Incluye soluciones de problemas propuestos por diferentes olimpiadas de matemáticas

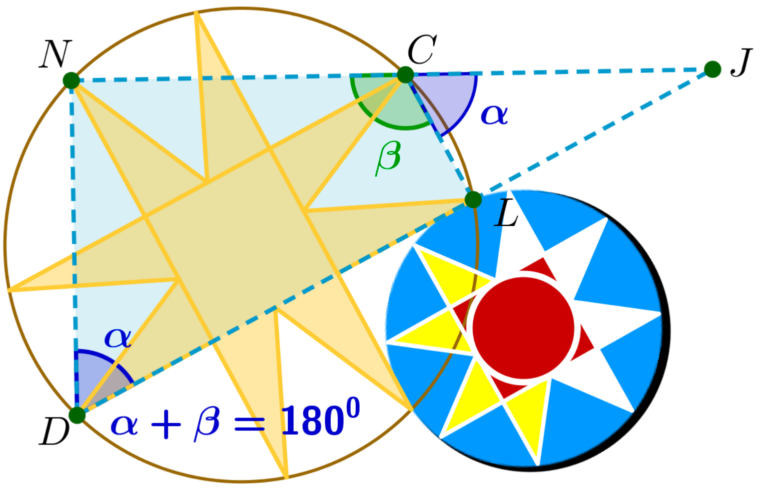
LOS CUADRILÁTEROS CÍCLICOS COMO HERRAMIENTA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UDENAR

CATALINA M. RÚA A.
LUIS F. CÁCERES
DEIBY Y. CASTILLO
KATHERINE N. PAZ

TANTVM POSSVMVS QVANTVM SCIMVS
UNIVERSIDAD DE NARIÑO

LOS CUADRILÁTEROS CÍCLICOS COMO HERRAMIENTA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



Catalina M. Rúa Alvarez

Luis F. Cáceres

Deiby Yohana Castillo

Katherine Nathaly Paz

Olimpiadas Regionales de Matemáticas
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño
San Juan de Pasto

Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico
Departamento de Ciencias Matemáticas
Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez

Rúa Alvarez, Catalina M.

Los cuadriláteros cíclicos como herramienta en la resolución de problemas / Catalina M. Rúa Alvarez … [et al.]. -- 1ª. Ed. – San Juan de Pasto: Editorial Universidad de Nariño, 2019.

102 p. : il.

Incluye bibliografía
ISBN: 978-958-8958-90-3 Impreso
ISBN: 978-958-8958-91-0 Digital

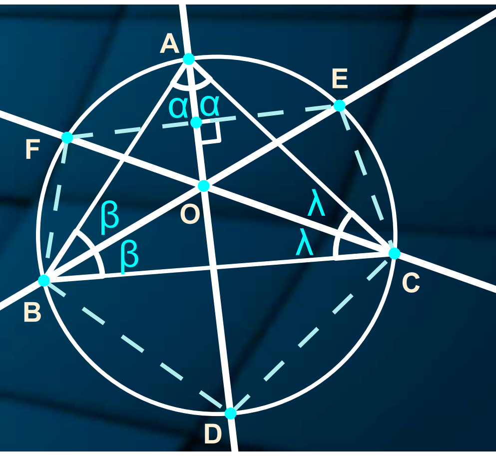
1. Cuadriláteros cíclicos 2. Geometría – problemas y ejercicios 4. Geometría – resolución de problemas I. Cáceres, Luis F. II. Castillo, Deiby Y. III. Paz, Katherine N.

516.15 C118 – SCDD-Ed. 22 Biblioteca Alberto Quijano Guerrero

Universidad de Nariño
EDITORIAL UNIVERSITARIA

Autores: Catalina M. Rúa Álvarez, Luis F. Cáceres Duque,
Deiby Y. Castillo Narváez y Katherine N. Paz Mora
ISBN: 978-958-8958-91-0
DOI: https://doi.org/10.22267/lib.udn.010
Primera edición: Julio de 2019
Diseño de cubierta: Catalina M. Rúa Álvarez
Diagramación: John Hermes Castillo Gómez y Catalina M. Rúa Alvarez
Grupo de investigación: Álgebra, Teoría de Números y Aplicaciones: ERM

Impreso y hecho en Colombia / Printed and made in Colombia



Índice general

Índice general I

Índice de figuras III

Notación VII

Prefacio IX

Introducción 1

I Cuadriláteros cíclicos

1 Preliminares 9

2 Cuadriláteros Cíclicos 19

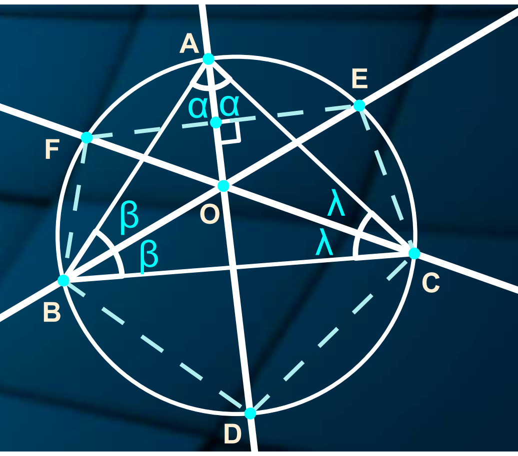
II Problemas

3 Problemas Resueltos 39

4 Problemas Propuestos 73

Referencias

Referencias 85



Índice de figuras

1.1 Rectas paralelas cortadas por una transversal. 10
1.2 Rectas notables y puntos notables. 12
1.3 Triángulos semejantes. 13
1.4 Lados y ángulos de un triángulo. 14
1.5 Ángulo central y ángulos inscritos. 15
1.6 Propiedad de la barquilla. 16
1.7 Ilustración guía para cálculo de la potencia de un punto P. 17

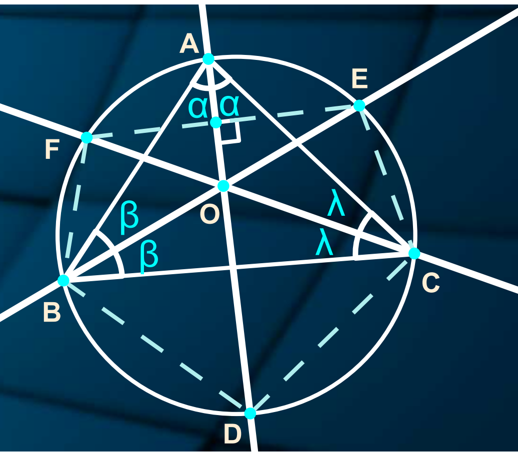
2.1 Ejemplos de cuadriláteros cíclicos. 20
2.2 Ejemplos de cuadriláteros que no son cíclicos. 20
2.3 Circunferencia que inscribe al cuadrilátero $ABCD$. 21
2.4 Construcción de C_1. 22
2.5 Ilustración del Corolario 2.2. 23
2.6 Trapecio isósceles. 23
2.7 Ilustración guía en la demostración del Teorema 2.3. 24
2.8 Punto de intersección de diagonales del cuadrilátero $ABCD$. . . . 25
2.9 Cuadrilátero $ABCD$ con corte de lados opuestos en P. 26
2.10 Cuadrilátero cíclico $ABCD$ con diagonales. 28
2.11 Construcción del punto E. 28
2.12 Ilustración guía en el Teorema de Brahmagupta. 29

2.13 Longitud de los lados del cuadrilátero $ABCD$. 30
2.14 Ilustración de los dos casos de la ley del seno. 33
2.15 Primer caso de la ley del seno. 33
2.16 Segundo caso de la ley del seno. 34
2.17 Construcción auxiliar para demostrar la ley del coseno. 35

3.1 Ilustración del Problema 3.1. 40
3.2 Alturas del triángulo ABC. 41
3.3 Ilustración dada por el Problema 3.3. 41
3.4 Notación de los ángulos internos del cuadrilátero. 42
3.5 Ilustración guía para la solución del Problema 3.4. 43
3.6 Triángulos isósceles. 44
3.7 Ángulos congruentes. 45
3.8 Ilustración dada por el Problema 3.6. 46
3.9 Cuadrilátero $ABCD$ y punto de corte de sus diagonales. 46
3.10 Ilustración dada por el Problema 3.7. 47
3.11 Medida de ángulos dados y concluidos inicialmente. 47
3.12 Construcción de segmentos. 48
3.13 Construcciones auxiliares del Problema 3.9. 49
3.14 Condiciones del Problema 3.10 y ángulos congruentes. 50
3.15 Condiciones del Problema 3.11 y cuadriláteros cíclicos. 51
3.16 Congruencia de los ángulos $\measuredangle DOC$ y $\measuredangle POF$. 52
3.17 Ilustración del Problema 3.12 y construcción del punto Q. 53
3.18 Ilustración del Problema 3.14. 55
3.19 Congruencia de triángulos. 56
3.20 Ilustración dada por el Problema 3.16. 56
3.21 Construcción de los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$. 57
3.22 Construcción del punto P sobre la circunferencia. 58
3.23 Ilustración del Problema 3.18. 59
3.24 Construcción del cuadrilátero $ABRC$. 60
3.25 Construcción de los cuadriláteros $BQNR$ y $CPMS$. 61
3.26 Puntos E y F fuera de la circunferencia. 63
3.27 Puntos E y F sobre la circunferencia. 63
3.28 Medida del ángulo $\measuredangle CAB$. 64
3.29 Puntos E y F dentro y fuera de la circunferencia. 65
3.30 Cuando las rectas coinciden. 65

3.31 Ilustración del Problema 3.21. 66
3.32 Ilustración del Problema 3.22. 67
3.33 Cultivo de don Carlos. 68
3.34 Notación del Problema 3.23. 68
3.35 Sol de los Pastos. 70
3.36 Datos presentes en manuscrito. 70
3.37 Notación para el Problema 3.24. 71
3.38 Cuadrilátero Cíclico en Sol de los Pastos. 72

Los cuadriláteros cíclicos como herramienta en la resolución de problemas



Notación

Símbolos

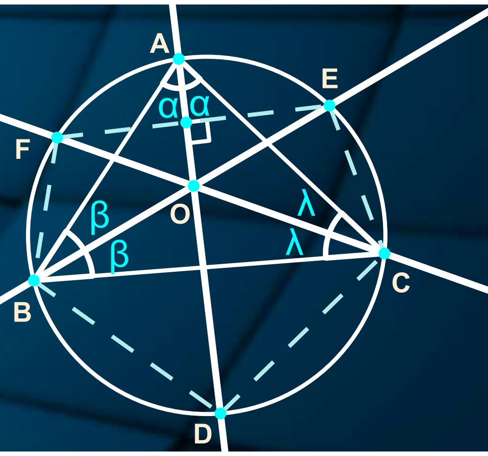
$\measuredangle$	Ángulo
$\cong$	Congruencia
$\leftrightarrow$	Recta
$-$	Segmento
$\sim$	Semejanza
$\triangle$	Triángulo

Abreviaturas

AOPS	Art Of Problem Solving
APMO	Asian Pacific Mathematics Olympiad
BNO	Bulgaria National Olympiad
CM	Canguro Matemático
CNO	China National Olympiad
GNO	Greece National Olympiad
IMO	International Mathematical Olympiad
MMO	Mediterranean Mathematics Olympiad

OCM	Olimpiada Colombiana de Matemáticas
OIM	Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas
OMA	Olimpiada Matemática Argentina
OMCC	Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe
OMCS	Olimpiada Matemática del Cono Sur
OME	Olimpiada Matemática Española
OMI	Olimpiada Matemática Italiana
OMPR	Olimpiada Matemática de Puerto Rico
TJNO	Turkey Junior National Olympiad

Los cuadriláteros cíclicos como herramienta en la resolución de problemas



Prefacio

A partir del proyecto de investigación "Resolución de Problemas: un medio para la formación matemática", aprobado mediante el Acuerdo 090 de noviembre 20 de 2014 de la Vicerrectoría de Investigaciones, Posgrados y Relaciones Internacionales de la Universidad de Nariño (VIPRI), en el año 2016 se realizó la Primera Olimpiada Regional de Matemáticas de la Universidad de Nariño (1$^{\text{ra}}$ ORM-UDENAR), certamen donde estudiantes de diferentes instituciones educativas de la región de influencia de la Universidad de Nariño, encontrarían un ambiente de sana competencia y a través del cual tendrían la oportunidad de aprender y practicar sus conocimientos matemáticos.

Como preparación para este evento en el XIII Coloquio Regional de Matemáticas, organizado por el Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño, el grupo de investigación Álgebra, Teoría de Números y Aplicaciones: ERM (ALTENUA) realizó una capacitación en resolución de problemas y olimpiadas matemáticas con la participación de dos invitados internacionales y dos invitados nacionales expertos en el área. Es así como contamos con el Dr. Luis Fernando Cáceres Duque, quien dictó el curso "Potencia y cuadriláteros cíclicos" dejando claro la importancia de este tema para participantes en las diferentes olimpiadas. El Dr. Cáceres es matemático de la Universidad Javeriana, Doctor en Matemáticas de la

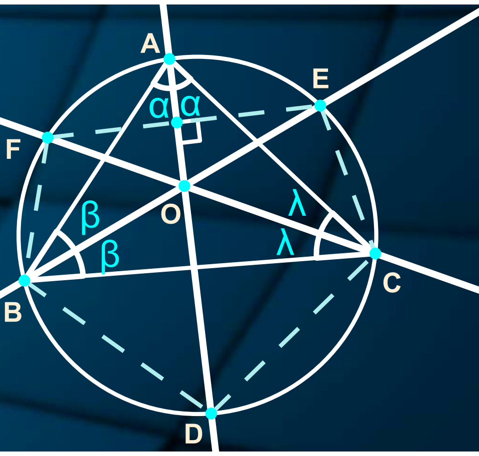
Universidad de Iowa, Profesor de la Universidad de Puerto Rico, Recinto Mayagüez, fundador y director de los proyectos: Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico (OMPR) y Alianza para el Fortalecimiento del Aprendizaje de las Matemáticas (AFAMaC) y entrenador de los equipos participantes de Puerto Rico en olimpiadas matemáticas internacionales. Adicionalmente, en el año 2016, fue galardonado con el Premio Paul Erdös, otorgado por la Federación Mundial de Competencias Nacionales de Matemáticas (WFNMC). Esta distinción reconoce, además del desarrollo de las olimpiadas matemáticas en Puerto Rico, el apoyo que el Dr. Cáceres ha dado a otros países de la región para fomentar el estudio de esta materia a través de las competencias. Por supuesto, contar con el apoyo de un científico con tan amplia trayectoria, fue una gran motivación para nuestras nacientes olimpiadas.

El nivel de exigencia en el cursillo presentado por el Dr. Cáceres durante el coloquio, evidenció no solo que era un tema poco conocido por los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y los profesores de nuestra región, sino además su importancia en olimpiadas matemáticas internacionales y a nivel universitario. Esta fue una motivación, para formular posteriormente el proyecto de investigación "Resolución de problemas: Olimpiadas Universitarias de Matemáticas UDENAR" aprobado con el Acuerdo 192 del 1 de noviembre de 2016 emanado de la VIPRI. De esta manera, nos planteamos la necesidad de realizar estudios y posteriores capacitaciones sobre cuadriláteros cíclicos a los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño, integrantes del Seminario de Resolución de Problemas interesados en participar en olimpiadas universitarias. Ante esto, decidimos desarrollar un trabajo de grado relacionado con el tema y como era natural solicitamos la colaboración en la asesoría al Dr. Cáceres como experto en el tópico. En esta tesis se realizó una recopilación teórica de teoremas y propiedades que ayudan a caracterizar a los cuadriláteros cíclicos, y además se resaltó la importancia de estos en olimpiadas matemáticas por medio de la resolución de problemas propuestos en ellas.

Dado que uno de los objetivos del proyecto relacionado con olimpiadas universitarias, citado anteriormente, es "Estudiar y difundir estrategias de resolución de problemas en estudiantes de pregrado de carreras de ciencias e ingenierías en la Universidad de Nariño", una de las metas del desarrollo de esta tesis fue la creación de un texto con el cual se transmitieran los conocimientos adquiridos sobre cuadriláteros cíclicos entre la comunidad académica de nuestra institución. Para nuestro agrado y gracias a la dedicación y disciplina de sus autoras y asesores, el trabajo de grado recibió la máxima calificación por parte de los jurados evaluadores, resultado que la distingue como "Laureada" y que confirma la necesidad de realizar su difusión; razón por la cual decidimos escribir este libro. Se resalta que la solución de problemas relacionados con cuadriláteros cíclicos, permiten abordar temas como ángulos inscritos, ángulos centrales, semejanza de triángulos, la ley del seno, la ley del coseno, entre otros conceptos geométricos que son olvidados frecuentemente por su falta de práctica. Por lo cual problemas que envuelven a los cuadriláteros cíclicos pueden llevar al lector a retomar estos y otros conceptos geométricos.

Catalina M. Rúa y John H. Castillo
Comité Organizador ORM-UDENAR
San Juan de Pasto, septiembre de 2018.

Los cuadriláteros cíclicos como herramienta en la resolución de problemas



Introducción

Una buena oportunidad para poner a prueba los conocimientos, creatividad, inventiva y estrategias de solución de problemas en el área de matemáticas son las olimpiadas matemáticas. En general estos certámenes se realizan tanto para motivar en los estudiantes el gusto por las matemáticas al presentar problemas que no son habituales en el aula de clase, como para identificar estudiantes que sobresalen en esta área e incluso falencias en ella, ver De la Peña, Pineda, Cáceres, Di Prisco, y Solotar (2014).

La primera competencia de matemáticas se realizó en Hungría en 1894 y fue impulsada por el barón Roland von Eötvös, cuando él era ministro de Educación de Hungría. Por tal motivo, la Sociedad Húngara de Matemáticas y Física le dio a este certamen el nombre “Competencia Eötvös” hoy conocida como la “Competencia Kürschák”. Los problemas que debían resolver los estudiantes en su salón de clase, cuando se encontraban realizando la prueba, eran problemas para los cuales el conocimiento de fórmulas memorizadas no era importante sino especialmente la creatividad. Además, los 10 estudiantes que sobresalían en matemáticas y en física durante esta competencia, tenían garantizada la admisión a la universidad.

A partir de la creación de esta competencia, surgieron diferentes certámenes en el área tanto en matemáticas como en física. Es así como en 1959 en Rumania, la Sociedad Rumana de Matemáticas crea la “Olimpiada Internacional de Matemáticas" (International Mathematical Olympiad - IMO), la cual actualmente es una de las competencias matemáticas más importantes del mundo. En la primera versión de este certamen participaron 7 países, hoy en día participan más de 100 países de todo el mundo, donde cada país conforma un equipo de máximo seis jóvenes menores de 20 años, quienes durante dos días realizan una prueba de forma individual. En el 2017, esta competencia se realizó en Rio de Janeiro en Brasil y en el 2018 en Rumania. Este es un certamen reconocido y de gran impacto en la vida académica tanto de los jóvenes que participan, como de los que se preparan para intentar ser seleccionados para participar.

En Colombia la Universidad Antonio Nariño organiza la Olimpiada Colombiana de Matemáticas (OCM) y coordina el equipo de estudiantes que participan en la IMO, en la Olimpiada Matemática de Centro América y el Caribe (OMCC), en la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (OIM), entre otras. Así mismo, la Universidad de Puerto Rico, Recinto Mayagüez bajo la coordinación del Profesor Luis Cáceres se encargan de capacitar y organizar los equipos participantes de estos certámenes en representación de Puerto Rico.

Las olimpiadas matemáticas se han convertido en concursos con gran acogida por las situaciones problema que plantean, pues no son usuales y generalmente su solución no es obvia, retando a los estudiantes a explorar nuevas estrategias que impulsan su ingenio y creatividad al intentar resolverlos. Es aquí donde la resolución de problemas juega un papel importante.

La resolución de problemas matemáticos es un proceso que permite reflexionar sobre las acciones que se pueden realizar al enfrentarse a un problema. Resolver un problema, es un reto intelectual para quien lo enfrenta y se necesita de una serie de pasos o estrategias que guíen el camino hacia la solución, donde es necesario tener en cuenta los conocimientos, las habilidades, la creatividad y el ingenio. A lo largo de la historia se han realizado considerables aportes a la resolución de problemas matemáticos. Entre los autores que se destacan en esta área, se resalta al matemático húngaro George Pólya, quien en su libro "Cómo plantear y resolver problemas", publicado en 1965, propone las cuatro fases de oro para la solución de problemas, aunque en la práctica no existe un método mecánico, ni una fórmula mágica que los resuelva y como afirma Santos (2014): "son etapas fundamentales en las que el uso de los métodos heurísticos desempeñan un papel importante".

