NOTAS DE CLASE

FÍSICA MATEMÁTICA 2

PROGRAMA DE FÍSICA

ALVARO RUGELES PÉREZ

UNIVERSIDAD DE NARIÑO

2018

CONTENIDO

MÉTODOS MATEMÁTICOS

Notas de clase.

Textos:

1 Pipes Louis A. Applied mathematics for engineers and physicists Edición año 1958.

2 Kademova Krasimira. Matemática avanzada para físicos e ingenieros. Parte I. Universidad Industrial de Santander, Colombia, 1980.

Hsu Hwei P. Análisis de Fourier. Prentice Hall, 1998.

Capítulo 1. Representación matemática de fenómenos periódicos.

1.1 Funciones periódicas.

Los fenómenos periódicos se describen matemáticamente con ayuda de funciones periódicas

Definición. Una función $F(t)$ es periódica de periodo T, si cumple que

$$F(t+T)=F(t)\ , \ -\infty<t<\infty\ . \qquad (1.1)$$

Aplicando (1.1) se tiene:

a) $F(t-T)=F(t)$ (1.2)

En efecto haciendo en (1.1) el reemplazo $t\to t-T$ se escribe $F(t-T+T)=F(t-T)$. Por eso con la ayuda de (1.1) se puede avanzar hacia atrás y hacia adelante de t.

b). Es de utilidad la ~~ecuación~~ fórmula

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\,dt=\int_{\alpha+c}^{\beta+c} g(t-c)\,dt, \qquad (1.3)$$

donde $g(t)$ es una función cualquiera (periódica ó nó periódica.

En el caso en que $g(t) = F(t)$, siendo $F(t)$ una función periódica de periodo T y $c = T$, de (1.3) y (1.2) se obtiene que

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(t)\,dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} F(t-T)\,dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} F(t)\,dt. \qquad (1.4)$$

Demostrar que si $F(t)$ es una función periódica de periodo T, cumple

$$\int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} F(t)\,dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t)\,dt. \qquad (1.5)$$

Se escribe
$$\int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} F(t)\,dt = \int_{a-T/2}^{-\frac{T}{2}} F(t)\,dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} F(t)\,dt. \qquad (1.6)$$

Aplicando (1.4) a la primera integral del lado izquierdo con $\beta = -\frac{T}{2}$ y $\alpha = a - \frac{T}{2}$, se obtiene

$$\int_{a-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} F(t)\,dt = \int_{a+\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t)\,dt.$$

Reemplazado esta integral en (1.6) se tiene.

$$\int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} F(t)\,dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} F(t)\,dt + \int_{a+\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t)\,dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t)\,dt,$$

que es lo que se quiere demostrar en (1.5).

1.2 Oscilaciónes armónicas simples.

Definición. Un fenómeno descrito mediante una cantidad u es una oscilación armónica simple si

$$u = A\,\text{sen}(\omega t + \phi)$$

o

$$u = A\cos(\omega t + \phi), \qquad (1.7)$$

donde A, ω y ϕ son constantes. Es decir u varia sinusoidalmente con t.

Ejemplos de oscilaciónes armónicas simples son las oscilaciónes pequeñas de un péndulo o de un sistema masa resorte. También existen oscilaciónes sinusoidales eléctricas.

En (1.7): Amplitud $= A$ y fase $= \omega t + \phi$.

Comprobar que $\text{sen}(\omega t + \phi)$ es una función periódica de periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{o} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad (1.8)$$

donde ω es la frecuencia angular.

Prueba. Examinemos si $\text{sen}(\omega t + \phi)$ puede ser una función periódica con cierto periodo T. Esto es.

$$\text{sen}(\omega t + \phi + T) \stackrel{?}{=} \text{sen}(\omega t + \phi).$$

Se escribe:

$$\text{sen}(\omega t + \phi)\cos T + \cos(\omega t + \phi)\,\text{sen}\,T \stackrel{?}{=} \text{sen}(\omega t + \phi).$$

Para que esto ultimo se cumpla se requiere que $\cos T = 1$ y $\text{sen}\,T = 0$

El minimo valor de T que satisface este ultimo requerimiento es (1.8)

Con esto se termina la prueba.

Análogamente se comprueba que $\cos(\omega t + \phi)$ es periódico con T dado por (1.8).

En la figura 1, se ilustran dos oscilaciones armónicas simples

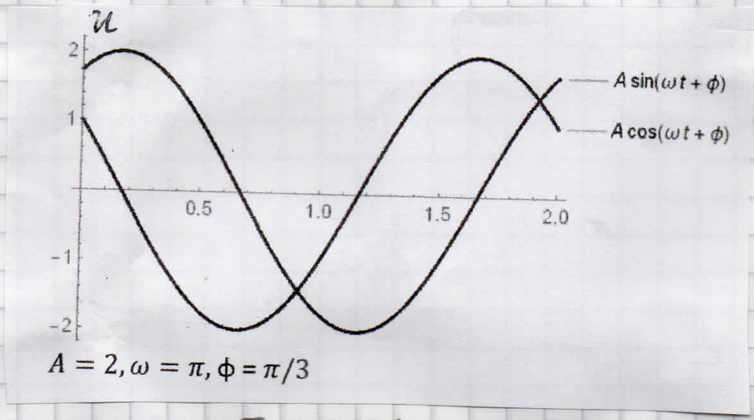


FIGURA 1

1.3 Representación compleja de las oscilaciones armónicas simples.

Se considera

$$u = A\cos(\omega t + \delta). \qquad (1.9)$$

ahora se escribe el número complejo

$$z = A e^{i(\omega t + \delta)}. \qquad (1.10)$$

según la formula de Euler

$$z = A\cos(\omega t + \delta) + i\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta) \qquad (1.11)$$

Comparando (1.9) y (1.11) se tiene que

$$u = \mathrm{Re}\,A e^{i(\omega t + \delta)}. \qquad (1.12)$$

En el plano complejo el número z dado por (1.10) se representa mediante el vector $\vec{z}$ de la figura 2.

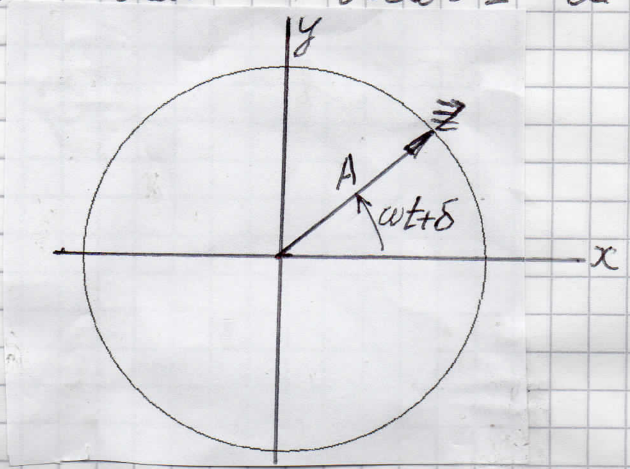


FIGURA 2

Suma de dos oscilaciones armónicas simples de igual frecuencia y diferentes fases.

Sean

$$u_1 = A_1 \cos(\omega t+\delta_1) = Re\, A_1 e^{i(\omega t+\delta_1)} \qquad (1.13)$$
$$u_2 = A_2 \cos(\omega t+\delta_2) = Re\, A_2 e^{i(\omega t+\delta_2)}.$$

Calculando la suma u_1+u_2 se escribe

$$u_1+u_2 = Re\left[A_1 e^{i(\omega t+\delta_1)} + A_2 e^{i(\omega t+\delta_2)}\right] \qquad (1.14)$$

De otra parte la suma de dos números complejos da otro número complejo, por eso se tiene que

$$u_1+u_2 = Re\left[M e^{i\tilde{\omega}+\phi}\right], \qquad (1.15)$$

donde las constantes M, $\tilde{\omega}$ y ϕ se determinan a continuación.

Se igualan (1.14) y (1.15)

$$\left(A_1 e^{i\delta_1} + A_2 e^{i\delta_2}\right) e^{i\omega t} = M e^{i\phi} e^{i\tilde{\omega} t}. \qquad (1.16)$$

Para agilizar los cálculos intermedios se acostumbra a no escribir el Re, con la condición de que al final se tome nuevamente la parte real.

La ecuación (1.16) se cumple para todo t si y solo si

$$\tilde{\omega} = \omega. \qquad (1.17)$$

Por eso (1.16) se simplifica así

$$A_1 e^{i\delta_1} + A_2 e^{i\delta_2} = M e^{i\phi t}.$$

De donde

$$(A_1\cos\delta_1 + A_2\cos\delta_2) + i(A_1\operatorname{sen}\delta_1 + A_2\operatorname{sen}\delta_2) = M\cos\phi + iM\operatorname{sen}\phi.$$

Igualando entre sí las partes reales y las partes imaginarias de ambos lados de esta ecuación se tiene

$$\begin{aligned} A_1\cos\delta_1 + A_2\cos\delta_2 &= M\cos\phi \\ A_1\operatorname{sen}\delta_1 + A_2\operatorname{sen}\delta_2 &= M\operatorname{sen}\phi \end{aligned} \qquad (1.18)$$

Resolviendo estas ecuaciones con respecto a M y ϕ, se obtiene

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{(A_1\cos\delta_1 + A_2\cos\delta_2)^2 + (A_1\operatorname{sen}\delta_1 + A_2\operatorname{sen}\delta_2)^2} \\ \phi &= \tan^{-1}\left(\frac{A_1\operatorname{sen}\delta_1 + A_2\operatorname{sen}\delta_2}{A_1\cos\delta_1 + A_2\cos\delta_2}\right) \end{aligned} \qquad (1.19).$$

Por tanto

$$u_1 + u_2 = R_e\, M e^{i(\omega t + \phi)}, \qquad (1.20)$$

donde M y ϕ están dados en (1.19). En (1.20) se tuvo en cuenta (1.15) y (1.17).

También $u_1 + u_2$ se puede ilustrar en el plano complejo $x\,y$ como una suma gráfica de vectores (ver Fig. 3)

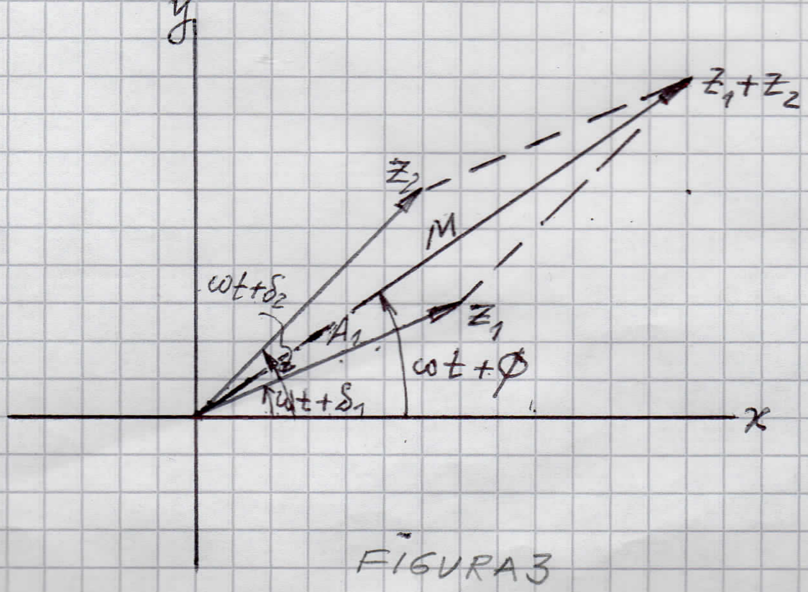


FIGURA 3

Generalizando la suma de $u_1 + u_2$, se establece la siguiente regla: la resultante de dos o más oscilaciones armónicas simples de frecuencias iguales y fases diferentes se obtiene sumando los correspondientes números complejos. La amplitud y fase de la resultante están dados por la amplitud y fase del número complejo que representa esta suma.

1.3 Representación de un fenómeno periódico más complicado. Series de Fourier.

Sea un fenómeno periódico descrito por una función $F(t)$ con período T. Un ejemplo de $F(t)$ se muestra en la figura 4.

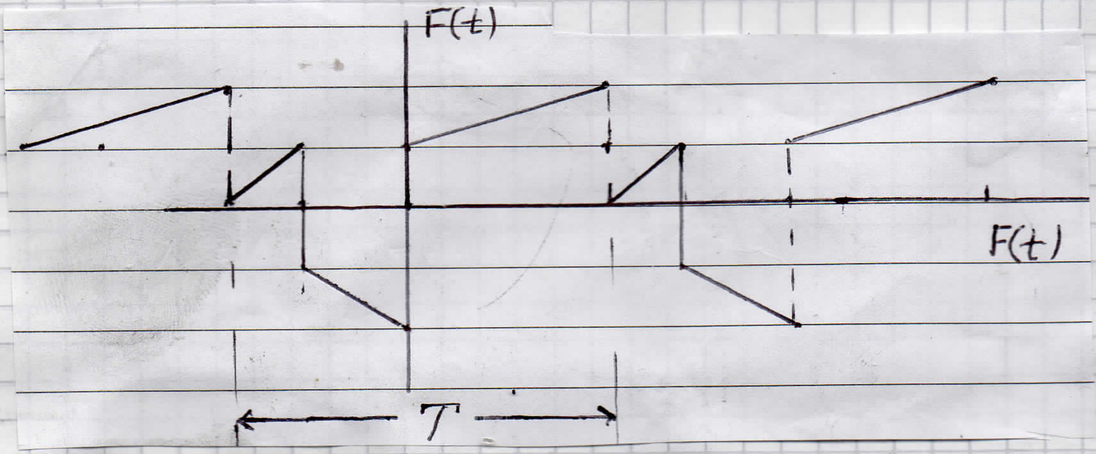


FIGURA 4

La función $F(t)$ de la figura 4 cumple con las siguientes condiciones

- Es univaluada y finita
- Tiene un número finito de discontinuidades y un número finito de máximos y mínimos en un período T.

Estas ~~son~~ condiciones se conocen como condiciones de Dirichlet. A continuación se formula un teorema fundamental.

Teorema. Si una función periódica $F(t)$ de período T cumple las condiciones de Dirichlet, entonces se puede representar, excepto en las discontinuidades, mediante una serie de funciones armónicas simples (llamada serie de Fourier), cuyas frecuencias son múltiplos de una frecuencia fundamental. En una discontinuidad el valor de la serie de Fourier es el promedio de los valores de $F(t)$ sobre ambos lados de la discontinuidad.

Con base en este teorema, se tiene la representación compleja de la serie de Fourier que se escribe así:

$$F(t) = \cdots + a_{-1}e^{-i\omega t} + a_0 + a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{i2\omega t} + \cdots + e^{in\omega t} + \cdots$$

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (1.21)$$

donde los a_n ~~[illegible]~~ son coeficientes constantes, los cuales se determinan a continuación.

Para determinar a_0, se integra ambos lados de (1.21) por t entre $t=0$ y $t=T$.

$$\int_0^T F(t)\,dt = \int_0^T \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega t}\right) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_0^T e^{in\omega t}\,dt, \qquad (1.22)$$

donde que es válida la integración término a término. Teniendo en cuenta que

$$\int_0^T e^{in\omega t}\,dt = \begin{cases} T, & \text{si } n=0 \\ 0, & \text{si } n\neq 0 \end{cases}, \qquad (1.23)$$

De (1.22) se obtiene que

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,dt. \qquad (1.24)$$

Para encontrar a_n cuando $n \neq 0$, (1.21) se escribe

$$F(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im\omega t},$$

y esta última ecuación se multiplica a ambos lados por $e^{-in\omega t}$ y se integra por t entre 0 y T.

$$\int_0^T F(t) e^{-in\omega t}\,dt = \int_0^T \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im\omega t}\right) e^{-in\omega t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \int_0^T e^{i(m-n)\omega t}.$$

Pero según (1.23), la última integral es diferente de cero e igual a T, solo cuando $m=n$. Por tanto en la sumatoria queda sólo el término Ta_n. De donde

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)e^{-in\omega t}dt. \qquad (1.25)$$

Propiedad: $a_{-n} = \overline{a_n}$, donde $\overline{a_n}$ es el complejo conjugado de a_n. En efecto

$$a_{-n} = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)e^{in\omega t}dt = \overline{a_n}. \qquad (1.26)$$

Forma real de la serie de Fourier.

La forma compleja de la serie de Fourier (1.21) se puede llevar a la forma real dada por

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\omega t + B_n \operatorname{sen} n\omega t), \qquad (1.27)$$

siendo

$$A_0 = 2a_0, \quad A_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos n\omega t\,dt$$
$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\operatorname{sen} n\omega t\,dt. \qquad (1.28)$$

Demostración. Partiendo de (1.21) se escribe

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n e^{in\omega t} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{in\omega t}.$$

Haciendo el cambio de índice $n = -n'$ en la primera suma se tiene

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n e^{in\omega t} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} e^{-in\omega t}.$$

Por tanto

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{-n}e^{-in\omega t} + a_n e^{in\omega t}\right) \qquad (1.29)$$

De otra parte

$$a_{-n}e^{-in\omega t} + a_n e^{in\omega t} = a_{-n}[\cos(-n\omega t) + i\operatorname{sen}(-n\omega t)] + \qquad (1.30)$$
$$a_n[\cos n\omega t + i\operatorname{sen} n\omega t] =$$
$$(a_{-n} + a_n)\cos n\omega t + i(a_n - a_{-n})\operatorname{sen} n\omega t =$$
$$A_n \cos n\omega t + iB_n \operatorname{sen} n\omega t,$$

donde $A_n = a_n + a_{-n}$, $B_n = a_n - a_{-n}$. (1.31)

Se reemplaza el resultado (1.30) en (1.29)

$$F(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\omega t+B_n\,\mathrm{sen}\,n\omega t),$$

que coincide con (1.27) si $\frac{A_0}{2}=a_0$.

Teniendo en cuenta (1.31) y (1.26) se calcula

$$A_n=a_n+a_{-n}=a_n+\overline{a_n}=\frac{1}{T}\Big(\int_0^T F(t)e^{-in\omega t}dt+\int_0^T F(t)e^{-n\omega t}dt.$$

se obtiene

$$A_n=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos n\omega t\,dt,$$

que coincide con (1.28). Análogamente se calcula que

$$B_n=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\,\mathrm{sen}\,n\omega t\,dt,$$

que coincide con (1.28). Así se termina la demostración.

La forma real de la serie de Fourier dada por (1.27)-(1.28) también se puede escribir como

$$F(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos(n\omega t-\Phi_n), \qquad (1.32)$$

donde

$$C_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2}\;,\quad \Phi_n=\tan^{-1}\left(\frac{B_n}{A_n}\right) \qquad (1.33)$$

Demostración de (1.32) y (1.33). Imponiendo la condición

$$A_n\cos n\omega t+B_n\,\mathrm{sen}\,n\omega t=C_n\cos(n\omega t-\Phi_n), \quad (1.35)$$

donde C_n y Φ_n son constantes por determinar, se tiene

$$A_n\cos n\omega t+B_n\,\mathrm{sen}\,n\omega t=C_n\cos\Phi_n\cos n\omega t+C_n\,\mathrm{sen}\,\Phi_n\,\mathrm{sen}\,n\omega t,$$

de donde se obtiene que

$$A_n=C_n\cos\Phi_n \;\text{ y }\; B_n=C_n\,\mathrm{sen}\,\Phi_n.$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con respecto a C_n y Φ_n se encuentra que

$$C_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2}\;;\; \Phi_n=\tan^{-1}\left(\frac{B_n}{A_n}\right). \qquad (1.36)$$

Reemplazando (1.33) en (1.27) y considerando (1.36), se obtienen (1.32) y (1.33). Así se completa la demostración

Por último cabe indicar que el intervalo de integración de las integrales en (1.24), (1.25) y (1.28) se puede cambiar de $0 \le t \le T$ a $-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$ sin que se altere la integral.

Por ejemplo, sea la integral de (1.25)

$$\int_0^T F(t)\, e^{-in\omega t} dt .$$

Tanto $F(t)$ como $e^{-in\omega t}$ son funciones periódicas ambas de periodo T, por tanto $F(t)e^{-in\omega t}$ es periódica de periodo T y se puede aplicar la fórmula (1.5)

$$\int_0^T F(t) e^{-in\omega t} dt = \int_{\frac{T}{2}-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}+\frac{T}{2}} F(t) e^{-in\omega t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) e^{-in\omega t} dt .$$

Análogamente se pueden transformar las integrales en (1.25) y (1.28).

Ejemplo 1. Desarrollar en una serie de Fourier la función $F(t)$ dada por

$$F(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -A, & \frac{T}{2} < t < -\frac{T}{2} \end{cases} \qquad (1.37)$$

La gráfica de esta función se muestra en la Figura 5.

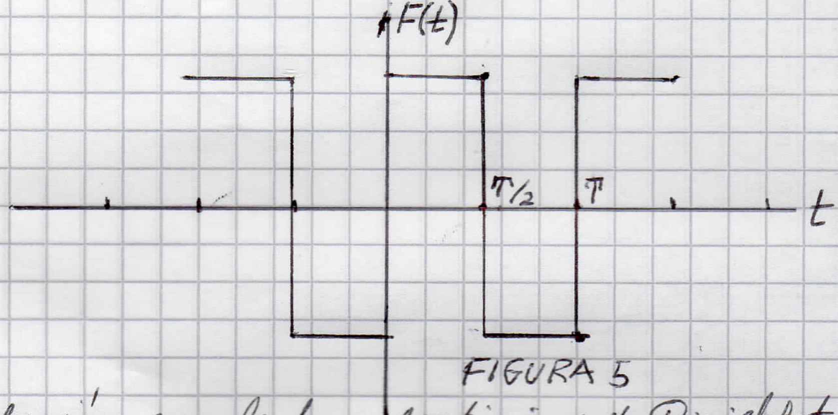


FIGURA 5

Esta función cumple las condiciones de Dirichlet. Usando la fórmula $a_n = \frac{1}{T}\int_0^T F(t) e^{-in\omega t} dt$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ se tiene:

Para $n = 0$, $a_0 = \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} A\,dt - \int_{T/2}^{T} A\,dt\right) = 0 .$ (1.38)

Para $n \neq 0$ se tiene.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} A e^{-in\omega t}dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} A e^{-in\omega t}dt\right) =$$

$$-\frac{A}{in\omega\pi}\left[2e^{-in\omega\frac{\pi}{2}} - e^{-in\omega\pi} - 1\right] = -\frac{A}{i2\pi n}\left[2e^{-in\pi} - e^{-in2\pi} - 1\right].$$

Aquí se tuvo en cuenta que $\omega = \frac{2\pi}{\pi}$. Teniendo en cuenta que

$$e^{-in\pi} = \begin{cases} -1, & \text{si } n \text{ impar} \\ 1, & \text{si } n \text{ par} \end{cases} \quad \text{y } e^{-in2\pi} = 1 \text{ para todo } n \text{ entero.}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \quad n \text{ par.} \\ a_n &= \frac{2A}{in\pi}, \quad n \text{ impar} \end{aligned} \qquad (1.39)$$

Reemplazando (1.38) y (1.39) en (1.21), se tiene que el desarrollo en serie de Fourier (forma compleja) de la función $F(t)$ definida en (1.37) es

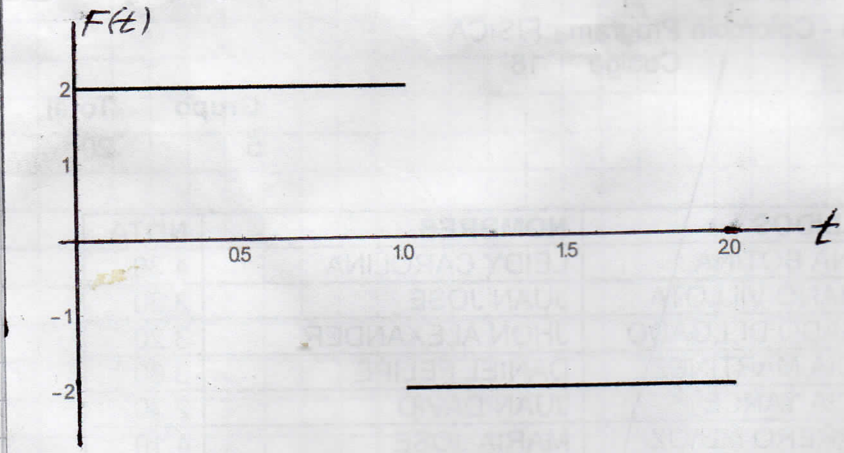
$$F(t) = \frac{2A}{i\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\text{-impar}}}^{\infty} \frac{e^{in\omega t}}{n}, \qquad (1.40)$$

también se escribe

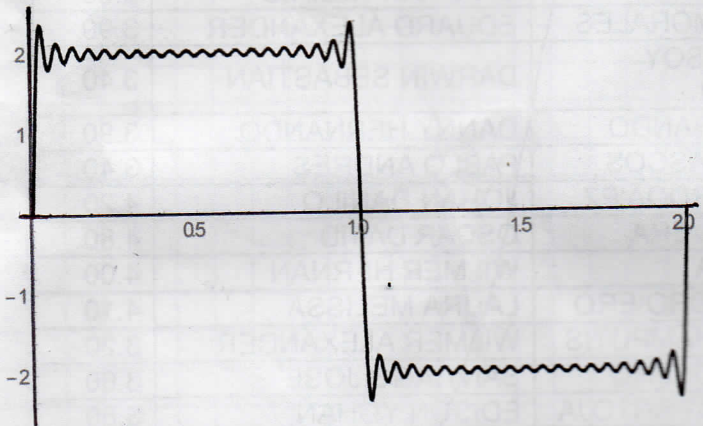
$$F(t) = \frac{2A}{i\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2n+1)\omega t}}{2n+1}. \qquad (1.41)$$

Esta serie puede llevarse a las formas reales dadas por (1.27) y (1.32), teniendo en cuenta (1.31) y (1.33).

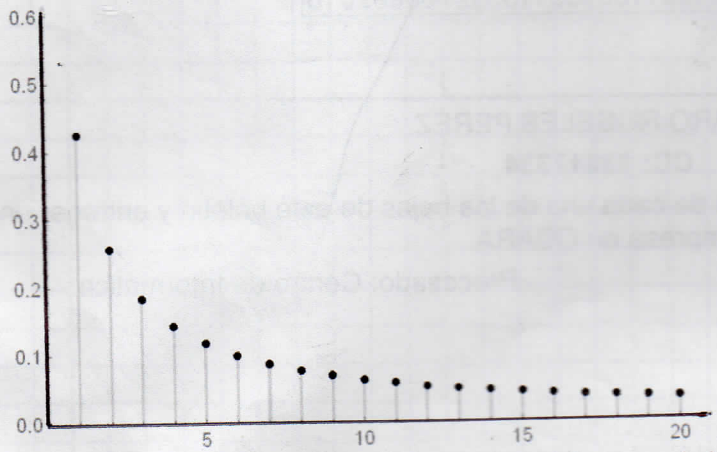
En la primera gráfica de la figura 6 se muestra la función $F(t)=\begin{cases}A, & 0<t<1\\ -A, & 1<t<2\end{cases}$, $F(t+T)=F(t)$.
En la segunda gráfica se muestra la serie de Fourier de $F(t)$



Función original



Aproximación mediante una serie de Fourier con 20 términos



Decaimiento de los valores absolutos de los coeficientes de la serie Fourier. Convergencia de la serie de Fourier.

FIGURA 6

Desarrollo en serie de Fourier de la función delta de Dirac $\delta(t)$.

La función $\delta(t)$ se define mediante las siguientes ecuaciones

$$\delta(t)\begin{cases}\infty, & si\ t=0\\ 0, & si\ t\neq 0\end{cases} \quad y \quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta(t)\,dt=1,\ \varepsilon>0. \qquad (1.42).$$

Se puede representar gráficamente $\delta(t)$ como se muestra en la figura

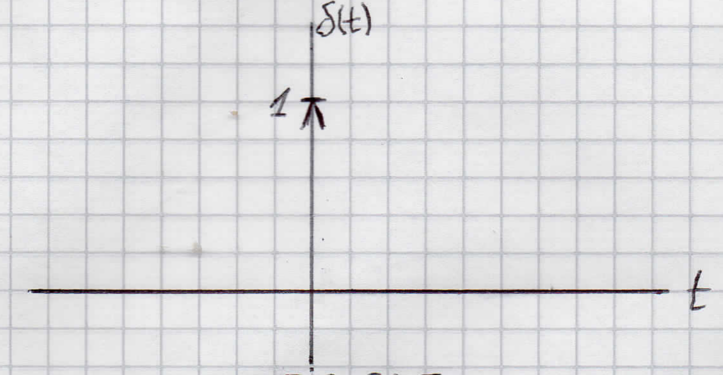


FIGURA 7

Como $\delta(t)$ no es periódica, en principio no se puede desarrollar en una serie de Fourier. En este caso para usar las series de Fourier se aplica el siguiente procedimiento. A partir de la Fig 7 se construye una función periódica $F(t)$, como se muestra en la Fig. 8

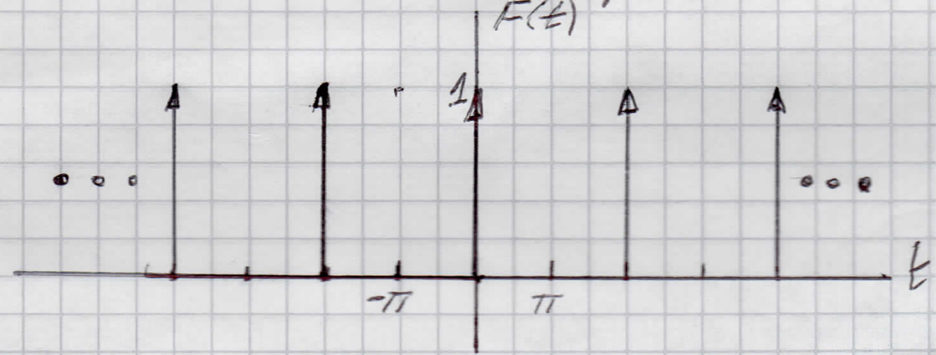


FIGURA 8

En la Figura 8 se ha tomado $T=2\pi$ por sencillez. La función $\delta(t)$ de la figura 7 y la función periódica de la figura 8 son iguales en el intervalo $-\pi\leq t\leq\pi$. Por eso lo que se hace es desarrollar en serie de Fourier la función periódica de la figura 8 y luego para aplicarla a la función $\delta(t)$

de la figura 7, la serie que se obtenga se usa solo en el intervalo $-\pi \leq t \leq \pi$.

