

Universidad de Nariño  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Física



Estudio de la sección eficaz diferencial elástica para colisiones protón (antiprotón)-protón basada en un modelo quark-diquark con elasticidad del pomerón

TRABAJO DE GRADO

Para optar el título profesional de:

Físico

**Miguel Alejandro Molina**

San Juan de Pasto, Colombia

Marzo 2018

**Universidad de Nariño**  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Física

Estudio de la sección eficaz diferencial elástica para  
colisiones protón (antiprotón)-protón basada en un modelo  
quark-diquark con elasticidad del pomerón

**Miguel Alejandro Molina**

TRABAJO DE GRADO

Director:

**Carlos Arturo Ávila Bernal**

Ph.D. en Física

Codirector:

**Jaime Alfredo Betancourt**

M.Sc. en Física

San Juan de Pasto, Colombia

Marzo 2018

©2018 - Miguel Alejandro Molina

“Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores”

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Todos los derechos reservados.

Nota de Aceptación

---

---

---

---

---

---

**Ph.D. Carlos Arturo Ávila Bernal**

---

Director

**Ph.D Yithsbey Giraldo Usúga**

---

Jurado

**Ph.D. Alvaro Rugeles Perez**

---

Jurado

San Juan de Pasto, 16 de Marzo 2018

## **Agradecimientos**

Agradezco al departamento de física de la universidad de Nariño por darme la oportunidad de cumplir mi ideal, ser Físico. Un agradecimiento especial a mi asesor de trabajo de grado el Ph.D. Carlos Arturo Ávila Bernal, profesor titular de la Universidad de los Andes: por su gran compromiso, por compartir su tiempo y conocimientos. A mi familia, amigos, compañeros y docentes del programa de física, especialmente al profesor Jaime Betancourt.

# Estudio de la sección eficaz diferencial elástica para colisiones protón (antiprotón)-protón basada en un modelo quark-diquark con elasticidad del pomerón

## Resumen

*Se presenta el estudio de un modelo de dispersión elástica de nucleones (y anti-nucleones) basado en una representación quark-diquark ( $qQ$ ) del nucleón con pomerón elástico. Este modelo aumenta la parte real de la amplitud de dispersión mejorando su descripción en el mínimo de difracción. Las predicciones del modelo se comparan con los datos experimentales disponibles para cada una de las secciones eficaces diferenciales elásticas de los nucleones en un rango de energía entre 4.26 GeV hasta 7 TeV. Esta parametrización no describe correctamente los datos experimentales para ciertas energías en colisiones protón-protón (y antiprotón-protón). Se incluye un estudio que trata de mejorar el modelo de ajuste a los datos existentes, presentando buenos resultados.*

# Study of the proton (antiproton)-proton elastic differential cross section based on a quark-diquark model with pomeron elasticity.

## Abstract

*We present a study of the nucleon-nucleon (an nucleon-antinucleon) elastic differential cross section based on a representation quark-diquark ( $qQ$ ) of the nucleon with elastic pomeron. This model increases the real part of the scattering amplitude improving the description of the diffraction minimum. The predictions of the model are compared to the available experimental data within the range of 4.26 GeV through 7 TeV. This parametrization does not describe correctly the experimental data of proton-proton (proton-antiproton) collisions for several energies. We include a study aiming to improve the model description to existing data, obtaining good results.*

# CONTENIDO

---

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>2. DETECTORES Y ACELERADORES DE PARTÍCULAS</b>	<b>4</b>
2.1. Laboratorio CERN . . . . .	4
2.2. Complejo acelerador . . . . .	5
2.3. Gran colisionador de hadrones (LHC) . . . . .	5
2.4. Experimento TOTEM . . . . .	12
<b>3. DISPERSIÓN ELÁSTICA</b>	<b>15</b>
3.1. Estudio de dispersión desde mecánica clásica . . . . .	16
3.2. Tratamiento cuántico de dispersión . . . . .	17
3.3. Desarrollo en ondas parciales . . . . .	17
3.4. Variables de Mandelstam . . . . .	19
<b>4. TEORÍA DE REGGE Y EL POMERÓN</b>	<b>24</b>
4.1. Modelos fenomenológicos . . . . .	24
4.2. La idea del polo de Regge . . . . .	25
4.3. El reggeon . . . . .	25
4.4. La representación de $A(s,t)$ para $l$ complejo . . . . .	26
4.5. El pomerón . . . . .	27
<b>5. PARAMETRIZACIÓN PARA LA SECCIÓN EFICAZ DIFERENCIAL ELÁSTICA</b>	<b>29</b>
5.1. Modelo quark-diquark con pomerón elástico . . . . .	30
<b>6. ANÁLISIS Y RESULTADOS</b>	<b>32</b>
6.1. Procedimiento . . . . .	32
6.2. Ajustes . . . . .	33
6.3. Ajustes introduciendo una normalización global . . . . .	41
<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	<b>49</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>51</b>
<b>Apéndices</b>	<b>54</b>
Mínimos cuadrados . . . . .	54
Reducción de un parámetro por medio del teorema óptico . . . . .	55
Identidad Mandelstam . . . . .	57

<b>Solución a la ecuación de tercer grado . . . . .</b>	<b>57</b>
<b>Estructura de código c++ para los ajustes . . . . .</b>	<b>59</b>
<b>Codigo c++ radio del protón en función de la energía . . . . .</b>	<b>68</b>

# LISTA DE FIGURAS

---

1.1. Mínimo de difracción mostrado en el interior del círculo de color rojo para datos TOTEM 7 TeV . . . . .	2
1.2. Se muestra una sobre-estimación en el mínimo de difracción a datos de $d\sigma_{el}/dt$ a una energía de centro de masa de 7 TeV. . . . .	3
2.1. El complejo de aceleradores en el CERN [12] . . . . .	5
2.2. El gran colisionador de hadrones y los detectores: CMS, ALICE, ATLAS y LHC-B.[13] . . . . .	6
2.3. Visión plurianual de la evolución de la luminosidad integrada. La luminosidad acumulada en el experimento ATLAS durante los años 2011, 2012, 2015, 2016 y 2017. En total ya suman más de $100 \text{ fb}^{-1}$ . La línea 2017 muestra no solo que el objetivo $50 \text{ fb}^{-1}$ fue alcanzado y superado, sino también la acumulación más rápida de todos los años [19]. . . . .	8
2.4. Luminosidad acumulada en el experimento CMS durante los años 2010, 2011, 2012, 2015, 2016 y 2017. En total ya suman alrededor de $125 \text{ fb}^{-1}$ [20]. . . . .	9
2.5. Se muestra el cambio en la forma del haz cuando atraviesa los cuadrupolos de enfoque y desenfoque y la variación de $\beta(s)$ en función de $s$ [15]. . . . .	10
2.6. Distribución normal, $\mu$ es la media de la distribución y $\sigma$ es la desviación estándar. . . . .	10
2.7. Se muestra la sección $\sigma$ y la función de amplitud $\beta$ [21]. . . . .	11
2.8. La figura a la izquierda muestra el contenedor, la central tiene un corte vertical con el propósito de mostrar su contenido (los detectores), y la figura a la derecha muestra el tubo del acelerador con una RPs incrustada [12]. . . . .	12
2.9. El experimento TOTEM y el detector CMS, las estaciones RPs se ubican a 220 m y 147 aproximadamente del punto de interacción IP5, también se muestran los telescopios $T_1$ y $T_2$ ubicados a pocos metros de IP5, estos telescopios reconstruyen el vértice de la interacción usando detectores perpendiculares al haz de partículas [21]. . . . .	13
3.1. Dispersión clásica, con parámetro de impacto $b$ y ángulo de dispersión $\theta$ .	16
3.2. Partículas que inciden en una pequeña área $d\sigma$ y son desviadas en un ángulo sólido $d\Omega$ [23]. . . . .	16

3.3.	La figura muestra un potencial dispersor localizado. En la región de dispersión (sombreado oscuro) el potencial es diferente de cero, en la región intermedia $V(r)$ puede ser ignorado pero el término del momento angular orbital no puede ignorarse, y en la región externa tanto el término del momento angular orbital como el potencial pueden ignorarse. . . . .	18
3.4.	(a) canal $s$ . (b) canal $t$ . (c) canal $u$ . . . . .	20
3.5.	El sistema centro de masa, $\theta$ es el ángulo de dispersión. . . . .	20
3.6.	El diagrama de Mandelstam que muestra las regiones físicas (regiones sombreadas) de los canales $s$ , $t$ , y $u$ para masas iguales. . . . .	21
3.7.	Aporte porcentual a $d\sigma/dt$ de la amplitud de dispersión de Coulomb, nuclear e interferencia nuclear-Coulomb . . . . .	23
4.1.	Contornos de integración para la transformación de Sommerfeld Watson. Los $\alpha_i$ son polos de Regge [4]. . . . .	27
4.2.	La sección eficaz total para colisiones protón-protón y protón-antiprotón, en ella se muestra como $\sigma_{tot}$ aumenta considerablemente conforme $\sqrt{s}$ aumenta. [4] . . . . .	28
6.1.	Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a $\sqrt{s} = 4.62$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	35
6.2.	Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a $\sqrt{s} = 9.78$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	35
6.3.	Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a $\sqrt{s} = 13.76$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	35
6.4.	Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a $\sqrt{s} = 19.4$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	35
6.5.	Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a $\sqrt{s} = 23.5$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	36
6.6.	Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a $\sqrt{s} = 30.7$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	36
6.7.	Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a $\sqrt{s} = 44.7$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	36
6.8.	Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a $\sqrt{s} = 53$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	36

6.9.	Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a $\sqrt{s} = 62.5$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	37
6.10.	Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a $\sqrt{s} = 7000$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	37
6.11.	Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones antiprotón-protón a $\sqrt{s} = 19.4$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	37
6.12.	Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones antiprotón-protón a $\sqrt{s} = 53$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	37
6.13.	Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones antiprotón-protón a $\sqrt{s} = 546$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	38
6.14.	Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones antiprotón-protón a $\sqrt{s} = 630$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	38
6.15.	Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones antiprotón-protón a $\sqrt{s} = 1800$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	38
6.16.	Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones antiprotón-protón a $\sqrt{s} = 1960$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	38
6.17.	La dependencia de $r_p$ en $GeV^{-1}$ del $\ln(\sqrt{S/S_0})$ . . . . .	39
6.18.	La dependencia de $\alpha'$ en $GeV^{-2}$ del logaritmo del logaritmo del logaritmo de $(\sqrt{s/s_0})$ . . . . .	39
6.19.	La dependencia de $A$ de $\sigma_{tot}$ . La curva es el modelo de predicción y está dada por la parametrización (6.6) . . . . .	42
6.20.	La dependencia de $A$ de $\sqrt{s}$ . La curva es el modelo de predicción y está dada por la parametrización (6.7) . . . . .	42
6.21.	Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a $\sqrt{s} = 4.62$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	43
6.22.	Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a $\sqrt{s} = 9.78$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	43
6.23.	Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a $\sqrt{s} = 13.76$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	44
6.24.	Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a $\sqrt{s} = 19.4$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	44

6.25. Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a $\sqrt{s} = 23.5$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	44
6.26. Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a $\sqrt{s} = 30.7$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	44
6.27. Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a $\sqrt{s} = 44.7$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	45
6.28. Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a $\sqrt{s} = 53$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	45
6.29. Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a $\sqrt{s} = 62.5$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	45
6.30. Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a $\sqrt{s} = 7000$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	45
6.31. Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones antiprotón-protón a $\sqrt{s} = 19.4$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	46
6.32. Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones antiprotón-protón a $\sqrt{s} = 7000$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	46
6.33. Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones antiprotón-protón a $\sqrt{s} = 546$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	46
6.34. Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones antiprotón-protón a $\sqrt{s} = 630$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	46
6.35. Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones antiprotón-protón a $\sqrt{s} = 1800$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	47
6.36. Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones antiprotón-protón a $\sqrt{s} = 1960$ GeV. La curva es el modelo $qQ$ con pomerón elástico en todo el rango de $ t $ . . . . .	47
6.37. La dependencia de $r_p$ en $\text{GeV}^{-1}$ de $\ln(\sqrt{s/s_o})$ . . . . .	47

# LISTA DE TABLAS

---

6.1.	Se muestran los valores obtenidos de $\alpha'$ usados en los ajustes en colisiones protón(antiprotón)-protón. . . . .	40
6.2.	Se muestran los parámetros obtenidos y los valores para $\sigma_{tot}$ , $\sqrt{s}$ y $\alpha'$ usados en los ajustes en colisiones protón-protón. . . . .	41
6.3.	Se muestran los parámetros obtenidos y los valores para $\sigma_{tot}$ , $\sqrt{s}$ y $\alpha'$ usados en los ajustes en colisiones antiprotón-protón. . . . .	41
6.4.	Parámetro normalización global colisiones protón-protón. . . . .	42
6.5.	Parámetro normalización global en colisiones antiprotón-protón. . . . .	42
6.6.	En la tabla se muestran parámetros obtenidos en los ajustes protón-protón y los valores para $\sigma_{tot}$ y $\sqrt{s}$ usados en los ajustes. . . . .	48
6.7.	En la tabla se muestran parámetros obtenidos en los ajustes antiprotón-protón y los valores para $\sigma_{tot}$ y $\sqrt{s}$ usados en los ajustes. . . . .	48

# GLOSARIO

---

- Bosón:** Partícula con espín entero, portadora de una de las cuatro interacciones fundamentales de la materia.
- Quark:** Constituyentes fundamentales de la materia. Poseen espín semi-entero.
- Diquark:** Cuasi-partícula, estado de dos quarks
- CERN:** Centro Europeo para la investigación nuclear
- Fermión:** Partícula con spín semi-entero
- Hadrón:** Partícula subatómica que se compone de dos o tres quarks.
- Fotón:** partícula mediadora (de la fuerza) en las interacciones electromagnéticas.
- Gluón:** partícula mediadora (de la fuerza) en las interacciones fuertes.
- Cromodinámica cuántica (QCD):** Teoría cuántica de campos que describe las interacciones fuertes.
- Pomerón:** Trayectoria de Regge con intercepto mayor a 1.
- Polos:** Singularidades en el plano complejo.
- Dispersión:** Alteración en la trayectoria de una partícula como consecuencia de una interacción .

# INTRODUCCIÓN

---

---

Actualmente se sabe que los quarks tienen carga eléctrica y carga de color: rojo ( R ), verde ( G ) o azul ( B ), de modo que interactúan por intercambio de fotones (fuerza eléctrica) y por intercambio de gluones (fuerza fuerte), que también generan acoplamientos gluón-gluón debido a que tienen carga de color [1]. Los quarks son los constituyentes de los hadrones (por ejemplo, protones y neutrones), y por lo tanto, también están gobernados por la interacción fuerte; tema de estudio de la cromodinámica cuántica (QCD). El acoplamiento directo gluón-gluón hace que la QCD sea mucho más complicada que la electrodinámica cuántica (QED), pero también mucho más rica, permitiendo, por ejemplo, la posibilidad de glueballs (estados ligados solamente entre gluones) [2]. Por otro lado, cuando se estudian las interacciones entre partículas elementales, al calcular las amplitudes de dispersión a orden superior utilizando la técnica de los diagramas de Feynman, nos encontramos con integrales que divergen. Para solucionar este problema, se hace necesario renormalizar la constante de acoplamiento ( $\alpha_s$ ), el cual permite hacer cálculos perturbativos siempre que  $\alpha_s < 1$  (región perturbativa). De esta manera, en un proceso hadrónico, el régimen perturbativo consistirá en calcular las interacciones entre los constituyentes de los hadrones a partir de los diagramas de Feynman. Mientras que el comportamiento no perturbativo para el cual  $\alpha_s > 1$  es estudiado a partir de modelos fenomenológicos, como por ejemplo la teoría de Regge [1].

Uno de los escenarios donde se analizan procesos dispersivos de partículas elementales es en aceleradores de partículas. Los aceleradores más representativos son el TEVATRON y el gran colisionador de hadrones (LHC) en el CERN. El TEVATRON lleva ya varios años apagado (desde octubre de 2011), mientras que el LHC se encuentra en pleno funcionamiento y actualmente hace colisionar partículas hasta una energía de 13 TeV [3]. El LHC cuenta con diferentes experimentos para diferentes propósitos, entre estos nos encontramos con el experimento TOTEM ubicado cerca del detector CMS diseñado para medir la sección eficaz diferencial y total elástica en colisiones protón-protón. Adicionalmente TOTEM estudia dispersión difractiva, donde uno o ambos protones salen intactos después de la colisión, en este caso, colocando detectores a ambos lados del detector CMS para cubrir ángulos muy pequeños se puede verificar que se detecta un protón a un lado y no protón al otro lado, consistente con un evento de difracción simple. Si bien a altas energías los procesos dominantes son inelásticos, entre el 20% y 25% de las colisiones entre hadrones son elásticas, y su principal observable es la sección eficaz diferencial elás-

tica<sup>1</sup> ( $d\sigma_{el}/dt$ ). Las mediciones que existen para  $d\sigma_{el}/dt$  son más abundantes para colisiones  $pp$  y  $p\bar{p}$ , donde hay cubrimiento de energía desde unos pocos GeV hasta 7 TeV [4]. Del mismo modo, el cubrimiento para el cuadrado del momento transferido  $|t|$  va desde valores muy bajos de  $|t| \approx 0.0001 \text{ GeV}^2$  hasta  $|t| \approx 12 \text{ GeV}^2$ . A valores de  $|t| > 0.005 \text{ GeV}^2$  domina ampliamente la dispersión nuclear y se observa un decaimiento exponencial hasta llegar a un mínimo de difracción (Fig. 1.1), que es de interés porque significa interferencia entre amplitudes de dispersión que se presentan en la interacción nuclear. Posterior al mínimo de difracción se puede también apreciar un nuevo decaimiento exponencial con una pendiente más pequeña [4].

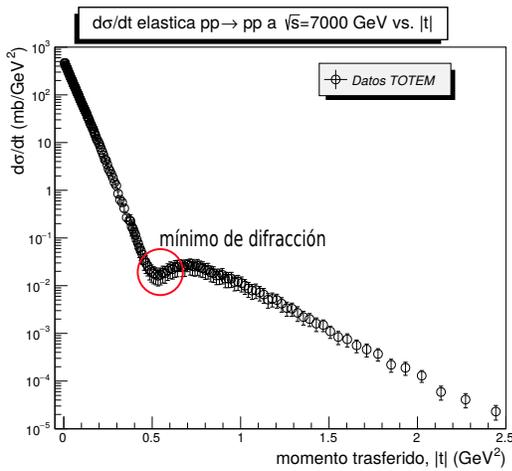


Figura 1.1: Mínimo de difracción mostrado en el interior del círculo de color rojo para datos TOTEM 7 TeV

Para la descripción de datos de  $d\sigma_{el}/dt$  registrados en los diferentes experimentos, entre ellos TOTEM en el acelerador LHC, existen muchos modelos fenomenológicos (Parte de estos modelos se basan en la teoría de Regge) que tratan de ajustar esta evidencia experimental y son mejorados conforme aumentan los datos que son accesibles, aproximándonos cada vez más a los fenómenos internos que ocurren en los hadrones en el momento de la colisión. De esto podemos inferir que la sección eficaz diferencial elástica es la herramienta que tenemos para poder descifrar la dinámica interna del proceso de dispersión elástica.

Medir  $d\sigma_{el}/dt$  nos permite obtener variables experimentales como: la sección eficaz elástica ( $\sigma_{el}$ ), la sección eficaz total ( $\sigma_{tot}$ ), el cociente entre la parte real e imaginaria de la amplitud de dispersión en la región frontal ( $\theta = 0$ )  $\rho$  y el parámetro de pendiente nuclear  $B$ . Estas variables se describen con más detalle en el capítulo 3 [4].

En el presente trabajo se tiene como objetivo encontrar una parametrización que permita describir la estructura de la sección eficaz diferencial elástica para colisiones protón-protón y protón-antiprotón para todos los rangos de energías superiores a los 20 GeV. Nuestro estudio está basado en la propuesta de Grichine [5], este modelo mejora la descripción de los datos en el mínimo de difracción que es donde el trabajo desarrollado en la referencia [6] falla en determinar su posición correcta (Fig. 1.2), introduciendo un nuevo parámetro empírico denominado la elasticidad del pomerón. Trataremos de familiarizar al lector en conceptos relevantes que fueron necesarios para el desarrollo de este proyecto. En principio, lo que se hizo fue un estudio crítico

<sup>1</sup>El subíndice en  $d\sigma_{el}/dt$  es para aclarar que se está hablando de la sección eficaz diferencial elástica ( $el$ )

<sup>2</sup>En el capítulo 3 hablaremos con un poco más detalle sobre esta variable.

a un modelo fenomenológico de dispersión elástica de nucleones, demostrando que la amplitud de dispersión propuesta por Grichine en [5] no ajusta correctamente los datos experimentales de  $d\sigma_{el}/dt$  en un cierto rango de energías en colisiones  $pp$  y  $p\bar{p}$ . Las ideas generales que se pueden inferir del modelo se extienden con un poco más de detalle en el capítulo 3, los demás capítulos se enfocan en conceptos de dispersión elástica, aceleradores de partículas y detectores, ajustes de datos, la presentación del modelo en estudio propuesto por Grichine, y algunas conclusiones (En este trabajo usamos el sistema de unidades naturales con  $\hbar = c = 1$ ).

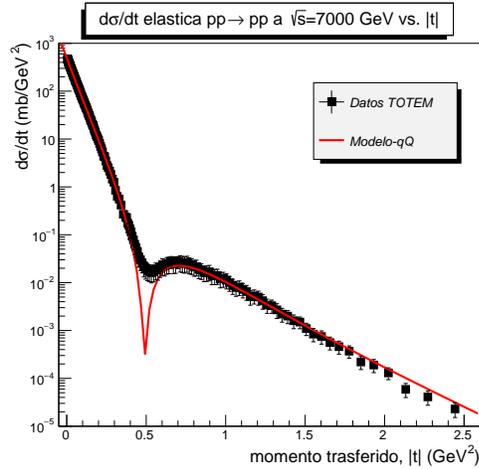


Figura 1.2: Se muestra una sobre-estimación en el mínimo de difracción a datos de  $d\sigma_{el}/dt$  a una energía de centro de masa de 7 TeV.

# DETECTORES Y ACELERADORES DE PARTÍCULAS

---

**E**n este capítulo hablaremos de manera resumida, de la máquina más poderosa hasta ahora creada por el hombre, el complejo acelerador en el centro europeo de investigación nuclear (CERN). Mencionaremos los detectores y aceleradores de partículas que lo componen y que sean más relevantes para el desarrollo de este trabajo. Inicialmente se describirá algunos aspectos relacionados con el laboratorio CERN y sus objetivos, después trataremos algunas generalidades acerca del funcionamiento de los detectores y aceleradores de partículas; destacaremos el gran colisionador de hadrones (LHC) y el experimento TOTEM.

## 2.1 Laboratorio CERN

El CERN, fundado en 1954, situado en la frontera entre Francia y Suiza cerca de Ginebra, es la organización Europea para la investigación nuclear, cuenta con muchas universidades y científicos de todo el mundo que participan activamente en los distintos experimentos. La principal área de investigación del CERN es la física de partículas: el estudio de los componentes fundamentales de la materia y las fuerzas que actúan entre ellos.

Físicos e ingenieros investigan la estructura fundamental del universo; utilizando los instrumentos científicos más grandes y complejos del mundo, estudian los componentes básicos de la materia, las partículas fundamentales. Los instrumentos utilizados en el CERN son los aceleradores de partículas: el acelerador lineal 2 (Linac 2), Proton Synchrotron Booster (PSB), Proton Synchrotron (PS), Super Proton Synchrotron (SPS), LHC, y los detectores: ALICE [7], ATLAS [19], CMS [20] y LHCb [10], diseñados específicamente. Los aceleradores aumentan la velocidad (cerca a la velocidad de la luz) de los haces de partículas antes de que se hagan chocar entre sí. Los resultados de estas colisiones (que proporcionan pistas a los físicos sobre cómo interactúan las partículas) son registrados por detectores ubicados en diferentes puntos de colisión [11].

## 2.2 Complejo acelerador

El complejo acelerador en el CERN (Fig. 2.1) es una sucesión de máquinas que aceleran las partículas a energías cada vez más altas. Cada máquina aumenta la energía de un haz de partículas, antes de ser inyectado a la siguiente máquina. En el LHC los haces de partículas se aceleran hasta una energía actual de 13 TeV.

La fuente de protones es un simple cilindro de gas hidrógeno. Un campo eléctrico “desliga” los electrones de los átomos de hidrógeno para producir protones. El Linac 2, un acelerador lineal, el primer acelerador en la cadena, acelera los protones a la energía de 50 MeV y luego los inyecta en el PSB, que acelera los protones a 1,4 GeV, seguido por el PS, que incrementa la energía del haz a 25 GeV. Los protones se envían entonces al SPS, donde se aceleran a una energía de 450 GeV y finalmente transferidos a los dos tubos del LHC, donde son acelerados a una energía total en el punto de colisión de 13 TeV[3].