Pólya (1965a) plantea que el primer paso para resolver un problema es *comprender el problema*, es decir, ver claramente lo que se pide, tener clara la información dada, ser capaz de contar el problema sin necesidad de leerlo, percatarse de los pequeños detalles aunque parezcan insignificantes y si hay figuras dibujarlas, identificando en ellas los datos dados. Luego de realizar el primer paso, Pólya propone que se debe *concebir un plan*. Para ello hay que mirar las relaciones existentes entre los elementos a partir del problema, los conocimientos previos e incluso se pueden aplicar estrategias empleadas en la solución de otros problemas similares. Una vez pensado un plan, el paso a seguir es *ejecutar el plan*, en donde se pone en juego los conocimientos adquiridos, buenos hábitos de estudio, la concentración y la paciencia. Finalmente, Pólya resalta que es importante realizar una *mirada retrospectiva*, la cual enriquece al estudiante, pues en este momento se hace una revisión de los procesos y razonamientos realizados para tener completa seguridad de la validez de su solución y en el caso de no resolver el problema correctamente, idear un nuevo plan. Además, este último paso es el punto de partida para pensar en la posibilidad de cambiar el problema, de tal manera que permita crear uno nuevo.

Al igual que Pólya, otros autores como Miguel de Guzmán, Allan Schoenfeld y Santos Trigo, han trabajado e investigado en el área de resolución de problemas proponiendo métodos para abordarlos y coinciden en que la resolución de problemas es un proceso complejo e importante en el desarrollo integral de una persona. Más información al respecto se puede encontrar en De Guzmán (1995), Pólya (1965b), Schoenfeld (1985) y Santos (2014).

Dado el impacto que las olimpiadas matemáticas generan, los participantes se preparan en las diferentes áreas como son lógica, teoría de números, álgebra, geometría, entre otras. En los problemas geométricos que se proponen en olimpiadas matemáticas como las presentadas en la Tabla 1, donde se incluye la correspondiente sigla que se usará en este texto y el url principal de cada certamen, se encuentran problemas relacionados con cuadriláteros cíclicos, es decir, con cuadriláteros que se pueden inscribir en una circunferencia.

Olimpiada	**Siglas**	**Enlace**
Asian Pacific Mathematics Olympiad	APMO	www.ommenlinea.org/apmo
Canguro Matemático	CM	www.canguromat.org.es
International Mathematical Olympiad	IMO	www.imo-official.org
Olimpiada Colombiana de Matemáticas	OCM	oc.uan.edu.co
Olimpiada Iberoamericana de Matemática	OIM	www.oei.es/historico/oim
Olimpiada Matemática Argentina	OMA	www.oma.org.ar
Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe	OMCC	www.oei.es/historico/oim/omcc.htm
Olimpiada Matemática del Cono Sur	OMCS	www.oma.org.ar/internacional/cono.htm
Olimpiada Matemática Española	OME	www.olimpiadamatematica.es
Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico	OMPR	om.pr

Tabla 1: Algunas olimpiadas matemáticas.

Los cuadriláteros cíclicos no son un tema muy conocido en la educación básica y media e incluso en la universidad. Sin embargo, es común encontrarlos en libros de geometría elemental, como propiedades de cuadriláteros inscritos en circunferencias y no con su nombre técnico, ver Morfín (2007). Por otra parte, hay libros de geometría más avanzada en los cuales se deja una sección sobre estos cuadriláteros, donde se presentan teoremas básicos. Algunas referencias donde se pueden encontrar cuadriláteros cíclicos son Andreescu y Gelca (2009), Barnett (1997), Castillo y Paz (2018), Coxeter y Greitzer (1967) y Hemmerling (2003).

A partir de conceptos de la geometría euclidiana, el interés principal de este texto es dar a conocer a los cuadriláteros cíclicos, los teoremas, propiedades y algunas de sus caracterizaciones, además de su aplicación en la resolución de problemas geométricos.

Este libro se encuentra dividido en dos partes: Cuadriláteros cíclicos y Problemas. En la primera parte, se disponen los principales temas que se deben tener en cuenta al abordar el estudio de los cuadriláteros cíclicos, donde inicialmente se tienen preliminares geométricos y luego, entre otros, teoremas y caracterizaciones de estos cuadriláteros. En la segunda parte del libro, se presentan problemas tomados de algunas de las olimpiadas matemáticas listadas en la Tabla 1, de libros de geometría y de la tesis

Castillo y Paz (2018). En la parte de problemas se encuentran soluciones, donde el uso de las propiedades de cuadriláteros cíclicos como herramienta ha sido esencial y además, se incluye una recopilación de problemas con los cuales se pretende que el lector pueda practicar y adquirir más habilidades en la resolución de problemas geométricos relacionados con cuadriláteros cíclicos.

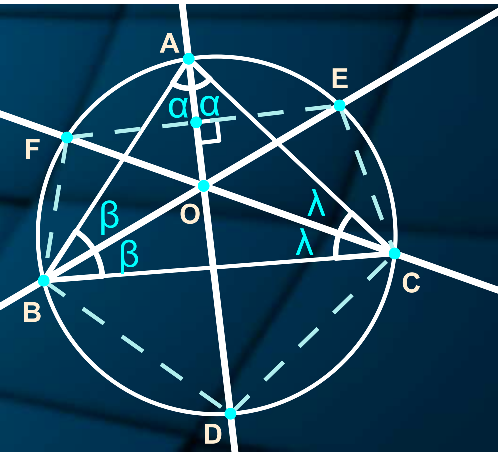
Como resultado de este libro se presenta en el Capítulo 3 un problema contextualizado en el cual se usa un símbolo representativo para la comunidad indígena Pasto del sur de Colombia y del norte de Ecuador, denominado Sol de los Pastos. En este símbolo se evidencian cuadriláteros cíclicos, motivo por el cual se le asigna un espacio en la portada del libro.

I

Cuadriláteros cíclicos

1 Preliminares 9
2 Cuadriláteros Cíclicos 19

Los cuadriláteros cíclicos como herramienta en la resolución de problemas



1. Preliminares

Con el fin de comprender el tema de cuadriláteros cíclicos y problemas estudiados en este libro, es necesario conocer conceptos de geometría euclidiana elemental. Es así, como en este capítulo se presentan de forma breve algunos conceptos y teoremas básicos que pueden ser de utilidad en la solución de dichos problemas y demostraciones.

Para empezar, es importante aclarar la notación que se usará en este texto. Los puntos se denotarán con letras mayúsculas y las rectas con letras minúsculas o también se pueden definir por dos puntos que pertenezcan a ella y sean diferentes, por ejemplo una recta definida por los puntos A y B se denota como $\overleftrightarrow{AB}$. Además, se denotará el segmento AB como $\overline{AB}$ y cuando se trate de la medida del segmento, por abuso de notación, se escribirá de igual manera.

Los ángulos se denotarán mediante tres puntos, de modo que el del medio corresponda al vértice y los otros dos puntos estén sobre los lados que definen el ángulo. El símbolo que se emplea para ángulo es $\measuredangle$, y cuando se trate de la medida no se hará distinción alguna.

Las relaciones de congruencia entre los ángulos formados por el corte de una transversal s y las rectas paralelas l y m, tal como se observa en la Figura 1.1, son:

- *Ángulos alternos internos* tales como $\measuredangle ADE = \measuredangle CED$ y $\measuredangle DEG = \measuredangle EDB$.
- *Ángulos correspondientes* tales como $\measuredangle FDA = \measuredangle DEG$, $\measuredangle BDF = \measuredangle CED$, $\measuredangle ADE = \measuredangle GEH$ y $\measuredangle EDB = \measuredangle HEC$.
- *Ángulos opuestos por el vértice* tales como $\measuredangle FDA = \measuredangle EDB$, $\measuredangle BDF = \measuredangle ADE$, $\measuredangle DEG = \measuredangle HEC$ y $\measuredangle CED = \measuredangle GEH$.
- *Ángulos alternos externos* como $\measuredangle BDF = \measuredangle GEH$ y $\measuredangle FDA = \measuredangle HEC$.

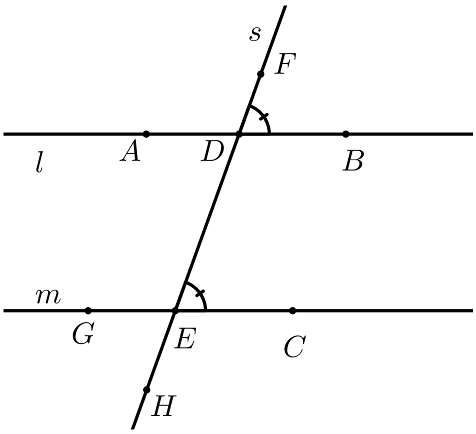


Figura 1.1: Rectas paralelas cortadas por una transversal.

Además de las relaciones de congruencia se tienen *ángulos colaterales*, los cuales son suplementarios y pueden ser internos o externos. En la Figura 1.1, $\measuredangle EDB$ y $\measuredangle CED$ son ángulos colaterales internos, mientras que $\measuredangle BDF$ y $\measuredangle HEC$ son colaterales externos.

Por otra parte, por la importancia que presentan los triángulos en los problemas geométricos ya que se usarán propiedades que se asumen conocidas sobre ellos, se presentan algunas de estas y se aclara la notación a usar con respecto a propiedades de congruencia sobre los triángulos.

Los triángulos son figuras geométricas cerradas formadas por la unión de tres segmentos pertenecientes a un mismo plano, los cuales se llaman *lados*, donde los puntos comunes a cada par de lados se denominan *vértices*. Cada triángulo, se denotará con el símbolo $\triangle$ seguido de los tres vértices que lo forman, por ejemplo el triángulo con vértices A, B y C se denota $\triangle ABC$. Una característica importante de ellos, en la geometría euclidiana, es que la suma de la medida de sus ángulos internos es $180°$.

Los triángulos se pueden clasificar según sea la relación de congruencia entre sus lados, en:

- *Equiláteros:* si los tres lados son congruentes.
- *Isósceles:* si dos lados son congruentes.
- *Escalenos:* si ningún par de lados son congruentes.

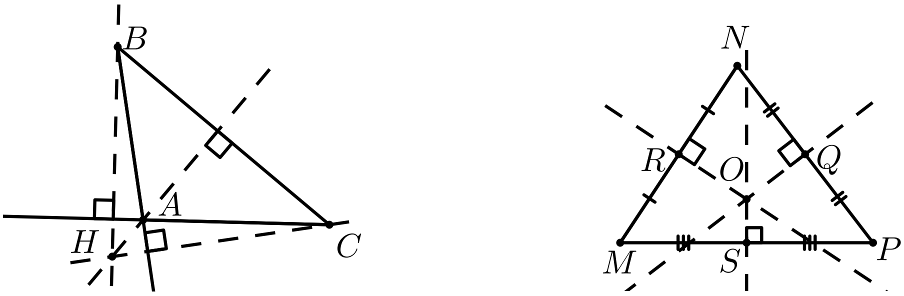
También es posible clasificar los triángulos según sus ángulos, en:

- *Rectángulos:* si tienen un ángulo recto.
- *Acutángulos:* si sus tres ángulos son agudos.
- *Obtusángulos:* si uno de sus ángulos es obtuso.

Por otro lado, es importantes tener en cuenta las siguientes definiciones relacionadas con triángulos:

- *Altura:* es el segmento perpendicular a uno de los lados (o a su prolongación) desde el vértice opuesto. El punto de intersección de las rectas que pasan por las alturas se conoce como *ortocentro.*
- *Mediana:* es el segmento que va desde un vértice al punto medio del lado opuesto. El punto de intersección de las medianas se conoce como *baricentro.*
- *Bisectriz:* es el segmento o rayo que biseca un ángulo y se extiende hasta el lado opuesto. El punto de intersección de las bisectrices se conoce como *incentro.*
- *Mediatriz:* es la recta perpendicular a cada lado del triángulo por el punto medio. El punto de intersección de las mediatrices se conoce como *circuncentro.*

En la Figura 1.2a se han construido las alturas del $\triangle ABC$, donde las alturas desde B y C no son perpendiculares directamente al lado del triángulo sino a la extensión del mismo; en este caso, H es el ortocentro del triángulo. Por otro lado, en la Figura 1.2b para el $\triangle MNP$ se construyeron las mediatrices, las cuales se cortan en el circuncentro O, siendo este punto el centro de la circunferencia que inscribe el triángulo.



(a) Alturas y ortocentro. (b) Mediatrices y circuncentro.

Figura 1.2: Rectas notables y puntos notables.

En adelante, para indicar segmentos o ángulos de igual medida se usará una pequeña traza. Por ejemplo, los segmentos $\overline{NQ}$ y $\overline{QP}$ en la Figura 1.2b tienen la misma medida; al igual que los ángulos $\measuredangle CED$ y $\measuredangle BDF$, en la Figura 1.1, son congruentes.

En ocasiones es de gran utilidad demostrar la congruencia o semejanza entre triángulos. La relación de congruencia para dos triángulos significa que tienen la misma forma y el mismo tamaño, es decir, los lados y los ángulos correspondientes en ambos triángulos tienen la misma medida, aunque no necesariamente tienen la misma orientación o posición. El símbolo para denotar congruencia de triángulos es $\cong$.

La relación de semejanza implica que los triángulos tienen la misma forma pero posiblemente diferente tamaño, de donde, los ángulos son congruentes, pero los lados correspondientes pueden diferir en igual proporción. El símbolo para denotar semejanza es $\sim$.

Por ejemplo, en la Figura 1.3, se supone que el lado $\overline{AC}$ es paralelo al lado $\overline{DE}$ y por lo tanto se tiene que $\triangle ABC \sim \triangle DEB$. De esta semejanza, es posible concluir que los ángulos correspondientes son congruentes, es así como $\measuredangle CAB = \measuredangle EDB$, $\measuredangle BCA = \measuredangle BED$ y el ángulo $\measuredangle ABC$ es común. Además por la semejanza, se concluye para una constante positiva k, la relación de proporcionalidad dada por

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = k. \tag{1.1}$$

Por la importancia de la congruencia y semejanza de triángulos, se presentan los criterios para demostrar estas relaciones.

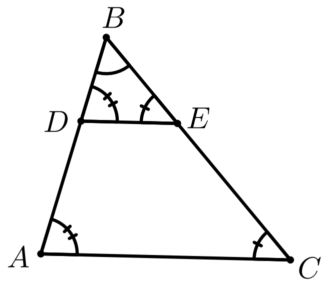


Figura 1.3: Triángulos semejantes.

Para probar congruencia entre dos triángulos se tienen tres criterios que son:

- Ángulo-Lado-Ángulo (A-L-A), en este es necesario probar que dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos del otro triángulo y que los lados comprendidos entre los ángulos son iguales.
- Lado-Ángulo-Lado (L-A-L), en este es necesario probar que los dos triángulos tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos congruentes.
- Lado-Lado-Lado (L-L-L), en este es necesario probar que los tres lados de un triángulo son congruentes con los del otro triángulo.

Se presenta a seguir, los tres criterios para verificar si dos triángulos son semejantes:

- Ángulo-Ángulo (A-A), en el cual dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos congruentes.
- Lado-Lado-Lado (L-L-L), en este criterio se tiene la semejanza si los lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales.
- Lado-Ángulo-Lado (L-A-L), si un ángulo de un triángulo es congruente con un ángulo del otro triángulo, y los lados correspondientes que incluyen este ángulo son proporcionales entonces los triángulos son semejantes.

Algunos textos para profundizar más sobre estos temas son Barnett (1997), Hemmerling (2003) y Morfín (2007). Un lector interesado en conocer los fundamentos de la geometría euclidiana puede considerar la lectura de los elementos de Euclides en Heiberg (2007), además de Hilbert (1950).

La rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos es la trigonometría, en ella se encuentran diversas fórmulas que facilitan el cálculo de dichos elementos y por lo tanto se pueden aplicar en la resolución de problemas. Se destacan la identidad trigonométrica fundamental $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, que permite deducir otras identidades de gran utilidad; además de la ley del seno y la ley del coseno, que incluso en el Capítulo 2 se demuestran con la aplicación de cuadriláteros cíclicos. Otras fórmulas trigonométricas se pueden encontrar en Zill y Dewar (2012).

La Figura 1.4, permitirá comprender las leyes de seno y coseno descritas a seguir.

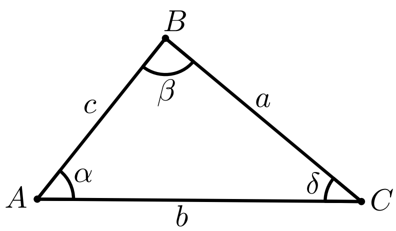


Figura 1.4: Lados y ángulos de un triángulo.

Teorema 1.1. Ley del seno.
Sea $\triangle ABC$ tal que la medida de los correspondientes lados opuestos a los ángulos α, β y δ son respectivamente a, b y c, como se tiene en la Figura 1.4. Entonces se cumple que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\delta}.$$

Teorema 1.2. Ley del coseno.
Sea $\triangle ABC$ tal que sus ángulos internos son α, β y δ y la longitud de los lados opuestos a ellos son a, b y c, respectivamente, como se ilustra en la Figura 1.4. Entonces se cumplen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\delta, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \end{aligned}$$

Otro aspecto a resaltar en geometría, es lo referente a los ángulos centrales e inscritos en una circunferencia. Los *ángulos centrales,* son aquellos formados por dos radios de una circunferencia, donde el vértice del ángulo es el centro de la circunferencia y los *ángulos inscritos* son aquellos formados por dos cuerdas o un diámetro y una cuerda, que tienen un punto común sobre la circunferencia. En la Figura 1.5, dado que O es el centro de la circunferencia, $\measuredangle DOC$ es un ángulo central y los ángulos $\measuredangle DAC$ y $\measuredangle DBC$ son ángulos inscritos, en el caso del ángulo $\measuredangle DBC$ observe que el punto común sobre la circunferencia es B.

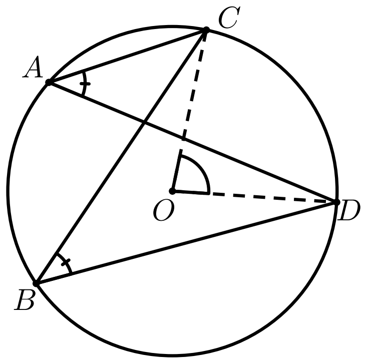


Figura 1.5: Ángulo central y ángulos inscritos.

A continuación se describen relaciones importantes entre los ángulos mencionados.

Teorema 1.3.
Si dos ángulos inscritos en una circunferencia abren el mismo arco, entonces son congruentes.

Teorema 1.4.
La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del ángulo central que abre el mismo arco.

Por los anteriores teoremas, se concluye que en la Figura 1.5, los ángulos $\measuredangle DAC$ y $\measuredangle DBC$ son congruentes y además, se tiene que $\measuredangle DBC = \frac{1}{2}\measuredangle DOC$.

Por otro lado, cabe resaltar la propiedad de la barquilla y la definición de la potencia de un punto. La primera relaciona una circunferencia con rectas tangentes a ella desde un punto exterior y la segunda está relacionada con la distancia de un punto, con el centro de una circunferencia y su radio. Se puede profundizar más sobre estas propiedades en Cáceres (2010) y Coxeter y Greitzer (1967).

Teorema 1.5. Propiedad de la Barquilla.
Si se trazan dos rectas tangentes a una circunferencia desde un punto exterior, entonces los segmentos de recta desde ese punto exterior a los puntos de tangencia son congruentes y el centro de la circunferencia está en la bisectriz del ángulo entre las rectas.

En la Figura 1.6, se tienen una circunferencia de radio r y dos rectas m y n tangentes a ella en A y B, respectivamente, las cuales se intersectan en P, entonces por el Teorema 1.5, se tiene que $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ son congruentes y que los ángulos $\measuredangle APO$ y $\measuredangle OPB$ también lo son. Luego, por el criterio L-A-L, se concluye que los triángulos AOP y BOP son congruentes. Es importante tener en cuenta estas congruencias, puesto que pueden usarse a la hora de resolver problemas geométricos.