Aplicando el procedimiento anterior, se calculan los coeficientes de Fourier a_n de la función periódica de la Figura.

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(t) e^{-in\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} e^{-in\omega t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi}.$$

Por tanto la serie de Fourier para la función $\delta(t)$ es

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{int}, \quad -\pi \leq t \leq \pi. \qquad (1.43)$$

1.4 Funciones ortogonales.

El conjunto de funciones $\varphi_k(t)$, donde el subíndice k sirve para enumerar las funciones del conjunto, es ortogonal, si cumple que

$$\int_a^b \varphi_n(t)\varphi_m(t)\,dt = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ r_n, & \text{si } n = m \end{cases}, \qquad (1.44)$$ en el intervalo $a < t < b$

donde r_n es una constante.

Vamos a relacionar el concepto de funciones ortogonales con el concepto de serie de Fourier. Si $F(t)$ es periódica con periodo T se puede desarrollar en la serie de Fourier

$$F(t) = \frac{A_0}{2}\times 1 + A_1\cos\omega t + A_2\cos 2\omega t + \cdots + A_n\cos n\omega t + \cdots + B_1\,\text{sen}\,\omega t + B_2\,\text{sen}\,2\omega t + \cdots + B_n\,\text{sen}\,n\omega t + \cdots \qquad (1.45)$$

De (1.45) extraemos el siguiente conjunto de funciones

$$1,\ \cos k\omega t,\ \text{sen}\,k\omega t \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right) \qquad (1.46)$$

Se puede probar que en el intervalo $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$, (1.46) cumple la condición de ortogonalidad (1.44), o sea que

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1\times\cos n\omega t\,dt = 0, \quad \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1\times\text{sen}\,n\omega t\,dt = 0, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega t \cos m\omega t \, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{T}{2} & \text{si } m = n \end{cases} \qquad m, n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen} n\omega t \operatorname{sen} m\omega t \, dt =$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen} n\omega t \cos m\omega t \, dt = 0 \text{ para todo } m \text{ y } n.$$

Por lo tanto el conjunto de funciones $1, \cos k\omega t, \operatorname{sen} k\omega t$ es ortogonal.

Por eso se dice que el desarrollo de una función periódica de periodo T en serie de Fourier es equivalente al desarrollo de dicha función en una serie de las funciones ortogonales $1, \cos k\omega t, \operatorname{sen} k\omega t$.

1.5 Valores medios.

Sea $F(t)$ periódica de periodo T, cuya serie de Fourier es

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Por definición el valor cuadrático medio F_E^2 de $F(t)$ sobre un periodo T es

$$F_E^2 = \frac{1}{T}\int_0^T F^2(t)\,dt \qquad (1.47)$$

Para aplicar (1.47) primero se desarrolla $F^2(t)$

$$F^2(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega t}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im\omega t}\right). \qquad (1.48)$$

Es necesario usar índices diferentes n y m en las sumatorias para evitar confusiones en los cálculos subsiguientes.

~~De (1.48) se tiene~~ Reemplazando (1.48) en (1.47) se tiene

$$F_E^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_n a_m e^{i(n+m)\omega t}\right] dt.$$

Se integra término a término

$$F_E^2 = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_n a_m \int_0^T e^{i(n+m)\omega t} dt \quad . \qquad (1\text{-}49)$$

Debido a que $\int_0^T e^{i(n+m)\omega t} dt = \begin{matrix} 0 & \text{si } m \neq -n \\ T & \text{si } m = -n \end{matrix}$,

entonces en la sumatoria por m de la ecuación (1.49) sobrevive solo el término $T a_n a_{-n}$, pero $a_{-n} = \bar{a}_n$, por tanto en definitiva de (1.49) se obtiene

$$F_E^2 = \frac{1}{T} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \bar{a}_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \quad . \qquad (1.50)$$

18

Taller 1 Fenómenos periódicos – Series de Fourier

1. Demuestre que en la forma real de la serie de Fourier, el coeficiente B_n está dado por la fórmula

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin(n\omega t)dt.$$

2. Encuentre la forma compleja de la serie de Fourier de la función

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \frac{4t}{T}, & 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ 1 + \frac{4t}{T}, & \frac{T}{2} \le t \le T \end{cases}, \text{ además } F(t) = F(t+T).$$

d.003. Funciones ortogonales. Un conjunto de funciones $\varphi_k(t)$ es ortogonal en un intervalo $a < t < b$ si para dos funciones cualesquiera $\varphi_m(t)$ y $\varphi_n(t)$ pertenecientes al conjunto $\varphi_k(t)$, se cumple

$$\int_a^b \varphi_m(t)\varphi_n(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ r_n & \text{para } m = n \end{cases}.$$

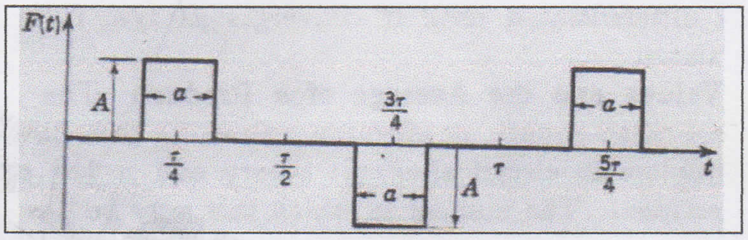
Teniendo en cuenta a la definición anterior, demuestre que el conjunto de funciones $\{1, \cos(k\omega t), \sin(k\omega t)\}$, siendo $k = 1,2,3,\ldots$ es ortogonal en el intervalo $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Observación. Se requiere calcular las siguientes integrales: $\int_{-T/2}^{T/2} 1 \times \cos(m\omega t)\,dt$, $\int_{-T/2}^{T/2} 1 \times \sin(m\omega t)\,dt$, $\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega t)\sin(n\omega t)\,dt$, $\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega t)\cos(n\omega t)\,dt$ y $\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega t)\cos(n\omega t)\,dt$.

4. Pase la serie de Fourier $F(t) = -i\frac{2A}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(2n+1)\omega t}}{2n+1}$ a las dos formas reales de la serie de Fourier.

5. Pase la serie de Fourier que obtuvo en el punto 2., a las dos formas reales de la serie de Fourier.

6. Calcule la serie de Fourier de la función definida en la figura de abajo.



FIN TALLER 1

19

PROBLEMAS PARA PARCIAL I

1.1 Muestre que si $F(t)$ es una función periódica par, esto es, $F(t) = F(-t)$, entonces su desarrollo en serie de Fourier no contiene términos del seno.

1.2 Muestre que si $F(t)$ es una función periódica impar, esto es, $F(-t) = -F(t)$, entonces su desarrollo en serie de Fourier no contiene términos del seno.

1.3 Desarrolle la función $F(t) = t^2$ en el intervalo en una serie de Fourier compleja y real.

1.4 Desarrolle la función $F(t) = e^{at}$ en el intervalo en una serie de Fourier compleja y real.

1.5 Sean dos funciones $F_1(t)$ y $F_2(t)$, amabas periódicas con el mismo periodo T. Se define el promedio del producto $F_1(t)F_2(t)$ sobre un periodo T como

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T F_1(t)F_2(t)dt.$$

Teniendo en cuenta los desarrollos en serie de Fourier

$$F_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega t} \text{ y } F_2(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m e^{im\omega t},\ \omega = \frac{2\pi}{T},$$

Demuestre que

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{-n}.$$

1.6 Compruebe que $\cos\omega t$ y $|\cos\omega t|$ son funciones periódicas con periodos mínimos de $\frac{2\pi}{\omega}$ y $\frac{\pi}{\omega}$, respectivamente.

Taller 1 Fenómenos periódicos – Series de Fourier

1. Demuestre que en la forma real de la serie de Fourier, el coeficiente B_n está dado por la fórmula

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin(n\omega t)dt.$$

2. Encuentre la forma compleja de la serie de Fourier de la función

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \frac{4t}{T}, & 0 < t < \frac{T}{2} \\ 1 + \frac{4t}{T}, & \frac{T}{2} < t < T \end{cases} \text{, además } F(t) = F(t+T).$$

3. Funciones ortogonales. Un conjunto de funciones $\varphi_k(t)$ es ortogonal en un intervalo $a < t < b$ si para dos funciones cualesquiera $\varphi_m(t)$ y $\varphi_n(t)$ pertenecientes al conjunto $\varphi_k(t)$, se cumple

$$\int_a^b \varphi_m(t)\varphi_n(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ r_n & \text{para } m = n \end{cases}.$$

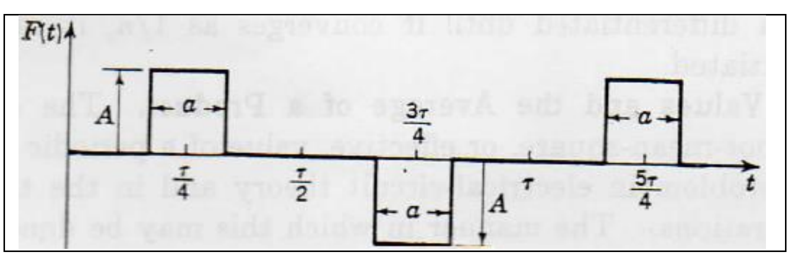
Teniendo en cuenta a la definición anterior, demuestre que el conjunto de funciones $\{1, \cos(k\omega t), \sin(k\omega t)\}$, siendo $k = 1,2,3, \dots$ es ortogonal en el intervalo $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$, $\quad \omega = \frac{2\pi}{T}$.

Observación. Se requiere calcular las siguientes integrales: $\int_{-T/2}^{T/2} 1 \times \cos(m\omega t)\, dt$, $\int_{-T/2}^{T/2} 1 \times \sin(m\omega t)\, dt$, $\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega t)\sin(n\omega t)\, dt$, $\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega t)\cos(n\omega t)\, dt$ y $\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega t)\cos(n\omega t)\, dt$.

4. Pase la serie de Fourier $F(t) = -i\frac{2A}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(2n+1)\omega t}}{2n+1}$ a las dos formas reales de la serie de Fourier.

5. Pase la serie de Fourier que obtuvo en el punto 2., a las dos formas reales de la serie de Fourier.

6. Calcule la serie de Fourier de la función definida en la figura de abajo.



FIN TALLER 1

PROBLEMAS PARA PARCIAL I

1.1 Muestre que si $F(t)$ es una función periódica par, esto es $F(t) = F(-t)$, entonces su desarrollo en serie de Fourier no contiene términos del seno.

1.2 Muestre que si $F(t)$ es una función periódica impar, esto es $F(-t) = -F(t)$, entonces su desarrollo en serie de Fourier no contiene términos del seno.

1.3 Desarrolle la función $F(t) = t^2$ en el intervalo $0 < t < T$ en una serie de Fourier compleja y real.

1.4 Desarrolle la función $F(t) = e^{at}$ en el intervalo $0 < t < T$ en una serie de Fourier compleja y real.

1.5 Sean dos funciones $F_1(t)$ y $F_2(t)$, ambas periódicas con el mismo periodo T. Se define el promedio del producto $F_1(t)F_2(t)$ sobre un periodo T como

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T F_1(t)F_2(t)dt.$$

Teniendo en cuenta los desarrollos en serie de Fourier

$$F_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega t} \text{ y } F_2(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m e^{im\omega t},\ \omega = \frac{2\pi}{T},$$

demuestre que

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{-n}.$$

1.6 Compruebe que $\cos\omega t$ y $|\cos\omega t|$ son funciones periódicas con periodos mínimos de $\frac{2\pi}{\omega}$ y $\frac{\pi}{\omega}$, respectivamente.

Capitulo 2. Las funciones gamma, beta y la función error

Estas funciones aparecen en la solución de algunos problemas físicos.

2.1 La función gamma

Esta función fué definida por Euler mediante la integral definida

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-x} dx \quad \text{para} \quad \nu > 0, \qquad (2.1)$$

quedando pendiente de definir $\Gamma(\nu)$ para $\nu \leq 0$.

La integral (2.1) converge para $\nu > 0$, así $\Gamma(\nu)$ se encuentra bien tabulada para $\nu > 0$.

Se tiene que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1.$$

y $$\Gamma(\nu+1) = \int_0^\infty x^\nu e^{-x} dx = -e^{-x} x^\nu \Big|_{x=0}^{\infty} + \nu \int x^{\nu-1} e^{-x} dx = \nu \Gamma(\nu).$$

Esto es:

$$\Gamma(1) = 1 \qquad (2.2)$$

$$\Gamma(\nu+1) = \nu \Gamma(\nu) \qquad (2.3)$$

A continuación se extiende la definición de $\Gamma(\nu)$ para valores negativos no enteros de ν ($\nu < 0$, ν no entero).
Para comenzar se define $\Gamma(\nu)$ para $-1 < \nu < 0$.
De (2.3) se escribe que

$$\Gamma(\nu) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\nu} \qquad (2.4)$$

y se observa que si $-1 < \nu < 0$, entonces $0 < \nu+1 < 1$ y $\Gamma(\nu+1)$ está definida mediante la integral (2.1). De esta manera

$\Gamma(\nu)$ para $-1 < \nu < 0$ se calcula usando (2.4)
Se prosigue con $\Gamma(\nu)$ para $-2 < \nu < -1$. En este caso, $-1 < \nu+1 < 0$ y $\Gamma(\nu+1)$ ya está definida en el paso anterior. Por tanto, usando (2.4) se calculan los valores de $\Gamma(\nu)$ para $-2 < \nu < -1$.
Y así sucesivamente, se define $\Gamma(\nu)$ para $\nu < 0$, ν no entero.

Ejemplo. Teniendo en cuenta que $\Gamma(1.5)=0.9$, calcule $\Gamma(-1.5)$

Solución:

Se tiene que $\Gamma(1.5)=\Gamma(1+0.5)=1\Gamma(0.5)$, entonces $\Gamma(0.5)=0.9$. Aquí se usó (2.3).

Ahora $\Gamma(-0.5)=\dfrac{\Gamma(-0.5+1)}{-0.5}=-1.8$. Por último $\Gamma(-1.5)=\dfrac{\Gamma(-0.5)}{-1.5}=1.2$.

Respuesta: $\Gamma(-1.5)=1.2$.

Falta estudiar el comportamiento de $\Gamma(\nu)$ en $\nu=0,-1,-2,\ldots$, lo cual se hace aplicando la ecuación (2.4). Si $\nu=0$, se tiene $\Gamma(0)=\dfrac{\Gamma(1)}{0}=\infty$. Entonces veamos cuál es el comportamiento de $\Gamma(\nu)$ cuando ν se acerca a cero por la izquierda $(\nu=0^-)$ y por la derecha $(\nu=0^+)$. Se tiene

$$\lim_{\nu\to 0^-}\Gamma(\nu)=\lim_{\nu\to 0^-}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\nu}=\frac{\Gamma(1)}{0^-}=-\infty.$$

Analogamente se obtiene que $\Gamma(0^+)=\infty$. Esto es

$$\Gamma(0^-)=-\infty,\ \Gamma(0^+)=\infty. \qquad (2.5)$$

Ahora calculemos $\Gamma(-1^+)$. Usando (2.4) se escribe $\lim_{\nu\to-1^+}\Gamma(\nu)=$ $\lim_{\nu\to-1^+}\dfrac{\Gamma(\nu+1)}{-1^+}=\dfrac{\Gamma(0)}{-1^+}=-\infty$. Analogamente se obtiene que $\Gamma(-1^-)=\infty$. Esto es

$$\Gamma(-1^-)=\infty,\ \Gamma(-1^+)=-\infty. \qquad (2.6)$$

Generalizando se tiene que

$$\Gamma(\nu^+)=(-1)^\nu\infty,\ \Gamma(\nu^-)=(-1)^{\nu+1}\infty,\ \nu=0,-1,-2,\cdots \quad (2.7)$$

La representación de la función gamma dada por (2.1), se puede llevar a la forma

$$\Gamma(\nu)=2\int_0^\infty x^{2\nu-1}e^{-x^2}dx,\ \nu>0. \qquad (2.8)$$

En efecto haciendo el cambio $x=y^2$, se llega a

$\Gamma(\nu)=2\int_0^\infty y^{2\nu-1}e^{-y^2}dy$, que es lo mismo que (2.8).

Probar que $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$. Usando (2·8) se escribe $\Gamma(\frac{1}{2})=2\int_0^\infty e^{-x^2}dx$, y se conoce que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, por tanto $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

Una vez conocido el valor de $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, se puede calcular

$\ldots,\Gamma(-\frac{3}{2}),\Gamma(-\frac{1}{2}),\Gamma(\frac{1}{2}),\Gamma(\frac{3}{2}),\ldots,\Gamma(\frac{2n+1}{2}),\ldots$ (n-entero)

Por ejemplo, $\Gamma(\frac{3}{2})=\Gamma(\frac{1}{2}+1)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Análogamente, se obtiene que $\Gamma(\frac{5}{2})=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$, $\Gamma(-\frac{1}{2})=-2\sqrt{\pi}$.

De (2·2) y 2·3, se escribe que

$$\begin{aligned}\Gamma(1)&=1=0!\\ \Gamma(2)&=1!\\ \Gamma(3)&=2!\\ &\ldots\\ \Gamma(n+1)&=n!, \qquad (2\cdot 9)\end{aligned}$$

donde n es un entero positivo.

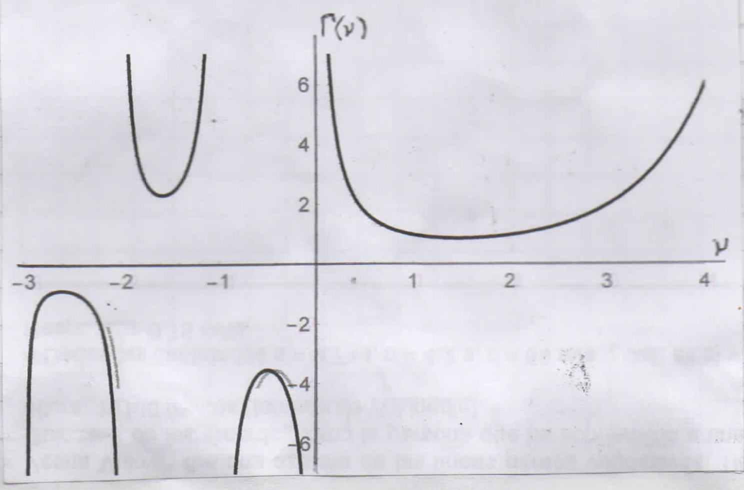
Con todo lo anterior, la función gamma ha quedado definida para

$-\infty<\nu<\infty$, excepto en los puntos $\nu=0,-1,-2,\ldots$

A continuación se procede a elaborar la gráfica $\Gamma(\nu)$ con respecto a ν. Se presenta la tabla de valores de $\Gamma(\nu)$ encontrados anteriormente y la gráfica correspondiente.

ν	$\Gamma(\nu)$
0^+	∞
1/2	1.8
3/2	0.9
5/2	1.3

ν	$\Gamma(\nu)$
0^-	$-\infty$
$-1/2$	-6.3
-1^+	$-\infty$
-1^-	∞
$-3/2$	2.4
-2^+	∞



la función pi de Gauss $\Pi(\nu)$. Esta función se define como
$$\Pi(\nu)=\Gamma(\nu+1).$$
Si $\nu=n$ entero positivo, entonces $\Pi(n)=\Gamma(n+1)=n!$

2.2 La función beta $\beta(p,q)$. La función $\beta(p,q)$ se define mediante la integral
$$\beta(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \qquad (2.10)$$
siendo $p>0$ y $q>0$.

Probar que $\beta(p,q)=\beta(q,p)$.

Haciendo en la integral en (2.10), el cambio de variable $x=1-y$, se obtiene que
$$\beta(p,q)=-\int_1^0 y^{q-1}(1-y)^{p-1}dy=\int_0^1 y^{q-1}(1-y)^{p-1}dy=\beta(q,p).$$
Así se cumple que
$$\beta(p,q)=\beta(q,p). \qquad (2.11)$$
Probar que otra representación de la función beta es
$$\beta(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}\phi)^{2p-1}(\cos\phi)^{2q-1}d\phi. \qquad (2.12)$$
Haciendo en (2.1) $x=\operatorname{sen}^2\phi$, por tanto $dx=2\operatorname{sen}\phi\cos\phi\, d\phi$ y $\phi=\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{x})$, se llega a que
$$\beta(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}^2\phi)^{p-1}(1-\operatorname{sen}^2\phi)^{q-1}\operatorname{sen}\phi\cos\phi\, d\phi=$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}\phi)^{2p-1}(\cos\phi)^{2q-1}d\phi,$$
que es lo que se pedía demostrar.

Probar que otras formas de la función beta ~~es~~ son:
$$\beta(p,q)=\frac{1}{a^{p+q-1}}\int_0^a x^{p-1}(a+x)^{q-1}dx \qquad (2.13)$$
$$\beta(p,q)=\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{(1-x)^{p+q}}dx. \qquad (2.14)$$
Para obtener (2.13) se hace $x=\frac{y}{a}$ en (2.14) y para obtener (2.14) se hace $x=\frac{y}{1+y}$ en (2.10).

Si $p+q=1$, entonces $0<q<1$ y $0<p<1$, de (2.14) se tiene

$$\beta(p,q)=\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{1-x}\,dx\,.$$

$p+q=1$

Se conoce que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{1-x}\,dx=\frac{\pi}{\operatorname{sen} q\pi}$, $0<q<1$. (2.15)

Por tanto

$$\beta(p,q)=\frac{\pi}{\operatorname{sen} q\pi}, \quad p+q=1 \qquad (2.16)$$

2.3 Relación entre la función beta y la función gamma.

Demostraremos que la relación entre $\beta(p,q)$ y $\Gamma(r)$ está dada por la ecuación

$$\beta(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad (2.17)$$

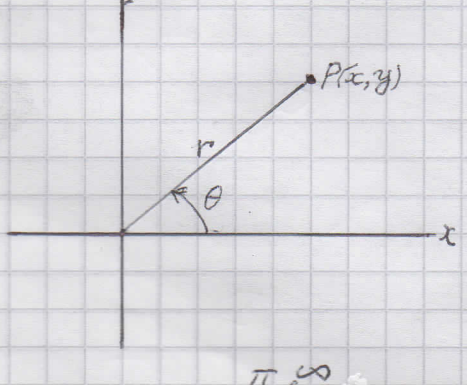
Según (2.8)

$$\Gamma(p)=2\int_0^\infty x^{2p-1}e^{-x^2}dx,\quad \Gamma(q)=2\int_0^\infty y^{2q-1}e^{-y^2}dy.$$

De donde

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\left(\int_0^\infty x^{2p-1}e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty y^{2q-1}e^{-y^2}dy\right)=$$
$$=4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy.$$

Esta es una integral de superficie en el primer cuadrante de un sistema de coordenadas cartesianas xy. Se pasa a coordenadas polares (ver figura):



$x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$.

En el primer cuadrante ~~θ varía~~ $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ y $0\le r<\infty$. Además, $dx\,dy$ se reemplaza por $r\,d\theta\,dr$, $x^2+y^2=r^2$. Por tanto

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty r^{2p-1}(\cos\theta)^{2p-1}r^{2q-1}(\operatorname{sen}\theta)^{2q-1}e^{-r^2}r\,d\theta\,dr.$$

O bien

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}\theta)^{2q-1}(\cos\theta)^{2p-1}d\theta\right)\left(2\int_0^{\infty}r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr\right).$$

~~Teni~~ Teniendo en cuenta (2.8) y (2.12) se escribe

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\Gamma(p+q)\beta(q,p).$$

Pero según (2.11) $\beta(q,p)=\beta(p,q)$, en definitiva se obtiene

$$\beta(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \qquad (2.17)$$

Con ayuda de (2.17) y alguna de las representaciones de $\beta(p,q)$ dadas en (2.10), (2,12) y (2.13) y (2.14), se calculan algunas integrales.

Por ejemplo:

Calcular la integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2p-1}(\operatorname{sen}\theta)^{2q-1}d\theta$, $\begin{cases}p>0\\ q>0\end{cases}$. (2.18)

Teniendo en cuenta (2.12) y (2.20) se obtiene directamente (2.18).

Probar que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^r d\theta=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}, \quad r>-1. \qquad (2.19)$$

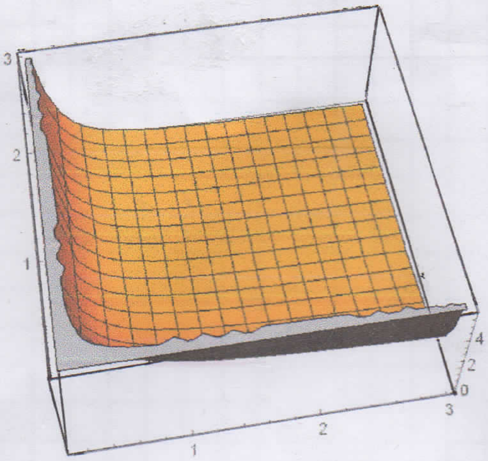
En (2.18) se hace $2q-1=0$, de donde $q=\frac{1}{2}$. Se escribe $2p-1=r$, de donde $p=\frac{r+1}{2}$, $p+q=\frac{r}{2}+1$, además $p+q>0$, por tanto $r>-1$ y $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Teniendo en cuenta estos resultados se llega a (2.19).

Análogamente se obtiene que

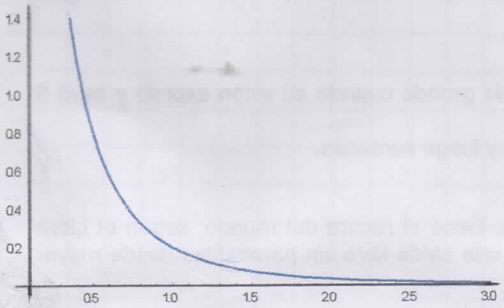
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}\theta)^r d\theta=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}, \quad r>-1. \qquad (2.20)$$

Probar que $\quad \Gamma(q)\Gamma(1-q)=\dfrac{\pi}{\operatorname{sen} q\pi} \quad 0<q<1. \qquad (2.21)$

Observación: Use la integral (2.15)



La gráfica de la función beta $\beta(p,q)$ de dos argumentos p y q, produce una superficie.



Gráfica de la función beta $\beta(p,q)$ como función de q y $p = 5$.

2.4 La función error erf(x).

La función error se define como

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt, \quad -\infty < x < \infty. \qquad (2.22)$$

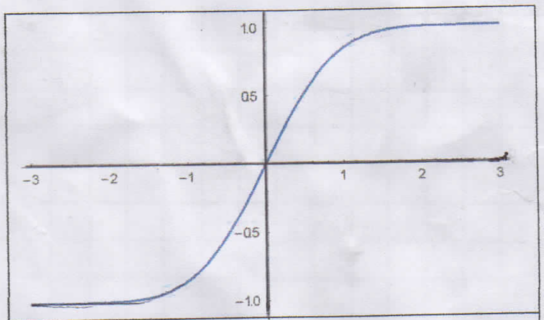
Esta función se utiliza en teoría de probabilidades y en teoría de ecuaciones diferenciales parciales

Probar que:

a) $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$ (2.23)

En (2.22) se hace el cambio $t = -\tau$. Osea que $\operatorname{erf}(x)$ es una función par.

b) $\operatorname{erf}(iy) = \frac{2i}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{t^2}dt$. (2.24)



Gráfica de la función $erf(x)$.

Taller 2   Funciones gamma, beta y función error

1. A partir de los siguientes valores de la función gamma

$$\Gamma(3.5) = 3.32, \Gamma(-1^{+}) = -\infty, \Gamma(-1^{-}) = +\infty, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

Encuentre los valores

$$\frac{\Gamma(-3.5)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)},\ \Gamma(-3^{+}) = -\infty \text{ y } \Gamma(-3^{-}).$$

2. La función beta se define como

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx. \tag{1}$$

Haciendo los cambios de la variable de integración en (1): a) $x = \frac{y}{a}$ y b) $x = \frac{y}{1+y}$, encuentre las formas respectivas que adquiere la función beta.

Muestre que si $p + q = 1$, entonces $\beta(p,q) = \frac{p}{\sin q\pi}$.

3. Demuestre que:

a) La función error $erf(x)$ es una función impar, esto es, $erf(-x) = -erf(x)$ y

b) $$erf(iy) = \frac{2i}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{t^2}dt,\ i = \sqrt{-1}.$$

c) $$\Gamma(q)\Gamma(1-q) = \frac{\pi}{\sin q\pi},\ \ 0 < q < 1.$$

Capitulo 3. Ecuación diferencial de Bessel y funciones de Bessel

3.1 Ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes variables. Metodo de Frobenius.

En varias ramas de la física aparecen ecuaciónes diferenciales de segundo orden de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0, \qquad (3.1)$$

siendo $P(x)$ y $Q(x)$ coeficientes variables que son funciónes de x.

La ecuación (3.1) es lineal, lo que significa que si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son dos soluciónes de (3.1), entonces la combinación lineal

$$Ay_1(x)+By_2(x), \qquad (3.2)$$

donde A y B son constantes arbitrarias, también satisface (3.1). En efecto, reemplazando (3.2) en (3.1) se tiene

$$\frac{d^2}{dx^2}(Ay_1+By_2)+P(x)\frac{d}{dx}(Ay_1+By_2)+Q(x)(Ay_1+By_2)=$$
$$A\left[\frac{d^2y_1}{dx^2}+P(x)\frac{dy_1}{dx}+Q(x)y_1\right]+B\left[\frac{d^2y_2}{dx^2}+P(x)\frac{dy_2}{dx}+Q(x)y_2\right]=0,$$

ya que las expresiones entre corchetes dan cero. Por tanto, la combinación lineal (3,2) es solución de la ecución diferencial (3,1) y por tanto esta es lineal.

El método de Frobenius. Este método fué elaborado por Frobenius (1849-1917) y consiste en desarrollar la solución $y(x)$ de (3.1) en una serie de potencias

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \quad a_0 \neq 0, \qquad (3.3)$$

donde a_n y r son constantes por determinar. Sustituyendo (3.3) en (3.1) se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1)x^{n+r-2} + P(x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)x^{n+r-1} + Q(x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \qquad (3.4).$$

Con base en (3.4), en cada caso concreto, se procede a determinar los coeficientes a_n y la constante r que aparecen en (3.3).

3.2 La ecuación diferencial de Bessel y las funciones de Bessel de primera clase de orden ν.

La ecuación diferencial de Bessel tiene la forma.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-\nu^2)y=0\ , \qquad (3.5)$$

donde ν es una constante. Se solucionará esta ecuación utilizando el método de Frobenius. Se desarrolla la solución $y(x)$ en la serie de potencias (3.3).