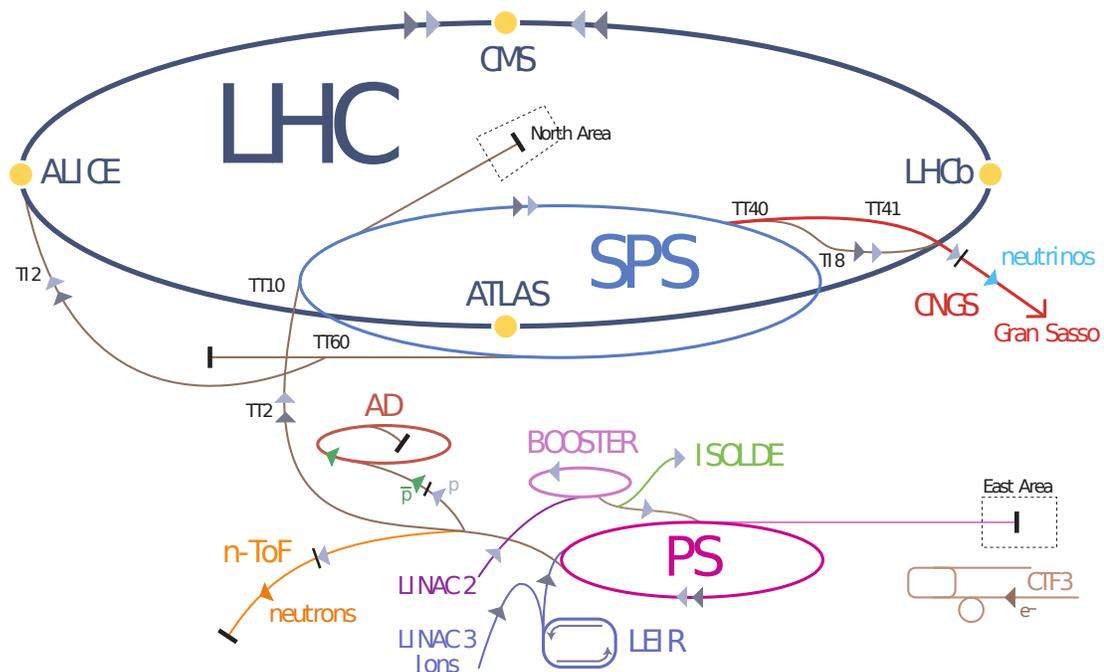


Figura 2.1: El complejo de aceleradores en el CERN [12]

## 2.3 Gran colisionador de hadrones (LHC)

El LHC es el acelerador de partículas más grande y potente del mundo, se puso en operación por primera vez el 10 de septiembre de 2008. Es el último acelerador de la gran cadena de aceleradores del CERN, consiste de un anillo de 26659 metros aproximadamente de imanes superconductores<sup>3</sup> con una serie de estructuras de aceleración

<sup>3</sup>Estos imanes (o más bien dicho electroimanes) formados por bobinas de cables superconductores, operan a una temperatura de 1.9K. Para mantener la superconductividad en los cables de las

para aumentar la energía de las partículas a lo largo del camino.

Dentro del acelerador, dos haces de partículas de alta energía viajan con velocidades cercanas a la velocidad de la luz antes de que se hagan colisionar. Los haces viajan en direcciones opuestas en tubos separados mantenidos en ultra vacío ( $\sim 10^{-11}$  mbar), guiados alrededor del anillo del acelerador por un campo magnético de 8.3 T (a una energía de 7 TeV) que es mantenido por los electroimanes superconductores<sup>4</sup> que se encuentran a una temperatura de 1.9 Kelvin. En el recorrido, miles de imanes<sup>5</sup> se utilizan para dirigir los haces alrededor del acelerador, 1232 magnetos dipolares curvan los haces, y 392 imanes cuadrupolos enfocan los haces[11].

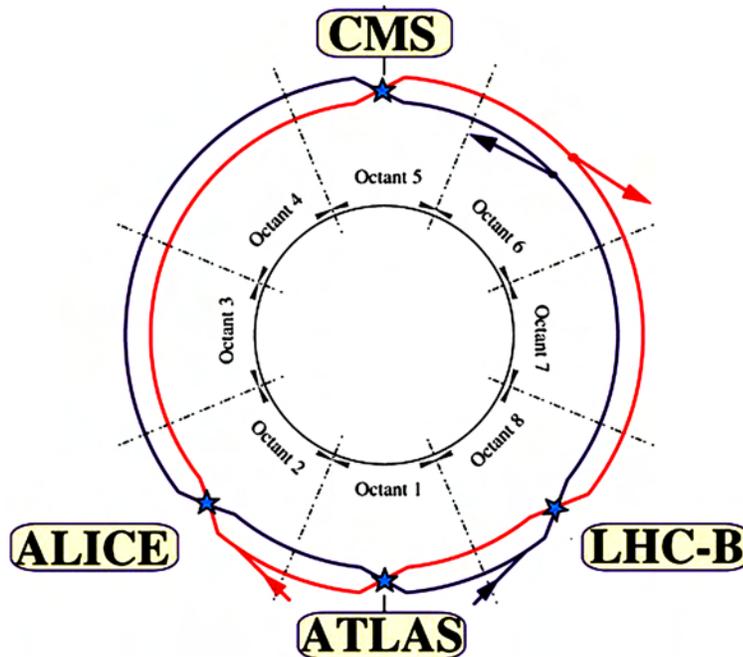


Figura 2.2: El gran colisionador de hadrones y los detectores: CMS, ALICE, ATLAS y LHC-B.[13]

Existen siete experimentos en el gran colisionador de hadrones: ATLAS, CMS, ALICE, LHCb, TOTEM, LHCf y MoEDAL, y son los encargados de analizar la

bobinas que forman los electroimanes, se enfrían con nitrógeno líquido y helio hasta una temperatura de 1.9K. El proceso se hace en dos fases, primero se hace circular nitrógeno líquido dentro del cuerpo del dipolo a fin de que la temperatura descienda a 80k y después se añade helio líquido para pasar de los 80k a 4k. Finalmente, disminuyendo la presión del helio hasta 15 milibares, se produce la caída hasta 1.9K

<sup>4</sup>A las energías del haz del LHC, las corrientes eléctricas son extremadamente altas, hasta 12000 Amperios, y se deben usar cables superconductores. La superconductividad es un fenómeno de baja temperatura, por lo que las bobinas tienen que mantenerse muy frías, 1.9 Kelvin, o aproximadamente  $-271$  °C

<sup>5</sup>Hay una gran variedad de imanes en el LHC, incluidos dipolos, cuadrupolos, sextupolos, octopoles, dcapoles, etc. Dando un total de 9600 imanes. Cada tipo de iman contribuye a optimizar la trayectoria de una partícula.

gran cantidad de partículas producidas por colisiones en el acelerador. Entre los experimentos más grandes; ATLAS y CMS, son utilizados para investigar la física del bosón de Higgs, búsquedas de física más allá del modelo estándar, como supersimetría, física exótica, desviaciones del modelo estándar y dimensiones extras. ALICE está diseñado para estudiar la física de la materia que interactúa fuertemente en densidades de energía extremas, donde se forma una fase de la materia llamada plasma de quark-gluón [16]. El experimento LHCb se especializa en investigar las diferencias entre materia y antimateria, estudiando un tipo de partícula llamada “beauty quark” [17]. En los experimentos pequeños, TOTEM mide la sección eficaz total p-p y estudia la dispersión elástica y difractiva en el LHC. LHCf estudia las secciones eficaces para la producción de partículas neutras generadas en direcciones prácticamente paralelas a la de los haces de nucleones, sus detectores pueden medir con gran precisión el número y energía de los piones neutros y otras partículas producidas en las direcciones frontales. Este experimento es importante para la comprensión de las cascadas de partículas producidas en la atmósfera como consecuencia de las colisiones de los rayos cósmicos de gran energía. Finalmente, MoEDAL [18] busca una partícula hipotética llamada monopolio magnético, partícula elemental constituida por un solo polo magnético. De existir en la naturaleza, sería el equivalente a una “carga magnética” en el campo magnético, tal y como ocurre con la carga eléctrica en el caso del campo eléctrico. La figura 2.2 muestra el anillo LHC y sus cuatro detectores más imponentes: CMS, ALICE, ATLAS y LHC-B[11].

Los protones dentro del acelerador circulan en grupos denominados “bunches”. Cada bunche contiene alrededor de  $\sim 10^{11}$  protones, y en condiciones de operatividad nominal cada haz tiene 2808 bunches recorriendo el tubo del LHC. Durante el recorrido, cada bunche cambia su tamaño ya sea comprimiéndose o expandiéndose (7.48 cm de longitud y con  $1 \text{ mm}^2$  de área transversal, cuando están lejos de zonas de interacción) debido a los campos magnéticos generados por los imanes, entre estos están los cuadrupolos que enfocan el haz de partículas. En el punto de interacción, estos bunches se comprimen lo máximo posible con el propósito de obtener el mayor número de colisiones entre los hadrones. El espacio entre los bunches es de aproximadamente 7.48 m y viajan casi a la velocidad de la luz ( $v = 0.999999991c$ ), entonces:  $v = (0.999999991)(299792458) = 299792455 \text{ m/s}$ . Del mismo modo, la diferencia de tiempo entre bunches es:  $7.48/299792455 \approx 25 \text{ ns}$  y la frecuencia de cruce sería entonces de:  $1/(25 \text{ ns}) = 40 \text{ MHz}$ , esto implica que cada 25 ns tendríamos colisiones entre bunches. Por otra parte, para un bunche tendríamos:  $299792455/26659 \approx 11245$  de cruces en un segundo, por lo que para 2808 bunches tendríamos:  $(11245)(2808) \approx 32$  millones de cruces por segundo. En cada cruce se tienen alrededor de 20 colisiones, así:  $(20)(32 \times 10^6) = 640$  millones de colisiones por segundo [11].

## Luminosidad

La luminosidad ( $\mathcal{L}$ ) en un acelerador, es una medida del flujo de protones que inciden en el punto de colisión por unidad de área (en  $\text{cm}^2$ ) y por unidad de tiempo (en s).

El valor de  $\mathcal{L}$  en el LHC es de  $10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ .  $\mathcal{L}$  se puede expresar como:

$$\mathcal{L} = f \frac{N_1 N_2}{4\epsilon\beta^*}, \quad (2.1)$$

donde  $N_1$ ,  $N_2$  son el número de protones en los bunches,  $f$  es la frecuencia de cruce,  $\epsilon$  es la emitancia y  $\beta^*$  es la función de amplitud en el punto de interacción. Estas cantidades las explicaremos en breve. La integral de la luminosidad sobre un intervalo de tiempo se llama **Luminosidad integrada** ( $L$ ), y da una idea del número de colisiones que han sucedido en la ventana de tiempo estudiada. La expresión para la luminosidad integrada es:

$$L = \int \mathcal{L} d\tau \quad (2.2)$$

donde  $\tau$  es el tiempo.  $L$  se mide en unidades inversas de sección eficaz (como por ejemplo: 1/femtobarns ó  $\text{fb}^{-1}$ ).

La figura 2.3 muestra la Luminosidad Integrada alcanzada en uno de los experimentos del LHC (ATLAS), a energías entre 7 TeV y 13 TeV en colisiones protón-protón, durante los años 2011, 2012, 2015, 2016 y 2017.

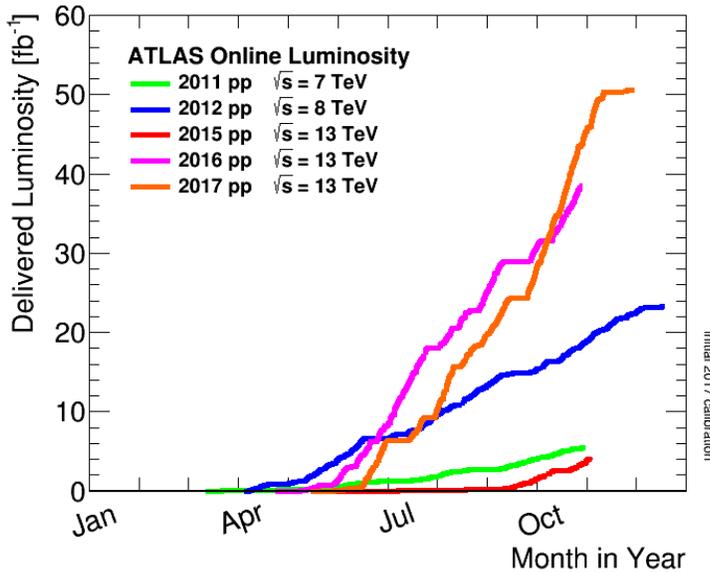


Figura 2.3: Visión plurianual de la evolución de la luminosidad integrada. La luminosidad acumulada en el experimento ATLAS durante los años 2011, 2012, 2015, 2016 y 2017. En total ya suman más de  $100 \text{ fb}^{-1}$ . La línea 2017 muestra no solo que el objetivo  $50 \text{ fb}^{-1}$  fue alcanzado y superado, sino también la acumulación más rápida de todos los años [19].

Desde que se produjeron las primeras colisiones en el año 2010, en el LHC se ha acumulado un total de luminosidad integrada de más de  $100 \text{ fb}^{-1}$  (equivalente a unas diez mil billones de colisiones protón-protón). En el año 2011, ATLAS recolectó poco más de  $5 \text{ fb}^{-1}$  a una energía de 7 TeV. En el año 2012 se producen más de

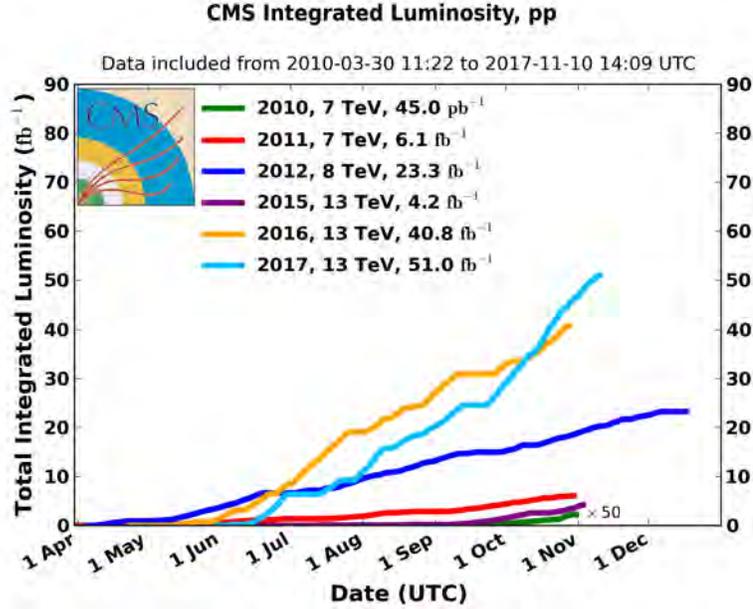


Figura 2.4: Luminosidad acumulada en el experimento CMS durante los años 2010, 2011, 2012, 2015, 2016 y 2017. En total ya suman alrededor de  $125 \text{ fb}^{-1}$  [20].

$25 \text{ fb}^{-1}$  a una energía de 8 TeV (Momento en el que se había acumulado suficiente información para dar luz al bosón de Higgs). En los años 2013 y 2014 se alcanzó la energía de centro de masa 13 TeV. En el año 2015, la luminosidad acumulada no llegó a los  $5 \text{ fb}^{-1}$  y en el 2016 se alcanzó la cifra récord de  $39 \text{ fb}^{-1}$ . Este año se alcanzó los  $50 \text{ fb}^{-1}$ . De igual manera, en la figura 2.4 se puede ver la luminosidad acumulada en el experimento CMS entre los años 2010 y 2017, los resultados son similares a los del experimento ATLAS.

## Funciones ópticas

La órbita ideal para un haz de partículas cargadas, se denomina, trayectoria de referencia  $s$ . Como consecuencia de la desviación del haz con respecto a su trayectoria de referencia  $s$ , se producen oscilaciones en los planos transversales al haz de partículas. La dinámica del haz puede describirse mediante la ecuación de Hill [14]. La solución horizontal<sup>6</sup> para la ecuación de movimiento de Hill para una partícula es:

$$x(s) = \sqrt{\epsilon} \sqrt{\beta(s)} \cos(\psi(s)), \quad (2.3)$$

donde

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{d\lambda}{\beta(\lambda)}, \quad \lambda \text{ es un parámetro de integración} \quad (2.4)$$

y  $\beta(s)$  son funciones ópticas y  $\epsilon$  se definirá en breve como la emitancia .

Diferenciando la ecuación (2.3) con respecto a  $s$  obtenemos:

<sup>6</sup>Por simplicidad se ha considerado únicamente las oscilaciones a largo del eje de referencia  $x$

$$x'(s) = -\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\beta(s)}} \left\{ -\frac{\beta'(s)}{2} \cos[\psi(s)] + \text{sen}[\psi(s)] \right\} \quad (2.5)$$

A partir de las ecuaciones (2.3) y (2.5) se puede obtener la expresión:

$$\gamma x^2 + 2\alpha x x' + x'^2 = \epsilon \quad (2.6)$$

donde  $\gamma(s) = \frac{1+\alpha^2(s)}{\beta(s)}$  y  $\alpha(s) = -\frac{d\beta(s)/ds}{2}$ . Si graficamos la ecuación (2.6) en el espacio de fase  $(x, x')$  en cualquier punto de la trayectoria  $s$  se obtiene una elipse. La figura 2.5 muestra como cambia la forma de la elipse al atravesar los cuadrupolos de enfoque (F) o desenfoco (D), también se puede ver la variación de  $\beta(s)$  en función de  $s$  [15]

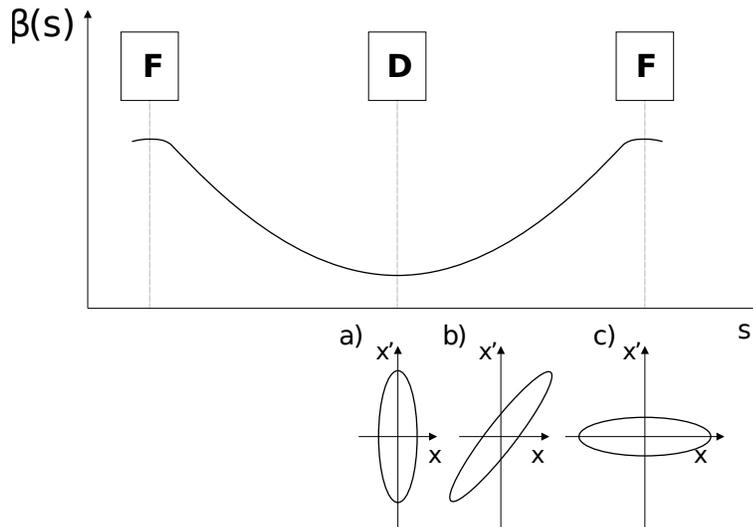


Figura 2.5: Se muestra el cambio en la forma del haz cuando atraviesa los cuadrupolos de enfoque y desenfoco y la variación de  $\beta(s)$  en función de  $s$  [15].

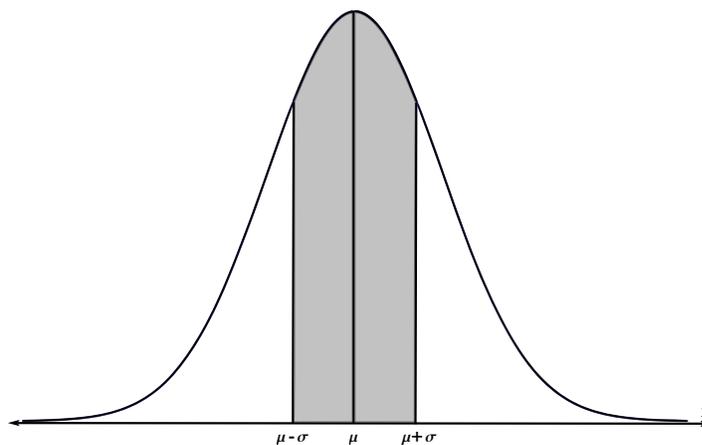


Figura 2.6: Distribución normal,  $\mu$  es la media de la distribución y  $\sigma$  es la desviación estándar.

La emitancia del haz de partículas se define de forma estadística: es el área de la elipse que contiene las partículas dentro de una desviación estándar ( $\sigma$ ) alrededor de la media de la distribución normal o Gaussiana (región sombreada figura 2.6)[14]. así, la emitancia para un haz de partículas es:

$$\epsilon = \frac{\sigma^2(s)}{\beta(s)}. \quad (2.7)$$

La emitancia ( $\epsilon$ ) es la propiedad de un haz de partículas que caracteriza su tamaño. Un haz con baja emitancia, es un haz en el que las partículas confinadas están muy agrupadas. En un acelerador, mantener una emitancia pequeña significa que la probabilidad de interacción será grande, lo que resulta en una alta luminosidad. La unidad de  $\epsilon$  es la longitud, pero habitualmente se expresa como longitud por ángulo; por ejemplo, milímetros por miliradianes.

Por otra parte, la función de amplitud,  $\beta(s)$ , está determinada por la configuración de los imanes del acelerador (básicamente por la configuración del sistema cuadrupolar magnético). Tomando  $\sigma(s)$  y la emitancia transversal  $\epsilon$ , la función de amplitud  $\beta(s)$  puede expresarse así:

$$\beta(s) = \frac{\sigma^2(s)}{\epsilon} \quad (2.8)$$

Por tanto,  $\beta(s)$  puede representar la anchura del haz dividida por la  $\epsilon$ . Si el valor de  $\beta(s)$  es bajo, el haz es más estrecho y compactado. Si el valor es alto, el haz es ancho.  $\beta(s)$  tiene unidades de longitud, y a veces se relaciona con la distancia desde el punto en el que el haz tiene el doble de anchura que en el punto de interacción (Fig. 2.7). si  $\beta(s)$  es pequeña, quiere decir que el ancho del haz se redujo rápidamente a la mitad.

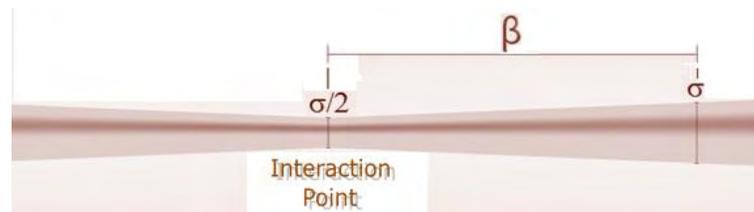


Figura 2.7: Se muestra la sección  $\sigma$  y la función de amplitud  $\beta$  [21].

### Algunos parámetros importantes de operación del LHC

A continuación se muestran algunos de los más importantes parámetros de LHC a una energía de 7 TeV en colisiones protón-protón.

- Circunferencia: 26659 m
- Temperatura de operación dipolos: 1.9 K (-271.3°C)
- Número total de imanes: 9593
- Número de dipolos principales: 1232
- Número de cuadrupolos principales: 392
- Número de cavidades de radiofrecuencia (RF): 8 por haz

- Energía Nominal, protones: 7 TeV
- Campo magnético a 7 TeV: 8.33 T
- Distancia entre bunches: 7.5 m
- Luminosidad:  $10^{34} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$
- Número de bunches por haz de protones: 2808
- Número de colisiones por segundo: 640 Millones
- Energía del haz inyectado: 450 GeV (protones)
- Inyector: SPS

## 2.4 Experimento TOTEM

El TOTEM (TOTAl cross section, Elastic scattering and diffraction dissociation Measurement at the LHC), es un experimento pequeño (cerca del detector CMS) comparado con los que forman parte del LHC y su principal objetivo es medir la sección eficaz total ( $\sigma_{tot}$ ) y diferencial protón-protón. Ahora bien, a medida que se incrementa la energía de colisión, los ángulos de dispersión ( $\theta$ ) son muy pequeños pero importantes para poder determinar  $\sigma_{tot}$  (por ejemplo,  $\sim 0.1 \mu\text{rad}$  para un valor de  $|t| = 0.05 \text{ GeV}^2$  y de  $\sqrt{s} = 13000 \text{ GeV}$ ). Para poder medir ángulos de dispersión tan pequeños se usa la tecnología de ollas romanas (RPs) que consisten en detectores sofisticados ubicados en el interior de unos contenedores cilíndricos (a estos contenedores se les nombra como “Ollas Romanas”) de acero que se incrustan dentro del tubo del acelerador (Fig. 2.8) [4]. Los detectores en el interior del tubo registran las coordenadas  $(x, y)$  de las partículas cuando estas llegan a ellos con una resolución de  $100 \mu\text{m}$ . Las ollas romanas deben ser empujadas muy cerca de la trayectoria del haz (hasta unos pocos milímetros) para poder obtener las coordenadas correspondientes de las partículas cuyos ángulos de dispersión son sumamente pequeños.

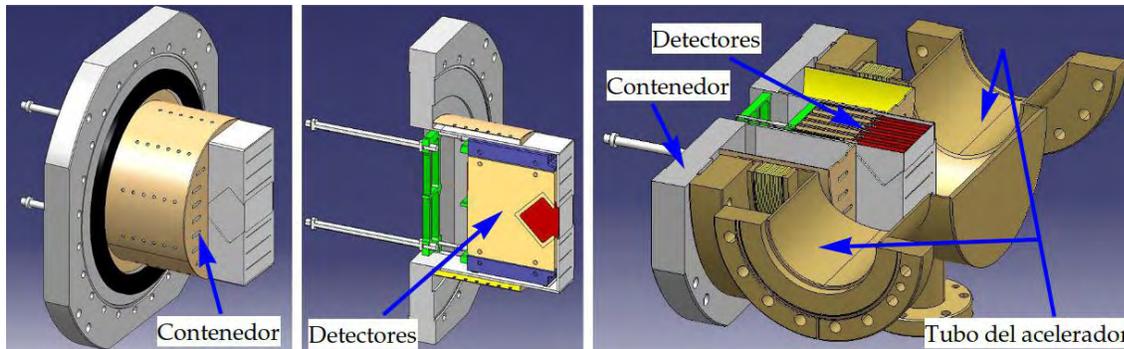


Figura 2.8: La figura a la izquierda muestra el contenedor, la central tiene un corte vertical con el propósito de mostrar su contenido (los detectores), y la figura a la derecha muestra el tubo del acelerador con una RPs incrustada [12].

Para estudiar dispersión elástica, lo mejor es medir el ángulo con que salen los protones a ambos lados del punto de interacción (IP5), para eventos elásticos, ese ángulo debe ser el mismo, entonces, la medición del ángulo ayuda a sustraer eventos de background. De este modo, se hace necesario colocar estaciones de ollas romanas

(lejos, alrededor de 147m y 220m aproximadamente) de manera simétrica a ambos lados de IP5, con por lo menos un par de cada lado separadas por una distancia de 4 metros (Fig. 2.9)[4].