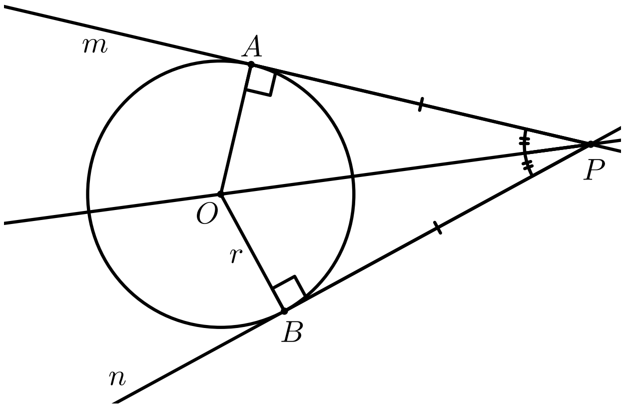


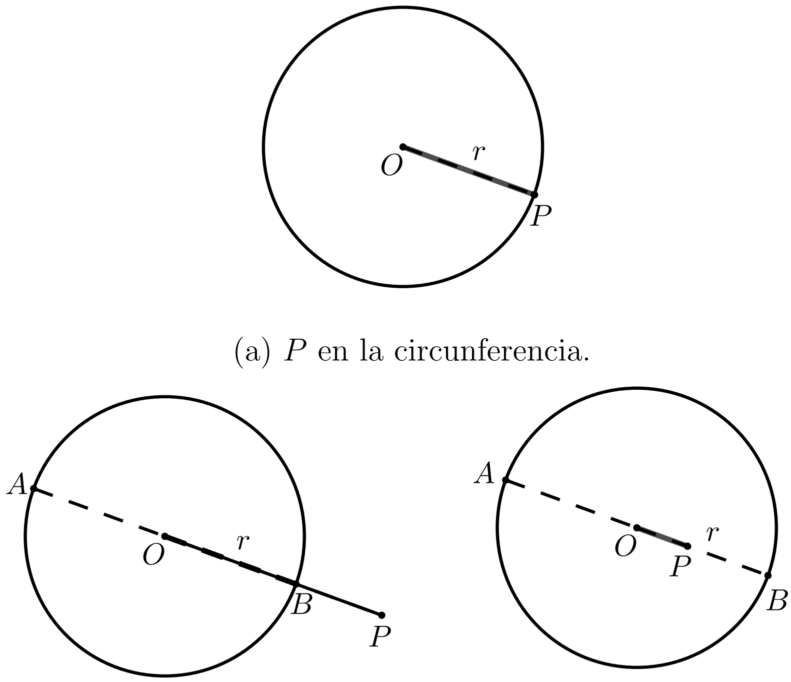
Figura 1.6: Propiedad de la barquilla.

Definición 1.1. Potencia de un punto.
La potencia de un punto P con respecto a una circunferencia con centro en O y radio r se define como $\left|\left(\overline{PO}\right)^2 - r^2\right|$.

En caso de que P se encuentre sobre la circunferencia, como está en la Figura 1.7a, la potencia es cero debido a que $\overline{PO} = r$. Además, si el punto P está en el exterior de la circunferencia y A y B son puntos en la intersección entre la recta $\overleftrightarrow{PO}$ y la circunferencia, como se muestra en la Figura 1.7b, entonces

$$\left|\left(\overline{PO}\right)^2 - r^2\right| = (\overline{PO} + r)(\overline{PO} - r) = \overline{PA} \cdot \overline{PB}.$$

Este resultado también se cumple cuando el punto P está en el interior de la circunferencia, como en la Figura 1.7c.



(a) P en la circunferencia.

(b) P en el exterior.

(c) P en el interior.

Figura 1.7: Ilustración guía para cálculo de la potencia de un punto P.

Observe que la cantidad $(\overline{PO})^2 - r^2$, que se utiliza para el cálculo de la potencia del punto P, puede ser usada para indicar si P se encuentra en el exterior o en el interior de la circunferencia, puesto que cuando P está en el exterior de la circunferencia este valor es positivo y cuando está en el interior es negativo (ver figuras 1.7b y 1.7c).

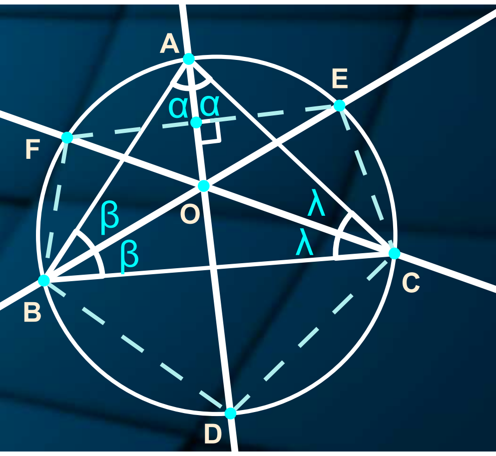
Finalmente, se presenta un grupo especial de polígonos que se conocen como cuadriláteros. Los cuadriláteros son figuras geométricas cerradas, formadas por la unión de cuatro segmentos que se encuentran en un mismo plano, llamados *lados*, y los puntos donde esos lados se intersectan se llaman *vértices*. Cada cuadrilátero se denotará usando la notación de los cuatro vértices que lo conforman.

Los cuadriláteros pueden ser *convexos*, si sus ángulos internos son menores a 180°, o *cóncavos* si uno de sus ángulos internos es mayor a 180°. En este libro se usan cuadriláteros convexos. Una característica de estos cuadriláteros es que la suma de sus ángulos internos es 360° y además, al tomar cualquier par de puntos en el interior de un cuadrilátero convexo, el segmento que los une se queda dentro del cuadrilátero. Estos cuadriláteros se clasifican en:

- *Paralelogramos:* si tienen los lados paralelos dos a dos. En esta clasificación se encuentran los cuadrados, con todos los lados iguales y sus ángulos rectos; los rectángulos, con lados iguales dos a dos y todos los ángulos rectos; los rombos, con los lados iguales; además, están los romboides, con lados iguales dos a dos.
- *Trapecios:* si tienen dos lados paralelos, usualmente conocidos como base menor y mayor, respectivamente. Entre estos cuadriláteros están el trapecio rectángulo, que tiene un ángulo recto; el trapecio isósceles, para los cuales los lados no paralelos son congruentes; por último, está el trapecio escaleno, en estos ningún par de lados son congruentes y no tienen ángulos rectos.
- *Trapezoides:* si ningún par de lados son congruentes ni paralelos.

Hay un gran número de propiedades básicas de los cuadriláteros, las cuales se enseñan en cursos elementales de geometría y por su importancia en este trabajo se recomienda profundizar en textos como Barnett (1997), Hemmerling (2003) y Morfín (2007).

Por otro lado, se encuentran en geometría casos especiales que son interesantes de estudiar, ya que a partir de ellos se pueden determinar propiedades. Por ejemplo, observe que todo triángulo se puede inscribir en una circunferencia con ayuda del circuncentro, pero no todo cuadrilátero se puede inscribir en una circunferencia, pues como se sabe por tres puntos pasa una única circunferencia, es decir, dado un cuadrilátero es posible construir una circunferencia por tres de sus vértices, sin embargo, el cuarto no siempre pertenecerá a ella. Lo anterior permite reflexionar sobre si los cuadriláteros que se pueden inscribir en una circunferencia son especiales y se cuestiona acerca de las características y propiedades que estos tengan, a estos cuadriláteros se los conoce como cíclicos y se estudian formalmente en el siguiente capítulo.



2. Cuadriláteros Cíclicos

En las olimpiadas matemáticas se encuentran problemas de distintas áreas de la matemática, como por ejemplo de álgebra, teoría de números, geometría e incluso juegos matemáticos. En este texto se resalta la solución de problemas geométricos como el siguiente:

Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, sea P la intersección de las rectas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AD}$. La recta $\overleftrightarrow{AC}$ corta a la circunferencia circunscrita del triángulo BDP en S y T, con S entre A y C. La recta $\overleftrightarrow{BD}$ corta a la circunferencia circunscrita del triángulo ACP en U y V, con U entre B y D. Demostrar que $\overline{PS} = \overline{PT} = \overline{PU} = \overline{PV}$ (Tomado de OMPR, año 2015-2016).

Para resolver problemas como este, una estrategia puede ser usar las propiedades y teoremas de los cuadriláteros cíclicos. Pero ¿qué son los cuadriláteros cíclicos?, ¿qué propiedades cumplen?, ¿cómo saber cuando un cuadrilátero es cíclico? Para responder estas preguntas se realizó una revisión bibliográfica en textos como Andreescu y Gelca (2009), Cáceres (2010), Coxeter y Greitzer (1967) y Kichenassamy (2010).

A continuación se presenta la definición de cuadrilátero cíclico y algunos teoremas.

Definición 2.1. Cuadrilátero cíclico.
Un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, es un cuadrilátero cíclico.

Es importante comprender que los cuadriláteros de la Definición 2.1 son especiales, pues no todos los cuadriláteros se pueden inscribir en una circunferencia. Por ejemplo, en la Figura 2.1, los cuadriláteros $ABCD$, $EFGH$ y $OPQR$ son cíclicos, mientras que en la Figura 2.2, los cuadriláteros $HIJK$ y $PQRS$ no se pueden inscribir en una circunferencia y por consiguiente, no son cíclicos.

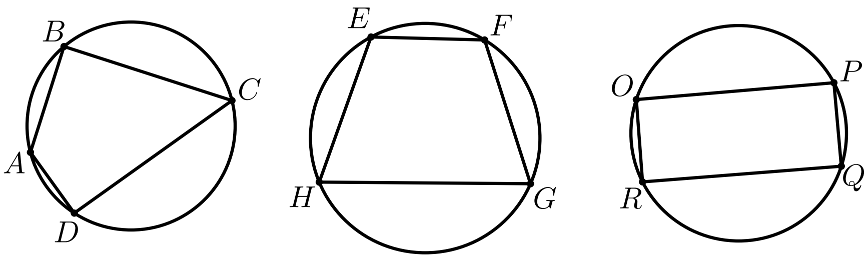


Figura 2.1: Ejemplos de cuadriláteros cíclicos.

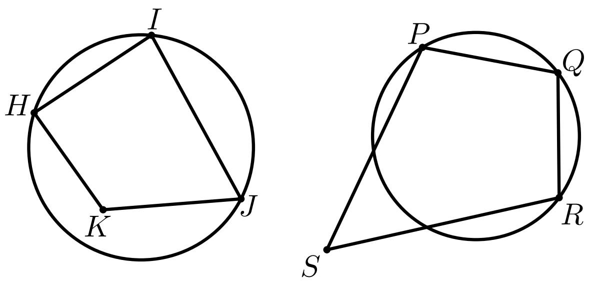


Figura 2.2: Ejemplos de cuadriláteros que no son cíclicos.

En los problemas de geometría no siempre se menciona el término cuadrilátero cíclico o cuadrilátero inscrito en una circunferencia, por lo tanto es importante determinar criterios y características que permitan relacionar un cuadrilátero con la propiedad de ser cíclico.

Teorema 2.1.
Un cuadrilátero es cíclico si y solo si tiene un par de ángulos opuestos suplementarios.

Demostración. Primero se va a demostrar que dado un cuadrilátero cíclico cualquiera, este debe tener un par de ángulos opuestos que son suplementarios, es decir, que la suma de un par de sus ángulos opuestos es 180°.
Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, se debe probar que $\measuredangle BCD + \measuredangle DAB = 180^\circ$ o $\measuredangle ABC + \measuredangle CDA = 180^\circ$. Sin pérdida de generalidad se va a demostrar la primera igualdad.

Dado que $ABCD$ es cíclico existe una circunferencia de centro O que inscribe el cuadrilátero. Los ángulos $\measuredangle BOD$ y $\measuredangle DOB$ son ángulos centrales y los ángulos $\measuredangle DAB$ y $\measuredangle BCD$ son ángulos inscritos (ver Figura 2.3). Por lo tanto, por el Teorema 1.4, se cumple que

$$\measuredangle BCD = \frac{1}{2}\measuredangle BOD \tag{2.1}$$

y

$$\measuredangle DAB = \frac{1}{2}\measuredangle DOB. \tag{2.2}$$

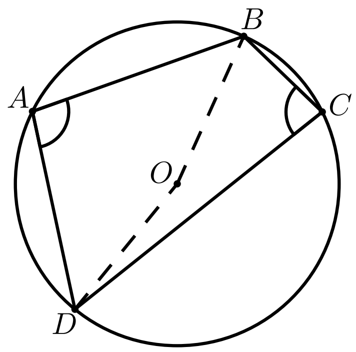


Figura 2.3: Circunferencia que inscribe al cuadrilátero $ABCD$.

Sumando (2.1) y (2.2), se tiene

$$\measuredangle BCD + \measuredangle DAB = \frac{1}{2}\left(\measuredangle BOD + \measuredangle DOB\right). \tag{2.3}$$

Dado que $\measuredangle BOD + \measuredangle DOB = 360^\circ$, al sustituir lo anterior en (2.3), se obtiene

$$\measuredangle BCD + \measuredangle DAB = 180^\circ,$$

que es lo que se quería demostrar.

Ahora, para demostrar la otra implicación, es necesario suponer que un par de ángulos opuestos de un cuadrilátero son suplementarios y demostrar que el cuadrilátero es cíclico. Para mostrar esto se cuenta con la Definición 2.1, por lo cual se debe demostrar que los vértices del cuadrilátero se encuentran sobre una misma circunferencia.

Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que un par de sus ángulos opuestos son suplementarios. Por los puntos A, B y D se traza una circunferencia. Suponga que C no está en la circunferencia y sea C_1 el punto de intersección de la circunferencia con la recta $\overleftrightarrow{BC}$, tal como se muestra en la Figura 2.4.

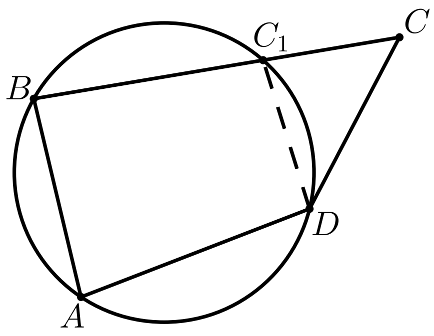


Figura 2.4: Construcción de C_1.

Luego por la Definición 2.1, ABC_1D es cíclico y por lo demostrado anteriormente, se cumple que

$$\measuredangle ABC_1 + \measuredangle C_1DA = 180^\circ. \tag{2.4}$$

Por otro lado, se tiene de la hipótesis que

$$\measuredangle ABC + \measuredangle CDA = 180^\circ \tag{2.5}$$

y como C_1 y C pertenecen a la recta $\overleftrightarrow{BC}$, entonces $\measuredangle ABC_1 = \measuredangle ABC$. De donde al sustituir en (2.5), se tiene

$$\measuredangle ABC_1 + \measuredangle CDA = 180^\circ. \tag{2.6}$$

Note que de las ecuaciones (2.4) y (2.6), se concluye $\measuredangle C_1DA = \measuredangle CDA$. Como $\measuredangle CDA = \measuredangle CDC_1 + \measuredangle C_1DA$ entonces $\measuredangle C_1DA = \measuredangle CDC_1 + \measuredangle C_1DA$, de donde $\measuredangle CDC_1 = 0^\circ$ por lo cual se deduce que $C_1 = C$ y por lo tanto $ABCD$ es cíclico. □

Observe que los ángulos opuestos de un rectángulo son suplementarios, por lo cual el siguiente corolario es una consecuencia inmediata del teorema anterior.

Corolario 2.1.
Todo rectángulo es un cuadrilátero cíclico.

Además, del Teorema 2.1, se puede inferir otra propiedad de cuadriláteros cíclicos al relacionar un ángulo interno con uno externo como se describe en el próximo corolario.

Corolario 2.2.
Un cuadrilátero es cíclico si y solo si un ángulo interno es congruente al ángulo adyacente del ángulo opuesto (ver Figura 2.5).

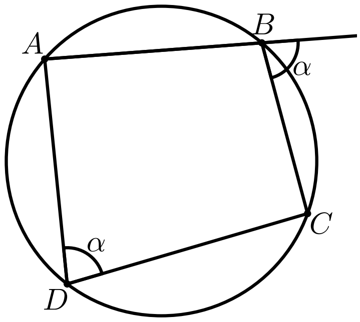


Figura 2.5: Ilustración del Corolario 2.2.

El Teorema 2.1 permite determinar si un cuadrilátero es cíclico conociendo la medida de sus ángulos, lo cual brinda un criterio muy útil a la hora de resolver problemas. A continuación se presenta una consecuencia de este teorema, mediante el cual se puede determinar cuando un trapecio es cuadrilátero cíclico.

Teorema 2.2.
Un trapecio es un cuadrilátero cíclico si y solo si es isósceles.

Demostración. Sea $ABCD$ un trapecio, con $\overline{AB}$ paralelo a $\overline{DC}$. Primero se va a probar que si $ABCD$ es cíclico, entonces es isósceles.

Si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico, por el Teorema 2.1, $\measuredangle CDA$ y $\measuredangle ABC$ son suplementarios. Además como $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle BCD$ son colaterales internos, también son suplementarios. Así $\measuredangle CDA = \measuredangle BCD$, como se muestra en la Figura 2.6, por lo tanto el trapecio $ABCD$ es isósceles.

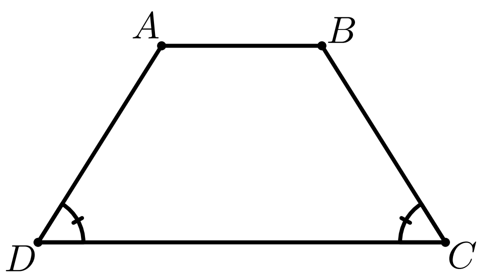


Figura 2.6: Trapecio isósceles.

Para la otra implicación nuevamente se usa el Teorema 2.1, así se va a demostrar que un trapecio isósceles tiene un par de ángulos opuestos suplementarios.

Sea $ABCD$ un trapecio isósceles con

$$\measuredangle CDA = \measuredangle BCD, \tag{2.7}$$

como se indica en la Figura 2.6.

Los ángulos $\measuredangle DAB$ y $\measuredangle CDA$ son suplementarios al ser ángulos colaterales internos, es decir

$$\measuredangle DAB + \measuredangle CDA = 180^\circ. \tag{2.8}$$

Luego reemplazando (2.7) en (2.8), se obtiene que $\measuredangle DAB + \measuredangle BCD = 180^\circ$ y con esto se concluye la demostración. □

El siguiente teorema, permite identificar si un cuadrilátero es cíclico por medio de la relación de los lados, las diagonales y los ángulos de dicho cuadrilátero.

Teorema 2.3.
Un cuadrilátero es cíclico si y solo si el ángulo formado por un lado y una diagonal es congruente al ángulo formado por el lado opuesto y la otra diagonal.

Demostración. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cualquiera, siendo las diagonales de dicho cuadrilátero $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ como se muestra en la Figura 2.7.

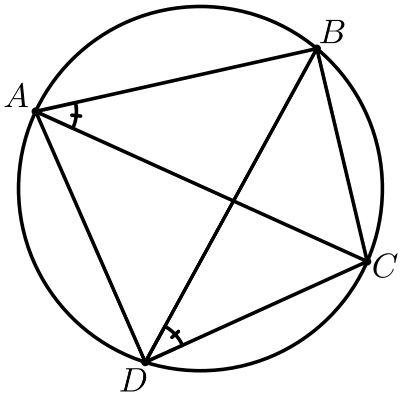


Figura 2.7: Ilustración guía en la demostración del Teorema 2.3.

Primero se va a demostrar que si $ABCD$ es cíclico, entonces $\measuredangle CAB = \measuredangle CDB$. Esto se sigue del Teorema 1.3, dado que los ángulos $\measuredangle CAB$ y $\measuredangle CDB$ abren el mismo arco.

Para la otra implicación, se prueba que si $\measuredangle CAB = \measuredangle CDB$ entonces el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. Para ello por el Teorema 2.1, basta probar que $\measuredangle DAB + \measuredangle BCD = 180^\circ$.