Dividiendo (3.5) por x^2 se escribe

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0 \qquad (3.6)$$

Comparando (3.6) con (3.1) se establece que $P(x)=\frac{1}{x}$ y $Q(x)=1-\frac{\nu^2}{x^2}$. Estas expresiones se reemplazan en (3.4), dando

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}+\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r-1}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0\ .$$

De donde

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left((n+r)^2-\nu^2\right)x^{n+r-2}+\sum_{n=0}a_n\,x^{n+r}=0\ .$$

Haciendo en la primera sumatoria el cambio de índice $n'=n-2$, se obtiene

$$\sum_{n=-2}^{\infty}a_{n+2}\left((n+r+2)^2-\nu^2\right)x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^{n+r}=0$$

O bien,

$$a_0(r^2-\nu^2)x^{r-2}+a_1\left((r+1)^2-\nu^2\right)x^{r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_{n+2}\left((r+n+2)^2-\nu^2\right)+a_n\right]x^{n+r}=0 \qquad (3.7)$$

Igualando a cero los coeficientes de diferentes potencias de x, se escribe

$$a_0(r^2-\nu^2)=0$$

Como $a_0\neq 0$, se obtiene

$$r^2-\nu^2=0 \qquad (3.8)$$

Esta ecuación permite determinar la constante r y se denomina ecuación indicial. Así

$$r=\pm\nu\ . \qquad (3.9)$$

Continuando en (3.7) se tiene que

$$a_1\left((r+1)^2-\nu^2\right)=0\ ,$$

Teniendo en cuenta (3.9) se tiene $a_1(\pm 2\nu+1)=0$.

que se debe cumplir para todo valor de ν, por tanto

$$a_1 = 0 \,. \qquad (3.10)$$

La siguiente ecuación para los coeficientes a_n, según (3.7) es

$$\left((r+n+2)^2 - \nu^2\right) a_{n+2} + a_n = 0 \,.$$

De esta ecuación se obtienen dos, una para los coeficientes impares (haciendo $n \to 2n+1$, $n = 0, 1, 2, \cdots$) y los coeficientes pares ($n \to 2n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$). Se escribe:

Para los coeficientes impares

$$a_{2n+3}\left((r+2n+3)^2 - \nu^2\right) + a_{2n+1} = 0 \,. \qquad (3.11)$$

Para los coeficientes pares

$$a_{2(n+1)}\left(\left(r+2(n+1)\right)^2 - \nu^2\right) + a_{2n} = 0 \qquad (3.12).$$

Las ecuaciones (3.11) y (3.12) se conocen como relaciones de recurrencia para los a_n.

De (3.11), teniendo en cuenta (3.10) se obtiene que todos los coeficientes impares son cero

$$a_{2n+1} = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \qquad (3.13)$$

Resumiendo de (3.3), (3.9) y (3.13) se tiene

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

$$a_0 \neq 0 \,, \quad r = \pm \nu \,,$$

$$a_{2n+1} = 0 \,, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Para continuar, consideremos el caso cuando $r = +\nu$. Para los coeficientes pares de (3.12) se escribe

$$a_{2(n+1)} = - \frac{a_{2n}}{4(n+1)(\nu+n+1)} \,,$$

de donde, si

$n = 0$, entonces $a_2 = - \dfrac{a_0}{4(\nu+1)}$,

$n = 1$, entonces $a_4 = \dfrac{a_0}{4 \cdot 4 (\nu+1)(\nu+2) 2}$,

$$a_6 = -\frac{a_0}{4\times 4\times 4(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\,3\times 2}.$$

Con el fin de generalizar esta fórmula, la reescribimos así:

$$a_{2\times 3} = (-1)^3 \frac{a_0}{2^{2\times 3}(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\,3!}$$

y la fórmula general se escribe

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n}(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)n!}. \quad (3.14).$$

Con (3.14) quedan determinados todos los coeficientes de la serie de potencias (3.3) para el caso $r=\nu$. Por tanto, la solución es

$$y(x) \equiv J_\nu(x) = a_0 x^\nu + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{n!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \frac{x^{2n+\nu}}{2^{2n}}. \quad (3.15)$$

Se hacen algunas transformaciones en la última sumatoria. Usando que

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p) \text{ o bien } p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p)},$$

se tiene: si $p=\nu+1$, entonces $\nu+1 = \frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\nu+1)}$; para $p=\nu+2$, $\nu+2 = \frac{\Gamma(\nu+3)}{\Gamma(\nu+2)}$.

Se hace el producto $(\nu+1)(\nu+2) = \frac{\Gamma(\nu+2+1)}{\Gamma(\nu+1)}$. A partir de este resultado generalizamos así:

$$(\nu+1)\cdots(\nu+n) = \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu+1)}. \quad (3.16)$$

De otra parte, la expresión $\frac{x^{2n+\nu}}{2^{2n}}$ que aparece en (3.15) se escribe así

$$\frac{x^{2n+\nu}}{2^{2n}} = 2^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}. \quad (3.17)$$

Se reemplaza (3.16) y (3.17) en (3.15)

$$J_\nu(x) = a_0 x^\nu + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0 \Gamma(\nu+1) 2^\nu}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

Usando la funcion pi $\Pi(p)$ se escribe

$n! = \Pi(n)$, n entero positivo, $\Gamma(\nu+1) = \Pi(\nu)$ y $\Gamma(n+\nu+1) = \Pi(n+\nu)$. (3.19)

De otra parte, como a_0 es una constante arbitraria, se puede simplificar (3.18) haciendo que

$$a_0\Pi(\nu)2^\nu=1, \text{ o bien } a_0=\frac{1}{2^\nu\Pi(\nu)} . \qquad (3\cdot 20)$$

se reemplaza (3·19) y (3·20) en (3·18)

$$J_\nu(x)=\frac{1}{2^\nu\Pi(\nu)}x^\nu+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Pi(n)\Pi(n+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

Por último, el primer término fuera de la sumatoria se puede incluir en la sumatoria haciéndolo desde $n=0$ hasta ∞. En efecto para $n=0$, $\frac{(-1)^0}{\Pi(0)\Pi(\nu)}\frac{x^\nu}{2^\nu}=\frac{1}{2^\nu\Pi(\nu)}x^\nu$,

o sea, se obtiene el primer término. Por tanto

$$J_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Pi(n)\Pi(n+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} . \qquad (3\cdot 21) .$$

Análogamente, para $r=-\nu$ se obtiene otra solución de la ecuación diferencial de Bessel (3·5)

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Pi(n)\Pi(n-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu} \qquad (3\cdot 22) .$$

Es necesario examinar si las dos soluciones (3·21) y (3·22), conocidas como funciones de Bessel de primera clase de orden n, son independientes. Utilizaremos el siguiente teorema.

Teorema de Focus. El número de soluciones independientes encontrada por el método de Frobenius depende de las raíces, r_1 y r_2, de la ecuación indicial (3·8) así:

1. Si las dos raíces son iguales, se encuentra sólo una solución.
2. Si $r_1-r_2=\alpha$, siendo α un número no entero, se encuentran dos soluciones linealmente independientes
3. Si $r_1-r_2=n$, donde n es un número entero, entonces,

si $r_1>r_2$ se encuentra una solución para r_1. Para r_2 en algunos casos se puede encontrar una solución linealmente independiente de la solución para r_1, pero existen casos cuando esto no es posible.

A la luz de este teorema se tiene

1. Si $\nu=0 \Rightarrow r_1=\nu=0$, $r_2=-\nu=0$, y $r_1=r_2$, por tanto se encuentra una sola solución $J_0(x)$.

2. Para $\nu \neq 0$, consideramos primero $\nu = m > 0$, donde m es un entero positivo, se tiene $r_1 = m$ y $r_2 = -m$, portanto $r_1 - r_2 = 2m$ da un número entero, que corresponde al caso 3 del teorema de Focus.

Además, por este mismo teorema, ya que $m > -m$, se tiene una solución para $r_1 = m$

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(n)\pi(n+m)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}, \quad m \text{ entero positivo.} \qquad (3.23)$$

También, se encuentra una solución para $r_2 = -m$

$$J_{-m}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(n)\pi(n-m)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-m}. \qquad (3.24)$$

Sinembargo, el teorema no puede asegurar que $J_m(x)$ y $J_{-m}(x)$ sean linealmente independientes. Esto hay que esclarecerlo de manera autónoma, así:

Se parte de (3,24)

$$J_{-m}(x) = \frac{1}{\pi(1)\pi(-m)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m} + \cdots + \frac{1}{\pi(m-1)\pi(-1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(m-1)-m} +$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(n)\pi(n-m)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-m}.$$

Aquí se han escrito separadamente los primeros $(m-1)$ términos de la sumatoria en (3.24). Se observa que

$\pi(-m) = \cdots = \pi(-1) = \infty$, por eso los primeros $(m-1)$ términos son ceros y se tiene

$$J_{-m}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(n)\pi(n-m)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-m}.$$

Haciendo el cambio $2n - m = 2\tilde{n} + m$, osea $n = \tilde{n} + m$, se obtiene

$$J_{-m}(x) = (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(n)\pi(n+m)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}.$$

Teniendo en cuenta (3.23) se concluye que

$$J_{-m}(x)=(-1)^m J_m(x),$$

o sea que J_{-m} y J_m son linealmente dependientes.

3. Por último consideremos el caso cuando ν es no entero. Se toma por ejemplo

$$\nu=0.5.$$

Reemplazando este valor en (3.21) y (3.22) se obtiene:

$$J_{0.5}(x)=+\frac{1}{\pi(0)\,\pi(0.5)}\left(\frac{x}{2}\right)^{0.5}-\frac{1}{\pi(1)\,\pi(1.5)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2.5}+\frac{1}{\pi(2)\,\pi(2.5)}\left(\frac{x}{2}\right)^{4.5}-\cdots \quad (3.25)$$

$$y\quad J_{-0.5}(x)=+\frac{1}{\pi(0)\,\pi(-0.5)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-0.5}-\frac{1}{\pi(1)\,\pi(0.5)}\left(\frac{x}{2}\right)^{1.5}+\frac{1}{\pi(2)\,\pi(1.5)}\left(\frac{x}{2}\right)^{3.5}-\cdots \quad (3.26)$$

Se observa que en (3.25) las potencias de x $(0.5, 2.5, 4.5, \cdots)$ son distintas de las potencias de x en (3.26) $(-0.5, 1.5, 3.5, \cdots)$, por lo que es imposible obtener una de las dos expresiones (3.25) o (3.26) multiplicando la otra por una constante. Esto significa que (3.25) y (3.26) no son linealmente independientes, son linealmente independientes. Se concluye que las dos soluciones $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ dadas por (3.21) y (3.22) son linealmente independientes si y solo si ν es no entero, $(\nu \neq 0, \pm1, \pm2, \cdots)$

Capítulo 4. Ecuación diferencial de Legendre y Polinomios de Legendre.

La ecuación diferencial de Legendre aparece en varias ramas de la física y tiene la forma

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0 \qquad (4.1)$$

La solución de (4.1) se busca mediante el método de Frobenius, es decir, $y(x)$ se desarrolla en una serie de potencias

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{k+r}, \qquad (4.2)$$

donde los coeficientes a_k y la constante r están por determinar.

Sacando la primera y segunda derivadas de (4.2) y reemplazándolas en (4.1) se tiene

$$(1-x^2)\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r-2}-2x\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+r)x^{k+r-1}+n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{k+r}=0$$

O bien

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r-2}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left[-(k+r)(k+r-1)-2(k+r)+n(n+1)\right]x^{k+r}$$

o bien

$$a_0r(r-1)x^{r-2}+a_1(1+r)rx^{r-1}+\sum_{k=2}^{\infty}a_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r-2}+$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left[n^2-(k+r)^2+n-(k+r)\right]x^{k+r} \qquad (4.3)$$

Se hacen las siguientes transformaciones:

En la primera sumatoria se hace el cambio $k-2=\tilde{k}$

$$\sum_{k=2}^{\infty}a_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r-2}=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+2}(k+r+2)(k+r+1)x^{k+r}. \qquad (4.4)$$

De otra parte, se escribe

$$n^2-(k+r)^2+n-(k+r)=\Big((n+(k+r))+a\Big)\Big((n-(k+r))+b\Big), \qquad (4.5)$$

donde a y b son constantes por determinar. Desarrollando el lado derecho de (4.5) se encuentra que la igualdad se cumple si

$$a+b=1$$
$$(b-a+1)(k+r)+ab=0 \qquad (4.6)$$

Se despeja b de la primera ecuación, $b=1-a$, y se reemplaza en la segunda, se obtiene:

$$a^2+(2(r+k)-1)a-2(r+k)=0$$

De donde
$$a=\frac{-2(r+k)+1\pm\sqrt{(2(r+k)-1)^2+8(r+k)}}{2}=\begin{cases}1\\-2(r+k)\end{cases}$$

Escogiendo la solución $a=1$, se tiene $b=1-a=0$, estos valores se reemplazan (4.5)

$$n^2-(r+k)^2+n-(r+k)=(n+(r+k)+1)(n-(r+k)) \qquad (4.6)$$

Se reemplaza (4.4) y (4.6) en (4.3)

$$a_0r(r-1)x^{r-2}+a_1(r+1)rx^{r-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\left[a_{k+2}(r+k+2)(r+k+1)+a_k(n+r+k+1)(n-r-k)\right]x^{r+k} \qquad (4.7)$$

Se igualan a cero las potencias de x en (4.7)

$$a_0r(r-1)=0 \qquad (4.8)$$
$$a_1(r+1)r=0 \qquad (4.9)$$
$$a_{k+2}(r+k+1)(r+k+2)+a_k(n-r-k)(n+r+k+1)=0 \qquad (4.10)$$

De (4.10) $$a_{k+2}=-\frac{(n-r-k)(n+r+k+1)}{(r+k+1)(r+k+2)}a_k \qquad (4.11)$$

Se examinan los coeficientes con k par $(k=0,2,4,\dots)$ se tiene

$$a_{0+2}=-\frac{(n-r-0)(n+r+0+1)}{(r+0+1)(r+0+2)}a_0,$$

$$a_{2+2}=+\frac{(n-r)(n-r-2)(n+r+1)(n+r+2+1)}{(r+1)(r+2)(r+2+1)(r+2+2)}a_0$$

$$a_{4+2}=-\frac{(n-r)(n-r-2)(n-r-4)(n+r+4+1)(n+r+3)(n+r+1)}{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+4+1)(r+4+2)}a_0$$

Generalizando, para $k=0,2,4,\dots$

$$a_{k+2}=-(-1)^{\frac{k+2}{2}}\frac{(n-r)(n-r-2)\cdots(n-r-k)(n+r+k+1)(n+r+k-1)\cdots(n+r+1)}{(r+1)(r+2)\cdots(r+k+2)}a_0$$

Haciendo el cambio $k+2=2\tilde{k}$, se obtiene

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{(n-r)(n-r-2)\cdots(n-r-2k+2)(n+r+2k-1)(n+r+2k-3)\cdots(n+r+1)}{(r+1)(r+2)\cdots(r+2k)}a_0 \qquad (4.12)$$

$k=1,2,3,\dots$

Examinando los coeficientes (4.1) con k impar (k=1,3,5, ...), se tiene

$$a_{\frac{1}{2}+2}=-\frac{(n-r-1)(n+r+1+1)}{(r+1+1)(r+1+2)}a_1 ,\quad a_{\frac{3}{2}+2}=\frac{(n-r-1)(n-r-\frac{3}{2})(n+r+\frac{3}{2}+1)(n+r+2)}{}a_1$$

$$a_{\frac{5}{2}+2}=-\frac{(n-r-1)(n-r-3)(n-r-\frac{5}{2})(n+r+\frac{5}{2}+1)(n+r+4)(n+r+2)}{(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)(r+\frac{5}{2}+1)(r+\frac{5}{2}+2)}a_1 .$$

Generalizando se escribe para k=1,3,5, . .

$$a_{k+2}=(-1)^{\frac{k+1}{2}}\frac{(n-r-1)(n-r-3)\cdots(n-r-k)(n+r+k+1)(n+r+k-1)\cdots(n+r+2)}{(r+2)(r+3)\cdots(r+k+2)}a_1$$

Haciendo el cambio de índice $k+2=2\tilde{k}+1$, se tiene

$$a_{2k+1}=(-1)^k\frac{(n-r-1)(n-r-3)\cdots(n-r-2k+1)(n+r+2+2k-2)(n+r+2+2k-4)\cdots(n+r+2)}{(r+2)(r+3)\cdots(r+2k+1)}a_1 \quad (4.13)$$

k=1,2,3, . .

En el numerador de (4.12) el factor (n-r) disminuye de 2 en 2 hasta el valor (n-r-2k+2) y lo mismo el factor (n+r+2k-1) hasta el valor (n+r+1).

En el numerador de (4.13), (n-r-1) disminuye de 2 en 2 hasta (n-r-k) y el factor (n+r+2+2k-2) de dos en dos hasta (n+r+2).

A continuación se construye la solución de la ecuación de Legendre (4.1), dada por (4.2), teniendo en cuenta (4.8), (4.9), (4.12) y (4.13).

De la ecuación indicial (4.8) se obtiene que

$$r=0,\ 1. \quad (4.14)$$

i. Caso cuando r=0. De (4.9) se tiene

$$a_1\times 0=0,$$

de donde a_1 es arbitrario. Se considerará que $a_1\neq 0$.

Para r=0, de (4.12) y (4.13) se escribe

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{n(n-2)\cdots(n-2k+2)(n+2k-1)(n+2k-3)\cdots(n+1)}{(2k)!}a_0 \quad (4.15)$$

$$a_{2k+1}=(-1)^k\frac{(n-1)(n-3)\cdots(n-2k+1)(n+2+2k-2)(n+2+2k-4)\cdots(n+2)}{(2k+1)!}a_1 \quad (4.16)$$

k=1,2,3, . .

Examinando los coeficientes (4.1) con k impar (k=1,3,5,...), se tiene:

$$a_{\frac{1}{2}+2}=-\frac{(n-r-1)(n+r+1+1)}{(r+1+1)(r+1+2)}a_1 \ , \ a_{\frac{3}{2}+2}=\frac{(n-r-1)(n-r-\frac{3}{2})(n+r+\frac{3}{2}+1)(n+r+2)}{}a_1$$

$$a_{\frac{5}{2}+2}=-\frac{(n-r-1)(n-r-3)(n-r-\frac{5}{2})(n+r+\frac{5}{2}+1)(n+r+4)(n+r+2)}{(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)(r+\frac{5}{2}+1)(r+\frac{5}{2}+2)}a_1 .$$

Generalizando se escribe para k=1,3,5,...

$$a_{k+2}=(-1)^{\frac{k+1}{2}}\frac{(n-r-1)(n-r-3)\cdots(n-r-k)(n+r+k+1)(n+r+k-1)\cdots(n+r+2)}{(r+2)(r+3)\cdots(r+k+2)}a_1$$

Haciendo el cambio de índice $k+2=2\tilde{k}+1$, se tiene

$$a_{2k+1}=(-1)^k\frac{(n-r-1)(n-r-3)\cdots(n-r-2k+1)(n+r+2+2k-2)(n+r+2+2k-4)\cdots(n+r+2)}{(r+2)(r+3)\cdots(r+2k+1)}a_1 \qquad (4.13)$$

k=1,2,3,...

En el numerador de (4.12) el factor (n-r) disminuye de 2 en 2 hasta el valor (n-r-2k+2) y lo mismo el factor (n+r+2k-1) hasta el valor (n+r+1).

En el numerador de (4.13), (n-r-1) disminuye de 2 en 2 hasta (n-r-k) y el factor (n+r+2+2k-2) de dos en dos hasta (n+r+2).

A continuación se construye la solución de la ecuación de Legendre (4.1), dada por (4.2), teniendo en cuenta (4.8), (4.9), (4.12) y (4.13).

De la ecuación indicial (4.8) se obtiene que

$$r=0,\ 1. \qquad (4.14)$$

i. Caso cuando r=0. De (4.9) se tiene

$$a_1\times 0=0,$$

de donde a_1 es arbitrario. Se considerará que $a_1\neq 0$.

Para r=0, de (4.12) y (4.13) se escribe

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{n(n-2)\cdots(n-2k+2)(n+2k-1)(n+2k-3)\cdots(n+1)}{(2k)!}a_0 \qquad (4.15)$$

$$a_{2k+1}=(-1)^k\frac{(n-1)(n-3)\cdots(n-2k+1)(n+2+2k-2)(n+2+2k-4)\cdots(n+2)}{(2k+1)!}a_1 \qquad (4.16)$$

k=1,2,3,.

A continuación se examina detalladamente los coeficientes a_{2k} y a_{2k+1} dados por (4.15) y (4.16). Supongamos que

n entero.

i. $n=0$, de (4.15) se obtiene $a_{2k}=0$.

ii. n es un número par positivo. Por ejemplo $n=8$, de (4.15) se tiene

$$k=1,\ a_2=(-1)^1\frac{8(8+1)}{2!}a_0\ ;\ k=2,\ a_4=(-1)^2\frac{8(8-2)(8+1)(8+1+2)}{4!}a_0;$$

$$k=3,\ a_6=(-1)^3\frac{8(8-2)(8-4)(8+1+4)(8+1+2)(8+1)}{6!}a_0\ ;$$

$$k=4,\ a_8=(-1)^4\frac{8(8-2)(8-4)(8-6)(8+1+6)(8+1+4)(8+1+2)(8+1)}{8!}a_0\ ;$$

$$k=5,\ a_{10}=(-1)^5\frac{8(8-2)(8-4)(8-6)(8-8)(8+1+8)(8+1+6)(8+1+4)(8+1+2)(8+1)}{10!}a_0$$

$a_{10}=0$.

De donde para $n=8$, $a_{2k}=0$ si $k\geq 5$. Sólo los primeros $N=\frac{n}{2}=\frac{8}{2}=4$ términos sobreviven. Generalizando para $n(\text{par})\geq 0$ la solución $y(x)$ es

$$y_n(x)=\left[a_0+\sum_{k=1}^{n/2}a_{2k}x^{2k}\right]+\left[a_1+\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k-1}x^{2k+1}\right], \qquad (4.17)$$

donde a_{2k} y a_{2k-1} están dados por (4.15) y (4.16) respectivamente.

La primera parte de (4.17) es un polinomio en x de orden n (n par) que se designa como $P_n(x)$ y se denominan polinomios de Legendre

$$P_n(x)=a_0\left(1+\sum_{k=1}^{n/2}a_{2k}x^{2k}\right),\quad n=0,2,4,\dots \qquad (4.18)$$

Los primeros $n/2$ coeficientes a_{2k} dados por (4.15) se pueden escribir así para n par:

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{n!!\,(n+2k-1)!!}{(n-2k)!!\,(n-1)!!\,(2k)!}$$. Aquí se usa la operación doble factorial !!.

y (4.18) adquiere la forma

$$P_n(x)=a_0\left(1+\sum_{k=1}^{n/2}(-1)^k\frac{n!!\,(n+2k-1)!!}{(n-2k)!!\,(n-1)!!}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right),\ n\ \text{par}. \qquad (4.19)$$

Análogamente se analizan los coeficientes a_{2k+1} dados por (4.16) para el caso cuando n es impar positivo. Por ejemplo $n=9$:

$$k=1,\ a_3=(-1)^1\frac{(\frac{9}{2}-1)(\frac{9}{2}+2)}{3!}a_1\ ;$$

$$k=2,\ a_5=(-1)^2\frac{(\frac{9}{2}-1)(\frac{9}{2}-3)(\frac{9+2}{2}+2)(\frac{9+2}{2})}{5!}a_1\ ;$$

$$k=3,\ a_7=(-1)^3\frac{(\frac{9}{2}-1)(\frac{9}{2}-3)(\frac{9}{2}-5)(\frac{9+2}{2}+4)(\frac{9+2}{2}+2)(\frac{9+2}{2})}{7!}a_1\ ;$$

$$k=4,\ a_9=(-1)^4\frac{(\frac{9}{2}-1)\cdots(\frac{9}{2}-7)(\frac{9+2}{2}+6)\cdots(\frac{9+2}{2})}{9!}a_1\ ;$$

$$k=5,\ a_{11}=(-1)^5\frac{(\frac{9}{2}-1)(\frac{9}{2}-3)\cdots(\frac{9}{2}-9)(\frac{9+2}{2}+8)(\frac{9+2}{2}+6)\cdots(\frac{9+2}{2})}{11!}a_1$$

$$a_{11}=0\ ,\quad a_{2k+1}=0\quad k\geq\frac{9+1}{2}=\frac{n+1}{2}$$

Son diferentes de cero los primeros $N=\frac{n-1}{2}$ terminos

Para n impar positivo, los primeros $N=\frac{n-1}{2}$ coeficientes a_{2k+1} dados por (4.16) se pueden escribir así:

$$a_{2k+1}=(-1)^k\frac{(n-1)!!\,(n+2k)!!}{(n-2k-1)!!\;n!!}\frac{a_1}{(2k+1)!}\quad (n=1,3,\dots)\qquad (4.20).$$

Para n impar positivo, la solución $y(x)$ de la ecuación de Legendre (4.1) se escribe así:

$$y_n(x)=\left[a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}x^{2k}\right]+\left[a_1+\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}a_{2k+1}x^{2k+1}\right].\qquad (4.21)$$

La segunda parte de esta solucion es un polinomio en x de orden n $(2\frac{n-1}{2}+1=n)$, se designa con el símbolo $P_n(x)$ y teniendo en cuenta (4.20) tiene la forma

$$P_n(x)=a_1\left(1+\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^k\frac{(n-1)!!\,(n+2k)!!}{(n-2k-1)!!\;n!!}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right),\ n\text{ impar}\qquad (4.22).$$

En conclusión, la solución $y(x)$ de la ecuación diferencial de Legendre (4.1), dada por (4.2), para el caso cuando $r=0$ y n es entero están dados por

Para n par $(n=0,2,4,\cdots)$

$$y_n(x) = P_n(x) + \left[a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1}\, x^{2k+1}\right],$$

donde $P_n(x)$ es el polinomio de orden n par (4.18) y los a_{2k+1} se definen por (4.16)

Para n impar $(n=1,3,5,\cdots)$

$$y_n(x) = \left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}\, x^{2k}\right] + P_n(x),$$

siendo $P_n(x)$ el polinomio de Legendre (4.22) y a_{2k} está dado por (4.15).

Con base en las fórmulas (4.19) y (4.22) se pueden obtener las expresiones para los polinomios de Legendre de cualquier orden n.
Por ejemplo: De (4.19) se obtiene $P_0(x)=a_0$ (polinomio de orden cero)
Existe el convenio de escoger el valor de a_0 de tal modo que

$$P_n(1)=1 \tag{4.25}$$

Aplicando esta condición, se tiene

$$P_0(x)=1 \tag{4.26}$$

De (4.22) se escribe $P_1(x)=a_1x$. Usando la condición (4.25), se tiene

$$P_1(x)=x.$$

Así sucesivamente, se obtiene

$P_2(x)=a_0(1-3x^2)$, $P_2(1)=1$,

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1).$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x).$$

El polinomio general $P_n(x)$ está dado por la serie

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{N}\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}, \tag{4.27}$$

donde $N=\frac{n}{2}$ para n par y $N=\frac{n-1}{2}$ para n impar. Los polinomios de Legendre son pares o impares dependiendo de si su grado n es par o impar.

4.2 Fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre

Sea

$$v=(x^2-1)^n. \tag{4.28}$$

Se probará que la derivada n-ésima de v, $v^{(n)}$, satisface la ecuación de Legendre (4.1).

[illegible] de (4.28) es

$$\frac{dv}{dx}=2nx(x^2-1)^{n-1},$$

de donde
$$(x^2-1)\frac{dv}{dx}=2nx(x^2-1)^n=2nxv$$

o bien
$$(1-x^2)\frac{dv}{dx}+2nxv=0$$

Derivando sucesivamente esta última ecuación se tiene

$$(1-x^2)\frac{d^2v}{dx^2}+2(n-1)x\frac{dv}{dx}+2nv=0$$

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)-2x\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right)+2(n-1)x\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right)+2(n-1)\frac{dv}{dx}+2n\frac{dv}{dx}=0.$$

Usando la notación $\frac{d^r}{dx^r}v=v^{(r)}$, para $r=1$, $\frac{dv}{dx}=v^{(1)}$, la última expresión se escribe

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}v^{(1)}+2(n-1-\tfrac{1}{2})x\frac{dv^{(1)}}{dx}+(1+1)(2n-1)v^{(1)}=0$$

Derivando se tiene

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}v^{(2)}+2(n-1-\tfrac{2}{2})\frac{dv^{(2)}}{dx}+(1+2)(2n-\tfrac{2}{2})v^{(2)}$$

generalizando

$$(1-x^2)\frac{d^2v^{(r)}}{dx^2}+2(n-1-r)x\frac{dv^{(r)}}{dx}+(r+1)(2n-r)v^{(r)}=0.$$

Si $r=n$, se tiene

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}v^{(n)}+2(n-1-n)x\frac{dv^{(n)}}{dx}+(n+1)(2n-n)v^{(n)}=0$$

O sea $$(1-x^2)\frac{d^2v^{(n)}}{dx^2}-2x\frac{dv^{(n)}}{dx}+n(n+1)v_n=0,$$

que es la ecuación diferencial de Legendre (4.1). Por tanto, $v^{(n)}$ satisface esta ecuación. Teniendo en cuenta (4.28) se escribe

$$v^{(n)}=\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n. \qquad (4.29)$$

Examinando esta expresión para varios valores de n, se tiene

$$v^{(0)}=v=\frac{d^0}{dx^0}(x^2-1)^0=1$$

$$v^{(1)}=\frac{d}{dx}(x^2-1)^1=2x$$

$$v^{(2)}=\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2=12x^2-4$$

$$v^{(3)}=\frac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^3=120x^3-72x.$$

Es decir la expresión (4.29) es un polinomio de orden n. Y como satisfacen la ecuación de Legendre se deben diferenciar de los polinomios de Legendre (4.19) y (4.22) máximo por un factor constante C, esto es

$$P_n(x)=C\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n. \qquad (4.30)$$

Para establecer el valor de C, se usa (4.27), desarrollando la sumatoria y escribiendo sólo la mayor potencia x^n, así

$$P_n(x)=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n+\dots \qquad (4.31)$$

y de (4.30)

$$C\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = C\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{2n}+\cdots\right) = C\frac{d^n}{dx^n}x^{2n}+\cdots = C\frac{(2n)!}{n!}x^n+\cdots \quad (4.32)$$

Aquí se tuvo en cuenta que $\frac{d^n}{dx^n}x^{2n} = \frac{(2n)!}{n!}x^n$.

