\exp(r_1\acute{x})+B\exp(r_2\acute{x}) & \text{para } a\le\acute{x}\le x \\ C\exp(r_1\acute{x})+D\exp(r_2\acute{x}) & \text{para } x\le\acute{x}\le b \end{cases}, \tag{2.25}$$

siendo

$$\begin{aligned}
&A=-\tfrac{(\alpha_1+\alpha_2 r_2)\exp(-ka)}{2kh}K_2, \quad B=\tfrac{(\alpha_1+\alpha_2 r_1)\exp(ka)}{2kh}K_2,\\
&C=-\tfrac{(\beta_1+\beta_2 r_2)\exp(-kb)}{2kh}K_1, \quad D=\tfrac{(\beta_1+\beta_2 r_1)\exp(kb)}{2kh}K_1,\\
&K_1=(\alpha_1+\alpha_2 r_2)\exp(-ka)\exp(r_1 x)-(\alpha_1+\alpha_2 r_1)\exp(ka)\exp(r_2 x),\\
&K_2=\left(\beta_1+\beta_2 r_2\right)\exp(-kb)\exp(r_1 x)-(\beta_1+\beta_2 r_1)\exp(kb)\exp(r_2 x),\\
&h=(\alpha_1+\alpha_2 r_1)(\beta_1+\beta_2 r_2)\exp(-k(b-a))-\\
&\qquad(\alpha_1+\alpha_2 r_2)(\beta_1+\beta_2 r_1)\exp(k(b-a)),\\
&r_1=-\tfrac{c}{2}+k, \quad r_2=-\tfrac{c}{2}-k.
\end{aligned}$$

Condición de existencia de la función de Green. Se observa que la función (2.24) no está definida cuando el denominador $(h_1h_4-h_2h_3)\,k$ es igual a cero. Ya que $k=\frac{\sqrt{c^2-4\lambda}}{2}>0$, la condición de existencia de la función de Green (2.24) se escribe así:

$$h_1h_4-h_2h_3\neq 0. \tag{2.26}$$

Teniendo en cuenta (2.16), la anterior ecuación adquiere la forma

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\alpha_1-\tfrac{1}{2}\alpha_2 c\right)\cosh(ka)+\alpha_2 k\sinh(ka)\right]\times\\
&\left[\left(\beta_1-\tfrac{1}{2}\beta_2 c\right)\sinh(kb)+\beta_2 k\cosh(kb)\right]-\\
&\left[\left(\alpha_1-\tfrac{1}{2}\alpha_2 c\right)\sinh(ka)+\alpha_2 k\cosh(ka)\right]\times\\
&\left[\left(\beta_1-\tfrac{1}{2}\beta_2 c\right)\cosh(kb)+\beta_2 k\sinh(kb)\right]\neq 0.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Lo mismo sucede con la variante (2.25) de la función de Green, la cual existe sólo si su denominador $2kh$ es diferente de cero. Pero como $k=\frac{\sqrt{c^2-4\lambda}}{2}>0$, esa condición se reduce a $h\neq 0$, que a su vez, teniendo en cuenta la expresión para h dada a continuación de (2.25), adquiere la forma

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1+\alpha_2 r_1)(\beta_1+\beta_2 r_2)\exp(-k(b-a))-\\
&(\alpha_1+\alpha_2 r_2)(\beta_1+\beta_2 r_1)\exp(k(b-a))\neq 0.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Es claro que esta condición es equivalente a la (2.27). Para los problemas de la forma (2.1) que incumplan esa condición, la función de Green (2.24) no existe.

A continuación se examina el problema (2.1) cuando $c^2-4\lambda=0$.

Caso 2: $c^2-4\lambda=0$. Para resolver este caso, se parte de escoger las siguientes soluciones linealmente independientes de la ecuación (2.4) [2]

$$g_1(\acute{x})=\exp\left(-\frac{c}{2}\acute{x}\right), \quad g_2(\acute{x})=\acute{x}\exp\left(-\frac{c}{2}\acute{x}\right). \tag{2.29}$$

Derivando g_1 y g_2 con respecto a $x\acute{}$ se tiene

$$g_1'(x\acute{}) = -\frac{c}{2}\exp\left(-\frac{c}{2}x\acute{}\right), \quad g_2'(x\acute{}) = \left(1-\frac{c}{2}x\acute{}\right)\exp\left(-\frac{c}{2}x\acute{}\right). \tag{2.30}$$

Sustituyendo (2.29) en (2.10), la función de Green toma la forma

$$G(x\acute{}, x) = \begin{cases} A(x)\exp\left(-\frac{c}{2}x\acute{}\right) + B(x)\,x\acute{}\exp\left(-\frac{c}{2}x\acute{}\right), & a \le x\acute{} \le x \\ C(x)\exp\left(-\frac{c}{2}x\acute{}\right) + D(x)\,x\acute{}\exp\left(-\frac{c}{2}x\acute{}\right), & x \le x\acute{} \le b \end{cases}, \tag{2.31}$$

donde A, B, C y D se encuentran resolviendo el sistema (2.15) con g_1, g_2, g_1'y g_2' tomadas de (2.29) y (2.30). Reemplazando (2.29) y (2.30) en el sistema de ecuaciones (2.15), simplificando y reagrupando términos, se escribe

$$\begin{aligned} &k_1 A + (ak_1+\alpha_2)\,B = 0, \\ &k_2 C + (bk_2+\beta_2)\,D = 0, \\ &A + xB - C - xD = 0, \\ &-\tfrac{c}{2}A + \left(1-\tfrac{c}{2}x\right)B + \tfrac{c}{2}C - \left(1-\tfrac{c}{2}x\right)D = -\exp\left(-\tfrac{c}{2}x\right), \end{aligned} \tag{2.32}$$

siendo $k_1 = \alpha_1 - \frac{c}{2}\alpha_2$, $k_2 = \beta_1 - \frac{c}{2}\beta_2$. Luego, se multiplica la tercera ecuación en (2.32) por $\frac{c}{2}$ y se suma con la cuarta

$$B = D - \exp\left(-\frac{c}{2}x\right). \tag{2.33}$$

Usando esta expresión para B en la tercera ecuación en (2.32), se tiene

$$A = C + x\exp\left(-\frac{c}{2}x\right). \tag{2.34}$$

Ahora (2.33) y (2.34) se sustituyen en la primera ecuación en (2.32)

$$k_1 C + (ak_1+\alpha_2)\,D = -(k_1 x - ak_1 - \alpha_2)\exp\left(-\frac{c}{2}x\right). \tag{2.35}$$

Del sistema formado por la segunda ecuación en (2.32) y la ecuación (2.35), se despejan C y D

$$\begin{aligned} C &= -\tfrac{(bk_2+\beta_2)(k_1x-ak_1-\alpha_2)}{k_1(bk_2+\beta_2)-k_2(ak_1+\alpha_2)}\exp\left(-\tfrac{c}{2}x\right), \\ D &= \tfrac{k_2(k_1x-ak_1-\alpha_2)}{k_1(bk_2+\beta_2)-k_2(ak_1+\alpha_2)}\exp\left(-\tfrac{c}{2}x\right). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Por último, se reemplaza D de (2.36) en (2.33) y C de (2.36) en (2.34)

$$\begin{aligned} A &= -\tfrac{(ak_1+\alpha_2)(k_2x-bk_2-\beta_2)}{k_1(bk_2+\beta_2)-k_2(ak_1+\alpha_2)}\exp\left(-\tfrac{c}{2}x\right), \\ B &= \tfrac{k_1(k_2x-bk_2-\beta_2)}{k_1(bk_2+\beta_2)-k_2(ak_1+\alpha_2)}\exp\left(-\tfrac{c}{2}x\right). \end{aligned} \tag{2.37}$$

Las cantidades A, B, C, D dadas en (2.36) y (2.37) se sustituyen en la expresión (2.31) para obtener la función de Green del problema (2.1) cuando $c^2 - 4\lambda = 0$

$$\begin{aligned} &\text{Caso } c^2 - 4\lambda = 0: \\ &G(x\acute{}, x) = \begin{cases} A\exp\left(-\frac{c}{2}x\acute{}\right) + Bx\acute{}\exp\left(-\frac{c}{2}x\acute{}\right), & a \le x\acute{} \le x \\ C\exp\left(-\frac{c}{2}x\acute{}\right) + Dx\acute{}\exp\left(-\frac{c}{2}x\acute{}\right), & x \le x\acute{} \le b \end{cases} \end{aligned} \tag{2.38}$$

con

$$
\begin{aligned}
&A=-\tfrac{(ak_1+\alpha_2)(k_2x-bk_2-\beta_2)}{k_1(bk_2+\beta_2)-k_2(ak_1+\alpha_2)}\exp\left(-\tfrac{c}{2}x\right),\ B=\tfrac{k_1(k_2x-bk_2-\beta_2)}{k_1(bk_2+\beta_2)-k_2(ak_1+\alpha_2)}\exp\left(-\tfrac{c}{2}x\right),\\
&C=-\tfrac{(bk_2+\beta_2)(k_1x-ak_1-\alpha_2)}{k_1(bk_2+\beta_2)-k_2(ak_1+\alpha_2)}\exp\left(-\tfrac{c}{2}x\right),\ D=\tfrac{k_2(k_1x-ak_1-\alpha_2)}{k_1(bk_2+\beta_2)-k_2(ak_1+\alpha_2)}\exp\left(-\tfrac{c}{2}x\right),\\
&k_1=\alpha_1-\tfrac{c}{2}\alpha_2,\quad k_2=\beta_1-\tfrac{c}{2}\beta_2.
\end{aligned}
$$

Condición de existencia de la función de Green. Cabe señalar que en (2.38) las expresiones para A, B, C, D tienen todas el mismo denominador, el cual se supone diferente de cero. Entonces, la condición de existencia de la función de Green (2.38) es

$$k_1\left(bk_2+\beta_2\right)-k_2\left(ak_1+\alpha_2\right)\neq 0. \tag{2.39}$$

Para los problemas que incumplen la condición (2.39), la función de Green (2.38) no existe.

Caso 3: $c^2-4\lambda<0$. En este caso, como soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial (2.4) se pueden usar las siguientes funciones [2]

$$g_1\left(x'\right)=\exp\left(-\frac{c}{2}x'\right)\cos\left(\gamma x'\right),\quad g_2\left(x'\right)=\exp\left(-\frac{c}{2}x'\right)\sin\left(\gamma x'\right), \tag{2.40}$$

donde $\gamma=\frac{\sqrt{4\lambda-c^2}}{2}>0$. Derivando g_1 y g_2 con respecto a x' se tiene

$$
\begin{aligned}
g_1'&=\left(-\tfrac{c}{2}\cos(\gamma x')-\gamma\sin\left(\gamma x'\right)\right)\exp\left(-\tfrac{c}{2}x'\right),\\
g_2'&=\left(-\tfrac{c}{2}\sin(\gamma x')+\gamma\cos\left(\gamma x'\right)\right)\exp\left(-\tfrac{c}{2}x'\right).
\end{aligned} \tag{2.41}
$$

Con base en (2.40), la función de Green (2.10) se expresa así:

$$
\begin{aligned}
&G\left(x',x\right)=\\
&\begin{cases}
A\left(x\right)\exp\left(-\tfrac{c}{2}x'\right)\cos\left(\gamma x'\right)+B\left(x\right)\exp\left(-\tfrac{c}{2}x'\right)\sin\left(\gamma x'\right), & a\leq x'\leq x\\
C\left(x\right)\exp\left(-\tfrac{c}{2}x'\right)\cos\left(\gamma x'\right)+D\left(x\right)\exp\left(-\tfrac{c}{2}x'\right)\sin\left(\gamma x'\right), & x\leq x'\leq b
\end{cases}
\end{aligned} \tag{2.42}
$$

De manera análoga a los dos casos anteriores, las cantidades A, B, C y D en (2.42) se determinan a partir del sistema de ecuaciones algebráicas (2.9), el cual, teniendo en cuenta (2.40) y (2.41), toma la forma

$$
\begin{aligned}
&h_1A+h_2B=0,\qquad h_3C+h_4D=0,\\
&\cos\left(\gamma x\right)A+\sin\left(\gamma x\right)B-\cos\left(\gamma x\right)C-\sin\left(\gamma x\right)D=0,\\
&\left(-\tfrac{c}{2}\cos\left(\gamma x\right)-\gamma\sin\left(\gamma x\right)\right)A+\left(-\tfrac{c}{2}\sin\left(\gamma x\right)+\gamma\cos\left(\gamma x\right)\right)B-\\
&\left(-\tfrac{c}{2}\cos\left(\gamma x\right)-\gamma\sin\left(\gamma x\right)\right)C-\left(-\tfrac{c}{2}\sin\left(\gamma x\right)+\gamma\cos\left(\gamma x\right)\right)D=\\
&-\exp\left(-\tfrac{c}{2}x\right),\\
&h_1=\left(\alpha_1-\tfrac{c}{2}\alpha_2\right)\cos\left(\gamma a\right)-\alpha_2\gamma\sin\left(\gamma a\right),\\
&h_2=\left(\alpha_1-\tfrac{c}{2}\alpha_2\right)\sin\left(\gamma a\right)+\alpha_2\gamma\cos\left(\gamma a\right),\\
&h_3=\left(\beta_1-\tfrac{c}{2}\beta_2\right)\cos\left(\gamma b\right)-\beta_2\gamma\sin\left(\gamma b\right),\\
&h_4=\left(\beta_1-\tfrac{c}{2}\beta_2\right)\sin\left(\gamma b\right)+\beta_2\gamma\cos\left(\gamma b\right).
\end{aligned} \tag{2.43}
$$

Luego, se resuelve este sistema con respecto a A, B, C y D. Multiplicando la tercera ecuación por $-\gamma$ y sumándole la cuarta, se tiene

$$-\sin(\gamma x)\,A+\cos(\gamma x)\,B+\sin(\gamma x)\,C-\cos(\gamma x)\,D=-\frac{1}{\gamma}\exp(-cx)\,. \tag{2.44}$$

Ahora se multiplica la tercera ecuación en (2.43) por $\sin(\gamma x)$ y la ecuación (2.44) por $\cos(\gamma x)$ y se suman

$$B=D-\frac{1}{\gamma}\cos(\gamma x)\exp\left(-\frac{c}{2}x\right). \tag{2.45}$$

De manera análoga, se multiplica la tercera ecuación en (2.43) por $-\cos(\gamma x)$ y la ecuación (2.44) por $\sin(\gamma x)$ y se suman

$$A=C+\frac{1}{\gamma}\sin(\gamma x)\exp\left(-\frac{c}{2}x\right). \tag{2.46}$$

Se sustituyen (2.45) y (2.46) en la primera ecuación en (2.43)

$$h_1C+h_2D=\frac{1}{\gamma}\left(h_2\cos(\gamma x)-h_1\sin(\gamma x)\right)\exp\left(-\frac{c}{2}x\right). \tag{2.47}$$

Despejando C de la segunda ecuación en (2.43), se tiene

$$C=-\frac{h_4}{h_3}D. \tag{2.48}$$

Esta expresión se sustituye en (2.47) y el resultado se reescribe así:

$$D=\frac{h_3\left(h_2\cos(\gamma x)-h_1\sin(\gamma x)\right)}{\gamma\left(h_2h_3-h_1h_4\right)}\exp\left(-\frac{c}{2}x\right). \tag{2.49}$$

Esta fórmula expresa el valor de D en términos de los parámetros que definen el sistema (2.1). Reemplazando (2.49) en (2.48) se llega a la correspondiente expresión para C

$$C=-\frac{h_4\left(h_2\cos(\gamma x)-h_1\sin(\gamma x)\right)}{\gamma\left(h_2h_3-h_1h_4\right)}\exp\left(-\frac{c}{2}x\right). \tag{2.50}$$

Sustituyendo (2.49) en (2.45) y (2.50) en (2.46) se obtienen los valores para B y A

$$\begin{aligned} B&=-\tfrac{h_1(h_3\sin(\gamma x)-h_4\cos(\gamma x))}{\gamma(h_2h_3-h_1h_4)}\exp\left(-\tfrac{c}{2}x\right),\\ A&=\tfrac{h_2(h_3\sin(\gamma x)-h_4\cos(\gamma x))}{\gamma(h_2h_3-h_1h_4)}\exp\left(-\tfrac{c}{2}x\right). \end{aligned} \tag{2.51}$$

Reuniendo (2.49), (2.50), (2.51) y (2.42), se escribe la expresión final para la función de Green del problema (2.1) cuando $c^2-4\lambda<0$,

$$\begin{aligned} &\text{Caso } c^2-4\lambda<0:\\ &G(x',x)=\begin{cases} A(x)\exp\left(-\frac{c}{2}x'\right)\cos(\gamma x')+\\ B(x)\exp\left(-\frac{c}{2}x'\right)\sin(\gamma x'), & a\le x'\le x\\ C(x)\exp\left(-\frac{c}{2}x'\right)\cos(\gamma x')+\\ D(x)\exp\left(-\frac{c}{2}x'\right)\sin(\gamma x'), & x\le x'\le b \end{cases}, \end{aligned} \tag{2.52}$$

donde

$$\begin{aligned}
A(x) &= \tfrac{h_2(h_3\sin(\gamma x)-h_4\cos(\gamma x))}{\gamma(h_2h_3-h_1h_4)}\exp\left(-\tfrac{c}{2}x\right),\\
B(x) &= -\tfrac{h_1(h_3\sin(\gamma x)-h_4\cos(\gamma x))}{\gamma(h_2h_3-h_1h_4)}\exp\left(-\tfrac{c}{2}x\right),\\
C(x) &= -\tfrac{h_4(h_2\cos(\gamma x)-h_1\sin(\gamma x))}{\gamma(h_2h_3-h_1h_4)}\exp\left(-\tfrac{c}{2}x\right),\\
D(x) &= \tfrac{h_3(h_2\cos(\gamma x)-h_1\sin(\gamma x))}{\gamma(h_2h_3-h_1h_4)}\exp\left(-\tfrac{c}{2}x\right).
\end{aligned}$$

Condición de existencia de la función de Green. Como en los casos anteriores, se presenta que las fórmulas para A, B, C y D en (2.52), tienen el mismo denominador, el cual se supone diferente de cero

$$\gamma\left(h_2h_3-h_1h_4\right)\neq 0.$$

Considerando que $\gamma=\frac{\sqrt{4\lambda-c^2}}{2}>0$ y sustituyendo en la anterior ecuación las expresiones para h_1, h_2, h_3, h_4 dadas en (2.43), se escribe

$$\begin{aligned}
&\left(\left(\alpha_1-\tfrac{c}{2}\alpha_2\right)\sin\left(\gamma a\right)+\alpha_2\gamma\cos\left(\gamma a\right)\right)\times\\
&\left(\left(\beta_1-\tfrac{c}{2}\beta_2\right)\cos\left(\gamma b\right)-\beta_2\gamma\sin\left(\gamma b\right)\right)-\\
&\left(\left(\alpha_1-\tfrac{c}{2}\alpha_2\right)\cos\left(\gamma a\right)-\alpha_2\gamma\sin\left(\gamma b\right)\right)\times\\
&\left(\left(\beta_1-\tfrac{c}{2}\beta_2\right)\sin\left(\gamma b\right)+\beta_2\gamma\cos\left(\gamma b\right)\right)\neq 0.
\end{aligned}\tag{2.53}$$

Nuevamente conviene resaltar que para los problemas que incumplen la condición (2.53), la función de Green (2.52) no está definida.

Resumiendo los resultados de los tres casos examinados, se puede afirmar que la función de Green de cualquier problema de la clase (2.1) está dada por una de las fórmulas (2.24), (2.38), (2.52), según el caso que tenga lugar. Previamente, se debe verificar el cumplimiento de la condición correspondiente (2.27) o (2.39) o (2.53). La función de Green que se obtenga sirve para calcular la solución $u(x)$ del problema (2.1), aplicando la expresión (2.11). Cuando una de las condiciones (2.27) o (2.39) o (2.53) no se cumple, las correspondientes funciones de Green (2.24) o (2.38) o (2.52) son inaplicables y, cómo se verá en el capítulo 3, se requiere perfeccionar el método, introduciendo la noción de función de Green generalizada.

Es importante señalar que en la formulación del problema (2.1) intervienen diez parámetros (c, λ, a, b, α_1, α_2, β_1, β_2, d_1 y d_2) y la función fuente $F(x)$, todos sin especificar. Por esta razón, los resultados obtenidos anteriormente, como son la expresión (2.11) para $u(x)$, las funciones de Green (2.24), (2.38) y (2.52), así como las correpondientes condiciones de existencia (2.27), (2.39) y (2.53), tienen carácter general y, por lo tanto, pueden utilizarse directamente en la resolución de problemas particulares que encajen en la forma general (2.1), sin necesidad de repetir todo el proceso que condujo a dichos resultados. Para cada problema particular, es suficiente identificar los valores de los parámetros arriba listados y la forma de $F(x)$, para luego reemplazarlos en los resultados finales. Una aplicación de gran utilidad consiste en la implementanción de los resultados arriba reseñados en un programa para computador que automatice la construcción de la solución $u(x)$ de problemas concretos de la clase (2.1). Este programa debe proporcionar la función de Green y la solución $u(x)$ para diferentes valores de los parámetros c, λ, a, b, α_1, α_2, β_1, β_2, d_1 y d_2 y para diversas funciones $F(x)$.