Por la suma de los ángulos internos del triángulo ABC, se tiene $\measuredangle CAB + \measuredangle BCA + \measuredangle ABC = 180°$. De donde como $\measuredangle ABC = \measuredangle ABD + \measuredangle DBC$, resulta

$$\measuredangle CAB + \measuredangle BCA + \measuredangle ABD + \measuredangle DBC = 180°. \tag{2.9}$$

Luego, como los ángulos $\measuredangle DBC$ y $\measuredangle ABD$ abren respectivamente el mismo arco que los ángulos $\measuredangle DAC$ y $\measuredangle ACD$, por el Teorema 1.3, se tiene que $\measuredangle DBC = \measuredangle DAC$ y $\measuredangle ABD = \measuredangle ACD$. Reemplazando la anterior conclusión en (2.9), se obtiene

$$\measuredangle CAB + \measuredangle BCA + \measuredangle ACD + \measuredangle DAC = 180°,$$

y dado que $\measuredangle DAB = \measuredangle CAB + \measuredangle DAC$ y $\measuredangle BCD = \measuredangle BCA + \measuredangle ACD$, se concluye que $\measuredangle DAB + \measuredangle BCD = 180°$. Así el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. □

Observe que este teorema es una doble implicación, es decir, que no solo indica una manera de probar que un cuadrilátero es cíclico, sino también presenta una característica propia de dichos cuadriláteros. Se muestra más adelante en la resolución de problemas lo útiles que son estos teoremas.

Para caracterizar los cuadriláteros cíclicos en los anteriores teoremas se consideraron sus ángulos, pero ahora se presentan teoremas que relacionan las longitudes de sus lados y diagonales.

Teorema 2.4.
Si $ABCD$ es un cuadrilátero tal que sus diagonales se intersectan en P, entonces $ABCD$ es cíclico si y solo si $\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}$ (ver Figura 2.8).

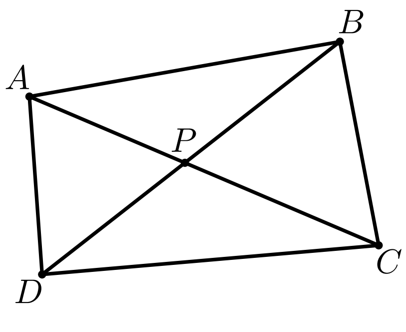


Figura 2.8: Punto de intersección de diagonales del cuadrilátero $ABCD$.

Demostración. Primero se va a probar que si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico entonces $\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}$.

Se supone que $ABCD$ es cíclico. Por el Teorema 2.3, se tiene que $\measuredangle BDA = \measuredangle BCA$ y por ángulos opuestos por el vértice $\measuredangle APD = \measuredangle CPB$. Así por el criterio de semejanza A-A, se concluye que $\triangle ADP \sim \triangle BCP$ y por lo tanto

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}. \tag{2.10}$$

Al operar (2.10), se concluye que $\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}$.

Para la otra implicación se demuestra que si $\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}$, entonces el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico.

Como $\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}$ entonces $\frac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$ y por ángulos opuestos por el vértice $\measuredangle APD = \measuredangle CPB$. Así por el criterio L-A-L los triángulos ADP y BCP son semejantes, por lo cual se tiene que $\measuredangle PDA = \measuredangle BCP$. Finalmente, por el Teorema 2.3, $ABCD$ es cíclico. □

Observe que usando el teorema anterior se puede probar que $\overline{PA} \cdot \overline{PC}$ y $\overline{PB} \cdot \overline{PD}$ corresponden a la potencia del punto P con respecto a la circunferencia que contiene a los puntos A, B, C y D de acuerdo a la Definición 1.1. Este teorema brinda otra manera de probar que un cuadrilátero es cíclico cuando ya se conocen las longitudes de sus diagonales, además permite conocer otra característica de ellos.

El siguiente teorema, a diferencia de los anteriores, permite demostrar que un cuadrilátero es cíclico teniendo en cuenta un punto exterior a él.

Teorema 2.5.
Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que dos lados opuestos se cortan en P. Entonces $ABCD$ es cíclico si y solo si $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ (ver Figura 2.9).

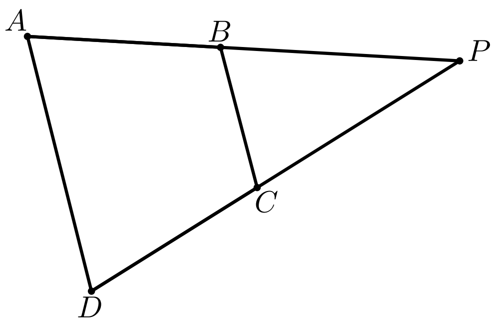


Figura 2.9: Cuadrilátero $ABCD$ con corte de lados opuestos en P.

Demostración. Primero se va a probar que si el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, entonces $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$. Por el Teorema 2.1, como $ABCD$ es cíclico, se tiene

$$\measuredangle CDA + \measuredangle ABC = 180^\circ. \tag{2.11}$$

Luego, dado que el ángulo $\measuredangle ABP$ es llano, se obtiene

$$\measuredangle ABC + \measuredangle CBP = 180^\circ. \tag{2.12}$$

De (2.11) y (2.12), se puede concluir que $\measuredangle CDA = \measuredangle CBP$ y dado que $\measuredangle BPC$ es común en los triángulos ADP y CBP, entonces se tiene que $\triangle ADP \sim \triangle CBP$ por el criterio A-A. Por lo tanto $\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}}$, así resulta $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$.

Para demostrar la otra implicación, se supone que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ de donde $\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}}$ y como $\measuredangle BPC$ es común, entonces por el criterio L-A-L los triángulos APD y CPB son semejantes, por consiguiente $\measuredangle PCB = \measuredangle DAB$. Así, por el Corolario 2.2, el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. □

Los teoremas 2.4 y 2.5 demuestran que la potencia de un punto P con respecto a una circunferencia es constante, en el sentido de que esta no depende de los puntos de intersección entre la recta que pase por P y la circunferencia.

Observe que en algunas figuras se tiene un cuadrilátero cíclico sin incluir la circunferencia que lo inscribe, por ejemplo el cuadrilátero de la Figura 2.9. Es así como surge el siguiente interrogante: ¿cómo se construye la circunferencia que inscribe a un cuadrilátero cíclico? Para responder a esta pregunta imagine un cuadrilátero cíclico, para el cual basta trazar las mediatrices de dos lados, luego con centro en el punto de intersección de las mediatrices y con radio hasta uno de los vértices del cuadrilátero se construye la circunferencia que lo inscribe.

El siguiente teorema recibe le nombre del matemático y astrónomo griego *Claudio Ptolomeo*, en el cual se establece una relación geométrica entre las longitudes de los lados y las diagonales de un cuadrilátero cíclico.

Teorema 2.6. Teorema de Ptolomeo.
El cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y solo si $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$ (ver Figura 2.10).

Demostración. Para empezar se realiza una construcción auxiliar.

Sea $ABCD$ un cuadrilátero cualquiera. Luego se construye el punto E tal

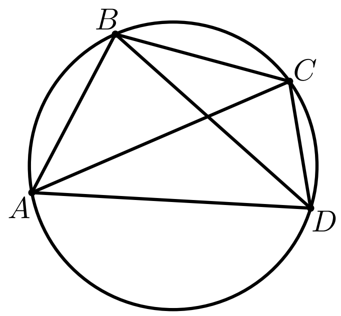


Figura 2.10: Cuadrilátero cíclico $ABCD$ con diagonales.

que $\triangle BCE \sim \triangle BAD$, teniendo en cuenta la correspondiente congruencia de ángulos que se muestra en la Figura 2.11.

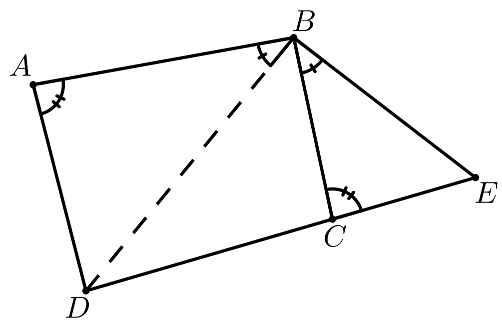


Figura 2.11: Construcción del punto E.

De la anterior semejanza, se tiene que $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AD}}$ y despejando $\overline{CE}$, resulta

$$\overline{CE} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}{\overline{AB}}. \tag{2.13}$$

Por otro lado, de esta semejanza también se puede concluir que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$ y como $\measuredangle ABC = \measuredangle DBE$, debido a que $\measuredangle ABD = \measuredangle CBE$ por construcción, se concluye que $\triangle ABC \sim \triangle DBE$. De aquí al despejar $\overline{DE}$ de la relación de proporcionalidad $\frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}$, se obtiene

$$\overline{DE} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AC}}{\overline{AB}}. \tag{2.14}$$

Para la primera implicación, suponga que $ABCD$ es cíclico. Por construcción del punto E se tiene $\measuredangle DAB = \measuredangle ECB$, entonces por el Corolario 2.2, los puntos D, C y E son colineales, por lo cual $\overline{DE} = \overline{DC} + \overline{CE}$ y reemplazando (2.13) y (2.14), se tiene

$$\frac{\overline{BD} \cdot \overline{AC}}{\overline{AB}} = \overline{DC} + \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}{\overline{AB}}.$$

Luego, multiplicando por $\overline{AB}$ y simplificando

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{DC} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}.$$

Para la otra implicación, suponga que $ABCD$ no es un cuadrilátero cíclico, entonces D, C y E no son colineales por lo cual $\overline{DE} < \overline{DC} + \overline{CE}$. De donde reemplazando (2.13) y (2.14), se deduce que $\overline{AC} \cdot \overline{BD} < \overline{AB} \cdot \overline{DC} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$, lo cual contradice la hipótesis. □

Los siguientes teoremas se atribuyen al matemático indú Brahmagupta. El primero aplica para cuadriláteros cíclicos tales que sus diagonales son perpendiculares. El segundo establece una fórmula entre el semiperímetro y la longitud de los lados del cuadrilátero para poder determinar su área, se anticipa que en este último se usan relaciones trigonométricas.

Teorema 2.7. Teorema de Brahmagupta.
Si las diagonales de un cuadrilátero cíclico son perpendiculares, entonces toda recta perpendicular a un lado cualquiera del cuadrilátero y que pase por la intersección de las diagonales, biseca al lado opuesto.

Demostración. Sea el cuadrilátero cíclico $ABCD$, tal que sus diagonales son perpendiculares y se cortan en Q. Sea M el pie de la perpendicular al segmento $\overline{CD}$ que pasa por Q y corta a $\overline{AB}$ en P, como se indica en la Figura 2.12.

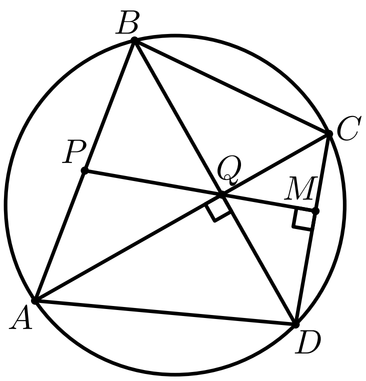


Figura 2.12: Ilustración guía en el Teorema de Brahmagupta.

Se va a demostrar que $\overline{AP} = \overline{PB}$. Para ello observe que $\triangle ABQ \sim \triangle DQM$

por el criterio A-A, pues por hipótesis los ángulos $\measuredangle BQA$ y $\measuredangle QMD$ son rectos y por el Teorema 2.3, se tiene $\measuredangle CAB = \measuredangle CDB$. De la semejanza, se concluye que

$$\measuredangle PBQ = \measuredangle DQM. \tag{2.15}$$

Por otro lado, los ángulos $\measuredangle DQM$ y $\measuredangle BQP$ son opuestos por el vértice y así

$$\measuredangle DQM = \measuredangle BQP. \tag{2.16}$$

Luego de (2.15) y (2.16), se concluye que $\measuredangle BQP = \measuredangle PBQ$ y por consiguiente el $\triangle BPQ$ es isósceles, de donde

$$\overline{PB} = \overline{PQ}. \tag{2.17}$$

De manera análoga, al considerar los triángulos ABQ y CMQ se demuestra que el $\triangle APQ$ es isósceles, de donde

$$\overline{PQ} = \overline{AP}. \tag{2.18}$$

Finalmente, de (2.17) y (2.18), se puede concluir que $\overline{AP} = \overline{PB}$. □

Teorema 2.8. Fórmula de Brahmagupta.
Si un cuadrilátero es cíclico entonces su área es la raíz cuadrada del producto de las diferencias del semiperímetro con la longitud de cada uno de sus lados.

Demostración. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ y $\overline{DA} = d$ (ver Figura 2.13). Se va a probar que el área del cuadrilátero es $A_{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, donde s es el semiperímetro.

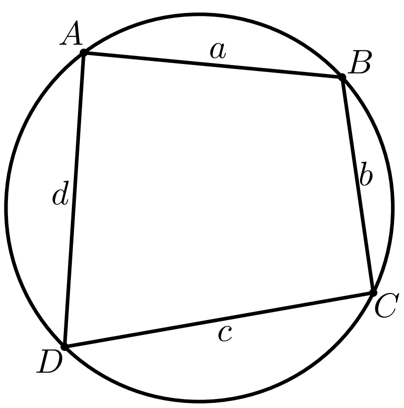


Figura 2.13: Longitud de los lados del cuadrilátero $ABCD$.

Considere $\measuredangle ABC = \alpha$. Por el Teorema 2.1, se tiene $\measuredangle CDA = 180^\circ - \alpha$.

Aplicando la ley del coseno a los triángulos ABC y ACD se tiene, respectivamente, que

$$(\overline{AC})^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \tag{2.19}$$

y

$$(\overline{AC})^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha. \tag{2.20}$$

Así, igualando (2.19) y (2.20), resulta

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha,$$

y al realizar las respectivas operaciones y despejar $\cos\alpha$, se concluye

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(cd + ab)}.$$

Ahora, observe que $\alpha < 180^\circ$ pues $ABCD$ es cíclico y al despejar $\operatorname{sen}\alpha$ de la relación fundamental trigonométrica $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, se tiene

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\alpha &= \sqrt{1 - \frac{\left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2}{\left(2(cd + ab)\right)^2}},\\ &= \sqrt{\frac{\left(2(cd + ab)\right)^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2}{\left(2(cd + ab)\right)^2}}.\end{aligned}$$

Desarrollando como diferencia de cuadrados y factorizando, se obtiene

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{\left[(a+b)^2 - (c-d)^2\right]\left[(c+d)^2 - (a-b)^2\right]}}{2(cd + ab)}. \tag{2.21}$$

Considerando que el semiperímetro del cuadrilátero $ABCD$ es

$$s = \frac{a + b + c + d}{2},$$

despejando $a+b$ y elevando al cuadrado, se sigue $(a+b)^2 = (2s - (c+d))^2$. De donde desarrollando el cuadrado, se tiene

$$(a+b)^2 = 4s^2 - 4sc - 4sd + c^2 + 2cd + d^2. \tag{2.22}$$

De manera similar al despejar $c + d$, se puede concluir que

$$(c+d)^2 = 4s^2 - 4sa - 4sb + a^2 + 2ab + b^2. \tag{2.23}$$

Así, si se reemplaza y opera (2.22) y (2.23) en (2.21), resulta

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{(4s^2 - 4sc - 4sd + 4cd)(4s^2 - 4sa - 4sb + 4ab)}}{2(cd + ab)},$$

de donde

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{ab + cd}\sqrt{(s - d)(s - c)(s - b)(s - b)}. \tag{2.24}$$

Dado que el área del cuadrilátero $ABCD$ se puede encontrar al sumar el área de los triángulos ABC y ACD, entonces

$$A_{ABCD} = \frac{ab\operatorname{sen}\alpha}{2} + \frac{cd\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha)}{2},$$

es decir que

$$A_{ABCD} = \frac{ab + cd}{2}\operatorname{sen}\alpha.$$

Luego, reemplazando (2.24) en A_{ABCD}, se tiene

$$A_{ABCD} = \frac{ab + cd}{2} \cdot \frac{2}{ab + cd}\sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}.$$

Simplificando la expresión anterior queda demostrado el teorema. □

La importancia de este teorema es que proporciona una fórmula para calcular el área de cualquier cuadrilátero cíclico partiendo únicamente de la longitud de sus lados.

Observe que, si la longitud de uno de los lados del cuadrilátero tiende a cero, se obtiene la fórmula que propuso el matemático griego Herón de Alejandría para calcular el área de un triángulo conociendo la longitud de sus lados. Siendo así, la Fórmula de Herón es un caso particular de la Fórmula de Brahmagupta, la cual está dada por

$$A_{\triangle} = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)},$$

donde s es el semiperímetro del triángulo y a, b y c la longitud de sus lados.

Una aplicación de cuadriláteros cíclicos se encuentra en la demostración de las leyes del seno y del coseno como se verá a continuación.

Recuerde que la ley del seno, Teorema 1.1, dice: sea $\triangle ABC$ tal que la medida de los correspondientes lados opuestos a los ángulos α, β y δ son respectivamente a, b y c. Entonces se cumple que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\delta}.$$

Demostración. Dado el triángulo ABC se considera la circunferencia que lo inscribe, donde el centro se denota con O. Luego se construyen las rectas $\overleftrightarrow{AO}$, $\overleftrightarrow{BO}$ y $\overleftrightarrow{CO}$ que cortan a la circunferencia en D, E y F, respectivamente, determinando los diámetros $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$. Aquí se presentan dos casos, el primero cuando O está en el interior del triángulo y el segundo cuando está en el exterior, lo cual se puede ver en la Figura 2.14.

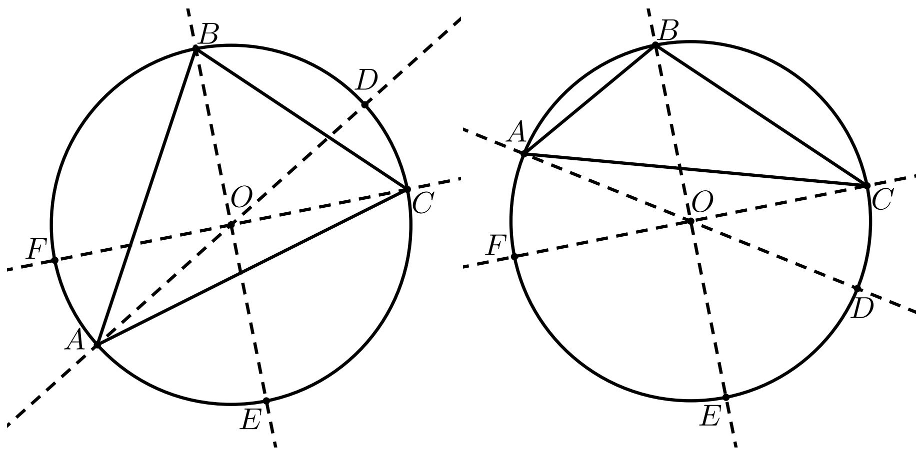


Figura 2.14: Ilustración de los dos casos de la ley del seno.

Para demostrar el primer caso, donde el centro de la circunferencia está en el interior de $\triangle ABC$, considere el diámetro $\overline{AD}$ como se indica en la Figura 2.15.

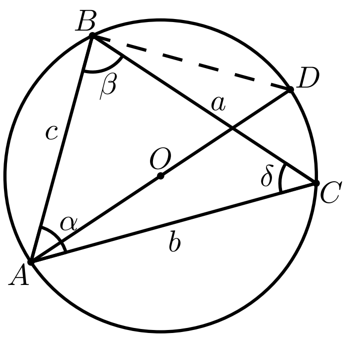


Figura 2.15: Primer caso de la ley del seno.

Como $ABCD$ es cíclico, por el Teorema 2.3, se concluye que $\delta = \measuredangle BDA$ y al aplicar la función seno en ambos lados de la igualdad, resulta

$$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}(\measuredangle BDA). \tag{2.25}$$

Ahora, por el Teorema 1.4, el ángulo $\measuredangle ABD$ es recto, así el $\triangle ABD$ es rectángulo y por consiguiente

$$\operatorname{sen}(\measuredangle BDA) = \frac{c}{\overline{AD}}. \tag{2.26}$$

Luego igualando (2.25) y (2.26), resulta $\operatorname{sen}\delta = \frac{c}{\overline{AD}}$ y al despejar $\overline{AD}$, se obtiene $\overline{AD} = \frac{c}{\operatorname{sen}\delta}$. De manera análoga, al considerar $\overline{BE}$ con el $\triangle BCE$ y $\overline{CF}$ con el $\triangle ACF$, se puede concluir que $\overline{BE} = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$ y $\overline{FC} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$, respectivamente. Finalmente, como $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{FC}$ al ser diámetros de la misma circunferencia, se concluye que $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\delta}$.