Igualando (4.31) y (4.32) se obtiene que

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = C\frac{(2n)!}{n!}, \text{ o bien, } C = \frac{1}{2^n n!}. \quad (4.33)$$

Se reemplaza (4.33) en (4.30)

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad (4.34)$$

Conocida como fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre.

4.3 Funciones de Legendre de segunda clase.

La solución general de la ecuación diferencial de Legendre (4.1) para n entero positivo puede ser escrita en la forma

$$y = AP_n(x) + BQ_n(x),$$

donde A y B son constantes arbitrarias y $Q_n(x)$ se denomina función de Legendre de segunda clase. Esta función se obtiene por métodos que van más allá de la presente discusión. Las $Q_n(x)$ se encuentran tabuladas.

4.4 Ortogonalidad de $P_n(x)$.

A continuación se probará que

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 \quad \text{si } m \neq n, \quad (4.35)$$

es decir los polinomios de Legendre son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$. Como $P_n(x)$ es solución de la ecuación de Legendre (4.1), se tiene

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

o bien $$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)P_n'(x)\right) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

multiplicando esta última ecuación por $P_m(x)$ e integrando entre $-1 \leq x \leq 1$ se escribe

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_n'(x)\right]dx + n(n+1)\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 \qquad (4.36)$$

Integrando por partes la primera integral:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_n'(x)\right]dx = \left[P_m(x)(1-x^2)P_n'(x)\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1}(1-x^2)P_n'(x)P_m'(x)dx.$$

El primer término del lado derecho es igual a cero $\left((1-x^2)\Big|_{-1}^{1}=0\right)$.

Por tanto (4.36) queda

$$-\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n'(x)P_m'(x)dx + n(n+1)\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 \qquad (4.37)$$

Se Escribe (4.37) intercambiando n y m:

$$-\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_m'(x)P_n'(x)dx + m(m+1)\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)dx = 0 \qquad (4.38)$$

a (4.37) se le resta (4.38):

$$\left[n(n+1) - m(m+1)\right]\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0 \qquad (4.39)$$

De otra parte

$$n(n+1) - m(m+1) = n^2 - m^2 + n - m = \qquad (4.40)$$

$(n+m+a)(n-m+b)$, donde a y b se deben determinar.

se obtiene $\quad n^2-m^2+n-m = n^2-m^2+(a+b)n+(b-a)m+ab=0$

Para que esta igualdad se cumpla se tiene que

$$a+b=1 \quad y \quad (b-a)m+ab=-m$$

De la primera ecuación $b=1-a$, lo que se reemplaza en la segunda; se tiene $\quad a^2+(2m-1)a-2m=0$

y

$$a = \frac{-2m+1 \pm \sqrt{(2m-1)^2+8m}}{2} = \begin{cases} 1, -2m \end{cases}$$

se escoge la solución $a=1$, de donde $b=1-a=0$; se reemplazan estos valores de a y b en (4.40)

$$n(n+1) - m(m+1) = (n+m+1)(n-m),$$

lo que se reemplaza en (4.39)

$$(n-m)(n+m+1)\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\,dx = 0 \quad .$$

Si $n \neq m$ entonces

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\,dx = 0 \;, \quad n \neq m,$$

que es la condición de ortogonalidad (4.35) que se quería probar.

Si $n = m$ se tiene

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1} \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \qquad (4.41)$$

Las condiciones (4.35) y (4.41) se resumen así:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & si \; n \neq m \\ \dfrac{2}{2n+1} & si \; n = m \end{cases} \qquad n, m = 0, 1, 2, \cdots \quad (4.42)$$

TALLER ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LEGENDRE PARTE 1

1. Encuentre la solución de la ecuación diferencial por el método de Frobenius, cuando en la serie de potencias $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+r}$, se usa el valor r = 1.

2. Encuentre una expresión para los polinomios de Legendre $P_7(x)$ y $P_8(x)$.

TALLER ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LEGENDRE PARTE 1

1. Encuentre la solución de la ecuación diferencial de Legendre siguiendo el método de Frobenius, cuando en la serie de potencias $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+r}$, se toma el valor r = 1.

Partiendo de las ecuaciones (4.9) y (4.12) de los apuntes de clase, se obtiene que para r = 1 y para valores impares de n ($n = 1, 3, 5,$ ...) se producen los polinomios de Legendre de orden impar; para n par ($n = 0, 2, 4,$ ...) la sumatoria no se corta y por lo tanto no aparecen los polinomios de Legendre de orden par.

2. Encuentre una expresión para los polinomios de Legendre $P_7(x)$ y $P_8(x)$.

$$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$$

$$P_8(x) = \frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260\,x^2 + 35)$$

3. Función generatriz para $P_n(x)$.

a) Sea

$$\phi = (1 - 2xZ + Z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Aplicando la fórmula binomial

$$(1 + x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n,$$

muestre que

$$\phi = P_0(x) + P_1(x)Z + P_2(x)Z^2 + P_3(x)Z^3 + \cdots$$

donde $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ y $P_3(x)$ son los polinomios de Legendre.

b) Muestre que

$$(1 - 2xZ + Z^2)\frac{\partial \phi}{\partial Z} = (x - Z)\phi$$

y

$$Z\frac{\partial \phi}{\partial Z} = (x - Z)\frac{\partial \phi}{\partial Z}.$$

c) Desarrollando ϕ en una serie de potencias de Z

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n Z^n,$$

utilizando los resultados del punto b), demuestre que los coeficientes A_n, que son polinomios en x, satisfacen la ecuación de Legendre y por lo tanto son los polinomios de Legendre

$$A_n = P_n(x).$$

1. Show that

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, dx = 0 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

2. Establish the orthogonality property of the Legendre polynomials (7.1) by using Rodrigues' formula for $P_n(x)$ and successive integration by parts.

3. Show that

$$x^2 = \tfrac{2}{3}P_2(x) + \tfrac{1}{3}P_0(x)$$
$$x^3 = \tfrac{2}{5}P_3(x) + \tfrac{3}{5}P_1(x)$$

Capítulo 4. Ecuación diferencial de Hermite. Polinomios de Hermite.

La ecuación diferencial de Hermite tiene la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + (\lambda-1)y = 0, \qquad (4.1)$$

siendo λ un parámetro, $\lambda > 0$.

4.1 Solución.

Se desarrolla $y(x)$ en una serie de potencias

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k}, \quad a_0 \neq 0. \qquad (4.2)$$

Para determinar los coeficientes a_k y la constante r, se reemplaza (4.2) en (4.1)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (r+k)(r+k-1)x^{r+k-2} - 2x\sum_{k=0}^{\infty} a_k (r+k)x^{r+k-1} + (\lambda-1)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k} = 0$$

En la primera sumatoria se hace el cambio $k-2=\tilde{k}$, lo que da

$$\sum_{k=-2}^{\infty} a_{k+2}(r+k+2)(r+k+1)x^{r+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k\left[-2(r+k)+(\lambda-1)\right]x^{k+r} = 0$$

De donde

$$a_0 r(r-1)x^{r-2} + a_1(r+1)r\,x^{r-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\left\{a_{k+2}(r+k+2)(r+k+1) + a_k\left[-2(r+k)+(\lambda-1)\right]\right\}x^{k+r} = 0. \qquad (4.3)$$

De (4.3) se obtiene

$$a_0 r(r-1) = 0 \qquad (4.4)$$

$$a_1(r+1)r = 0 \qquad (4.5)$$

$$a_{k+2}(r+k+2)(r+k+1) + a_k\left[-2(r+k)+(\lambda-1)\right] = 0, \; k=0,1,2,\dots \qquad (4.6)$$

De la ecuación indicial (4.4) se obtiene ($a_0 \neq 0$)

$$r = 0, 1. \qquad (4.7)$$

De (4.5)

$$a_1 = 0. \qquad (4.8)$$

De (4.6)

$$a_{k+2} = \frac{2(r+k)-(\lambda-1)}{(r+k+2)(r+k+1)}a_k, \quad (k=0,1,2,\dots). \qquad (4.9)$$

Teniendo en cuenta (4.8) y (4.9) se obtiene que los coeficientes con subíndice impar son iguales a cero

$$a_{2k+1} = 0 \ , \ k = 1, 2, 3, \dots \qquad (4.10)$$

Los coeficientes pares se obtienen de (4.9) haciendo $k+2 = 2\tilde{k}$, donde $k = 0, 2, 4, \dots$ y por tanto $\tilde{k} = 1, 2, 3, \dots$

$$a_{2k} = \frac{2(r+2k-2)-(\lambda-1)}{(r+2k)(r+2k-1)} a_{2k-2} \ , \ k = 1, 2, 3, \dots \qquad (4.11)$$

Considerando (4.10) la solución (4.2) se escribe como

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{r+2k} = x^r \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x^{2k} \right) \qquad (4.12)$$

Probar que (4.12) se puede escribir como

$$y = \sum_{k=0}^{k_0-1} \left(a_{2k} - (k_0-1)!\, a_{2k_0-2}\right) x^{r+2k} + (k_0-1)!\, a_{2k_0-2}\, x^r e^{x^2},$$

donde k_0 es suficientemente grande.

Prueba. Si en (4.8), se considera $k > k_0$, donde k_0 grande tal que $2(r+2k-2)-(\lambda+1) \simeq 4k$, $r+2k \simeq 2k$ y $r+2k-1 \simeq 2k$,

entonces (4.8) se aproxima así:

$$a_{2k} \simeq \frac{4k}{(2k)^2} a_{2k-2} = \frac{1}{k} a_{2k-2} = \frac{(k-1)!}{k!} a_{2(k-1)} \qquad (4.13)$$

Aplicando reiteradamente (4.13)

$$a_{2(k+1)} \simeq \frac{k!}{(k+1)!} a_{2k} = \frac{k!}{(k+1)!} \frac{(k-1)!}{k!} a_{2(k-1)}$$

$$a_{2(k+1)} \simeq \frac{(k-1)!}{(k+1)!} a_{2(k-1)}$$

Análogamente

$$a_{2(k+2)} \simeq \frac{(k-1)!}{(k+2)!}$$

Generalizando
$$a_{2(k+l)} \simeq \frac{(k-1)!}{(k+l)!}\,a_{2(k-1)}\,, \quad l=1,2,3,\dots \quad k>k_0 \qquad (4.14)$$

De (4.12)
$$y=\sum_{k=0}^{k_0-1} a_{2k}\,x^{r+2k}+\sum_{k=k_0}^{\infty} a_{2k}\,x^{r+2k}\,,$$

Haciendo en la segunda sumatoria $\hat{k}=k-k_0$, se tiene
$$y=\sum_{k=0}^{k_0-1} a_{2k}\,x^{r+2k}+\sum_{k=0}^{\infty} a_{2(k_0+k)}\,x^{2(k_0+k)+r}$$

los coeficientes $a_{2(k_0+k)}$ se aproximan usando (4.14)
$$y=\sum_{k=0}^{k_0-1} a_{2k}\,x^{r+2k}+x^r\sum_{k=0}^{\infty} a_{2(k_0-1)}\frac{(k_0-1)!}{(k_0+k)!}\,x^{2(k_0+k)}.$$

En la segunda sumatoria se hace $\hat{k}=k_0+k$
$$y=\sum_{k=0}^{k_0-1} a_{2k}\,x^{r+2k}+a_{2(k_0-1)}(k_0-1)!\,x^r\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{k!}+a_{2(k_0-1)}(k_0-1)!\,x^r\sum_{k=0}^{k_0-1}\frac{x^{2k}}{k!}-$$
$$a_{2(k_0-1)}(k_0-1)!\,x^r\sum_{k=0}^{k_0-1}\frac{x^{2k}}{k!}\,,$$

donde se ha sumado y restado un mismo término. Entonces
$$y=\sum_{k=0}^{k_0-1}\left[a_{2k}-a_{2(k_0-1)}(k_0-1)!\right]x^{r+2k}+a_{2(k_0-1)}(k_0-1)!\,x^r\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{k!}\,. \qquad (4.15)$$

Teniendo en cuenta que
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x^2)^k}{k!}=e^{x^2}\,,$$

en definitiva (4.15) adquiere la forma:
$$y=\sum_{k=0}^{k_0-1}\left[a_{2k}-a_{2(k_0-1)}\frac{(k_0-1)!}{k!}\right]x^{r+2k}+a_{2(k_0-1)}(k_0-1)!\,x^r e^{x^2} \qquad (4.16)$$

Que es una forma de la solución de la ecuación (4.1)

En algunas aplicaciones de importancia en física, por ejemplo, en la mecánica cuántica se necesita que el exponencial e^{x^2} en (4.16) no se produzca, lo que requiere que la sumatoria en (4.12) se corte. Para examinar las condiciones de corte de esta sumatoria, se usa la formula de recurrencias para los coeficientes a_{2k} dada por (4.11). Si se supone que $a_{2k-2} \neq 0$ y $a_{2k}=0$, esto hace que la sumatoria se corte. Para que esta suposición sea cierta se debe cumplir que el numerador del lado derecho de (4.11) se haga cero, esto es

$$2(r+2k-2)-(\lambda-1)=0, \qquad (4.17)$$

donde se recuerda que r según (4.7) toma los valores 0 o 1, y λ es un parámetro que aparece en la ecuación diferencial de Hermite (4.1). Se examina por separados los casos $r=0$ y $r=1$.

i. $r=0$. De (4.17)

$$4k-4-\lambda+1=0.$$

Se despeja λ

$$\lambda=4k-4+1=2(2k-2)+1, \quad k=1,2,3,\dots$$

Haciendo $2k-2=n$, $n=0,2,4$, se tiene

$$\lambda=2n+1, \quad n=0,2,4,\dots \qquad (4.18)$$

ii. $r=1$. De (4.17)

$$4k-2-\lambda+1=0$$

Se despeja λ

$$\lambda=4k-2+1=2(2k-1)+1,$$

Se hace $2k-1=n$, entonces $n=1,3,5,\dots$

$$\lambda=2n+1, \quad n=1,3,5,\dots \qquad (4.19)$$

Combinando (4.18) y (4.19) se concluye que cuando en la ecuación diferencial de Hermite

$$\lambda=2n+1, \quad n=0,1,2,3,\dots \qquad (4.20)$$

Esto es dicha ecuación adquiere la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2ny=0, \quad n=0,1,2,\dots, \qquad (4.21)$$

la sumatoria en la solución (4.12) se corta, dando soluciones polinómicas, Conocidas como polinomios de Hermite, que se designan como $H_n(x)$.

4.3 Fórmulas de recurrencia

Probar la fórmula de recurrencia

$$H_n' = 2nH_{n-1}, \quad \text{donde } H_n' = \frac{dH_n(x)}{dx} \,. \qquad (4.21)$$

Como el polinomio de Hermite H_n es solución de (4.21), se escribe

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0 \,.$$

Derivando esta última expresión con respecto a x, se tiene

$$H_n''' - 2xH_n'' + 2(n-1)H_n' = 0$$

lo cual se puede escribir como

$$\frac{d^2}{dx^2}(H_n') - 2x\frac{d}{dx}(H_n') + 2(n-1)H_n' = 0$$

Haciendo

$$y = H_n' \,, \qquad (4.22)$$

se tiene

$$\frac{d^2}{dx^2}y - 2x\frac{d}{dx}y + 2(n-1)y = 0 \,,$$

la solución de esta última es el polinomio de Hermite H_{n-1} multiplicado por una constante C arbitraria,

$$y = CH_{n-1} \,. \qquad (4.23)$$

Igualando (4.22) y (4.23) y haciendo $C=2n$, se obtiene (4.21).

Probar

$$xH_n = nH_{n-1} + \frac{1}{2}H_{n+1} \,. \qquad (4.24)$$

El polinomio H_{n+1} es solución de la ecuación diferencial (4.21) cuando $n \to n+1$, esto es

$$H_{n+1}'' - 2xH_{n+1}' + 2(n+1)H_{n+1} = 0 \,. \qquad (4.25)$$

Aplicando (4.21) se tiene

$$H_{n+1}' = 2(n+1)H_n \,.$$

Derivando esta expresión y volviendo a utilizar (4.21), se escribe

$$H_{n+1}'' = 2(n+1)H_n' = 2(n+1)nH_{n-1} \,.$$

Reemplazando las dos ultimas expresiones en (4.25) se obtiene la formula de recurrencia (4.24).

4.4 Forma compacta de los polinomios de Hermite.

Probar que los polinomios de Hermite se pueden expresar en forma compacta así:

$$H_n=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) \qquad (4.26)$$

Se debe probar que

$$y=e^{x^2}v^{(n)}, \quad v^{(n)}=\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right),$$

satisface la ecuación diferencial (4.21). Se tiene

$$v=e^{-x^2}.$$

Derivando con respecto a x, se tiene

$$v^{(1)}=-2xv,$$

$$v^{(2)}=-2(xv^{(1)}+v),$$

$$v^{(3)}=-2(xv^{(2)}+2v^{(1)}),$$

$$v^{(4)}=-2(xv^{(3)}+3v^{(2)}),$$

$$- - - - - - - - - -$$

$$v^{(n)}=-2(xv^{(n-1)}+(n-1)v^{(n-2)}). \qquad (4.27)$$

Si reemplaza la ultima expresión en (4.27)

$$y=-2\left(xv^{(n-1)}+(n-1)v^{(n-2)}\right)e^{x^2}. \qquad (4.28)$$

Derivando con respecto a x

$$y'=\left(v^{(n+1)}+2xv^{(n)}\right)e^{x^2} \qquad (4.29)$$

$$y''=\left(v^{(n+2)}+4xv^{(n+1)}+2(1+2x^2)v^{(n)}\right)e^{x^2} \qquad (4.30)$$

Reemplazando (4.28), (4.29) y (4.30) en el lado izquierdo de la ecuación diferencial (4.21) se escribe

$$y''-2xy'+2ny=\left(v^{(n+2)}+2x\,v^{(n+1)}+2(n+1)v^{(n)}\right)e^{x^2} \qquad (4.31)$$

Aplicando (4.27) se tiene

$$v^{(n+2)}=-2\left(xv^{(n+1)}+(n+1)v^{(n)}\right).$$

—

La última expresión se reemplaza en (4.31)

$$y'' - 2xy' + 2ny = \left(-2x\,\vartheta^{(n+1)} - 2(n+1)\vartheta^{(n)} + 2x\,\vartheta^{(n+1)} + 2(n+1)\vartheta^{(n)}\right) = 0$$

Así queda demostrado que el lado izquierdo de (4.26) satisface la ecuación diferencial (4.21).

Ahora se debe mostrar que el lado izquierdo de (4.26) es un polinomio. Así

$$n=0, \quad e^{x^2}\frac{d^0}{dx^0}\left(e^{-x^2}\right) = 1$$

$$n=1, \quad e^{x^2}\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\right) = -2x.$$

$$n=2, \quad e^{x^2}\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x^2}\right) = 4x^2 - 2$$

$$n=3, \quad e^{x^2}\frac{d^3}{dx^3}\left(e^{-x^2}\right) = -8x^3 + 16x$$

Se ve que en efecto son polinomios de orden n coinciden hasta un factor constante (que en (4.26) es el factor $(-1)^n$) con los polinomios de Hermite. Así queda demostrada la fórmula compacta para los polinomios de Hermite (4.26)

4.5 Oscilador armónico unidimensional.

Un ejemplo de aplicación de los polinomios de Hermite es el oscilador armónico unidimensional en mecánica cuántica. La ecuación de Schrödinger para este oscilador es

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi = 0, \tag{4.32}$$

donde la función $\psi(x)$ debe satisfacer tres condiciones generales: finitud, continuidad, uniformidad (ser univaluada).

Para resolver esta ecuación se hace el cambio de variable

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,\tilde{x}. \tag{4.33}$$

Entonces

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\psi}{d\tilde{x}}\frac{d\tilde{x}}{dx}\right) = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\psi}{d\tilde{x}}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\frac{d}{d\tilde{x}}\left(\frac{d\psi}{d\tilde{x}}\right)\frac{d\tilde{x}}{dx} = \frac{m\omega}{\hbar}\frac{d^2\psi}{d\tilde{x}^2}. \tag{4.44}$$

Se reemplaza (4.33) y (4.44) en (4.32), y se introduce el parámetro λ

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}, \qquad (4.45)$$

lo que da

$$\frac{d^2\psi}{d\tilde{x}^2} + (\lambda - \tilde{x}^2)\psi = 0 \qquad (4.46)$$

Se examina la solución asintótica ψ_{as} cuando $\tilde{x} \to \pm\infty$, en este caso se desprecia el término λ de la ecuación (4.46) y su forma asintótica es

$$\frac{d^2\psi_{as}}{d\tilde{x}^2} - \tilde{x}^2\psi = 0, \qquad (4.47)$$

cuya solución es

$$\psi_{as} = Ae^{+\tilde{x}^2} + Be^{-\tilde{x}^2}, \text{ A y B son costantes arbitrarias} \qquad (4.48)$$

Esto se comprueba mediante el reemplazo de (4.48) en (4.47).

Ahora se exige que ψ_{as} dada por (4.48) sea finita en $\tilde{x} = \pm\infty$.

Esto se cumple si en (4.48) $A=0$, por tanto

$$\psi_{as} = Be^{-\frac{\tilde{x}^2}{2}}. \qquad (4.49)$$

Una vez conocida la solución asintótica (4.49), la solución de (4.46) se representa en la forma

$$\psi = \psi_{as}(\tilde{x})\, u(\tilde{x}) = e^{-\frac{\tilde{x}^2}{2}} u(\tilde{x}), \qquad (4.50)$$

donde la constante B se ha incorporado en $u(\tilde{x})$.

Se reemplaza (4.50) en (4.46)

Derivando dos veces (4.50) respecto a $\tilde{x}$, se tiene

$$\frac{d^2\psi}{d\tilde{x}^2} = \left(\frac{d^2u}{d\tilde{x}^2} - 2\tilde{x}\frac{du}{d\tilde{x}} + (\tilde{x}^2 - 1)u\right)e^{-\frac{\tilde{x}^2}{2}} \qquad (4.51)$$

Se reemplaza (4.51) y (4.50) en la ecuación diferencial para $\psi(\tilde{x})$ (4.46)

$$\left[\frac{d^2u}{d\tilde{x}^2} - 2\tilde{x}\frac{du}{d\tilde{x}} + (\lambda - 1)u\right]e^{-\frac{\tilde{x}^2}{2}} = 0$$

De donde

$$\frac{d^2u}{d\tilde{x}^2} - 2\tilde{x}\frac{du}{d\tilde{x}} + (\lambda - 1)u = 0. \qquad (4.47)$$

Esta es la ecuación diferencial que debe satisfacer la función $u(\tilde{x})$

la ecuación (4.47) es la misma ecuación (4.1).
Una forma de la solución de (4.1) y por tanto de (4.47) esta dada por (4.16), la cual se puede escribir así

$$u=\sum_{k=0}^{k_0-1} b_k \tilde{x}^{r+2k}+C\tilde{x}^r e^{\tilde{x}^2}, \qquad (4.48)$$

donde b_k y C son constantes y $r=0,1$. Reemplazando (4.48) en (4.50) se tiene

$$\psi=\left(\sum_{k=0}^{k_0-1} b_k x^{r+2k}\right)e^{-\frac{\tilde{x}^2}{2}}+C\tilde{x}^r e^{\frac{\tilde{x}^2}{2}}.$$

Cuando $\tilde{x}\to\pm 1$ el primer termino que es un polinomio multiplicado por $e^{-\frac{\tilde{x}^2}{2}}$ tiende a 0 pero el segundo da infinito, por lo que esta solución no sirve ya que se requiere que ψ sea finita.
La otra solución de (4.47) es cuando λ es igual (4.20)

$$\lambda=2n+1 \quad (n=0,1,2,\dots)$$

En cuyo caso (4.47) adquiere la forma (4.21)

$$\frac{d^2u}{d\tilde{x}^2}-2\tilde{x}\frac{du}{d\tilde{x}}+2nu=0, \quad n=0,1,2,\dots$$

y la solución de esta ecuación son los polinomios de Hermite

$$u=H_n(\tilde{x}).$$

Esto se reemplaza en (4.50)

$$\psi=e^{-\frac{\tilde{x}^2}{2}}H_n(\tilde{x}), \qquad (4.49)$$

que es la solución de (4.46) cuando $\lambda=2n+1$

$$\frac{d^2\psi}{d\tilde{x}}+(2n+1-\tilde{x}^2)\psi=0 \qquad n=0,1,2,\dots$$

De (4.33) se tiene que $\tilde{x}=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x$, que al reemplazar en (4.49) da

$$\psi=e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\right)$$

proporciona la solución para la ecuación diferencial del oscilador armónico unidimensional (4.32), donde se debe tener en cuenta que según (4.45)

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

y según (4.20)

$$\lambda = 2n+1 .$$

Igualando y despejando E, se escribe

$$E = E_n = \frac{2n+1}{2}\hbar\omega \quad , n = 0,1,2,\ldots$$

4.6 Ortogonalidad

En este punto se probará que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx = \begin{cases} 0, & si\ n \neq m \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & si\ n = m \end{cases} \qquad (4.50)$$

lo primero es que en (4.46) se puede renombrar la variable $\tilde{x}$ como x

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\lambda_k - x^2)\psi = 0 \quad , \lambda_k = 2n+1 \ , \ = 0,1, \ldots \qquad (4.\ldots)$$

y numerar las soluciones (4.49) de (4.50) para diferentes k.

$$\psi_k = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) \ ; \quad k = 0,1,2,\ldots \qquad (4.51)$$

Ya que (4.50) se puede escribir como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)\right]\left[e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x)\right) dx = \begin{cases} 0, & si\ n \neq m \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & si\ n = m \end{cases} \ ?$$

La ecuación (4.50) significa que el conjunto de funciones

$$e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) \ , \quad k = 0,1,2,\ldots \qquad (4.52)$$

es ortogonal.

Para probar la primera parte de (4.50), con base en (4.51) se escribe

$$\psi_n'' + (\lambda_n - x^2)\psi_n = 0 \ , \quad \psi_m'' + (\lambda_m - x^2)\psi_m = 0$$

la primera ecuación se multiplica por ψ_m y la segunda por ψ_n, y luego se resta la segunda de la primera, y se integra ambos lados de la ecuación resultante en el intervalo $-\infty < x < \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\psi_m \psi_n'' - \psi_n \psi_m'')\, dx + (\lambda_n - \lambda_m) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n \psi_m \, dx = 0 \qquad (4.53)$$

Se sigue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\psi_m \psi_n'' - \psi_n \psi_m'')\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}(\psi_m \psi_n' - \psi_n \psi_m')\, dx = (\psi_m \psi_n' - \psi_n \psi_m')\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

que las funciones (4.51) según lo establecido en el parágrafo 4.5 cumplen la condición

$$\psi_m(\pm\infty) = 0, \quad \psi_n(\pm\infty) = 0$$

Por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\psi_m \psi_n'' - \psi_n \psi_m'')\, dx = 0,$$

y de (4.53)

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n \psi_m \, dx = 0$$

Si $n \neq m$, entonces $\lambda_n \neq \lambda_m$ y esta última expresión queda

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n \psi_m \, dx = 0, \text{ si } n = m.$$

Ahora se probará la segunda parte de (4.50), si $n = m$. Se necesita evaluar la integral

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\, dx .$$

Teniendo en cuenta (4.26)

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})\, dx =$$

$$(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})\, dx .$$

Se integra por partes, haciendo $u = H_n$ y $dv = \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})\, dx$

$$J_n = (-1)^n \left[\left(H_n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2}) \right)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} H_n' \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2})\, dx \right]. \qquad (4.54)$$

Examinando

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2})$$

se observa, para

$n=1$,
$$\frac{d}{dx}e^{-x^2}=(-2x)e^{-x^2}.$$

$n=2$, $$\frac{d^2}{dx^2}e^{-x^2}=(4x^2-2)e^{-x^2}.$$

$n=3$, $$\frac{d^3}{dx^3}e^{-x^2}=(-8x^3+12x)e^{-x^2}.$$

. . . .

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2}=(\text{polinomio en } x \text{ de grado } (n-1))e^{-x^2}.$$

Teniendo en cuenta este resultado, el primer término del lado izquierdo de (4.54) es

$$\left(H_n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}=(\text{polinomio grado } n \times \text{polinomio grado } (n-1))e^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}=$$

$$=(\text{polinomio grado}(2n-1)\times e^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}=0.$$

Por tanto (4.54) se reduce a

$$J_n=(-1)^{n+1}\int_{-\infty}^{\infty}H_n'\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2}dx.$$

Repitiendo otras $(n-1)$ veces la integración por parte, se escribe

$$J_n=(-1)^{2n}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{d^n}{dx^n}H_n\right)\times e^{-x^2}dx \qquad (4.55)$$

H_n es un polinomio de Hermite de orden n, se puede escribir

$$H_n=ax^n+\cdots,\quad a=\text{constante} \qquad (4.56)$$

donde después de x^n vienen potencias de x de orden menor que n; por tanto

$$\frac{d^n}{dx^n}H_n=\frac{d^n}{dx^n}(ax^n+\cdots)=n!\,a.$$

Se reemplaza en (4.55), teniendo en cuenta que $(-1)^{2n}=1$,

$$J_n=n!\,a\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=n!\,a\sqrt{\pi}, \qquad (4.57)$$

ya que $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$. Falta averiguar el valor de la constante a.

Para esto se igualan (4·26) y (4·56)

$$(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) = a x^n + \cdots$$

$$a x^n + \cdots = (-1)^n e^{x^2} v^{(n)}, \text{ donde } v = e^{-x^2}. \qquad (4·58)$$

Se trata de establecer el primer término del lado derecho que proporciona el término $a x^n$. Se usa (4·27)

$$v^{(n)} = \left(-2x v^{(n-1)} - 2(n-1) v^{(n-2)}\right) e^{x^2}$$

Dentro de esta expresión el término que proporciona la x^n.

$$-2x v^{(n-1)}.$$

A su vez, usando nuevamente (4·27)

$$-2x v^{(n-1)} = -2x\left[-2x v^{(n-2)} - 2(n-2) v^{(n-3)}\right] =$$

$$= (-2x)^2 v^{(n-2)} + 4x(n-2) v^{(n-3)}$$

En esta expresión el término $(-2x)^2 v^{(n-2)}$ proporciona la x^n.
Nuevamente se usa (4·27)

$$(-2x)^2 v^{(n-2)} = -2x\left[-2x v^{(n-3)} - 2(n-3) v^{(n-4)}\right].$$

$$(-2x)^2 v^{(n-2)} = (-2x)^3 v^{(n-3)} + 4x(n-3) v^{(n-4)}.$$

Ahora se toma el término $(-2x)^3 v^{(n-3)}$ y así sucesivamente, hasta llegar al término

$(-2x)^n v^{(n-n)}$ que proporciona la x^n.

$$(-2x)^n v^{(n-n)} = (-1)^n 2^n x^n e^{-x^2}$$

Volviendo a (4·58), teniendo encuenta el último resultado, se escribe

$$a x^n = (-1)^n e^{x^2} (-1)^n 2^n x^n e^{-x^2} = (-1)^{2n} 2^n x^n = 2^n x^n$$

Por tanto $a = 2^n$, lo que se reemplaza en (4·57)

$$I_n = n!\, 2^n \sqrt{\pi}.$$

lo que comprueba la segunda parte de (4·50). Aquí termina la demostración de (4·50)

Capítulo 6 Ecuación diferencial de Laguerre y polinomios de Laguerre.