A continuación, se dan algunos ejemplos de problemas de la forma (2.1), los cuales se resuelven mediante el método de la función de Green.

EJEMPLO 1. Hallar la función de Green y la solución del sistema no homogéneo

$$\begin{array}{ll} u'' - u = 1, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0) = 1, & u'(\pi) = 1. \end{array} \tag{2.54}$$

SOLUCIÓN: Comparando (2.54) con (2.1), se tienen las siguientes equivalencias

$$\begin{array}{l} c = 0,\ \lambda = -1,\ a = 0,\ b = \pi,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0, \\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1,\ d_1 = 1,\ d_2 = 1,\ F(x) = 1. \end{array} \tag{2.55}$$

Se comprueba que el problema (2.54) pertenece al caso $c^2 - 4\lambda > 0$. Luego, se verifica el cumplimiento o no de la condición de existencia de la función de Green (2.28). Para esto, se reemplaza (2.55) en (2.28), concluyendo que dicha condición se cumple ya que

$$-\exp(-\pi) - \exp(\pi) \simeq -23 \neq 0.$$

A continuación, aplicando los datos (2.55) en (2.28), se calcula la función de Green del problema (2.54)

$$\begin{array}{l} G(x', x) = -\frac{1}{2(\exp(\pi)+\exp(-\pi))}\times \\ \left\{ \begin{array}{ll} [\exp(-\pi)\exp(x) + \exp(\pi)\exp(-x)] \times & \\ {[\exp(x') - \exp(-x')]}, & 0 \leq x' \leq x \\ {[\exp(x) - \exp(-x)]} \times & \\ (\exp(-\pi)\exp(x') + \exp(\pi)\exp(-x')), & x \leq x' \leq \pi \end{array} \right. . \end{array} \tag{2.56}$$

En la Figura 2.1 se presenta la gráfica de (2.56) con respecto a x', tomando $x = 1$. Se observa que la función de Green es continua en en todo el intervalo (incluido el punto $x' = 1$), pero su primera derivada es discontinua en dicho punto. Igualmente, es fácil verificar que $G(x', x)$ dada por (2.56) es simétrica, es decir, $G(x', x) = G(x, x')$.

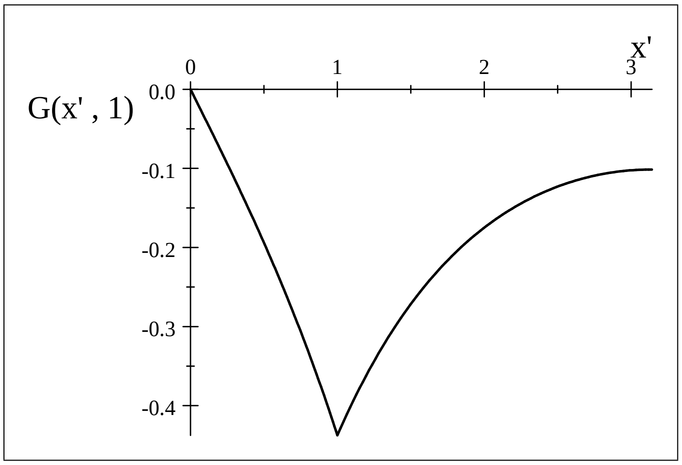

Figura. 2.1. Función de Green del ejemplo 1.

Por último, con base en la expresión (2.11) y la función de Green (2.56), se calcula la solución $u(x)$ del problema (2.54). Según las equivalencias (2.55), se tiene que $\alpha_1 \neq 0$ y $\beta_2 \neq 0$, por lo tanto, al aplicar (2.11) se debe escoger el caso 2. Como resultado se escribe

$$\begin{aligned}
&u(x) = -\tfrac{1}{2(\exp(\pi)+\exp(-\pi))}\times \\
&[-2(\exp(x)-\exp(-x)) - 2(\exp(-\pi)\exp(x)+\exp(\pi)\exp(-x)) + \\
&(\exp(-\pi)\exp(x)+\exp(\pi)\exp(-x))\int_0^x (\exp(x')-\exp(-x'))\,dx'+ \\
&(\exp(x)-\exp(-x))\int_x^\pi (\exp(-\pi)\exp(x')+\exp(\pi)\exp(-x'))\,dx'].
\end{aligned}$$

Realizando las integrales y agrupando términos, la anterior expresión adquiere la forma

$$u(x) = \frac{(2\exp(-\pi)+1)\exp(x)+(2\exp(\pi)-1)\exp(-x)}{\exp(\pi)+\exp(-\pi)} - 1. \tag{2.57}$$

Sustituyendo (2.57) en (2.54), se puede comprobar que la $u(x)$ dada por (2.57) es solución del problema (2.54).

EJEMPLO 2. Utilizando el método de la función de Green, encontrar la solución del sistema

$$\begin{aligned}
&u'' + 5u' + 6u = \exp(-5x),\;\; 0 \leq x \leq 1, \\
&u(0) + u'(0) = -1, \quad u(1) = 1.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

SOLUCIÓN: Se establecen las siguientes correspondencias entre (2.58) y (2.1)

$$\begin{aligned}
&c = 5,\; \lambda = 6,\; a = 0,\; b = 1,\; \alpha_1 = 1,\; \alpha_2 = 1, \\
&\beta_1 = 1,\; \beta_2 = 0,\; d_1 = -1,\; d_2 = 1,\; F(x) = \exp(-5x).
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Según los datos (2.59), se cumple que $c^2 - 4\lambda > 0$. Sustituyendo (2.59) en la condición de existencia de la función de Green (2.28), se obtiene que esta condición es válida

$$2\exp\left(\frac{1}{2}\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \simeq 2.7 \neq 0.$$

Por lo tanto, la función de Green se calcula con base en (2.25), teniendo en cuenta (2.55),

$$G(x',x) = \frac{1}{2\exp\left(\frac{1}{2}\right)-\exp\left(-\frac{1}{2}\right)}\times \tag{2.60}$$
$$\begin{cases} \left(\exp\left(-\frac{1}{2}\right)\exp(-2x)-\exp\left(\frac{1}{2}\right)\exp(-3x)\right)\times \\ (2\exp(-2x')-\exp(-3x')), & 0\le x'\le x \\ (2\exp(-2x)-\exp(-3x))\times \\ \left(\exp\left(-\frac{1}{2}\right)\exp(-2x')-\exp\left(\frac{1}{2}\right)\exp(-3x')\right), & x\le x'\le 1 \end{cases}.$$

Esta función es simétrica, es decir, $G(x',x) = G(x,x')$. Su gráfica con respecto a x', tomando $x = 0.3$, se muestra en la Figura 2.2, la cual ilustra la continuidad de la función de Green en todo el intervalo (incluido el punto $x' = 1$), mientras que su primera derivada es discontinua en $x' = 0.3$ (en este punto está aplicada la fuente puntual $\delta(x' - 0.3)$).

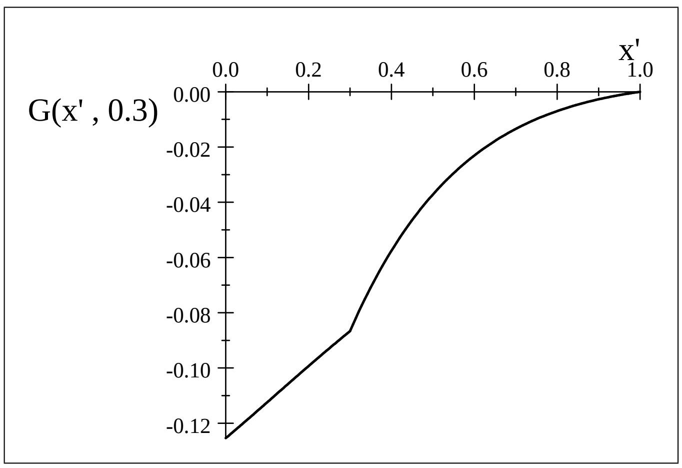

Figura. 2.2. Función de Green del ejemplo 2.

Finalmente, se sustituye la función de Green (2.60) en la expresión (2.11) para calcular la solución $u(x)$ del problema (2.58). En este ejemplo, según (2.59), se tiene $\alpha_1 \neq 0$ y $\beta_1 \neq 0$, por lo tanto, al aplicar (2.11) se toma el caso 1. Como resultado se obtiene

$$\begin{aligned} u(x) = {} & \frac{1}{6(2\exp(1)-1)}\times \\ & [(12\exp(3)-2-2\exp(-2))\exp(-2x)- \\ & -(6\exp(3)-2\exp(1)-\exp(-2))\exp(-3x)+ \\ & (2\exp(1)-1)\exp(-5x)]. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Por sustitución directa de (2.61) en (2.58) se puede verificar que la $u(x)$ dada por (2.61) es solución del problema (2.58).

EJEMPLO 3. Encontrar la función de Green y la solución del sistema

$$\begin{aligned} & u'' - 6u' + 9u = \exp(6x), \qquad 0 \le x \le 1, \\ & u(0) = 0, \qquad u(1) = 1. \end{aligned} \tag{2.62}$$

SOLUCIÓN: Se tienen las siguientes equivalencias entre (2.62) y (2.1)

$$\begin{gathered} c=-6,\ \lambda=9,\ a=0,\ b=1,\ \alpha_1=1,\ \alpha_2=0, \\ \beta_1=1,\ \beta_2=0,\ d_1=0,\ d_2=1,\ F(x)=\exp(6x). \end{gathered} \tag{2.63}$$

De (2.63) se concluye que el problema (2.62) pertenece al caso $c^2-4\lambda=0$. Reemplazando los valores dados en (2.63) en (2.39), se verifica el cumplimiento de la condición de existencia de la función de Green

$$1 \neq 0.$$

Teniendo en cuenta (2.63), la función de Green (2.38) adquiere la forma

$$G(x',x)=\begin{cases} (x-1)\exp(3x)\,x'\exp(3x'), & 0\le x'\le x \\ x\exp(3x)\,(x'-1)\exp(3x'), & x\le x'\le 1 \end{cases}. \tag{2.64}$$

Con base en la anterior expresión, se puede comprobar la simetría $G(x',x)=G(x,x')$. En la Figura 2.3 se muestra la grafíca $G(x',x)$ versus x' tomando $x=0.4$. Se observa la discontinuidad de la primera derivada de $G(x',x)$ con respecto a x' tomando $x=0.4$ que es la coordenada en donde se aplica la fuente puntual $\delta(x'-0.4)$.

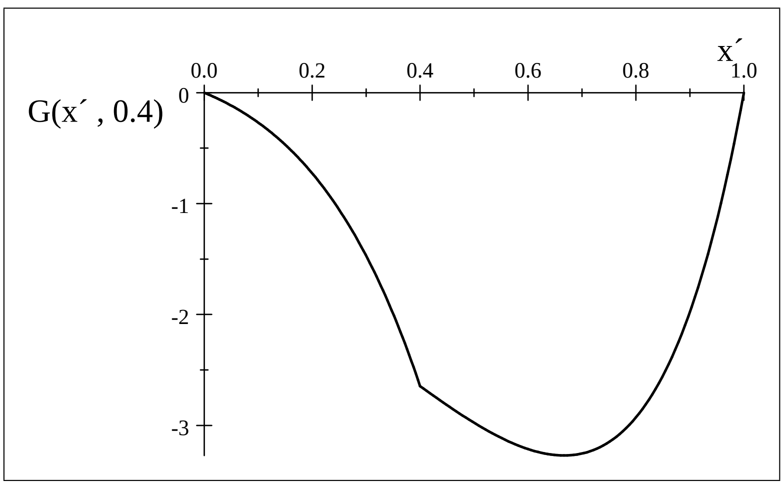

Figura 2.3. Función de Green del ejemplo 3.

Por último, la función de Green (2.64) se reemplaza en la expresión (2.11) para $u(x)$. Según (2.63), tiene lugar el caso 1: $\alpha_1\neq 0$, $\beta_1\neq 0$. Por lo tanto, se tiene

$$\begin{gathered} u(x)=x\exp(3(x-1))+(x-1)\exp(3x)\int_0^x x'\exp(3x')\,dx'+ \\ x\exp(3x)\int_x^1 (x'-1)\exp(3x')\,dx'. \end{gathered}$$

Realizando las integraciones y agrupando términos, la solución del problema (2.62) adquiere la forma

$$u(x)=\frac{\exp(3x)}{9}\left((1-\exp(3)+9\exp(-3))\,x+\exp(3x)-1\right). \tag{2.65}$$

EJEMPLO 4. Usando el método de la función de Green, resolver el sistema

$$\begin{aligned} &u'' + 2u = \cos(2x), \qquad 0 \le x \le \pi, \\ &u'(0) = 2, \qquad u'(\pi) = 1. \end{aligned} \tag{2.66}$$

SOLUCIÓN: Se establecen las equivalencias entre (2.66) y (2.1)

$$\begin{aligned} &c = 0,\ \lambda = 2,\ a = 0,\ b = \pi,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1, \\ &\beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1,\ d_1 = 2,\ d_2 = 1,\ F = \cos(2x). \end{aligned} \tag{2.67}$$

Según (2.67), el ejemplo (2.66) ilustra el caso cuando $c^2 - 4\lambda < 0$. Luego, se comprueba el cumplimiento de la condición de existencia de la función de Green dada por (2.53). Para esto, se reemplazan los valores numéricos de (2.67) en (2.53), obteniéndose que dicha condición si es válida

$$-2\sin\left(\sqrt{2}\pi\right) = -1{,}92781 \neq 0.$$

A continuación, la función de Green se calcula según (2.52), teniendo en cuenta (2.67), se escribe

$$G(x', x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}\pi\right)} \begin{cases} \cos\left(\sqrt{2}(x-\pi)\right)\cos\left(\sqrt{2}x'\right), & 0 \le x' \le x \\ \cos\left(\sqrt{2}x\right)\cos\left(\sqrt{2}(x'-\pi)\right), & x \le x' \le \pi \end{cases}. \tag{2.68}$$

En la Figura 2.4 se presenta la gráfica de $G(x', x)$ con respecto a x', tomando $x = 1$. Igualmente, se observa que $G(x', x)$ dada por (2.68) es simétrica, es decir, $G(x', x) = G(x, x')$.

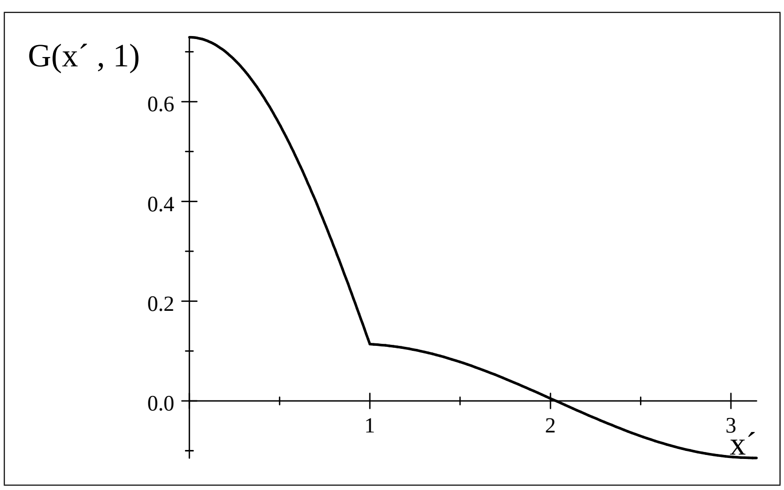

Figura 2.4. Función de Green del ejemplo 4.

Por último, aplicando la función de Green (2.68) en la expresión (2.11), se encuentra la solución $u(x)$ del problema (2.66). Según (2.67), se cumple que $\alpha_2 \neq 0$ y $\beta_2 \neq 0$, por lo tanto, en (2.11) se escoge el caso 2. Como resultado se tiene

$$
\begin{aligned}
&u(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}\pi\right)} \times \\
&\left[-\cos\left(\sqrt{2}x\right) + 2\cos\left(\sqrt{2}\,(x-\pi)\right) + \cos\left(\sqrt{2}\,(x-\pi)\right)\int_0^x \cos\left(\sqrt{2}x'\right)\cos(2x')\,dx' \right.\\
&\left. + \cos\left(\sqrt{2}x\right)\int_x^\pi \cos\left(\sqrt{2}\,(x'-\pi)\right)\cos(2x')\,dx'\right].
\end{aligned}
$$

Realizando las integrales y agrupando términos, la solución del problema (2.66) se escribe así:

$$
u(x) = \sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}x\right) + \frac{2\cos\left(\sqrt{2}\pi\right) - 1}{\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}\pi\right)}\cos\left(\sqrt{2}x\right) - \cos^2(x) + \frac{1}{2}. \tag{2.69}
$$

EJEMPLO 5. Encontrar la función de Green y la solución del sistema

$$
\begin{aligned}
&u'' + 2u' + 5u = \exp(-2x), \qquad 0 \le x \le \tfrac{\pi}{4}, \\
&u(0) = 2, \qquad u\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = 1.
\end{aligned} \tag{2.70}
$$

SOLUCIÓN: Se tienen las siguientes equivalencias entre (2.70) y (2.1)

$$
\begin{aligned}
&c = 2,\ \lambda = 5,\ a = 0,\ b = \tfrac{\pi}{4},\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0, \\
&\beta_1 = 1,\ \beta_2 = 0,\ d_1 = 2,\ d_2 = 1,\ F = \exp(-2x).
\end{aligned} \tag{2.71}
$$

Se observa que este ejemplo pertenece al caso $c^2 - 4\lambda < 0$. Reemplazando los valores dados en (2.71) en (2.53), se verifica el cumplimiento de la condición de existencia de la función de Green

$$
-1 \ne 0.
$$

Teniendo en cuenta (2.71), la función de Green (2.52) toma la forma

$$
G(x', x) = -\frac{1}{2}\begin{cases} \cos(2x)\exp(-x)\sin(2x')\exp(-x'), & 0 \le x' \le x \\ \sin(2x)\exp(-x)\cos(2x')\exp(-x'), & x \le x' \le \frac{\pi}{4} \end{cases}. \tag{2.72}
$$

Como en los ejemplos anteriores, la función de Green es simétrica: $G(x', x) = G(x, x')$. En la Figura 2.5 se muestra la grafíca $G(x', x)$ versus x' tomando $x = 0.2$. Igualmente, se cumple que $G_{x'}(x', x)$ como función de x' es discontinua en el punto $x' = 0.2$ en el cual está aplicada la fuente puntual $\delta(x' - 0.2)$.

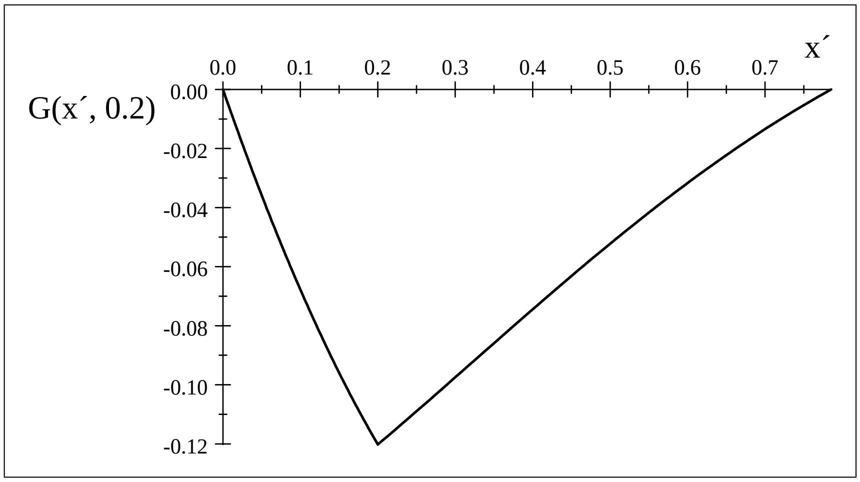

Figura 2.5. Función de Green del ejemplo 5.