Para la demostración del segundo caso, donde O está en el exterior del triángulo, considere el diámetro como se muestra en la Figura 2.16.

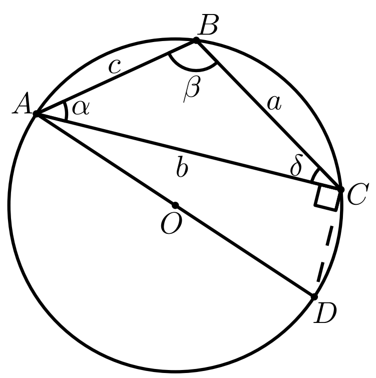


Figura 2.16: Segundo caso de la ley del seno.

Como el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, por el Teorema 2.1, $\beta + \measuredangle CDA = 180^\circ$. Luego al despejar $\measuredangle CDA$ y aplicar la función seno en ambos lados de la igualdad, resulta $\operatorname{sen}(\measuredangle CDA) = \operatorname{sen}(180^\circ - \beta)$. De donde al realizar las operaciones correspondientes, se tiene

$$\operatorname{sen}(\measuredangle CDA) = \operatorname{sen}\beta. \tag{2.27}$$

Por otro lado, por el Teorema 1.4, $\measuredangle ACD$ es recto, así el $\triangle ACD$ es rectángulo y por consiguiente

$$\operatorname{sen}(\measuredangle CDA) = \frac{b}{\overline{AD}}. \tag{2.28}$$

Así, al igualar (2.27) y (2.28), resulta $\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{\overline{AD}}$ y despejando $\overline{AD}$, se obtiene $\overline{AD} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$.

Ahora, se repite el proceso realizado en el primer caso al considerar $\overline{BE}$ con el $\triangle ABE$ y $\overline{CF}$ con el $\triangle BCE$, obteniendo como resultado $\overline{BE} = \frac{c}{\operatorname{sen}\delta}$

y $\overline{CE} = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$, respectivamente, y nuevamente como $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{FC}$ por ser diámetros de la misma circunferencia, entonces

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\delta}.$$

□

Observe que en el teorema anterior $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$, $\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$ y $\frac{c}{\operatorname{sen}\delta}$ son iguales al diámetro de la circunferencia que inscribe al triángulo ABC.

Por otra parte, la ley del coseno, Teorema 1.2, dice: sea $\triangle ABC$ tal que sus ángulos internos son α, β y δ y la longitud de los lados opuestos a ellos son a, b y c, respectivamente. Entonces se cumple que

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\delta, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \end{aligned}$$

Demostración. Sea un triángulo ABC como el que se muestra en la Figura 2.17. Se construye una circunferencia con centro en A y radio $\overline{AC}$ tal que la prolongación de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ cortan a la circunferencia en D y H, respectivamente, y $\overline{AB}$ la corta en F y E.

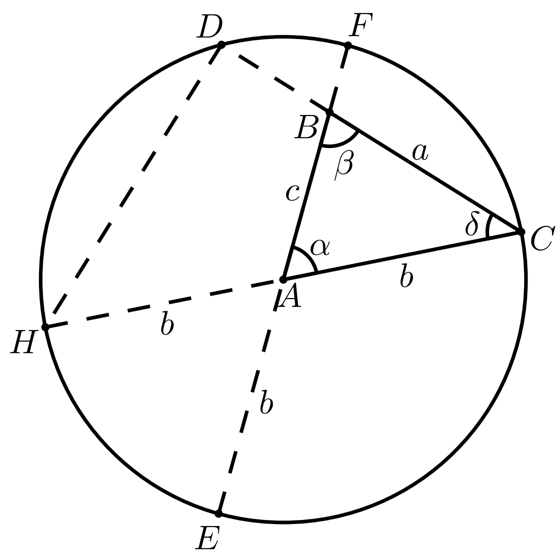


Figura 2.17: Construcción auxiliar para demostrar la ley del coseno.

Dado que el $\triangle CDH$ es rectángulo, se cumple que $\cos\delta = \frac{\overline{DC}}{2b}$ y despejando $\overline{DC}$, resulta

$$\overline{DC} = 2b\cos\delta. \tag{2.29}$$

Además, por hipótesis se tiene que

$$\overline{BC} = a, \tag{2.30}$$

luego como D, B y C son colineales entonces

$$\overline{DC} = \overline{DB} + \overline{BC}. \tag{2.31}$$

Reemplazando (2.29) y (2.30) en (2.31) y operando, se tiene

$$\overline{DB} = 2b\cos\delta - a. \tag{2.32}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la colinealidad de A, B, E y F, se puede concluir que

$$\overline{EB} = b + c \tag{2.33}$$

y

$$\overline{BF} = b - c. \tag{2.34}$$

Finalmente, como el cuadrilátero $CEDF$ es cíclico entonces por el Teorema 2.4, $\overline{DB} \cdot \overline{BC} = \overline{EB} \cdot \overline{BF}$ y al reemplazar (2.30), (2.32), (2.33) y (2.34) en esta última expresión y realizando las respectivas operaciones, se concluye que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\delta.$$

□

La demostración anterior es un caso particular, pues la circunferencia que se construye depende de la longitud de un lado del triángulo, de modo que si se toma otro lado, la construcción no quedaría de igual manera y por ende no es posible construir el cuadrilátero que facilita la demostración.

Se resalta que las demostraciones presentadas se pueden hacer utilizando otros conceptos geométricos, sin embargo se observa que los cuadriláteros cíclicos constituyen una herramienta en la demostración de teoremas relacionados con trigonometría.

Con los conceptos presentados en los preliminares y en este capítulo, es posible entender los problemas que en el siguiente capítulo se resuelven.

II Problemas

3 Problemas Resueltos 39
4 Problemas Propuestos 73

3. Problemas Resueltos

En este capítulo se presentan diversos problemas tomados de libros y olimpiadas matemáticas, los cuales han sido resueltos con ayuda de los teoremas y propiedades de cuadriláteros cíclicos descritas en el anterior capítulo.

Dado que los problemas geométricos que se plantean en olimpiadas matemáticas no siempre incluyen una gráfica que ilustre las condiciones del problema, un buen comienzo para resolverlo es intentar realizarla. Esta se puede hacer con ayuda de un software de geometría dinámica pues facilita la elaboración de una construcción donde se pueden observar las condiciones que se enuncian en el problema y permite hacer modificaciones en tiempo real para identificar relaciones, plantear conjeturas, realizar variaciones del problema, entre otros, teniendo en cuenta que este es un apoyo para la demostración, es decir, sirve como laboratorio y para conjeturar pero no para demostrar. Se aclara al lector que las gráficas que ilustran los problemas en este libro se hicieron con el software de geometría dinámica GeoGebra, ver Hohenwarter *et al.* (2018).

A continuación se presentan problemas en los cuales se debe demostrar, dadas ciertas condiciones, que un cuadrilátero es cíclico.

Problema 3.1. Tomado de Cáceres (2010).
Sea $\overline{AL}$ la bisectriz del ángulo $\measuredangle BAC$ de un triángulo acutángulo ABC.

Sean M y N puntos sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, de manera que $\measuredangle ALM = \measuredangle CBA$ y $\measuredangle NLA = \measuredangle ACB$. Demostrar que $AMLN$ es un cuadrilátero cíclico.

Solución. Primero se ilustran las condiciones del problema en la Figura 3.1.

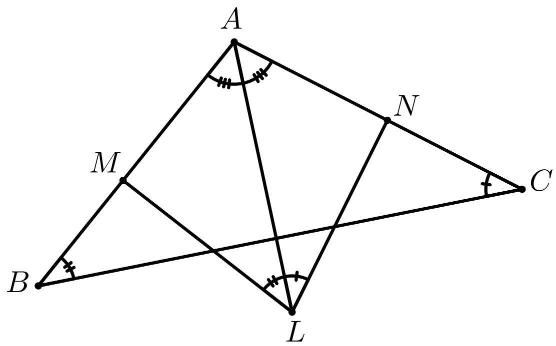


Figura 3.1: Ilustración del Problema 3.1.

Para demostrar que el cuadrilátero $AMLN$ es cíclico, se va a probar que la suma de un par de sus ángulos opuestos es $180°$, es decir, $\measuredangle MAN + \measuredangle NLM = 180°$, lo que por suma de ángulos es igual a $\measuredangle MAL + \measuredangle LAN + \measuredangle ALM + \measuredangle NLA = 180°$.

Para ello se considera el $\triangle ABC$ y como la suma de la medida de sus ángulos internos es $180°$, entonces

$$\measuredangle CBA + \measuredangle BAC + \measuredangle ACB = 180°. \tag{3.1}$$

Por hipótesis $\measuredangle CBA = \measuredangle ALM$ y $\measuredangle ACB = \measuredangle NLA$, además como $\measuredangle BAC = \measuredangle MAL + \measuredangle LAN$, entonces reemplazando estos valores en (3.1), se tiene

$$\measuredangle MAL + \measuredangle LAN + \measuredangle ALM + \measuredangle NLA = 180°,$$

por lo cual el cuadrilátero $AMLN$ es cíclico. □

Problema 3.2. Tomado de Cáceres (2010).

Sean $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ las alturas de un triángulo ABC y H su punto de intersección. Demostrar que los cuadriláteros $AEHF$, $CDHE$, $BDHF$, $BCEF$, $ACDF$ y $ABDE$ son cíclicos (ver Figura 3.2).

Solución. Dado que $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son alturas del triángulo ABC, entonces $\measuredangle AEH = 90°$ y $\measuredangle HFA = 90°$, respectivamente, así por el Teorema 2.1, el cuadrilátero $AEHF$ es cíclico. Análogamente, se tiene que los cuadriláteros $CDHE$ y $BDHF$ son cíclicos.

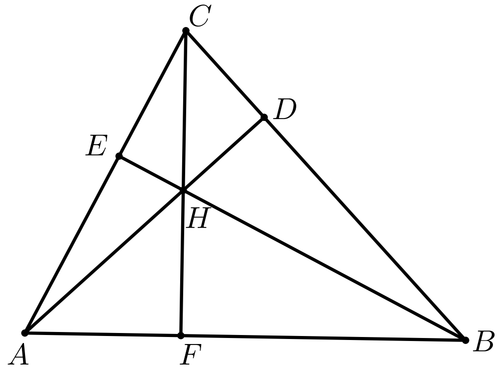


Figura 3.2: Alturas del triángulo ABC.

Por otra parte, como $\measuredangle BEC = 90°$ y $\measuredangle BFC = 90°$, entonces por el Teorema 2.3, el cuadrilátero $BCEF$ es cíclico. De manera análoga, se muestra que los cuadriláteros $ACDF$ y $ABDE$ son cíclicos. □

Problema 3.3. Tomado de Cáceres (2010).

En la Figura 3.3, están trazadas las bisectrices de los ángulos interiores del cuadrilátero $ABCD$, las cuales se intersectan en los puntos E, F, G y H como se muestra en la figura. Demostrar que el cuadrilátero $EFGH$ es cíclico.

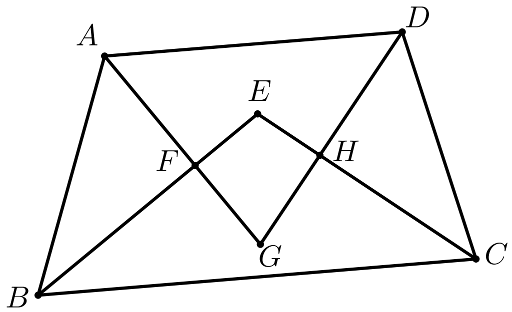


Figura 3.3: Ilustración dada por el Problema 3.3.

Solución. Se denota los ángulos como se muestra en la Figura 3.4.

Considere los triángulos ADG y BCE, de donde se tiene que $\theta = 180° - \alpha_1 - \alpha_4$ y $\beta = 180° - \alpha_2 - \alpha_3$, respectivamente. Luego sumando θ y β, resulta

$$\theta + \beta = 360 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4).$$

Como la suma de la medida de los ángulos internos de un cuadrilátero es $360°$, entonces $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 180°$. Así $\theta + \beta = 180°$ y por lo tanto el cuadrilátero $EFGH$ es cíclico. □

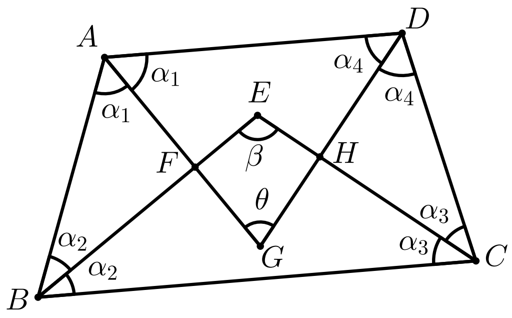


Figura 3.4: Notación de los ángulos internos del cuadrilátero.

Problema 3.4. Tomado de OMPR, año 2001-2002, nivel intermedio.
Un triángulo ABC está inscrito en una circunferencia. Sea M la intersección de las rectas tangentes a la circunferencia en B y C. Por el punto M se traza la recta paralela a $\overline{AC}$, la cual corta a $\overline{AB}$ en el punto N.

- *Demuestre que $BMCN$ es un cuadrilátero cíclico.*
- *Demuestre que $\overline{AN} = \overline{CN}$.*

Solución. Para la primera parte, se debe demostrar que el cuadrilátero $BMCN$ es cíclico, entonces por el Teorema 2.3, basta con probar que $\measuredangle MCB = \measuredangle MNB$.

Sea $\alpha = \measuredangle BMC$. Como las rectas $\overleftrightarrow{BM}$ y $\overleftrightarrow{CM}$ son tangentes a la circunferencia de centro O, se tiene $\measuredangle OBM = 90^\circ$ y $\measuredangle MCO = 90^\circ$, respectivamente. Luego, del cuadrilátero $BMCO$, se obtiene $\measuredangle COB = 360^\circ - \measuredangle OBM - \measuredangle MCO - \alpha$. Al reemplazar en la expresión anterior los ángulos encontrados y hacer las respectivas operaciones, resulta $\measuredangle COB = 180^\circ - \alpha$.

Ahora, como $\measuredangle COB$ es un ángulo central, entonces por el Teorema 1.4, $\measuredangle CAB = \frac{1}{2}\measuredangle COB$. Así $\measuredangle CAB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ y puesto que la recta $\overleftrightarrow{NM}$ es paralela a la recta $\overleftrightarrow{AC}$, se tiene que $\measuredangle MNB = \measuredangle CAB$, por lo tanto

$$\measuredangle MNB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}. \tag{3.2}$$

Por otra parte, como las rectas $\overleftrightarrow{BM}$ y $\overleftrightarrow{CM}$ son tangentes a la circunferencia en B y C, respectivamente, por la propiedad de la barquilla dada en el Teorema 1.5, se cumple que $\overline{BM} = \overline{CM}$. Así el triángulo BMC es isósceles, de donde $\measuredangle CBM = \measuredangle MCB$ (ver Figura 3.5).

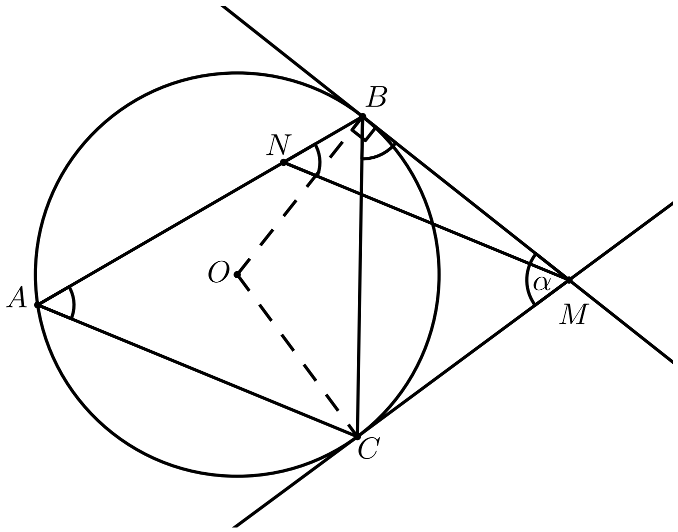


Figura 3.5: Ilustración guía para la solución del Problema 3.4.

Del triángulo BCM se puede inferir que $\measuredangle CBM + \measuredangle MCB + \alpha = 180^\circ$. Por lo tanto, $2(\measuredangle MCB) = 180^\circ - \alpha$, lo que es igual a

$$\measuredangle MCB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}. \tag{3.3}$$

Finalmente, igualando (3.2) y (3.3), se tiene que $\measuredangle MNB = \measuredangle MCB$, así el cuadrilátero $BMCN$ es cíclico.

Para la segunda parte, como $BMCN$ es cíclico los ángulos α y $\measuredangle CNB$ son suplementarios por el Teorema 2.1, así $\measuredangle CNB = 180^\circ - \alpha$. Luego, por suma de ángulos

$$\measuredangle CNB = \measuredangle CNM + \measuredangle MNB.$$

Al reemplazar (3.2) y la medida del ángulo $\measuredangle CNB$, se concluye

$$\measuredangle CNM = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Como las rectas $\overleftrightarrow{CA}$ y $\overleftrightarrow{MN}$ son paralelas, entonces por ángulos alternos internos $\measuredangle CNM = \measuredangle NCA$ y de esta manera

$$\measuredangle NCA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}. \tag{3.4}$$

Por otro lado, de la primera parte, se tiene que

$$\measuredangle CAB = \measuredangle CAN = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}. \tag{3.5}$$

Finalmente, de (3.4) y (3.5), el triángulo CAN es isósceles, de donde $\overline{AN} = \overline{CN}$. □

Problema 3.5. Tomado de OMCC, año 2004.
Sea $ABCD$ un trapecio tal que $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{CD}$ y $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}$. Sea P el punto sobre $\overline{AD}$ tal que $\overline{AP}=\overline{AB}$ y $\overline{PD}=\overline{CD}$.

- *Demostrar que $\measuredangle CPB = 90^\circ$.*
- *Sea Q el punto medio de $\overline{BC}$ y R el punto de corte de la recta $\overleftrightarrow{AD}$ y la circunferencia que pasa por los puntos B, A y Q. Demostrar que los puntos B, P, R y C están sobre una misma circunferencia.*

Solución. Para la primera parte se denota $\measuredangle PAB = \alpha$, además por ángulos colaterales internos $\measuredangle DAB + \measuredangle CDA = 180^\circ$, de donde $\measuredangle CDA = 180^\circ - \measuredangle DAB$. Como $\measuredangle DAB = \measuredangle PAB$, se tiene $\measuredangle CDA = 180^\circ - \alpha$.

Por otra parte, observe que los triángulos ABP y CDP son isósceles (ver Figura 3.6), así del $\triangle ABP$, resulta

$$\measuredangle BPA = \measuredangle ABP. \tag{3.6}$$

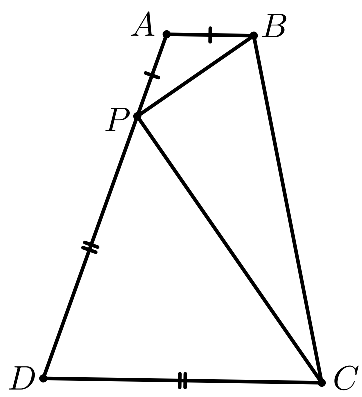


Figura 3.6: Triángulos isósceles.

Luego como la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo es 180°, entonces

$$\measuredangle BPA + \measuredangle ABP + \alpha = 180^\circ, \tag{3.7}$$

donde reemplazando (3.6) en (3.7) y operando, resulta

$$\measuredangle BPA = \frac{180^\circ - \alpha}{2}. \tag{3.8}$$

De manera análoga, del triángulo CDP, se puede concluir que

$$\measuredangle DPC = \frac{\alpha}{2}. \tag{3.9}$$

Ahora, como el ángulo $\measuredangle DPA$ es llano, entonces $\measuredangle DPA = \measuredangle DPC + \measuredangle CPB + \measuredangle BPA = 180^\circ$.

Si se reemplaza (3.8) y (3.9) en esta última expresión, se tiene

$$\frac{\alpha}{2} + \measuredangle CPB + \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 180^\circ,$$

y finalmente operando, se obtiene que $\measuredangle CPB = 90^\circ$.