La ecuación diferencial de Laguerre es

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dR}{dx}+\left(\frac{\lambda}{x}-\frac{1}{4}-\frac{L}{x^2}\right)R=0, \qquad (5.1)$$

donde

$$\boxed{\begin{array}{l}\lambda \text{ es un parámetro}, \ L\geq 0, \ 0\leq x<\infty \\ R(x) \text{ debe ser finita, continua y univaluada}\end{array}} \qquad (5.2)$$

Esta ecuación aparece en la mecánica cuántica

5.1 Solución de (5.1) con las condiciones (5.2)

5.1.1 Solución asintótica.

Al examinar la solución asintótica de (5.1) cuando $x\to\infty$, (5.1) se aproxima a

$$\frac{d^2R_{as}}{dx^2}-\frac{1}{4}R_{as}=0,$$

cuya solución es

$$R_{as}=Ae^{\frac{x}{2}}+Be^{-\frac{x}{2}}, \qquad (5.3)$$

siendo A y B dos constantes arbitrarias; se observa que

$$\lim_{x\to\infty}Ae^{\frac{x}{2}}=\infty$$

y por tanto esta solución no cumple la condición de finitud de $R(x)$ consignada en (5.2). Para eliminar esta solución se hace $A=0$ y (5.3) queda

$$R_{as}=Be^{-\frac{x}{2}}.$$

Con base en este resultado, la solución de (5.1) con las condiciones (5.2) se representa en la forma

$$R=e^{-\frac{x}{2}}u(x) \qquad (5.4)$$

se reemplaza (5.4) en (5.1) dando

$$\left[\frac{1}{4}u-u'+u''+\frac{2}{x}\left(-\frac{1}{2}u+u'\right)+\left(\frac{\lambda}{x}-\frac{1}{4}-\frac{L}{x^2}\right)u\right]e^{-\frac{x}{2}}=0$$

De donde se obtiene la ecuación diferencial que debe satisfacer la $u(x)$ que aparece en (5.4)

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\left(\frac{2}{x}-1\right)\frac{du}{dx}+\left(\frac{\lambda-1}{x}-\frac{L}{x^2}\right)u=0 \qquad \begin{array}{l}\lambda \text{ es un parámetro}\\ L\geq 0\\ 0\leq x<\infty\end{array} \qquad (5.5)$$

5.1.2 Solución de la ecuación (5.5)

Se desarrolla la solución $u(x)$ en la serie de potencias

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{r+n},\ a_0\neq 0,\ r=\text{constante} \qquad (5.6)$$

Reemplazando (5.6) en (5.5), se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n-2}+\left(\frac{2}{x}-1\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r+n)x^{r+n-1}+\left(\frac{\lambda-1}{x}-\frac{L}{x^2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{r+n}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left[(r+n)(r+n-1)+2(r+n)-L\right]x^{r+n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left[-(r+n)+(\lambda-1)\right]x^{r+n-1}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left[(r+n)(r+n+1)-L\right]x^{r+n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left[\lambda-r-n-1\right]x^{r+n-1}=0$$

$$a_0\left[r(r+1)-L\right]x^{r-2}+a_1\left[(r+1)(r+2)-L\right]x^{r-1}+\sum_{n=2}^{\infty}a_n\left[(r+n)(r+n+1)-L\right]x^{r+n-2}+$$
$$a_0\left[-r+\lambda-1\right]x^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left[\lambda-r-n-1\right]x^{r+n-1}=0$$

En la primera sumatoria se hace el cambio $n-2=\tilde{n}$ y en la segunda $n-1=\tilde{n}$,

$$a_0\left[r^2+r-L\right]x^{r-2}+\left\{a_1\left[(r+1)(r+2)-L\right]+a_0(\lambda-r-1)\right\}x^{r-1}+$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{a_{n+2}\left[(r+n+2)(r+n+3)-L\right]+a_{n+1}(\lambda-r-n-2)\right\}x^{r+n}=0$$

Igualando a cero los factores de las potencias de x [illegible], se tiene

$$a_0(r^2+r-L)=0 \qquad (5.7)$$

$$a_1=\frac{r-\lambda+1}{(r+1)(r+2)-L}a_0 \qquad (5.8)$$

$$a_{n+2}=\frac{r-\lambda+n+2}{(r+n+2)(r+n+3)-L}a_{n+1},\ (n=0,1,2,\ldots) \qquad (5.9)$$

Se hace el cambio $n+1=\tilde{n}$

$$a_{n+1}=\frac{r-\lambda+n+1}{(r+n+1)(r+n+2)-L}a_n,\ (n=1,2,3,\ldots) \qquad (5.10)$$

Ahora se examinarán las ecuaciones (5.7), (5.8) y (5.10). De (5.7), teniendo en cuenta que $a_0 \neq 0$, se tiene

$$r^2 + r - L = 0,$$

de donde r tiene dos raíces:

$$r_1 = \frac{-1+\sqrt{1+4L}}{2} \quad y \quad r_2 = \frac{-1-\sqrt{1+4L}}{2} . \qquad (5.11)$$

Teniendo en cuenta, que según (5.2), $L \geq 0$, se observa que

$$r = r_1 \geq 0 \quad y \quad r = r_2 < 0$$

Por tanto

$$r = r_1 = |r_1| \quad y \quad r = r_2 = -|r_2| . \qquad (5.12)$$

Reemplazando $r = -|r_2|$ en (5.6), se escribe

$$u = a_0 \frac{1}{x^{|r_2|}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{-|r_2|+n} \qquad (5.13)$$

Esta solución diverge en $x=0$, ya que $\lim_{x \to 0} \frac{a_0}{x^{|r_2|}} = \infty$.
Se toma nota de que la solución (5.13) para $r=-|r_2|$, diverge en $x=0$.

Ahora se examina el caso cuando $r = |r_1|$.
Demostrar que

$$u(x) = \sum_{n=0}^{n_0-1} P_n x^{|r_1|+n} + C x^{|r_1|} e^{x}, \quad n_0 \text{ grande}, \qquad (5.14)$$

donde

$$P_n = a_n - a_{n_0} \frac{n_0!}{n!} \quad y \quad C = a_{n_0} n_0! \qquad (5.15)$$

Primero se examina el comportamiento de (5.10)

$$r = |r_1|, \quad n > n_0, \quad n_0 \text{ grande}. \qquad (5.16)$$

Se hacen las siguientes aproximaciones

$$|r_1| - \lambda + (n+1) \simeq n+1, \quad |r_1| + (n+1) \simeq n+1,$$

$$(|r_1|+n+1)(|r_1|+n+2) - L = (|r_1| + n+1)(|r_1|+1+n+1) - L \simeq (n+1)(n+1) = (n+1)^2,$$

entonces (5.10) se aproxima así:

$$a_{n+1} \simeq \frac{(n+1)}{(n+1)^2} a_n = \frac{1}{n+1} a_n = \frac{n!}{(n+1)!} a_n$$

$$a_{n+1} \simeq \frac{n!}{(n+1)!} a_n \; ; \; n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (5.17)$$

Ahora, con base en (5.6) se escribe

$$u = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^{|r_1|+n} + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^{|r_1|+n} .$$

Se hace el cambio $\tilde{n}=n-n_0$ en la segunda sumatoria

$$u=\sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^{|r_1|+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n_0+n}\, x^{|r_1|+n_0+n}. \qquad (5.18)$$

Para establecer el comportamiento de a_{n_0+n} cuando n_0 grande se usa (5.17)

$$a_{n+2}=a_{n+1+1}\simeq\frac{(n+1)!}{(n+2)!}a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+2)!}\frac{n!}{(n+1)!}a_n=\frac{n!}{(n+2)!}a_n$$

$$a_{n+3}=a_{n+2+1}\simeq\frac{(n+2)!\,(n+1)!}{(n+3)!\,(n+2)!}a_{n+1}=\frac{n!}{(n+3)!}a_n$$

$$- - - - - -$$

$$a_{n+m}\simeq\frac{n!}{(n+m)!}a_n$$

Haciendo en esta ultima fórmula $n=n_0$ y $m=n$, se tiene

$$a_{n_0+n}\simeq\frac{n_0!}{(n_0+n)!}a_{n_0},$$

lo que se reemplaza en (5.18)

$$u=\sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^{|r_1|+n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n_0!}{(n_0+n)!}a_{n_0}\, x^{|r_1|+n_0+n}.$$

$$u=\sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^{|r_1|+n} + n_0!\,a_{n_0}\, x^{|r_1|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n_0+n}}{(n_0+n)!}$$

En la última sumatoria se hace $n_0+n=\tilde{n}$ y se escribe

$$u=\sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^{|r_1|+n} + n_0!\,a_{n_0}\, x^{|r_1|}\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + n_0!\,a_{n_0}\, x^{|r_1|}\sum_{n=0}^{n_0-1}\frac{x^n}{n!} -$$

$$n_0!\,a_{n_0}\, x^{|r_1|}\sum_{n=0}^{n_0-1}\frac{x^n}{n!},$$

donde se ha sumado y restado un mismo término.

Entonces

$$u=\sum_{n=0}^{n_0-1}\left(a_n-a_{n_0}\frac{n_0!}{n!}\right)x^{|r_1|+n} + n_0!\,a_{n_0}\, x^{|r_1|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Pero teniendo en cuenta que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$, se obtiene (5.14) y (5.15).

Por lo tanto (5.14) y (5.15) representa una posible solución de (5.5) para $r = r_1$ dado por (5.11).

5.2 Polinomios de Laguerre.

En algunas aplicaciones en física se necesita que el exponencial e^x en la solución (5.14) no se produzca, lo que se puede lograr si la sumatoria en (5.6) se corte. Tomando $r = |r_1| = r_1$, se escribe

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r_1+n} \; ; \; r_1 = \frac{-1+\sqrt{1+4L}}{2} \, , \; L \geq 0 .$$

El corte de la sumatoria se produce si

$$a_n \neq 0 \;\; y \;\; a_{n+1} = 0 . \qquad (5.19)$$

De (5.10) se concluye que (5.19) se cumple si el numerador en el lado derecho de (5.10) se hace igual a cero,

$$r_1 - \lambda + n + 1 = 0 ,$$

$$\lambda_n = r_1 + n + 1 \; , \; n = 0, 1, 2, \dots \qquad (5.20)$$

Por lo tanto, si en la ecuación diferencial (5.5) se hace $\lambda = \lambda_n$ dado por (5.20),

$$\frac{d^2u_n}{dx^2} + \left(\frac{2}{x} - 1\right)\frac{du_n}{dx} + \left(\frac{r_1+n}{x} - \frac{L}{x^2}\right)u_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \;\; L \geq 0 \qquad (5.21)$$

la solución U_n es un polinomio de grado n conocido como polinomio de Laguerre $L_n(x)$. Surge así la familia de polinomios de Laguerre $L_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Si se cumple (5.20) la ecuación de Laguerre (5.1) adquiere la forma

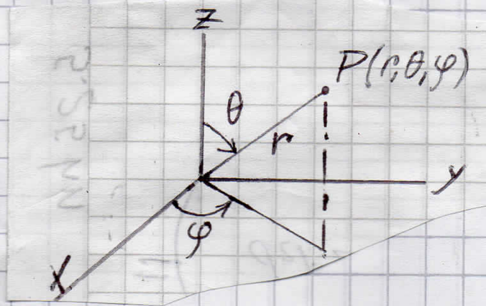
$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dR}{dx} + \left(\frac{r_1+n+1}{x} - \frac{1}{4} - \frac{L}{x^2}\right)R = 0 \, , \quad L \geq 0, \; n = 0, 1, 2, \dots \;\; 0 < x < \infty$$

Si adicionalmente se exige de $R(x)$ sea finita, la solución (5.4), teniendo en cuenta (5.21), adquiere la forma

$$R_n(x) = e^{-\frac{x}{2}} L_n(x) . \qquad (5.22)$$

ECUACIÓN DE LAPLACE - COORDENADAS ESFÉRICAS.

Las coordenadas esféricas se muestran en la figura de abajo



$$0 \leq \theta \leq \pi \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \qquad 0 \leq r < \infty \qquad (1)$$

La ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \psi = 0$$

en coordenadas esféricas adquiere la forma

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad (2)$$

Aplicando el método de separación de variables, se escribe

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)P(\theta)\Phi(\varphi) \qquad (3)$$

Reemplazando (3) en (2) y teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial (RP\Phi)}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P\Phi \frac{dR}{dr}\right) = P\Phi \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right).$$

análogamente

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial \theta}(RP\Phi)\right) = R\Phi \frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{dP}{d\theta}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}(RP\Phi) = RP\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$$

Todo esto se reemplaza en (2) y se divide por $RP\Phi$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{1}{P}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{dP}{d\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = 0,$$

Norma

de donde

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{\operatorname{sen}\theta}{P}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}\right)=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}. \quad (4)$$

Se observa que en esta última ecuación, el lado izquierdo es función de r y θ, mientras el derecho es función de φ, lo que es válido sólo si ambos lados se igualan a una misma constante K. Por tanto

$$-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=K \rightarrow \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+K\Phi=0, \quad (5)$$

donde K es una constante arbitraria positiva o negativa o cero. Igualmente,

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{\operatorname{sen}\theta}{P}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}\right)=K,$$

de donde

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=\frac{K}{\operatorname{sen}^2\theta}-\frac{1}{\operatorname{sen}\theta\times P}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}\right).$$

Se observa que en esta última ecuación el lado izquierdo es función de r, mientras el derecho es función de θ, lo que se puede cumplir sólo si ambos lados son iguales a una misma constante L. Esto es

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=L \rightarrow \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-LR=0, \quad (6)$$

$$\frac{K}{\operatorname{sen}^2\theta}-\frac{1}{\operatorname{sen}\theta\times P}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}\right)=L \rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+\left(L-\frac{K}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)P=0, \quad (7)$$

donde L es una constante arbitraria positiva o negativa o cero.

Hasta aquí se han obtenido las ecuaciones diferencial (5) para φ, (6) para $R(r)$ y (7) para $P(\theta)$.

Se comienza por examinar la ecuación diferencial (7) que se conoce como ecuación ASOCIADA DE LEGENDRE.

Primero, se muestra que haciendo en (7) el cambio de variable

$$\theta \rightarrow x, \text{ donde } x=\cos\theta \rightarrow \theta=\cos^{-1}x \quad (7')$$

(7) adquiere la forma

$$(1-x^2)\frac{d^2P(x)}{dx^2}-2x\frac{dP(x)}{dx}+\left(L-\frac{K}{1-x^2}\right)P(x)=0, \; -1\leq x\leq 1. \quad (8)$$

Demostración.

Se hacen los siguientes calculos:

$$\frac{dP}{d\theta}=\frac{dP}{dx}\frac{dx}{d\theta}, \quad \frac{dx}{d\theta}=-\operatorname{sen}\theta \rightarrow \frac{dx}{d\theta}=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}=\pm\sqrt{1-x^2} \quad (9)$$

como según (1), $0\leq\theta\leq\pi \rightarrow \operatorname{sen}\theta$ es positivo, por eso se escoge el signo $+$ y se escribe $\operatorname{sen}\theta=\sqrt{1-x^2}$. (10)

Teniendo en cuenta los anteriores resultados, (9) adquiere la forma

$$\frac{dP}{d\theta}=\sqrt{1-x^2}\,\frac{dP}{dx}. \qquad (11)$$

Ahora se calcula $\frac{d^2P}{d\theta}$.

$$\frac{d^2P}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dP}{d\theta}\right)\frac{dx}{d\theta}=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\frac{dP}{dx}\right)\operatorname{sen}\theta=$$

$$\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\frac{dP}{dx}+\sqrt{1-x^2}\frac{d^2P}{dx^2}\right)\sqrt{1-x^2}=$$

$$(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2}-x\frac{dP}{dx} \qquad (12)$$

Se reemplaza (11) y (12) en (7), obteniendo (8) que es lo que se quería demostrar.

Continuando con el examen de la ecuación asociada de Legendre en su forma (8), se tiene que tomando $K=0$, esta ecuación se reduce a

$$(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2}-2x\frac{dP}{dx}+LP=0 \quad , -1\leq x\leq 1 \qquad (13)$$

que coincide con la ecuación de Legendre que se estudió en el capítulo 4 (ecuación (4.1)).

Para distinguir la $P(x)$ que aparece (8) de la $P(x)$ en (13), en la primera se coloca $P\equiv P_L^K$ y en la segunda $P\equiv P_L$, así se escribe

$$(1-x^2)\frac{d^2P_L^K}{dx^2}-2x\frac{dP_L^K}{dx}+\left(L-\frac{K}{1-x^2}\right)P_L^K=0 \quad , -1\leq x\leq 1 \qquad (14)$$

y

$$(1-x^2)\frac{d^2P_L}{dx^2}-2x\frac{dP_L}{dx}+LP_L=0, \quad -1\leq x\leq 1. \qquad (15)$$

Corresponde resolver las ecuaciones diferenciales (5), (6) y (14).

1.1 Solución de la ecuación (5) para $\Phi(\varphi)$.

Aquí se debe tener en cuenta que en las teorías físicas se requiere que la función $\psi(r,\theta,\varphi)$ regida por la ecuación de Laplace (2), debe tener un valor único en cada punto del espacio (r,θ,φ). Matemáticamente se dice que $\psi(r,\theta,\varphi)$ debe ser univaluada (o uniforme).

En particular, si el ángulo φ se incrementa en 2π rad (una vuelta) se regresa al mismo punto, esto es

(θ,φ) y $(r,\theta,\varphi+2\pi)$ son el mismo punto y se requiere que

$$\psi(r,\theta,\varphi)=\psi(r,\theta,\varphi+2\pi)$$

Aplicando esta condición a la solución (3), se tiene

$$R(r)P(\theta)\Phi(\varphi)=R(r)P(\theta)\Phi(\varphi+2\pi),$$

de donde

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi). \qquad (16)$$

La función $\Phi(\varphi)$ debe cumplir esta última condición.
Se procede a resolver la ecuación (5). Para $K=0$, se escribe

$$\frac{d^2\phi}{d\varphi^2}=0 \rightarrow \phi=A\varphi+B, \text{ A y B constantes arbitrarias} \qquad (17)$$

Aplicando (16) en (17), se tiene

$$A(\varphi+2\pi)+B=A\varphi+B \rightarrow 2\pi A=0 \Rightarrow A=0$$

y (17) se reduce a

$$\Phi=B=\text{const}.$$

, o sea que para que se cumpla (16) cuando $K=0$, Φ no debe depender de φ lo que no tiene interés.

Si $K=k^2>0$, de (5)

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+k^2\Phi=0 \rightarrow \Phi=A\cos k\varphi+B\,\text{sen}\,k\varphi, \text{ A y B constantes arbitrarias} \qquad (18)$$

Aplicando (16) en (18), se escribe

$$A\cos[k(\varphi+2\pi)]+B\,\text{sen}[k(\varphi+2\pi)]=A\cos k\varphi+B\,\text{sen}\,k\varphi$$

$$A[\cos k\varphi\cos 2\pi k-\text{sen}\,k\varphi\,\text{sen}\,2\pi k]+B[\text{sen}\,k\varphi\cos 2\pi k+\cos k\varphi\,\text{sen}\,2\pi k]=A\cos k\varphi+B\,\text{sen}\,k\varphi,$$

lo que se cumple si

$$\cos 2\pi k=1 \quad y \quad \text{sen}\,2\pi k=0,$$

de donde

$$k=m=1,2,\ldots \quad K=m^2 \qquad (18')$$

Entonces para $K>0$

la solución (18) que satisface la condición (16) es

$$\Phi_m=A_m\cos m\varphi+B_m\,\text{sen}\,m\varphi, \quad m=1,2,\ldots \qquad (19)$$

En forma compleja se escribe

$$\Phi_m(\varphi)=C_m e^{im\varphi}, m=1,2,\ldots \qquad (19')$$

Caso cuando $K=-k^2<0$. De (5) se escribe

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}-k^2\Phi=0 \rightarrow \Phi=Ae^{k\varphi}+Be^{-k\varphi},\ A \text{ y } B \text{ constantes arbitrarias}. \quad (20)$$

Se aplica (16) a (20)

$$Ae^{k(\varphi+2\pi)}+Be^{-k(\varphi+2\pi)}=Ae^{k\varphi}+Be^{-k\varphi},$$

de donde

$$e^{2\pi k}=1 \quad y \quad e^{-2\pi k}=1 \rightarrow k=0,$$

y este valor de $k=0$ no cumple la condición $K=-k^2<0$.

Una vez examinados los tres casos $K=0$, $K>0$, $K<0$, el único caso compatible con la condición (16) es

$$K=m^2, \quad m=1,2,\ldots \quad (21)$$

La solución correspondiente $\Phi(\varphi)$ está dada por (19)

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN ASOCIADA DE LEGENDRE (14)

Teniendo en cuenta (21), la ecuación (14) se escribe así:

$$(1-x^2)\frac{d^2P_L^m}{dx^2}-2x\frac{dP_L^m}{dx}+\left(L-\frac{m^2}{1-x^2}\right)P_L^m=0, -1\leq x\leq 1,\ m=1,2,\cdots \quad (22)$$

A continuación se establece una relación entre las soluciones $P_L(x)$ de la ecuación de Legendre (15) y las soluciones $P_L^m(x)$ de la ecuación asociada de Legendre (22). Esta relación es

$$P_L^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_L(x)}{dx^m}, \quad (23)$$

así que si se conoce $P_L(x)$ entonces se puede obtener la solución de (22) dada por (23). Para demostrar (23), se comienza por derivar m veces la ecuación (15):

$$\left[(1-x^2)\frac{d^2P_L}{dx^2}\right]^{(m)}+\left(2x\frac{dP_L}{dx}\right)^{(m)}+L\frac{d^mP_L}{dx^m}=0. \quad (24)$$

Aquí cabe anotar que interesan las soluciones $P_L(x)$ de (15) conocidas como POLINOMIOS DE LEGENDRE, los cuales se obtienen cuando

$$L=n(n+1), \quad P_L\rightarrow P_n, \quad n=0,1,2,\cdots \quad (25)$$

se escribe

$$\left[(1-x^2)\frac{d^2P_n}{dx^2}\right]^{(m)}+\left(2x\frac{dP_n}{dx}\right)^{(m)}+n(n+1)\frac{d^mP_n}{dx^m}=0 \quad (26)$$

Para derivar m veces, se puede utilizar la fórmula de Leibnitz

$$[U(x)V(x)]^{(m)}=U^{(m)}V+mU^{(m-1)}V^{(1)}+\frac{m(m-1)}{2}U^{(m-2)}V^{(2)}+\cdots+UV^{(m)} \quad (27)$$

Norma

Para calcular $\left[(1-x^2)\frac{d^2P_n}{dx^2}\right]^{(m)}$, aplicando (27) se hace

$$U=\frac{d^2P_n}{dx^2} \quad y \quad V=1-x^2 \rightarrow V^{(1)}=-2x,\ V^{(2)}=-2,\ V^{(3)}=V^{(4)}=\cdots=V^{(m)}=0$$

se obtiene

$$\left[(1-x^2)\frac{d^2P_n}{dx^2}\right]^{(m)}=(1-x^2)\frac{d^{2+m}P_n}{dx^{2+m}}-2mx\frac{d^{2+m-1}P_n}{dx^{2+m-1}}-m(m-1)\frac{d^{2+m-2}P_n}{dx^{2+m-2}}.$$

Para calcular $\left[2x\frac{dP_n}{dx}\right]^{(m)}$, se hace $U=\frac{dP_n}{dx}$, $V=2x \rightarrow V^{(1)}=2,\ V^{(2)}=V^{(3)}=\cdots=V^{(m)}=0$

y aplicando (27), se tiene

$$\left[2x\frac{dP_n}{dx}\right]^{(m)}=\left(2x\frac{dP_n}{dx}\right)=2x\frac{d^{1+m}P_n}{dx^{1+m}}+2m\frac{d^{1+m-1}P_n}{dx^{1+m-1}}.$$

Se reemplazan estos resultados en (26)

$$(1-x^2)\frac{d^{2+m}P_n}{dx^{2+m}}-2(m+1)x\frac{d^{1+m}P_n}{dx^{1+m}}+\left(n(n+1)-m(m+1)\right)\frac{d^mP_n}{dx^m}=0$$

En esta última ecuación se hace el cambio

$$U=\frac{d^mP_n}{dx^m}, \tag{28}$$

se tiene

$$(1-x^2)\frac{d^2U}{dx^2}-2(m+1)x\frac{dU}{dx}+\left(n(n+1)-m(m+1)\right)U=0. \tag{29}$$

A su vez, en esta ecuación se hace el cambio

$$U=(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}V(x). \tag{30}$$

Se calculan las derivadas $\frac{dU}{dx}$ y $\frac{d^2U}{dx^2}$:

$$\frac{dU}{dx}=mx(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}+(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\frac{dV}{dx}=(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\left(\frac{dV}{dx}+mx(1-x^2)^{-1}V\right)$$

$$\frac{d^2U}{dx^2}=\left(-\frac{m}{2}\right)(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}(-2x)\left(\frac{dV}{dx}+mx(1-x^2)^{-1}V\right)+$$

$$(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\left[\frac{d^2V}{dx^2}+m(1-x^2)^{-1}V-(1-x^2)^{-2}(-2x)mxV+mx(1-x^2)^{-1}\frac{dV}{dx}\right]=$$

$$(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\left\{\frac{d^2V}{dx^2}+2mx(1-x^2)^{-1}\frac{dV}{dx}+m(1-x^2)^{-1}\left[1+2x^2(1-x^2)^{-1}+mx^2(1-x^2)^{-1}\right]V\right\}=$$

$$(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\left\{\frac{d^2V}{dx^2}+2mx(1-x^2)^{-1}\frac{dV}{dx}+m(1-x^2)^{-1}\left[1+(1-x^2)^{-1}(2+m)x^2\right]V\right\}.$$

Se reemplazan estas derivadas en (29)

$$(1-x^2)(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\left\{\frac{d^2V}{dx^2}+2mx(1-x^2)^{-1}\frac{dV}{dx}+m(1-x^2)^{-1}\left[1+(1-x^2)^{-1}(2+m)x^2\right]V\right\}-$$

$$2(m+1)x(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\left[\frac{dV}{dx}+mx(1-x^2)^{-1}V\right]+\left(n(n+1)-m(m+1)\right)(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}V=0$$

Se factoriza $(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}$, se tiene

$$(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\left\{(1-x^2)\frac{d^2V}{dx^2}+2mx\frac{dV}{dx}+m\left[1+(1-x^2)^{-1}(2+m)x^2\right]V-2(m+1)x\frac{dV}{dx}-\right.$$

$$\left.2(m+1)xmx(1-x^2)^{-1}V+\left(n(n+1)-m(m+1)\right)V\right\}=0$$

Para que esta ecuación se cumpla para todo x, se debe tener que la expresion entre $\{\ \}$ sea igua a cero

$$(1-x^2)\frac{d^2V}{dx^2}+(2mx-2(m+1)x)\frac{dV}{dx}+\left[m\left[1+(1-x^2)^{-1}(2+m)x^2\right]-2(m+1)mx^2(1-x^2)^{-1}+\right.$$

$$\left.n(n+1)-m(m+1)\right]V=0$$

$$(1-x^2)\frac{d^2V}{dx^2}-2x\frac{dV}{dx}+\left[n(n+1)+m\left[1+(1-x^2)^{-1}x^2-2(m+1)x^2(1-x^2)^{-1}-m-1\right]\right]V=0$$

Y en definitiva, se obtiene

$$(1-x^2)\frac{d^2V}{dx^2}-2x\frac{dV}{dx}+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)V=0$$

Comparando esta última ecuación con la ecuación (22) se observa que coinciden, lo que significa que la función $V(x)$ que aparece en el cambio (30) satisface la ecuación asociada de Legendre. Deshaciendo los cambios (28) y (30), se tiene

$$\frac{d^mP_n}{dx^m}=(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}V(x)\rightarrow V(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_n}{dx^m}$$

Esta solución de (22) para $L=n(n+1)$ se designa como $P_n^m(x)$, por tanto

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m} \qquad (31)$$

Conociendo los polinomios de Legendre $P_n(x)$ se generan los llamados POLINOMIOS ASOCIADOS DE LEGENDRE $P_n^m(x)$.

Y deshaciendo el cambio (7') $x=\cos\theta$, se tiene que

$$P_n^m(\cos\theta)=(1-\cos^2\theta)\left.\frac{d^m P_n(x)}{dx^m}\right|_{x=\cos\theta}$$

es la solución de la ecuación (7) que se obtuvo mediante el método de separación de variables, así que

$$P(\theta)=P_n^m(\cos\theta)\text{, en (7) se debe tomar } K=m^2,\ L=n(n+1) \quad (32)$$

Norma.

Solución de la ecuación diferencial (5) para R.

Teniendo en cuenta (25), (5) se escribe

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0\ ,\quad r \geq 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Consultando el libro "Handbook of exact solutions for ordinary differential equations", Andrei D. Polyanin y lentin F. Zaitsev, se encuentra que es un caso particular de la denominada ecuación diferencial de Euler, siendo su solución

$$R_n(x) = D_n r^n + E_n r^{-(n+1)}. \qquad (33)$$

Volviendo a

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)P(\theta)\Phi(\varphi).$$

se reemplazan $R_n(r)$ dado por (3), $P(\theta)$ dado por (32) y $\Phi_m(\varphi)$ dado por (19')

$$\psi_n^m(r,\theta,\varphi) = \left(D_n r^n + E_n r^{-(n+1)}\right) C_m e^{im\phi} P_n^m(\cos\theta) \qquad (34)$$

La parte angular de esta solución

$$Y_n^m(\theta,\varphi) = C_m e^{im\phi} P_n^m(\cos\theta) \qquad \begin{matrix} n = 0, 1, 2, \ldots \\ m = 1, 2 \ldots \end{matrix} \qquad (35)$$

El conjunto $\{ Y_n^m \}$ forma un conjunto ortogonal

Aplicando un proceso de ortonormalización a los armónicos esféricos (35) se obtiene que

$$C_m = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}$$

y se escribe

$$Y_n^m(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\, e^{im\phi} P_n^m(\cos\theta).$$

Capítulo 7. Ecuaciones diferenciales parciales (EDPs)

7.1 Introducción

Una EDP es una ecuación en la que aparecen derivadas parciales de una función incógnita de varias variables.