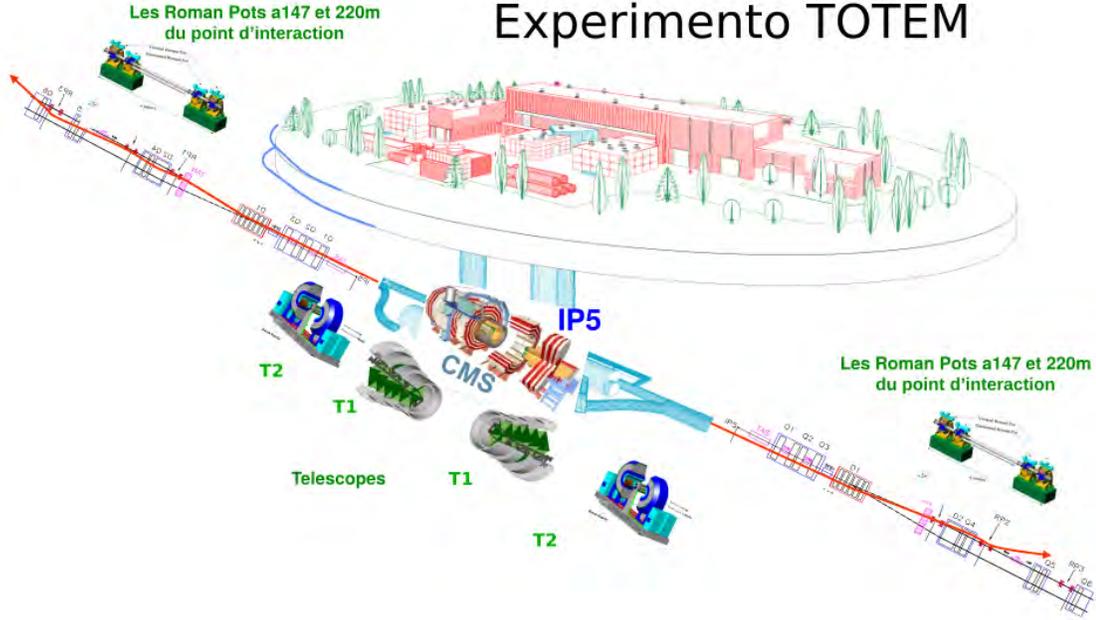


Figura 2.9: El experimento TOTEM y el detector CMS, las estaciones RPs se ubican a 220 m y 147 aproximadamente del punto de interacción IP5, también se muestran los telescopios T<sub>1</sub> y T<sub>2</sub> ubicados a pocos metros de IP5, estos telescopios reconstruyen el vértice de la interacción usando detectores perpendiculares al haz de partículas [21].

Para poder obtener el ángulo con el que las partículas salen dispersadas es necesario conocer la óptica del haz, y de este modo, se pueden establecer las relaciones:

$$\begin{aligned} x_i &= M_{x,i}x_0 + L_{x,i}\theta_x \\ y_i &= M_{y,i}y_0 + L_{y,i}\theta_y, \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde  $(x_i, y_i)$  son las coordenadas de la partícula en un detector y  $(x_0, y_0)$ ,  $(\theta_x, \theta_y)$  las coordenadas y el ángulo de dispersión en el punto de interacción.  $M_{x,i}$ ,  $L_{x,i}$ ,  $(M_{y,i}, L_{y,i})$  son funciones de transporte de las partículas desde el punto de interacción hasta el detector en el eje horizontal (vertical) dependientes de campos eléctricos y magnéticos [4]. Si las interacciones se dan exactamente en el punto  $(0,0)$  entonces  $(x_0 = y_0 = 0)$  y la ecuación (2.9) es de la forma:

$$\begin{aligned} x_i &= L_{x,i}\theta_x \\ y_i &= L_{y,i}\theta_y \end{aligned} \quad (2.10)$$

y el ángulo de dispersión puede obtenerse de manera simple:

$$\begin{aligned}\theta_x &= \frac{x_i}{L_{x,i}} \\ \theta_y &= \frac{y_i}{L_{y,i}}\end{aligned}\tag{2.11}$$

A  $L_{y,i}$  comúnmente se le llama distancia efectiva.

# DISPERSIÓN ELÁSTICA

---

---

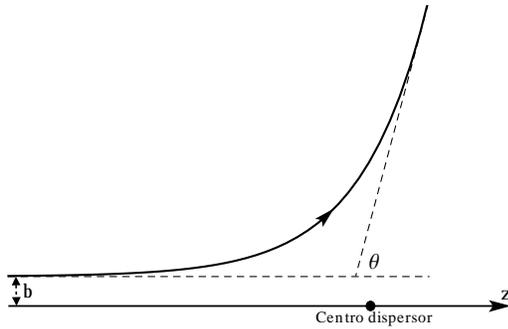
Cuando estudiamos interacciones electromagnéticas, podemos utilizar con gran éxito la ecuación de Schrödinger para describir sistemas atómicos y moleculares porque se puede conocer el Hamiltoniano de interacción en cada caso. Sin embargo, si queremos aplicar esta ecuación a la descripción de sistemas nucleares o, más general, a la interacción entre partículas elementales, la primera dificultad de importancia con la que tropezamos, es que las interacciones entre ellas no son necesariamente electromagnéticas, también pueden existir interacciones fuertes o débiles, cuya descripción está dada por las teorías de la cromodinámica cuántica y electrodébil que en algunas ocasiones, cuando el momento transferido en la colisión es bajo, pueden presentar resultados divergentes y por ende una descripción inadecuada de la dinámica de la colisión.

Dado que las partículas elementales son extremadamente diminutas, el único método de exploración que hay para investigar la dinámica de sus interacciones y su dependencia de los diversos parámetros (energía, momento orbital, espines, distancias relativas, etc.), consiste en hacer colisionar partículas y hacer el subsecuente análisis de los resultados de la interacción ocurrida en circunstancias controladas. Por ejemplo, éste fue el método utilizado por Rutherford en los trabajos que culminaron con el establecimiento del modelo atómico. Este ejemplo es importante porque muestra que mediante experimentos de dispersión de partículas debido a centros dispersores conocidos podemos no sólo averiguar la naturaleza y particularidades de la interacción, sino también, lo que es muy importante, determinar la estructura de los elementos involucrados en el proceso dispersivo. Así, por ejemplo, fue posible averiguar la estructura electromagnética de los nucleones, bombardeándolos con partículas cargadas [22].

Un proceso de dispersión puede ser de tipo elástico o inelástico. En el primer caso, las partículas (protones para nuestro trabajo) quedan intactas después de una colisión, sufriendo una pequeña desviación con respecto a sus trayectorias iniciales pero manteniendo la magnitud de su momento inicial y conservando todos sus números cuánticos [4]. En el segundo caso, el estado interno de las partículas se modifica, pueden darse fenómenos de excitación o ionización, transformación de unas partículas en otras, creación de nuevas partículas como resultado de la colisión. Para el desarrollo de este trabajo nos enfocaremos únicamente en los procesos elásticos.

### 3.1 Estudio de dispersión desde mecánica clásica

Cuando una partícula incide sobre un centro dispersor ubicado en el origen de coordenadas (podría ser un protón disparado contra un núcleo pesado) con energía  $E$  y parámetro de impacto  $b$ , ésta se desvía de su trayectoria inicial con un ángulo de dispersión  $\theta$  (Fig. 3.1)<sup>7</sup>. El parámetro de impacto  $b$  es la distancia perpendicular entre la trayectoria de la partícula y el eje  $z$  que pasa por el centro dispersor [23].



De modo más general, si un haz de partículas incide dentro de un área infinitesimal  $d\sigma$ , este será dispersado en un correspondiente ángulo sólido infinitesimal  $d\Omega$  (Fig. 3.2). Cuanto más grande sea  $d\sigma$ , mayor será  $d\Omega$ ; El factor de proporcionalidad  $D(\theta) \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega}$ , se denomina sección eficaz diferencial:

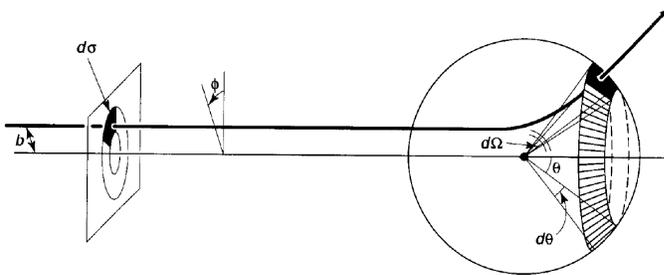
Figura 3.1: Dispersión clásica, con parámetro de impacto  $b$  y ángulo de dispersión  $\theta$ .

$$d\sigma = D\theta d\Omega \quad (3.1)$$

En términos del parámetro de impacto y del ángulo azimutal  $\phi$ ,  $d\sigma = b db d\phi$  y  $d\Omega = \text{sen}\theta d\theta d\phi$ , así:

$$D(\theta) = \frac{b}{\text{sen}\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (3.2)$$

El valor absoluto se debe a que  $\frac{db}{d\theta}$  siempre será negativo<sup>8</sup>, esto contradice la unidad de medida de la sección eficaz (barn =  $10^{-24}$  cm<sup>2</sup>), el cual corresponde a una unidad de área, no puede ser negativa. Por otro lado,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , luego,  $\text{sen}\theta \geq 0$ .



La sección eficaz total ( $\sigma$ ) es la integral de  $D(\theta)$  sobre todos los ángulos sólidos:

$$\sigma = \int D(\theta) d\Omega, \quad (3.3)$$

Figura 3.2: Partículas que inciden en una pequeña área  $d\sigma$  y son desviadas en un ángulo sólido  $d\Omega$  [23].

y es el área transversal total del haz incidente que es dispersado por el blanco.

<sup>7</sup>Se supone por simplicidad que el objetivo es azimutalmente simétrico, por lo que la trayectoria permanece en un plano, y que el objetivo es muy pesado, por lo que el retroceso de este es despreciable.

<sup>8</sup>Porque cuando  $b$  crece el ángulo de dispersión  $\theta$  se hace más pequeño

Por ejemplo, si el centro dispersor es una esfera solida de radio  $R$ , la sección eficaz total es,  $\sigma = \pi R^2$ . Que es justamente el área transversal de la esfera.

## 3.2 Tratamiento cuántico de dispersión

En mecánica cuántica ya no se habla de partículas si no de funciones de onda que describen el estado de la partícula. por lo tanto, cuando una onda plana incide sobre un potencial dispersor (simétricamente esférico en  $\phi$ ), el resultado como consecuencia de esta interacción es una onda esférica, la función que describe este proceso en la región asintótica<sup>9</sup> ( $r \rightarrow \infty$ ) puede escribirse como el producto de la función radial asintótica  $R(r) = e^{ikr}/r$  por una función angular  $f(\theta)$ , más la función de onda plana incidente [23, 24], esto es :

$$\psi(r, \theta) = A \left[ e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right], \quad (3.4)$$

donde  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$  es el momento de la onda incidente o dispersada (en procesos elásticos, la magnitud del momento antes y después de la colisión es el mismo),  $A$  es la usual constante de normalización,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  es la distancia entre el centro dispersor y un frente de onda cualquiera dispersado,  $z$  hace referencia a la dirección de propagación de la onda plana,  $f(\theta)$  es la amplitud de dispersión, y contiene toda la información acerca del proceso de colisión.

Por otro lado, la probabilidad de que un haz de partículas incidentes pase a través de un área infinitesimal  $d\sigma$ , es igual a la probabilidad de que el haz de partículas sea dispersado un ángulo sólido infinitesimal  $d\Omega$  (para mejor claridad puede también referirse a la figura 3.2), en consecuencia, la sección eficaz diferencial elástica en mecánica cuántica es [23]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad (3.5)$$

De modo que para conocer la sección eficaz diferencial elástica, basta con calcular la expresión para  $f(\theta)$  usando la ecuación de Schrödinger. Existen diferentes métodos para determinar la amplitud de dispersión, por lo que solo hablaremos de uno en particular, en el cual están basados los modelos fenomenológicos descritos en esta tesis. La técnica se conoce como **análisis de ondas parciales**, y proporciona una expresión exacta para  $f(\theta)$ .

## 3.3 Desarrollo en ondas parciales

La idea básica del método de ondas parciales, consiste en descomponer la función  $f(\theta)$  en una suma infinita, donde cada uno de cuyos términos está asociado a un valor definido del momento orbital  $l$ .

---

<sup>9</sup>Por ejemplo, en las proximidades del detector el cual se encuentra ubicado a algunos metros desde donde se presenta la interacción o colisión

Para un potencial de interacción con simetría esférica  $V(r)$ , la ecuación de Schrödinger admite las soluciones separables de la forma  $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y_l^m(\theta, \phi)$ , donde  $Y_l^m(\theta, \phi)$  es un armónico esférico, y la ecuación radial viene dada por:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[ V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eu \quad (3.6)$$

donde  $u = R(r)/r$  [23].

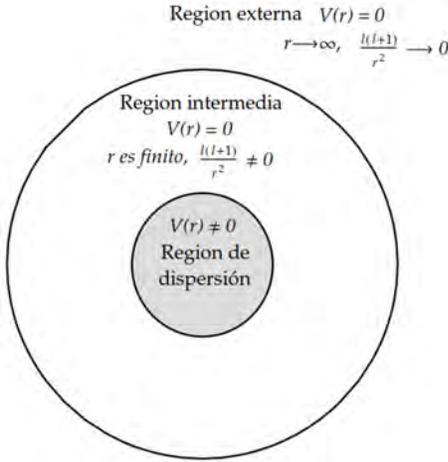


Figura 3.3: La figura muestra un potencial dispersor localizado. En la región de dispersión (sombreado oscuro) el potencial es diferente de cero, en la región intermedia  $V(r)$  puede ser ignorado pero el término del momento angular orbital no puede ignorarse, y en la región externa tanto el término del momento angular orbital como el potencial pueden ignorarse.

Cuando la interacción se debe a un potencial dispersor de corto alcance, podemos considerarlo como si estuviera contenido en su totalidad en el interior de una esfera de radio finito  $R$  (sombreado oscuro en la Fig. 3.3), por lo que para distancias entre el proyectil y el blanco mayores que el alcance  $R$ , el movimiento es libre. Por lo tanto, en la región externa, donde  $r \rightarrow \infty$ ,  $V(r) \rightarrow 0$ , y la contribución del término del momento angular orbital es insignificante, luego,  $R(r) \sim \frac{e^{ikr}}{r}$  [22].

En la región intermedia  $V(r) = 0$ , pero el término de momento angular orbital no puede ignorarse, en consecuencia,  $R(r) \sim h_l^{(1)}(kr)$ , donde  $h_l^{(1)}(kr)$  son las **funciones esféricas de Hankel** de primer orden.

Así, la solución general exacta a la ecuación de Schrödinger, para un potencial con simetría azimutal (por tanto independiente del ángulo  $\phi$ ), fuera de la región de dispersión, donde  $V(r) = 0$ , es [24]:

$$\psi(r, \theta) = A \left[ e^{ikz} + k \sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1} (2l+1) a_l h_l^{(1)}(kr) P_l(\cos \theta) \right], \quad (3.7)$$

donde

$$a_l(k) = \frac{e^{2i\delta_l(k)} - 1}{2ik}, \quad (3.8)$$

es la amplitud de la  $l$ -ésima onda parcial y puede ser determinada a partir del corrimiento de fase de  $\delta_l(k)$  de la onda parcial con momento orbital  $l$ .  $P_l(\cos \theta)$  son los polinomios de Legendre. El primer término en la ecuación (3.7) representa la onda plana incidente, y la suma, la onda dispersada [23].

Por otra parte, los detectores que miden el ángulo de dispersión están ubicados a distancias muy lejanas, comparadas con el rango de alcance del potencial del centro dispersor, garantizando que la observación de las partículas dispersadas se hace para  $r$  muy grande. En base a este argumento, la función de Hankel  $h_l^{(1)(kr)}$  se aproxima a  $(-i)^{l+1}e^{ikr}/kr$  [23]. De este modo la función  $\psi(r, \theta)$  es:

$$\psi(r, \theta) \approx A \left[ e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right] \quad (3.9)$$

donde

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(k) P_l(\cos \theta) \quad (3.10)$$

(Los cálculos que lleva a estos resultados pueden hallarse en cualquiera de las referencias [22, 23].)

### 3.4 Variables de Mandelstam

En las secciones precedentes hemos visto algunos conceptos de la teoría de la dispersión elástica de partículas en la representación de coordenadas y en la descripción que arroja la ecuación Schrödinger. Sin embargo, en colisiones de partículas de alta energía, es útil introducir un tipo de variables cinemáticas que son invariantes bajo transformaciones de Lorentz, las variables de Mandelstam.

#### Proceso de dos cuerpos

Para un proceso elástico

$$A + B \rightarrow A + B, \quad (3.11)$$

con  $A$  considerada como partícula proyectil y  $B$  la partícula blanco. Las variables de de Mandelstam se definen como:

$$s \equiv (p_{iA} + p_{iB})^2 \quad (3.12)$$

$$t \equiv (p_{fA} - p_{iA})^2 \quad (3.13)$$

$$u \equiv (p_{fB} - p_{iA})^2 \quad (3.14)$$

donde  $p_{iA}$ ,  $p_{iB}$  son los cuadrimomentos iniciales y  $p_{fA}$ ,  $p_{fB}$  los cuadrimomentos finales.

Usando las definiciones (3.12 - 3.14) y la conservación de la energía y momento  $p_{iA} + p_{iB} = p_{fA} + p_{fB}$  se tiene que (Apéndice C) [24]:

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2. \quad (3.15)$$

Para partículas de masas iguales,  $\sum_{i=1}^4 m_i^2 = 4m^2$ , obtenemos:

$$s + t + u = 4m^2 \quad (\text{sólo para partículas de masas iguales}). \quad (3.16)$$

A cada una de las variables mencionadas ( $s$ ,  $t$ ,  $u$ ) se le asocia un tipo de reacción llamado canal (Fig. 3.4). En el canal  $s$  (Fig. 3.4a),  $t$  es el cuadrado del cuadrimomento

transferido y  $s$  es el cuadrado de la energía total, ambas variables medidas con respecto al centro de masa (CM). Análogamente, en los canales  $t, u$ , las variables  $t, u$  son el cuadrado de la energía total del CM.

De las tres variables invariantes de Lorentz  $s, t$  y  $u$ , solo dos de estas son independientes<sup>10</sup> y además, suficientes par describir el proceso (3.11). Por otro lado,  $u$  puede ser expresada en términos de las variables  $s$  y  $t$ , mediante la ecuación (3.16).

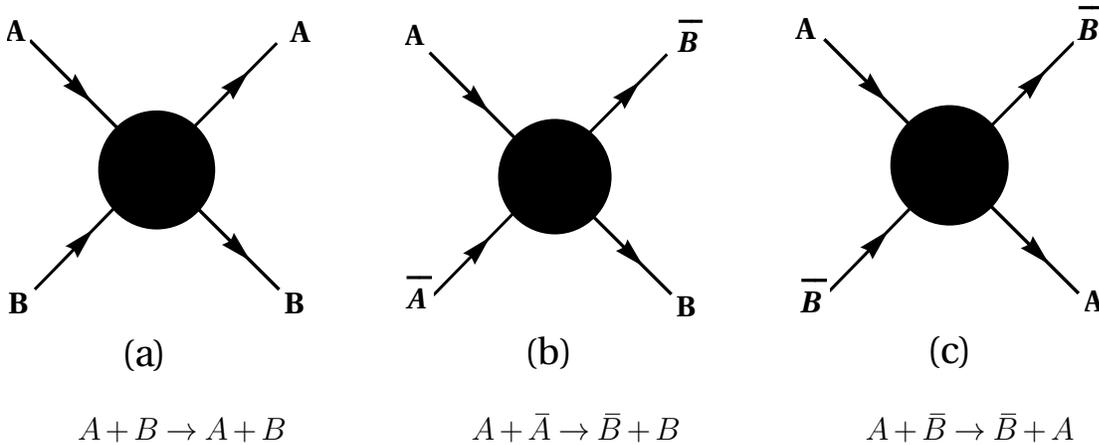


Figura 3.4: (a) canal  $s$ . (b) canal  $t$ . (c) canal  $u$

En la figura 3.4,  $\bar{A}$  es la antipartícula de  $A$  y  $\bar{B}$  la antipartícula de  $B$ .

### Variables $s, t$ y $u$ en el sistema centro de masa (CM)

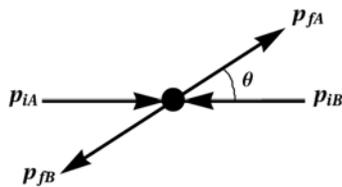


Figura 3.5: El sistema centro de masa,  $\theta$  es el ángulo de dispersión.

Para una reacción en el canal  $s$  (Ecuación 3.11). En el sistema CM (Fig. 3.5) tenemos por definición:

$$\mathbf{p}_{iA} + \mathbf{p}_{iB} = 0 \quad (\text{respecto del CM}) \quad (3.17)$$

Los vectores  $\mathbf{p}_{iA}$  y  $\mathbf{p}_{iB}$  son los momentos de las partículas  $A$  y  $B$  antes de colisionar.  $\mathbf{p}_{fA}$  y  $\mathbf{p}_{fB}$  son los momentos de las partículas  $A$  y  $B$  después de colisionar.  $\theta$  es el ángulo de dispersión respecto del CM [24].

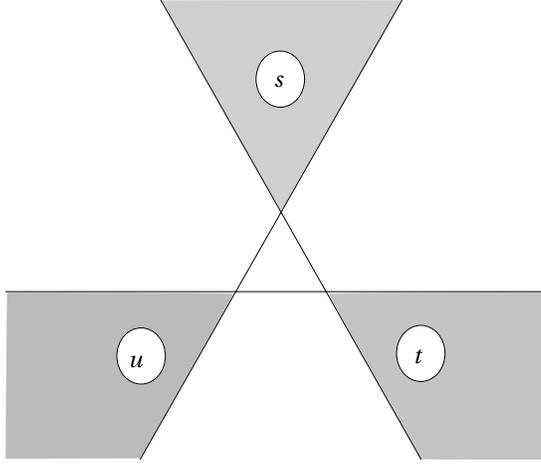
Para partículas de masas iguales, las relaciones entre las variables  $|\mathbf{p}|$  y  $\theta$  (donde  $\mathbf{p}$  es el momento inicial en el sistema CM) y las invariantes de Mandelstam ( $s, t$ ) son<sup>11</sup> :

$$|\mathbf{p}| = \frac{1}{2} \sqrt{s - 4m} \quad (3.18)$$

<sup>10</sup>Por lo general se toma  $s$  y  $t$  como variables independientes

<sup>11</sup>De la ecuación 3.17 se tiene que:  $\mathbf{p}_{iA} = -\mathbf{p}_{iB} = \mathbf{p}$  y  $|\mathbf{p}|$  es la magnitud de  $\mathbf{p}$

$$\cos\theta = 1 + \frac{2t}{s - 4m^2}, \quad (3.19)$$



las relaciones inversas son:

$$s = 4(|\mathbf{p}|^2 + m^2) \quad (3.20)$$

$$t = -2|\mathbf{p}|^2(1 - \cos\theta). \quad (3.21)$$

Usando las ecuaciones (3.16), (3.20) y (3.21) para masas iguales, podemos obtener para  $u$ , la siguiente expresión:

$$u = -2|\mathbf{p}|^2(1 + \cos\theta), \quad (3.22)$$

Figura 3.6: El diagrama de Mandelstam que muestra las regiones físicas (regiones sombreadas) de los canales  $s$ ,  $t$ , y  $u$  para masas iguales.

Los dominios físicos de los canales  $s$ ,  $t$  y  $u$ , para masas iguales, se representan en la figura 3.6 (regiones sombreadas).