Por último, la función de Green (2.72) se reemplaza en la expresión (2.11) para $u(x)$. Según (2.71), tiene lugar el caso 1: $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$. Realizando las integraciones y algunas simplificaciones, la solución del problema (2.70) se escribe así:

$$u(x) = 2\left[\exp\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{5}\exp\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\exp(-x)\sin(x)\cos(x) + \\ + \frac{18}{5}\exp(-x)\cos^2(x) - \frac{9}{5}\exp(-x) + \frac{1}{5}\exp(-2x). \tag{2.73}$$

2. Condición de existencia de la función de Green

En la sección anterior se estableció que la función de Green (2.24) del problema no homogéneo con coeficientes constantes (2.1) para $c^2 - 4\lambda > 0$ no existe cuando la desigualdad (2.27) se convierte en igualdad; la función de Green (2.38) cuando $c^2 - 4\lambda = 0$ no está definida si se incumple la condición (2.39); la función de Green (2.52) para $c^2 - 4\lambda < 0$ no está definida cuando la desigualdad (2.53) se incumple. Igualmente, la función de Green, en todos los casos, es independiente de la función $F(x)$ que interviene en el término no homogéneo o término fuente de la ecuación diferencial en (2.1). En esta sección se estudia más detalladamente el significado de las condiciones de existencia (2.27), (2.39) y (2.53), las cuales se resumen así:

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\ \ c^2 - 4\lambda > 0, \\
&\left[\left(\alpha_1 - \tfrac{1}{2}\alpha_2 c\right)\cosh(ka) + \alpha_2 k\sinh(ka)\right] \times \\
&\left[\left(\beta_1 - \tfrac{1}{2}\beta_2 c\right)\sinh(kb) + \beta_2 k\cosh(kb)\right] - \\
&\left[\left(\alpha_1 - \tfrac{1}{2}\alpha_2 c\right)\sinh(ka) + \alpha_2 k\cosh(ka)\right] \times \\
&\left[\left(\beta_1 - \tfrac{1}{2}\beta_2 c\right)\cosh(kb) + \beta_2 k\sinh(kb)\right] \neq 0, \\
&\text{donde } k = \tfrac{\sqrt{c^2-4\lambda}}{2} > 0. \\
&\text{b)}\ \ c^2 - 4\lambda = 0, \\
&k_1(bk_2 + \beta_2) - k_2(ak_1 + \alpha_2) \neq 0, \\
&\text{donde } k_1 = \alpha_1 - \tfrac{c}{2}\alpha_2, \quad k_2 = \beta_1 - \tfrac{c}{2}\beta_2.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned}
&\text{c)}\ \ c^2 - 4\lambda < 0,\\
&\left(\left(\alpha_1 - \tfrac{c}{2}\alpha_2\right)\sin(\gamma a) + \alpha_2\gamma\cos(\gamma a)\right) \times\\
&\left(\left(\beta_1 - \tfrac{c}{2}\beta_2\right)\cos(\gamma b) - \beta_2\gamma\sin(\gamma b)\right) -\\
&\left(\left(\alpha_1 - \tfrac{c}{2}\alpha_2\right)\cos(\gamma a) - \alpha_2\gamma\sin(\gamma a)\right) \times\\
&\left(\left(\beta_1 - \tfrac{c}{2}\beta_2\right)\sin(\gamma b) + \beta_2\gamma\cos(\gamma b)\right) \neq 0,\\
&\text{donde } \gamma = \tfrac{\sqrt{4\lambda - c^2}}{2} > 0.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Examinando (2.74) se observa que la condición de existencia de la función de Green en todos los casos depende sólamente de los parámetros del problema (2.1) c, λ, a, b, α_1, α_2, β_1, β_2, y es independiente de los parámetros d_1 y d_2 que representan los términos no homogéneos en las condiciones de frontera de dicho problema.

A continuación, se presentan tres ejemplos de problemas del tipo (2.1) con c, a, b, α_1, α_2, β_1, β_2 dados, permaneciendo sin fijar el parámetro λ. En este sentido, se trata de hallar los valores de λ, si los hay, para los cuales las condiciones (2.74) se incumplen. Se ha escogido el parámetro λ debido a que, como se verá en el capítulo 3, tiene un significado relevante en la teoría de los problemas homogéneos asociados con el problema no homogéneo (2.1), es decir, los problemas con $F(x) = 0$, $d_1 = d_2 = 0$.

EJEMPLO 6. Sea el sistema no homogéneo

$$\begin{aligned}
&u'' + \lambda u = 1, \qquad 0 \leq x \leq \pi,\\
&u(0) = 1, \qquad u'(\pi) = 1,
\end{aligned} \tag{2.75}$$

donde el parámetro λ puede tomar cualquier valor real. Encontrar los valores de λ, si los hay, para los cuales la función de Green dada por (2.24) o (2.38) o (2.52) del problema (2.75) no existe. Este ejemplo corresponde al ejemplo 1 de la sección anterior, para el cual la función de Green (2.56) está bien definida.

SOLUCIÓN: Se establecen las siguientes equivalencias entre (2.75) y (2.1)

$$\begin{aligned}
&c = 0,\ a = 0,\ b = \pi,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0,\ \beta_1 = 0,\\
&\beta_2 = 1,\ d_1 = 1,\ d_2 = 1,\ F(x) = 1.
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Para encontrar los valores de λ solicitados, se examinan por separado los tres casos $c^2 - 4\lambda > 0$, $c^2 - 4\lambda = 0$ y $c^2 - 4\lambda < 0$.

Caso $c^2 - 4\lambda > 0$. Teniendo en cuenta (2.76), se tiene $c^2 - 4\lambda = -4\lambda > 0$, de donde $\lambda < 0$. Luego se buscan los posibles valores negativos de λ que conlleven a incumplir la desigualdad a) de (2.74). Convirtiendo esta desigualdad en igualdad y utilizando los datos de (2.76), se escribe

$$\sqrt{-\lambda}\left[\exp\left(-\sqrt{-\lambda}\pi\right) + \exp\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right)\right] = 0,$$

de donde $\lambda = 0$ o $\exp\left(-\sqrt{-\lambda}\pi\right) + \exp\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) = 0$. El valor $\lambda = 0$ se descarta por no ser menor de cero. Utilizando la fórmula $-1 = \exp(i(2n+1)\pi)$, $(n = 0, \pm 1,$

± 2, ...), la ecuación $\exp\left(-\sqrt{-\lambda}\pi\right)+\exp\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right)=0$ se reescribe así:

$$\exp\left(-\sqrt{-\lambda}\pi\right)=\exp\left(i\left(2n+1\right)\pi\right)\exp\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right).$$

Esto implica que $-\sqrt{-\lambda}=\sqrt{-\lambda}+i\left(2n+1\right)$, o bien, $\lambda=\frac{(2n+1)^2}{4}>0$. Por tanto, no hay valores de λ negativos que incumplan la desigualdad a) en (2.74). Se concluye que para todo $\lambda<0$, la función de Green (2.24) del problema (2.75) existe.

Caso $c^2-4\lambda=0$. Tomando los datos de (2.76), se tiene $c^2-4\lambda=-4\lambda=0$. Luego se verifica si $\lambda=0$ satisiface o no la condición b) en (2.74). Reemplazando $\lambda=0$ y los restantes valores dados en (2.76) en dicha condición, da

$$1\neq 0.$$

Por lo tanto, para $\lambda=0$ la función de Green (2.38) del problema (2.75) está definida.

Caso $c^2-4\lambda<0$. Con base en (2.76), se escribe $c^2-4\lambda=-4\lambda<0$, de donde $\lambda>0$. A continuación se busca si hay valores positivos de λ para los cuales se imcumple la condición c) de (2.74). Convirtiendo la desigualdad en igualdad y reemplazando los datos de (2.76), se tiene

$$-\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)=0.$$

El valor $\lambda=0$ no pertenece al caso examinado. De otra parte, $\cos\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)=0$ cuando

$$\lambda_n=\frac{\left(2n-1\right)^2}{4},\qquad (n=1,\,2,\,...). \tag{2.77}$$

Este es un conjunto infinito de valores positivos λ. Por lo tanto, para $c^2-4\lambda<0$, la función de Green (2.52) del problema (2.75) no existe cuando λ toma los valores dados en (2.77). En los otros casos, $c^2-4\lambda>0$ y $c^2-4\lambda=0$, la función de Green (2.38) o (2.52) para este ejemplo siempre estará definida.

EJEMPLO 7. Sea el problema

$$\begin{array}{l} u''+\lambda u=\cos\left(2x\right),\qquad 0\leq x\leq\pi,\\ u'\left(0\right)=2,\qquad u'\left(\pi\right)=1, \end{array} \tag{2.78}$$

siendo λ un parámetro que toma valores reales. Encuentre los posibles valores de λ, para los cuales la función de Green dada por (2.24) o (2.38) o (2.52) del problema (2.78) no está definida; el problema (2.78) está relacionado con el ejemplo 4 de la sección anterior, para el cual la función de Green (2.68) existe.

SOLUCIÓN: Se escriben las equivalencias entre (2.78) y (2.1)

$$\begin{array}{l} c=0,\,a=0,\,b=\pi,\,\alpha_1=0,\,\alpha_2=1,\,\beta_1=0,\\ \beta_2=1,\,d_1=2,\,d_2=1,\,F\left(x\right)=\cos\left(2x\right), \end{array} \tag{2.79}$$

y luego se examinan separadamente los casos: $c^2-4\lambda>0$, $c^2-4\lambda=0$ y $c^2-4\lambda<0$.

Caso $c^2 - 4\lambda > 0$. Usando los valores dados en (2.79), se escribe $c^2 - 4\lambda = -4\lambda > 0$, de donde $\lambda < 0$. A continuación, se averiguan los valores de λ negativos, si los hay, que incumplen la desigualdad a) de (2.74). Convirtiendo esta desigualdad en igualdad y usando (2.79), se tiene

$$\lambda \left[\exp\left(-\sqrt{-\lambda}\pi\right) - \exp\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right)\right] = 0.$$

De esta ecuación se sigue que $\lambda = 0$ o $\exp\left(-\sqrt{-\lambda}\pi\right) + \exp\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) = 0$. El valor $\lambda = 0$ no es menor que cero y, como se resolvió en el ejemplo anterior, los valores de λ que satisfacen la segunda ecuación son todos positivos. Por tanto, cuando $c^2 - 4\lambda < 0$ (o $\lambda < 0$) la función de Green (2.24) del problema (2.78) siempre está definida.

Caso $c^2 - 4\lambda = 0$. Según (2.76), se tiene $c^2 - 4\lambda = -4\lambda = 0$, es decir,

$$\lambda = 0. \tag{2.80}$$

Luego se comprueba si $\lambda = 0$ incumple la condición b) de (2.74). Se reemplaza $\lambda = 0$ y los valores dados en (2.76) en dicha condición, dando

$$0 \neq 0.$$

Por lo tanto, cuando $\lambda = 0$, la función de Green (2.38) del problema (2.78) no existe.

Caso $c^2 - 4\lambda < 0$. Tomando los valores dados en (2.79), se tiene $c^2 - 4\lambda = -4\lambda < 0$, de donde $\lambda > 0$. A continuación se determinan los posibles valores positivos de λ, para los cuales no tiene lugar la desigualdad c) en (2.74). Se convierte la desigualdad en igualdad y se reemplazan los datos de (2.79)

$$\lambda \sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0.$$

La solución $\lambda = 0$ no pertenece al caso $\lambda > 0$. De otra parte, $\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)$ es igual a cero para los siguientes valores de λ

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)^2}{4}, \qquad (n = 1, 2, ...), \tag{2.81}$$

los cuales son todos positivos. Entonces, la función de Green (2.52) para el problema (2.78) no está definida para los valores de λ dados en (2.81).

En resumen, se obtuvo que para el problema (2.78) la función de Green (2.38) no está definida cuando $\lambda = 0$, y la función de Green (2.52) tampoco está definida cuando λ toma uno de los valores dados en (2.81).

EJEMPLO 8. Sea el sistema no homogéneo, definido mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} &u'' + \lambda u = F(x), \qquad 0 \leq x \leq 1, \\ &u(0) = d_1, \qquad u(1) + u'(1) = d_2. \end{aligned} \tag{2.82}$$

Determinar los valores de λ, si los hay, para los cuales la función de Green dada por (2.24) o (2.38) o (2.52) del problema (2.82) no existe.

SOLUCIÓN: Se establecen las siguientes equivalencias entre (2.82) y (2.1)

$$c = 0,\ a = 0,\ b = 1,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0,\ \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 1. \tag{2.83}$$

Se examinan separadamente los tres casos $c^2 - 4\lambda > 0$, $c^2 - 4\lambda = 0$ y $c^2 - 4\lambda < 0$.

Caso $c^2 - 4\lambda > 0$. Con base en los datos (2.83), se tiene $c^2 - 4\lambda = -4\lambda > 0$, o sea, $\lambda < 0$. Corresponde ahora buscar los posibles valores negativos de λ que incumplan la desigualdad a) de (2.74). Convirtiendo dicha desigualdad en igualdad y teniendo en cuenta (2.83), se escribe

$$\sqrt{-\lambda} = -\tanh\left(\sqrt{-\lambda}\right). \tag{2.84}$$

Debido a que esta ecuación no tiene solución analítica, se recurre a un método aproximado. Para esto, se elaboran las gráficas de las funciones $f_1\left(\sqrt{-\lambda}\right) = \sqrt{-\lambda}$ y $f_2\left(\sqrt{-\lambda}\right) = -\tanh\sqrt{-\lambda}$ versus $\sqrt{-\lambda} > 0$. Luego se hallan los valores aproximados de λ correspondientes a los puntos de intersección, si los hay, de las dos curvas, los cuales son las soluciones de la ecuación (2.84). Este método se ilustra en la Figura 2.6, en la cual se observa que las dos gráficas se intersectan en un sólo punto: el origen. Es decir, ningún valor de $\sqrt{-\lambda} > 0$ satisface la ecuación (2.84) y, en consecuencia, para $\lambda < 0$ la función de Green del problema (2.82) siempre existe.

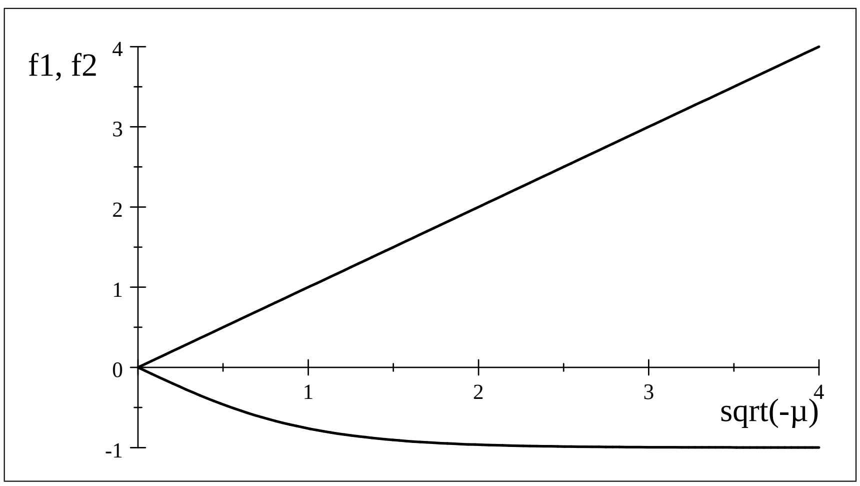

Figura 2.6. Solución gráfica de la ecuación (2.84).

Caso $c^2 - 4\lambda = 0$. Según (2.83), se tiene $c^2 - 4\lambda = -4\lambda = 0$. A continuación se comprueba si $\lambda = 0$ incumple o no la condición b) de (2.74). Sustituyendo $\lambda = 0$ y los otros valores de (2.83) en esa condición, da

$$2 \neq 0.$$

Entonces, para $\lambda = 0$, la función de Green (2.38) para el problema (2.82) existe.

Caso $c^2 - 4\lambda < 0$. Tomando los valores de (2.83), se escribe $c^2 - 4\lambda = -4\lambda < 0$, o sea, $\lambda > 0$. A continuación se buscan los posibles valores de $\lambda > 0$ para los cuales se imcumple la desigualdad c) de (2.74). Convirtiendo la desigualdad en igualdad y reemplazando los datos de (2.83), se tiene

$$-\sin\left(\sqrt{\lambda}\right) - \sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0. \tag{2.85}$$

En la última ecuación se nota que si λ es tal que $\cos\sqrt{\lambda} = 0$, entonces obligatoriamente $\sin\sqrt{\lambda} \neq 0$ y la ecuación no se satisface. Así, se puede afirmar que en (2.85) $\cos\sqrt{\lambda} \neq 0$ y dividir dicha ecuación por $\cos\sqrt{\lambda} = 0$

$$\sqrt{\lambda} = -\tan\left(\sqrt{\lambda}\right). \tag{2.86}$$

De manera análoga al procedimiento gráfico utilizado para resolver la ecuación (2.84), para encontrar las soluciones de (2.86), se construyen las gráficas de $f_1\left(\sqrt{\lambda}\right) = \sqrt{\lambda}$ y $f_2\left(\sqrt{\lambda}\right) = -\tan\sqrt{\lambda}$ con respecto $\sqrt{\lambda} > 0$, con el fín de identificar los puntos de intersección de las mismas. El resultado se muestra en la Figura 2.7.

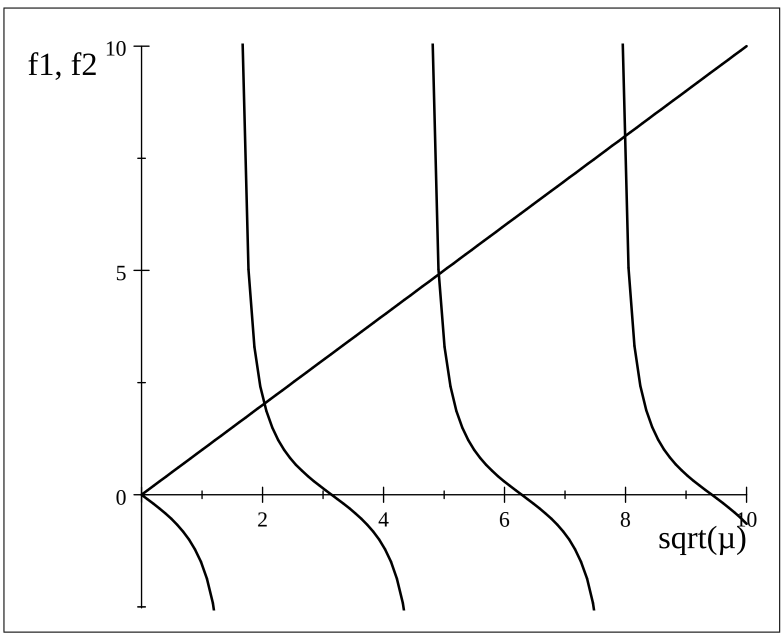

Figura 2.7. Solución gráfica de la ecuación (2.86).

Se observa que las curvas se intersectan en $\lambda = 0$, no obstante, este valor se excluye por no ser mayor que cero. Igualmente, para $\lambda > 0$ se presenta un número infinito de puntos de intersección. La primera es $\lambda_1 \cong 4{,}1$ y se puede mostrar que las raices subsiguientes están dadas con cierta exactitud por $\sqrt{\lambda_n} \cong \frac{(2n-1)\pi}{2}$ para $n = 2,\ 3,\ \ldots$; la precisión de esta estimación mejora a medida que n crece. Por tanto, para los valores

$$\lambda_1 \cong 4{,}1, \quad \lambda_n \cong \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}, \quad (n = 2,\ 3,\ \ldots), \tag{2.87}$$

la función de Green (2.52) del problema (2.82) no existe. Este ejemplo muestra que, incluso para un problema relativamente sencillo, puede resultar difícil determinar con exactitud los valores de λ para los cuales una de las funciones de Green (2.24) o (2.38) o (2.52) no está definida.

En los tres ejemplos anteriores se halló que, para cada uno de ellos, existe un conjunto infinito de valores del parámetro λ, para los cuales alguna de las funciones de Green (2.24) o (2.38) o (2.52) no está definida. En el próximo capítulo se mostrará que ese conjunto de valores de λ representa los valores propios del problema homogéneo correspondiente al problema no homogéneo (2.1).

3. Resumen

En este capítulo se aplicaron las ideas básicas del método de la función de Green a la solución del problema lineal no homogéno de segundo orden con coeficientes constantes formulado mediante (2.1). Como resultado se obtuvieron las funciones de Green (2.24), (2.38) y (2.52), que sirven para calcular la solución de (2.1), utilizando la expresión (2.11). De otra parte, las funciones de Green arriba enumeradas son válidas sólo para problemas de la forma (2.1) que adicionalmente cumplan las condiciones dadas en (2.27), (2.39) y 2.53), respectivamente. La pregunta sobre cómo proceder cuando esas condiciones se incumplen permanece abierta para ser examinada en el capítulo 3.

CAPíTULO 3

Función de Green generalizada

En este capítulo, continuando el desarrollo del método de la función de Green, se pretende completar la solución del sistema (2.1). En este sentido, hace falta examinar la solución de los problemas del tipo (2.1), para los cuales una de las funciones de Green (2.24) o (2.38) o (2.52) no está definida, lo que acontece cuando una de la desigualdades correpondientes (2.27) o (2.39) o (2.53) se convierte en igualdad. Es importante observar que dichas desigualdades dependen de una parte de los parámetros que definen el sistema (2.1), concretamente de c, λ, a, b, α_1, α_2, β_1, β_2, y son independientes de d_1 y d_2 y de la función $F(x)$ que también determinan el sistema (2.1), representando precisamente los términos no homogéneos del mismo. Mas adelante se mostrará que existe un gran número (en realidad, un número infinito) del problemas concretos de la forma (2.1), para los cuales alguna de las funciones de Green (2.24) o (2.38) o (2.52) no está definida. Con el fín de explicar la razón por la cual para esos problemas el método de la función de Green, en la forma en que se expuso en el capítulo 1, no funciona, es necesario previamente hacer un repaso breve de la teoría de los problemas homogéneos asociados con los problemas no homogeneos del tipo (1.1). Esto llevará a la formulación del concepto de función de Green generalizada y al establecimiento de un puente entre el método de la función de Green y el método de las funciones propias.