Para la segunda parte se tiene por hipótesis que los puntos A, B, Q, y R están sobre la misma circunferencia (ver Figura 3.7), por lo tanto el cuadrilátero $ABQR$ es cíclico. Así por el Teorema 2.3, se tiene

$$\measuredangle RAQ = \measuredangle RBQ \tag{3.10}$$

y

$$\measuredangle QAB = \measuredangle QRB. \tag{3.11}$$

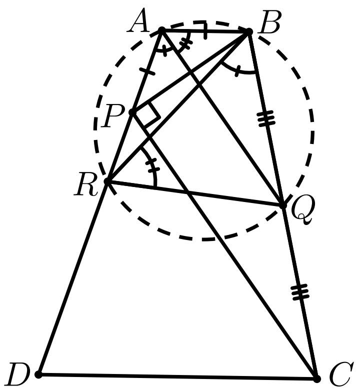


Figura 3.7: Ángulos congruentes.

Luego, como el triángulo BCP es rectángulo y por hipótesis Q es el punto medio de su hipotenusa $\overline{BC}$ entonces $\overline{BQ} = \overline{QP}$. De esta manera los triángulos ABQ y APQ son congruentes por el criterio L-L-L, de donde $\measuredangle PAQ = \measuredangle QAB$. Así de la igualdad anterior, (3.10) y (3.11), se tiene $\measuredangle RBQ = \measuredangle QRB$. De lo cual se puede concluir que el $\triangle BQR$ es isósceles con $\overline{BQ} = \overline{QR}$.

De lo anterior se tiene que los puntos B, P, R y C equidistan de Q, es decir que se puede construir una circunferencia con centro en Q y radio $\overline{QC}$ de tal manera que pase por estos puntos, que era lo que se buscaba. $\square$

Para demostrar que un cuadrilátero es cíclico, en el Capítulo 2, se presentaron criterios que fueron de gran utilidad en la solución de los anteriores problemas. Es el caso del Teorema 2.1 por el cual, si en un cuadrilátero, un par de ángulos opuestos son suplementarios entonces el cuadrilátero es cíclico, este criterio se usó en el Problema 3.3. Se resalta el uso de los conceptos geométricos como la suma de los ángulos internos de un triángulo, la relación de ángulos centrales e inscritos, características de los triángulos isósceles, entre otros, en la solución de los problemas que se muestran.

Ahora se presentan problemas donde a partir de las condiciones dadas es posible identificar un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, el cual al ser cíclico por definición permite utilizar las propiedades que lo caracterizan en la solución.

Problema 3.6. Tomado de CM, año 2001, nivel 5.
¿Cuál es la medida del ángulo α en la Figura 3.8?

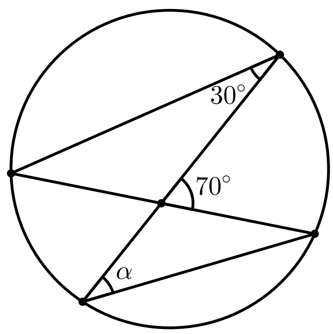


Figura 3.8: Ilustración dada por el Problema 3.6.

Solución. Se considera el cuadrilátero $ABCD$ y T el punto de corte de sus diagonales, como se muestra en la Figura 3.9. Dado que $ABCD$ es cíclico por definición, entonces por el Teorema 2.3, se tiene que $\measuredangle CAB = \measuredangle CDB$, es decir que $\measuredangle CAB = \alpha$.

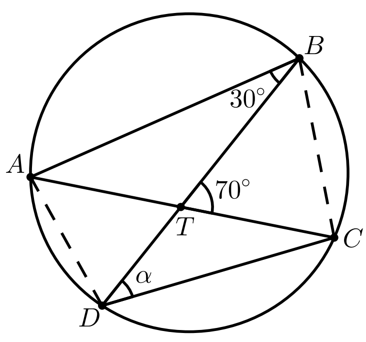


Figura 3.9: Cuadrilátero $ABCD$ y punto de corte de sus diagonales.

Luego, como el ángulo $\measuredangle CTA$ es llano entonces $\measuredangle BTA = 180^\circ - \measuredangle CTB$

y por hipótesis se tiene $\measuredangle CTB = 70^\circ$, así se concluye que $\measuredangle BTA = 110^\circ$. Además, como la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo es 180° entonces la medida del ángulo $\measuredangle TAB = 40^\circ$. Finalmente, como $\measuredangle TAB = \measuredangle CAB$, se concluye que $\alpha = 40^\circ$. □

Problema 3.7. Tomado de CM, año 2005, nivel 2.

En la Figura 3.10, $ABCD$ es un trapecio inscrito en una circunferencia, ¿cuánto mide el ángulo $\measuredangle DAB$?

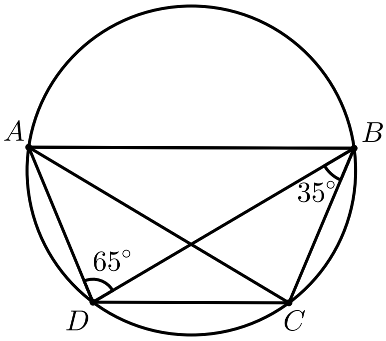


Figura 3.10: Ilustración dada por el Problema 3.7.

Solución. Se debe determinar la medida del ángulo $\measuredangle DAB$, pero por suma de ángulos es equivalente a encontrar la medida de $\measuredangle DAC$ y $\measuredangle CAB$.

En primer lugar, como el trapecio está inscrito en una circunferencia entonces es cíclico. Así por el Teorema 2.3, $\measuredangle DAC = 35^\circ$ y $\measuredangle BCA = 65^\circ$.

Se denota T el punto de intersección de las diagonales del trapecio y teniendo en cuenta que la suma de la medida los ángulos internos de un triángulo es 180°, del triángulo BCT se tiene que $\measuredangle CTB = 80^\circ$ y como el ángulo $\measuredangle CTA$ es llano, se infiere que $\measuredangle BTA = 100^\circ$ (ver Figura 3.11).

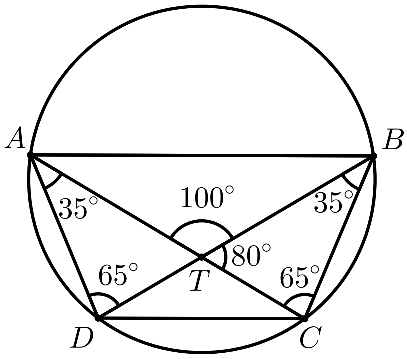


Figura 3.11: Medida de ángulos dados y concluidos inicialmente.

Como ya se dijo, $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico entonces por el Teorema 2.3, se tiene que

$$\measuredangle CAB = \measuredangle CDB. \tag{3.12}$$

Además, como $ABCD$ es un trapecio y los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son paralelos cortados por la transversal $\overline{BD}$, entonces por ángulos alternos internos, resulta

$$\measuredangle ABD = \measuredangle CDB. \tag{3.13}$$

De esta manera por (3.12) y (3.13), se concluye que $\measuredangle ABD = \measuredangle CAB$.

Finalmente, se enfoca la atención en el $\triangle ABT$ del cual se conoce que $\measuredangle BTA = 100°$ y que los otros ángulos son congruentes, así se concluye que $\measuredangle TAB = \measuredangle ABT = 40°$. Por consiguiente, la medida del ángulo $\measuredangle DAB$ es $75°$. □

Problema 3.8. Tomado de Cáceres (2010).
El triángulo equilátero ABC está inscrito en una circunferencia. P es un punto sobre el arco que va desde B hasta C. Probar que $\overline{PA} = \overline{PB} + \overline{PC}$.

Solución. Se construyen los segmentos $\overline{PC}$ y $\overline{PB}$ formando el cuadrilátero cíclico $ABPC$ como se muestra en la Figura 3.12.

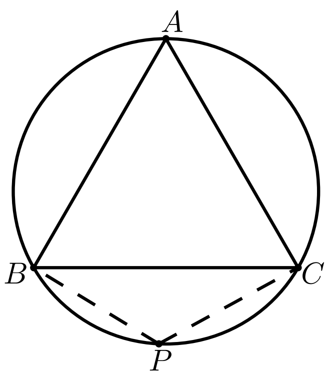


Figura 3.12: Construcción de segmentos.

Luego, como $ABPC$ es cíclico entonces por el Teorema 2.6, se cumple que

$$\overline{AP} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{PB} + \overline{PC} \cdot \overline{AB}. \tag{3.14}$$

Por otro parte, como el $\triangle ABC$ es equilátero entonces

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}. \tag{3.15}$$

Así, reemplazando (3.15) en (3.14) y simplificando, se concluye que $\overline{PA} = \overline{PB} + \overline{PC}$. □

Problema 3.9. Tomado de Cáceres (2010).

Suponga que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son dos cuerdas perpendiculares de una circunferencia y sea E su punto de intersección. Si $\overline{AE} = 2$, $\overline{EB} = 6$ y $\overline{ED} = 3$, determine el diámetro de la circunferencia.

Solución. Sea O el punto de intersección de la mediatriz de $\overline{AB}$ y de $\overline{CD}$, siendo este el centro de la circunferencia (ver Figura 3.13).

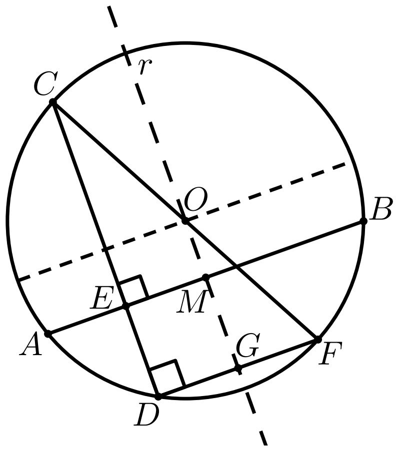


Figura 3.13: Construcciones auxiliares del Problema 3.9.

Como el cuadrilátero $ACBD$ es cíclico, por el Teorema 2.4, se tiene que $\overline{CE} \cdot \overline{ED} = \overline{AE} \cdot \overline{EB}$. Reemplazando los datos de la hipótesis, resulta

$$3\,\overline{CE} = (2)(6),$$

de donde al despejar $\overline{CE} = 4$. De esta manera $\overline{CD} = 7$.

Luego, se traza la recta $\overleftrightarrow{CO}$ que intersecta a la circunferencia en F determinando el diámetro $\overline{CF}$ y se considera el $\triangle CDF$. Observe que por el Teorema 1.4, el ángulo $\measuredangle FDC$ es recto.

Después, se traza la recta r paralela a $\overline{CD}$ por O, la cual corta a $\overline{DF}$ en G. Ahora como $\overline{CD}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es paralela a r, entonces r es perpendicular a $\overline{AB}$. Sea M el punto de corte de r con $\overline{AB}$. Además como r pasa por O, entonces r biseca a $\overline{AB}$, así M es el punto medio de $\overline{AB}$. Luego, como $\overline{AB} = 8$ y $\overline{AE} = 2$, entonces $\overline{EM} = 2$. Como los segmentos paralelos comprendidos entre rectas paralelas son congruentes entonces $\overline{DG} = 2$, pero como O es el punto medio de $\overline{CF}$ entonces G es el punto medio de $\overline{DF}$, por lo tanto $\overline{DF} = 4$. Así, aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo CDF y teniendo en cuenta la longitud de los segmentos $\overline{CD}$ y

$\overline{DF}$, se tiene $(\overline{CF})^2 = 7^2 + 4^2$. De esta manera, la longitud del diámetro $\overline{CF}$ es $\sqrt{65}$. □

Problema 3.10. Tomado de OMPR, año 2011-2012, nivel superior.

Sea ABC un triángulo y G la circunferencia que lo inscribe. Sea D el pie de la altura desde A al lado $\overline{BC}$. La recta $\overleftrightarrow{BM}$, donde M es el punto medio de $\overline{AD}$, corta a G nuevamente en N. La recta $\overleftrightarrow{NE}$, donde E es el punto medio de $\overline{AC}$, corta a G nuevamente en P. Demuestre que $\overline{AP}$ es un diámetro.

Solución. En este problema, para demostrar que $\overline{AP}$ es diámetro, es suficiente probar que $\measuredangle POA = 180°$, donde O es el centro de G.

Observe que, ante las hipótesis dadas, el cuadrilátero $ABCN$ se encuentra inscrito en la circunferencia y por lo tanto es cíclico. Luego por el Teorema 2.3, se tiene

$$\measuredangle CBN = \measuredangle CAN, \tag{3.16}$$

como se indica en la Figura 3.14.

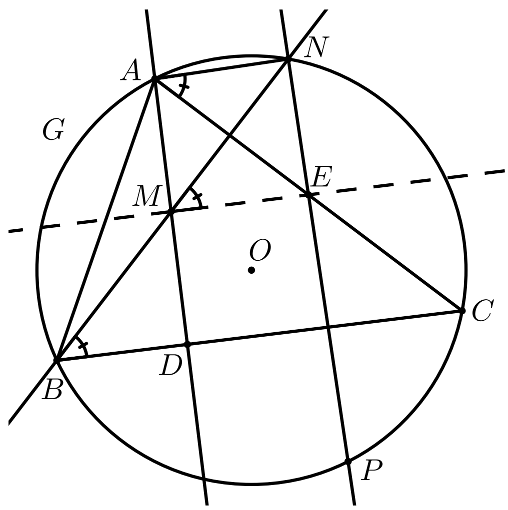


Figura 3.14: Condiciones del Problema 3.10 y ángulos congruentes.

Después, como por hipótesis E y M son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$, respectivamente, al considerarse el $\triangle ACD$, se concluye que la recta $\overleftrightarrow{ME}$ es paralela a la recta $\overleftrightarrow{BC}$. Estas rectas son cortadas por la recta $\overleftrightarrow{MB}$ y por pares de ángulos correspondientes, se obtiene que

$$\measuredangle CBN = \measuredangle EMN. \tag{3.17}$$

Así, de (3.16) y (3.17), se sigue que

$$\measuredangle CAN = \measuredangle EMN.$$

De esta manera, por el Teorema 2.3, el cuadrilátero $AMEN$ es cíclico.

Para finalizar, como la recta $\overleftrightarrow{AD}$ es perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{BC}$ y la recta $\overleftrightarrow{BC}$ es paralela a la recta $\overleftrightarrow{ME}$, entonces la recta $\overleftrightarrow{AD}$ también es perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{ME}$. Por lo tanto, se concluye que $\measuredangle EMA = 90°$ y como $AMEN$ es cíclico, por el Teorema 2.1, se tiene que $\measuredangle ANE = \measuredangle ANP = 90°$. Luego como el ángulo $\measuredangle ANP$ abre el mismo arco de circunferencia que el ángulo central $\measuredangle POA$, por el Teorema 1.4, se sigue que $\measuredangle POA = 180°$ y así se concluye que $\overline{AP}$ es un diámetro. □

Problema 3.11. Tomado de OMPR, año 2011-2012.

Sea ABC un triángulo que está inscrito en una circunferencia. Las bisectrices de los ángulos A, B y C se encuentran con la circunferencia en D, E y F, respectivamente. Demuestre que $\overline{AD}$ es perpendicular a $\overline{EF}$.

Solución. En la Figura 3.15, se ilustran no solo las condiciones del problema sino también los cuadriláteros cíclicos $BCEF$ y $ABDC$.

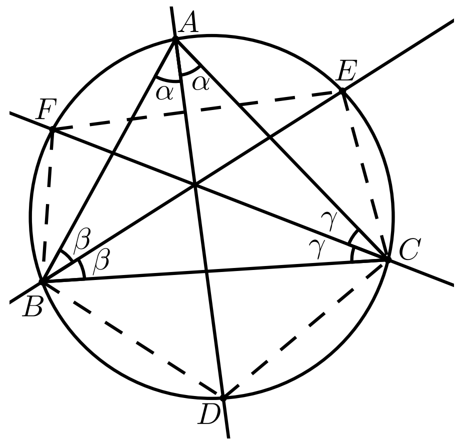


Figura 3.15: Condiciones del Problema 3.11 y cuadriláteros cíclicos.

Por el Teorema 2.3, del primer cuadrilátero se concluye que $\measuredangle CBE = \measuredangle CFE = \beta$ y del segundo que $\measuredangle CDA = \measuredangle CBA = 2\beta$ y $\measuredangle BAD = \measuredangle BCD = \alpha$.

Ahora, se considera el $\triangle ABC$ y sumando la medida de sus ángulos internos, se tiene

$$\alpha + \beta + \gamma = 90°. \tag{3.18}$$

Por otra parte, sea O el punto de corte de $\overline{FC}$ con $\overline{BE}$ y P el de $\overline{AD}$ con $\overline{EF}$ y sea $\lambda = \measuredangle DOC$ (ver Figura 3.16).

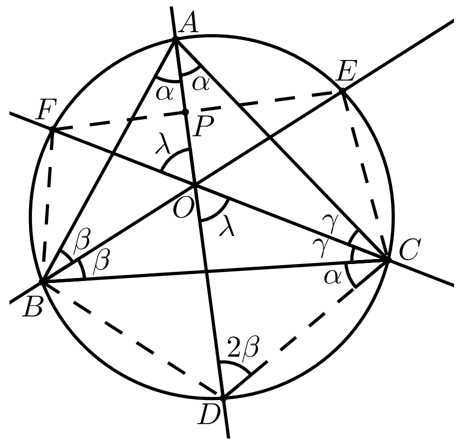


Figura 3.16: Congruencia de los ángulos $\measuredangle DOC$ y $\measuredangle POF$.

Teniendo en cuenta los ángulos internos el triángulo CDO, se tiene

$$\lambda + 2\beta + \alpha + \gamma = 180^\circ.$$

Luego, reemplazando (3.18) en el resultado anterior y operando, resulta

$$\lambda + \beta = 90^\circ. \tag{3.19}$$

Finalmente, como se observa en la Figura 3.16, $\measuredangle DOC = \measuredangle POF = \lambda$. De la suma de ángulos internos del $\triangle FOP$, se tiene $\measuredangle FPO = 180^\circ - \beta - \lambda$ y de (3.19), se sigue que $\measuredangle FPO = 90^\circ$. Así se concluye que $\overline{EF}$ es perpendicular a $\overline{AD}$. $\square$

Es importante resaltar que los problemas propuestos por el Canguro Matemático proporcionan una gráfica, de la cual se puede inferir inmediatamente que hay un cuadrilátero cíclico y por lo tanto, se pueden aplicar los teoremas estudiados para encontrar un camino que lleve a la solución, ver CM (2018).

Por otro lado, los problemas 3.8, 3.9, 3.10 y 3.11, tienen en común que en su enunciado se da una circunferencia y ciertas condiciones que dejan puntos sobre la circunferencia, con lo cual se identifica la existencia de un cuadrilátero cíclico de manera inmediata.

En las olimpiadas matemáticas y libros de geometría, también se encuentran problemas donde en el enunciado se da un cuadrilátero cíclico y a partir de ello se debe demostrar una relación o encontrar un valor. Los problemas a seguir, tienen esta característica.

Problema 3.12. Tomado de Posamentier y Salkind (1996).
Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia. La diagonal $\overline{BD}$ biseca a $\overline{AC}$. Si $\overline{AB} = 10$, $\overline{AD} = 12$ y $\overline{DC} = 11$. Hallar $\overline{BC}$.

Solución. Sea Q el punto donde se cortan las diagonales del cuadrilátero $ABCD$, tal como se ve en la Figura 3.17.

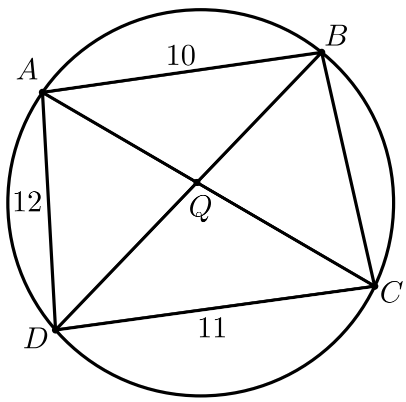


Figura 3.17: Ilustración del Problema 3.12 y construcción del punto Q.