### Sección eficaz diferencial elástica

La expresión para sección eficaz diferencial elástica en términos de las variables invariantes de Mandelstam para masas iguales es:

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\cos\theta} = \frac{1}{32\pi s} |A(s, t)|^2 \quad \text{si la amplitud } A(s, t) \text{ es independiente de } \phi \quad (3.23)$$

Diferenciando la ecuación (3.19) obtenemos:

$$d\cos\theta = \frac{2}{s - 4m^2} dt \quad (3.24)$$

A partir de (3.24) y (3.23) se tiene:

$$\frac{d\sigma_{el}}{dt} = \frac{1}{64\pi s |\mathbf{p}|^2} |A(s, t)|^2, \quad (3.25)$$

y el teorema óptico es: [24, 25]

$$\sigma_{tot} = \frac{1}{2|\mathbf{p}|\sqrt{s}} \text{Im}[A(s, t=0)] \quad \text{teorema óptico} \quad (3.26)$$

### La expansión para $A(s, t)$ en ondas parciales

Al igual que en la sección (3.3), también aquí podemos expandir la amplitud de dispersión  $A(s, t)$  en ondas parciales, esto es:

$$A(s, t(s, z)) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l(s) P_l(z), \quad (3.27)$$

con  $t = t(s, z)$  y  $z = \cos\theta = 1 + \frac{2t}{s - 4m^2}$ . La amplitud de onda parcial  $A_l(s)$  es [25]:

$$A_l(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dz P_l(z) A(s, t(s, z)) \quad (3.28)$$

La ecuación (3.28) se obtiene de (3.27) haciendo uso de la relación de ortogonalidad de los polinomios de Legendre  $P_l(z)$  :

$$\int_{-1}^{+1} dz P_l(z) P_m(z) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ml} \quad (3.29)$$

### Interacciones a bajos valores de $t$

En dispersiones de protones cargados, las interacciones de Coulomb y nuclear, son las que contribuyen a la amplitud de dispersión  $f$ . La amplitud de Coulomb ( $f_c$ ) se obtiene a partir de la ecuación de Rutherford (se define  $p \equiv |\mathbf{p}|$ ) :

$$f_c = \frac{2p\alpha G^2(t)}{|t|}, \quad \hbar = c = 1, \quad (3.30)$$

donde  $G(t)$  es el factor de forma electromagnético del protón. El signo (+) es para colisiones antiprotón-protón y el (-) para colisiones protón-protón,  $\alpha$  es la constante de estructura fina. La amplitud nuclear  $f_n$  para valores de  $|t| < 0.1 \text{ GeV}^2$  se puede expresar como [4]:

$$f_n = \frac{p\sigma_{tot}(\rho + i) \exp(-B|t|/2)}{4\pi}, \quad (3.31)$$

donde  $B$  es el parámetro de pendiente nuclear,  $\sigma_{tot}$  está dada por el teorema óptico y

$$\rho \equiv \frac{\text{Re}(f_n(t=0))}{\text{Im}f_n(t=0)} \quad (3.32)$$

De este modo la amplitud de dispersión completa es:

$$f = f_c + f_n \exp(\pm \alpha \phi(t)) \quad (3.33)$$

En la ecuación (3.33)  $\alpha\phi$  es la diferencia de fase entre  $f_c$  y  $f_n$  y

$$\phi(t) = \ln \left( \frac{0.08}{|t|} \right) - 0.577 \quad (3.34)$$

Aquí la sección eficaz diferencial elástica viene dada por:

$$\frac{d\sigma_{el}}{dt} = \frac{\pi}{p^2} |f^2| \quad (3.35)$$

De las ecuaciones (3.25) y (3.35) se puede concluir que:

$$A(s, t) = 8\pi\sqrt{s}f(t)$$

Remplazando en (3.26) obtenemos:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{p} \text{Im}[f(t=0)] \quad (3.36)$$

En colisiones protón-protón,  $\sigma_{tot}$  corresponde al área efectiva del protón y provee información de su tamaño, el cual depende de la dinámica del proceso de colisión.

La sección eficaz diferencial elástica es:

$$\frac{d\sigma_{el}}{dt} = \frac{d\sigma_c}{dt} + \frac{d\sigma_{inter}}{dt} + \frac{d\sigma_n}{dt}, \quad (3.37)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_c}{dt} &= \frac{4\pi\alpha^2 G^4(t)}{|t|^2} \\ \frac{d\sigma_{inter}}{dt} &= \pm \frac{\alpha(\rho \mp \alpha\phi)G^2(t)\sigma_{tot}}{|t|} \exp[-B|t|/2] \\ \frac{d\sigma_n}{dt} &= \frac{(1 + \rho^2)\sigma_{tot}^2}{16\pi} \exp[-B|t|] \end{aligned} \quad (3.38)$$

En la ecuación (3.37), el término  $\frac{d\sigma_{inter}}{dt}$ , se debe a la interferencia entre las amplitudes de dispersión nuclear y coulomb que también contribuyen a la sección eficaz diferencial elástica [4]. La dispersión de Coulomb domina a valores muy bajos de  $|t|$ , por ejemplo, para una energía de 7 TeV, su contribución empieza a ser máxima para cuando  $|t| < 0.0001 \text{ GeV}^2$  aproximadamente. Mientras que la contribución de la dispersión nuclear empieza a ser máxima para cuando  $|t| > 0,005 \text{ GeV}^2$  aproximadamente, esto se puede apreciar en la figura 3.7 [4].

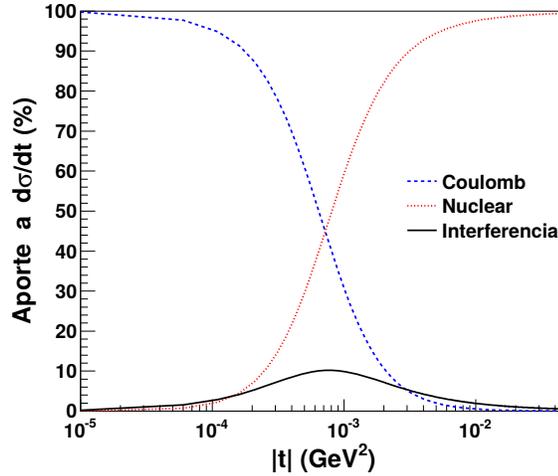


Figura 3.7: Aporte porcentual a  $d\sigma/dt$  de la amplitud de dispersión de Coulomb, nuclear e interferencia nuclear-Coulomb

# TEORÍA DE REGGE Y EL POMERÓN

---

La técnica más “sencilla” y a la vez genial con la que disponemos para poder describir los diferentes procesos de interacción entre partículas elementales son los diagramas de Feynman. Sin embargo, este método resulta inaplicable en colisiones elásticas entre protones, ya que después de la colisión, estas partículas son dispersadas con pequeños ángulos ( $\sim 10^{-4}$  rad para altas energías), esto conlleva a valores de  $|t| < 1 \text{ GeV}^2$  de acuerdo a la ecuación (3.19). Como  $\alpha_s$  es una función de  $|t|$ , existirá un valor en  $|t|$  por debajo del cual  $\alpha_s$  adquiere valores muy grandes (mayores a 1). Los diagramas de Feynman se escriben como una serie perturbativa en términos de  $\alpha_s$ , y si  $\alpha_s$  es mayor que 1, entonces la serie perturbativa diverge. Esto nos obliga a descartar por completo los métodos perturbativos de la cromodinámica cuántica (QCD) [4, 26, 27]. Por lo tanto, la única forma de poder entender la dinámica de los procesos elásticos es (como ya se mencionó en el capítulo previo) a partir de observaciones experimentales y del uso de modelos fenomenológicos basados en propiedades de la amplitud de dispersión y en algunas suposiciones adicionales sobre la estructura interna de los hadrones [4].

## 4.1 Modelos fenomenológicos

Dado que el estudio que estamos realizando se encuentra en regiones de la QCD no perturbativa, no podemos explicar fenómenos de dispersión haciendo uso de los diagramas de Feynman. En este caso, lo que se hace es recurrir a los modelos fenomenológicos, esto implica expandir la amplitud de dispersión en ondas parciales dada por la ecuación (3.27). Además, la amplitud de dispersión debe satisfacer tres propiedades, estas son:

- unitariedad
- analiticidad
- simetría de cruce

La propiedad de unitariedad de la amplitud de dispersión ( $f(s, t)$ ) garantiza que la suma de las secciones eficaces de dispersión  $\sigma_l$  para  $l = 0, 1, 2, \dots$  nos debe dar como resultado la sección eficaz total, es decir,  $\sigma_{tot} = \sum_l \sigma_l$ , dicho de otro forma, la suma de todas las probabilidades de la amplitud de dispersión debe ser menor o igual a la unidad [4]. La propiedad de analiticidad dice que las amplitudes de dispersión, son funciones analíticas de las variables cinemáticas cuando estas se continúan a valores

complejos. Las amplitudes físicas se recuperan cuando se asignan valores reales a las variables cinemáticas. La simetría de cruce sugiere que una misma amplitud de dispersión o combinaciones lineales de esta, es suficiente para describir los tres procesos de dispersión ( $s$ ,  $t$ , y  $u$ ), ya sea para partículas o para antipartículas. Esto implica que si la amplitud de dispersión es analítica en uno cualquiera de estos tres canales podemos, en principio, continuar analíticamente a cualquiera de los otros canales con la misma amplitud de dispersión [24].

## 4.2 La idea del polo de Regge

Sabemos que para poder determinar la sección eficaz diferencial elástica, se debe conocer la expresión para la amplitud de dispersión, esto significa que debemos expandirla. Ahora bien, de la mecánica cuántica<sup>12</sup> sabemos que cuando un haz de partículas incide e interactúa sobre un pozo de potencial esférico simétrico y atractivo, se pueden producir fenómenos de resonancias o estados ligados en el continuo. Estos estados confinados aparecen como polos en la amplitud de la onda parcial<sup>13</sup>  $a_l(k)$  (ecuación (3.8)) para un determinado valor entero de  $l$ . La idea de Regge era continuar con  $a_l(k)$  para valores complejos de  $l$  y obtener así una función de interpolación  $a(l, k)$  la cual se reducirá a  $a_l(k)$  para  $l = 0, 1, 2, \dots$ . Ahora, las singularidades que se presentan en  $a(l, k)$ , son los polos de Regge, y cada uno de estos polos va a contribuir a la amplitud de dispersión en un término que se comporta asintóticamente. Los polos para  $a(l, k)$  están situados en valores definidos por la relación [24][25]:

$$l = \alpha(k), \quad (4.1)$$

donde  $\alpha(k)$  es una función de la energía llamada trayectoria de Regge. A cada familia de estados ligados o resonancias le pertenece una única trayectoria de Regge como (4.1). De manera similar, la amplitud relativista  $A(l, s)$  tiene polos en:

$$l = \alpha(t), \quad (4.2)$$

donde la trayectoria de Regge  $\alpha(t)$  es ahora función la variable invariante  $t$ . Note que esta variable tomará diferentes roles dependiendo del canal en el que se esté trabajando, en el canal  $s$ ,  $t$  será el cuadrado del cuadrimomento transferido.

## 4.3 El reggeon

En la teoría de Regge, se describen los procesos hadrónicos en términos de intercambio de “algo”. Este “algo” es una partícula virtual. Así, por ejemplo, las fuerzas nucleares son usualmente atribuidas a intercambios de mesones ( $\pi$ ,  $\rho$ , etc), del mismo modo que las interacciones electromagnéticas se deben al intercambio de fotones virtuales entre los electrones. Sin embargo, a altas energías, la idea de intercambio

<sup>12</sup>En mecánica cuántica fue donde surgió toda esta idea del polo de Regge

<sup>13</sup>Es de resaltar que para casos no relativistas la amplitud de onda parcial estará representada por  $a_l(k)$ , si por el contrario, nos encontramos en casos relativistas se usará la notación  $A_l(s)$  (en el canal  $s$ )

de mesones en este tipo de interacciones llega a ser inaplicable, puesto que la sección eficaz total crece más rápido que  $\ln^2(s)$  cuando  $s \rightarrow \infty$ , violando así la restricción de Froissart [24]:

$$\sigma_{tot} < \frac{\pi}{m_\pi} \ln^2(s), \quad (4.3)$$

el cual indica que para poder mantener la unitariedad, la sección eficaz total  $\sigma_{tot}$  no puede crecer más rápido que  $\ln^2(s)$  [4].

Para solucionar este problema, la teoría de Regge supone que la interacción no se debe al intercambio de mesones, si no más bien, al intercambio de trayectorias de Regge, a menudo llamados reggeones. El intercambio de reggeones en lugar de partículas conduce a una amplitud de dispersión de la forma

$$A(s, t) \sim s^{\alpha(t)} \quad \text{cuando } s \rightarrow \infty, \quad (4.4)$$

que no viola la condición (4.3) si  $\alpha(0) < 1$  [24, 25].

#### 4.4 La representación de $A(s, t)$ para $l$ complejo

Como se mencionó anteriormente, la simetría de cruce afirma que si conocemos la amplitud de dispersión en un canal cualquiera, esta es suficiente para describir el proceso de interacción en cada uno de los canales restantes. Pues bien, para que una de las variables (la que sea), digamos  $s$ , converja en un dominio lo suficientemente grande como para contener al menos parte de las regiones físicas de  $t$  y  $u$ , se debe introducir un concepto poco físico del momento angular orbital, el momento angular orbital complejo,  $l$ , visto como un número complejo, permite obtener una representación para (3.27) como una integral de contorno [28]:

$$f(s, t(s, z)) = \frac{1}{2i} \oint_C (2l+1) \frac{A(l, s)}{\text{sen}(\pi l)} P(l, s, z) dl \quad (4.5)$$

$C$  es un contorno que rodea el eje real positivo de  $l$ . Las funciones  $A(l, s)$  y  $P(l, s, z)$  son las continuaciones de  $A_l(s)$  y  $P_l(z)$  al plano complejo  $l$ . Deformando el contorno  $C$  en la integral (4.5) a un contorno  $C'$  tal que,  $C'$  encierre todos los polos de  $A(l, s)$  (Fig. 4.1), la expresión para  $f(s, t)$  en el canal  $s$  es [4, 24]:

$$f(s, t(s, z)) = \sum_i \pi(2\alpha_i(s) + 1) \beta_i(s) \frac{P(\alpha_i, s, z)}{\text{sen} \pi \alpha_i} + \frac{1}{2i} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} (2l+1) A(l, s) \frac{P(l, s, z)}{\text{sen} \pi l} dl, \quad (4.6)$$

donde  $\alpha_i(s)$  es la posición del  $l$ -ésimo polo de  $A(l, s)$  (un polo de Regge) y  $\beta_i(s)$  es el residuo en ese polo. Las ecuaciones (4.5) y (4.6) son: la transformación y la representación de Sommerfeld Watson para la amplitud de dispersión respectivamente, en el plano complejo  $l$ .

En el límite cuando  $t \rightarrow \infty$  la integral de (4.6) se desvanece, por lo que únicamente los términos de la serie contribuyen a la amplitud de dispersión, por tanto, la amplitud  $f(s, t)$  para  $t \rightarrow \infty$  toma la forma:

$$f(s, t) \simeq - \sum_i \beta_i(s) \frac{t^{\alpha_i(s)}}{\text{sen}[\pi\alpha_i(s)]} \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty \quad (4.7)$$

En  $\beta_i(s)$  se han agrupado todas las constantes y factores dependientes de  $s$  que aparecen en (4.6). Nada puede decirse acerca del residuo de  $\beta_i(s)$ .

La ecuación (4.7) ha sido obtenida desarrollando las serie (3.27) escrita en el canal  $s$ . Escrita en el canal  $t$ ,  $f(s, t)$  es:

$$f(s, t) \simeq - \sum_i \beta_i(t) \frac{s^{\alpha_i(t)}}{\text{sen}[\pi\alpha_i(t)]} \quad \text{cuando } s \rightarrow \infty \quad (4.8)$$

Debido a la simetría de cruce, se podría, en principio, poder trabajar con la ecuación (4.8) en otro canal diferente al canal  $t$ .

## 4.5 El pomerón

Para valores reales y positivos de  $t$ , los polos de Regge representan resonancias o estados ligados. La trayectoria de Regge (o reggeón) que interpola estos estados ligados o resonancias se puede escribir como:

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \alpha' t \quad (4.9)$$

donde  $\alpha(0)$  y  $\alpha'$  son el intercepto y la pendiente de la trayectoria, respectivamente.

Las predicciones de la teoría de Regge para  $\alpha(0) < 1$  son satisfactorias, en las referencias [24, 25] se puede apreciar como las resonancias y algunos números cuánticos se describen correctamente por una trayectoria de Regge mesónica de  $\alpha(0) = 0.25$ . A pesar de los buenos resultados que se obtiene con valores de  $\alpha(0) < 1$ , existen excepciones, veamos. Considerando el polo de mayor contribución, la ecuación (4.10) es de la forma [24]:

$$f(s, t) \sim -\beta(t) \frac{s^{\alpha(t)}}{\text{sen}[\pi\alpha(t)]} \quad \text{cuando } s \rightarrow \infty \quad (4.10)$$

Remplazando (4.9) en (4.10) y haciendo uso del teorema óptico se tiene:

$$\sigma_{tot} \simeq \frac{1}{s} \text{Im}(f(s, t=0)) \sim s^{\alpha(0)-1} \quad \text{cuando } s \rightarrow \infty \quad (4.11)$$

De la relación (4.11) se puede ver que si  $\alpha(0) < 1$  entonces la sección eficaz total ( $\sigma_{tot}$ ) disminuye con la energía. Esto contradice las observaciones experimentales, el cual muestran que  $\sigma_{tot}$  es más bien plana en cierto intervalo <sup>14</sup> (en colisiones  $pp$ ) y luego

<sup>14</sup>En colisiones  $\bar{p}p$  se puede observar en la figura 4.2 que  $\sigma_{tot}$  disminuye hasta llegar a una región plana y después sigue aumentando

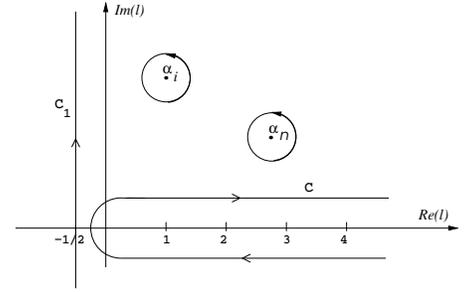


Figura 4.1: Contornos de integración para la transformación de Sommerfeld Watson. Los  $\alpha_i$  son polos de Regge [4].

sigue a aumentando a altas energías (Fig. 4.2). Para que la teoría de Regge concuerde con las observaciones experimentales, se hace necesario introducir una trayectoria de Regge (o reggeón) con un intercepto mayor a 1 ( $\alpha(0) > 1$ ), a este reggeón se le llama pomerón, y hasta el momento, no corresponde a ninguna partícula; además, es un tema de estudio tanto a nivel teórico como experimental [4, 24].

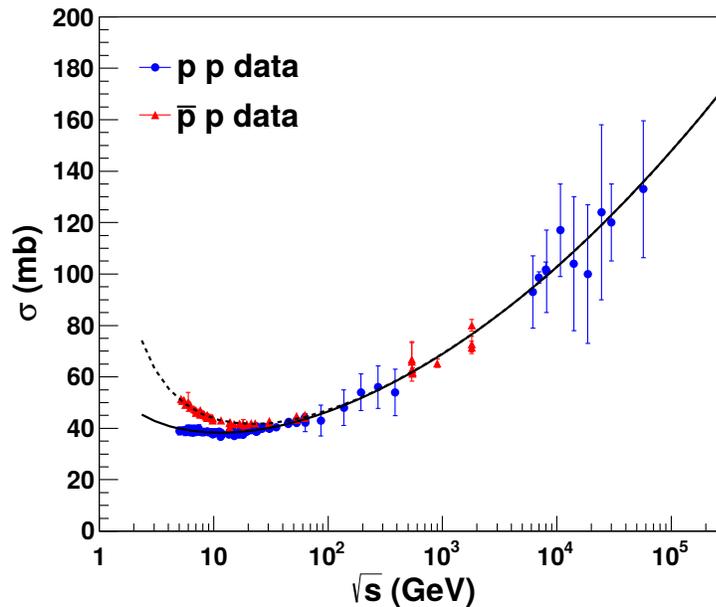


Figura 4.2: La sección eficaz total para colisiones protón-protón y protón-antiprotón, en ella se muestra como  $\sigma_{tot}$  aumenta considerablemente conforme  $\sqrt{s}$  aumenta. [4]

Un valor  $\alpha(0) > 1$  obviamente violaría la restricción de Froissart. Para salir de este problema se puede suponer que las energías alcanzadas actualmente aun están lejos de la asintótica, y por lo tanto, aún sería posible hacer unitarias las secciones eficaces [24].

# PARAMETRIZACIÓN PARA LA SECCIÓN EFICAZ DIFERENCIAL ELÁSTICA

---

Ahora daremos inicio al estudio de un modelo de dispersión elástica de nucleones (y anti-nucleones) el cual se basa en una representación quark-diquark<sup>15</sup> ( $qQ$ ) del nucleón con elasticidad del pomerón ( $\alpha_p$ ) propuesto por Vladimir Grichine<sup>16</sup>. Este nuevo modelo (que trata de describir datos de dispersión nuclear para el cual  $0.005 < |t| < 1 \text{ GeV}^2$ , región no perturbativa) trata de mejorar el trabajo de la referencia [6] en donde se puede ver una fuerte sobre-estimación en el mínimo de difracción, esto se debe a que el valor de la parte real de la amplitud de dispersión  $F(s, t)$  no es lo suficientemente grande [5]. Los ajustes presentados en las referencias [6] y [3] incorporan dos parámetros libres: un coeficiente de pendiente nuclear y el radio del protón. La nueva función prototipo  $F(s, t)$  presentada por Grichine en la cita [5] es capaz de mejorar la descripción de los datos en el mínimo de difracción incluyendo el nuevo parámetro empírico  $\alpha_p$  que aumenta la parte real de  $F(s, t)$ . Sin embargo, en el siguiente capítulo veremos que a pesar de que el modelo en la referencia [5] mejora considerablemente los fits, este tiene sus limitaciones (como sucede con cualquier modelo fenomenológico), por lo que solo puede ser aplicado para datos correspondientes a ciertas energías. Este problema se debe a que la normalización global de  $F(s, t)$  está fija y el programa falla en determinar la posición del mínimo de difracción. Una modificación al modelo, es dejar como parámetro libre la normalización global, en consecuencia, los resultados obtenidos son muy satisfactorios, describiendo todos los datos existentes de sección eficaz diferencial protón-protón y protón-antiprotón en un rango amplio de energías (4 GeV a 7000 GeV). En lo que resta de este apartado, daremos a conocer las características del modelo ( $qQ$ ) con pomerón elástico.

---

<sup>15</sup>El diquark un estado ligado hipotético de dos quarks. El diquark es a menudo tratado como una sola partícula subatómica con la que el tercer quark interactúa a través de la interacción fuerte.

<sup>16</sup>En lo que resta del del texto nos limitamos únicamente a colisiones  $p(\bar{p}) - p$ , este es el caso para el cual se tiene una mayor cantidad de datos. No obstante, el modelo [5] es válido para cualquier tipo de nucleón.

## 5.1 Modelo quark-diquark con pomerón elástico

La sección eficaz diferencial elástica ( $\frac{d\sigma_{el}}{dt}$ ) para colisiones  $p(\bar{p}) - p$ , puede expresarse en términos de la amplitud de dispersión  $F(s, t)$  de la forma [5]:

$$\frac{d\sigma_{el}}{dt} = \frac{\pi}{p^2} |F(s, t)|^2 \quad (5.1)$$

Donde  $p$  es el momento del protón en el sistema de centro de masa, y  $t$  es una de las ya mencionadas variables de Mandelstam y representa como ya bien sabemos el cuadrimomento trasferido elevado al cuadrado. El modelo de la cita [5] le da una extension al modelo [6], el cual describe la dispersión elástica de dos protones “diferentes”. El primer protón consta de un quark (1) y un diquark (2), el segundo consiste de un quark (3) y un diquark (4). El modelo de la referencia [6] es limitado al caso de los protones, y considera las contribuciones debido a los intercambios de uno y dos pomerones, entre: quark-quark (1-3), diquark-diquark (2-4) y dos quark-diquark (1-4, 2-3). En la cita [5] se extiende el modelo a interacción entre nucleones, aunque en esta tesis se reduce el modelo al caso de los protones, y esto se debe a la limitación que tenemos para obtener los datos experimentales, como por ejemplo, a datos de interacción protón-neutrón.  $F(s, t)$  se expresa como<sup>17</sup> :

$$F(s, t) = F_1(s, t) - F_2(s, t) - F_3(s, t) \quad (5.2)$$

Donde la amplitud  $F_1(s, t)$  corresponde al intercambio de un pomerón,  $F_2(s, t)$  al intercambio de dos pomerón entre los constituyentes del protón quark y diquark, y  $F_3(s, t)$  al intercambio de dos pomerón entre el quark (o diquark) de un protón y el quark y el diquark del otro protón al mismo tiempo. La amplitud  $F_1(s, t)$  es [5]:

$$F_1(s, t) = \frac{ip\sigma_{tot}(s)}{4\pi} [f_{13} + f_{14} + f_{23} + f_{24}], \quad \text{donde} \quad (5.3)$$

$$f_{13} = B_{13} \exp[(\xi_{13} + \beta^2 \lambda + \delta^2 \eta)t],$$

$$f_{14} = B_{14} \exp[(\xi_{14} + \beta^2 \lambda + \gamma^2 \eta)t],$$

$$f_{23} = B_{23} \exp[(\xi_{23} + \alpha^2 \lambda + \delta^2 \eta)t],$$

$$f_{24} = B_{24} \exp[(\xi_{24} + \alpha^2 \lambda + \gamma^2 \eta)t]$$

Donde  $\sigma_{tot}(s)$  es la sección eficaz total. Los coeficientes  $B_{jk}$ , parametrizan las secciones eficaces quark-quark, diquark-diquark y quark-diquark. Los coeficientes  $\xi_{jk}$ , ( $j = 1, 2$ ), ( $k = 3, 4$ ) representan cada una de las interacciones entre quark-quark, diquark-diquark y quark-diquark:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = B_{13}\sigma_{tot} & \quad \sigma_{24} = B_{24}\sigma_{tot} & \quad \xi_{jk} = \frac{r_j^2 + r_k^2}{16} + \alpha' \left[ \ln \frac{s}{s_0} - \alpha_p \frac{i\pi}{2} \right] \\ \sigma_{23} = B_{23}\sigma_{tot} & \quad \sigma_{14} = B_{14}\sigma_{tot} & \end{aligned} \quad (5.4)$$

El modelo asume que:  $\sigma_{23} = \sigma_{14} = \sqrt{\sigma_{13}\sigma_{24}}$ . Los coeficientes  $\alpha = \gamma = 1/3$  y  $\beta = \delta = 2/3$  corresponden a las masas del quark y diquark de los protones<sup>18</sup>. Los parámetros

<sup>17</sup>El protón se considera como un objeto compuesto por un quark y un diquark

<sup>18</sup>Los valores para  $\delta$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$ , pueden obtenerse a partir de la ecuación (4) de la referencia [6], para el caso particular en el cual  $m_j = m_k = m$ .