Cabe resaltar que en esas desigualdades intervienen los parámetros c, λ, a, b, α_1, α_2, β_1, β_2 que definen el sistema (2.1), y no intervienen los parámetros d_1 y d_2 y menos la función $F(x)$.

1. Problema homogéneo

El problema homogéneo, correspondiente al problema no homogéneo (1.1), se formula así:

$$
\begin{aligned}
&(p\,(x)\,\nu')' + q\,(x)\,\nu + \lambda r\,(x)\,\nu = 0, \qquad a \leq x \leq b, \\
&\alpha_1 \nu\,(a) + \alpha_2 \nu'\,(a) = 0, \qquad \beta_1 \nu\,(b) + \beta_2 \nu'\,(b) = 0,
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

donde la función incógnita se denota por $\nu\,(x)$ como una manera de diferenciarla de la función $u\,(x)$ del sistema no homogéneo (1.1). Las funciones $p\,(x)$, $q\,(x)$, $r\,(x)$ y las constantes a, b, α_1, α_2, β_1, β_2 se suponen conocidas y fijas, mientras que λ es un parámetro que puede variar. Adicionalmente, se considera que $p\,(x)$, $p'\,(x)$, $q\,(x)$ y $r\,(x)$ son continuas en $[a,\, b]$ y $p\,(x) > 0$ y $r\,(x) > 0$ en $[a,\, b]$; en este caso, el sistema (3.1) se conoce como problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera homogéneo [2, 5]. Estas restricciones permiten elaborar una teoría lo más sencilla posible, mientras se conserva una considerable generalidad. Además, dichas restricciones son válidas para muchos problemas significativos de la física matemática, tales como los que surgen en el estudio de la ecuación de la conducción de calor, la ecuación de onda y la ecuación del potencial. En esta sección se hace una breve reseña, sin realizar las deducciones del caso, de los resultados más relevantes de dicha teoría.

El sistema (3.1) es un ejemplo de problemas homogéneos con valores en la frontera que contienen un parámetro λ. Todos los problemas del tipo (3.1) tiene la solución trivial $\nu(x) = 0$. Uno de los objetivos es determinar para qué valores de λ ocurre que el problema (3.1) tiene soluciones no triviales. Estos valores de λ, si los hay, se llaman valores propios y las soluciones no triviales correspondientes se denominan funciones propias. A continuación se citan las propiedades más importantes de los valores propios y las funciones propias del problema regular de Sturm-Liouville (3.1) [2, 5]:

- Los valores propios son reales y forman una sucesión infinita, la cual puede ordenarse de acuerdo con la magnitud creciente, de modo que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < ... < \lambda_n < ....$ Además, $\lambda_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.
- Los valores propios son simples, esto es, a cada valor propio λ_n está asociada una sóla función propia que se designa como $\phi_n(x)$.
- Las funciones propias son reales, aparte de una constante multiplicativa que puede ser compleja.
- El conjunto de funciones propias $\{\phi_n(x)\}|_{n=1}^{\infty}$ es ortonormal con respecto a la función de ponderación $r(x) > 0$ en el intervalo $[a, b]$. Esto significa que si $\phi_m(x)$ y $\phi_n(x)$ son dos funciones propias, asociadas respectivamente a los valores propios λ_m y λ_n, entonces

$$\int_a^b r(x)\,\phi_m(x)\,\phi_n(x)\,dx = \delta_{mn}, \text{ donde } \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} . \tag{3.2}$$

La ecuación (3.2) se conoce como condición de ortonormalidad y δ_{mn} es el símbolo de Kronecker.
- El conjunto ortonormal de funciones propias $\{\phi_n(x)\}|_{n=1}^{\infty}$ de cada problema de la forma (3.1), es completo. Esto significa que cierta clase de funciones $f(x)$ puede representarse por medio de series infinitas de funciones propias, así:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \qquad c_n = \int_a^b f(x')\,\phi_n(x')\,r(x')\,dx'. \tag{3.3}$$

Sobre las propiedades de convergencia de la serie (3.3), existen varios teoremas [2, 5], entre los cuales se destaca el siguiente:

Teorema de convergencia 1. Sea $\{\phi_n(x)\}|_{n=1}^{\infty}$ un conjunto ortonormal de funciones propias del problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (3.1). Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ con $f'(x)$ continua por partes en $[a, b]$. Si $f(x)$ satisface las condiciones de frontera en (3.1), entonces se cumple (3.3). Se recuerda que una función es continua por partes en $[a, b]$, si este intervalo puede partirse por medio de un número finito de puntos $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ de modo que a) $f(x)$ sea continua sobre cada subintervalo abierto $x_{i-1} < x < x_i$. b) $f(x)$ tiende a un límite finito a medida que se tiende hacia los puntos extremos de cada subintervalo, desde su interior.

A continuación se ilustran con dos ejemplos las propiedades antes enumeradas.

EJEMPLO 1. Sea el sistema homogéneo

$$v'' + \lambda v = 0, \;\; v(0) = 0, \quad v'(\pi) = 0, \tag{3.4}$$

siendo λ un parámetro. Encuentre los valores propios y las funciones propias de (3.4).

SOLUCIÓN: Se tienen las siguientes equivalencias entre (3.4) y (3.1)

$$\begin{aligned} &p(x) = 1,\, q(x) = 0,\, \lambda,\, r(x) = 1,\, a = 0, \\ &b = \pi,\, \alpha_1 = 1,\, \alpha_2 = 0,\, \beta_1 = 0,\, \beta_2 = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

La solución general de la ecuación diferencial en (3.4) es

$$v(x) = A \sin\left(\sqrt{\lambda} x\right) + B \cos\left(\sqrt{\lambda} x\right), \tag{3.6}$$

donde A y B son constantes por determinar. Aplicando (3.6) en las condiciones de frontera en (3.4), se forma el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas con respecto a A y B

$$\begin{aligned} &0 \times A + B = 0, \\ &\sqrt{\lambda} \cos\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) A - \sqrt{\lambda} \sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) B = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

La condición de existencia de soluciones no triviales (cuando por lo menos una de las constantes A y B es diferente de cero) consiste en la igualdad a cero del determinante del sistema (3.7), lo que da

$$\sqrt{\lambda} \cos\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0.$$

Esto implica que pueden haber soluciones no triviales del problema (3.4) sólo para los valores $\lambda = 0$ o $\lambda = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2$, $(n = 1, 2, 3, ...)$. Pero esto es insuficiente, hace falta probar cuáles de estos valores realmente permiten la existencia de soluciones no triviales. Reemplazando $B = 0$ de (3.7) en (3.6), se escribe

$$v(x) = A \sin\left(\sqrt{\lambda} x\right), \tag{3.8}$$

donde A puede tomar cualquier valor diferente de cero, incluso complejo, ya que $A = 0$ conlleva a la solución trivial. Reemplazando $\lambda = 0$ en (3.8) se obtiene la solución trivial, por eso $\lambda = 0$ se descarta. En cambio, al sustituir $\lambda = \lambda_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2$,

$(n = 1, 2, 3, ...)$, en (3.8) se llega a las soluciones no triviales del problema (3.4), que son las funciones propias $\phi_n(x)$

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) x, \qquad (n = 1, 2, 3, ...), \tag{3.9}$$

correspondientes a los valores propios

$$\lambda_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2, \qquad (n = 1, 2, 3, ...). \tag{3.10}$$

Cabe anotar que las funciones propias (3.9) ya están normalizadas. Se observa que los valores propios (3.10) son reales y simples, lo mismo que forman una sucesión infinita creciente $\frac{1}{2} < \frac{3}{2} < \frac{5}{2} < ...$ y que $\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \to \infty$ cuando $n \to \infty$. De otra parte, se puede probar que las funciones propias (3.9) son ortonormales en el intervalo en $[0, \pi]$ con respecto a la función de ponderación $r(x) = 1 > 0$, la cual se toma de (3.5). En efecto, reemplazando $r(x) = 1$ y las funciones propias (3.10) en la condición de ortonormalidad (3.2) se obtiene que

$$\int_0^\pi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{2m-1}{2}x\right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right) dx = \delta_{mn}.$$

Además, el conjunto de funciones propias

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)\right\}\Bigg|_{n=1}^{\infty} \tag{3.11}$$

es completo. Esto significa que, según el teorema de convergencia 1, cada función $f(x)$ continua en $[0, \pi]$, que tenga primera derivada continua por partes en $[0, \pi]$ y cumpla las condiciones de frontera dadas en (3.4), puede representarse mediante una serie infinita de las funciones (3.11), la cual converge a $f(x)$.

EJEMPLO 2. Halle los valores propios y las funciones propias del problema homogéneo

$$v'' + \lambda v = 0, \qquad v'(0) = 0, \qquad v'(\pi) = 0, \tag{3.12}$$

donde λ es un parámetro.

SOLUCIÓN: Comparando (3.12) con (3.1) se establecen las equivalencias

$$\begin{gathered} p(x) = 1,\ q(x) = 0,\ \lambda,\ r(x) = 1,\ a = 0,\ b = \pi, \\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1. \end{gathered} \tag{3.13}$$

Se escribe la solución general de la ecuación diferencial en (3.12)

$$v(x) = A \sin\left(\sqrt{\lambda} x\right) + B \cos\left(\sqrt{\lambda} x\right), \tag{3.14}$$

siendo A y B constantes arbitrarias. Sustituyendo (3.14) en las condiciones de frontera dadas en (3.12), se llega al siguiente sistema de ecuaciones algebraicas con respecto a A y B

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda}A + 0 \times B &= 0,\\ \sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)A - \sqrt{\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)B &= 0.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Con el fin de encontrar los valores propios del problema (3.12), se iguala a cero el determinante del sistema (3.15)

$$\lambda \sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0.$$

Esta ecuación se satisface para $\lambda = 0$, y $\lambda = n^2$, $(n = 0, 1, 2, ...)$. De estos valores se deben tomar sólo los que conlleven a soluciones no triviales. Para $\lambda = 0$ la solución (3.14) adquiere la forma

$$v(x) = B. \tag{3.16}$$

En (3.16) B puede tomar cualquier valor diferente de cero. Es claro que $\lambda = 0$ es un valor propio, siendo (3.16) la función propia correspondiente. Para $\lambda = n^2$, $(n = 1, 2, ...)$, la solución no trivial del sistema (3.15) da $A = 0$, $B \neq 0$. Reuniendo los resultados anteriores, se obtienen los valores propios y las funciones propias normalizadas

$$\begin{aligned}&\lambda_0 = 0, \qquad \phi_0(x) = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}},\\ &\lambda_n = n^2, \qquad \phi_n(x) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\cos(nx), \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ ...).\end{aligned} \tag{3.17}$$

Nótese que los valores propios son reales y simples, formando la sucesión infinita creciente $0 < 1 < 4 < 6 < ...$; también se cumple que $n^2 \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Adicionalmente, las funciones propias (3.17) son ortonormales en el intervalo en $[0, \pi]$ con respecto a la función de ponderación $r(x) = 1 > 0$, la cual se toma de (3.13). Esto se puede probar sustituyendo $r(x) = 1$ y las funciones propias (3.17) en la condición de ortonormalidad (3.2). Igualmente, se destaca la propiedad de completitud del conjunto infinito formado por las funciones (3.17). Gracias a esa propiedad, cualquier función $f(x)$ que llene los requisitos establecidos por el teorema de convergencia 1, se puede desarrollar en una serie de la forma (3.3), usando las funciones propias (3.17).

Los dos ejemplos anteriores tienen importancia para el desarrollo del método de la función de Green. En efecto, cabe señalar que el problema homogéneo (3.4) está asociado con el problema no homogéneo (2.75) del capítulo 2. Comparando estos dos problemas se observa que los valores propios (3.10) del problema (3.4) coinciden exactamente con los valores de λ (2.77) para los cuales la función de Green (2.52) del problema (2.75) no está definida. De manera análoga, examinando los resultados obtenidos para los problemas (3.12) y (2.78), se encuentra que los valores propios del problema homogéneo (3.12) dados en (3.17), coinciden con los valores de λ (2.80) y (2.81) para los cuales una de las funciones de Green (2.38) o (2.52) del problema (2.78) no existe.

A continuación se determinan los valores propios y las funciones propias del problema (3.1), para el caso en que la ecuación diferencial en (3.1) tiene coeficientes constantes. Esto con el fín de examinar la relación existente entre dichos valores propios y las condiciones de existencia (2.27), (2.39) y (2.53) asociadas, en su orden, con las funciones de Green (2.24), (2.38) y (2.53).

2. Problema homogéneo con coeficientes constantes

Sea el sistema

$$\begin{array}{ll} (\exp(cx)\,\nu')' + \lambda \exp(cx)\,\nu = 0, & a \leq x \leq b, \\ \alpha_1 \nu(a) + \alpha_2 \nu'(a) = 0, & \beta_1 \nu(b) + \beta_2 \nu'(b) = 0, \end{array} \tag{3.18}$$

con valores de c, a, b, α_1, α_2, β_1 y β_2 dados (fijos), mientras que λ es un parámetro cuyo valor puede variar. Se excluye el caso cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, o $\beta_1 = \beta_1 = 0$. Desarrollando el primer término de la ecuación diferencial en (3.18) y simplificando por el factor $\exp(cx) \neq 0$ se tiene

$$\nu'' + c\nu' + \lambda\nu = 0, \tag{3.19}$$

que es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo grado con coeficientes constantes. Comparando (3.18) con (3.1), se establecen las correspondencias

$$p(x) = \exp(cx), \qquad q(x) = 0, \qquad r(x) = \exp(cx). \tag{3.20}$$

Entonces, el sistema (3.18) es un caso particular del problema (3.1), y por esto, al resolver (3.18) es válido aplicar las propiedades del problema (3.1), enumeradas en la sección 3.1. La solución general de (3.19) puede escribirse como

$$\nu = A\nu_1(x) + B\nu_2(x), \tag{3.21}$$

donde $\nu_1(x)$, $\nu_2(x)$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial en (3.19); y A, B son constantes arbitrarias. Con base en (3.21), se evalúa $\nu(a)$, $\nu'(a)$, $\nu(b)$ y $\nu'(b)$ y se reemplaza en las condiciones de frontera en (3.18). Después de reagrupar términos, se forma el siguiente sistema de ecuaciones algebráicas con respecto a A y B

$$\begin{array}{l} [\alpha_1\nu_1(a) + \alpha_2\nu_1'(a)]\,A + [\alpha_1\nu_2(a) + \alpha_2\nu_2'(a)]\,B = 0, \\ [\beta_1\nu_1(b) + \beta_2\nu_1'(b)]\,A + [\beta_1\nu_2(b) + \beta_2\nu_2'(b)]\,B = 0. \end{array} \tag{3.22}$$

Dado que interesan sólo las soluciones no triviales, para las cuales por lo menos una de las constantes A o B es diferente de cero, entonces, se exige la igualdad a cero del determinante del sistema (3.22)

$$\begin{array}{l} [\alpha_1\nu_1(a) + \alpha_2\nu_1'(a)]\,[\beta_1\nu_2(b) + \beta_2\nu_2'(b)] - \\ [\alpha_1\nu_2(a) + \alpha_2\nu_2'(a)]\,[\beta_1\nu_1(b) + \beta_2\nu_1'(b)] = 0. \end{array} \tag{3.23}$$

Esta ecuación permite determinar los valores propios λ_n del problema homogéneo (3.18). A continuación, es necesario precisar la forma de las soluciones $\nu_1(x)$, $\nu_2(x)$, la cual depende de los valores de c y λ en (3.19). A continuación se examinan los casos $c^2 - 4\lambda > 0$, $c^2 - 4\lambda = 0$ y $c^2 - 4\lambda < 0$. Teniendo en cuenta que c es un número fijo y λ es un parámetro, estos casos adquieren la forma: $\lambda < \frac{c^2}{4}$, $\lambda = \frac{c^2}{4}$ y $\lambda > \frac{c^2}{4}$, respectivamente.

Caso1. Si $\lambda < \frac{c^2}{4}$, entonces las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial en (3.19) se pueden escoger así [2]:

$$\nu_1(x) = \exp\left(-\frac{c}{2}x\right)\cosh(kx), \quad \nu_2(x) = \exp\left(-\frac{c}{2}x\right)\sinh(kx), \tag{3.24}$$

siendo $k = \frac{\left(c^2-4\lambda\right)^{\frac{1}{2}}}{2} > 0$. Sustituyendo (3.24) en (3.21), se escribe

$$\nu(x) = \exp\left(-\frac{c}{2}x\right)\left[A\cosh(kx) + B\sinh(kx)\right]. \tag{3.25}$$

A su vez, reemplazando (3.25) y su primera derivada en (3.22) se llega al siguiente sistema de ecuaciones para A y B

$$\begin{array}{l} \left[\left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 c\right)\cosh(ka) + \alpha_2 k\sinh(ka)\right] A + \\ \left[\left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 c\right)\sinh(ka) + \alpha_2 k\cosh(ka)\right] B = 0, \\ \left[\left(\beta_1 - \frac{1}{2}\beta_2 c\right)\cosh(kb) + \beta_2 k\sinh(kb)\right] A + \\ \left[\left(\beta_1 - \frac{1}{2}\beta_2 c\right)\sinh(kb) + \beta_2 k\cosh(kb)\right] B = 0, \end{array} \tag{3.26}$$

y la igualdad a cero (3.23) adquiere la forma

$$\begin{array}{l} \left[\left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 c\right)\cosh(ka) + \alpha_2 k\sinh(ka)\right] \times \\ \left[\left(\beta_1 - \frac{1}{2}\beta_2 c\right)\sinh(kb) + \beta_2 k\cosh(kb)\right] - \\ \left[\left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 c\right)\sinh(ka) + \alpha_2 k\cosh(ka)\right] \times \\ \left[\left(\beta_1 - \frac{1}{2}\beta_2 c\right)\cosh(kb) + \beta_2 k\sinh(kb)\right] = 0. \end{array} \tag{3.27}$$

Esta es la ecuación para los valores propios del problema (3.18) en la región $\lambda < \frac{c^2}{4}$. Ahora se puede establecer la relación existente entre la ecuación para los valores propios (3.27) y la condición de existencia (2.27) para la función de Green (2.24) del problema no homogéneo (2.1). Para esto, se hace notar que ambos lados de la desigualdad (2.27) coinciden con los de la igualdad (3.26). Además, se supone que c, a, b, α_1, α_2, β_1 y β_2 son conocidos (fijos) e iguales para los dos problemas (3.18) y (2.1), siendo λ un parámetro. Entonces se puede afirmar que en la región $\lambda < \frac{c^2}{4}$ la función de Green (2.24) está bien definida sólo para los valores de λ diferentes de los valores propios λ_n del problema (3.18) (para $\lambda \neq \lambda_n$, el problema homogéneo (3.18) tiene solo la solución trivial $v = 0$). Para resolver la ecuación (3.27) con respecto a λ se deben conocer los valores concretos de c, a, b, α_1, α_2, β_1 y β_2. Una vez encontrados los valores propios λ_n, se procede a determinar las funciones propias $\phi_n(x)$. Tomando $\lambda = \lambda_n$, $\nu = \phi_n(x)$, $A = A_n$ y $B = B_n$ en la fórmula (3.25), se tiene

$$\phi_n(x) = \exp\left(-\frac{c}{2}x\right)\left[A_n\cosh(k_n x) + B_n\sinh(k_n x)\right], \tag{3.28}$$

donde $k_n = \frac{\left(c^2-4\lambda_n\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$. De otra parte, utilizando (3.26), se puede expresar A_n en términos de B_n o visceversa. Para esto se consideran las siguientes posibilidades.

a) Si $\left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 c\right)\sinh\left(k_n a\right)+\alpha_2 k_n\cosh\left(k_n a\right) \neq 0$, entonces de la primera ecuación en (3.26) se despeja B_n

$$B_n = -\frac{\left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 c\right)\cosh\left(k_n a\right) + \alpha_2 k_n \sinh\left(k_n a\right)}{\left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 c\right)\sinh\left(k_n a\right) + \alpha_2 k_n \cosh\left(k_n a\right)} A_n$$

y se reemplaza en (3.28)

$$\begin{aligned}\phi_n\left(x\right) &= A_n \exp\left(-\tfrac{c}{2}x\right) \times \\ &\left[\cosh\left(k_n x\right) - \frac{\left(\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_2 c\right)\cosh(k_n a)+\alpha_2 k_n\sinh(k_n a)}{\left(\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_2 c\right)\sinh(k_n a)+\alpha_2 k_n\cosh(k_n a)}\sinh\left(k_n x\right)\right].\end{aligned} \tag{3.29}$$

b) Si $\left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 c\right)\cosh\left(k_n a\right) + \alpha_2 k_n\sinh\left(k_n a\right) \neq 0$, se despeja A_n de la primera ecuación en (3.26)

$$A_n = -\frac{\left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 c\right)\sinh\left(k_n a\right) + \alpha_2 k_n \cosh\left(k_n a\right)}{\left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 c\right)\cosh\left(k_n a\right) + \alpha_2 k_n \sinh\left(k_n a\right)} B_n$$

y se sustituye en (3.28)

$$\begin{aligned}\phi_n\left(x\right) &= B_n \exp\left(-\tfrac{c}{2}x\right) \times \\ &\left[-\frac{\left(\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_2 c\right)\sinh(k_n a)+\alpha_2 k_n\cosh(k_n a)}{\left(\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_2 c\right)\cosh(k_n a)+\alpha_2 k_n\sinh(k_n a)}\cosh\left(k_n x\right) + \sinh\left(k_n x\right)\right].\end{aligned} \tag{3.30}$$

c) Si al mismo tiempo se cumple que

$$\left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 c\right)\sinh\left(k_n a\right) + \alpha_2 k_n \cosh\left(k_n a\right) = 0$$

y

$$\left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 c\right)\cosh\left(k_n a\right) + \alpha_2 k_n \sinh\left(k_n a\right) = 0,$$

entonces, cuando se multiplica la primera igualdad por $\cosh\left(k_n a\right)$ y la segunda por $-\sinh\left(k_n a\right)$ y luego se suman, se obtiene que $\alpha_2 k_n = 0$; como $k_n > 0$, entonces se obtiene que $\alpha_2 = 0$. Ahora si se multiplica la primera igualdad por $-\sinh\left(k_n a\right)$, la segunda por $\cosh\left(k_n a\right)$ y se suman, se llega a la ecuación $\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 c = 0$; teniendo en cuenta que $\alpha_2 = 0$ se concluye que también $\alpha_1 = 0$. El caso cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, significa que la primera condición de frontera en (3.18) se desconoce y, por lo tanto, no existe una solución única del problema (3.18). En todo los problemas considerados en este texto se considera que por lo menos uno de los α_2, α_1 es diferente de cero, lo mismo para β_1, β_2. Por lo tanto, se exige que $\left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 c\right)\sinh\left(k_n a\right)+\alpha_2 k_n\cosh\left(k_n a\right)$ y $\left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 c\right)\cosh\left(k_n a\right) + \alpha_2 k_n\sinh\left(k_n a\right)$ no pueden ser al mismo tiempo iguales a cero.