Como $ABCD$ es cíclico por el Teorema 2.3, se tiene $\measuredangle ABD = \measuredangle ACD$ y $\measuredangle CAB = \measuredangle CDB$. Así por el criterio de semejanza A-A, se obtiene $\triangle ABQ \sim \triangle DCQ$ y por consiguiente

$$\frac{\overline{QA}}{\overline{QD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DC}}.$$

Reemplazando en esta proporción el valor de $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, resulta

$$\frac{\overline{QA}}{\overline{QD}} = \frac{10}{11}$$

y despejando $\overline{QA}$ se encuentra

$$\overline{QA} = \frac{10}{11}\,\overline{QD}. \tag{3.20}$$

De manera análoga, los triángulos DAQ y CBQ son semejantes, de donde

$$\frac{\overline{QD}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}.$$

Como por hipótesis se tiene que $\overline{QA} = \overline{QC}$ y que $\overline{AD} = 12$, entonces reemplazando estos valores en la anterior expresión y despejando $\overline{QA}$, resulta

$$\overline{QA} = \frac{\overline{BC}}{12} \cdot \overline{QD}. \tag{3.21}$$

Luego, igualando y operando (3.20) y (3.21), se concluye que $\overline{BC} = \frac{120}{11}$. □

Problema 3.13. Tomado de OMPR, año 2006-2007.
Si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico, es decir que está inscrito en una circunferencia, y M es el punto de corte de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, demostrar que $\overline{AM} \cdot \overline{MC} = \overline{DM} \cdot \overline{MB}$.

Solución. Como $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico, entonces por el Teorema 2.3, resulta

$$\measuredangle MAB = \measuredangle CDM \tag{3.22}$$

y

$$\measuredangle ABM = \measuredangle MCD. \tag{3.23}$$

Así, de (3.22) y (3.23), se tiene que $\triangle ABM$ y $\triangle DCM$ son semejantes, entonces

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{DM}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}},$$

de donde se concluye que $\overline{AM} \cdot \overline{MC} = \overline{DM} \cdot \overline{MB}$. □

Otro tipo de problemas geométricos que se proponen, es cuando se pide hallar la medida de un segmento. Este es el caso del Problema 3.12, donde a partir de las longitudes de tres lados se debe hallar la del cuarto, lo cual se facilita con la utilización de cuadriláteros cíclicos. El Problema 3.13 llama la atención, dado que es una de las implicaciones del Teorema 2.4 y está propuesto en una olimpiada.

En el siguiente grupo de problemas las construcciones dadas no permiten identificar un cuadrilátero cíclico a primera vista, ni se menciona como tal. En estos problemas se identifica un cuadrilátero y al demostrar que es cíclico permite llegar a la solución del problema.

Problema 3.14. Tomado de Posamentier y Salkind (1996).
Sobre el lado $\overline{AB}$ del cuadrado $ABCD$, se construye el triángulo rectángulo ABF, con hipotenusa $\overline{AB}$. Si $\overline{AF} = 6$ y $\overline{BF} = 8$, encontrar $\overline{EF}$, donde E es la intersección de las diagonales del cuadrado.

Solución. En la Figura 3.18, se observan las construcciones dadas en el enunciado del problema.

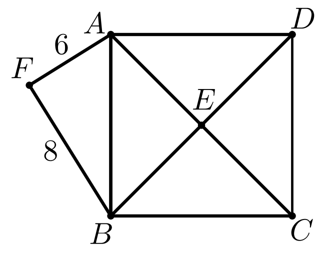


Figura 3.18: Ilustración del Problema 3.14.

Por hipótesis $\measuredangle BFA = 90^\circ$ y como las diagonales de un cuadrado son perpendiculares entonces $\measuredangle AEB = 90^\circ$, por lo tanto el cuadrilátero $AEBF$ es cíclico. Ahora se va a utilizar el Teorema 2.6, por lo cual primero se debe calcular la medida de $\overline{AB}$, $\overline{AE}$ y $\overline{BE}$, ya que estos aún no se conocen. Para ello se considera el $\triangle ABF$ y por el Teorema de Pitágoras, se tiene

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{AF})^2 + (\overline{FB})^2.$$

Reemplazando $\overline{AF}$ y $\overline{FB}$, que se tienen por hipótesis, y operando, resulta $\overline{AB} = 10$.

De manera análoga, con el triángulo ABC se obtiene que $\overline{AC} = 10\sqrt{2}$. Luego, $\overline{BE} = \overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ ya que las diagonales de un cuadrado se cortan en el punto medio, así $\overline{BE} = 5\sqrt{2}$ y $\overline{AE} = 5\sqrt{2}$.

Con estos datos es posible aplicar el Teorema 2.6 al cuadrilátero cíclico $AEBF$, de donde

$$\overline{FE} \cdot \overline{AB} = \overline{FA} \cdot \overline{BE} + \overline{AE} \cdot \overline{FB},$$

es decir

$$10\,\overline{FE} = (6)(5\sqrt{2}) + (5\sqrt{2})(8).$$

De esta manera, al realizar las operaciones correspondientes, se concluye que $\overline{FE} = 7\sqrt{2}$. □

Problema 3.15. Tomado de Cáceres (2010).

En un cuadrado $ABCD$, M es el punto medio de $\overline{AB}$. Una línea perpendicular a $\overline{MC}$ por M intersecta a $\overline{AD}$ en K. Demostrar que $\measuredangle BCM = \measuredangle MCK$.

Solución. Por hipótesis M es el punto medio de $\overline{AB}$ entonces $\overline{AM} = \overline{MB}$, además como $ABCD$ es un cuadrado $\overline{AD} = \overline{BC}$ y $\measuredangle DAM = \measuredangle MBC$. Así por el criterio de L-A-L, se concluye $\triangle DAM \cong \triangle CBM$ y por consiguiente, se tiene $\measuredangle BCM = \measuredangle MDA$ (ver Figura 3.19), lo que es igual a

$$\measuredangle BCM = \measuredangle MDK. \tag{3.24}$$

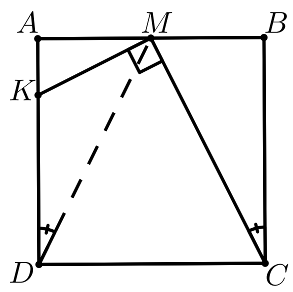


Figura 3.19: Congruencia de triángulos.

Por otra parte, como los ángulos $\measuredangle KMC$ y $\measuredangle KDC$ son rectos entonces por el Teorema 2.1, el cuadrilátero $DCMK$ es cíclico. Luego, por el Teorema 2.3, resulta

$$\measuredangle MDK = \measuredangle MCK. \tag{3.25}$$

Finalmente, igualando (3.24) y (3.25), se obtiene $\measuredangle BCM = \measuredangle MCK$, que era lo que se quería demostrar. □

Problema 3.16. Tomado de OMPR, año 2006-2007, nivel intermedio.
En la Figura 3.20, el trapecio isósceles $ABCD$ es tal que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD} = 1$ y $\overline{DC} = 2$, donde $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{DC}$. ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle DAC$?

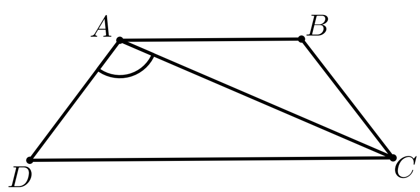


Figura 3.20: Ilustración dada por el Problema 3.16.

Solución. Primero se trazan las perpendiculares al segmento $\overline{AB}$ por los puntos A y B. Estas perpendiculares cortan al segmento $\overline{CD}$ en E y F, respectivamente (ver Figura 3.21), de esta manera $\overline{AB} = \overline{EF} = 1$, pues son segmentos paralelos comprendidos entre rectas paralelas. Además como $\overline{CD} = 2$ entonces $\overline{CF} = \overline{ED} = \frac{1}{2}$.

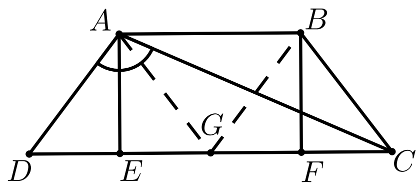


Figura 3.21: Construcción de los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$.

Sea G el punto medio de $\overline{EF}$, entonces $\overline{CG} = 1$ y como $\overline{BF}$ es mediatriz de $\overline{CG}$, se concluye que $\overline{BC} = \overline{BG}$, con lo cual el triángulo BCG es equilátero. De manera análoga, el triángulo ADG es equilátero.

Luego como el trapecio $ABCD$ es isósceles, entonces por el Teorema 2.2, es cuadrilátero cíclico y por lo tanto existe una circunferencia que lo inscribe. Como $\overline{AD} = \overline{BC}$ se tiene que $\overline{GD} = \overline{GA} = \overline{GB} = \overline{GC}$ con lo cual G es el centro de la circunferencia que inscribe el trapecio. Finalmente, por ángulos centrales e inscritos $\measuredangle DAC = 90°$. □

En estos problemas se resalta que el demostrar que un cuadrilátero es cíclico, ayuda a encontrar la solución de forma práctica. Por ejemplo, en el Problema 3.14 se buscaba la longitud de un segmento, que resultó ser una diagonal de un cuadrilátero cíclico, lo que permitió aplicar el Teorema de Ptolomeo y de esta manera llegar al valor solicitado. Hay que tener en cuenta que no es la única solución posible, pero dichos cuadriláteros brindaron un camino exitoso.

Se encuentran problemas en los que, además de no mencionar cuadriláteros cíclicos, no se identifica ningún cuadrilátero, sin embargo construir un cuadrilátero cíclico teniendo en cuenta las condiciones dadas es un punto clave en la resolución del problema.

Problema 3.17. Tomado de Posamentier y Salkind (1996).
Un triángulo inscrito en una circunferencia de radio 5, tiene dos lados que miden 5 y 6, respectivamente. Encontrar la medida del tercer lado del triángulo.

Solución. Para resolver este problema se utiliza el Teorema 2.6.

Sea el triángulo ABC inscrito en una circunferencia de radio 5, con $\overline{AB} = 6$

y $\overline{AC} = 5$, luego sea P el punto diametralmente opuesto al vértice A (ver Figura 3.22).

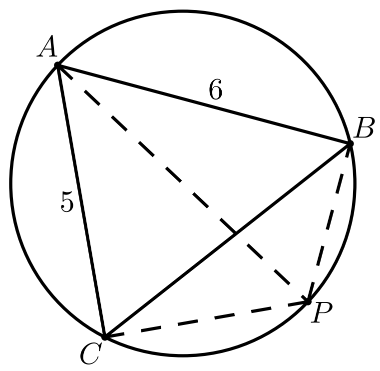


Figura 3.22: Construcción del punto P sobre la circunferencia.

Por el Teorema 1.4, se tiene que $\measuredangle ABP = 90^\circ$ así el $\triangle ABP$ es rectángulo. Luego por el Teorema de Pitágoras, se obtiene que

$$\begin{aligned}(\overline{BP})^2 &= (\overline{AP})^2 - (\overline{AB})^2 \\ &= 10^2 - 6^2,\end{aligned}$$

de esta manera $\overline{BP} = 8$.

De forma análoga, como el $\triangle ACP$ es rectángulo, se concluye que $\overline{CP} = 5\sqrt{3}$.

Por la Definición 2.1, se tiene que $ABPC$ es cuadrilátero cíclico, entonces por el Teorema 2.6, se sigue que

$$\overline{AP} \cdot \overline{BC} = \overline{AB} \cdot \overline{CP} + \overline{AC} \cdot \overline{BP},$$

de donde

$$\overline{BC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CP} + \overline{AC} \cdot \overline{BP}}{\overline{AP}}.$$

Reemplazando los valores que se obtuvieron y realizando las operaciones correspondientes, se encuentra que la longitud del lado $\overline{BC}$ del triángulo es $3\sqrt{3} + 4$. □

Problema 3.18. Tomado de OME, año 2007, fase nacional.

O es el circuncentro de un triángulo ABC. La bisectriz que parte de A corta al lado opuesto en P. Si b y c son las longitudes de $\overline{AC}$ y $\overline{BA}$, respectivamente, probar que se cumple $(\overline{AP})^2 + (\overline{OA})^2 - (\overline{OP})^2 = bc$.

Solución. La Figura 3.23, ilustra las condiciones que se enuncian en este problema.

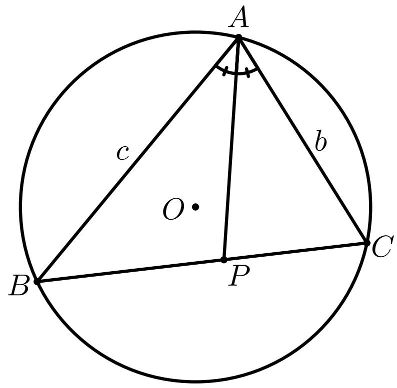


Figura 3.23: Ilustración del Problema 3.18.

Sea R el punto de intersección de la circunferencia que inscribe al $\triangle ABC$ y la recta $\overleftrightarrow{AP}$. Ahora se considera el cuadrilátero $ABRC$ que es cíclico, por lo cual $\measuredangle ARB = \measuredangle ACB$.

Por otra parte como $\overline{AP}$ biseca al ángulo $\measuredangle BAC$ entonces $\measuredangle BAR = \measuredangle PAC$, con lo anterior se concluye $\triangle ABR \sim \triangle APC$. Así

$$\frac{c}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AR}}{b},$$

es decir

$$bc = \overline{AR} \cdot \overline{AP}. \tag{3.26}$$

Dado que por suma de segmentos se tiene $\overline{AR} = \overline{AP} + \overline{PR}$, al reemplazar en (3.26) y operar, resulta

$$bc = (\overline{AP})^2 + \overline{AP} \cdot \overline{PR}. \tag{3.27}$$

Como se puede ver en la Figura 3.24, note que $\overline{AP} \cdot \overline{PR}$ es la potencia del punto P respecto a la circunferencia con centro en O y radio $\overline{OA}$. Es decir que

$$\overline{AP} \cdot \overline{PR} = (\overline{AO})^2 - (\overline{OP})^2. \tag{3.28}$$

Finalmente, se reemplaza (3.28) en (3.27) y se obtiene

$$(\overline{AP})^2 + (\overline{OA})^2 - (\overline{OP})^2 = bc,$$

que era lo que se quería probar. $\square$

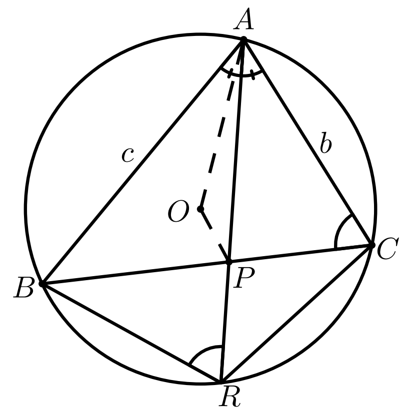


Figura 3.24: Construcción del cuadrilátero $ABRC$.

Problema 3.19. Tomado de OME, año 2015.

Sean M y N puntos del lado $\overline{BC}$ del triángulo ABC tales que $\overline{BM} = \overline{CN}$, estando M sobre el segmento $\overline{BN}$. Sean P y Q puntos que están, respectivamente, en los segmentos $\overline{AN}$ y $\overline{AM}$, tales que $\measuredangle CMP = \measuredangle BAM$ y $\measuredangle QNB = \measuredangle NAC$. ¿Es cierto que $\measuredangle CBQ = \measuredangle PCB$?

Solución. Se construyen las circunferencias C_1 y C_2 que inscriben a los triángulos BNQ y CMP, respectivamente, luego la recta $\overleftrightarrow{AM}$ corta a C_1 en R y la recta $\overleftrightarrow{AN}$ corta a C_2 en S, además $\measuredangle CBQ = \measuredangle NBQ$ y $\measuredangle PCB = \measuredangle PCM$. Observe que los cuadriláteros $BQNR$ y $CPMS$ son cíclicos por definición, como se muestra en la Figura 3.25. Luego, por el Teorema 2.3, se tiene que $\measuredangle NBQ = \measuredangle NRQ = \measuredangle NRM$ y $\measuredangle PCM = \measuredangle PSM = \measuredangle NSM$.

Por lo tanto, se va a demostrar que $\measuredangle NRM = \measuredangle NSM$. Para ello observe que los triángulos ABM y ACN tienen bases congruentes por hipótesis y la misma altura desde A, por consiguiente tienen igual área, entonces

$$\overline{AM} \cdot \overline{AB} \cdot \operatorname{sen} \alpha = \overline{AN} \cdot \overline{AC} \cdot \operatorname{sen} \beta, \tag{3.29}$$

donde $\alpha = \measuredangle BAM$ y $\beta = \measuredangle NAC$.

Si se despeja $\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}$ de (3.29), se encuentra que

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha}. \tag{3.30}$$

Por otra parte, los triángulos ABR y SCA son semejantes, ya que dos de los ángulos del $\triangle ABR$ son α y $\beta = \measuredangle BRQ = \measuredangle BRA = \measuredangle QNB$ (porque $BQNR$ es cíclico) y de manera análoga dos de los ángulos de $\triangle ACS$ son

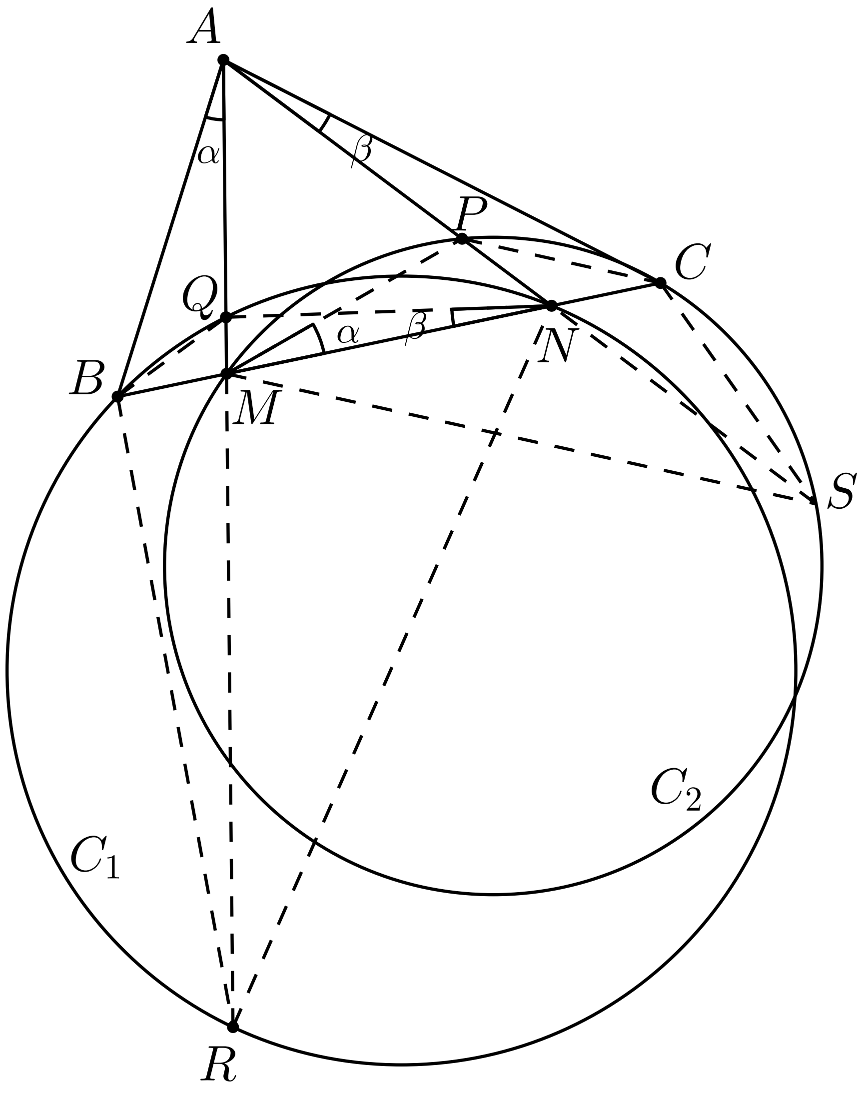


Figura 3.25: Construcción de los cuadriláteros $BQNR$ y $CPMS$.

α y β, de lo cual se tiene

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{AR}} = \frac{\overline{CS}}{\overline{AB}}. \tag{3.31}$$

Además, aplicando la ley del seno al triángulo ACS, resulta

$$\frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\overline{CS}}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Si se despeja $\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}$, se obtiene

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\overline{CS}}{\overline{AC}}. \tag{3.32}$$

Luego, si primero se reemplaza (3.32) en (3.30) y después en (3.31), se tiene

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{CS}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CS}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{AR}},$$

entonces $\overline{AM} \cdot \overline{AR} = \overline{AN} \cdot \overline{AS}$, de lo cual por el Teorema 2.5, el cuadrilátero $MNSR$ es cíclico.