En este capítulo se hace una introducción a un tipo de EDPs de la forma

$$A(x,y)\,u_{yy} + B(x,y)\,u_{xy} + C(x,y)\,u_{xx} + D(x,y)\,u_y + E(x,y)\,u_x + H(x,y)\,u = F(x,y), \quad (7.1).$$

siendo $u = u(x,y)$ una función incógnita de solo dos variables y A, B, C, D, E, H y F funciones de x y y. Con la notación u_{yy}, u_{xy}, u_{xx}; u_y y u_x se designan las derivadas parciales, así por ejemplo

$$u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Las EDPs en general, y las EDPs del tipo (7.1) en particular, juegan un papel fundamental en la física. Como ilustración de este hecho se citan las siguientes EDPs:

Ecuación de onda: $u_{tt} - c_2 u_{xx} = F(x,t)$.

Ecuación del calor: $u_t - k u_{xx} = F(x,t)$

Ecuación de Poisson: $u_{yy} + u_{xx} = F(x,y)$

Ecuación de Laplace: $u_{yy} + u_{xx} = 0$.

Por tanto, el estudio de los métodos de solución de las EDPs es de importancia en la física.

La EDP (7.1) es de segundo orden (según el orden máximo de las derivadas que intervienen en (7.1)). Si $F \neq 0$ se dice que la EDP es inhomogénea. Si $F \equiv 0$, es homogénea.

Una propiedad destacable de la EDP (7.1) es su linealidad. Esto significa lo siguiente: dadas dos funciones u_1 y u_2 que satisfacen las EDPs

$$A u_{1yy} + B u_{1xy} + C u_{1xx} + D u_{1y} + E u_{1x} + H u_1 = F_1$$

y

$$A u_{2yy} + B u_{2xy} + C u_{2xx} + D u_{2y} + E u_{2x} + H u_2 = F_2,$$

siendo

$$F_1 + F_2 = F \quad (\text{el mismo } F \text{ que aparece en } (7.1)).$$

La linealidad de (7.1) consiste en que si se cumplen las tres condiciones anteriores, entonces cualquier combinación lineal de u_1 y u_2

$$\alpha u_1 + \beta u_2,$$

donde a y b son constantes arbitrarias, entonces $au_1 + bu_2$ es solución de la EDP original (7.1). Esto se conoce como principio de superposición. Por tanto si una EDP es lineal, es válido aplicarle el principio de superposición.

La linealidad de la EDP (7.1) tiene lugar gracias a que la función incógnita u y sus derivadas parciales intervienen solo a la primera potencia, conjuntamente con el hecho de que A, B, C, D, E, H y F son funciones solo de x y y (no dependen de u).

7.2 EDPs LINEALES DE PRIMER ORDEN

Haciendo en (7.1) $A=B=C=0$, se obtiene una EDP lineal de primer orden

$$Du_y + Eu_x + Hu = F \qquad (7.2)$$

El estudio de algunas propiedades de las EDPs y de los métodos para solucionarlas se inicia con la EDP (7.2) que es la más sencilla. Primero se desarrolla un ejemplo concreto, para luego desarrollar un procedimiento general para resolver (7.2).

<u>EJEMPLO 1</u>. Resolver la EDP lineal de primer orden

$$y^2 u_y + u_x - 2xu = 0. \qquad (7.3)$$

Comparando (7.3) con (7.2) se establecen las equivalencias

$$D = y^2,\ E = 1,\ H = -2x,\ F = 0.$$

Como $F=0$, la EDP (7.3) es homogénea

A continuación se expone un procedimiento detallado para resolver (7.3) que consta de varios pasos.

<u>PASO 1</u>. Se forma la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy}{dx} = \frac{D}{E} = y^2, \qquad (7.4)$$

que se denomina como la ecuación característica de la EDP (7.3).

Integrando (7.4) se tiene

$$-\frac{dy}{y^2} + dx = 0,$$

de donde (integrando)

$$x+\frac{1}{y}=K \quad , \qquad (7.5)$$

siendo K una constante arbitraria, (7.5) es la solución general de la ecuación característica (7.4) y da una familia de curvas en el plano xy denominadas curvas características de la EDP (7.3). En lo sucesivo las curvas características juegan un papel destacado en la solución de las EDPs.

Es útil graficar las curvas características (7.5), en este caso y se puede despejar y:

$$y=\frac{1}{K-x} \quad , \quad x\neq K .$$

En la figura 1, se muestran las curvas características para $K=0,1$

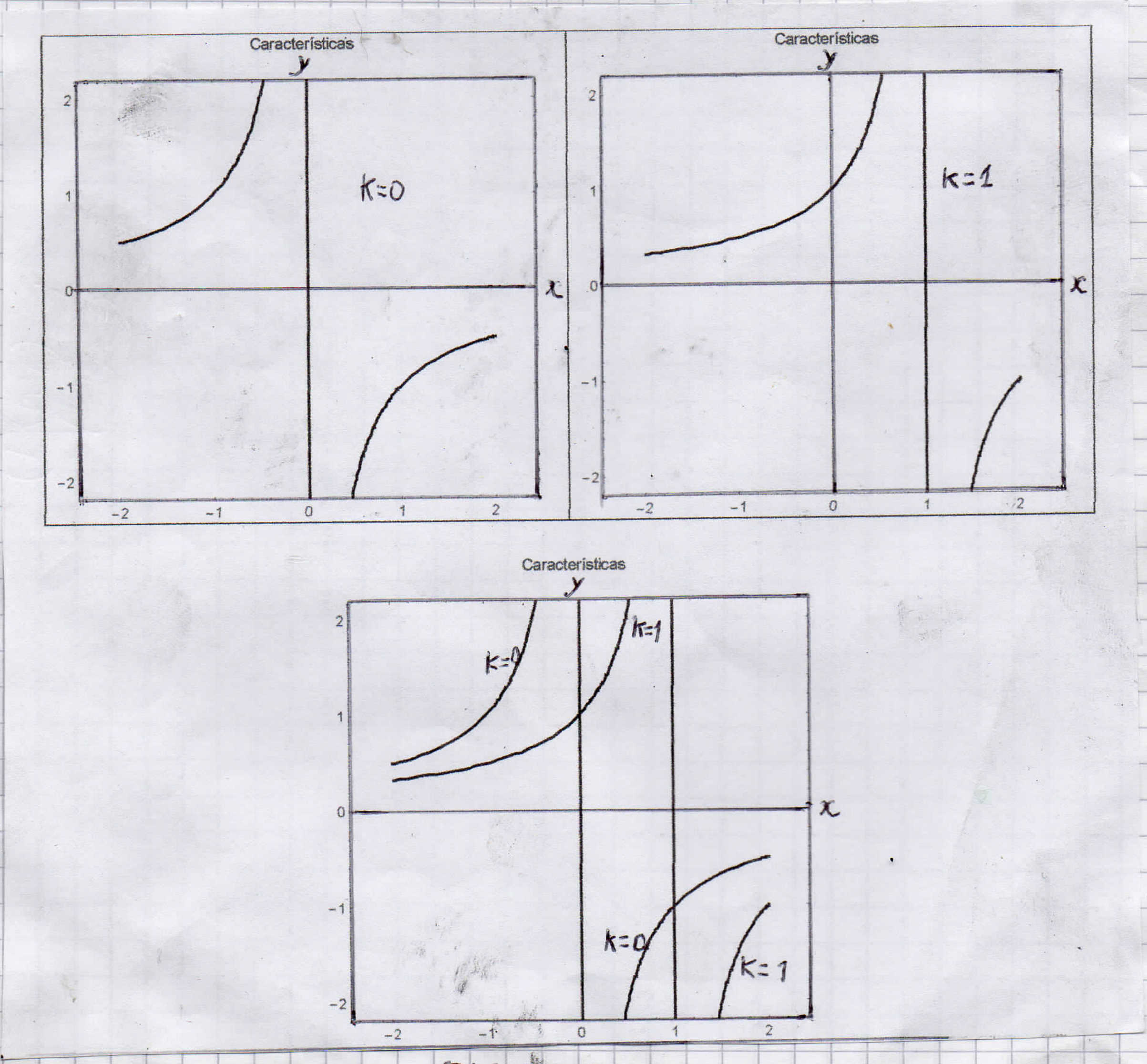


FIGURA 1

Las gráficas se hicieron con ayuda del programa Mathematica.

PASO 2. En la EDP (7.3) se hace el siguiente cambio de variables
$$\xi = x + \frac{1}{y}\ , \quad \eta = y. \qquad (7.6)$$
Nótese que ξ es igual al lado izquierdo de las curvas características (7.5)

Reemplazando $y=\eta$ en la primera ecuación en (7.6) se escribe
$$\xi = x + \frac{1}{\eta}\ , \text{ o bien, } \ x = \xi - \frac{1}{\eta} \qquad (7.7)$$
Aplicando el cambio de variables (7.6) la función incógnita $u(x,y)$ en (7.3) se convierte en una función de las nuevas variables ξ y η
$$u(x,y) \longrightarrow u(\xi,\eta).$$
Se calculan las derivadas parciales u_x y u_y
$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \quad y \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y\ ,$$
y teniendo en cuenta (7.6), se tiene
$$\xi_x = 1\ ,\ \xi_y = -\frac{1}{y^2} = -\frac{1}{\eta^2}\ ,\ \eta_x = 0\ ,\ \eta_y = 1.$$
Por tanto
$$u_x = u_\xi\ ,\ u_y = -\frac{1}{\eta^2}u_\xi + u_\eta.$$
Usando (7.6) y (7.7) los coeficientes y^2 y $-2x$ en la EDP (7.3), también se expresan en términos de ξ y η.
$$y^2 = \eta^2\ ,\ -2x = -2\left(\xi - \frac{1}{\eta}\right).$$
Todas las equivalencias anteriores se reemplazan en (7.3)
$$\eta^2\left(-\frac{1}{\eta^2}u_\xi + u_\eta\right) + u_\xi - 2\left(\xi - \frac{1}{\eta}\right)u = 0,$$
o bien,
$$u_\eta - 2\left(\frac{\xi}{\eta^2} - \frac{1}{\eta^3}\right)u = 0 \qquad (7.8)$$
En resumen, en este paso 2, haciendo el cambio de variables (7.6) la EDP (7.3) se convierte a la forma (7.8). Nótese que en (7.8) aparece únicamente la derivada u_η (no interviene u_ξ).

PASO 3. Se resuelve (7.8). Teniendo en CUENTA que u_ξ no interviene en (7.8), fijando ξ, esta ecuación se comporta como una ecuación diferencial ordinaria con respecto a la variable η, la cual se procede a resolver. De (7.8) se escribe
$$\frac{u_\eta}{u} = 2\left(\frac{\xi}{\eta^2} - \frac{1}{\eta^3}\right),$$
e integrando, se tiene
$$\int \frac{u_\eta}{u}\, d\eta = 2\int\left(\frac{\xi}{\eta^2} - \frac{1}{\eta^3}\right) + C(\xi)\ , \qquad (7.9)$$

donde ~~como constante de~~ integración se adiciona $C(\xi)$ que es una función arbitraria de ξ (ya que $\frac{dC(\xi)}{d\eta}=0$).

De (7.9) se obtiene

$$\ln u = -\frac{2\xi}{\eta}+\frac{1}{\eta^2}+C(\xi),$$

o bien

$$u = e^{C(\xi)}e^{-\frac{2\xi}{\eta}+\frac{1}{\eta^2}}.$$

se hace $p(\xi)=e^{C(\xi)}$ y se escribe

$$u(\xi,\eta)=p(\xi)\,e^{-\frac{2\xi}{\eta}+\frac{1}{\eta^2}}, \qquad (7.10)$$

que es la solución general de la ecuación diferencial (7.8), siendo $p(\xi)$ una función arbitraria.

PASO 4. En (7.10) se deshace el cambio de variables (7.6) para volver a las variables originales x y y. Reemplazando (7.6) en (7.10) se obtiene

$$u(x,y)=p\left(x+\frac{1}{y}\right)e^{-\frac{2}{y}\left(x+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{y^2}}=p\left(x+\frac{1}{y}\right)e^{-\frac{2x}{y}-\frac{1}{y^2}}. \qquad (7.11)$$

Esta es la solución general de la EDP original (7.3), siendo $p(x+\frac{1}{y})$ una función arbitraria de $x+\frac{1}{y}$.

PASO 5. Soluciones particulares. Una solución particular de (7.3) se obtiene fijando la forma de la función arbitraria $p(x+\frac{1}{y})$ que interviene en la solución general (7.11). Por ejemplo, si se hace $p(x+\frac{1}{y})=1$, la solución particular correspondiente es

$$u=e^{-\frac{2x}{y}-\frac{1}{y^2}}.$$

El siguiente ejemplo ilustra cómo en algunos problemas se fija la función $p(x+\frac{1}{y})$.

Ejemplo 2. Resolver el sistema

$$\boxed{\begin{aligned} &y^2u_y+u_x-2xu=0\\ &u(x,1)=1\end{aligned}} \qquad (7.12)$$

Ya se conoce que la solución general de la EDP que aparece en (7.12) está dada por (7.11). Aplicando la condición adicional $u(x,1)=1$, se tiene

$$u(x,1)=1=p(x+1)\,e^{-(2x+1)} \qquad (7.13)$$

Para fijar la forma de p se hace el cambio de variable

$$v=x+1,$$

de donde
$$x = \nu - 1 .$$
Reemplazando estos cambios en (7.13) se escribe
$$1 = p(\nu) e^{-(2\nu - 1)} ,$$
o bien
$$p(\nu) = e^{2\nu - 1} .$$
Volviendo al argumento $x + \frac{1}{y}$, se obtiene
$$p(x + \tfrac{1}{y}) = e^{2x + \frac{2}{y} - 1} .$$
Esta forma de $p(x+\frac{1}{y})$ se reemplaza en (7.11)
$$u = e^{2x - \frac{2x}{y} + \frac{2}{y} - \frac{1}{y^2} - 1} . \qquad (7.14)$$
Esta es la solución del problema particular (7.12). Se comprueba que en efecto
$$u(x,1) = e^{2x - 2x + 2 - 1 - 1} = 1 ,$$
es decir se cumple la condición sobre u que aparece en (7.12).

Observación importante. Cabe destacar que se ha obtenido una SOLUCIÓN ÚNICA dada por (7.14) del problema (7.12)

PASO 6. Es útil ilustrar el problema (7.12) con algunas gráficas. En primer lugar se tienen las curvas características de la EDP que interviene en (7.12), dadas por (7.5), las cuales se muestran en la figura 1 para $K = 0, 1$.

La condición adicional que aparece en (7.12),
$$u(x,1) = 1 , \qquad (7.15)$$
se ilustra gráficamente así:

La condición (7.15) se reescribe como
$$u(x,1) = u(x,y)\Big|_{y=1} .$$
De otra parte
$$y = 1$$
representa una recta G en el plano xy, que también se suele anotar como
$$G = (x,1) .$$
La condición (7.15) significa que sobre la recta G la función u toma el valor en este caso constante igual a 1. Considerando la curva Γ en el espacio xyz
$$\Gamma = (x, 1, 1) ,$$

Teniendo en cuenta lo anterior, en el problema (7.12) se plantea encontrar una solución de la EDP que contenga la curva Γ. La solución en el espacio xyz representa una superficie dada por

$$Sol = (x, y, u(x,y)) = \left(x, y, e^{2x - \frac{2x}{y} + \frac{2}{y} - \frac{1}{y^2} - 1}\right).$$

Esta superficie evaluada en $y=1$ contiene la curva Γ:

$$Sol\Big|_{y=1} = \Gamma = (x, 1, 1).$$

En la figura 2 se muestra una característica de la EDP (color negro) y la recta G (color rojo). En la figura 3, además de la característica y la recta G, se muestra la curva Γ (color verde) que en este caso es una recta. En la figura 4 se muestra un fragmento de la solución (7.14) que es una superficie. Esta superficie contiene a la recta Γ.

<u>Ejemplo 3</u> Resolver el sistema

$$\boxed{\begin{array}{l} y^2 u_y + u_x - 2xu = 0 \\ u\left(x, \frac{1}{3-x}\right) = 0. \end{array}} \qquad (7.16)$$

Primero se examina la condición

$$u\left(x, \frac{1}{3-x}\right) = u(x,y)\Big|_{y=\frac{1}{3-x}} = 0.$$

Esta condición establece que sobre la curva G dada por

$$y = \frac{1}{3-x} \quad \text{o bien} \quad G = \left(x, \frac{1}{3-x}\right) \qquad (7.17)$$

la función u vale cero, es decir, el problema (7.16) requiere una solución que contenga la curva Γ dada por

$$\Gamma\left(x, \frac{1}{3-x}, 0\right).$$

Comparando (7.17) con (7.5) se concluye que en este ejemplo G es una de las características de la EDP, siendo $k=3$.

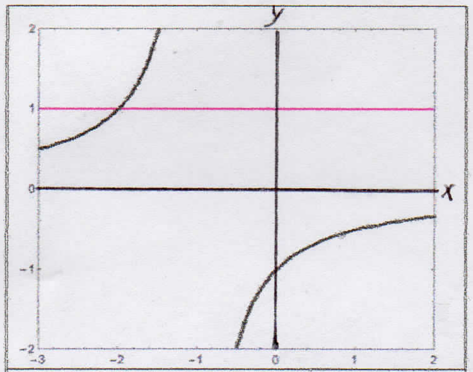


Figura 2. Una curva característica de la EDP (color negro); recta $G = (x, 1)$ (color rojo).

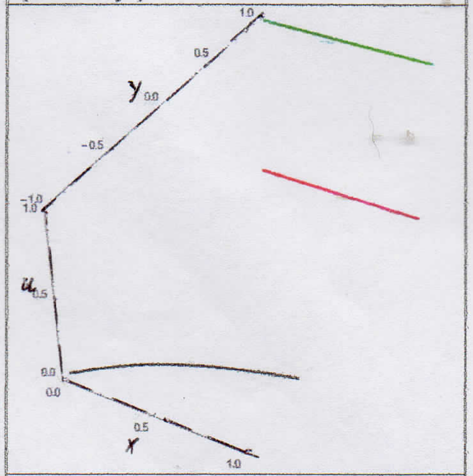


Figura 3. Además de la curva característica y la recta G, se muestra la recta $\Gamma = (x, 1, 1)$ (color verde).

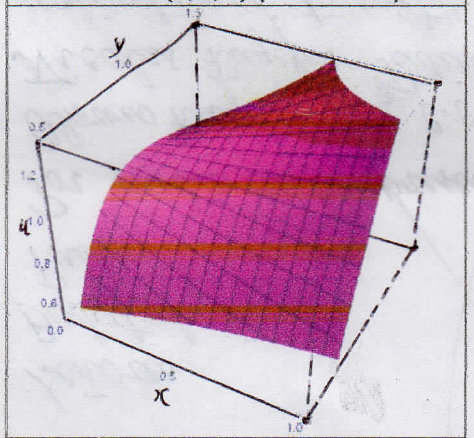


Figura 4. Un fragmento de la solución que es una superficie (x, y, u), la cual contiene la recta Γ.

Para resolver el problema (7.16), se utiliza la solución general de la EDP dada por (7.11)

$$u(x,y) = p\left(x+\frac{1}{y}\right) e^{-\frac{2x}{y} - \frac{1}{y^2}}.$$

Para determinar la forma de la función $p\left(x+\frac{1}{y}\right)$, se aplica la condición adicional que aparece en (7.16). Teniendo en cuenta que

$$y = \frac{1}{x-3}, \quad \text{de donde } x+\frac{1}{y} = 3, \text{ se tiene}$$

$$u\left(x, \frac{1}{x-3}\right) = p\left(x+\frac{1}{y}\right)\Big|_{x+\frac{1}{y}=3} \left[e^{-\frac{2x}{y}-\frac{1}{y^2}}\right]_{y=\frac{1}{x-3}} =$$

$$p(3)\left[e^{-\frac{2x}{y}-\frac{1}{y^2}}\right]\Big|_{\frac{1}{y}=3-x} = p(3)\, e^{-2x(3-x)-(3-x)^2} = 0, \qquad (7.18)$$

de donde $p(3)=0$, o bien

$$p\left(x+\frac{1}{y}\right)\Big|_{x+\frac{1}{y}=3} = 0.$$

Por tanto para hacer cumplir la condición adicional en (7.16) solo se requiere que $p\left(x+\frac{1}{y}\right)$ evaluada en $x+\frac{1}{y}=3$ sea igual a cero, por ejemplo

$$p\left(x+\frac{1}{y}\right) = \left(x+\frac{1}{y}\right)^2 - 9$$

o

$$p\left(x+\frac{1}{y}\right) = e^{x+\frac{1}{y}} - e^3.$$

En realidad existe un número infinito de funciones $p\left(x+\frac{1}{y}\right)$ que pasan por el punto $(3,0)$ y por tanto exist un NÚMERO INFINITO DE SOLUCIONES, dadas por

$$u(x,y) = p\left(x+\frac{1}{y}\right) e^{-\frac{2x}{y}-\frac{1}{y^2}}, \text{ donde } p\left(x+\frac{1}{y}\right)\Big|_{x+\frac{1}{y}=3} = 0.$$

Ejemplo 4. Resolver el sistema

$$\boxed{\begin{array}{c} y^2 u_y + u_x - 2xu = 0 \\ u\left(x, \frac{1}{3-x}\right) = x^2 \end{array}} \qquad (7.19)$$

Comparando este problema con el problema (7.16) se observa que son semejantes y la solución es la misma hasta la expresión (7.18), la cual se corrige así:

$$p(3)\left[e^{-\frac{2x}{y}-\frac{1}{y^2}}\right]\Bigg|_{\frac{1}{y}=3-x}=p(3)e^{-2x(3-x)-(3-x)^2}=x^2,$$

de donde

$$p(3)=x^2e^{-2x(3-x)-(3-x)^2}.$$

Hacer cumplir esta última igualdad es imposible ya que $p(3)$ es un valor constante que no puede ser función de la variable x.
Por tanto el problema (7.19) NO TIENE SOLUCIÓN.

7.3 ALGUNAS CONCLUSIONES

En el punto 7.2 se examinó la EDP lineal de primer orden (7.2)

$$DU_y+EU_x+Hu=F.$$

Tomando como ejemplo la EDP (7.3)

$$y^2U_y+U_x-2xU=0,$$

se desarrolló un procedimiento (PASOS 1 A 4) que permite obtener la solución general de (7.3) dada por (7.11)

$$U(x,y)=p\left(x+\frac{1}{y}\right)e^{-\frac{2x}{y}-\frac{1}{y^2}}.$$

En este procedimiento aparece el concepto de CARACTERÍSTICAS DE LA EDP, que son las curvas integrales de la ecuación diferencial dada por (7.4)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{D}{E}.$$

Las CURVAS CARACTERÍSTICA juegan un papel importante en la solución de las EDPs.
En la solución general (7.11) figura una función arbitraria

$$p\left(x+\frac{1}{y}\right).$$

En los pasos 5 y 6 se resuelven los ejemplos 2, 3 y 4 formulados en (7.12), (7.16) y (7.19)

$$\boxed{\begin{array}{l} y^2U_y+U_x-2xU=0\\ U(x,1)=1\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y^2U_y+U_x-2xU=0\\ U\left(x,\frac{1}{3-x}\right)=0\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y^2U_y+U_x-2xU=\\ U\left(x,\frac{1}{3-x}\right)=x^2\end{array}}$$

En estos problemas se debe encontrar, a partir de la solución general (7.11), una solución particular que cumpla una condición que consiste en que $u(x,y)$ tome unos valores dados sobre una curva dada en el plano xy, por ejemplo

$$u(x,y)\Big|_{y=\frac{1}{x-3}} = x^2 .$$

Este tipo de problemas se conocen como PROBLEMAS DE CAUCHY.

Se obtuvo que un PROBLEMA DE CAUCHY puede tener

UNA SOLUCIÓN ÚNICA (ejemplo 2)
UN NÚMERO INFINITO DE SOLUCIONES (EJEMPLO 3)
NINGUNA SOLUCIÓN (ejemplo 4)

También se mostró la utilidad de ilustrar los problemas con gráficas, usando algún programa de computador.

7.3 EDPs LINEALES DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES.

Se considera la EDP (7.1)

$$Au_{yy} + Bu_{xy} + Cu_{xx} + Du_y + Eu_x + Hu = F . \qquad (7.20)$$

Se examinará el caso de que A, B, C, D, E, H sean constantes y A, B y C no todas nulas. Esta es una EDP lineal de segundo orden con coeficientes constantes (F es función de x y y).

Para resolver (7.20), como un primer paso, se aplica la idea de que mediante un cambio de variables adecuado se logra eliminar términos de (7.20), de forma que resulte una ecuación más sencilla.

Haciendo el cambio

$$\begin{cases} \xi = px + qy \\ \eta = rx + sy \end{cases} , \qquad (7.21)$$

donde p, q, r y s son constantes. Las nuevas variables ξ y η son combinaciones lineales de las variables originales x y y. Una vez hecho el cambio (7.21) la función incógnita u será función de ξ y η:

$$u = u(\xi, \eta).$$

Se escriben las expresiones para las derivadas parciales u_x, u_y, u_{xx} y u_{yy}, usando (7.21),

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = p u_\xi + r u_\eta .$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = q u_\xi + s u_\eta$$

$$u_{xx} = p(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) + r(u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) = p(pu_{\xi\xi} + ru_{\xi\eta}) + r(pu_{\eta\xi} + ru_{\eta\eta}) =$$
$$p^2 u_{\xi\xi} + 2pr u_{\eta\xi} + r^2 u_{\eta\eta}$$

$$u_{yy} = q^2 u_{\xi\xi} + 2qs u_{\xi\eta} + s^2 u_{\eta\eta}$$

$$u_{xy} = p(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) + r(u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) = p(qu_{\xi\xi} + su_{\xi\eta}) + r(qu_{\eta\xi} + su_{\eta\eta}) =$$
$$pq u_{\xi\xi} + (ps + rq) u_{\xi\eta} + rs u_{\eta\eta}$$

Se reemplazan las expresiones anteriores en la EDP (7.20)

$$A(q^2 u_{\xi\xi} + 2qs u_{\xi\eta} + s^2 u_{\eta\eta}) + B(pq u_{\xi\xi} + (ps + rq) u_{\xi\eta} + rs u_{\eta\eta}) + C(p^2 u_{\xi\xi} + 2pr u_{\xi\eta} + r^2 u_{\eta\eta}) +$$
$$D(q u_\xi + s u_\eta) + E(p u_\xi + r u_\eta) + Hu = F(\xi, \eta)$$

Agrupando términos con $u_{\xi\xi}$, $u_{\xi\eta}$, $u_{\eta\eta}$, u_ξ y u_η, se tiene

$$(q^2A+pqB+p^2C)u_{\xi\xi}+(s^2A+rsB+r^2C)u_{\eta\eta}+(2qsA+(ps+rq)B+2prC)u_{\xi\eta}+$$
$$(qD+pE)u_\xi+(sD+rE)u_\eta+Hu=F(\xi,\eta)$$

o bien

$$A^*u_{\xi\xi}+B^*u_{\xi\eta}+C^*u_{\eta\eta}+D^*u_\xi+E^*u_\eta+Hu=F, \qquad (7.22)$$

donde

$$\begin{cases} A^*=q^2A+pqB+p^2C, \\ B^*=2qsA+(ps+rq)B+2prC, \\ C^*=s^2A+rsB+r^2C, \\ D^*=qD+pE \\ \text{y} \\ E^*=sD+rE. \end{cases} \qquad (7.23)$$

Con el fin de eliminar en (7.22) los términos con $u_{\xi\xi}$ y $u_{\eta\eta}$, se impone la condición

$$\begin{cases} A^* = q^2A + pqB + p^2C = 0 \\ C^* = s^2A + rsB + r^2C = 0 \end{cases} \qquad (7.24)$$

Así la EDP (7.22) se simplica a la forma

$$B^* u_{\xi\eta} + D^* u_{\xi} + E^* u_{\eta} + Hu = F \qquad (7.25)$$

El cumplimiento de la condición (7.24) se garantiza escogiendo un conjunto de valores adecuados de p, q, r y s, para lo cual se usan las siguientes alternativas:

i. Si $A \neq 0$, se toma $p = r = 1$. Estos valores se reemplazan en las expresiones para A^* y C^* dadas en (7.23). Se obtiene que

$$Aq^2 + Bq + C = 0 \quad y \quad As^2 + Bs + C = 0,$$

de donde se escogen los valores

$$q = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad y \quad s = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

ii. De manera análoga al caso anterior, cuando $C \neq 0$, se escogen los valores $q = s = 1$. Y de (7.23) se toman los valores

$$p = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C} \quad y \quad r = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}.$$

En resumen se escogen los conjuntos de valores para p, q, r y s:

$$\text{Si } A \neq 0, \quad p = r = 1, \quad q = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad s = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \qquad (7.26)$$

$$\text{Si } C \neq 0, \quad q = s = 1, \quad p = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}, \quad r = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}. \qquad (7.27)$$

1.2.1 CLASIFICACIÓN DE LAS EDPs LINEALES DE SEGUNDO ORDEN.

Las EDPs de segundo orden de la forma (7.20) se clasifican en HIPERBÓLICAS, PARABÓLICAS y ELÍPTICAS. Teniendo en cuenta que la raíz cuadrada

$$\sqrt{B^2 - 4AC}$$

aparece tanto en (7.26) como en (7.27), se establece la siguiente clasificación:

$$\begin{cases} \text{Si } B^2 - 4AC > 0 \text{ la EDP es HIPERBÓLICA.} \\ \text{Si } B^2 - 4AC = 0 \text{ la EDP es PARABÓLICA.} \\ \text{Si } B^2 - 4AC < 0 \text{ la EDP es ELÍPTICA.} \end{cases} \qquad (7.28)$$

EDPs HIPERBÓLICAS. En este caso $B^2 - 4AC > 0$ y la raíz cuadrada $\sqrt{B^2 - 4AC}$ es real. De otra parte, el cambio de variables (7.21), usando el conjunto de valores, dado por (7.26), adquiere la forma

$$\begin{cases} \xi = x + \dfrac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\, y \\ \eta = x + \dfrac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\, y \end{cases} \qquad (7.29)$$

Ahora se examina la forma de la EDP (7.25) en el caso hiperbólico. Usando los valores (7.26), se calculan las expresiones para A^*, B^*, C^*, D^* y E^* dadas por (7.23) y luego se reemplazan en (7.25). Se tiene:

$A^* = 0$, $C^* = 0$

$$B^* = 2qsA + (ps+qr)B + 2prC = 2qsA + (s+q)B + 2C =$$

$$2\left(\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\right)\left(\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\right)A + \left(\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A} + \frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\right)B + 2C =$$

$$2\frac{C}{A}A + \left(\frac{-B}{A}\right)B + 2C$$

$$B^* = -\frac{B^2-4AC}{A} \neq 0 \quad \text{ya que } B^2-4AC > 0$$

Análogamente, se obtiene

$$D^* = \frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}D + E \quad \text{y} \quad E^* = \frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A} + E.$$

Por tanto la EDP (7.25) en el caso hiperbólico adquiere la forma

$$\begin{cases} u_{\xi\eta} + \dfrac{D^*}{B^*}u_\xi + \dfrac{E^*}{B^*}u_\eta + \dfrac{H}{B^*}u = \dfrac{F}{B^*}, \text{ donde} \\ B^* = -\dfrac{B^2-4AC}{A} \neq 0,\ D^* = \dfrac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}D + E,\ E^* = \dfrac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}D + E \end{cases} \qquad (7.30)$$

la EDP (7.30) se conoce como forma CANÓNICA DE LA EDP HIPERBÓLICA.