Las expresiones (3.29) y (3.30) representan las funciones propias del problema homogéneo con coeficientes constantes (3.18) correspondientes a los valores propios $\lambda = \lambda_n$ definidos por la ecuación (3.27) en la región $\lambda < \frac{c^2}{4}$. Nótese que esas funciones están determinadas con una exactitud de hasta un factor constante arbitrario A_n o B_n.

Caso 2. Cuando $\lambda = \frac{c^2}{4}$, entonces dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial (3.19) son [2]

$$\nu_1(x) = \exp\left(-\frac{c}{2}x\right), \quad \nu_2(x) = x\exp\left(-\frac{c}{2}x\right). \tag{3.31}$$

Por tanto, (3.21) adquiere la forma

$$\nu(x) = \exp\left(-\frac{c}{2}x\right)[A + Bx]. \tag{3.32}$$

Ahora se sustituye (3.32) y su primera derivada en (3.22), obteniéndose un sistema de ecuaciones para A y B

$$\begin{aligned} &\left(\alpha_1 - \tfrac{c}{2}\alpha_2\right)A + \left[a\left(\alpha_1 - \tfrac{c}{2}\alpha_2\right) + \alpha_2\right]B = 0, \\ &\left(\beta_1 - \tfrac{c}{2}\beta_2\right)A + \left[b\left(\beta_1 - \tfrac{c}{2}\beta_2\right) + \beta_2\right]B = 0. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Luego se exige la igualdad a cero del determinante del sistema anterior

$$\left(\alpha_1 - \frac{c}{2}\alpha_2\right)\left[b\left(\beta_1 - \frac{c}{2}\beta_2\right) + \beta_2\right] - \left(\beta_1 - \frac{c}{2}\beta_2\right)\left[a\left(\alpha_1 - \frac{c}{2}\alpha_2\right) + \alpha_2\right] = 0. \tag{3.34}$$

Si $\lambda = \frac{c^2}{4}$ satisface esta ecuación, significa que $\lambda = \frac{c^2}{4}$ es un valor propio del problema (3.18). De otra parte, es relevante señalar la relación que existe entre la ecuación (3.34) y la condición de existencia (2.39) de la función de Green (2.38) del problema no homogéneo (2.1). Con este fín, se observa que ambos lados de la igualdad (3.34) y de la desigualdad (2.39) son los mismos. Si además se supone que c, a, b, α_1, α_2, β_1 y β_2 están dados, siendo iguales en (3.18) y (2.1), y λ es un parámetro, entonces, se puede concluir que para $\lambda = \frac{c^2}{4}$ la función de Green (2.38) existe sólo si dicho valor no representa un valor propio de (3.18); de lo contrario, para $\lambda = \frac{c^2}{4}$ el problema homogéneo (3.18) se sastisface sólo con la solución trivial $v = 0$. Después de hallar el valor propio $\lambda = \lambda_0$ que es solución de (3.34), se escribe la expresión para la función propia correspondiente $\phi_0(x)$. Para esto, en la fórmula (3.32) se toma $\lambda = \lambda_0$, $\nu = \phi_0(x)$, $A = A_0$ y $B = B_0$

$$\phi_0(x) = (A_0 + B_0 x)\exp\left(-\frac{c}{2}x\right). \tag{3.35}$$

En (3.35), utilizando la relación (3.33), se puede expresar A_0 en términos de B_0 o visceversa. Con este fin, se examinan las siguientes alternativas.

a) Cuando $a\left(\alpha_1 - \frac{c}{2}\alpha_2\right) + \alpha_2 \neq 0$, se despeja B_0 de la primera ecuación en (3.33)

$$B_0 = -\frac{\alpha_1 - \frac{c}{2}\alpha_2}{a\left(\alpha_1 - \frac{c}{2}\alpha_2\right) + \alpha_2}A_0$$

y se sustituye en (3.35)

$$\phi_0(x) = A_0 \left(1 - \frac{\alpha_1 - \frac{c}{2}\alpha_2}{a\left(\alpha_1 - \frac{c}{2}\alpha_2\right) + \alpha_2} x\right) \exp\left(-\frac{c}{2}x\right). \tag{3.36}$$

b) Si $\alpha_1 - \frac{c}{2}\alpha_2 \neq 0$, se despeja A_0 de la primera ecuación en (3.33)

$$A_0 = -\frac{a\left(\alpha_1 - \frac{c}{2}\alpha_2\right) + \alpha_2}{\alpha_1 - \frac{c}{2}\alpha_2} B_0$$

y se reemplaza en (3.35)

$$\phi_0(x) = B_0 \left(-\frac{a\left(\alpha_1 - \frac{c}{2}\alpha_2\right) + \alpha_2}{\alpha_1 - \frac{c}{2}\alpha_2} + x\right) \exp\left(-\frac{c}{2}x\right). \tag{3.37}$$

c) Por último, si $a\left(\alpha_1 - \frac{c}{2}\alpha_2\right) + \alpha_2 = 0$ y $\alpha_1 - \frac{c}{2}\alpha_2 = 0$, reemplazando la segunda ecuación en la primera, se tiene $\alpha_2 = 0$. De la segunda ecuación se escribe $\alpha_1 - \frac{c}{2}\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{c}{2} \times 0 = 0$, es decir, $\alpha_1 = 0$. Pero, como se indicó anteriormente, el caso $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ se excluye.

Resumiendo, para el valor propio $\lambda = \lambda_0$ que es raíz de (3.34), la función propia del problema (3.18) está dada por (3.36) o (3.37), estando definida con una exactitud de hasta un factor constante arbitrario A_0 o B_0.

Caso 3. Suponiendo que $\lambda > \frac{c^2}{4}$, entonces la ecuación diferencial (3.19) tiene como soluciones linealmente independientes las funciones [2]

$$\nu_1(x) = \exp\left(-\frac{c}{2}x\right)\cos(\gamma x),\ \nu_2(x) = \exp\left(-\frac{c}{2}x\right)\sin(\gamma x), \tag{3.38}$$

siendo $\gamma = \frac{\sqrt{4\lambda - c^2}}{2} > 0$. De otra parte, la solución general (3.21) se escribe así:

$$\nu(x) = [A\cos(\gamma x) + B\sin(\gamma x)]\exp\left(-\frac{c}{2}x\right). \tag{3.39}$$

Como en los casos anteriores, se reemplaza (3.39) y su primera derivada en (3.22) y (3.23)

$$\begin{aligned} &(k_1\cos(\gamma a) - \alpha_2\gamma\sin(\gamma a))A + (k_1\sin(\gamma a) + \alpha_2\gamma\cos(\gamma a))B = 0,\\ &(k_2\cos(\gamma b) - \beta_2\gamma\sin(\gamma b))A + (k_2\sin(\gamma b) + \beta_2\gamma\cos(\gamma b))B = 0, \end{aligned} \tag{3.40}$$

y

$$\begin{aligned} &(k_1\cos(\gamma a) - \alpha_2\gamma\sin(\gamma a))(k_2\sin(\gamma b) + \beta_2\gamma\cos(\gamma b)) -\\ &(k_1\sin(\gamma a) + \alpha_2\gamma\cos(\gamma a))(k_2\cos(\gamma b) - \beta_2\gamma\sin(\gamma b)) = 0, \end{aligned} \tag{3.41}$$

siendo $k_1 = \alpha_1 - \frac{c}{2}\alpha_2,\ k_2 = \beta_1 - \frac{c}{2}\beta_2$. Resolviendo (3.41) respecto a λ, se determinan los valores propios λ_n del problema (3.18) en la región $\lambda > \frac{c^2}{4}$. También, se puede verificar que son iguales ambos lados de la igualdad (3.41) y de la desigualdad (2.53), esta última relacionada con la función de Green (2.52) del problema no homogéneo (2.1). Esto implica que para $\lambda > \frac{c^2}{4}$ y para un mismo conjunto de valores de c, a, b, α_1, α_2, β_1 y β_2 en (3.18) y (2.1), se tiene que la función de Green (2.52) existe sólo cuando el valor de λ en (2.1) no coincide con ninguno de los valores propios λ_n obtenidos a partir de (3.41) (cabe recordar que para dichos valores de λ la única solución del problema homogéneo (3.18) es la solución trivial $v = 0$). Una vez conocidos los valores propios λ_n, se procede a expresar las funciones propias $\phi_n(x)$ correspondientes. Se toma $\gamma = \gamma_n$, $\nu = \phi_n(x)$, $A = A_n$ y $B = B_n$ en la fórmula (3.39)

$$\phi_n(x) = [A_n \cos(\gamma_n x) + B_n \sin(\gamma_n x)] \exp\left(-\frac{c}{2}x\right), \tag{3.42}$$

donde $\gamma_n = \frac{\sqrt{4\lambda_n - c^2}}{2}$. Las constantes A_n y B_n se toman de (3.40), considerando los siguientes casos:

a) Si $k_1 \sin(\gamma_n a) + \alpha_2 \gamma_n \cos(\gamma_n a) \neq 0$, entonces se despeja B_n de la primera ecuación en (3.40)

$$B_n = -\frac{k_1 \cos(\gamma_n a) - \alpha_2 \gamma_n \sin(\gamma_n a)}{k_1 \sin(\gamma_n a) + \alpha_2 \gamma_n \cos(\gamma_n a)} A_n$$

y se sustituye en (3.42)

$$\begin{aligned} &\phi_n(x) = \\ &A_n \left(\cos(\gamma_n x) - \tfrac{k_1 \cos(\gamma_n a) - \alpha_2 \gamma_n \sin(\gamma_n a)}{k_1 \sin(\gamma_n a) + \alpha_2 \gamma_n \cos(\gamma_n a)} \sin(\gamma_n x)\right) \exp\left(-\tfrac{c}{2}x\right). \end{aligned} \tag{3.43}$$

b) Suponiendo que $k_1 \cos(\gamma_n a) - \alpha_2 \gamma_n \sin(\gamma_n a) \neq 0$, entonces de la primera ecuación en (3.40) se despeja A_n

$$A_n = -\frac{k_1 \sin(\gamma_n a) + \alpha_2 \gamma_n \cos(\gamma_n a)}{k_1 \cos(\gamma_n a) - \alpha_2 \gamma_n \sin(\gamma_n a)} B_n$$

y se sustituye en (3.42)

$$\begin{aligned} &\phi_n(x) = \\ &B_n \left(\sin(\gamma_n x) - \tfrac{k_1 \sin(\gamma_n a) + \alpha_2 \gamma_n \cos(\gamma_n a)}{k_1 \cos(\gamma_n a) - \alpha_2 \gamma_n \sin(\gamma_n a)} \cos(\gamma_n x)\right) \exp\left(-\tfrac{c}{2}x\right). \end{aligned} \tag{3.44}$$

c) Cuando $k_1 \sin(\gamma_n a) + \alpha_2 \gamma_n \cos(\gamma_n a) = 0$ y $k_1 \cos(\gamma_n a) - \alpha_2 \gamma_n \sin(\gamma_n a) = 0$, si se multiplica la primera ecuación por $\cos(\gamma_n a)$, la segunda por $-\sin(\gamma_n a)$ y se suman, da que $\alpha_2 \gamma_n = 0$. De donde $\alpha_2 = 0$ ya que $\gamma_n > 0$. Ahora, multiplicando la primera ecuación por $\sin(\gamma_n a)$, la segunda por $\cos(\gamma_n a)$ y sumando los resultados, se tiene $k_1 = \alpha_1 - \frac{c}{2}\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{c}{2} \times 0 = 0$. En definitiva se tiene que $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_1 = 0$, pero este caso anteriormente se ha descartado.

En resumen, las expresiones (3.43) o (3.44) proporcionan las funciones propias correspondientes a los valores propios λ_n del problema (3.18) en la región $\lambda > \frac{c^2}{4}$. Como en los casos anteriores, las funciones propias están determinadas con una exactitud de hasta el factor arbitario A_n o B_n.

Con el examen de los tres casos anteriores se completa la solución del problema homogéneo con coeficientes constantes (3.18). Los valores propios y las funciones propias que se han obtenido ilustran las propiedades de los problemas homogéneos regulares de Sturm-Liouville con valores en la frontera enumerados en la sección 2.1. Como resultado importante para el desarrollo subsiguiente del método de la función de Green se ha demostrado que las funciones de Green (2.24), (2.38), (2.52) no están definidas cuando el valor de λ que interviene en la ecuación diferencial en (2.1) coincide con alguno de los valores propios del problema homogéneo correspondiente (3.18).

A continuación, los resultados de la presente sección se ilustran con un ejemplo sencillo.

EJEMPLO 3. Halle los valores propios y las funciones propias del problema

$$\begin{gathered}\nu'' + \lambda\nu = 0, \qquad 0 \leq x \leq 1, \\ \nu'(0) = 0, \qquad \nu'(1) = 0.\end{gathered} \tag{3.45}$$

SOLUCIÓN: Comparando (3.45) con (3.18), se escriben las equivalencias

$$c = 0,\ a = 0,\ b = 1,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1. \tag{3.46}$$

A continuación se consideran los tres casos: $\lambda < \frac{c^2}{4}$, $\lambda = \frac{c^2}{4}$, $\lambda > \frac{c^2}{4}$.

a) Para $\lambda < \frac{c^2}{4}$ $(\lambda < 0)$ se resuelve la ecuación para los valores propios (3.27), la cual haciendo los reemplazos indicados en (3.46) queda así:

$$\lambda\left[\exp\left(\sqrt{-\lambda}\right) - \exp\left(-\sqrt{-\lambda}\right)\right] = 0.$$

Esta ecuación implica que $\lambda = 0$ o bien $\exp\left(-\sqrt{-\lambda}\right) = \exp\left(\sqrt{-\lambda}\right)$, esta última igualdad da nuevamente el valor $\lambda = 0$, el cual se descarta como valor propio ya que no es menor que cero. Entonces, en el intervalo $\lambda < 0$ el problema (3.45) no tiene valores propios.

b) Se verifica si $\lambda = \frac{c^2}{4} = 0$ y los valores dados en (3.46) satisfacen la ecuación (3.34), obteniéndose que $\lambda = \lambda_0 = 0$ si es un valor propio del problema (3.45). Ahora se debe escoger cuál expresión (3.36) o (3.37) es la función propia $\phi_0(x)$ correspondiente a $\lambda_0 = 0$. Para esto, teniendo en cuenta (3.46), se comprueba si $a\left(\alpha_1 - \frac{c}{2}\alpha_2\right) + \alpha_2 \neq 0$ y/o $\alpha_1 - \frac{c}{2}\alpha_2 \neq 0$, lo que da que se cumple la primera desigualdad, por lo tanto se escoge la expresión (3.36) como función propia, la cual adquiere la forma $\phi_0(x) = A_0$, donde A_0 es una constante arbitraria.

c) Cuando $\lambda > \frac{c^2}{4} = 0$, teniendo en cuenta (3.46), la ecuación para los valores propios (3.41) se escribe como $\lambda \sin\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0$, de donde se encuentran los valores propios positivos $\lambda_n = n^2\pi^2$, $(n = 1, 2, ...)$. A continuación se escoge entre una de las fórmulas (3.43) o (3.44) para expresar las funciones propias $\phi_n(x)$ correspondientes. Para esto, con base en (3.46), se verifica si $k_1 \sin(\gamma_n a) + \alpha_2\gamma_n \cos(\gamma_n a) \neq 0$ y/o $k_1 \sin(\gamma_n a) + \alpha_2\gamma_n \cos(\gamma_n a) \neq 0$, donde $k_1 = \alpha_1 - \frac{c}{2}\alpha_2$, obteniéndose que tiene lugar la primera desigualdad, por lo que se toma la fórmula (3.43) como funciones propias, las cuales se escriben así: $\phi_n(x) = A_n \cos(n\pi x)$, $(n = 1, 2, ...)$.

Reuniendo los casos anteriormente examinados se tiene que

$$\lambda_0 = 0,\ \lambda_n = n^2\pi^2, \qquad (n = 1,\ 2,\ ...)\,, \tag{3.47}$$

son los valores propios del problema (3.45) y las funciones propias correspondientes estan dadas por

$$\phi_0\,(x) = A_0, \qquad \phi_n\,(x) = A_n \cos\,(n\pi x)\,, \qquad (n = 1,\ 2,\ ...)\,, \tag{3.48}$$

las cuales una vez normalizadas forman el siguiente conjunto ortonormal con respecto a la función de ponderación $r\,(x) \equiv 1$ en el intervalo $[0,\ 1]$

$$\left\{1,\ \ \sqrt{2}\cos\,(n\pi x)\right\}\Big|_{n=1}^{\infty}. \tag{3.49}$$

Por último, cabe mencionar que para el problema no homogéneo

$$\begin{array}{l} u'' + \lambda u = F\,(x), \qquad 0 \le x \le 1, \\ u'\,(0) = d_1, \qquad u'\,(1) = d_2, \end{array}$$

correspondiente al sistema homogéneo (3.45), las funciones de Green (2.24), (2.38), 2.52) no están definidas cuando el valor del parámetro λ coincide con alguno de los valores propios (3.47).