$\lambda = \eta = r^2/4$ ,  $r$  es el radio del protón. Los radios: quark ( $r_1 = r_3 = 0,173r$  [5, 6]) y diquark ( $r_2 = r_4 = 0,316r$  [5, 6]) pueden ser encontrados haciendo los fits a los datos experimentales. Además, el modelo supone que la constante  $s_o = 1$ , aunque para intercambio de pomerones quizá sea preferible considerar  $s_o = 1/\alpha'$  [25],  $\alpha'$  es la pendiente de la trayectoria del pomerón. Las amplitudes  $F_2(s, t)$  y  $F_3(s, t)$  son:

$$F_2(s, t) = \frac{ip\sigma_{tot}^2(s)}{16\pi^2} [f_{13,24} + f_{14,23}] \quad (5.5)$$

donde

$$f_{13,24} = \frac{B_{13}B_{24}}{\xi_{13} + \xi_{24} + \lambda + \eta} \exp \left\{ \left[ \xi_{24} + \alpha^2\lambda + \gamma^2\eta - \frac{(\xi_{24} + \alpha\lambda + \gamma\eta)^2}{\xi_{13} + \xi_{24} + \lambda + \eta} \right] t \right\},$$

$$f_{14,23} = \frac{B_{14}B_{23}}{\xi_{14} + \xi_{23} + \lambda + \eta} \exp \left\{ \left[ \xi_{23} + \alpha^2\lambda + \delta^2\eta - \frac{(\xi_{23} + \alpha\lambda + \delta\eta)^2}{\xi_{14} + \xi_{23} + \lambda + \eta} \right] t \right\},$$

y:

$$F_3(s, t) = \frac{ip\sigma_{tot}^2(s)}{32\pi} [f_{13,14} + f_{23,24} + f_{13,23} + f_{14,24}], \quad \text{donde} \quad (5.6)$$

$$f_{13,14} = \frac{B_{13}B_{14}}{\xi_{13} + \xi_{14} + \eta} \exp \left\{ \left[ \xi_{14} + \beta^2\lambda + \gamma^2\eta - \frac{(\xi_{14} + \gamma\eta)^2}{\xi_{13} + \xi_{14} + \eta} \right] t \right\},$$

$$f_{23,24} = \frac{B_{23}B_{24}}{\xi_{24} + \xi_{23} + \eta} \exp \left\{ \left[ \xi_{24} + \alpha^2\lambda + \gamma^2\eta - \frac{(\xi_{24} + \gamma\eta)^2}{\xi_{23} + \xi_{24} + \eta} \right] t \right\},$$

$$f_{13,23} = \frac{B_{13}B_{23}}{\xi_{13} + \xi_{23} + \lambda} \exp \left\{ \left[ \xi_{23} + \alpha^2\lambda + \delta^2\eta - \frac{(\xi_{23} + \alpha\lambda)^2}{\xi_{13} + \xi_{23} + \lambda} \right] t \right\},$$

$$f_{14,24} = \frac{B_{14}B_{24}}{\xi_{14} + \xi_{24} + \lambda} \exp \left\{ \left[ \xi_{24} + \alpha^2\lambda + \beta^2\eta - \frac{(\xi_{24} + \alpha\lambda)^2}{\xi_{14} + \xi_{24} + \lambda} \right] t \right\},$$

respectivamente.

Para simplificar los cálculos, se puede suponer que las secciones eficaces quark-quark y diquark-diquark no dependen de qué quarks interactúan. Por otro lado, en el modelo se asumen tres parámetros libres: el radio del protón  $r$ , la elasticidad de Pomerón  $\alpha_p$  y el coeficiente  $B_{13}$  que parametriza la sección eficaz  $\sigma_{13}$ . El coeficiente  $B_{24}$  puede expresarse en términos de  $B_{13}$  mediante el teorema óptico, además,  $B_{23} = B_{14} = \sqrt{B_{13}B_{24}}$ , y surge como consecuencia de:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= B_{13}\sigma_{tot} & \sigma_{24} &= B_{24}\sigma_{tot} \\ \sigma_{23} &= B_{23}\sigma_{tot} & \sigma_{14} &= B_{14}\sigma_{tot} \end{aligned}$$

# ANÁLISIS Y RESULTADOS

---

Después de haber hablado en el capítulo anterior del modelo fenomenológico en estudio, de sus variables y parámetros que lo componen, presentaremos finalmente los resultados obtenidos para  $\frac{d\sigma_{el}}{dt}$ . Inicialmente mostraremos los ajustes con los parámetros libres: radio del protón  $r$ , elasticidad del pomerón  $\alpha_p$  y el coeficiente  $B_{13}$  que parametriza la sección eficaz  $\sigma_{13}$ . Mostraremos gráficamente que la amplitud de dispersión  $F(s, t)$  presentada por Grichine para la descripción de datos<sup>19</sup> de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón(antiprotón)-protón (p( $\bar{p}$ )-p), describe correctamente los datos experimentales para ciertas energías de centro de masa (de 4.62 GeV a 13.76 GeV y, 7 TeV, para colisiones pp, y de 546 GeV a 1960 GeV para colisiones  $\bar{p}p$ ). Sin embargo, el modelo  $qQ$  con pomerón elástico no predice correctamente los datos para energías intermedias (de 19.4 GeV a 62.5 GeV), veamos.

## 6.1 Procedimiento

Todos los fits realizados con el modelo para la descripción a los datos de sección eficaz diferencial elástica  $d\sigma_{el}/dt$  que se mostrarán un poco más adelante en este capítulo, fueron implementados en el software root. Toda la estructura de código desarrollada para este trabajo se encuentra debidamente organizada en el apéndice de este documento. Si está interesado en saber más sobre las clases utilizadas y sus métodos, puede hacer uso del manual [30] que ofrece de manera gratuita este paquete.

### Detalles a considerar

Antes de dar inicio a los fits debemos fijar algunas constantes importantes, estas son:  $(\hbar c)^2 = 0.389 \text{ GeV}^2 \text{ mbarn}$ , la masa del protón  $m_p = 0.938 \text{ GeV}$  [3], la sección eficaz total  $\sigma_{total}$  ya se encuentra medida y cambia considerablemente con la energía ( $\sqrt{s}$ ) [31, 32], los parámetros  $r$ ,  $\alpha_p$  y  $B_{13}$  son inicializados de manera diferente para cada valor de  $\sqrt{s}$  y  $\sigma_{tot}$ . Para tener una idea clara acerca de los valores de partida para  $\alpha_p$  y  $B_{13}$  se tuvo la colaboración de Vladimir Grichine.

### El coeficiente $B_{24}$

Como se mencionó en el capítulo 5, el coeficiente  $B_{24}$  puede expresarse en términos del parámetro  $B_{13}$  mediante el teorema óptico (Apéndice B). La ecuación resultante es:

$$a_3 \left( \sqrt{B_{24}} \right)^3 + a_2 \left( \sqrt{B_{24}} \right)^2 + a_1 \left( \sqrt{B_{24}} \right) + a_0 = 0 \quad (6.1)$$

---

<sup>19</sup>Que fueron obtenidos de la referencia [29], este artículo facilita un link para su descarga.

La ecuación (6.1) es de tercer grado respecto de  $\sqrt{B_{24}}$ , los coeficientes  $a_0$ ,  $a_1, a_2$  y  $a_3$  dependen de los parámetros  $B_{13}$  y  $r$ . Para encontrar las soluciones a (6.1) es necesario implementar un programa que haga el trabajo (Apéndice C). En las soluciones encontramos tres raíces las cuales pueden ser reales o complejas. Para los ajustes necesariamente necesitamos valores para  $B_{24}$  reales y que además  $0 \leq B_{24} \leq 1$  [6].

## 6.2 Ajustes

Para los ajustes fue necesario implementar un programa que sea legible para el paquete root (ver Apéndice D y E). Este script contiene todas las ordenes para que root pueda construir la función chi-cuadrado (Apéndice A) que será minimizada con ayuda de algún paquete que realice esta tarea, y así, encontrar los parámetros que muestren una curva que mejor describe los datos experimentales. Actualmente root cuenta con varios minimizadores, a continuación mencionaremos sin entrar en detalle algunos de estos minimizadores y sus algoritmos:

- **Minuit**
  - Migrad (uno por defecto)
  - Simplex
  - Minimize (es una combinación de Migrad y Simplex)
  - MigradImproved
  - Scan
  - Seek
- **Minuit2**
  - Migrad (defecto)
  - Simplex
  - Minimize
  - Scan
  - Fumili
- **Fumili** (No tiene un algoritmo específico)
- **GSLMultiFit**
  - BFGS2 (predeterminado)
  - BFGS
  - ConjugateFR
  - ConjugatePR
  - SteepestDescent

Algunos de estos minimizadores (como Minuit, Minuit2, GSLMultiMin) cuentan con varios algoritmos para el desarrollo de cálculos que el usuario puede elegir, otros (como Fumili) simplemente tienen un solo algoritmo [30]. Los ajustes que se mostrarán en esta sección se obtuvieron con ayuda de Minuit y su algoritmo por defecto Migrad. El algoritmo Migrad es en general el mejor minimizador para casi todas las funciones. Se trata de un método de métrica variable [34], un esquema de actualización de métricas estable y comprobaciones de la matriz Hessiana positiva definida [35].

En el programa que hemos implementado (ver Apéndice D) se ha escrito (en `c++`) la amplitud de dispersión  $F(s, t)$  que se dio a conocer en el capítulo precedente (Ecu. (5.2)) como una función que se ha llamado `myFunc`. En nuestro proyecto, `myFunc` define la clase `TF1`, para luego, el método `Fit` definir la función `FCN` del paquete `Minuit` [35]. El paquete `Minuit`, actúa sobre la función multiparamétrica `FCN`, que para nuestro caso, es la función chi-cuadrado ( $\chi^2$ ), definida por la siguiente expresión:

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^n \left[ \frac{(d\sigma/dt)_i - F(|t_i|; a_j)}{\delta_i} \right]^2, \quad (6.2)$$

donde  $n$  es el número de puntos  $|t_i|$  de cuadrimomento transferido, en el cual se mide la variable sección eficaz diferencial  $(d\sigma/dt)_i$  con incertidumbres  $\delta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $F(x_i; a_j)$  con ( $j = 1, 2, 3$ ) es la función teórica (Ecu. (5.2)) que ajusta los datos experimentales y  $a_j$  es el número de parámetros para el cual el modelo brinda una mejor descripción a las muestras de datos. La función `FCN` calcula el  $\chi^2$  entre la función de ajuste del usuario (para nuestro caso Ecu. (5.2)) y los datos experimentales. Es la tarea de `Minuit` encontrar esos valores de los parámetros que dan el valor más bajo de  $\chi^2$  [30].

Para cada uno de los ajustes obtuvimos una matriz Hessiana positiva definida, lo que asegura la convergencia de la función chi-cuadrado. Desafortunadamente no todos los datos pueden ser descritos por el modelo propuesto. En colisiones protón-protón, los ajustes mostrados en las figuras 6.4 a 6.8 muestran una correcta descripción de los datos únicamente para un rango de  $|t| < 1 \text{ GeV}^2$  aproximadamente y en un rango de  $|t| < 0.5 \text{ GeV}^2$  aproximadamente en la figura 6.9. Los fits de las figuras 2.1 a 2.3 y 2.10 muestran una correcta descripción a los datos experimentales. En colisiones antiprotón-protón, se obtienen buenos resultados para los fits a energías entre 546 GeV a 1960 GeV (Fig. 2.13-2.16), los ajustes mostrados en las figuras 2.11 y 2.12 muestran una buena descripción únicamente para datos para el cual  $|t| < 1,5 \text{ GeV}^2$  aproximadamente. El problema en los ajustes puede parecer consecuencia de una mala elección en los parámetros iniciales, pero este no es el caso. Para cada uno de los fits se hizo una minuciosa búsqueda a estos valores iniciales con el objetivo de encontrar la mejor curva que brinde una buena representación a las muestras experimentales. Se observó que el modelo con tres parámetros empieza a decaer rápidamente un poco antes de llegar al mínimo de difracción para las energías intermedias. Más adelante mostraremos que al introducir un nuevo parámetro al modelo se corrige este problema.

Finalmente mostraremos los ajustes realizados para colisiones  $pp \rightarrow pp$  y colisiones  $\bar{p}p \rightarrow \bar{p}p$

## Ajustes para colisiones $pp \rightarrow pp$

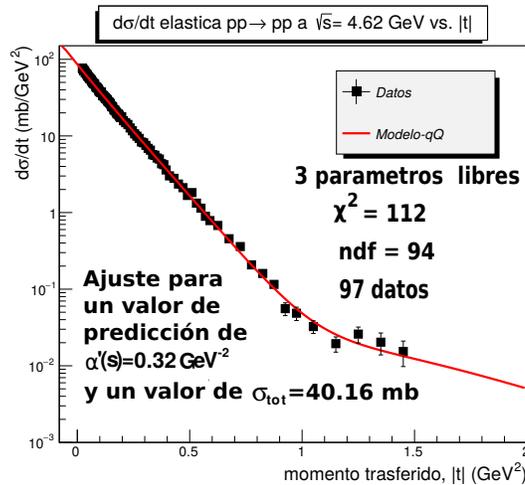


Figura 6.1: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a  $\sqrt{s} = 4.62$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomeron elástico en todo el rango de  $|t|$ .

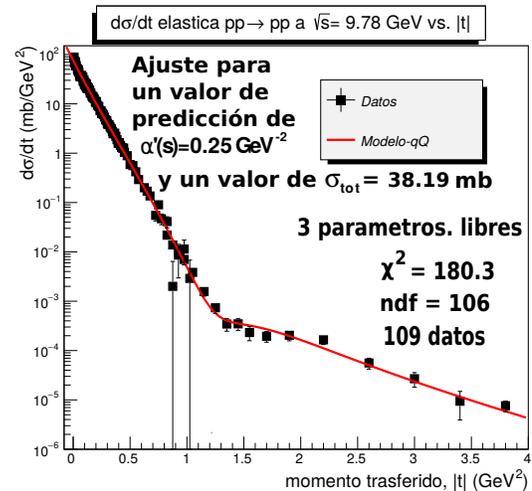


Figura 6.2: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a  $\sqrt{s} = 9.78$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomeron elástico en todo el rango de  $|t|$ .

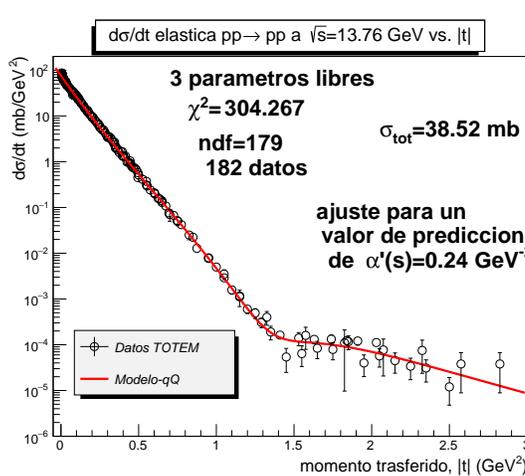


Figura 6.3: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a  $\sqrt{s} = 13.76$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomeron elástico en todo el rango de  $|t|$ .

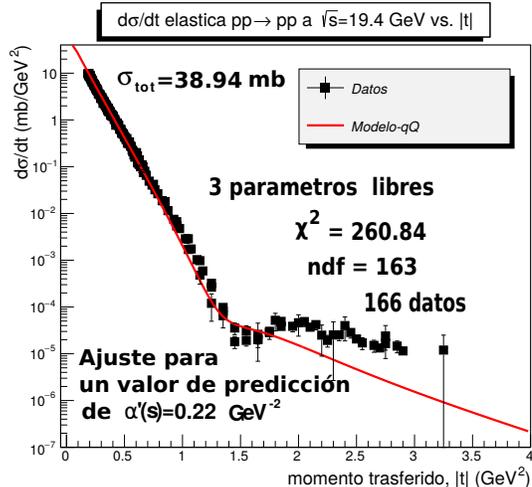


Figura 6.4: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a  $\sqrt{s} = 19.4$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomeron elástico en todo el rango de  $|t|$ .

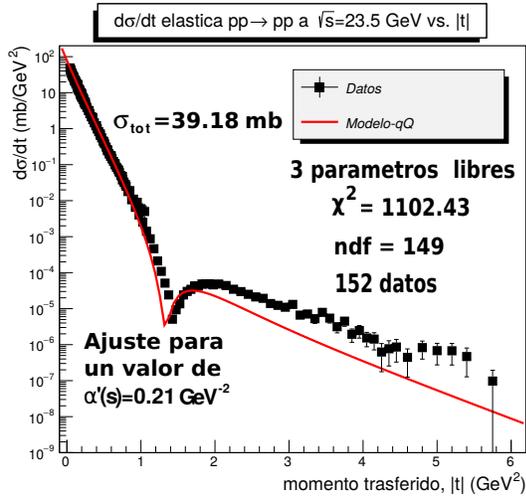


Figura 6.5: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a  $\sqrt{s} = 23.5$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

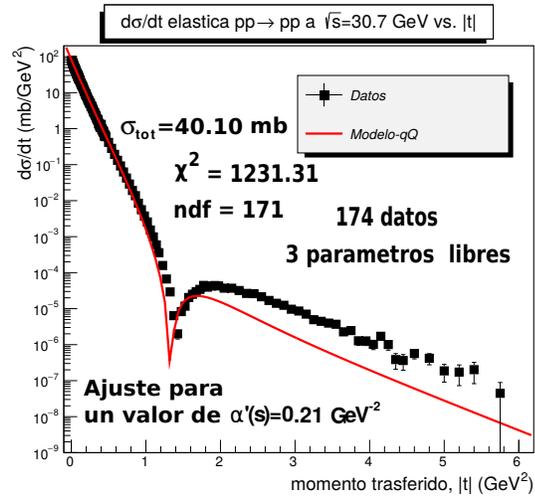


Figura 6.6: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a  $\sqrt{s} = 30.7$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

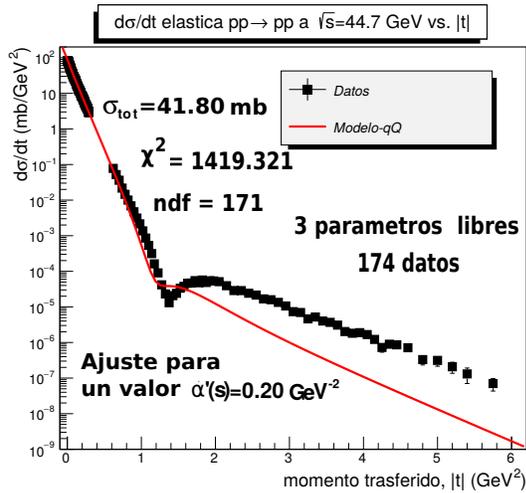


Figura 6.7: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a  $\sqrt{s} = 44.7$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

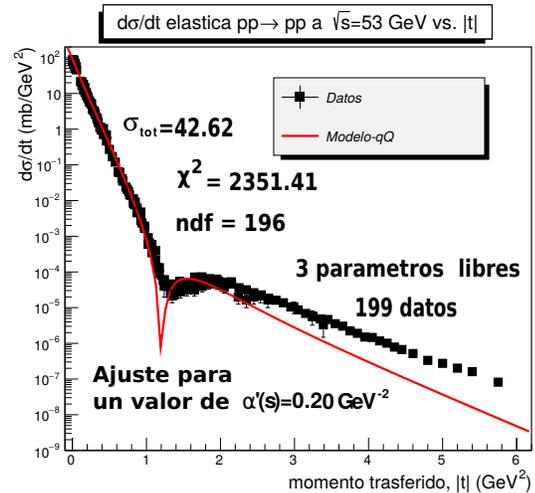


Figura 6.8: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a  $\sqrt{s} = 53$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

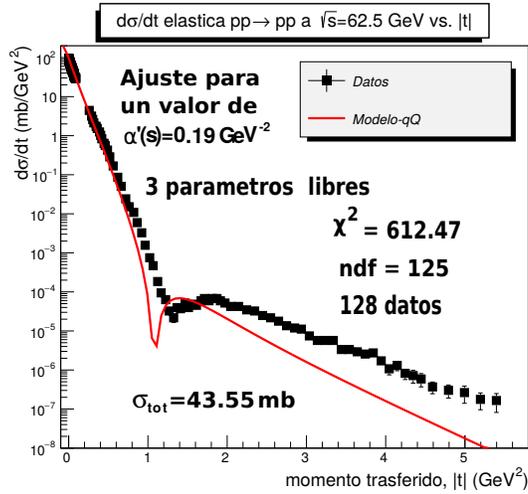


Figura 6.9: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a  $\sqrt{s} = 62.5$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

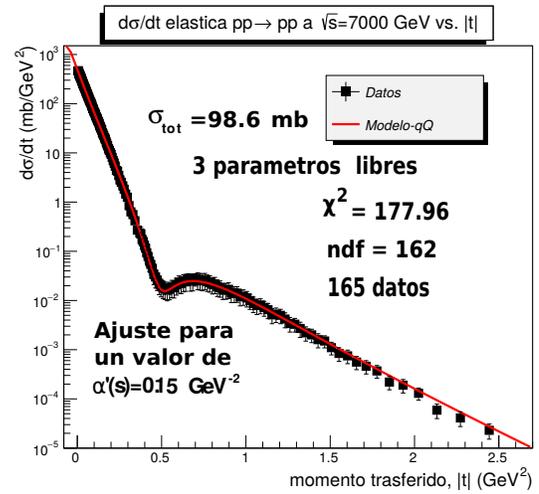


Figura 6.10: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a  $\sqrt{s} = 7000$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

### Ajustes para colisiones $\bar{p}p \rightarrow \bar{p}p$

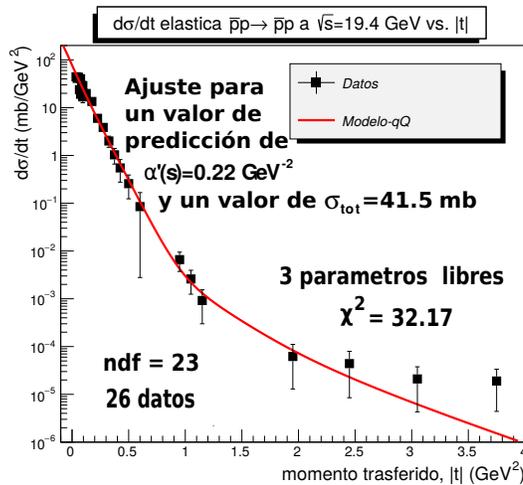


Figura 6.11: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones antiprotón-protón a  $\sqrt{s} = 19.4$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

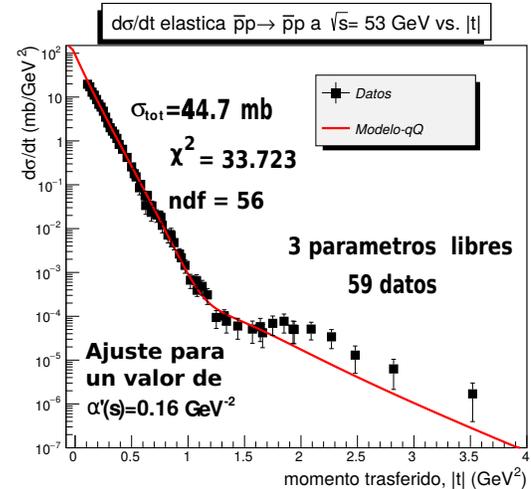


Figura 6.12: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones antiprotón-protón a  $\sqrt{s} = 53$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

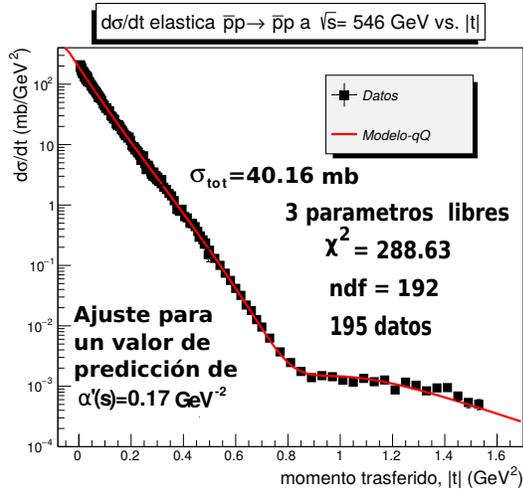


Figura 6.13: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones antiprotón-protón a  $\sqrt{s} = 546$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

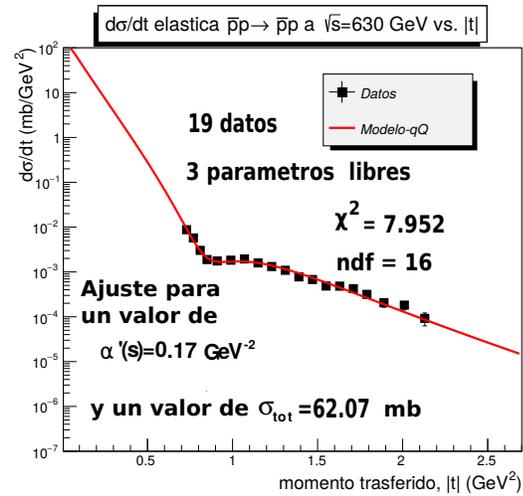


Figura 6.14: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones antiprotón-protón a  $\sqrt{s} = 630$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

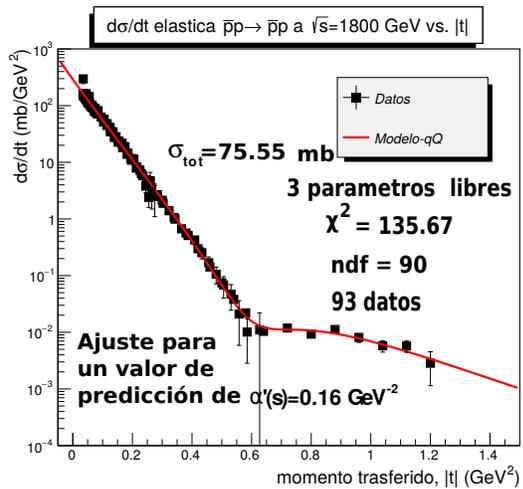


Figura 6.15: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones antiprotón-protón a  $\sqrt{s} = 1800$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

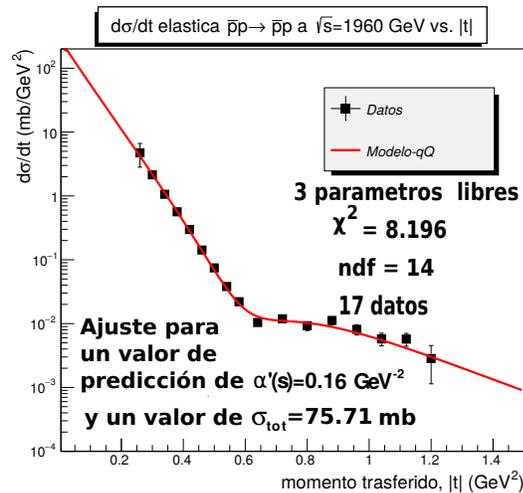


Figura 6.16: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones antiprotón-protón a  $\sqrt{s} = 1960$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

## Radio del protón en función de la energía

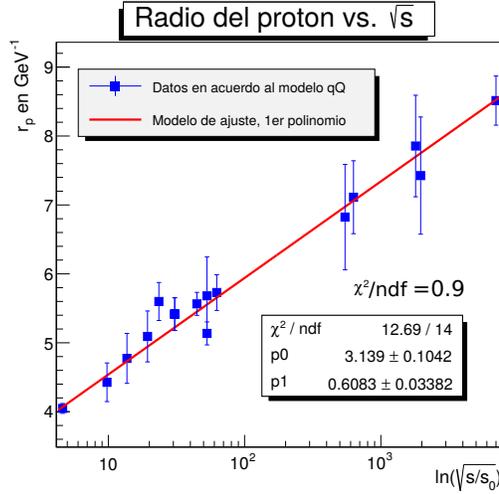


Figura 6.17: La dependencia de  $r_p$  en  $\text{GeV}^{-1}$  del  $\ln\left(\sqrt{S/S_0}\right)$ .