Si de manera alternativa se usa el conjunto de valores para p, q, r y s, dado por (7.27), entonces el cambio de variables (7.21) adquiere la forma

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2C}x + y \\ \eta = \dfrac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2C}x + y \end{cases}, \qquad (7.31)$$

y la forma canónica de la EDP hiperbólica es

$$\begin{cases} u_{\xi\eta} + \dfrac{D^*}{B^*}u_\xi + \dfrac{E^*}{B^*}u_\eta + \dfrac{H}{B^*}u = \dfrac{F}{B^*}, \text{ donde} \\ B^* = -\dfrac{B^2-4AC}{C} \neq 0,\ D^* = D + \dfrac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2C}E,\ E^* = D + \dfrac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2C}E. \end{cases} \qquad (7.32)$$

Norma

EDPs PARABÓLICAS. En este caso

$$B^2-4AC=0.$$

Usando los valores para p, q, r y s dado por (7.26), el cambio de variables (7.21) adquiere la forma.

$$\xi=\eta=x-\frac{B}{2A}y, \qquad (7.32')$$

es decir ξ y η son iguales, lo que es inaceptable dado que se requiere que las expresiones para ξ y η en términos de x y y sean diferentes. Por eso el cambio de variables (7.21) se mantiene pero se corrige el conjunto de valores (7.26) así:

$$p=1, \; q=-\frac{B}{2A}, \; r=0, \; s=1, \quad A\neq 0. \qquad (7.33)$$

y el cambio de variables (7.21) queda como

$$\begin{cases} \xi=x-\dfrac{B}{2A}y \\ \eta=y \end{cases} \qquad (7.34)$$

Luego se procede a encontrar la forma de la EDP (7.25) en el caso PARABÓLICO. Teniendo en cuenta los valores (7.31) se escriben las expresiones para A^*, B^*, C^* dadas por (7.23)

$A^*=\frac{B^2}{4A^2}A+\left(-\frac{B}{2A}\right)B+C=-\frac{B^2-4AC}{4A}=0$, ya que $B^2-4AC=0$ (CASO PARABÓLICO).

$B^*=2\left(-\frac{B}{2A}\right)A+B=0$,

$C^*=A$, $D^*=-\frac{B}{2A}D+E$, $E^*=D$.

Estas expresiones se reemplazan en (7.25). Se obtiene la FORMA CANÓNICA DE LA EDP PARABÓLICA

$$u_{\eta\eta}+\frac{D^*}{A}u_\xi+\frac{D}{A}u_\eta+\frac{H}{A}u=\frac{F}{A}, \text{ donde } D^*=-\frac{BD}{2A}+E, \; A\neq 0 \qquad (7.35)$$

De forma alternativa, si $C\neq 0$, entonces se suele escoger

$$p=-\frac{B}{2C}, \; q=1, \; r=1, \; s=0. \qquad (7.36)$$

Reemplazando estos valores en (7.21) se tiene

$$\begin{cases} \xi=-\dfrac{B}{2C}x+y \\ \eta=x \end{cases} \qquad (7.37)$$

Igualmente de (7.23) se escribe

$A^*=0\ ,\ B^*=B+2\left(-\frac{B}{2C}\right)C=0\ ,\ C^*=C\ ,\ D^*=D-\frac{BE}{2C}\ ,\ E^*=E\ .$

Y la forma CANÓNICA DE LA EDP PARABÓLICA SEGÚN (7.25) es

$$u_{\eta\eta}+\frac{D^*}{C}u_\xi+\frac{E}{C}u_\eta+\frac{H}{C}u=\frac{F}{C}\ ,\ C\neq 0,\ D^*=D-\frac{BE}{2C}\ . \qquad (7.38).$$

EDPs ELÍPTICAS. En este caso

$$B^2-4AC<0,$$

y la raíz cuadrada

$$\sqrt{B^2-4AC}=i\sqrt{4AC-B^2},\quad i=\sqrt{-1},$$

toma valores complejos.

Si $A\neq 0$, los valores para p, q, r y s dados en (7.26) se escriben como

$A\neq 0, p=r=1,\ q=-\frac{B}{2A}+i\frac{\sqrt{4AC-B^2}}{2A}\ ,\ s=-\frac{B}{2A}-i\frac{\sqrt{4AC-B^2}}{2A},$

y reemplazando estos valores en el cambio de variables (7.21) se tiene

$$\xi=x+\left(-\frac{B}{2A}+i\frac{\sqrt{4AC-B^2}}{2A}\right)y=\frac{2Ax-By}{2A}+i\frac{\sqrt{4AC-B^2}}{2A}y \qquad (7.39)$$

$$\eta=\frac{2Ax-By}{2A}-i\frac{\sqrt{4AC-B^2}}{2A}y$$

, es decir, estas expresiones son complejas. En este caso se suele tomar

$$\begin{cases}\xi=\dfrac{2Ax-By}{2A}=x-\dfrac{B}{2A}y\\ \eta=y\end{cases} \qquad (7.40)$$

lo que significa que en (7.21) se ha tomado

$$p=1,\ q=-\frac{B}{2A}\ ,\ r=0,\ s=1\ . \qquad (7.41)$$

Teniendo en cuenta estos valores, la FORMA CANÓNICA DE LA EDP (7.25) en en el caso ELÍPTICO ES:

$$\begin{cases}A^*=q^2A+pqB+p^2C=\frac{B^2}{4A^2}A-\frac{B}{2A}B+C=\frac{4AC-B^2}{4A}\ ,\ A\neq 0\\ B^*=2qsA+(ps+qr)B+2prC=2\left(-\frac{B}{2A}\right)A+B=0,\\ C^*=s^2A+psB+p^2C=A\ ,\\ D^*=qD+pE=-\frac{B}{2A}D+E\ ,\\ E^*=sD+rE=D\ .\end{cases} \qquad (7.42)$$

LA forma CANÓNICA DE UNA EDP ELÍPTICA ES

$$A^*u_{\xi\xi}+Au_{\eta\eta}+D^*u_\xi+E^*u_\eta+Hu=F\ . \qquad (7.43)$$

CARACTERISTICAS DE LA EDP.

Teniendo en cuenta el cambio de variables (7.29), las dos familias de rectas definidas como

$$\xi = K \quad y \quad \eta = K$$

o bien

$$x + \frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\,y = K \quad y \quad x + \frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\,y = K ,$$

donde K es una constante arbitraria, se denominan características de la EDP (7.20).

En el caso hiperbólico ($B^2-4AC>0$) se tienen dos familias de características

$$x + \frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A} = K \quad y \quad x + \frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A} = K \qquad (7.44)$$

En el caso parabólico ($B^2-4AC=0$) se tiene una sola familia de características

$$x - \frac{B}{2A}y = K \qquad (7.45)$$

En el caso elíptico, las características son complejas

$$\frac{2Ax-By}{2A} \pm i\,\frac{\sqrt{4AC-B^2}}{2A} = K . \qquad (7.46)$$

Taller 1 – parte 1 - EDPs de primer orden lineales

1. a) Encuentre una expresión para las características de la EDP

$$u_t + vu_x = 0, \tag{1}$$

donde v es una constan te real diferente de cero, y grafique dos características cualesquiera (tomando $v = 0.5$).

b) Halle la solución general de (1).

c) Encuentre las soluciones particulares de (1) con la condición adicional:

$i)$ $$u(x, 0) = \sin x.$$

$ii)$ $$u\left(x, \frac{1}{v}x - 2\right) = 0.$$

$iii)$ $$u\left(x, \frac{1}{v}x - 4\right) = e^{-x^2}.$$

Sugerencia: Examine los pasos del procedimiento desarrollado en la clase. Haga $y \to t$.

Taller 1 – parte 2 - EDPs de segundo orden lineales

1. Sea la EDP

$$5\,u_{yy} - 2\,u_{xy} - 3\,u_{xx} + 0.5\,u_y - u_x + 2\,u = 0. \tag{1}$$

a) Muestre que con el cambio de variables

$$\xi = p\,x + q\,y$$

y

$$\eta = r\,x + s\,y,$$

donde p, q, r y s son constantes arbitrarias, la ecuación (1) adquiere la forma

$$A^* u_{\xi\xi} + \; B^* u_{\xi\eta} + \; C^* u_{\eta\eta} + \; D^* u_{\xi} + \; E^* u_{\eta} + 2\,u = 0, \tag{2}$$

siendo

$$A^* = -3p^2 - 2pq + 5q^2,$$
$$B^* = -6pr + 10qs - 2(qr + ps),$$
$$C^* = -3r^2 - 2rs + 5s^2,$$
$$D^* = -p + 0.5q$$
$$E^* = -r + 0.5s.$$

b) Escoja un conjunto de valores de p, q, r y s tales que A^* y B^* se vuelvan cero. Entonces (2) se reducirá a la forma canónica

$$B^* u_{\xi\eta} + \; D^* u_{\xi} + \; E^* u_{\eta} + 2\,u = 0. \tag{3}$$

Muestre los valores de p, q, r y s y calcule B^*, D^* y E^* para estos valores.

Taller 2 - EDPs de segundo orden lineales

1. Sea la EDP

$$2u_{tt} - 4\,u_{tx} + \tfrac{3}{2}\,u_{xx} - u_t + \tfrac{3}{2}u_x = 1. \qquad (1)$$

a) ¿Qué tipo de EDP es la EDP (1)?

b) Determine el cambio de variables

$$\xi = p\,x + q\,y,$$
$$\eta = r\,x + s\,y,$$

donde p, q, r y s son constantes cuyo valor debe determinar, que conlleve a la forma canónica de (1) dada por

$$-2u_{\xi\eta} + u_\eta = 1. \qquad (2)$$

c) Escriba las ecuaciones de sus características y grafique dos pares de ellas.

d) Muestre que la solución de (2) es

$$u(\xi, \eta) = q(\eta)e^{\frac{1}{2}\xi} + \eta + \, p(\xi), \qquad (3)$$

donde $q(\eta)$ y $p(\xi)$ son funciones arbitrarias.

e) Deshaciendo el cambio de variables, escriba la expresión para la solución $u(x, t)$ de (1) y compruebe que efectivamente satisface la EDP (1).

CAPÍTULO 8

ECUACIÓN DE ONDA

8.1 ECUACIÓN DE ONDA UNIDIMENSIONAL

Primeramente se estudiará la ecuación de onda

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), \qquad (8.1)$$

donde x es una coordenada espacial y t es el tiempo. Esta ecuación describe ondas unidimensionales que se propagan en la dirección x. La función incógnita u representa a la cantidad que se está propagando y $F(x,t)$ es la fuente externa que produce las ondas; c es una constante, $c \neq 0$.

Comparando (8.1) con (7.20) se establecen las equivalencias

$$t \to y,\ A=1,\ B=0,\ C=-c^2,\ D=E=H=0. \qquad (8.2)$$

De donde

$$B^2-4AC=4c^2>0,$$

y por tanto, la ecuación de onda (8.1) es una ecuación HIPERBÓLICA. De (7.29), teniendo en cuenta los valores (8.2), se aplica el cambio de variables

$$\begin{cases} \xi = x+ct, \\ \eta = x-ct. \end{cases} \qquad (8.3)$$

La forma canónica de la EDP (8.1) se obtiene a partir de las expresiones contenidas en (7.30), se tiene

$$B^* = -4c^2,\ D^* = E^* = H = 0.$$

Por tanto, la forma canónica es

$$u_{\xi\eta} = \frac{F}{-4c^2}. \qquad (8.4)$$

Se resolverá el caso cuando $F=0$, es decir, la ecuación de onda es homogénea (no hay fuente externa). En este caso (8.4) se reduce a

$$u_{\xi\eta}=0, \qquad (8.5)$$

la cual se puede resolver haciendo $u_\eta = v$ y considerando a η como un parámetro. Se tiene

$$v_\xi = 0$$

O sea que v no depende de ξ, integrando se escribe

$$v = p^*(\eta),$$

donde $p^*(\eta)$ es una función arbitraria de η. Ahora teniendo en cuenta que $v=u_\eta$, se resuelve la ecuación

$$u_\eta = p^*(\eta),$$

para lo cual se considera ξ como un parámetro

$$u = \int p^*(\eta)\,d\eta + q(\xi),$$

donde $q(\xi)$ es una función arbitraria de ξ.

Se escribe

$$p(\eta) = \int p^*(\eta)\,d\eta .$$

Ya que p^* es arbitraria, resulta que $p(\eta)$ es una función arbitraria de η. Por último se obtiene la solución

$$u(\xi,\eta) = p(\eta) + q(\xi)$$

Deshaciendo el cambio de variables (8.3) se escribe

$$u(x,t) = p(x-ct) + q(x+ct) \qquad (8.6)$$

Esta es la solución general de (8.1) cuando $F=0$, es decir, de

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad (8.7)$$

CARACTERÍSTICAS DE (8.1).

Las dos familias de características de las EDP Hiperbólicas, estan dadas por (7.44). Reemplazando los valores (8.2) se escriben las expresiones para las características de (8.1)

$$\begin{cases} x+ct = K \rightarrow t = \dfrac{K-x}{c} \\ x-ct = K \rightarrow t = -\dfrac{K-x}{c} \end{cases} \qquad (8.8)$$

En la figura 1 se muestran las características para $K=0$ (color negro),

$$t = \mp \frac{x}{c};$$

$K=1$ (color rojo)

$$t = \pm \frac{1-x}{c};$$

$K=-1$ (color azul)

$$t = \mp \frac{1+x}{c};$$

tomando $c=1$.

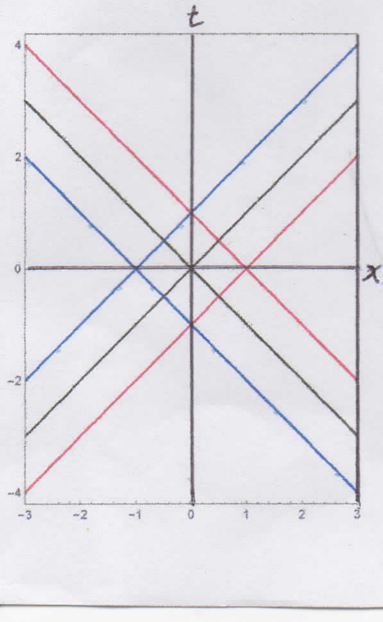


Figura 1. Características (8.8) de la ecuación de onda (8.1) para $c=1$ y $K=0$ (color negro), $K=1$ (color rojo), $K=-1$ (color azul)

ONDAS VIAJERAS. Para establecer el significado físico de la solución (8·6), se examinará un ejemplo. Como p y q en (8·6) son funciones arbitrarias, se propone considerar la siguiente escogencia:

Sea

$$p = e^{-(x-ct)^2} \quad y \quad q = e^{-(x+ct)^2}. \qquad (8\cdot 9)$$

En la figura 2 a) se muestra la forma de p en $t=0$ (tomando $c=1$) (color negro) y en $t=2$ (color rojo), se observa que el pulso se mueve en la dirección $+x$ conservando su forma. En la figura 2 b) se muestra la forma de q en $t=0$ (color negro) y en $t=2$, en este caso el pulso se mueve en la dirección $-x$. En c) se muestra la suma o superposición $u=p+q$ en $t=0$ (color negro) y en $t=2$ (color rojo).

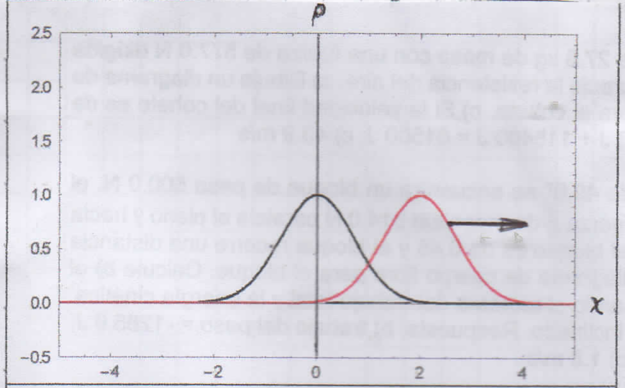
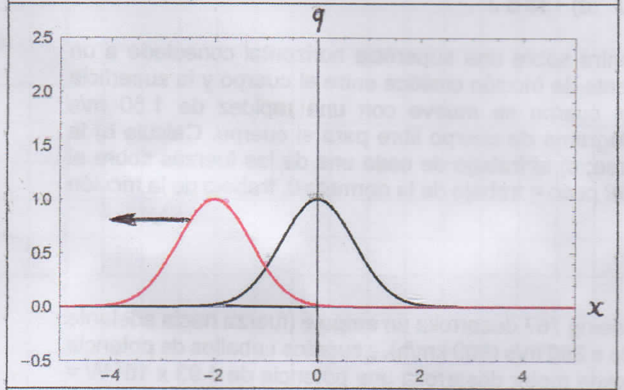
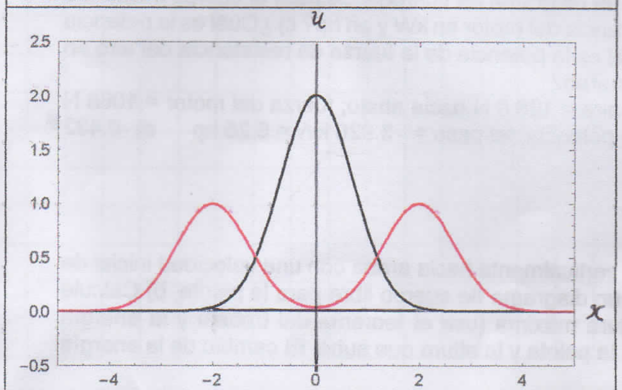


Figura 2. a) La función p en t = 0 (color negro) y en un tiempo posterior t = 1 (color rojo), p se ha movido a la izquierda.



b) La función q en t = 0 (color negro) y en un tiempo posterior t = 1 (color rojo), q se ha movido a la derecha.



c) La función u = p + q en t = 0 (color negro) y en un tiempo posterior t = 1 (color rojo).

Si en (8·6) y (8·9) se toma

$$x - ct = k, \qquad (8\cdot 10)$$
$$x + ct = k,$$

con k fijo, se estará recorriendo un par de características (8·8) de la EDP (8·1). Entonces a lo largo de estas características

$$p = e^{-k} = const, \quad q = e^{-k} = const.$$

Este valor se propaga con cierta velocidad v, la cual se calcula derivando (8·10) con respecto al tiempo t

$$v^{+} = \frac{dx}{dt} = c, \quad v^{-} = \frac{dx}{dt} = -c$$

Entonces p se mueve con velocidad $+c$ y q con velocidad $-c$.

La forma de la onda resultante representada por $u=p+q$ cambia con t (ver figura 2 c)).

8.2 PROBLEMA CON VALORES INICIALES.

Sea el sistema

$$\begin{cases} U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0 \ , & -\infty < x < \infty \ , \quad t \geq 0 \ ; \quad (8.11) \\ U(x,0) = f(x) \ , & U_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Esta es la ecuación de onda para una cuerda infinita ($-\infty < x < \infty$), con las condiciones iniciales $U(x,0) = f(x)$ y $U_t = \frac{du}{dt} = g(x)$, $f(x)$ y $g(x)$ son funciones dadas. El sistema (8.11) es un PROBLEMA CON VALORES INICIALES. En la figura 3 se muestra un ejemplo de valores iniciales

FIGURA 3

El sistema (8.11) PERMITE establecer cómo evolucionará en el tiempo t la forma inicial de u. A lo largo de la recta G en el plano x-t

$$G = (x, 0) \quad \text{o bien} \quad t = 0$$

se dan los valores $f(x)$ y $g(x)$ que toman respectivamente u y U_t.

En la figura 4 se muestran un par de características (color negro) y la recta $G = (x, 0)$ (color rojo)

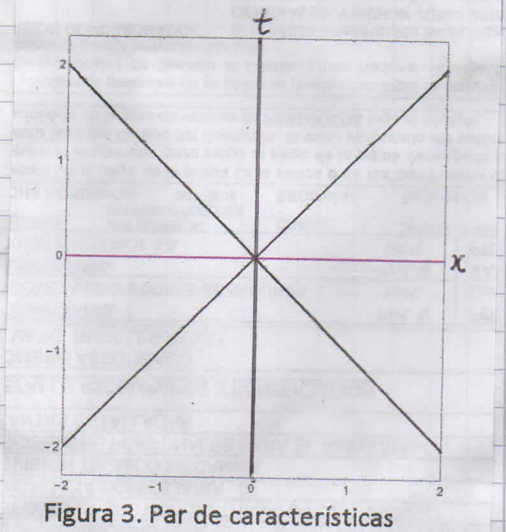


Figura 3. Par de características (color negro) y la recta G = (x, 0) (color rojo).

Matemáticamente el sistema (8.11) se puede resolver así:

La solución general de la ecuación diferencial se toma de (8.6)

$$U = p(x - ct) + q(x + ct) \ ;$$

donde p y q son funciones arbitrarias. Se requiere determinar la forma de p y de q que satisfagan las condiciones iniciales establecidas en (8.11)

$u(x,0) = f(x) \rightarrow p(x) + q(x) = f(x)$

$U_t(x,0) = g(x) \rightarrow$

en general

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = p'(x-ct)\frac{\partial(x-ct)}{\partial t} + q'(x+ct)\frac{\partial(x+ct)}{\partial t} =$$

$$p'(x-ct)(-c) + q'(x+ct)c$$

$$U_t(x,0) = u_t\Big|_{t=0} = c\left(-p'(x) + q'(x)\right) = g(x) \ .$$

O sea que se tiene el sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} p(x) + q(x) = f(x) \\ -p'(x) + q'(x) = \frac{1}{c} g(x) \ . \end{cases} \qquad (8.12)$$

Derivando la primera ecuación y sumándola con la segunda, se tiene

$$g'(x) = \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2c}g(x),$$

de donde

$$g(x) = \frac{1}{2}\int f'(x)dx + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds + k = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds + k.$$

donde k es la constante de integración. De la primera ecuación en (8.12) se despeja $p(x)$

$$p(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds - k =$$
$$\frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds - k.$$

Por tanto

$$p(x-ct) = \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(s)ds - k =$$
$$\frac{1}{2}f(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^0 g(s)ds - k$$

y

$$q(x+ct) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(s)ds + k.$$

Sumando

$$u = p(x-ct) + q(x+ct) = \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds. \quad (8.13)$$

Esta es la solución del sistema (8.11), se conoce como fórmula de D'Alambert.

Para ilustrar gráficamente la $u(x,t)$ dada por (8.13) se toma como ejemplo el caso cuando

$$f(x) = e^{-4x^2} \quad y \quad g(x) = 0.5\cos x.$$

Entonces de (8.13) se tiene

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[e^{-4(x-ct)^2} + e^{-4(x+ct)^2}\right] + \frac{1}{2c}\left[0.5\,\mathrm{sen}(x+ct) - 0.5\,\mathrm{sen}(x-ct)\right]$$

o bien

$$u(x,t) = \underbrace{\frac{1}{2}e^{-4(x-ct)^2} - \frac{1}{4c}\mathrm{sen}(x-ct)}_{p(x-ct)} + \underbrace{\frac{1}{2}e^{-4(x+ct)^2} + \frac{1}{4c}\mathrm{sen}(x+ct)}_{q(x+ct)},$$

En la figura 4a), b) y c) se muestra respectivamente p, q y u en los instantes $t=0$ y $t=4$ (se ha tomado $c=1$)

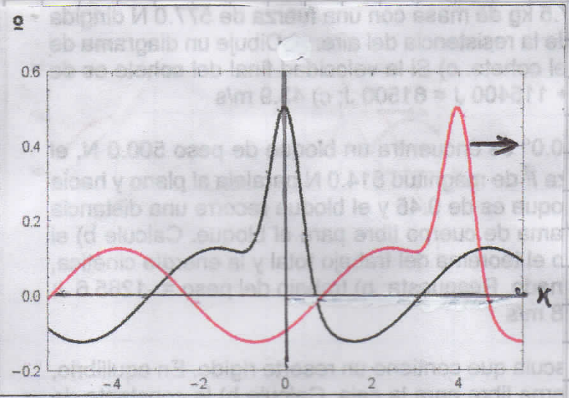
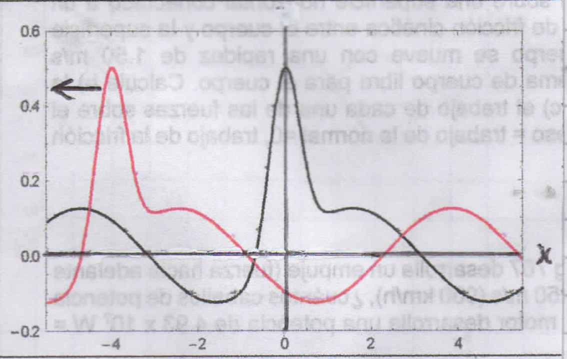
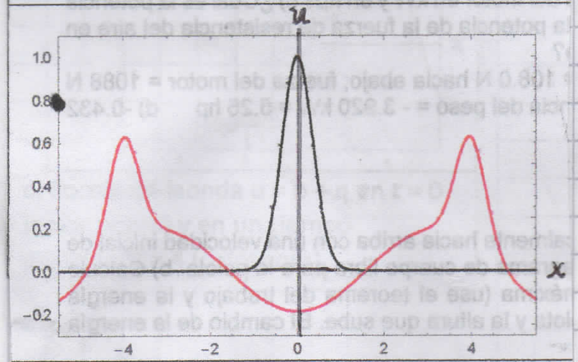


Figura 4. a) La función p en t = 0 (color negro) y en un tiempo posterior t = 4 (color rojo), p va hacia la izquierda.



b) La función q en t = 0 (color negro) y en un tiempo posterior t = 4 (color rojo), q va hacia la derecha.



c) Forma de la onda u = p + q en t = 0 (color negro) y en un tiempo posterior t = 4 (color rojo).

En a) se observa que la forma de p se mueve hacia la derecha, esta se conoce como ONDA VIAJERA HACIA LA DERECHA

Analogamente en b) se tiene una ONDA VIAJERA HACIA LA IZQUIERDA

Para examinar la velocidad de las ondas viajeras, se toma un valor constante k del argumento de $p(x-ct)$ y $q(x+ct)$, así

$$x \mp ct = k$$

se despeja x

$$x = k \pm ct$$

la derivada de x con respecto a t es la velocidad v

$$v = \pm c.$$

Entonces la constante c representa la velocidad de las ondas viajeras.

8.3 CUERDA SEMIINFINITA

En este punto se plantea la propagación de ondas en una cuerda semiinfinita, esto es

$$x \geq 0.$$

Se busca una solución de la EPD de ondas (8.1) homogénea, es decir, con $F=0$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad x \geq 0 \qquad (8.14)$$

Se dan unas condiciones iniciales

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}, \qquad (8.15)$$

y una condición de frontera en $x=0$; se estudiará el caso cuando el extremo $x=0$ esta fijo, entonces la condición de frontera es

$$u(0,t) = 0 \qquad (8.16)$$

Además se observa que si en la primera ecuación en (8.15) se evalua en $x=0$,

$$u(0,0) = f(0)$$

y (8.16) se evalua en $t=0$

$$u(0,0) = 0,$$

Comparando estas dos últimas ecuaciones, se debe cumplir que

$$f(0) = 0. \qquad (8.17)$$

Resumiendo (8.14), (8.15), (8.16) y (8.17), se formula el siguiente problema de ondas para una cuerda semiinfinita:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad x \geq 0 \\ u(x,0) = f(x),\ f(0) = 0,\ u_t(x,0) = g(x) \\ u(0,t) = 0 \end{cases} \qquad (8.18)$$

En la figura 5 se muestra un ejemplo de posibles formas de $f(x)$ y $g(x)$ las cuales existen sólo para $x \geq 0$ (para $x<0$ no hay ni $f(x)$ ni $g(x)$

Ejemplo

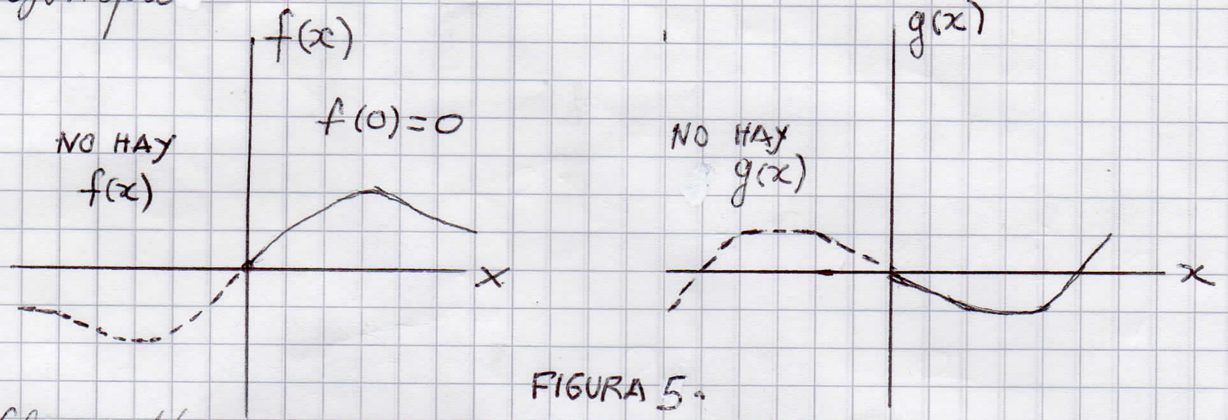


FIGURA 5.