3. Función de Green generalizada

En la sección anterior se demostró que cuando el valor del parámetro λ en el problema no homogéneo con coeficientes constantes (2.1) coincide con alguno de los valores propios λ_n $(n = 1,\ 2,\ ...)$ del problema homogéneo correspondiente (3.18), una de las funciones de Green (2.24), (2.38) y (2.52) no está definida. En la presente sección se examina el problema no homogéneo con coeficientes variables (1.1) cuando el valor de λ en (1.1) coincide con uno de los valores propios del problema homogéneo correspondiente (3.1). El sistema (2.1) se trata como un caso particular del sistema (1.1). Se supone que tanto en (1.1) como en (3.1) las funciones $p\,(x)$, $q\,(x)$, $r\,(x)$ son las mismas y están dadas. Además, se exige que $p\,(x)$, $p'\,(x)$, $q\,(x)$ y $r\,(x)$ sean continuas en $[a,\ b]$ y $p\,(x) > 0$ y $r\,(x) > 0$ en $[a,\ b]$, es decir, los dos sistemas (1.1) y (3.1) son problemas regulares de Sturm-Liouville. De acuerdo con lo anterior, en la ecuación diferencial en (1.1) se reemplaza λ por λ_m, donde λ_m es uno de los valores propios del problema (3.1)

$$\begin{array}{l} (p\,(x)\,u'\,(x))' + q\,(x)\,u\,(x) + \lambda_m r\,(x)\,u\,(x) = f\,(x), \qquad a \le x \le b, \\ \alpha_1 u\,(a) + \alpha_2 u'\,(a) = d_1, \qquad \beta_1 u\,(b) + \beta_2 u'\,(b) = d_2. \end{array} \tag{3.50}$$

En principio, la función de Green del problema (3.50) debería regirse por el sistema (1.18) y su solución estaría dada por la expresión (1.19). Pero ya se conoce que cuando en (3.50) la ecuación diferencial tiene coeficientes constantes, las funciones de Green (2.24), (2.38) y (2.54) no son válidas. Buscando el origen de esta falla, se recuerda que esas funciones se hallaron como soluciones del sistema (2.3), que a su vez se formuló como un caso particular del sistema (1.18). De esta manera se concluye que el sistema (1.18) realmente no define la función de Green del problema (3.50) cuando se tiene una ecuación diferencial con coeficientes constantes. Para enmendar esta situación, se comienza con un examen de la formulación del sistema (3.50) con el fín de establecer si el mismo está bien planteado. En esta dirección, se aplica la siguiente prueba sobre la ecuación diferencial en (3.50). Ambos lados de esa ecuación se multiplican por la función propia $\phi_m(x)$ del problema homogéneo (3.1) asociada con el valor propio λ_m y se integra entre a y b

$$\int_a^b \phi_m(x)\left\{[p(x)\,u'(x)]' + q(x)\,u(x) + \lambda_m r(x)\,u(x)\right\}dx = \int_a^b \phi_m(x)\,f(x)\,dx.$$

Integrando por partes, se tiene

$$\begin{aligned} &\{p(x)\,[u'(x)\,\phi_m(x) - u(x)\,\phi_m'(x)]\}_{x=a}^{b} + \\ &\textstyle\int_a^b u(x)\left\{[p(x)\,\phi_m'(x)]' + q(x)\,\phi_m(x) + \lambda_m r(x)\,\phi_m(x)\right\}dx = \\ &\textstyle\int_a^b \phi_m(x)\,f(x)\,dx. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Luego se hace notar que $\phi_m(x)$ satisface el sistema (3.1) con $\lambda = \lambda_m$

$$\begin{aligned} &(p(x)\,\phi_m'(x))' + q(x)\,\phi_m(x) + \lambda_m r(x)\,\phi_m(x) = 0, \qquad a \le x \le b, \\ &\alpha_1\phi_m(a) + \alpha_2\phi_m'(a) = 0, \qquad \beta_1\phi_m(b) + \beta_2\phi_m'(b) = 0. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Entonces, (3.51) se reduce a

$$\int_a^b \phi_m(x)\,f(x)\,dx = M, \tag{3.53}$$

donde

$$M = p(x)\,[u'(x)\,\phi_m(x) - u(x)\,\phi_m'(x)]\big|_{x=a}^{b} \tag{3.54}$$

es una constante cuyo valor depende de las condiciones de frontera para $u(x)$ y $\phi_m(x)$ dadas en (3.50) y (3.52). La ecuación (3.53) establece una restricción o condición sobre la función $f(x)$ que figura en el problema (3.50): $f(x)$ debe ser tal que la integral en (3.53) sea igual a M (se considera que $\phi_m(x)$ es conocida, ya que se toma de la solución del problema homogéneo). En caso contrario, el problema (3.50) está mal planteado, en otras palabras, no tiene solución. El valor de M es propio de cada problema del tipo (3.50). Por ejemplo, si en las condiciones de frontera dadas en (3.50) y (3.52) se supone que $\alpha_1 \neq 0$ y $\beta_1 \neq 0$, entonces, despejando $u(a)$, $u(b)$, $\phi_m(a)$ y $\phi_m(b)$ de dichas condiciones y sustituyéndolas en (3.54), es fácil probar que $M = -\frac{d_2}{\beta 1}p(b)\,\phi_m'(b) + \frac{d_1}{\alpha_1}p(a)\,\phi_m'(a)$. Otro ejemplo, cuando $\alpha_2 \neq 0$ y $\beta_2 \neq 0$, el resultado es $M = \frac{d_2}{\beta_2}p(b)\,\phi_m(b) - \frac{d_1}{\alpha_2}p(a)\,\phi_m(a)$.

A continuación, se centra la atención en la función de Green para el problema (3.50). Usando el sistema (1.18) que se obtuvo en el capítulo 1 para definir la función de Green del problema (1.1), pero sustituyendo $\lambda = \lambda_m$, se escribe

$$\begin{aligned} &(p(x')\,G_{x'})_{x'} + q(x')\,G + \lambda_m r(x')\,G = \delta(x' - x), \qquad a \le x \le b, \\ &\alpha_1 G(a,\,x) + \alpha_2 G_{x'}(a,\,x) = 0, \qquad \beta_1 G(b,\,x) + \beta_2 G_{x'}(b,\,x) = 0. \end{aligned} \tag{3.55}$$

En primer lugar, se verifica si el anterior sistema está bien planteado. Para esto se aplica un procedimiento análogo al que se desarrollo con la ecuación diferencial en (3.50). Ambos lados de la ecuación diferencial en (3.55) se multiplican por la función propia $\phi_m(x)$ y se integra entre a y b

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_a^b \phi_m(x')\left\{[p(x')\,G_{x'}(x',\ x)]_{x'} + q(x')\,G(x',\ x) + \lambda_m r(x')\,G(x',\ x)\right\}dx' = \\ &\textstyle\int_a^b \phi_m(x')\,\delta(x'-x)\,dx'.\end{aligned}$$

Integrando por partes y aplicando las propiedades de la función delta de Dirac, la anterior ecuación se escribe así:

$$\begin{aligned}&[p(x')\,(G_{x'}(x',\ x)\,\phi_m(x') - G(x',\ x)\,\phi_m'(x'))]_{x'=a}^{b} + \\ &\textstyle\int_a^b G\left[(p\phi_m')' + q\phi_m + \lambda_m r\phi_m\right]dx' = \phi_m(x).\end{aligned} \tag{3.56}$$

Para evaluar esta expresión, se tiene en cuenta que, según (3.55) y (3.52), tanto G como ϕ_m satisfacen las mismas condiciones de frontera homogéneas, de donde es fácil probar que

$$[p(x')\,(G_{x'}(x',\,x)\,\phi_m(x') - G(x',\,x)\,\phi_m'(x'))]_{x'=a}^{b} = 0. \tag{3.57}$$

Reemplazando la primera ecuación de (3.52) y (3.57) en (3.56), se obtiene que

$$0 \equiv \phi_m(x)\,. \tag{3.58}$$

Ya que la función propia $\phi_m(x)$ no puede ser idénticamente igual a cero, el resultado (3.58) significa que cuando λ_m representa un valor propio del problema homogéneo (3.1), la ecuación diferencial para la función de Green de (3.55) está mal planteada y, por tanto, se requiere modificarla. Con este fin, se agrega en el lado derecho de la ecuación diferencial otro término $h(x',\,x)$ por ahora desconocido, el cual es función de x' y x

$$\begin{aligned}&(p(x')\,G_{x'})_{x'} + q(x')\,G + \lambda_m r(x')\,G = \\ &\delta(x'-x) + h(x',\ x), \qquad a \le x' \le b, \\ &\alpha_1 G(a,\ x) + \alpha_2 G_{x'}(a,\ x) = 0, \\ &\beta_1 G(b,\ x) + \beta_2 G_{x'}(b,\ x) = 0.\end{aligned} \tag{3.59}$$

Aplicando a la ecuación diferencial en (3.59), el mismo procedimiento que se utilizó anteriormente con la ecuación diferencial en (3.55), se llega a la ecuación

$$\int_a^b \phi_m(x')\,[\delta(x'-x) + h(x',\,x)]\,dx' = 0,$$

o bien,

$$\int_a^b \phi_m(x')\,h(x',\,x)\,dx' = -\phi_m(x)\,. \tag{3.60}$$

El paso siguiente es encontrar una $h(x',\,x)$ tal que la ecuación (3.60) se cumpla, con lo cual la ecuación diferencial en (3.59) quedaría bien planteada. Por ejemplo, usando la condición de ortonormalidad (3.2), se toma $n = m$ y se cambia la notación de la variable muda x por x'

$$\int_a^b r(x')\,\phi_m(x')\,\phi_m(x')\,dx' = 1.$$

Ahora, multiplicando ambos lados por $-\phi_m(x)$ se escribe

$$\int_a^b \phi_m(x')\,(-\phi_m(x)\,r(x')\,\phi_m(x'))\,dx' = -\phi_m(x).$$

Luego, se compara esta ecuación con (3.60), lo que permite concluir que

$$h(x',\,x) = -\phi_m(x)\,r(x')\,\phi_m(x').$$

Este resultado se sustituye en (3.59)

$$\begin{array}{l} (p(x')\,G_{x'})_{x'} + q(x')\,G + \lambda_m r(x')\,G = \delta(x'-x) - \phi_m(x)\,r(x')\,\phi_m(x'), \\ \alpha_1 G(a,\;x) + \alpha_2 G_{x'}(a,\;x) = 0, \qquad \beta_1 G(b,\;x) + \beta_2 G_{x'}(b,\;x) = 0. \end{array} \tag{3.61}$$

La función de Green $G(x',\,x)$ que se rige por el sistema (3.61) se conoce como función de Green generalizada [3], la cual está asociada al problema no homogéneo (3.50), cuando λ_m es un valor propio del problema homogéneo (3.1).

Con base en los resultados anteriores, tambien se revisa la expresión (1.19) para $u(x)$

$$u(x) = -p\left[Gu' - G_{x'}u\right]\Big|_a^b + \int_a^b G(x',\,x)\,f(x')\,dx'.$$

Con este fín, se repite el procedimiento que en el capítulo 1 condujo a la expresión (1.19), pero esta vez aplicándolo al sistema (3.50) en vez del sistema (1.1). Dicho procedimiento consiste en multiplicar la ecuación diferencial en (3.50) por la función de Green G, integrando luego entre a y b

$$\begin{array}{l} \int_a^b G(x',\,x)\left[(p(x')\,u'(x'))' + q(x')\,u(x') + \lambda_m r(x')\,u(x')\right]dx' = \\ \int_a^b G(x',\;x)\,f(x')\,dx'. \end{array}$$

Con integración por partes del lado izquierdo, la anterior ecuación se escribe como

$$\begin{array}{l} \left[p(x')\,(G(x',\;x)\,u'(x') - G_{x'}(x',\;x)\,u(x'))\right]_{x'=a}^b + \\ \int_a^b u(x')\left[(p(x')\,G_{x'})_{x'} + q(x')\,G + \lambda_m r(x')\,G\right]dx' = \\ \int_a^b G(x',\;x)\,f(x')\,dx'. \end{array} \tag{3.62}$$

Exigiendo que G satisfaga la ecuación diferencial en (3.61), la ecuación (3.62) adquiere la forma

$$\begin{array}{l} \left[p(x')\,(G(x',\;x)\,u'(x') - G_{x'}(x',\;x)\,u(x'))\right]_{x'=a}^b + \\ \int_a^b u(x')\left[\delta(x'-x) - \phi_m(x)\,r(x')\,\phi_m(x')\right]dx' = \int_a^b G(x',\;x)\,f(x')\,dx'. \end{array}$$

Realizando algunas operaciones y despejando $u(x)$ se obtiene

$$\begin{aligned} u(x) = &- \left[p(x')\left(G(x',\ x)\,u'(x') - G_{x'}(x',\ x)\,u(x')\right)\right]_{x'=a}^{b} + \\ &+ C\phi_m(x) + \int_a^b G(x',\ x)\,f(x')\,dx', \end{aligned} \tag{3.63}$$

siendo $C = \int_a^b u(x')\,r(x')\,\phi_m(x')\,dx'$ una constante. Comparando la expresión (3.63) para $u(x)$ con la expresión correspondiente (1.19) del capítulo 1, se observa que la única diferencia de forma es el término $C\phi_m(x)$. De otra parte, al sustituir (3.63) en la ecuación diferencial no homogénea en (3.50), es fácil concluir que el aporte del término $C\phi_m(x)$, independientemente del valor de C, siempre es cero, ya que $\phi_m(x)$ es solución de la ecuación diferencial homogénea correspondiente. Entonces, se puede considerar que C en (3.63) es una constante arbitaria, por lo que la solución $u(x)$ no es única. El término de frontera $-\left[p\left(Gu' - G_{x'}u\right)\right]_{x'=a}^{b}$ en (3.63) se calcula mediante una de las fórmulas (1.20) - (1.23), según el caso.

Resumiendo, la solución $u(x)$ del problema no homogéneo (3.50), en el cual λ_m es uno de los valores propios del problema homogéneo correspondiente (3.1), está dada por la fórmula (3.63), donde $G(x',\,x)$ es la función de Green generalizada que se rige por el sistema (3.61).

3.1. Función de Green generalizada para problemas no homogéneos con coeficientes constantes. A continuación, se usará el sistema (3.61) para la función de Green generalizada y la expresión (3.63) para la solución $u(x)$ del problema (3.50), aplicados al examen del problema con coeficientes constantes de la forma

$$\begin{aligned} &\left(\exp(cx)\,u'\right)' + \lambda_m \exp(cx)\,u = \exp(cx)\,F(x), \qquad a \le x \le b, \\ &\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = d_1, \qquad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = d_2, \end{aligned} \tag{3.64}$$

donde λ_m representa uno de los valores propios del problema homogéneo (3.18). Es claro que (3.64) es un caso particular del sistema (3.50), observándose las siguientes equivalencias

$$p(x) = \exp(cx)\,,\ q(x) = 0,\ r(x) = \exp(cx)\,,\ f(x) = \exp(cx)\,F(x)\,. \tag{3.65}$$

Con base en (3.65), el sistema para G (3.61) se escribe así:

$$\begin{aligned} &\left(\exp(cx')\,G_{x'}\right)_{x'} + \lambda_m \exp(cx')\,G = \\ &\delta(x' - x) - \phi_m(x)\exp(cx')\,\phi_m(x'), \qquad a \le x' \le b, \\ &\alpha_1 G(a, x) + \alpha_2 G_{x'}(a, x) = 0, \qquad \beta_1 G(b, x) + \beta_2 G_{x'}(b, x) = 0. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Para resolver (3.66), primero se considera la solución para $x' \neq x$, en este caso se tiene que $\delta(x' - x) = 0$ y el sistema (3.66), después de simplificar el factor $\exp(cx')$, se reduce a

$$\begin{aligned} &G_{x'x'} + cG_{x'} + \lambda_m G = -\phi_m(x)\,\phi_m(x') \text{ para } x' \neq x, \\ &\alpha_1 G(a, x) + \alpha_2 G_{x'}(a, x) = 0, \qquad \beta_1 G(b, x) + \beta_2 G_{x'}(b, x) = 0. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Con el fin de solucionar el sistema (3.67), se requiere conocer el término no homogéneo $-\phi_m(x)\,\phi_m(x')$, es decir, la función propia $\phi_m(x)$ asociada con el valor propio

λ_m. El desarrollo que sigue se limita a encontrar la solución de (3.67) sólo para el caso $\lambda_m > \frac{c^2}{4}$, para el cual $\phi_m(x)$ está dada por (3.43) o por (3.44). Además, se supone que $k_1 \cos(\gamma_m a) - \alpha_2 \gamma_m \sin(\gamma_m a) \neq 0$, por lo que se escoge la expresión (3.44) con $n = m$, la cual se escribe como

$$\phi_m(x) = B_m(\sigma_1 \sin(\gamma_m x) - \sigma_2 \cos(\gamma_m x)) \exp\left(-\frac{c}{2}x\right), \tag{3.68}$$

siendo B_m una constante, y

$$\begin{array}{ll} \sigma_1 = k_1 \cos(\gamma_m a) - \alpha_2 \gamma_m \sin(\gamma_m a) \neq 0, & \sigma_2 = k_1 \sin(\gamma_m a) + \alpha_2 \gamma_m \cos(\gamma_m a), \\ k_1 = \alpha_1 - \frac{1}{2} c \alpha_2, & \gamma_m = \frac{\sqrt{4\lambda_m - c^2}}{2} > 0. \end{array}$$

Sustituyendo $\cos(\gamma_m x) = \frac{\exp(i\gamma_m x) + \exp(-i\gamma_m x)}{2}$ y $\sin(\gamma_m x) = \frac{\exp(i\gamma_m x) - \exp(-i\gamma_m x)}{2i}$ en (3.68), se tiene que

$$\phi_m(x) = B_m(\theta \exp(\delta x) + \theta^* \exp(\delta^* x)), \tag{3.69}$$

donde $\theta = -\frac{1}{2}(\sigma_2 + i\sigma_1)$, $\delta = -\frac{c}{2} + i\gamma_m$; θ^* y δ^* son, en su orden, los complejos conjugados de θ y δ. Con base en (3.69), se escribe

$$-\phi_m(x)\phi_m(x') = -B_m \phi_m(x)(\theta \exp(\delta x') + \theta^* \exp(\delta^* x'))$$

y se sustituye en (3.67)

$$\begin{array}{l} G_{x'x'} + cG_{x'} + \lambda_m G = \\ -B_m \phi_m(x)\theta \exp(\delta x') - B_m \phi_m(x)\theta^* \exp(\delta^* x') \text{ para } x' \neq x, \\ \alpha_1 G(a, x) + \alpha_2 G_{x'}(a, x) = 0, \qquad \beta_1 G(b, x) + \beta_2 G_{x'}(b, x) = 0. \end{array} \tag{3.70}$$

Para resolver el anterior sistema se parte de considerar que la solución general de la ecuación diferencial no homogénea en (3.70) se puede representar como la suma de alguna solución particular $G_p(x', x)$ de dicha ecuación más la solución general $G_h(x', x)$ de la ecuación homogénea correspondiente

$$G(x', x) = G_p(x', x) + G_h(x', x). \tag{3.71}$$

Para hallar G_p, primero se busca una solución particular G_{p1} de la ecuación

$$G_{x'x'} + cG_{x'} + \lambda_m G = -B_m \phi_m(x)\theta \exp(\delta x') \tag{3.72}$$

y luego una solución particular G_{p2} de la ecuación

$$G_{x'x'} + cG_{x'} + \lambda_m G = -B_m \phi_m(x)\theta^* \exp(\delta^* x'). \tag{3.73}$$

Teniendo en cuenta que la ecuación diferencial en (3.70) es lineal, se concluye que

$$G_p = G_{p1} + G_{p2}. \tag{3.74}$$

La soluciones G_{p1} y G_{p2} se pueden hallar mediante el método de los coeficientes indeterminados [5]. Según este método, G_{p1} se busca de la forma

$$G_{p1} = Dx' \exp(\delta x'), \tag{3.75}$$

siendo D una constante por determinar. Luego se calculan las derivadas

$$(G_{p1})_{x'} = D\left(1+\delta x'\right)\exp\left(\delta x'\right), \qquad (G_{p1})_{x'x'} = D\delta\left(2+\delta x'\right)\exp\left(\delta x'\right),$$

y se reemplazan en (3.72), dando que

$$\left[2\delta + c + \left(\delta^2 + c\delta + \lambda_m\right)x'\right]D = -B_m\phi_m(x)\,\theta. \tag{3.76}$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\delta = -\frac{c}{2} + i\gamma_m$ y $\gamma_m = \frac{\sqrt{4\lambda_m - c^2}}{2}$, se encuentra que

$$2\delta + c = i2\gamma_m,\ \delta^2 + c\delta + \lambda_m = 0.$$

Se sustituye este resultado en (3.76) y se despeja D

$$D = \frac{iB_m\theta}{2\gamma_m}\phi_m(x).$$

Por último, se reemplaza la anterior ecuación en (3.75)

$$G_{p1} = \frac{iB_m\theta}{2\gamma_m}\phi_m(x)\,x'\exp\left(\delta x'\right). \tag{3.77}$$

De manera análoga, G_{p2} se busca de la forma

$$G_{p2} = D'x'\exp\left(\delta^* x'\right).$$

Repitiendo el procedimiento utilizado anteriormente con G_{p1}, pero utilizando la ecuación diferencial (3.73), se llega a la siguiente expresión para G_{p2}

$$G_{p2} = -\frac{iB_m\theta^*}{2\gamma_m}\phi_m(x)\,x'\exp\left(\delta^* x'\right). \tag{3.78}$$

Reemplazando (3.77) y (3.78) en (3.74), se obtiene la solución particular

$$G_p(x',x) = \tfrac{iB_m\theta}{2\gamma_m}\phi_m(x)\,x'\exp\left(\delta x'\right) - \tfrac{iB_m\theta^*}{2\gamma_m}\phi_m(x)\,x'\exp\left(\delta^* x'\right) = \\ \tfrac{iB_m}{2\gamma_m}\phi_m(x)\,x'\left(\theta\exp\left(\delta x'\right) - \theta^*\exp\left(\delta^* x'\right)\right),$$

la cual, en términos de $\sin(\gamma_m x')$ y $\cos(\gamma_m x')$, se expresa así

$$G_p(x',x) = \frac{B_m}{2\gamma_m}\phi_m(x)\,x'\exp\left(-\frac{c}{2}x'\right)\left(\sigma_2\sin\left(\gamma_m x'\right) + \sigma_1\cos\left(\gamma_m x'\right)\right). \tag{3.79}$$