### Pendiente de la trayectoria del pomerón

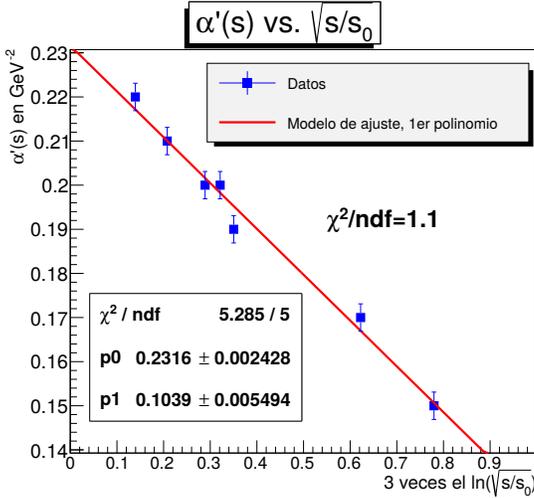


Figura 6.18: La dependencia de  $\alpha'$  en  $\text{GeV}^{-2}$  del logaritmo del logaritmo del logaritmo de  $\left(\sqrt{s/s_0}\right)$ .

La figura 6.17 muestra un incremento en el radio del protón conforme la energía aumenta. Los cuadrillos azules representan los parámetros que fueron arrojados durante los ajustes para cada una de las energías y las diferentes pendientes de la trayectoria del pomerón. En seguida veremos como es que cambia  $\alpha'$  como función de la energía. La curva de color rojo es el modelo de predicción y su representación matemática está dada por la parametrización:

También la pendiente de la trayectoria del pomerón  $\alpha'$  cambia como función de la energía. La figura 6.18 muestra el comportamiento de  $\alpha'$  conforme la energía aumenta. Para linealizar el ajuste se toma el logaritmo a las energías tres veces, la tabla 6.1 muestra estos datos.

La parametrización de  $\alpha'$  en función de  $\sqrt{s}$  es:

$$\alpha'(s) = (0.232 \pm 0.002) - (0.104 \pm 0.006) \ln \ln \ln \left( \sqrt{s/s_0} \right) \quad (6.3)$$

$\sqrt{s}(\text{GeV})$	$\alpha'(s)(\text{GeV}^{-2})$
23.5	$0.22 \pm 0.003$
30.7	$0.21 \pm 0.003$
44.7	$0.20 \pm 0.003$
53.0	$0.20 \pm 0.003$
62.5	$0.19 \pm 0.003$
7000	$0.15 \pm 0.003$
630	$0.17 \pm 0.031$

Tabla 6.1: Se muestran los valores obtenidos de  $\alpha'$  usados en los ajustes en colisiones protón(antiprotón)-protón.

Los primeros 5 valores de  $\alpha'$  mostrados en la tabla 6.1 se calculan a partir de

$$\alpha'(s) = (0.215 \pm 0.011) - (0.031 \pm 0.012) \log(s/549) \quad (6.4)$$

el cual se encuentra en la referencia [33], y surge como consecuencia de fits a datos experimentales correspondientes a las energías entre 23.5 GeV a 62.5 GeV para colisiones protón-protón. Los valores de  $\alpha' = 0.17 \text{ GeV}^{-2}$  y  $\alpha' = 0.15 \text{ GeV}^{-2}$  se obtienen de las referencias [33] y [5] respectivamente. Los valores de  $\alpha'$  (para las otras energías) que no se muestran en la tabla 6.1 se predicen por medio de la ecuación (6.3) el cual se obtiene mediante el ajuste a los datos de la tabla 6.1.

### Parámetros obtenidos en ajustes protón-protón y antiprotón-protón

En las tablas 6.2 y 6.3 se muestran cada uno de los parámetros arrojados en los fits a los datos experimentales. Es claro que para algunas energías, algunos de estos parámetros no son los más adecuados, debido a que, como podemos ver en las gráficas (ver las figuras 6.4 a 6.8), solo los datos para  $|t| < 1 \text{ GeV}^2$  aproximadamente, se ajustan correctamente al modelo, luego, estos parámetros no pueden ser los que mejor describen los datos para el cual  $|t| > 1$  en el modelo de Grichine. Los valores obtenidos para  $|\alpha_p|$  (el valor absoluto se debe a que un valor positivo o negativo es indiferente en los ajustes), dan información de la profundidad del minino de difracción, si  $|\alpha_p| < 1$  implica una mayor profundidad y una menor profundidad si  $|\alpha_p| > 1$ . Con respecto a los resultados arrojados para  $\chi^2/ndf$  que deben ser próximos 1 (ver Apéndice A), algunos no son buenos (ver Tablas 6.2 y 6.3), se encuentran muy alejados de 1 para las energías entre 23.5-62.5 GeV. Esto se debe a que el modelo  $qQ$  con pomerón elástico no describe correctamente estos datos, por lo que Minuit no puede hacer una buena aproximación a nuestra función chi-cuadrado. Los valores para el coeficiente de pendiente nuclear ( $B_{13}$ ) mostrado en las tablas, concuerda con lo ya antes mencionado en el capítulo anterior, es decir,  $0 < B_{13} < 1$ . En cuanto al radio del protón se realizó una gráfica donde se muestra el comportamiento a los datos obtenidos en los ajustes comportamiento.

$\sqrt{s}$ (GeV)	$B_{13}$	$r_p(\text{GeV}^{-1})$	$ \alpha_p $	$\chi^2/ndf$
4.62	$0.042 \pm 0.004$	$4.05 \pm 0.07$	$6.7 \pm 0.2$	1.2
9.78	$0.0166 \pm 0.0008$	$4.4 \pm 0.3$	$6.5 \pm 0.3$	1.7
13.76	$0.0122 \pm 0.0007$	$4.8 \pm 0.4$	$5.5 \pm 0.4$	1.8
19.4	$0.0138 \pm 0.0005$	$5.1 \pm 0.4$	$2.2 \pm 0.2$	1.6
23.5	$0.0165 \pm 0.0002$	$5.6 \pm 0.3$	$0.7 \pm 0.1$	7.4
30.7	$0.0152 \pm 0.0002$	$5.4 \pm 0.2$	$0.4 \pm 0.1$	7.2
44.7	$0.0205 \pm 0.0003$	$5.6 \pm 0.2$	$1.3 \pm 0.1$	8.3
53.0	$0.0276 \pm 0.0002$	$5.1 \pm 0.2$	$0.8 \pm 0.1$	12
62.5	$0.0268 \pm 0.0004$	$5.7 \pm 0.3$	$1.2 \pm 0.1$	4.9
7000	$0.0631 \pm 0.0012$	$8.5 \pm 0.3$	$7.9 \pm 0.6$	1.1

Tabla 6.2: Se muestran los parámetros obtenidos y los valores para  $\sigma_{tot}$ ,  $\sqrt{s}$  y  $\alpha'$  usados en los ajustes en colisiones protón-protón.

$\sqrt{s}$ (GeV)	$B_{13}$	$r_p(\text{GeV}^{-1})$	$ \alpha_p $	$\chi^2/ndf$
19.4	$0.026 \pm 0.008$	$5.3 \pm 0.26$	$8.8 \pm 1.9$	1.4
53	$0.013 \pm 0.002$	$5.7 \pm 1.7$	$6.0 \pm 0.8$	0.6
546	$0.026 \pm 0.001$	$6.8 \pm 0.7$	$6.2 \pm 0.2$	1.5
630	$0.022 \pm 0.001$	$7.1 \pm 0.5$	$5.2 \pm 0.4$	0.5
1800	$0.039 \pm 0.001$	$7.6 \pm 0.7$	$8.5 \pm 0.4$	1.5
1960	$0.04 \pm 0.01$	$7.4 \pm 2.0$	$9.2 \pm 0.5$	0.6

Tabla 6.3: Se muestran los parámetros obtenidos y los valores para  $\sigma_{tot}$ ,  $\sqrt{s}$  y  $\alpha'$  usados en los ajustes en colisiones antiprotón-protón.

## 6.3 Ajustes introduciendo una normalización global

Se dijo que introducir un nuevo parámetro libre ayuda a mejorar los fits, este nuevo parámetro multiplica la amplitud de dispersión (Ecu. (5.2)) de la siguiente forma:

$$F(s, t) = A(s)[F_1(s, t) - F_2(s, t) - F_3(s, t)] \quad (6.5)$$

donde  $A(s)$  es el nuevo parámetro libre que depende de la energía. La función chi-cuadrado se construye al igual que la ecuación (6.2) pero ahora nuestra función  $F(s, t)$  está dada por la ecuación (6.5). El método de minimización es el mismo que se mencionó anteriormente.

En los ajustes se obtuvo el valor del parámetro  $A(s)$  para cada energía, estos se muestran en las tablas 6.4 y 6.5. Los valores de  $A(s)$  se ajustan (ver Figuras 6.19 y 6.20) en función de  $\sigma_{tot}$  y  $\sqrt{s}$ , de este modo se puede expresar  $A(s)$  como una función de  $\sigma_{tot}$  o de  $\sqrt{s}$  (Ecuaciones 6.6 y 6.7)

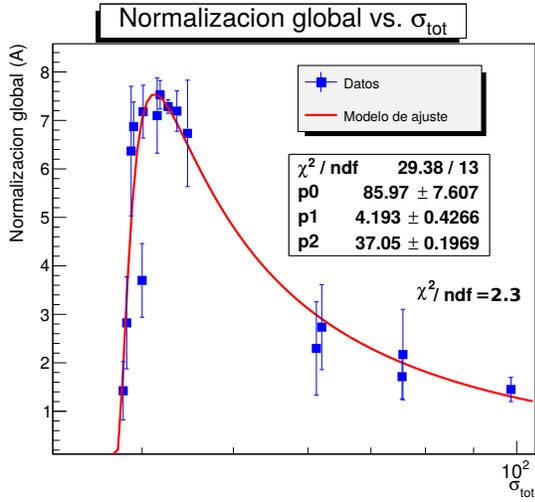


Figura 6.19: La dependencia de  $A$  de  $\sigma_{tot}$ . La curva es el modelo de predicción y está dada por la parametrización (6.6)

$$A(\sigma_{tot}) = \frac{(85.97 \pm 7.61) \exp[(4.19 \pm 0.43)/(\sigma_{tot} - (37.05 \pm 0.20))]}{\sigma_{tot} - (37.05 \pm 0.20)} \quad (6.6)$$

$$A(s) = \frac{(40.74 \pm 5.76) \exp \left[ \frac{(-13.46 \pm 1.06)}{(\sqrt{\frac{s}{s_0}} - (6.08 \pm 0.78))} - (0.61 \pm 0.03) \ln(\sqrt{\frac{s}{s_0}}) \right]}{\sqrt{\frac{s}{s_0}} - (6.08 \pm 0.78)} \quad (6.7)$$

Las ecuaciones (6.6) y (6.7) son parametrizaciones empíricas que permiten encontrar una apropiada descripción de la amplitud de dispersión a cualquier energía. Aún falta un entendimiento físico de este parámetro.

$\sqrt{s}$ (GeV)	$A(s)$
4.62	$3.7 \pm 0.9$
9.78	$1.4 \pm 0.2$
13.76	$2.9 \pm 1.0$
19.4	$6.4 \pm 1.3$
23.5	$6.9 \pm 0.5$
30.7	$7.2 \pm 0.3$
44.7	$7.5 \pm 0.1$
53.0	$7.2 \pm 0.1$
62.5	$7.2 \pm 0.1$
7000	$1.4 \pm 0.1$

Tabla 6.4: Parámetro normalización global colisiones protón-protón.

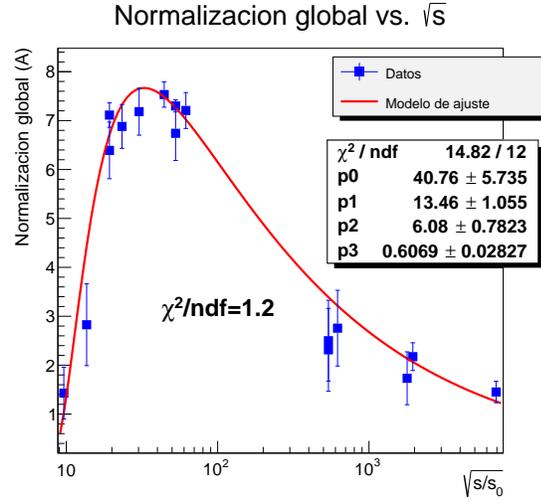


Figura 6.20: La dependencia de  $A$  de  $\sqrt{s}$ . La curva es el modelo de predicción y está dada por la parametrización (6.7)

$\sqrt{s}$ (GeV)	$A(s)$
19.4	$7.1 \pm 0.8$
53	$6.3 \pm 1.0$
546	$2.3 \pm 1.0$
630	$2.7 \pm 1.5$
1800	$1.7 \pm 0.4$
1960	$2.17 \pm 0.9$

Tabla 6.5: Parámetro normalización global en colisiones antiprotón-protón.

Finalmente, para los fits a datos experimentales que se mostraran a continuación, la

función  $F(s, t)$  con la cual se construye la función  $\chi^2$  es:

$$F(s, t) = \underbrace{\frac{(85.97 \pm 7.61) \exp \left[ \frac{(4.19 \pm 0.43)}{\sigma_{tot} - (37.05 \pm 0.20)} \right]}{\sigma_{tot} - (37.05 \pm 0.20)}}_{=A \quad \text{Ecu. (6.6)}} \{F_1(s, t) - F_2(s, t) - F_3(s, t)\} \quad (6.8)$$

### Ajustes para colisiones $pp \rightarrow pp$

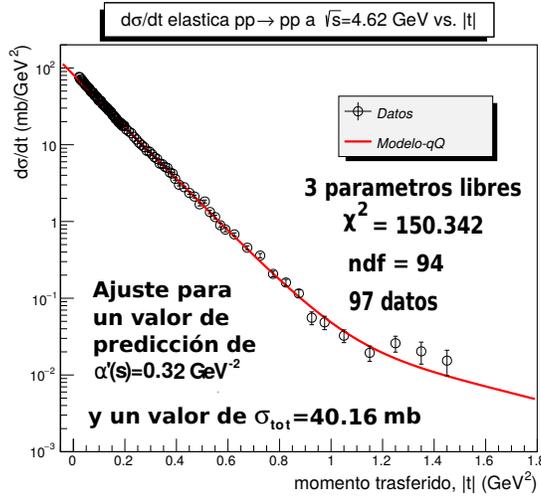


Figura 6.21: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a  $\sqrt{s} = 4.62$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

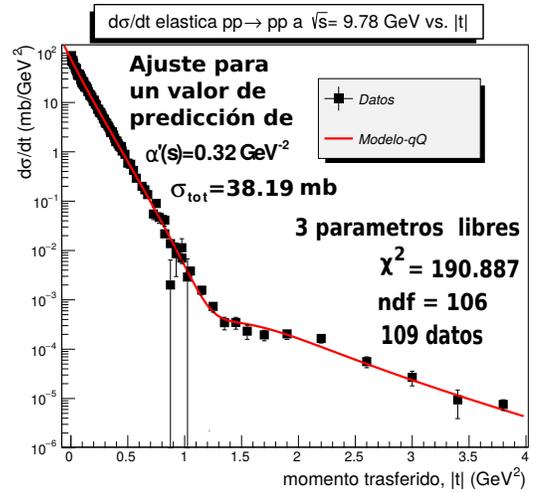


Figura 6.22: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a  $\sqrt{s} = 9.78$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

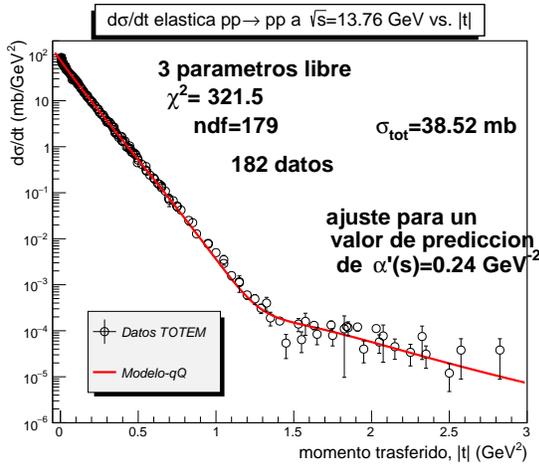


Figura 6.23: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a  $\sqrt{s} = 13.76$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

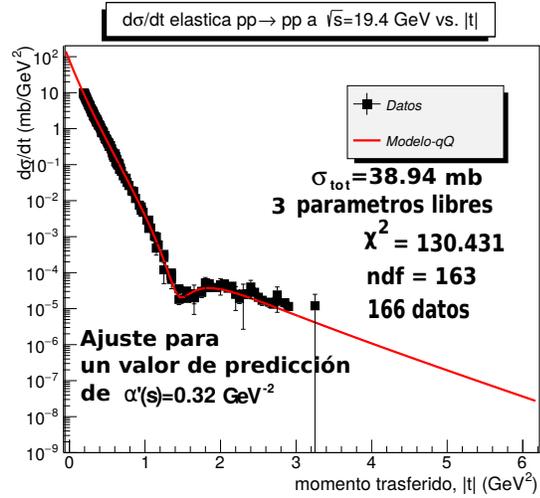


Figura 6.24: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a  $\sqrt{s} = 19.4$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

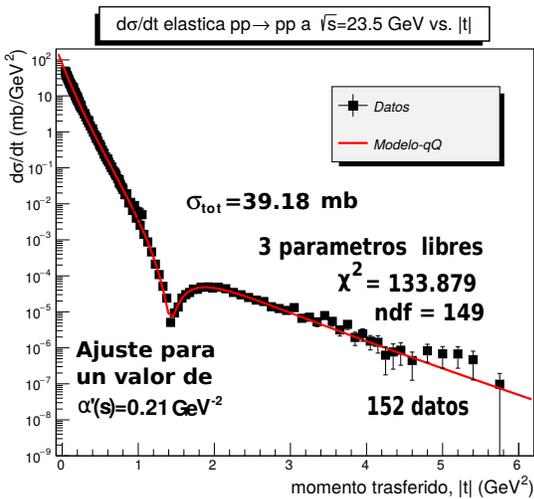


Figura 6.25: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a  $\sqrt{s} = 23.5$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

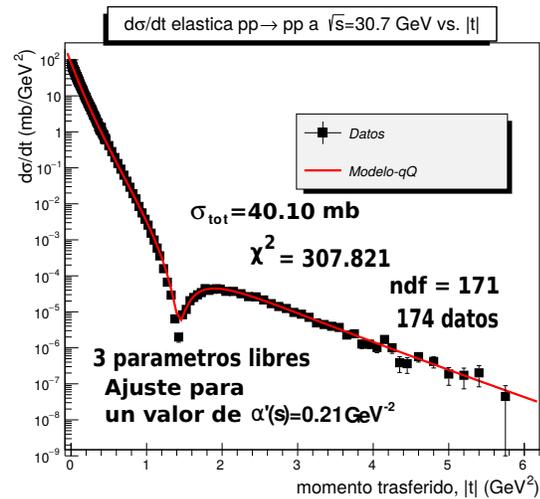


Figura 6.26: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a  $\sqrt{s} = 30.7$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

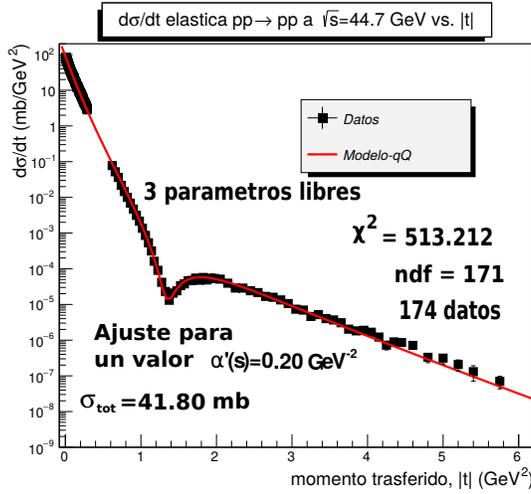


Figura 6.27: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a  $\sqrt{s} = 44.7$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

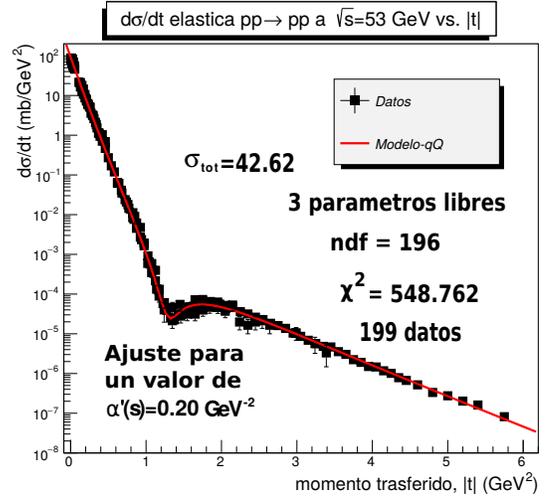


Figura 6.28: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a  $\sqrt{s} = 53$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

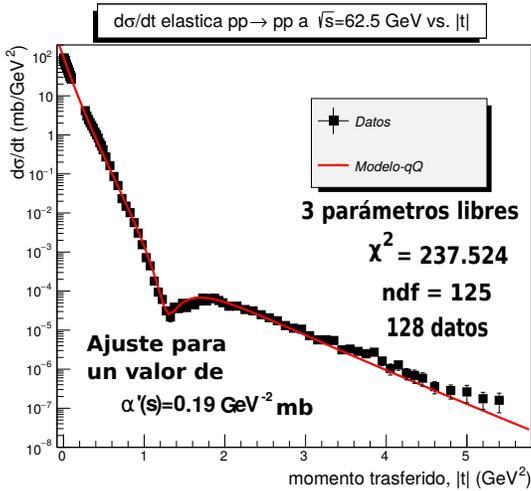


Figura 6.29: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a  $\sqrt{s} = 62.5$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

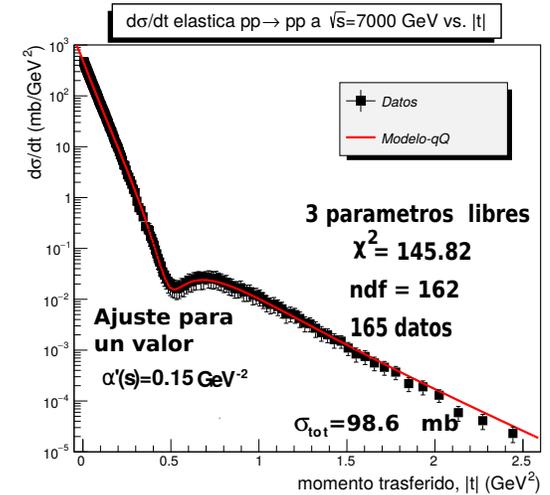


Figura 6.30: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones protón-protón a  $\sqrt{s} = 7000$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

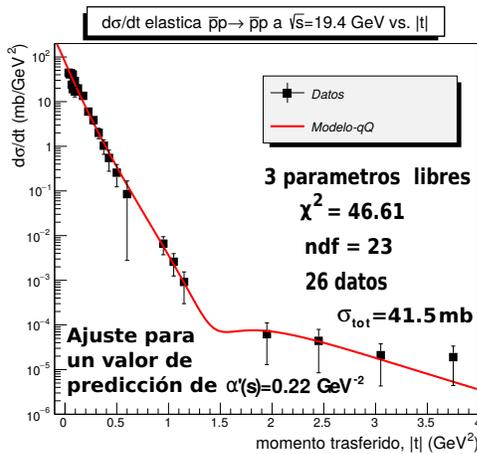
Ajustes para colisiones  $\bar{p}p \rightarrow \bar{p}p$ 

Figura 6.31: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones antiprotón-protón a  $\sqrt{s} = 19.4$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

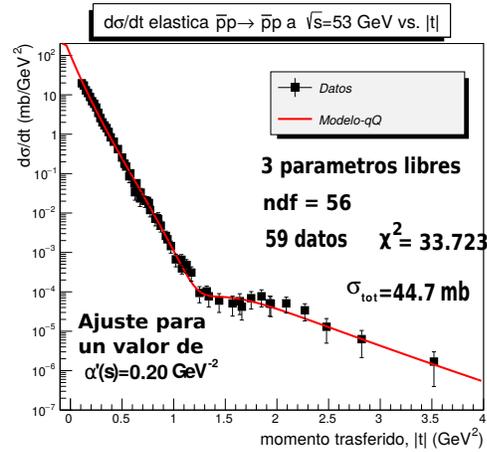


Figura 6.32: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones antiprotón-protón a  $\sqrt{s} = 7000$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

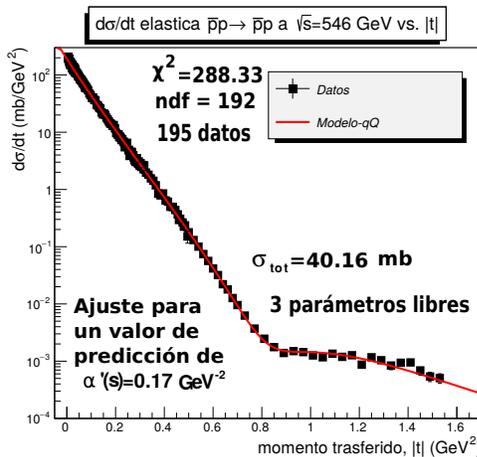


Figura 6.33: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones antiprotón-protón a  $\sqrt{s} = 546$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

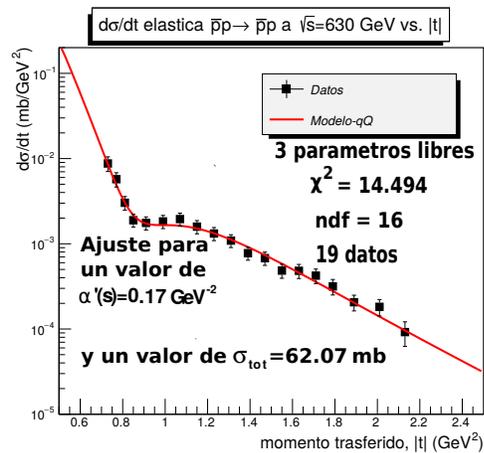


Figura 6.34: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones antiprotón-protón a  $\sqrt{s} = 630$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con pomerón elástico en todo el rango de  $|t|$ .