El problema (8.18) se puede resolver usando la solución de D'Alambert (8.13) para una cuerda infinita, así: las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se pueden extender hacia $x<0$, se escribe

$$\begin{cases} f^*(x)=\begin{cases} f(x), & x\geq 0 \\ f_1(x), & x<0 \end{cases} \\ \\ g^*(x)=\begin{cases} g(x), & x\geq 0 \\ g_1(x), & x<0 \end{cases} \end{cases} \qquad (8.19)$$

Y el problema para la cuerda infinita con condiciones iniciales es:

$$\begin{aligned} &U_{INF\,tt}-c^2U_{INF\,xx}=0 \quad -\infty<x<\infty \\ &U_{INF}(x,0)=f^*(x),\ U_{INF\,t}(x,0)=g^*(x). \end{aligned} \qquad (8.20)$$

La solución de D'alamber (8.13), adquiere la forma

$$U_{INF}(x,t)=\frac{1}{2}\left[f^*(x-ct)+f^*(x+ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g^*(s)\,ds. \quad (8.21)$$

Ahora se trata de escoger la forma de las funciones f^* y g^* de tal forma que la solución (8.21) en el intervalo $x\geq 0$, satisfaga el problema original (8.18) de la cuerda semi-infinita.

Si hace que $U_{INF}(x,t)$ cumpla la condición de frontera $U(0,t)=0$ que aparece en (8.18). Entonces se hace

$U_{INF}(0,t)=0$, o bien de (8.21)

$$\frac{1}{2}\left[f^*(t)+f^*(-t)\right]+\frac{1}{2c}\int_{-t}^{t} g^*(s)\,ds=0. \qquad (8.22)$$

Esta última igualdad se cumple si se hace

$$\begin{cases} f^*(t) = f^*(-t) \rightarrow f^*(-t) = f^*(t) \\ \displaystyle\int_{-t}^{t} g^*(s)ds = 0 \rightarrow g^*(-t) = g^*(t) \end{cases} \quad (8.23)$$

dadas en (8.19)

O sea que las extensiones f^* y g^* de f y g deben ser impares.

Así, la solución para U_{INF} (8.21) se usa solo en $x \geq 0$.

Por ejemplo, si en (8.21) se toma:

$$f^*(x) = \frac{2x}{x^2-1}, \text{ que cumple } f^*(0) = 0, \; f^*(-x) = -f^*(x)$$

y

$$g^*(x) = \operatorname{sen} x, \text{ que cumple } g^*(-x) = -g^*(x),$$

entonces, con base en (8.21) se puede escribir

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\frac{2(x-ct)}{(x-ct)^2-1} + \frac{2(x+ct)}{(x+ct)^2-1}\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \operatorname{sen} s \, ds =$$

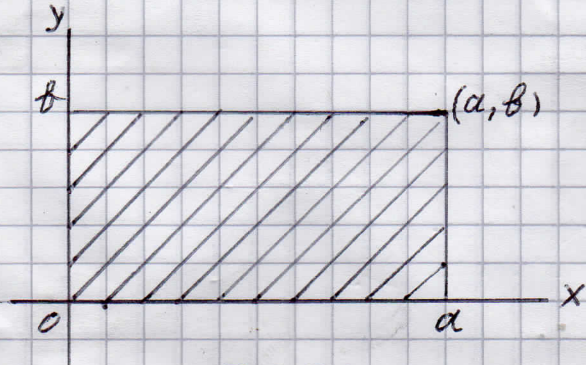
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2(x-ct)}{(x-ct)^2-1} + \frac{1}{c}\cos(x-ct)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{2(x+ct)}{(x+ct)^2-1} - \frac{1}{c}\cos(x+ct)\right],$$

... que satisface el problema de cuerda semi-infinita

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad x \geq 0 \\ u(x,0) = \dfrac{2x}{x^2-1}; \; u_t(x,0) = \operatorname{sen} x, \; u(0,0) = 0 \\ u(0,t) = 0 \end{cases}$$

8.4 VIBRACIONES DE UNA MEMBRA - MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

Se considera una membrana tensa de forma rectangular fija en los lados (ver figura).



FIGURA

Las vibraciones (pequeñas) de esta membrana se rigen por la ecuación de onda bidimensional para $u(x,y,t)$

$$u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0 \qquad (8.14)$$

Como condiciones iniciales se dan

$$u(x,y,0) = f(x,y)\ ;\ u_t(x,y,0) = g(x,y). \qquad (8.15)$$

Adicionalmente, se tienen condiciones de frontera (lados fijos)

$$u(0,y,t) = u(a,y,t) = u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0. \qquad (8.16)$$

El problema (8.14), (8.15), (8.16) se resolverá usando el método conocido cómo método de separación de variables que se plante buscar soluciones que sean el producto de tres funciones $X(x)$, $Y(y)$ y $T(t)$ cada una función de una sola variable, o sea

$$u(x,y,t) = X(x)\,Y(y)\,Z(z),\ X \neq 0,\ Y \neq 0,\ Z \neq 0 \qquad (8.17)$$

Reemplazando (8.17) en (8.14) se tiene

$$XYT'' - c^2(X''YT + XY''T) = 0$$

Se divide por XYT

$$\frac{T''}{T} - c^2\left(\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}\right) = 0 \qquad (8.18)$$

De las condiciones de frontera (8.16), se tiene

$$u(0,y,t) = X(0)\,Y(y)\,T(t) = 0 \rightarrow X(0) = 0$$

Análogamente

$$\left.\begin{aligned} u(a,y,t) &= X(a)Y(y)T(t) = 0 \rightarrow X(a) = 0 \\ u(x,0,t) &= X(x)Y(0)T(t) = 0 \rightarrow Y(0) = 0 \\ u(x,b,t) &= X(x)Y(b)T(t) = 0 \rightarrow Y(b) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8.19)$$

que son las condiciones de frontera para $X(x)$ y $Y(y)$.

De (8·18), se escribe

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2\left(\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)}\right)$$

El lado izquierdo es función de t y el derecho de las otras variables x y y. Por tanto, ambos lados deben ser iguales a una misma constante K_1, se tiene

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = K_1 \rightarrow T'' - K_1 T = 0 \qquad (8\cdot 20)$$

$$c^2\left(\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}\right) = K_1 \rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{K_1}{c^2} - \frac{Y''}{Y} \qquad (8\cdot 21)$$

(8·20) es la ecuación diferencial para $T(t)$.
El lado izquierdo de (8·21) es función de x, mientras que el derecho es función de y. Por tanto, ambos lados son iguales a una misma constante K_2, se escribe

$$\frac{X''}{X} = K_2 \qquad \rightarrow X'' - K_2 X = 0 \qquad (8\cdot 22)$$

$$\frac{K_1}{c^2} - \frac{Y''}{Y} = K_2 \quad \rightarrow Y'' - \left(\frac{K_1}{c^2} - K_2\right)Y = 0 \qquad (8\cdot 23)$$

Solución de las ecuaciones (8·22) y (8·23) con las condiciones de frontera (8·19). Primero se examinará la ecuación (8·22), donde aparece una constante K_2 arbitraria. Es posible que $K_2 = 0$ ó $K_2 > 0$ o $K_2 < 0$. Si $K_2 = 0$, se tiene

$$X'' = 0 \rightarrow X = Ax + B.$$

Aplicando las condiciones de frontera para $X(x)$ dadas en (8·19), se escribe

$X(0) = 0 \rightarrow B = 0 \rightarrow X = Ax$; $X(a) = 0 \rightarrow Aa = 0$, como $a \neq 0 \rightarrow A = 0$, por tanto $X(x) = 0$ (solución trivial). Entonces con $K_2 = 0$ no se logra satisfacer las condiciones de frontera para $X(x)$.

Si se toma $K_2 > 0$, se escribe $K_2 = k_x^2$ y se tiene

$$X'' - k_x^2 X = 0 \rightarrow X = A e^{k_x x} + B e^{-k_x x}$$

De $X(0) = 0 \rightarrow B = -A \rightarrow X = A\left(e^{k_x x} - e^{-k_x x}\right)$ y

De $X(a) = 0 \rightarrow A\left(e^{k_x a} - e^{-k_x a}\right) = 0$, $A \neq 0 \rightarrow e^{k_x a} = e^{-k_x a} \rightarrow k_x = -k_x \rightarrow k_x = 0$

No se puede cumplir para $K_2 = k_x^2 > 0$.

Falta aplicar el caso $K_2<0$, se escribe $K_2=-k_x^2$ y se tiene la ecuación diferencial

$$X''+k_x^2X=0 \rightarrow X=A\cos k_x x+B\,\mathrm{sen}\,k_x x$$

$$X(0)=0 \rightarrow A=0 \rightarrow X=B\,\mathrm{sen}\,k_x x \ .$$

$$X(a)=0 \rightarrow B\,\mathrm{sen}\,k_x a=0,\ B\neq 0, \rightarrow \mathrm{sen}\,k_x a=0 \rightarrow k_x=\frac{n\pi}{a},\ n=1,2,\cdots \qquad (8.24)$$

la solución para $X(x)$ es

$$X(x)=B\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right),\ K_2=-k_x^2=-\frac{n^2\pi^2}{a^2} \qquad (8.25)$$

Pasando a la ecuación diferencial (8.23). Se consideran los casos $\frac{K_1}{c^2}-K_2=\frac{K_1}{c^2}+\frac{n^2\pi^2}{a^2}=0$, >0 y <0. De manera análoga a como se resolvió la ecuación diferencial para $X(x)$, se obtiene que las condiciones de frontera para $Y(y)$ dadas en (8.19), se pueden satisfacer sólo si

$$\frac{K_1}{c^2}+\frac{n^2\pi^2}{a^2}=-k_y^2=-\frac{m^2\pi^2}{b^2},\ m=1,2,\cdots \qquad (8.26)$$

y la solución para $Y(y)$ es

$$Y(y)=D\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \ . \qquad (8.27)$$

Examinando la ecuación diferencial para $T(t)$ (8.20)

$T''-K_1T=0$, donde K_1 se despeja de (8.26)

$$K_1=-c^2\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\frac{m^2\pi^2}{b^2}\right)<0,\ \text{se hace } K_1=-c^2k^2, \text{ donde}$$

k es una constante y se obtiene

$$k^2=\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\frac{m^2\pi^2}{b^2},\ n=1,2,\cdots;\ m=1,2,\cdots \qquad (8.28)$$

y la ecuación diferencial para $T(t)$ (8.20), adquiere la forma

$$T''+c^2k^2T=0,$$

que tiene por solución general

$$T(t)=E\cos ckt+F\,\mathrm{sen}\,ckt, \qquad (8.29)$$

donde E y F son constantes arbitrarias.

Reuniendo (8·17), (8·25), (8·27), (8·29) y (8·28) se escribe

$$k_{nm}^2=\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\frac{m^2\pi^2}{b^2},\quad U_{nm}(x,y,t)=(E_{nm}\cos ck_{nm}t+F_{nm}\operatorname{sen} ck_{nm}t)\,B_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)D_m\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \qquad (8\cdot30)$$

que es una forma de solución que satisface la ecuación de onda bidimensional (8.14) y las condiciones de frontera (8·15), además $n,m=1,2,3,\dots$ Por tanto, (8·30) representa un conjunto infinito de soluciones.

Falta hacer cumplir las condiciones iniciales (8·15). De (8·30)

$$U_{nm}=(E_{nm}B_nD_m\cos ck_{nm}t+F_{nm}B_nD_m\operatorname{sen} ck_{nm}t)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right).$$

Haciendo $E_{nm}B_nD_m=G_{nm}$ y $F_{nm}B_nD_m=H_{nm}$, se escribe

$$U_{nm}(x,y,t)=(G_{nm}\cos ck_{nm}t+H_{nm}\operatorname{sen} ck_{nm}t)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \qquad (8\cdot31)$$

Aplicando a (8·31) la primera condición inicial en (8·15)

$$U(x,y,0)=f(x,y)$$

se tiene

$$U_{nm}(x,y,0)=G_{nm}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right)=f(x,y)$$

lo cual se cumple para el caso muy particular cuando efectivamente

$$f(x,y)=G_{nm}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right),\quad G_{nm}=\text{const}.$$

Para un caso general, teniendo en cuenta la linealidad de la ecuación diferencial (8·14) y por tanto la validez del principio de superposición de soluciones, en vez de la solución (8·31) se construye una solución más general, así:

$$U(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(G_{nm}\cos ck_{nm}t+H_{nm}\operatorname{sen} ck_{nm}t)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \qquad (8\cdot32)$$

aplicando a (8·32) la primera condición inicial en (8.15)

$$f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}G_{nm}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x\operatorname{sen}\frac{m\pi}{b}y. \qquad (8\cdot32)$$

Esta es la serie de Fourier doble para $f(x,y)$ conocida. Los coeficientes G_{nm} se calculan así: se hace

$$J_m(x)=\sum_{n=1}^{\infty}G_{nm}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x, \qquad (8\cdot33)$$

Norma

que interpretada como la serie de Fourier para $J_m(x)$, permite escribir que

$$G_{nm} = \frac{2}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} J_m(x)\, sen\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \tag{8.34}$$

Ahora, se reemplaza (8.33) en (8.32),

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} J_m(x)\, sen\left(\frac{m\pi}{b}y\right),$$

Que se interpreta como la serie de Fourier para $f(x,y)$ con x fijo, de donde

$$J_m(x) = \frac{2}{b}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, sen\left(\frac{m\pi}{b}y\right). \tag{8.35}$$

Se reemplaza (8.35) en (8.34) para obtener en definitiva que los coeficientes G_{nm} están determinados por la fórmula

$$G_{nm} = \frac{4}{ab}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, sen\left(\frac{n\pi}{a}x\right) sen\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dx\, dy. \tag{8.36}$$

Los coeficientes H_{nm} que aparecen en (8.32), se calculan aplicando la segunda condición inicial en (8.15)

$$u_t(x,y,0) = g(x,y)$$

Derivando (8.32) término a término con respecto a t, se tiene

$$u_t(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} ck_{nm}\left(-G_{nm}\, sen\, ck_{nm}t + H_{nm}\cos ck_{nm}t\right) sen\frac{n\pi}{a}x \cdot sen\frac{m\pi}{b}$$

Por tanto

$$g(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} ck_{nm}H_{nm}\, sen\left(\frac{n\pi}{a}x\right) sen\left(\frac{m\pi}{b}y\right).$$

que es la serie de Fourier doble para $g(x,y)$. Los coeficientes $ck_{nm}H_{nm}$ se evaluan de manera análoga a como se evaluaron los coeficientes G_{nm} de la serie (8.32). El resultado es

$$H_{nm} = \frac{4}{ck_{nm}ab}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, sen\left(\frac{n\pi}{a}x\right) sen\left(\frac{m\pi}{a}y\right) dx\, dy \tag{8.37}$$

En resumen la $u(x,y,t)$ dada en (8.32) con G_{nm} y H_{mn} determinados por (8.36) y (8.37), es la solución de la ecuación de onda bidimensional (8.14) con las condiciones iniciales (8.15) y las condiciones de frontera (8.16).

Norma

Nombre Luis Alberto Rozo Ortega | Fecha día mes año

Profesor Física Matemática II | Materia

Institución | Curso | Nota

TALLER SEPARACION DE VARIABLES

Resolver: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ (1) $\quad 0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$

Con la condición de frontera: $u(0,y)=0 \quad u(x,0)=0$
$u(a,y)=0 \quad u(x,b)=f(x)$.

Sol/. Sea $u(x,t) = X(x)\,Y(y)$ una solución de la E.D.P.

Entonces: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = X'(x)Y(y) \wedge \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)Y(y)$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = X(x)Y'(y) \wedge \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X(x)Y''(y)$

Reemplazando en (1): $X(x)Y''(y) + X''(x)Y(y) = 0$.

$Y''(y)X(x) = -X''(x)Y(y) \rightarrow \dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = -\dfrac{X''(x)}{X(x)}$ Se cumple dicha ecuación si cada expresión al lado del igual es una constante denominada cte de separación

Es decir se cumple si: $\dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = \alpha \wedge -\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \alpha$

Sea α la cte de separación:

Casos: 1) $\alpha < 0 \rightarrow \alpha = -k^2$; $k \in \mathbb{R}$
2) $\alpha > 0 \rightarrow \alpha = k^2$; $k \in \mathbb{R}$
3) $\alpha = 0 \rightarrow \alpha = k = 0$

Analizando el caso 1 $\alpha = -k^2$

Entonces: $\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k^2 \rightarrow Y''(y) + k^2 Y(y) = 0$ La ecuación característica asociada es

$\lambda^2 + k^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm ki$ $\therefore Y(y) = C_1 \cos(ky) + C_2 \sin(ky)$

De la misma forma:

$-\frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2 \rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = k^2 \rightarrow X''(x) - k^2 X(x) = 0$ Su ecuación característica

es: $\lambda^2 - k^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm k$ por lo tanto $X(x) = C_3 e^{-kx} + C_4 e^{+kx}$

de manera que la solución en este caso es dada por

$$U(x,y) = \left[C_3 e^{-kx} + C_4 e^{kx}\right]\left[C_1 \cos(ky) + C_2 \sin(ky)\right]$$

$* \quad U(0,y)=0 \rightarrow U(0,y) = (C_3 + C_4)\left[C_1\cos(ky) + C_2\sin(ky)\right] = 0$

pero $C_1\cos(ky) + C_2\sin(ky) \neq 0 \rightarrow C_3 + C_4 = 0 \quad \therefore \quad C_4 = -C_3$.

Así la solución parcial ahora es:

$$U(x,y) = \left[C_3 e^{-kx} - C_3 e^{kx}\right]\left[C_1\cos(ky) + C_2\sin(ky)\right]$$

$$U(x,y) = C_3\left(e^{-kx} - e^{kx}\right)\left[C_1\cos(ky) + C_2\sin(ky)\right]$$

Ahora $U(a,y)=0 \rightarrow U(a,y) = C_3\left(e^{-ak} - e^{ak}\right)\left[C_1\cos(ky) + C_2\sin(ky)\right] = 0$

de donde tenemos que $e^{-ak} - e^{ak} = 0 \rightarrow \frac{1}{e^{ak}} = e^{ak} \rightarrow e^{2ak} = 1$

$2ak = \ln 1 = 0 \rightarrow \underline{k=0}$.

con lo cual $U(x,y) = C_3(1-1)\left[C_1\cos(ky) + C_2\sin(ky)\right] = 0$

$\boxed{U(x,y) = 0}$ $\rightarrow$ Me genera la solución trivial.

ADEMÁS, EN ESTE CASO $k<0$

Caso 2) $\alpha = k^2 \quad ; \alpha > 0$

De la misma manera $\frac{Y''(y)}{Y(y)} = k^2 \rightarrow Y''(y) - k^2 Y(y) = 0 \rightarrow$ la E. característica es dada por:

$\lambda^2 - k^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm k \quad \therefore \quad Y(y) = C_1 e^{ky} + C_2 e^{-ky}$

luego, $-\frac{X''(x)}{X(x)} = k^2 \rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2 \rightarrow X''(x) + k^2 X(x) = 0 \rightarrow \lambda^2 + k^2 = 0$

$\therefore \lambda = \pm ki$

Por lo tanto la solución es dada por: $X(x) = C_3\cos(kx) + C_4\sin(kx)$

por lo tanto la solución es dada por

$$U(x,y) = \left[C_3\cos(kx) + C_4\sin(kx)\right]\left[C_1 e^{ky} + C_2 e^{-ky}\right]$$

aplicando las condiciones iniciales

$U(0,y)=0 \rightarrow C_3\left[C_1 e^{ky} + C_2 e^{-ky}\right] = 0 \rightarrow$ Se cumple si $\boxed{C_3 = 0}$

por lo tanto la solución parcial es dada por:

$$U(x,y) \left[C_4\sin(kx)\right]\left[C_1 e^{ky} + C_2 e^{-ky}\right]$$

Luego

$* \; U(x,0) = 0 \longrightarrow U(x,0) = C_4 \sin(kx)\left[C_1 e^{k(0)} + C_2 e^{-k(0)}\right] = C_4 (C_1 + C_2)\sin(kx) = 0$

Se cumple si $C_4(C_1 + C_2) = 0$ pero C_4 No puede ser cero porque generara la sol. Trivial

por lo tanto se cumple si $C_1 + C_2 = 0 \rightarrow \boxed{C_2 = -C_1}$

de manera que la solución parcial es ahora:

$$U(x,y) = C_4 \sin(kx)\left[C_1 e^{ky} - C_1 e^{-ky}\right]$$

aplicando la 3^{ra} Condicion de frontera. $U(a,y)=0$

$$U(a,y)= C_1C_4 \, Sin(ak)\left[e^{ky}-e^{-ky}\right]=0$$ lo cual se cumple si

$$Sin\ ak=0 \rightarrow ak=Sin^{-1}(0) \quad \therefore \quad ak=n\pi \quad \text{con } n=1,2,\ldots$$

$$\therefore k=\frac{n}{a}\pi \quad \text{con } n=1,2,\ldots$$

por lo tanto

$$U_n(x,y)= C_1C_4 \, Sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\left[e^{\frac{n\pi}{a}y}-e^{-\frac{n\pi}{a}y}\right]. = U_n \rightarrow \text{depende del valor de } n.$$

pero Recuerde que $Sinh\theta=\dfrac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2.} \rightarrow e^{\frac{n\pi y}{a}}-e^{-\frac{n\pi y}{a}}=2Sinh\left[\dfrac{n\pi y}{a}\right].$

por lo tanto $U_n(x,y)=2\,C_1C_4\,Sinh\left(\dfrac{n\pi y}{a}\right)Sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) = 2E_n\,Sinh\left(\dfrac{n\pi y}{a}\right)Sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right)$

Por lo tanto la solución general que satisface las condiciones de frontera son:

menos una $u(x,b)=f(x)$

$$U(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x,y)$$

$$U(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}2E_n\,Sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)Sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right).$$

Para determinar el valor de las constantes E_n hacemos uso de la condición:

$U(x,b)=f(x).$

$$\rightarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{2E_n\,Sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}_{J_n}Sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$ Serie de Fourier.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}J_n\,Sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$ de donde se sabe que:

$$J_n=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\,Sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx.$$

Por lo tanto.

$$\cancel{2}E_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = \frac{\cancel{2}}{a}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

$$\therefore E_n = \frac{1}{a\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$$

donde lo Solución es

∞

Taller 3 – Método de separación de variables

1. Usando el método de separación de variables resolver el sistema

$$u_{yy} + u_{xx} = 0, \qquad 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b \tag{1}$$

Con las condiciones de frontera

$$u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = 0,\ u(x,b) = f(x), \tag{2}$$

siendo $f(x)$ una función conocida, a y b dos constantes.

Observación: Al aplicar el método de separación de variables, considere todos los casos posibles.

Respuesta:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n\left(e^{n\pi y/a} - e^{-n\pi y/a}\right)\sin(n\pi x/a),$$

o bien,

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2E_n \sinh(n\pi y/a)\sin(n\pi x/a),$$

donde

$$E_n = \frac{2}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(n\pi x/a)dx.$$

Observación: Esta es la respuesta que yo obtuve, por favor comunicarme otras posibles respuestas.

CAPÍTULO 9. LA ECUACIÓN DEL CALOR.- MÉTODO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

El flujo de calor en un medio homogéneo, se rige por la denominada ecuación del calor

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} u_t = 0, \qquad (9.1)$$

donde ∇^2 es el operador laplaciano; $c^2 = K/\rho\sigma$, K es la conductividad térmica del medio, σ su calor específico y ρ su densidad de masa. $u(\vec{r},t)$, don $\vec{r}$ es la posición, representa la temperatura del medio, t es el tiempo.

Se examinará el problema del flujo unidimensional de calor a lo largo de una barra delgada homogénea de longitud ℓ (ver Figura 1).

FIGURA 1.

Adicionalmente se conoce la temperatura u en $t=0$

$$u(x,0) = f(x), \qquad (9.2)$$

$f(x)$ dada.

El problema formado por la EDP (9.1) con la condición (9.2) se resolverá usando el método de las transformadas de Fourier. En coordenadas cartesianas

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \qquad (9.3)$$

pero para un problema unidimensional, con u dependiendo sólo de x, se tiene

$$\nabla^2 u = u_{xx}$$

y la ecuación (9.1), se reduce a la forma

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_t = 0, \quad u = u(x,t) \qquad (9.4)$$

Se escribe la transforma de $u(x,t)$ con respecto a x:

$$\mathcal{F}[u(x,t), x] = U(s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, e^{-isx}\, dx \qquad (9.5)$$

y la transformada inversa

$$\mathcal{F}^{-1}[U(s,t), s] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} U(s,t)\, e^{isx}\, ds = u(x,t) \qquad (9.6)$$

Tomando la transformada de Fourier de (9.4), se tiene

$$\mathcal{F}\left[u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_t, x\right] = \mathcal{F}[u_{xx}] - \frac{1}{c^2}\mathcal{F}[u_t] = 0 \qquad (9.7)$$

Se calcula $\mathcal{F}[u_{xx}, x]$ y $\mathcal{F}[u_t, x]$.

$$\mathcal{F}[u_{xx}, x] = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}(x,t) e^{-isx} dx.$$

Integrando por partes

$$\mathcal{F}[u_{xx}, x] = e^{-isx} u_x \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} + is \int_{-\infty}^{+\infty} u_x e^{-isx} dx = \left(e^{-isx} u_x + is\, e^{-isx} u \right) \Big|_{x=-\infty}^{+\infty} +$$

$$(is)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u\, e^{-isx} dx.$$

Al evaluar los términos en $x = \pm\infty$, se coloca la condición

$$u_x(\pm\infty, t) = 0 \quad y \quad u(\pm\infty, t) = 0, \tag{9.8}$$

así desaparecen los términos de frontera y se obtiene que

$$\mathcal{F}[u_{xx}, x] = -s^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, e^{-isx} dx.$$

Teniendo en cuenta (9.5), se escribe

$$\mathcal{F}[u_{xx}, x] = -s^2 U(s,t) \tag{9.9}$$

De otra parte

$$\mathcal{F}[u_t(x,t), x] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\, e^{-isx} dx =$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, e^{-isx} dx = \frac{\partial}{\partial t} U(s,t) = U_t(s,t) \tag{9.10}$$

Reemplazando (9.9) y (9.10) en (9.7), se tiene la ecuación diferencial

$$U_t(s,t) + c^2 s^2 U(s,t) = 0, \tag{9.11}$$

donde s se toma como un parámetro. La solución general de (9.11) es

$$U(s,t) = p(s)\, e^{-c^2 s^2 t} \tag{9.12}$$

Evaluando en $t = 0$, se tiene

$$U(s,0) = p(s),$$

y reemplazando $U(s,0) = p(s)$ en (9.12), se obtiene que

$$U(s,t) = U(s,0)\, e^{-c^2 s^2 t}. \tag{9.13}$$

Se calcula $U(s,0)$. De (9.5) evaluado en $t=0$, se escribe

$$V(s,0)=\int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)e^{-isx}dx.$$

Aplicando la condición inicial (9.2), se tiene

$$U(s,0)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-isy}dy.$$

SE CAMBIO LA VARIABLE MUDA x POR y, PUES LA x NO DEBE DESPARECER.

Esto se reemplaza en (9.13)

$$V(s,t)=\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-isy}dy\right]e^{-c^2s^2t}$$

A continuación se aplica la transformada inversa (9.6), se obtiene

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-isy}dy\right]e^{-c^2s^2t}e^{isx}ds=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{is(x-y)-c^2s^2t}ds\right]dy. \qquad (9.14)$$

Cálculo de la integral

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{is(x-y)-c^2s^2t}ds. \qquad (9.15)$$

Se aplica la integral conocida

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2}dw=\sqrt{\pi}. \qquad (9.16)$$

Para adaptar (9.15) a la forma (9.16), se hace la siguiente transformación

$$is(x-y)-c^2s^2t=-(c^2s^2t-is(x-y)+B^2)+B^2 \qquad (9.17)$$

donde se a sumado y restado el mismo término B^2. Se escoge B^2 de tal manera que

$$(c^2s^2t-is(x-y)+B^2)=(cs\sqrt{t}+B)^2=(c^2s^2t+2cs\sqrt{t}B+B^2),$$

de donde

$$-is(x-y)=2cs\sqrt{t}\,B \rightarrow B=-i\frac{(x-y)}{2c\sqrt{t}}.$$

Este resultado se reemplaza en (9.17)

$$is(x-y)-c^2s^2t=-\left(cs\sqrt{t}-i\frac{x-y}{2c\sqrt{t}}\right)^2-\frac{(x-y)^2}{4c^2t}$$

que a su vez se reemplaza en (9.15)

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(c\sqrt{t}\,s-i\frac{x-y}{2c\sqrt{t}}\right)^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4c^2t}}\,ds =$$

$$e^{-\frac{(x-y)^2}{4c^2t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(c\sqrt{t}\,s-i\frac{x-y}{2c\sqrt{t}}\right)^2} ds$$

Se hace cambio de variable de integración $w=c\sqrt{t}\,s-i\frac{x-y}{2c\sqrt{t}} \rightarrow$ $dw=c\sqrt{t}\,ds \rightarrow ds=\frac{1}{c\sqrt{t}}dw$, los límites de integración continúan $-\infty$ y $+\infty$ (complejos), entonces $J=e^{\frac{(x-y)^2}{4c^2t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2}\frac{1}{c\sqrt{t}}\,dw$.

$$J=\frac{1}{c\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4c^2t}}\sqrt{\pi}=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{is(x-y)-c^2s^2t}\,ds. \qquad (9.18)$$

Se reemplaza (9.18) en (9.14)

$$U(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\left[\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4c^2t}}\right]dy \qquad (9.19)$$

Usando la anotación $G(x-y,t)=\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4c^2t}}$, (9.20)

(9.19) adquiere la forma

$$U(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,G(x-y,t)\,dy, \qquad (9.21)$$

que es la solución del problema formado por la ecuación del calor (9.4) con la condición inicial dada (9.2).

La función $G(x-y,t)$ dada por (9.20) se conoce como función de GREEN para el problema (9.4)-(9.2).