Una vez que se ha determinado la solución particular anterior, se procede a incluir la solución general de la ecuación homogénea asociada a la ecuación diferencial en (3.70), la cual, para $\lambda_m > \frac{c^2}{4}$, está dada por

$$G_h = \exp\left(-\frac{c}{2}x'\right)\begin{cases} A\cos\left(\gamma_m x'\right) + B\sin\left(\gamma_m x'\right) & \text{para } a \le x' < x \\ C\cos\left(\gamma_m x'\right) + D\sin\left(\gamma_m x'\right) & \text{para } x < x' \le b \end{cases}, \tag{3.80}$$

donde A, B, C y D son independientes de x'. Reemplazando (3.79) y (3.80) en (3.71), se tiene

$$\begin{aligned} &G(x',x) = \tfrac{B_m}{2\gamma_m}\phi_m(x)\,x'\exp\left(-\tfrac{c}{2}x'\right)(\sigma_2\sin(\gamma_m x') + \sigma_1\cos(\gamma_m x')) + \\ &\exp\left(-\tfrac{c}{2}x'\right)\begin{cases} A\cos(\gamma_m x') + B\sin(\gamma_m x') & \text{para } a \le x' < x \\ C\cos(\gamma_m x') + D\sin(\gamma_m x') & \text{para } x < x' \le b \end{cases}, \end{aligned} \tag{3.81}$$

con $\phi_m(x)$ dada por (3.68). La derivada de G con respecto a x' es

(3.82)

$$\begin{aligned} &G_{x'}(x',x) = \tfrac{B_m}{2\gamma_m}\phi_m(x)\exp\left(-\tfrac{c}{2}x'\right)\times \\ &\left[(\sigma_2\sin(\gamma_m x') + \sigma_1\cos(\gamma_m x'))\left(1-\tfrac{c}{2}x'\right) + \gamma_m x'(\sigma_2\cos(\gamma_m x') - \sigma_1\sin(\gamma_m x'))\right] + \\ &\exp\left(-\tfrac{c}{2}x'\right)\times \\ &\begin{cases} \left(-\tfrac{c}{2}\cos(\gamma_m x') - \gamma_m\sin(\gamma_m x')\right)A + \left(-\tfrac{c}{2}\sin(\gamma_m x') + \gamma_m\cos(\gamma_m x')\right)B, & \text{para} \quad a \le x' < x \\ \left(-\tfrac{c}{2}\cos(\gamma_m x') - \gamma_m\sin(\gamma_m x')\right)C + \left(-\tfrac{c}{2}\sin(\gamma_m x') + \gamma_m\cos(\gamma_m x')\right)D, & \text{para} \quad x < x' \le b \end{cases}. \end{aligned}$$

Ahora se determinan los valores de A, B, C, D de tal manera que (3.81) satisfaga el sistema (3.66) más que el sistema (3.70). Se recuerda que (3.66) se resuelve sobre todo el intervalo $a \le x' \le b$, mientras que (3.70) es el mismo sistema (3.66), pero con la exclusión del punto $x' = x$. Evaluando (3.81) y (3.82) en $x' = a$ y $x' = b$ y sustituyendo los resultados en las condiciones de frontera en (3.66), después de ciertos reagrupamientos de términos y simplificaciones, se llega a las ecuaciones

$$A + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}B = -\frac{t_1 B_m}{2\gamma_m\sigma_1}\phi_m(x), \quad C + \frac{\sigma_4}{\sigma_3}D = -\frac{t_2 B_m}{2\gamma_m\sigma_3}\phi_m(x), \tag{3.83}$$

con

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= k_2\cos(\gamma_m b) - \beta_2\gamma_m\sin(\gamma_m b), \\ \sigma_4 &= k_2\sin(\gamma_m b) + \beta_2\gamma_m\cos(\gamma_m b), \\ t_1 &= \left[a\alpha_1 + \left(1 - \tfrac{1}{2}ac\right)\alpha_2\right]k_1 + a\alpha_2^2\gamma_m, \\ t_2 &= \tfrac{\sigma_1}{\sigma_3}\left[\left(b\beta_1 + \left(1 - \tfrac{1}{2}bc\right)\beta_2\right)k_2 + b\beta_2^2\gamma_m^2\right], \\ k_2 &= \beta_1 - \tfrac{c}{2}\beta_2. \end{aligned}$$

Las expresiones para σ_1, σ_2, k_1 y γ_m están dadas a continuación de la fórmula (3.68). Ahora, se recuerda que λ_m es un valor propio que pertenece al intervalo $\lambda > \frac{c^2}{4}$, esto implica que λ_m es raíz de la ecuación (3.41) para los valores propios en ese intervalo. Dicha ecuación, teniendo en cuenta las expresiones para σ_1, σ_2, σ_3 y σ_4 dadas arriba, adquiere la forma compacta $\sigma_1\sigma_4 - \sigma_2\sigma_3 = 0$, de donde se toma $\frac{\sigma_4}{\sigma_3} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ y se sustituye en la segunda ecuación en (3.83)

$$A + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}B = -\frac{t_1 B_m}{2\gamma_m\sigma_1}\phi_m(x), \qquad C + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}D = -\frac{t_2 B_m}{2\gamma_m\sigma_3}\phi_m(x). \tag{3.84}$$

Se necesitan otras dos ecuaciones que adicionadas a las de (3.84) formen un sistema de cuatro ecuaciones para las cuatro incógnitas A, B, C yD. Con este fin, las dos partes de $G(x',x)$ que figuran en (3.81) se cosen en el punto $x' = x$. Para ello, en primer lugar se exige que $G(x', x)$ sea continua en $x' = x$. Teniendo en cuenta (3.81), esta condición de continuidad proporciona la ecuación

$$\cos(\gamma_m x)\,A + \sin(\gamma_m x)\,B - \cos(\gamma_m x)\,C - \sin(\gamma_m x)\,D = 0. \tag{3.85}$$

En segundo lugar, se debe garantizar que al coser $G(x', x)$ en $x' = x$, la G resultante realmente sea una solución de la ecuación diferencial en (3.66). Para esto, se aplica a la ecuación diferencial en (3.66) un procedimiento que parte de integrar ambos lados de dicha ecuación sobre un pequeño entorno alrededor del punto $x' = x$, $x - \varepsilon \le x' \le x + \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$,

$$\begin{array}{c}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \left(\exp(cx')\,G_{x'}\right)_{x'} dx' + \lambda_m \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \exp(cx')\,G dx' = \\ \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \delta(x'-x)\,dx' - \frac{\phi_m(x)}{I_m} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \exp(cx')\,\phi_m(x')\,dx'.\end{array}$$

Ahora se toma a ambos lados el límite cuando $\varepsilon \to 0$. Ya que $\exp(cx')\,G(x', x)$ y $\exp(cx')\,\phi_m(x')$ son funciones continuas con respecto a x', se tiene que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \exp(cx')\,G dx' = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \exp(cx')\,\phi_m(x')\,dx' = 0,$$

por lo que el resultado final es

$$\exp(cx')\,G_{x'}\big|_{x-0}^{x+0} = 1,$$

de donde

$$G_{x'}(x+0,\ x) - G_{x'}(x-0,\ x) = \exp(-cx)\,. \tag{3.86}$$

Esta condición establece que la primera derivada de G con respecto a x' es discontinua en el punto $x' = x$, en donde presenta un salto de tamaño igual a $\exp(-cx)$. Con base en (3.82), la condición (3.86) adquiere la forma

$$h_1 A + h_2 B - h_1 C - h_2 D = -\exp\left(-\frac{c}{2}x\right), \tag{3.87}$$

siendo $h_1 = -\frac{c}{2}\cos(\gamma_m x) - \gamma_m \sin(\gamma_m x)$ y $h_2 = -\frac{c}{2}\sin(\gamma_m x) + \gamma_m \cos(\gamma_m x)$. Luego, se resuelve el sistema formado por (3.84), (3.85) y (3.87) con respecto a las cantidades desconocidas A, B, C y D. Para comenzar, se multiplica (3.85) por $-h_1$ y (3.87) por $\cos(\gamma_m x)$ y luego se suman, lo que da el siguiente resultado

$$\left[h_2 \cos(\gamma_m x) - h_1 \sin(\gamma_m x)\right](B - D) = -\cos(\gamma_m x)\exp\left(-\frac{c}{2}x\right). \tag{3.88}$$

Ahora, usando las expresiones para h_1 y h_2 dadas al pie de (3.87), se calcula que

$$h_2 \cos(\gamma_m x) - h_1 \sin(\gamma_m x) = \gamma_m.$$

Esto se reemplaza en (3.88) y se despeja B

$$B = D - \frac{1}{\gamma_m}\cos(\gamma_m x)\exp\left(-\frac{c}{2}x\right). \tag{3.89}$$

De otra parte, se multiplica (3.85) por $-h_2$ y (3.87) por $\sin(\gamma_m x)$, se suman los resultados y se despeja A

$$A = C + \frac{1}{\gamma_m}\sin(\gamma_m x)\exp\left(-\frac{c}{2}x\right). \tag{3.90}$$

Continuando, se sustituye (3.89) y (3.90) en la primera ecuación en (3.84). Después de algunas transformaciones, se obtiene

$$C + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}D = -\frac{t_1 B_m}{2\gamma_m\sigma_1}\phi_m(x) - \frac{\exp\left(-\frac{c}{2}x\right)}{\gamma_m\sigma_1}\left(\sigma_1\sin(\gamma_m x) - \sigma_2\cos(\gamma_m x)\right).$$

Si se despeja $\exp\left(-\frac{c}{2}x\right)\left(\sigma_1\sin(\gamma_m x) - \sigma_2\cos(\gamma_m x)\right)$ de (3.68) y se reemplaza en la última ecuación, se llega a

$$C + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}D = -\frac{1}{\gamma_m\sigma_1 B_m}\left(\frac{t_1 B_m^2}{2} + 1\right)\phi_m(x), \tag{3.91}$$

donde $\phi_m(x)$ esta dada por (3.68). Luego, se hace notar que el lado izquierdo de (3.91), en donde aparecen las dos incógnitas C y D, es idéntico al lado izquierdo de la segunda ecuación en (3.84), lo que implica que los lados derechos también son iguales

$$\frac{t_2 B_m}{2\sigma_3}\phi_m(x) = \frac{1}{\sigma_1 B_m}\left(\frac{t_1 B_m^2}{2} + 1\right)\phi_m(x),$$

aquí se ha simplificado el factor $\frac{1}{\gamma_m} \neq 0$. Esta igualdad se cumple para todo x en el intervalo $a \leq x \leq b$, si y solo si

$$\frac{t_2 B_m}{2\sigma_3} = \frac{1}{\sigma_1 B_m}\left(\frac{t_1 B_m^2}{2} + 1\right).$$

De aquí se despeja B_m^2

$$B_m^2 = \frac{2\sigma_3}{\sigma_1 t_2 - \sigma_3 t_1}. \tag{3.92}$$

Nótese que este valor de B_m garantiza que la ecuación (3.91) y la segunda ecuación en (3.84) sean idénticas. Reemplazando (3.68) y (3.92) en (3.91), se escribe

$$C + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}D = \frac{t_2}{\gamma_m(\sigma_3 t_1 - \sigma_1 t_2)}\left(\sigma_1\sin(\gamma_m x) - \sigma_2\cos(\gamma_m x)\right)\exp\left(-\frac{c}{2}x\right). \tag{3.93}$$

Con lo anterior, el sistema original de cuatro ecuaciones (3.84), (3.85) y (3.87) se ha reducido a las tres ecuaciones (3.89), (3.90) y (3.93). Por lo tanto, una de las cuatro incógnitas A, B, C, D se puede escoger de manera arbitaria, en concreto, se tomará que

$$D = D(x), \text{ siendo } D(x) \text{ una función de } x \text{ arbitaria.} \tag{3.94}$$

Luego, despejando C de (3.93) y teniendo en cuenta (3.94), se tiene

$$\begin{aligned}C = &-\tfrac{\sigma_2}{\sigma_1} D(x) + \\ &\tfrac{t_2}{\gamma_m(\sigma_3 t_1 - \sigma_1 t_2)} \left(\sigma_1 \sin(\gamma_m x) - \sigma_2 \cos(\gamma_m x)\right) \exp\left(-\tfrac{c}{2}x\right).\end{aligned} \tag{3.95}$$

También se reemplaza (3.95) en (3.90)

$$\begin{aligned}A = &-\tfrac{\sigma_2}{\sigma_1} D(x) + \\ &\tfrac{1}{\gamma_m(\sigma_3 t_1 - \sigma_1 t_2)} \left[\sigma_3 t_1 \sin(\gamma_m x) - \sigma_2 t_2 \cos(\gamma_m x)\right] \exp\left(-\tfrac{c}{2}x\right).\end{aligned} \tag{3.96}$$

y se sustituye (3.94) en (3.89)

$$B = D(x) - \frac{1}{\gamma_m} \cos(\gamma_m x) \exp\left(-\frac{c}{2}x\right). \tag{3.97}$$

Ahora, sustituyendo (3.68) y (3.92) en (3.81), se escribe de manera explícita la expresión para $G(x', x)$

$$\begin{aligned}G(x', x) = &\tfrac{\sigma_3}{\gamma_m(\sigma_1 t_2 - \sigma_3 t_1)} \times \\ &\left(\sigma_1 \sin(\gamma_m x) - \sigma_2 \cos(\gamma_m x)\right) \exp\left(-\tfrac{c}{2}x\right) x' \exp\left(-\tfrac{c}{2}x'\right) \times \\ &\left(\sigma_2 \sin(\gamma_m x') + \sigma_1 \cos(\gamma_m x')\right) + \\ &x' \exp\left(-\tfrac{c}{2}x'\right) \begin{cases} A\cos(\gamma_m x') + B\sin(\gamma_m x') & \text{para } a \le x' < x \\ C\cos(\gamma_m x') + D\sin(\gamma_m x') & \text{para } x < x' \le b \end{cases},\end{aligned} \tag{3.98}$$

siendo

$$\begin{aligned}&\sigma_1 = k_1 \cos(\gamma_m a) - \alpha_2 \gamma_m \sin(\gamma_m a) \neq 0, \\ &\sigma_2 = k_1 \sin(\gamma_m a) + \alpha_2 \gamma_m \cos(\gamma_m a), \\ &\sigma_3 = k_2 \cos(\gamma_m b) - \beta_2 \gamma_m \sin(\gamma_m b), \\ &\sigma_4 = k_2 \sin(\gamma_m b) + \beta_2 \gamma_m \cos(\gamma_m b), \\ &t_1 = \left[a\alpha_1 + \left(1 - \tfrac{1}{2}ac\right)\alpha_2\right] k_1 + a\alpha_2^2 \gamma_m, \\ &t_2 = \tfrac{\sigma_1}{\sigma_3}\left[\left(b\beta_1 + \left(1 - \tfrac{1}{2}bc\right)\beta_2\right) k_2 + b\beta_2^2 \gamma_m^2\right], \\ &\gamma_m = \tfrac{\sqrt{4\lambda_m - c^2}}{2},\ k_1 = \alpha_1 - \tfrac{1}{2}c\alpha_2,\ k_2 = \beta_1 - \tfrac{c}{2}\beta_2.\end{aligned} \tag{3.99}$$

En resumen, la expresión (3.98) representa la función de Green generalizada asociada con el problema no homogéneo con coeficientes constantes (3.64), cuando $\lambda_m > \frac{c^2}{4}$. Los valores de A, B, C y D en (3.98) se calculan mediante las fórmulas (3.96), (3.97), (3.95) y (3.94), respectivamente.

De otra parte, aplicando las equivalencias (3.65) en (3.63), la solución $u(x)$ del problema no homogéneo con coeficientes constantes (3.64) es

$$\begin{aligned}u(x) = &-\exp(cx')\left[G(x', x) u'(x') - G_{x'}(x', x) u(x')\right]_{x'=a}^{x'=b} + \\ &C\phi_m(x) + \int_a^b G(x', x) \exp(cx') F(x') dx',\end{aligned} \tag{3.100}$$

donde C es una constante arbitaria; la función propia $\phi_m(x)$ asociada con el valor propio λ_m satisface el problema homogéneo

$$\begin{aligned}&\left(\exp(cx)\phi_m'(x)\right)' + \lambda_m \exp(cx)\phi_m(x) = 0, \qquad a \le x \le b, \\ &\alpha_1 \phi_m(a) + \alpha_2 \phi_m'(a) = 0, \qquad \beta_1 \phi_m(b) + \beta_2 \phi_m'(b) = 0.\end{aligned} \tag{3.101}$$

Con respecto al término de frontera en (3.100)

$$-\exp(c\acute{x})\left[G(\acute{x},x)\,u'(\acute{x})-G_{\acute{x}}(\acute{x},x)\,u(\acute{x})\right]_{\acute{x}=a}^{\acute{x}=b},$$

este se determina usando una de las variantes dadas al pie de la fórmula (2.11) del capítulo 2, según el caso. Adicionalmente, la función $F(x)$ que aparece en (3.64) y (3.100) tiene que satisfacer la condición (3.53) - (354), la cual, en términos de las equivalencias (3.65), adquiere la forma

$$\int_a^b \phi_m(x)\exp(cx)\,F(x)\,dx=\exp(cx)\left[u'(x)\,\phi_m(x)-u(x)\,\phi_m'(x)\right]\Big|_{x=a}^{b}. \tag{3.102}$$

Si $F(x)$ incumple la condición anterior, significa que el problema (3.64) está mal planteado y no tiene solución. Por ejemplo, aplicando las condiciones de frontera en (3.64) y (3.101), la condición (3.102) se escribe así:

$$\begin{array}{l}\int_a^b \phi_m(x)\exp(cx)\,F(x)\,dx=\\ \begin{cases}-\frac{d_2}{\beta 1}\exp(cb)\,\phi_m'(b)+\frac{d_1}{\alpha_1}\exp(ca)\,\phi_m'(a) & \text{si } \alpha_1\neq 0 \text{ y } \beta_1\neq 0\\ \frac{d_2}{\beta_2}\exp(cb)\,\phi_m(b)-\frac{d_1}{\alpha_2}\exp(ca)\,\phi_m(a) & \text{si } \alpha_2\neq 0 \text{ y } \beta_2\neq 0\end{cases}\end{array}. \tag{3.103}$$

Es importante señalar que antes de emplear la función de Green (3.98) en (3.100), es necesario cerciorarse de que λ_m, además de ser mayor que $\frac{c^2}{4}$, realmente representa un valor propio, para lo cual tiene que satisfacer la ecuación para los valores propios (3.41). Las funciones de Green generalizadas del problema (3.64) para cuando $\lambda_m < \frac{c^2}{4}$ y $\lambda_m=\frac{c^2}{4}$ pueden hallarse de manera análoga a como se obtuvo (3.98).

A continuación, los resultados de esta sección se ilustran con un ejemplo.

EJEMPLO 4. Encontrar la solución $u(x)$ del problema

$$u''+u=F(x), \qquad u(0)=-1, \qquad u(\pi)=1. \tag{3.104}$$

SOLUCIÓN: Entre (3.104) y (3.64) se establecen las siguientes correspondencias

$$\begin{array}{l}c=0,\ \lambda_m=1,\ a=0,\ b=\pi,\ \alpha_1=\beta_1=1,\\ \alpha_2=\beta_2=0,\ d_1=-1,\ d_2=1..\end{array} \tag{3.105}$$

También, con base en (3.105) se calculan los valores numéricos de las cantidades dadas (3.99)

$$\begin{array}{l}\gamma_m=1,\ k_1=1,\ k_2=1,\ \sigma_1=1\neq 0,\ \sigma_2=0,\\ \sigma_3=-1,\ \sigma_4=0,\ t_1=0,\ t_2=-\pi.\end{array} \tag{3.106}$$

En este ejemplo, los datos de (3.105) y (3.106) se reemplazarán en todas las fórmulas o ecuaciones de las obtenidas anteriormente que se vayan a emplear en la solución del problema (3.104).