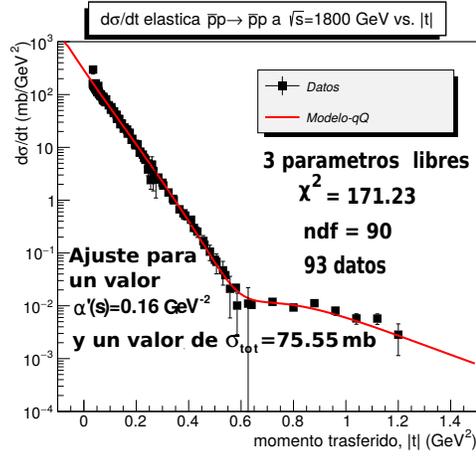


Figura 6.35: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones antiprotón-protón a  $\sqrt{s} = 1800$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con poméron elástico en todo el rango de  $|t|$ .

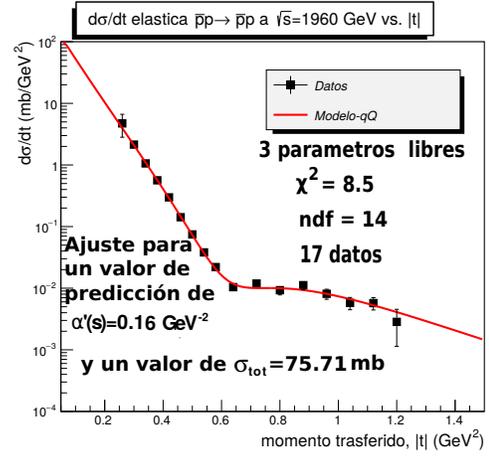


Figura 6.36: Se muestra el ajuste a los datos de sección eficaz diferencial elástica en colisiones antiprotón-protón a  $\sqrt{s} = 1960$  GeV. La curva es el modelo  $qQ$  con poméron elástico en todo el rango de  $|t|$ .

## Radio del protón introduciendo una normalización global

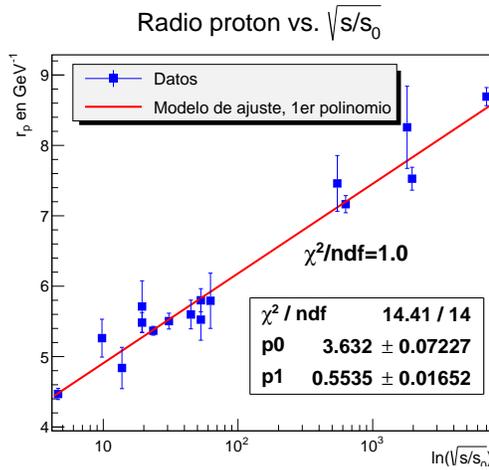


Figura 6.37: La dependencia de  $r_p$  en  $\text{GeV}^{-1}$  de  $\ln(\sqrt{s/s_0})$

En la figura 6.37 también se puede apreciar un incremento en el radio del protón conforme la energía aumenta. Los cuadros pequeños azules representan los parámetros que fueron arrojados durante los ajustes para cada una de las energías. La curva de color rojo es el modelo de predicción y su representación matemática está dada por la parametrización:

$$r_p = (3.63 \pm 0.07 + (0.55 \pm 0.02) \ln \left( \sqrt{\frac{s}{s_0}} \right))$$

## Parámetros obtenidos en ajustes protón-protón y antiprotón-protón considerando la normalización global $A(s)$

Como podemos ver, los resultados mostrados en las tablas 6.6 y 6.7 para  $\chi^2/ndf$  son un poco más confiables, estos valores son respaldados por la buena descripción del modelo a los datos experimentales, el cual se puede apreciar en cada una de las gráficas. Las características de los parámetros  $B_{13}$ ,  $r_p$  y  $|\alpha'|$  ya se mencionaron

anteriormente. Sin embargo, sus valores cambiaron, la razón se debe a la mejora en los fits, es decir, para la nueva función chi-cuadrado que se construye ahora, Minuit puede hacer una mejor aproximación, esto implica valores de chi-cuadrado más bajos, y así, los parámetros que se obtienen para esta nueva función chi-cuadrado son más adecuados.

$\sqrt{s}(\text{GeV})$	$B_{13}$	$r_p(\text{GeV}^{-1})$	$ \alpha_p $	$\chi^2/ndf$
4.62	$0.12 \pm 0.01$	$4.47 \pm 0.08$	$5.7 \pm 0.7$	1.6
9.78	$0.0171 \pm 0.0009$	$5.3 \pm 0.3$	$3.2 \pm 0.3$	1.8
13.76	$0.0145 \pm 0.0007$	$4.8 \pm 0.3$	$3.4 \pm 0.3$	1.7
19.4	$0.0172 \pm 0.0005$	$5.5 \pm 0.1$	$1.7 \pm 0.1$	0.8
23.5	$0.0213 \pm 0.0002$	$5.37 \pm 0.01$	$0.78 \pm 1.4$	0.9
30.7	$0.0186 \pm 0.0003$	$5.5 \pm 0.1$	$0.8 \pm 0.06$	1.8
44.7	$0.043 \pm 0.001$	$5.6 \pm 0.2$	$1.42 \pm 0.06$	3.0
53.0	$0.048 \pm 0.002$	$5.8 \pm 0.2$	$1.68 \pm 0.07$	2.8
62.5	$0.039 \pm 0.002$	$5.8 \pm 0.3$	$1.7 \pm 0.1$	1.9
7000	$0.0489 \pm 0.0008$	$8.7 \pm 0.1$	$8.0 \pm 0.6$	0.9

Tabla 6.6: En la tabla se muestran parámetros obtenidos en los ajustes protón-protón y los valores para  $\sigma_{tot}$  y  $\sqrt{s}$  usados en los ajustes.

$\sqrt{s}(\text{GeV})$	$B_{13}$	$r_p(\text{GeV}^{-1})$	$ \alpha_p $	$\chi^2/ndf$
19.4	$0.04 \pm 0.02$	$5.7 \pm 0.4$	$2.6 \pm 3.3$	2.0
53	$0.021 \pm 0.004$	$5.5 \pm 0.3$	$3.9 \pm 0.7$	0.6
546	$0.027 \pm 0.001$	$7.5 \pm 0.4$	$6.1 \pm 0.3$	1.5
630	$0.03 \pm 0.01$	$7.2 \pm 0.1$	$5.8 \pm 0.8$	0.9
1800	$0.028 \pm 0.003$	$8.3 \pm 0.6$	$9.4 \pm 0.5$	1.9
1960	$0.050 \pm 0.008$	$7.5 \pm 0.2$	$8.7 \pm 0.5$	0.6

Tabla 6.7: En la tabla se muestran parámetros obtenidos en los ajustes antiprotón-protón y los valores para  $\sigma_{tot}$  y  $\sqrt{s}$  usados en los ajustes.

# CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

---

En el presente trabajo se hizo un corto estudio a un modelo de dispersión elástica de nucleones, particularizado a los protones. A lo largo de su desarrollo probamos que el modelo que propone Grichine para la descripción de datos de sección eficaz diferencial elástica, tiene dificultades en determinar la posición del mínimo de difracción a ciertas energías intermedias en colisiones protón-protón y antiprotón-protón.

Nuestro estudio muestra que para que el modelo ( $qQ$ ) con pomerón elástico describa apropiadamente todos los datos accesibles de sección eficaz diferencial para dispersión elástica protón-protón y antiprotón-protón, se necesita una modificación a la amplitud de dispersión propuesta por Grichine. La amplitud de dispersión debe ser modificada en términos de una normalización que depende de la sección eficaz total o la energía. Cuando en el ajuste incluimos un parámetro adicional correspondiente a esta normalización, encontramos una buena descripción de los datos, pero también, se puede ver como depende esta normalización de  $\sigma_{tot}$  (Fig. 6.19) y de la energía de colisión  $\sqrt{s}$  (Fig. 6.20). Una posible explicación, es la existencia de un valor umbral en el tamaño del protón para el cual la amplitud de dispersión descrita en términos de interacción quark-diquark es máxima, esto ocurre para una sección eficaz cercana a los 45 mb, por debajo de este valor hay un aumento lineal de la amplitud de dispersión, por lo que se hace necesario  $A(s)$  para poder alcanzar dicho valor máximo, y por encima de 45 mb la normalización empieza a ser menos necesaria. Esto podría implicar la existencia de un tamaño crítico del protón, donde la interacción quark-diquark es dominante, esto sería por encima de 45 mb ya que esta interacción se va relajando lentamente con la energía.

Otro aspecto importante, es la variación del radio del protón como función de la energía, claramente podemos ver en los dos gráficos realizados (ver figuras 6.17 y 6.37) la tendencia lineal con pendiente positiva que muestran los ajustes a medida que la energía aumenta, implicando un incremento en la sección eficaz de protón. Por otra parte, es de interés mencionar que la pendiente de la trayectoria del pomerón (Fig. 6.18) es muy importante en los ajustes, esta necesariamente necesita variar con la energía para obtener una variación correcta del radio del protón en función de la energía.

En el trabajo se incluyó también el caso para el cual  $s_0 = 1/\alpha'$ , esta consideración ayuda a mejorar considerablemente los ajustes. Este procedimiento está respaldado por Donnachie en el texto “cromodinámica cuántica y el pomerón” el cual se cita

varias veces en este proyecto de grado.

# BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] MAZZITELLI, JAVIER. *Efectos de la cromodinámica cuántica en la física del bosón de Higgs*. Tesis doctoral, Universidad de Buenos Aires. Págs. 11–15, 2016
- [2] DAVID GRIFFITHS. *INTRODUCTION TO ELEMENTARY PARTICLES*. Reed College. Págs. 189–296
- [3] IVAN ROMO. *Estudio de la estructura de la sección eficaz diferencial elástica  $\bar{p}p - p$  a partir de un modelo quark-diquark y con una parametrización general*. Tesis pregrado, Universidad de Nariño, Colombia, págs. 3–10, 2015.
- [4] CARLOS AVILA BERNAL (2013). *Colisiones elásticas y sección eficaz total hadrón-hadrón a altas energías*. Revista de la academia colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Diciembre 2014. *Rev. Acad. Colomb.*
- [5] V.M. GRICHINE. *Nucleon elastic scattering in quark-diquark representation with springy Pomeron*. Lebedev Physical Institute, Moscow, Russia, 2014.  
arXiv:1404.5768
- [6] V.M. GRICHINE, N.I. STARKOV Y N.P. ZOTOV. *Quark-diquark model for  $p(\bar{p}) - p$  elastic scattering at high energies*. *Eur. phys. J. C* 73 (2013)2320.  
arXiv:1212.2111
- [7] ALICE COLABORATION (2008). *The ALICE Experiment at the CERN Large Hadron Collider*. Institute of physics Publishing and SISSA.
- [8] ATLAS COLABORATION (2008). *The ATLAS Experiment at the CERN Large Hadron Collider*. Institute of physics Publishing and SISSA.
- [9] CMS COLABORATION (2008). *The CMS Experiment at the CERN Large Hadron Collider*. Institute of physics Publishing and SISSA.
- [10] LHCb COLABORATION (2008). *The LHCb Experiment at the CERN Large Hadron Collider*. Institute of physics Publishing and SISSA.
- [11] TOPICS LHC. [home.web.cern](http://home.web.cern)
- [12] <http://totem.web.cern.ch/Totem>
- [13] <http://www.ge.infn.it/totem/index.html>
- [14] MARIA KUHN. *Emittance Preservation at the LHC*. University of Hamburg  
March 2013.CERN-THESIS-2013

- [15] DOMINIK MIERZEJEWSKI. *Roman Pot Detector Modelling and Proton Reconstruction in the TOTEM Experiment at the LHC*. Tesis CERN, 2010.CERN-THESIS-2010
- [16] Stanislaw Mrowczynski. Quark-Gluon Plasma. Poland and Institute of Physics, Pedagogical University. arXiv:nucl-th/9905005
- [17] Rhorry Gauld, Ulrich Haisch. Beauty-quark and charm-quark pair production asymmetries at LHCb, Pedagogical University. PhysRevD.92.034007
- [18] THE MoEDAL COLLABORATION. arXiv:1604.06645
- [19] Delivered Luminosity versus time for 2011-2017 (p-p data only) Luminosity ATLAS Public Results <https://twiki.cern.ch>
- [20] Public CMS Luminosity Information <https://twiki.cern.ch>
- [21] <https://www.lch-closer.es>
- [22] LUIS DE LA PEÑA. *Introducción a la mecánica cuántica*. Tercera edición, Fondo de la cultura económica, México, DF, 2006, págs. 723–749.
- [23] DAVID J. GRIFFITHS. *Introduction to Quantum Mechanics*. Second published, Pearson Prentice Hall, United States of America, 2005, págs. 394–405.
- [24] VINCENZO BARONE y ENRICO PREDAZZI. *High-Energy Particle Diffraction*. First published, Springer, Germany, 2002, págs. 35–52, 83–104.
- [25] S. DONNACHIE, G. DOSCH, P. LANDSHOFF Y O. NACHTMANN. *Pomeron Physics and QCD*. First published, Cambridge, New York, 2002, págs. 1–6, 47–60.
- [26] ANTONIO FERRER SORIA Y EDUARDO ROS MARTÍNEZ. *Física de partículas y astropartículas*. Segunda edición, Universidad de Valencia, 2005, págs. 369–371
- [27] THE CMS COLLABORATION. *Measurement of the inclusive 3-jet production differential cross section in proton-proton collisions at 7 TeV and determination of the strong coupling constant in the TeV range*. arXiv:1412.1633
- [28] HARVEY BYRON MEYER *Glueball Regge trajectories*. Lincoln College, Oxford, 2005. arXiv:hep-lat/0508002
- [29] E. MARTYNOV. *Proton (antiproton) elastic scattering at energies from FNAL to LHC in the tripole pomeron-odderon model*. Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, 03680 Kiev, Ukraine, 2013. arXiv:1305.3093
- [30] USER'S GUIDE. *ROOT User's Guide: 6 Release Cycle*. <https://root.cern.ch/guides/users-guide>

- 
- [31] PDG PARTICLE DATA GROUP. *Data files and plots of cross-sections and related quantities in the 2014 Review of Particle Physics*. Hadron(photon)-hadron(photon) collisions. <http://pdg.lbl.gov/2014/hadronic-xsections/>
- [32] U. AMALDI. *Impact parameter interpretation of proton-proton scattering from a critical review of all ISR data*. CERN, Geneva, Switzerland. <http://hermes.ihep.su:8001>
- [33] UA8 COLLABORATION. *A Study of Inclusive Double-Pomeron-Exchange in  $p(\bar{p}) \rightarrow pX\bar{p}$  at root  $s = 630$  GeV*. Centre d'Etudes Nucleaires-Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France. [arXiv:hep-ex/0205037](https://arxiv.org/abs/hep-ex/0205037)
- [34] WILLIAM C. DAVIDON. *VARIABLE METRIC METHOD FOR MINIMIZATION*. Vol. 1, No. 1, pp. 1-17, February 1991. SIAM J. OPTIMIZATION Vol. 1
- [35] FRED JAMES AND MATTHIAS WINKLER CERN, GENEVA. *MINUIT User's Guide*. June 16, 2004. MINUIT-User's-Guide
- [36] YITHSBEY GIRALDO, FREDY SANTACRUZ. *Guia de Laboratorio de Física 1*. Universidad de Nariño. Págs. 3–10. ISBN:978-958-8609-44-7

# APÉNDICES

## Apéndice A. Mínimos cuadrados

El método para el ajuste de datos utilizado es el de mínimos cuadrados, consiste en encontrar los parámetros que están asociados a una curva que mejor ajusta los datos experimentales. En principio, lo que se hace es minimizar la función[36]:

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i - f(x_i; a_j)}{\delta_i} \right]^2, \quad (6.9)$$

donde  $n$  es el número de puntos  $x_i$ , en el cual se mide la variable  $y_i$  con errores  $\delta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $f(x_i; a_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) es la función teórica que ajusta los datos experimentales y  $a_j$  es el número de parámetros ( $m$ ) para el cual el modelo brinda una mejor descripción a las muestras de datos, además debe cumplirse que  $n > m$ . Para encontrar los  $a_j$  resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial \chi}{\partial a_j} = 0, \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, m \quad (6.10)$$

Por lo general, para poder minimizar  $\chi^2$  es necesario hacerlo mediante métodos numéricos, esto puede facilitarse por medio de programas implementados en un ordenador. Para este propósito hacemos uso del software ROOT.

Para una mejor comprensión del método de mínimos cuadrados tomemos el caso particular para el cual la función teórica es una línea recta, es decir, un polinomio de primer orden. Para este caso  $y = f(x; a, b) = ax + b$ . Los parámetros  $a$  y  $b$  se conocen como pendiente e intercepto respectivamente,  $\chi^2$  para este caso es:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i - b - ax_i}{\delta_i} \right]^2 \quad (6.11)$$

Derivando parcialmente respecto de los parámetros  $a$  y  $b$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^2}{\partial a} &= -2 \sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i - b - ax_i}{\delta_i} \right]^2 x_i = 0 \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial b} &= -2 \sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i - b - ax_i}{\delta_i} \right]^2 = 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

De la ecuación 6.12 obtenemos:

$$\begin{aligned} bS + aS_x - S_y &= 0, \\ bS_x + aS_{xx} - S_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (6.13)$$

donde

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}, \quad S_x = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2}, \quad S_y = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma_i^2}, \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \quad (6.14)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (6.13) obtenemos para  $a$  y  $b$  lo siguiente:

$$a = \frac{S_{xx}S_y - S_x S_{xy}}{\delta}, \quad b = \frac{S S_{xy} - S_x S_y}{\delta} \quad (6.15)$$

con  $\Delta = S S_{xx} - S_x^2$ . Las expresiones para el error estadístico son:

$$(\Delta b)^2 = \frac{S_{xx}}{\Delta} \quad y \quad (\Delta a)^2 = \frac{S}{\Delta} \quad (6.16)$$

## Calidad del ajuste

para tener un ajuste aceptable debemos verificar que (observación  $\nu = \text{ndf} = n - m$ ):

$$0.5 \leq \frac{\chi^2}{\nu} \leq 2.5$$

Donde  $\nu$  es el numero de grados de libertad.

## Reglas para redondeo de números

- Si la primera de las cifras que se descartan es inferior a 5, las cifras que se conservan se dejan inalteradas: 25.74... $\approx$ 25.7
- Si la primera de las cifras que se descartan es mayor a 5, entonces la ultima cifra que se conserva se aumenta en 1: 25.56... $\approx$ 25.6
- Si la primera de las cifras que se descartan es exactamente 5, incrementa en 1 la ultima cifra que se conserva solamente si esta es impar: 28.45... $\approx$ 28.4, 28.35... $\approx$ 28.4

## Apéndice B. Reducción de un parámetro por medio del teorema óptico

Las amplitudes de dispersión (5.3, 5.5, 5.6) en la región frontal para el cual  $t = 0$  son:

$$F_1(s, 0) = \frac{ip\sigma_{tot}}{4\pi} [B_{13} + B_{14} + B_{23} + B_{24}] \quad (6.17)$$

$$F_2(s, 0) = \frac{ip\sigma_{tot}^2}{16\pi^2} \left[ \frac{B_{13}B_{24}}{\xi_{13} + \xi_{24} + \lambda + \eta} + \frac{B_{13}B_{24}}{\xi_{14} + \xi_{23} + \lambda + \eta} \right] \quad (6.18)$$

$$F_3(s, 0) = \frac{ip\sigma_{tot}^2}{32\pi^2} \left[ \frac{B_{13}B_{14}}{\xi_{13} + \xi_{14} + \eta} + \frac{B_{23}B_{24}}{\xi_{24} + \xi_{23} + \eta} + \frac{B_{13}B_{23}}{\xi_{13} + \xi_{23} + \lambda} + \frac{B_{14}B_{24}}{\xi_{14} + \xi_{24} + \lambda} \right] \quad (6.19)$$

haciendo uso de la relación  $B_{23} = B_{14} = \sqrt{B_{13}B_{24}}$  obtenemos:

$$F_1(s, 0) = \frac{ip\sigma_{tot}}{4\pi} \left[ B_{13} + 2\sqrt{B_{13}B_{24}} + B_{24} \right] \quad (6.20)$$

$$F_2(s, 0) = \frac{ip\sigma_{tot}^2}{4\pi} [b_1 B_{13} B_{24} + B_{13} B_{24} b_2] \quad (6.21)$$

$$F_3(s, 0) = \frac{ip\sigma_{tot}^2}{4\pi} \left[ b_3 B_{13} \sqrt{B_{13}B_{24}} + b_4 B_{24} \sqrt{B_{13}B_{24}} + b_5 B_{13} \sqrt{B_{13}B_{24}} + b_6 B_{24} \sqrt{B_{13}B_{24}} \right] \quad (6.22)$$

Donde

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\xi_{13} + \xi_{24} + \lambda + \eta} \right] \\ b_2 &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\xi_{14} + \xi_{23} + \lambda + \eta} \right] \\ b_3 &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\xi_{13} + \xi_{14} + \eta} \right] \\ b_4 &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\xi_{24} + \xi_{23} + \eta} \right] \\ b_5 &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\xi_{13} + \xi_{23} + \lambda} \right] \\ b_6 &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\xi_{14} + \xi_{24} + \lambda} \right] \end{aligned} \quad (6.23)$$

Del teorema óptico:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{p} \operatorname{Im}[F_1(s, 0) - F_2(s, 0) - F_3(s, 0)] \quad (6.24)$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} 1 &= B_{13} + 2\sqrt{B_{13}B_{24}} + [1 - \sigma_{tot} B_{13}(b_1 + b_2)] B_{24} - \\ &\sigma_{tot} B_{13} \sqrt{B_{13}B_{24}}(b_3 + b_5) - \sigma_{tot} \sqrt{B_{13}B_{24}^3}(b_6 + b_4) \end{aligned} \quad (6.25)$$

Factorizando y organizando términos obtenemos

$$[\sigma_{tot} B_{13}(b_3 + b_5) - 2]\sqrt{B_{13}B_{24}} + [\sigma_{tot} B_{13}(b_1 + b_2) - 1]B_{24} + (1 - B_{13}) = 0 \quad (6.26)$$

Haciendo las siguientes definiciones:

$$a_0 = 1 - B_{13} \quad (6.27)$$

$$a_1 = [\sigma_{tot} B_{13}(b_3 + b_5) - 2]\sqrt{B_{13}} \quad (6.28)$$

$$a_2 = [\sigma_{tot} B_{13}(b_1 + b_2) - 1] \quad (6.29)$$

$$a_3 = [\sigma_{tot}(b_6 + b_4)]\sqrt{B_{13}} \quad (6.30)$$

se tiene:

$$a_3 \left( \sqrt{B_{24}} \right)^3 + a_2 \left( \sqrt{B_{24}} \right)^2 + a_1 \left( \sqrt{B_{24}} \right) + a_0 = 0 \quad (6.31)$$

Esta es una ecuación de tercer orden respecto de  $\sqrt{B_{24}}$ . Para resolver esta ecuación se implemento un código c++ el cual se muestra a continuación. De este modo,  $B_{24}$  queda expresado en términos del coeficiente de pendiente nuclear  $B_{13}$ .