Primero, se comprueba que $\lambda_m=1>0$ y luego se verifica si $\lambda_m=1$ satisface la ecuación para los valores propios (3.41). Esta ecuación toma la forma numérica

$1 \times 0 - 0 \times 1 = 0$, lo que confirma que $\lambda_m = 1$ es un valor propio. También se escribe la función propia (3.68)

$$\phi_m(x) = B_m \sin(x) . \tag{3.107}$$

Igualmente, es necesario recordar que el problema (3.104) está bien planteado sólo para $F(x)$ tal que se cumpla la condición (3.103), la cual teniendo en cuenta (3.105) y (3.107), adquiere la forma

$$\int_0^\pi \sin(x) F(x)\, dx = 0, \qquad (\alpha_1 = 1 \neq 0 \text{ y } \beta_1 = 1 \neq 0) . \tag{3.108}$$

Ya que en este ejemplo $\lambda_m = 1 > 0$, entonces se puede usar la función de Green (3.98). Para esto, de acuerdo con (3.96), (3.97), (3.95) y (3.94), se calculan los valores de A, B, C y D

$$A = 0, \qquad B = D(x) - \cos(x), \qquad C = -\sin(x), \qquad D = D(x),$$

siendo $D(x)$ una función arbitraria. Estos valores se reemplazan en (3.98), obteniéndose la función de Green generalizada del problema (3.104)

$$\begin{aligned} G(x', x) = {} & \tfrac{1}{\pi} \sin(x)\, x' \cos(x') + D(x) \sin(x') - \\ & - \begin{cases} \cos(x) \sin(x') & \text{para} \quad 0 \leq x' < x \\ \sin(x) \cos(x') & \text{para} \quad x < x' \leq \pi \end{cases} . \end{aligned} \tag{3.109}$$

También se toma la derivada de G con respecto x'

$$\begin{aligned} G_{x'}(x', x) = {} & \tfrac{1}{\pi} \sin(x) \left(\cos(x') - x' \sin(x')\right) + D(x) \cos(x') + \\ & + \begin{cases} -\cos(x) \cos(x') & \text{para} \quad 0 \leq x' < x \\ \sin(x) \sin(x') & \text{para} \quad x < x' \leq \pi \end{cases} . \end{aligned}$$

A continuación, con base en (3.100) se determina $u(x)$. Ya que $\alpha_1 = 1 \neq 0$ y $\beta_1 = 1 \neq 0$, el término de frontera en (3.100) se evalúa aplicando el caso 1 que se describe al pie de la fórmula (2.11) del capítulo 2. Esto da

$$-\left[G(x', x)\, u'(x') - G_{x'}(x', x)\, u(x')\right]_{x'=0}^{x'=\pi} = G_{x'}(\pi, x) + G_{x'}(0, x) = -\cos(x) , \tag{3.110}$$

donde se ha usado la expresión para $G_{x'}(x', x)$ dada arriba. Ahora se calcula el término $C\phi_m(x)$ en (3.100). Con base en (3.107) y teniendo en cuenta que C en (3.100) representa una constante arbitraria, se puede escribir

$$C\phi_m(x) = C \sin(x) . \tag{3.111}$$

Luego se evalúa la integral $\int_0^\pi G(x', x) F(x')\, dx'$ en (3.100). De acuerdo con (3.109), se obtiene que

$$\begin{aligned} & \textstyle\int_0^\pi G(x', x) F(x')\, dx' = \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\pi x' \cos(x') F(x')\, dx'\right] \sin(x) + \\ & \left[\textstyle\int_0^\pi \sin(x') F(x')\, dx'\right] D(x) - \cos(x) \textstyle\int_0^x \sin(x') F(x')\, dx' \\ & - \sin(x) \textstyle\int_x^\pi \cos(x') F(x')\, dx'. \end{aligned} \tag{3.112}$$

Ahora se reemplaza (3.110), (3.111) y (3.112) en (3.100). Después de algunos reagrupamientos se tiene

$$\begin{aligned} u(x) = {} & \left[C + \tfrac{1}{\pi}\int_0^\pi x' \cos(x') F(x')\, dx'\right] \sin(x) + \left[\int_0^\pi \sin(x') F(x')\, dx'\right] D(x) - \\ & - \cos(x) \left(1 + \int_0^x \sin(x') F(x')\, dx'\right) - \sin(x) \int_x^\pi \cos(x') F(x')\, dx', \end{aligned}$$

donde según (3.100), $D(x)$ es una función arbitraria. Como C es una constante arbitraria y $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x' \cos(x') F(x')\, dx'$ también es una constante, entonces la suma de las dos da otra constante arbitraria que se puede designar nuevamente como C. De otra parte, de acuerdo con la condición (3.108), el término $\left[\int_0^\pi \sin(x') F(x')\, dx'\right] D(x)$ es igual a cero, por lo que $D(x)$ queda eliminada de la expresión anterior para $u(x)$. Teniendo en cuenta todo lo anterior, la expresión para $u(x)$ queda así:

$$\begin{aligned} & u(x) = C\sin(x) - \\ & \cos(x)\left(1 + \int_0^x \sin(x') F(x')\, dx'\right) - \sin(x)\int_x^\pi \cos(x') F(x')\, dx', \end{aligned} \tag{3.113}$$

siendo C es una constante arbitraria. Con el fín de ilustrar de manera más concreta el resultado anterior, a continuación se toma $F(x) = \cos(x)$, la cual cumple la condición (3.108)

$$\int_0^\pi \sin(x)\cos(x)\, dx = 0.$$

En este caso, (3.113) adquiere la forma

$$u(x) = C\sin(x) - \cos(x)\left(1 + \int_0^x \sin(x')\cos(x')\, dx'\right) - \sin(x)\int_x^\pi \cos^2(x')\, dx'$$

y evaluando las integrales se obtiene

$$u(x) = -\cos(x) + \left(C - \frac{\pi}{2}\right)\sin(x) + \frac{1}{2}x\sin(x).$$

Repitiendo el argumento de que C es una constante arbitraria, entonces $\left(C - \frac{\pi}{2}\right)$ forma una nueva constante arbitaria para la cual se usa otra vez la misma letra C. En definitiva se escribe

$$u(x) = C\sin(x) - \cos(x) + \frac{1}{2}x\sin(x).$$

Por último, sustituyendo esta expresión para $u(x)$ en (3.104), se puede probar que en efecto satisface tanto la ecuación diferencial como las condiciones de frontera del sistema (3.104).

4. El método de las funciones propias

En esta sección se trata el llamado método de las funciones propias, lo que permitirá compararlo un poco con el método de la función de Green y, además, arrojar más luz sobre la función de Green generalizada que se introdujo en la sección anterior. Se considerará el siguiente problema

$$\begin{aligned} &(p(x)\,u')' + q(x)\,u + \lambda r(x)\,u = f(x), \qquad a \le x \le b, \\ &\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \qquad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0. \end{aligned} \tag{3.114}$$

Nótese que la ecuación diferencial en (3.114) es inhomogénea, pero las condiciones de frontera son homogéneas, es decir, el sistema (3.114) es menos general que el sistema (3.1). Cabe anotar que las condiciones de frontera en (3.114) se han escogido homogéneas sólo para facilitar el examen de los puntos de interés en la presente sección. De otra parte, introduciendo un operador L que se define mediante la ecuación

$$L[u] = (p(x)\,u')' + q(x)\,u + \lambda r(x)\,u,$$

el problema (3.114) se formula así:

$$\begin{aligned} &L[u] = f(x), \qquad a \le x \le b, \\ &\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \qquad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0. \end{aligned}$$

Básicamente se conocen dos líneas de aproximación a la solución del problema (3.114). Una consiste en la búsqueda del operador inverso L^{-1} del operador L, de tal manera que la solución $u(x)$ del sistema (3.114) se expresa como

$$u(x) = L^{-1}[f(x)].$$

Esto conduce al método de la función de Green. La otra línea de aproximación es el método de las funciones propias, que representa una alternativa al método de la función de Green. En lo que sigue, se presenta una breve introducción al método de las funciones propias [1, 3], el cual se basa en la aplicación de las propiedades de las funciones propias del problema homogéneo (3.1) asociado con el problema (3.114). Estas propiedades se reseñaron en la sección 3.1, de donde a continuación se toman algunos datos relevantes para la exposición subsiguiente. Sea el problema homogéneo

$$\begin{aligned} &(p(x)\,v')' + q(x)\,v + \lambda r(x)\,v = 0, \qquad a \le x \le b, \\ &\alpha_1 v(a) + \alpha_2 v'(a) = 0, \qquad \beta_1 v(b) + \beta_2 v'(b) = 0, \end{aligned} \tag{3.115}$$

el cual tiene los valores propios

$$\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < ...,$$

junto con las funciones propias correspondientes

$$\phi_1(x), \phi_2(x), ..., \phi_n(x), ...$$

En primer lugar, se destaca la propiedad de ortonormalidad de las funciones propias en el intervalo $[a, b]$ con respecto a la función de ponderación $r(x)$ que figura en (3.114) y (3.115), la cual en lo sucesivo se considerará positiva ($r(x) > 0$). Se recuerda que la condición de ortonormalidad está dada por la ecuación (3.2). Otra propiedad importante es el hecho de que las funciones propias $\{\phi_n(x)\}|_{n=1}^{\infty}$ forman un conjunto completo, lo que permite buscar la solución $u(x)$ del problema (3.114) en la forma de una serie de funciones propias del tipo (3.3), que para $u(x)$ adquiere la forma

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x). \tag{3.116}$$

Dado que las funciones propias $\phi_n(x)$ del sistema (3.115) se consideran conocidas, entonces, una vez se logre determinar los coeficientes a_n, la solución $u(x)$ del sistema (3.114) se expresa mediante la serie (3.116). Según (3.3) se cuenta con la siguiente fórmula para los a_n

$$a_n = \int_a^b u(x)\,\phi_n(x)\,r(x)\,dx, \qquad (n = 1, 2, ...). \tag{3.117}$$

Pero resulta que la expresión (3.117) en el presente caso no sirve para calcular los a_n, ya que $u(x)$ es desconocida. Por tanto, los coeficientes a_n permanecen como incógnitas. Con el fin de superar este impase se sustituye la serie (3.116) en (3.114) y luego se intenta hallar los a_n de tal modo que se satisfaga el sistema (3.114). En cumplimiento de este objetivo, lo primero que se tiene es que $u(x)$ dada por (3.116) ya cumple las condiciones de frontera en (3.114), esto gracias a que, según (3.1) y (3.115), todas las $\phi_n(x)$ satisfacen las mismas condiciones de frontera homogéneas que $u(x)$. Seguidamente se reemplaza (3.116) en la ecuación diferencial en (3.114). Después de algunas operaciones y reagrupamientos se obtiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(p(x)\,{\phi_n}'(x)\right)' + q(x)\,\phi_n(x) + \lambda r(x)\,\phi_n(x) \right] a_n = f(x). \tag{3.118}$$

De otra parte, la función propia $\phi_n(x)$ es solución del problema (3.115) cuando $\lambda = \lambda_n$, es decir, es válido que

$$\left(p(x)\,\phi_n'(x)\right)' + q(x)\,\phi_n(x) + \lambda_n r(x)\,\phi_n(x) = 0,$$

de aquí se despeja $\left(p(x)\,\phi_n'(x)\right)' + q(x)\,\phi_n(x) = -\lambda_n r(x)\,\phi_n(x)$ y se reemplaza en (3.118). Se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_n)\, a_n \phi_n(x) = \frac{f(x)}{r(x)}, \tag{3.119}$$

donde se tuvo en cuenta que $r(x) > 0$. Ahora, la función $\frac{f(x)}{r(x)}$ también se puede representar mediante una serie de la forma (3.3), que para el caso se expresa así:

$$\frac{f(x)}{r(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \tag{3.120}$$

con

$$c_n = \int_a^b \frac{f(x')}{r(x')} \phi_n(x')\, r(x')\, dx' = \int_a^b f(x')\,\phi_n(x')\,dx'. \tag{3.121}$$

La última integral se puede evaluar ya que tanto $f(x)$ como $\phi_n(x)$ están dadas, por eso, los coeficientes c_n en (3.120) son conocidos. Reemplazando (3.120) en (3.119) y reagrupando términos, se llega a la ecuación

$$\sum^{\infty} [(\lambda - \lambda_n) a_n - c_n] \phi_n(x) = 0.$$

Debido a que las funciones propias ϕ_n son linealmente independientes (propiedad de ortogonalidad), se puede afirmar que la última igualdad a cero se cumple para todo x en el intervalo $a \leq x \leq b$ si y solo si

$$(\lambda - \lambda_n) a_n - c_n = 0, \qquad (n = 1,\, 2,\, ...). \tag{3.122}$$

Esta es la ecuación que deben satisfacer los coeficientes a_n para que la $u(x)$ dada mediante la serie (3.117) sea solución de (3.115). A continuación, se examinan dos casos.

- Cuando $\lambda \neq \lambda_n$, $n = 1, 2, ...$ Esto significa que el valor de λ en problema (3.114) no coincide con ninguno de los valores propios del problema (3.115). Entonces, despejando a_n de (3.122) y teniendo en cuenta (3.121), se llega a la expresión para los coeficientes a_n

$$a_n = \frac{c_n}{\lambda - \lambda_n} = \frac{\int_a^b f(x')\, \phi_n(x')\, dx'}{\lambda - \lambda_n}, \qquad (n = 1,\, 2,\, ...), \tag{3.123}$$

  los cuales se reemplazan en (3.116)

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_a^b f(x')\, \phi_n(x')\, dx'}{\lambda - \lambda_n} \phi_n(x), \qquad \lambda \neq \lambda_n.$$

  Intercambiando el orden de la sumatoria y de la integral en el lado derecho en la anterior ecuación y reagrupando términos, se escribe

$$u(x) = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)\, \phi_n(x')}{\lambda - \lambda_n} \right] f(x')\, dx', \qquad \lambda \neq \lambda_n. \tag{3.124}$$

  Esta es la solución $u(x)$ del problema no homogéneo (3.114) en términos de las funciones propias $\phi_n(x)$ del problema homogéneo correspondiente (3.115), la cual es válida sólo cuando $\lambda \neq \lambda_n$. Ahora se puede examinar la conexión entre la solución (3.124) y la función de Green del problema (3.114). Con este fin, se recuerda que la solución de (3.114) en términos de la función de Green, según (1.19) - (1.23), se expresa de la siguiente manera

$$u(x) = \int_a^b G(x', x)\, f(x')\, dx'.$$

  Aquí se tuvo en cuenta que en (3.114) se tiene $d_1 = d_2 = 0$. Comparando las dos últimas ecuaciones se concluye que la función de Green del problema

(3.114) se puede representar mediante la serie

$$G(x', x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x')\,\phi_n(x)}{\lambda - \lambda_n}. \tag{3.125}$$

Además, se hace notar que según (3.125), la función de Green está definida sólo para $\lambda \neq \lambda_n$.

- Sea $\lambda = \lambda_m$, siendo λ_m uno de los valores propios del problema (3.115). En este caso la situación es bastante diferente a la examinada anteriormente, ya que la ecuación (3.122) para $n = m$ da

$$(\lambda_m - \lambda_m)\,a_m - c_m = 0. \tag{3.126}$$

Dentro de este caso, se pueden presentar dos subcasos.

  - Si $c_m = 0$, entonces la ecuación (3.126) se satisface sin importar el valor de a_m, es decir, a_m permanece arbitrario, por lo que se concluye que el problema (3.114) tiene solución, pero esta no es única, puesto que la misma contiene un múltiplo arbitrario de la función propia ϕ_m. Considerando lo anterior, (3.116) adquiere la forma

$$u(x) = \sum_{n=1, n\neq m}^{\infty} a_n \phi_n(x) + a_m \phi_m(x),$$

donde los a_n $(n \neq m)$ están dados por (3.123). Sustituyendo (3.123) en la anterior expresión, se tiene

$$u(x) = \sum_{n=1, n\neq m}^{\infty} \frac{\int_a^b f(x')\,\phi_n(x')\,dx'}{\lambda - \lambda_n}\phi_n(x) + a_m \phi_m(x), \qquad \lambda = \lambda_m.$$

La anterior expresión también se puede reescribir como

$$u(x) = \int_a^b \left[\sum_{n=1, n\neq m}^{\infty} \frac{\phi_n(x)\phi_n(x')dx'}{\lambda - \lambda_n} \right] f(x') + a_m \phi_m(x), \qquad \lambda = \lambda_m, \tag{3.127}$$

siendo a_m una constante arbitraria. La expresión (3.127) representa la solución del problema (3.114) en términos de las funciones propias $\phi_n(x)$ del problema homogéneo correspondiente (3.115), cuando $\lambda = \lambda_m$ y $c_m = 0$. Según (3.121), la condición $c_m = 0$ adquiere la forma

$$\int_a^b f(x)\,\phi_m(x)\,dx = 0. \tag{3.128}$$

Este resultado coincide con la ecuación (3.53), siendo $M = 0$, la cual se obtuvo en el marco del método de la función de Green, como requisito para que el problema (3.50) tenga solución, es decir, esté bien planteado. Por tanto, en este punto existe concordancia entre el método de la función de Green y el de las funciones propias.

- Cuando $c_m \neq 0$ es imposible satisfacer la ecuación (3.122) para $n = m$, lo que significa que el problema no homogéneo (3.114) no tiene solución.

EJEMPLO 4. Aplicando el método de las funciones propias, encontrar la solución $u(x)$ del problema

$$u'' + \lambda u = f(x), \qquad u(0) = 0, \qquad u(\pi) = 0, \tag{3.129}$$

donde λ es un parámetro.

SOLUCIÓN: El problema anterior es un caso particular del problema (3.114), existiendo las siguientes correspondencias

$$p(x) = 1,\ q(x) = 0,\ r(x) = 1,\ a = 0,\ b = \pi,\ \alpha_1 = \beta_1 = 1,\ \alpha_2 = \beta_2 = 0. \tag{3.130}$$

Se comienza por examinar el problema homogéneo correspondiente al sistema (3.129), que se formula así:

$$v'' + \lambda v = 0, \qquad v(0) = 0, \qquad v(\pi) = 0. \tag{3.131}$$

Es fácil comprobar que los valores propios y las funciones propias normalizadas del problema (3.131) son

$$\lambda_n = n^2, \qquad \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \qquad (n = 1,\ 2,\ ...). \tag{3.132}$$

Ahora se examina la solución de (3.129), considerando los siguientes casos:

- Cuando $\lambda \neq n^2$, $n = 1, 2, ...$, es decir, λ difiere de todos los valores propios del problema (3.131). Entonces la solución está dada por (3.124), la cual teniendo en cuenta (3.132), adquiere la forma

$$u(x) = \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(nx)\sin(nx')}{\pi(\lambda - n^2)} \right] f(x')\, dx', \qquad \lambda \neq n^2.$$

  De otra parte, de acuerdo con (3.125), la función de Green del problema (3.129) está dada por

$$G(x', x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(nx)\sin(nx')}{\pi(\lambda - n^2)}.$$

- Cuando λ coincide con uno de los valores propios dados en (3.132), por ejemplo $\lambda = m^2$, siendo m un número entero. Según (3.132), la función propia correpondiente es

$$\phi_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(mx). \tag{3.133}$$

  En este caso se pueden presentar dos subcasos:

- Si se cumple la condición (3.128), la cual, de acuerdo con (3.133), adquiere la forma

$$\int_a^b f(x)\sin(mx)\,dx = 0, \tag{3.134}$$

y el problema (3.129) tiene solución pero no es única. Está dada por la expresión (3.128), la cual, teniendo en cuenta (3.132), se escribe así:

$$u(x) = \int_a^b \left[\sum_{n=1,n\neq m}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin(nx)\sin(nx')\,dx'}{m^2-n^2} \right] f(x') + a_m \sin(nx),$$

siendo a_m una constante arbitraria.
- Si la condición (3.128) se imcumple, esto es, cuando

$$\int_a^b f(x)\sin(mx)\,dx \neq 0,$$

se concluye que el problema no homogéneo (3.129) está mal planteado, por tanto, no tiene solución.

5. Resumen

En este capítulo se hace una reseña breve de las propiedades de los valores propios y funciones propias del sistema homogéneo (3.1), el cual está asociado con el problema no homogéneo (1.1). Se establece que la ecuación para los valores propios del sistema (3.1), para el caso de una ecuación diferencial con coeficientes constantes, se encuentra directamente relacionada con las condiciones de existencia de las funciones de Green, formuladas en el capítulo 2. Examinando el problema no homogéneo (3.50), en el cual interviene uno de los valores propios del sistema homogéneo (3.1), se encuentra que (3.50) está bien planteado sólo si cumple con la condición (3.53) - (3.54). Adicionalmente, se muestra que la función de Green del problema (3.50) no se puede definir mediante el sistema (1.18), por lo que se introduce una función de Green generalizada que obedece al sistema (3.61). Como ilustración de lo anterior, se obtuvo la función de Green generalizada (3.98) del sistema no homogéneo con coeficientes constantes (3.64), el cual contiene un valor propio del problema homogéneo correspondiente (3.18). Por último, con base en una introducción somera al método de las funciones propias se muestra que la función de Green del capítulo 1 puede representarse mediante una serie de funciones propias de la forma (3.126). Además, se logra explicar la razón por la cual se hace necesario introducir la función de Green generalizada.

APÉNDICE A

Bibliografía

1. Arfken G. B., Weber H. J.: Mathematical Methods for Physicists, 5ta edition, Harcourt/Academic Press, 2001.
2. Boyce W. E., DiPrima R. C.: Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera, 5ta edición, Limusa Wiley, 2012.
3. Greenberg M. D.: Application of Green's Functions in Science and Engineering, Prentice-Hall, Inc., 1971.
4. Mathews J., Walker R. L.: Matemáticas para Físicos, Reverté, S. A., 1979.
5. R. Nagle, E. Saff & A. Snider: Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera, 4ta edición, Pearson-Addison Wesley, 2005.