## Apéndice C. Identidad Mandelstam

En el caso para el cual  $\hbar = c = 1$ , el cuadrado del cuadrimomento de una partícula es el cuadrado de su masa, esto es:  $p_i^2 = m_i$ , además (Note que:  $p_1 = p_{iA}$ ,  $p_2 = p_{iB}$ ,  $p_3 = p_{fA}$ ,  $p_4 = p_{fB}$ ):

$$s \equiv (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 \quad (6.32)$$

$$t \equiv (p_1 - p_3)^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 \cdot p_3 \quad (6.33)$$

$$u \equiv (p_1 - p_4)^2 = p_1^2 + p_4^2 - 2p_1 \cdot p_4 \quad (6.34)$$

y la expresión para la conservación de la energía y del momento es:  $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$  ó  $p_1 + p_2 - p_3 - p_4 = 0$

Sumando las tres variables Mandelstam ( $s, t, u$ ) se tiene que:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + \underbrace{2p_1^2 + 2p_1 \cdot p_2 - 2p_1 \cdot p_3 - 2p_1 \cdot p_4}_{=2p_1 \cdot (p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = 0} \quad (6.35)$$

en consecuencia

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 = \sum_{i=1}^4 m_i^2 \quad (6.36)$$

## Apéndice D. Solución a la ecuación de tercer grado

```

1 Double_t myFunc(Double_t [], Double_t []);
2 Double_t AmplitudNuclear(Double_t [], Double_t []);
3
4 void ValoresRaices(Double_t a, Double_t b, Double_t c, Bool_t
   complex){
5     TComplex i=TComplex::I();
6     if(complex==kTRUE){
7         Double_t x1=a;
8         TComplex x2=b-i*c;
9         TComplex x3=b+i*c;
10
11         std::cout <<"x1= " <<x1 <<"\n";
12         std::cout <<"x2= " <<x2 <<"\n";
13         std::cout <<"x3= " <<x3 <<"\n";
14     }

```

```

15  if(complex==kFALSE) {
16      Double_t  x1=a;
17      Double_t  x2=b;
18      Double_t  x3=c;
19
20      std::cout <<"x1= "<<x1<<"\n";
21      std::cout <<"x2= "<<x2<<"\n";
22      std::cout <<"x3= "<<x3<<"\n";
23
24  }
25
26 }
27
28 Double_t* RootsCubic(Double_t a0,Double_t a1,Double_t a2,
29     Double_t a3){
30     const Double_t coef[]={a0,a1,a2,a3};
31     Double_t  a=0;
32     Double_t  b=0;
33     Double_t  c=0;
34     Bool_t complex = kFALSE;
35     Double_t r,s,t,p,q,d,ps3,ps33,qs2,u,v,tmp,lnu,lnv,su,sv,y1,
36         y2,y3;
37     if (coef[3] == 0) {std::cout << "coef[3]=0" << "\n";}//
38     return complex;
39     r    = coef[2]/coef[3];
40     s    = coef[1]/coef[3];
41     t    = coef[0]/coef[3];
42     p    = s - (r*r)/3;
43     ps3  = p/3;
44     q    = (2*r*r*r)/27.0 - (r*s)/3 + t;
45     qs2  = q/2;
46     ps33 = ps3*ps3*ps3;
47     d    = ps33 + qs2*qs2;
48     if (d>=0) {
49         complex = kTRUE;
50         d    = TMath::Sqrt(d);
51         u    = -qs2 + d;
52         v    = -qs2 - d;
53         tmp  = 1./3.;
54         lnu  = TMath::Log(TMath::Abs(u));
55         lnv  = TMath::Log(TMath::Abs(v));
56         su   = TMath::Sign(1.,u);
57         sv   = TMath::Sign(1.,v);
58         u    = su*TMath::Exp(tmp*lnu);
59         v    = sv*TMath::Exp(tmp*lnv);

```

```

57     y1 = u + v;
58     y2 = -y1/2;
59     y3 = ((u-v)*TMath::Sqrt(3.))/2;
60     tmp = r/3;
61     a = y1 - tmp;
62     b = y2 - tmp;
63     c = y3;
64 } else {
65     Double_t phi , cphi , phis3 , c1 , c2 , c3 , pis3;
66     ps3 = -ps3;
67     ps33 = -ps33;
68     cphi = -qs2/TMath::Sqrt(ps33);
69     phi = TMath::ACos(cphi);
70     phis3 = phi/3;
71     pis3 = TMath::Pi()/3;
72     c1 = TMath::Cos(phis3);
73     c2 = TMath::Cos(pis3 + phis3);
74     c3 = TMath::Cos(pis3 - phis3);
75     tmp = TMath::Sqrt(ps3);
76     y1 = 2*tmp*c1;
77     y2 = -2*tmp*c2;
78     y3 = -2*tmp*c3;
79     tmp = r/3;
80     a = y1 - tmp;
81     b = y2 - tmp;
82     c = y3 - tmp;
83 }
84 Double_t *m=new Double_t[3];
85 m[0]=a;
86 m[1]=b;
87 m[2]=c;
88 //ValoresRaices(a,b,c,complex);
89 return m;
90 }

```

## Apéndice F. Estructura de código c++ para los ajustes

Con el siguiente código se pueden reproducir todas las gráficas que se han presentado en este trabajo, desde 4.62 GeV hasta 7 Tev. Todos y cada uno de estos códigos se entregaran en una carpeta adicional al documento.

```

1 void ajustedata(){
2     Int_t contador=0, npoints=0;
3     Float_t tt[500]={0};
4     Float_t dsdt[500]={0};

```

```
5 Float_t edsdt [500]={0};
6 Float_t error_e [500]={0};
7 Double_t data1=0,data2=0,data3=0,data4=0, data5=0, data6=0;
8 string name1;// [20];
9 string collision_pp="pp_ds/dt";
10 string collision_ppbar="pbarp_ds/dt";
11 ifstream data;
12 data.open("data_dsdt.dat",ios::in);
13 //data.open("data1960.dat",ios::in);
14 if(!data){
15     cerr <<"no data file found " <<endl;
16 }
17 else
18 {
19     while(!data.eof() && contador <13861){
20         data>>data1;
21         data>>data2;
22         data>>data3;
23         data>>data4;
24         data>>data5;
25         data>>data6;
26         data>>name1;
27         //###Proton-proton###
28         //if(data1 > 6900 && data1 < 7100 /*&& data6 < data3
29         */&& collision_pp == name1&& data2 >0.005 && data2
30         <3){
31         //if(data1 > 23.4 && data1 < 23.51/*&& data3 > 1E-5 &&
32         data3<10*/ && collision_pp == name1 && data2
33         >0.005 && data2 <6 ){
34         if(data1 > 19.3 && data1 <19.5 && data3 > 1E-5 &&
35         data3<10 && collision_pp == name1 && data2 >0.005
36         && data2 <6 ){
37         //if(data1 > 30.65 && data1 <31 /*&& data3 > 1E-5 &&
38         data3<10 */&& collision_pp == name1 && data2
39         >0.007 && data2 <6 ){
40         //if(data1 > 44.6 && data1 <44.7 /*&& data3 > 1E-5 &&
41         data3<10 */&& collision_pp == name1 && data2
42         >0.007 && data2 <6 ){
43         //if(data1 > 52.8 && data1 <53.1 /*&& data3 > 1E-5 &&
44         data3<10 */&& collision_pp == name1 && data2
45         >0.005 && data2 <6 ){
46         //if(data1 > 62.4 && data1 <62.6 && data3 > 2E-8 /*&&
47         data3<10*/ && collision_pp == name1 && data2
48         >0.005 && data2 <6 ){
49         //if(data1 > 4.6 && data1 < 4.63 /*&& data6 < data3
```

```

36      */&& collision_pp == name1&& data2 >0.005 && data2
      < 6){
37      //if(data1 > 9.7 && data1 < 9.8 /*&& data6 < data3*/&&
      collision_pp == name1&& data2 >0.005 && data2 < 6)
      {
38
39      //####Proton-antiproton####
40      //if(data1 > 19.3 && data1 <19.5 /*&& data3 > 1E-5 &&
      data3<10*/ && collision_ppbar == name1 && data2
      >0.005 && data2 < 6 ){
41      //if(data1 > 52.89 && data1 < 53.1 /*&& data3 > 1E-5
      && data3<10*/ && collision_ppbar == name1 && data2
      >0.005 && data2 < 8 ){
42      //if(data1 > 545 && data1 < 547 /*&& data3 > 1E-5 &&
      data3<10*/ && collision_ppbar == name1 && data2
      >0.005 && data2 <6 ){
43      //if(data1 > 629 && data1 <631 /*&& data3 > 1E-5 &&
      data3<10*/ && collision_ppbar == name1 && data2
      >0.005 && data2 <3 ){
44      //if(data1 >1799 && data1 <1961 /*&& data3 > 1E-5 &&
      data3<10*/ && collision_ppbar == name1 && data2
      >0.005 && data2 < 5 ){
45      //if(data1 > 1958 && data1 < 1961 /*&& data3 > 1E-5 &&
      data3<10*/ && collision_ppbar == name1 && data2
      >0.005 && data2 <5 ){
46      tt[npoints] = data2;
47      dsdt[npoints] = data3;
48      edsdt[npoints] = data6;
49      npoints++;
50      //std::cout <<data2<< "\t\t"<<data3<< "\n";
51      }//fin if
52      contador++;
53      }//fin while
54
55      }//fin else
56
57      //gStyle->SetOptFit();
58      TCanvas *micanvas = new TCanvas("canvas","migrafico"
      ,300,500,490,470);
59      micanvas->Divide(2,1);
60      micanvas->cd();
61

```

```

62 TGraphErrors *gre3=new TGraphErrors(npoints,tt,dsdt,error_e,
    edsdt);
63 gre3->SetMarkerStyle(21);
64 gre3->SetMarkerColor(1);
65 gre3->SetMarkerSize(1);
66 gre3->SetLineColorAlpha(1,1);
67 gPad->SetLogy();
68 gre3->GetYaxis()->SetTitle("d#sigma/dt (mb/GeV^{2})");
69 gre3->GetXaxis()->SetTitle("momento transferido, |t| (GeV
    ^{2})");
70 gre3->GetYaxis()->SetTitleOffset(1.2);
71 gre3->GetYaxis()->SetTitleSize(0.038);
72 gre3->GetXaxis()->SetTitleSize(0.038);
73 gre3->SetTitle("d#sigma/dt elastica pp#rightarrow pp a #sqrt
    {s}=19.4 GeV vs. |t|");
74 gre3->Draw("AP");
75 gre3->GetXaxis()->SetLimits(-0.05,4);
76 gre3->SetMinimum(1E-7);
77 gre3->SetMaximum(4E+1);
78 //gPad->SetGrid();
79 gPad->Update();
80 Double_t (*f)(Double_t*,Double_t*);
81 f=myFunc;
82 TF1 *f3 = new TF1("funajuste",f,0,7,4);
83 gPad->SetLogy();
84 f3->SetLineWidth(3);
85 f3->SetLineColor(2);
86 f3->SetParNames("r_{proton}","#alpha_{p}","B_{13}");
87 //f3->SetParameters(8.3,6,0.04,1.5);
88 f3->SetParameters(6,1.5,0.024,1,0.16);
89 //f3->FixParameter(3,3);
90
91 //f3->SetParameters(6.5,1.4,0.024,5);
92 //f3->SetParameters(7,1.2,0.03,5);
93 //f3->Draw("same");
94 gre3->Fit(f3);
95
96 /*
97 TF1 *f3 = new TF1("funajuste",AmplitudNuclear,0.005,0.1,2);
98 gPad->SetLogy();
99 f3->SetLineWidth(3);
100 f3->SetLineColor(2);
101 f3->SetParameters(0.15,20);
102 //f3->Draw("same");
103 gre3->Fit(f3);

```

```

104
105 */
106
107
108 TLegend *legend=new TLegend(0.5,0.45,0.88,1);
109 legend->SetTextFont(50);
110 legend->SetTextSize(0.03);
111 legend->AddEntry(gre3,"Datos TOTEM ","lep");
112 legend->SetFillColor(19);
113 legend->SetBorderSize(4);
114 legend->AddEntry(f3,"Modelo-qQ 4 parametros","l");
115 legend->Draw();
116
117 /*
118 TLatex latex;
119 latex.SetTextSize(0.055);
120 latex.SetTextAlign(13); //align at top
121 latex.DrawLatex(850,1.2,"#beta#gamma");
122 latex.DrawLatex(500,2.5,"-#frac{dE}{dx} = f(#beta#gamma)");
123 */
124 }
125
126 Double_t myFunc(Double_t x[], Double_t p[])
127 {
128     Double_t h=6.58211899E-16;
129     Double_t hc2=0.389379338;//Gev^2*mbarn
130     Double_t hc=TMath::Sqrt(hc2);
131     Double_t t = x[0];
132     const Double_t mP =0.938109927; //mP masa del protón en Gev
133     const Double_t Pi = TMath::Pi();
134     Double_t pk=1;
135     const Double_t singmatotal =38.94; //sigma total Gev
136     Double_t S =TMath::Power(19.4,2); //en Gev
137     Double_t alfaslope = 0.2316-0.1039*log(log(log(sqrt(S))));//
138         0.15;//constante alfaslope Gev
139     const Double_t So=1/alfaslope;//valor constante So
140     TComplex I=TComplex::I();
141     TComplex F13=0,F14=0,F23=0,F24=0,F13_24=0,F14_23=0,F13_14=0,
142         F23_24=0,F13_23=0,F14_24=0,F1=0,F2=0,F3=0;
143     Double_t beta=2./3., alfa=1./3., gamma=1./3., delta=2./3.;
144     Double_t B14= 0, B23 = 0, B24 = 0;
145     Double_t r1=0, r2=0, r3=0, r4=0;
146     //definicion de parametros, radio nucleon, alfa_p y B13
147     Double_t rP =p[0];//rP es el radio del protón
148     Double_t alfa_p=p[1];//parametro pomeron

```

```

147 Double_t B13 =p[2];
148 //if (B13>0&&B13<1){
149 //std::cout <<t<<" "<< rP<<" "<<alfa_p<<" "<<B13 << "\n";
150 //definicion de varialbes
151 r1 = 0.173*rP;
152 r2 = 0.316*rP;
153 r3 = 0.173*rP;
154 r4 = 0.316*rP;
155
156 Double_t lamda = pow(rP,2)/4;
157 Double_t eta=pow(rP,2)/4;
158 Double_t A13=0,A14=0,A23=0,A24=0;
159 TComplex E13=0,E14=0,E23=0,E24=0;
160 Double_t pImgE = -(alfaslope)*(alfa_p)*(Pi/2); //pImgA parte
    imaginaria de Ajk
161
162 A13 = ((pow(r1,2)+pow(r3,2))/16)+alfaslope*TMath::Log((S)/So
    );
163 A14 = ((pow(r1,2)+pow(r4,2))/16)+alfaslope*TMath::Log((S)/So
    );
164 A23 = ((pow(r2,2)+pow(r3,2))/16)+alfaslope*TMath::Log((S)/So
    );
165 A24 = ((pow(r2,2)+pow(r4,2))/16)+alfaslope*TMath::Log((S)/So
    );
166
167 E13= A13+ I*pImgE ;
168 E14= A14+ I*pImgE ;
169 E23= A23+ I*pImgE ;
170 E24= A24+ I*pImgE ;
171 // std::cout << E13 << "\n";
172 //se expresa el parametor B24 en terminos de B13
173 //-----
174 Double_t a=0,b=0,c=0,d=0,realb1=0,realb2=0,realb3=0,realb4
    =0,realb5=0,realb6=0;
175 TComplex varb1=0,varb2=0,varb3=0, varb4=0, varb5=0, varb6=0;
176
177 varb1=(pk/(4*Pi*hc2*hc))*operator/(1,(E14+E23+eta+lamda));
178 varb2=(pk/(4*Pi*hc2*hc))*operator/(1,(E13+E24+eta+lamda));
179 varb3=(pk/(8*Pi*hc2*hc))*operator/(1,(E13+E14+eta));
180 varb4=(pk/(8*Pi*hc2*hc))*operator/(1,(E23+E24+eta));
181 varb5=(pk/(8*Pi*hc2*hc))*operator/(1,(E13+E23+lamda));
182 varb6=(pk/(8*Pi*hc2*hc))*operator/(1,(E14+E24+lamda));
183 //parte real de de los varb_i
184 realb1=varb1.TComplex::Re();
185 realb2=varb2.TComplex::Re();

```

```

186 realb3=varb3.TComplex::Re();
187 realb4=varb4.TComplex::Re();
188 realb5=varb5.TComplex::Re();
189 realb6=varb6.TComplex::Re();
190 //definicion de los coeficiente del polinomio
191
192 d =(1-B13*pk); c =hc*(singmatotal*B13*(realb3 + realb5) - 2*
    pk/hc)*TMath::Sqrt(B13);
193 b = hc*(singmatotal*B13*(realb1 + realb2) - pk/hc); a =hc*
    singmatotal*(realb6 + realb4)*TMath::Sqrt(B13);
194
195 //-----
196 //RootsCubic1(d,c,b,a);
197 Double_t *mp=0;
198 mp=RootsCubic(d,c,b,a);
199 B24=pow(mp[1],2);
200 B14=TMath::Sqrt(B13*B24);
201 B23=B14;
202 //cout<<B24;
203 //std::cout <<t<<"\t"<< B13*B24<<"\t"<<p[3]<<"\t"<<B14<<B23
    << "\n";
204 //-----
205
206 //B24 en terminos de x_i
207 /*TComplex exp14=B14*TComplex::Exp(-t*( pow(beta,2)*lamda +
    pow(delta,2)*eta + E13));
208 TComplex exp24=B24*TComplex::Exp(-t*( pow(beta,2)*lamda +
    pow(gamma,2)*eta + E14));
209
210 TComplex GF1 = exp14 + exp24;
211
212 GF1 *= 0.25*singmatotal*I/(Pi*hc);
213
214
215 TComplex z1424 = -(E24 + alfa*lamda)*(E24 + alfa*lamda);
216 z1424 /= E14 + E24 + lamda;
217 z1424 += E24 + alfa*alfa*lamda + gamma*gamma*eta;
218
219 TComplex exp1424 = TComplex::Exp(-z1424*t);
220 exp1424 /= E14 + E24 + lamda;
221
222 TComplex GF3 = B14*B13*exp1424;
223
224 GF3 *= 0.25/(Pi*hc)*I;
225 GF3 *= singmatotal*singmatotal/(8.*Pi*hc2);

```

```

226
227 TComplex GF13 =GF1 - GF3;
228 */
229
230 F13=B13*TComplex::Exp(-t*( pow(beta,2)*lamda + pow(delta,2)*
    eta + E13));
231 F14=B14*TComplex::Exp(-t*( pow(beta,2)*lamda + pow(gamma,2)*
    eta + E14));
232 F23=B23*TComplex::Exp(-t*( pow(alfa,2)*lamda + pow(delta,2)*
    eta + E23));
233 F24=B24*TComplex::Exp(-t*( pow(alfa,2)*lamda + pow(gamma,2)*
    eta + E24));
234
235 F13_24=((B13*B24)/(lamda + eta+ E13+E24))*
236 TComplex::Exp(-t*((pow(alfa,2)*lamda+pow(gamma,2)*eta+E24)
    -
237 ((alfa*lamda + gamma*eta+E24)*(alfa*
    lamda+gamma*eta+E24)/(lamda+eta+E13+
    E24)))));
238
239 F14_23=((B14*B23)/(lamda + eta + E14 + E23))*
240 TComplex::Exp(-t*(( pow(alfa,2)*lamda+pow(delta,2)*eta+E23
    )-
241 ((alfa*lamda + delta*eta+E23)*(alfa*
    lamda+delta*eta+E23)/(lamda+eta+E14+
    E23)))));
242
243 F13_14=((B13*B14)/(eta + E13+E14))*
244 TComplex::Exp(-t*(( pow(beta,2)*lamda+pow(gamma,2)*eta+E14
    )-((gamma*eta+E14)*(gamma*eta+E14)/(eta+E13+E14)))));
245
246 F23_24=((B23*B24)/(eta+ E23+E24))*
247 TComplex::Exp(-t*(( pow(alfa,2)*lamda+pow(gamma,2)*eta+E24
    )-((gamma*eta+E24)*(gamma*eta+E24)/(eta+E23+E24)))));
248
249 F13_23=((B13*B23)/(lamda+ E13+E23))*
250 TComplex::Exp(-t*(( pow(alfa,2)*lamda+pow(delta,2)*eta+E23
    )-((alfa*lamda+E23)*(alfa*lamda+E23)/(lamda+E13+E23))))
    ;
251
252 F14_24=((B14*B24)/(lamda+E14+E24))*
253 TComplex::Exp(-t*(( pow(alfa,2)*lamda+pow(beta,2)*eta+E24)
    -((alfa*lamda+E24)*(alfa*lamda+E24)/(lamda+E14+E24)))));
254 //funciones F1, F2, F3.
255 F1=I*(singmatotal/(4*Pi*hc))*(F13+F14+F23+F24);

```

```

256 F2=I*(pow(singmatotal ,2)/(16*pow(Pi ,2)*hc2*hc))*(F13_24+
      F14_23);
257 F3=I*(pow(singmatotal ,2)/(32*pow(Pi ,2)*hc2*hc))*(F13_14+
      F23_24+F13_23+F14_24);
258 //constantes
259 // std::cout <<( pow(alfa ,2)*lamda+pow(beta ,2)*eta+E24)-((
      alfa*lamda+E24)*(alfa*lamda+E24)/(lamda+E14+E24)) << "\n
      ";
260 Double_t rho=0.145;
261 Double_t alfaestfina=7.297352568E-3;
262 Double_t B=19.89;
263 Double_t Gt=pow(1+TMath::Abs(t)/0.71 , -2);
264 //constantes
265 Double_t dsigmatdt=0;TComplex F=0;
266 TComplex fconj=0,FG=0,dnucledt=0,dinterdt=0,fn=0;
267
268 F = (F1-F2-F3)*pk;
269 Double_t realFG=F.TComplex::Re();
270 Double_t imagFG=F.TComplex::Im();
271 //std::cout <<pk*B14*B14<<"\t"<<B14*B14<<"\t"<<F2<<"\t"<<F3
      <<"\t"<<F << "\n";
272 dsigmatdt=Pi*(realFG*realFG+imagFG*imagFG);
273 delete mp;
274 cout << dsigmatdt <<"\t\t"<< t<<"\n";
275 return dsigmatdt;
276
277 }
278
279 Double_t AmplitudNuclear(Double_t x[],Double_t p[]){
280 Double_t hc2=0.389379338;
281 Double_t hc=TMath::Sqrt(hc2);
282
283 Double_t t = x[0];
284 const Double_t Pi = TMath::Pi();
285 const Double_t singmatotal =39.18; //sigma total Gev
286 TComplex I=TComplex::I();
287
288 Double_t alfaestfina=0;
289 Double_t Gt=0,rho=0,B=0;
290 Double_t dcoulombdt=0;
291
292 //constantes
293 alfaestfina=7.297352568E-3;
294 rho=p[0];
295 B=p[1];

```

```

296 //factor de forma
297 Gt=pow(1+TMath::Abs(t)/0.71,-2);
298
299 Double_t dsigmatdt=0,phidet=0,F=0;
300 TComplex fconj=0,FG=0,dnucledt=0,dinterdt=0,fn=0;
301
302 //definicion del angulo fi
303 phidet=TMath::Log(0.08/TMath::Abs(t))-0.577;
304
305 //amplitud nuclear
306 fn=singmatotal*(rho+I)*TMath::Exp(-B*TMath::Abs(t)/2)/(4*Pi*
    hc);
307
308 //amplitud de Grichine
309 TComplex fncojudado=TComplex::Conjugate(fn);
310 Double_t dsimafndt=Pi*(fncojudado*fn);
311
312 return dsimafndt;
313 }

```

## Apéndice G. Código c++ radio del protón en función de la energía

```

1 double funajuste(double* x,double* p){
2 double S=x[0];
3 double R=p[0]+p[1]*TMath::Log(S);
4 return R;
5 }
6
7
8 void fitparameters()
9 {
10 TCanvas *micanvas = new TCanvas("canvas","migrafico"
    ,300,500,490,470);
11 TGraphErrors *gre3 = new TGraphErrors("grafradioproton.dat")
    ;
12
13 gre3->GetYaxis()->SetTitle("r_{p} en GeV^{-1}");
14 gre3->GetXaxis()->SetTitle("#sqrt{s/s_{0}}");
15 gre3->GetYaxis()->SetTitleOffset(1);
16 gre3->GetYaxis()->SetTitleSize(0.038);
17 gre3->GetXaxis()->SetTitleSize(0.038);

```

```
18 gre3->SetTitle(" Radio del proton (r_{p}) vs #sqrt{s/s_{0}}
   ");
19 gre3->Draw("AP");
20 gre3->GetXaxis()->SetLimits(0,7050);
21 //gre3->SetMinimum(1E-0);
22 //gre3->SetMaximum(6.2);
23 gre3->SetMarkerStyle(21);
24 gre3->SetMarkerColor(4);
25 gre3->SetMarkerSize(1);
26 gPad->SetLogx();
27 //gre3->GetXaxis()->SetLimits(0,1);
28 gre3->SetLineColorAlpha(4,1);
29 gre3->Draw("AP");
30 TF1 *f3 = new TF1("funajuste",funajuste,30,50,2);
31 f3->SetLineWidth(3);
32 f3->SetLineColor(2);
33 f3->SetParameters(0.03,3);
34 //f3->FixParameter(0,48);
35 gre3->Fit(f3);
36 TLegend *legend=new TLegend(0.5,0.45,0.88,1);
37 legend->SetTextFont(40);
38 legend->SetTextSize(0.03);
39 legend->AddEntry(gre3,"Datos en acuerdo al modelo qQ, 4
   parametros","lep");
40 legend->SetFillColor(19);
41 legend->SetBorderSize(4);
42 legend->AddEntry(f3,"Modelo de ajuste, 1er polinomio","l"
   );
43 legend->Draw();
44
45 }
```