Finalmente, por el Teorema 2.3, se tiene $\measuredangle NRM = \measuredangle NSM$ lo que demuestra que los ángulos $\measuredangle CBQ$ y $\measuredangle PCB$ son iguales. □

Estos tres últimos problemas muestran la potencialidad de los cuadriláteros cíclicos de una manera diferente, ya que las condiciones dadas distan de las características de dichos cuadriláteros, pero mediante construcciones auxiliares y el ingenio se puede construir un cuadrilátero inscrito en una circunferencia que sirva como herramienta en la resolución del problema.

Por otro lado, como se mencionó al iniciar el capítulo, GeoGebra sirve de guía para resolver problemas geométricos y además, facilita realizar la mirada retrospectiva que propone Pólya. En el siguiente problema se hace uso de GeoGebra, con el cual se hicieron modificaciones al problema y se plantea una conjetura.

Problema 3.20. Tomado de OMCC, 2008.

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia de centro O tal que $\overline{AC}$ es un diámetro. Se construyen los paralelogramos $ADEO$ y $BCOF$. Demostrar que si los puntos E y F pertenecen a la circunferencia entonces $ABCD$ es un rectángulo.

Solución. Sin suponer que los puntos E y F se encuentran sobre la circunferencia, en la Figura 3.26, se ilustra el enunciado del problema.

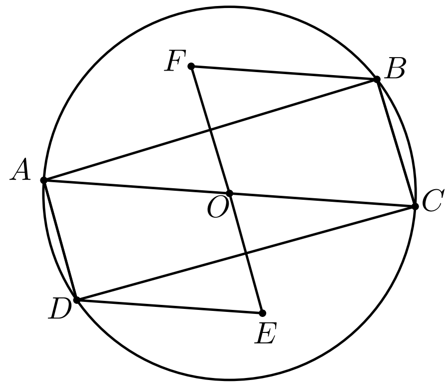


Figura 3.26: Puntos E y F fuera de la circunferencia.

Si ahora se supone que E y F están sobre la circunferencia, se desea probar que $ABCD$ es un rectángulo, es decir, se va a probar que $\measuredangle DAB = \measuredangle ABC = \measuredangle BCD = \measuredangle CDA = 90°$. Las hipótesis dadas se ilustran en la Figura 3.27.

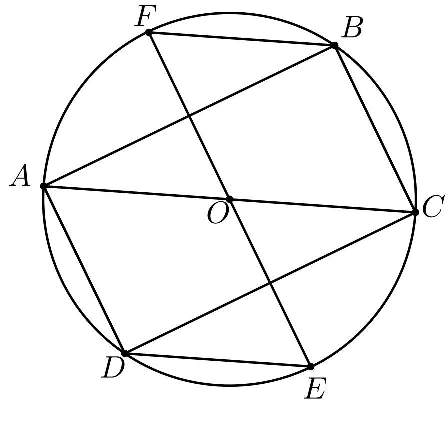


Figura 3.27: Puntos E y F sobre la circunferencia.

Como $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico entonces por el Teorema 2.1, se tiene que

$$\measuredangle ADC + \measuredangle ABC = 180°. \tag{3.33}$$

Ahora se considera el triángulo ABC que está inscrito en la semicircunferencia, entonces por ángulos inscritos la medida del ángulo $\measuredangle ABC$ es $90°$, luego reemplazando este valor en la ecuación (3.33) se obtiene que $\measuredangle CDA = 90°$.

Por hipótesis F y E están sobre la circunferencia, entonces $\overline{OF} = \overline{OE} = r$, donde r es el radio de la circunferencia. Por lo tanto como $BCOF$ es un paralelogramo, entonces $\overline{OF} = \overline{BC} = r$, de esta manera el triángulo BCO es equilátero, puesto que la longitud de sus lados es r, entonces $\measuredangle COB = 60°$.

Luego como la medida de todo ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad de la medida del ángulo central que abarca el mismo arco, se tiene que $\measuredangle CAB = \frac{1}{2}\measuredangle COB$, es decir, $\measuredangle CAB = 30°$ tal como se ilustra en la Figura 3.28. Además de forma análoga, se tiene que el triángulo ADO es equilátero, de donde $\measuredangle DAO = 60°$.

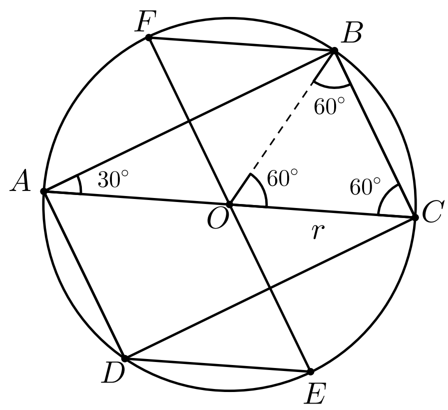


Figura 3.28: Medida del ángulo $\measuredangle CAB$.

Finalmente, como $\measuredangle DAB = \measuredangle DAC + \measuredangle CAB = 90°$ y como $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico, $\measuredangle BCD = 90°$. Luego $ABCD$ es un rectángulo, pues sus cuatro ángulos son rectos. $\square$

Para realizar la mirada retrospectiva que propone Pólya, se cambiaron de posición los puntos E y F de tal manera que no estén sobre la circunferencia. Como se puede ver en la Figura 3.29, si se mueven los puntos B y D arbitrariamente sobre la circunferencia se observa que el cuadrilátero $ABCD$ no es un rectángulo.

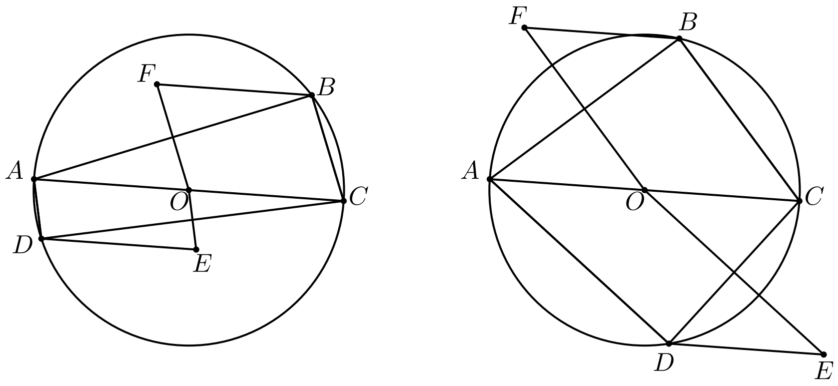


Figura 3.29: Puntos E y F dentro y fuera de la circunferencia.

Sin embargo, si se mueven los puntos B y D de tal manera que las rectas $\overleftrightarrow{FO}$ y $\overleftrightarrow{OE}$ coincidan, como se tiene en la Figura 3.30, da la impresión que el cuadrilátero $ABCD$ es un rectángulo.

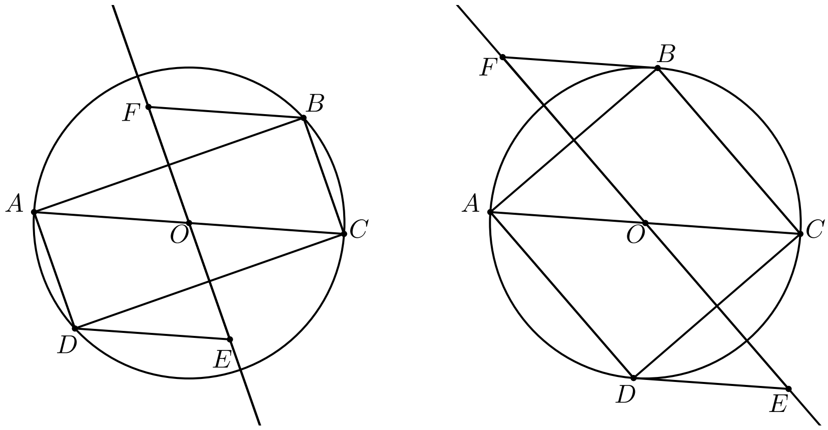


Figura 3.30: Cuando las rectas coinciden.

Por lo anterior, bajo las hipótesis del Problema 3.20, se plantea la siguiente conjetura:

Si los puntos F, O y E son colineales, entonces el cuadrilátero $ABCD$ es un rectángulo.

Cabe resaltar que esta conjetura se deja como un problema propuesto al lector, para que reflexione sobre la creación de nuevos problemas a partir de los que ya se resolvieron anteriormente en este libro.

Los siguientes problemas se tomaron de la tesis *Los cuadriláteros cíclicos como herramienta en la resolución de problemas*, ver Castillo y Paz

(2018), los cuales se crearon observando invariantes en las construcciones geométricas que se pueden realizar en GeoGebra y estudiando los conceptos de cuadriláteros cíclicos.

Problema 3.21. Tomado de Castillo y Paz (2018).
Sea ABC un triángulo isósceles, con $\overline{AB} = \overline{BC}$. Sean E y D los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Sea P un punto exterior al triángulo sobre la altura desde B, tal que la intersección de $\overline{EP}$ y $\overline{DP}$ con $\overline{AC}$ es H y J, respectivamente. Demostrar que el cuadrilátero $DJHE$ es cíclico (ver Figura 3.31).

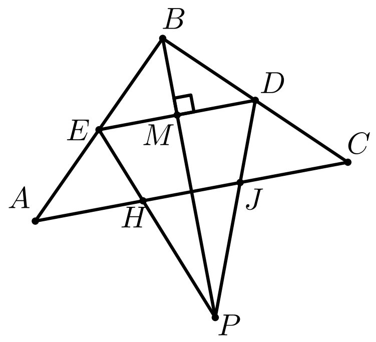


Figura 3.31: Ilustración del Problema 3.21.

Solución. Como E y D son puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, la altura desde B es perpendicular al segmento $\overline{ED}$ y pasa por el punto medio M, entonces $\overline{EM} = \overline{MD}$, además $\measuredangle PMD = \measuredangle EMP$ pues son rectos y como $\overline{MP}$ es común a los triángulos PMD y PME por criterio L-A-L son congruentes. De donde $\overline{EP} = \overline{PD}$, por lo tanto el triángulo EDP es isósceles y se cumple que

$$\measuredangle PED = \measuredangle EDP. \tag{3.34}$$

Por otro lado, como $\overline{AC}$ es paralelo a $\overline{ED}$ por ser E y D puntos medios, entonces

$$\measuredangle EDJ = \measuredangle DJC. \tag{3.35}$$

Ahora, de (3.34) y (3.35), se tiene que $\measuredangle PED = \measuredangle DJC$ y así por el Corolario 2.2, se concluye que $DJHE$ es cíclico. $\square$

Problema 3.22. Tomado de Castillo y Paz (2018).
Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, tal que la prolongación de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ se cortan en un punto P. Si $\measuredangle BPC = 60^\circ$, $\overline{AB} = 6$, $\overline{CP} = 5$ y $\overline{AP} = 10$ (ver Figura 3.32).

- *Determine* $\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}$.
- *Encuentre la medida de* $\overline{AD}$ *y* $\overline{BC}$.

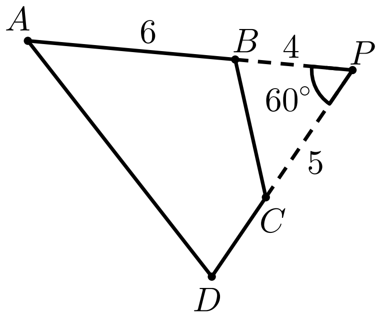


Figura 3.32: Ilustración del Problema 3.22.

Solución. Para la primera parte los triángulos APD y CPB son semejantes por el criterio A-A, ya que el ángulo $\measuredangle BPC$ es común y como el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, por el Corolario 2.2, se tiene $\measuredangle BCP = \measuredangle DAP$. De esta semejanza se tiene que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{CP}}.$$

Luego, reemplazando $\overline{AP} = 10$ y $\overline{CP} = 5$, dados en la hipótesis, resulta

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = 2.$$

Para la segunda parte, por hipótesis se tiene que $\overline{AP} = 10$ y $\overline{AB} = 6$, además como A, B y P son colineales entonces $\overline{BP} = 4$.

Luego, dado que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico por el Teorema 2.5, se tiene $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{DP} \cdot \overline{CP}$, de donde reemplazando $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ y despejando $\overline{DP}$, resulta

$$\overline{DP} = 8.$$

De lo anterior se puede concluir que $\overline{DC} = 3$ al ser D, C y P colineales.

Por otro lado, aplicando la ley del coseno al triángulo BCP, se tiene

$$(\overline{BC})^2 = (\overline{BP})^2 + (\overline{CP})^2 - 2\,\overline{BP} \cdot \overline{CP} \cdot \cos 60^\circ.$$

Si se reemplazan los datos que se conocían y se simplifica, se encuentra que

$$\overline{BC} = \sqrt{21}.$$

De la primera parte se tiene que $\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = 2$ y al reemplazar $\overline{BC}$ y despejar $\overline{AD}$, se obtiene

$$\overline{AD} = 2\sqrt{21}.$$

□

Problema 3.23. Tomado de Castillo y Paz (2018).

Don Carlos tiene un cultivo de zanahorias, pero debido al cambio climático perdió una parte de la siembra. Él quiere saber el área que no fue afectada, para ello realizó el siguiente dibujo señalando algunos datos que logró identificar (ver Figura 3.33).

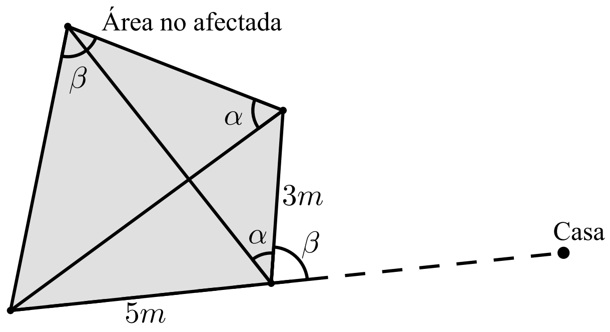


Figura 3.33: Cultivo de don Carlos.

Si la región sombreada es la parte del cultivo no afectada y el producto de las diagonales es 64, ¿cuál es el área de la región sombreada?

Solución. En el dibujo que realizó don Carlos, se denotan los vértices del cuadrilátero como se muestra en la Figura 3.34. Luego como $\measuredangle DAB = \measuredangle ECB = \beta$ entonces por el Corolario 2.2, se tiene que $ABCD$ es cíclico.

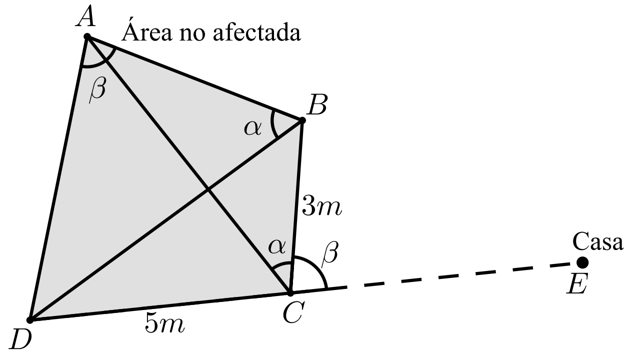


Figura 3.34: Notación del Problema 3.23.

Teniendo en cuenta que la figura que delimita la región sombreada es un cuadrilátero cíclico, se puede utilizar el Teorema 2.8 para calcular su área. Para esto se debe conocer la longitud de cada uno de los lados del cuadrilátero, por eso primero se debe encontrar $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$.

Como $ABCD$ es cíclico, por el Teorema 2.3, se tiene $\measuredangle BDA = \alpha$. Así el triángulo ABD es isósceles con

$$\overline{AB} = \overline{AD}. \tag{3.36}$$

Además, por el Teorema 2.6, se cumple

$$\overline{AC} \cdot \overline{DB} = \overline{AB} \cdot \overline{DC} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}. \tag{3.37}$$

Ahora, se reemplaza $\overline{AC} \cdot \overline{DB}$, $\overline{DC}$, $\overline{BC}$ y (3.36) en (3.37), de donde

$$64 = 5\,\overline{AB} + 3\,\overline{AB}.$$

Luego, al factorizar y simplificar, se concluye que $\overline{AB} = \overline{AD} = 8$.

Finalmente, el semiperímetro del cuadrilátero $ABCD$ es

$$s = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{DC} + \overline{AD}}{2},$$

donde al reemplazar las longitudes de los lados y simplificar, se tiene que $s = 12$. Así por el Teorema 2.8, se obtiene

$$A_{ABCD} = \sqrt{(12-8)(12-3)(12-5)(12-8)}.$$

De este modo, el área de la región no afectada o sombreada es de $12\sqrt{7}m^2$.

$\square$

Por último, como resultado de este libro se presenta un problema contextualizado en el cual se usa un símbolo representativo para la comunidad indígena Pasto del sur de Colombia y del norte de Ecuador, denominado *Sol de los Pastos*, el cual se muestra en la Figura 3.35. Esta representación geométrica es un símbolo místico ancestral que se caracteriza por su simetría y sus ocho puntas representan los estadios del espíritu humano: la familia, la salud, el placer, los amigos, la comunidad, los hijos, el saber y la riqueza, ver Quijano, Morales, Ordóñez, Guerrero, y Castillo (2001). La contextualización de problemas ayuda a que estos se solucionen de una forma más amena.

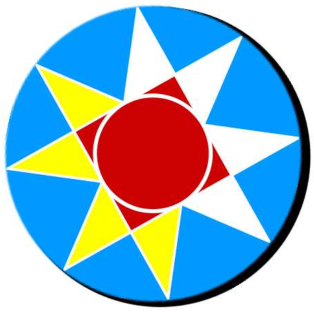


Figura 3.35: Sol de los Pastos.

Problema 3.24.
En Cumbal, Nariño, se encontró tallado sobre la piedra de los Machines el Sol de los Pastos, el cual es un símbolo místico ancestral de los indígenas de la región y tiene como característica interesante que los triángulos que lo componen son congruentes. Un investigador desea determinar el radio de la circunferencia que inscribe el Sol de los Pastos, para ello usó datos encontrados en un manuscrito, los cuales se observan en la Figura 3.36. Ayuda al investigador a encontrar el radio de la circunferencia.

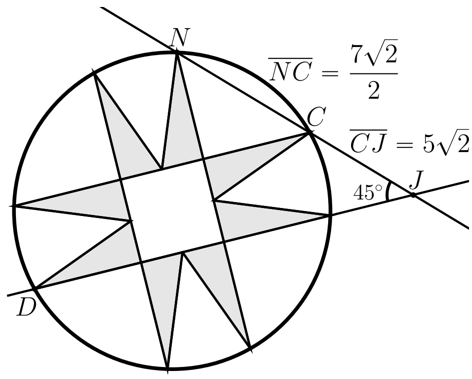


Figura 3.36: Datos presentes en manuscrito.

Solución. Para determinar el radio de la circunferencia, primero se va a demostrar que $\overline{DC}$ es un diámetro de la circunferencia y luego se encontrará su valor.

Por hipótesis se tiene que los triángulos que se forman en el Sol de los Pastos son congruentes. Así en la Figura 3.37, los triángulos ACM y BLM son congruentes, de donde $\overline{MC} = \overline{ML}$ y $\measuredangle ACM = \measuredangle BLM$. Luego se tiene que el $\triangle CLM$ es isósceles, de donde $\measuredangle MCL = \measuredangle CLM$ y por lo tanto $\measuredangle ACL = \measuredangle CLB$.

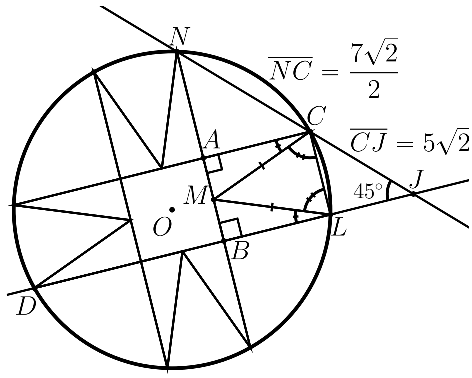


Figura 3.37: Notación para el Problema 3.24.

Como la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360°, se sigue que

$$\measuredangle LBA + \measuredangle BAC + \measuredangle ACL + \measuredangle CLB = 360^\circ.$$

Luego, dado que $\measuredangle BAC = \measuredangle LBA = 90^\circ$ y $\measuredangle ACL = \measuredangle CLB$, al reemplazar en la anterior ecuación se concluye que

$$\measuredangle CLB = 90^\circ.$$

Ahora sea O el centro de la circunferencia. Luego por el Teorema 1.4, se tiene $\measuredangle CLD = \frac{1}{2}\measuredangle COD$, de donde se concluye que $\measuredangle COD = 180^\circ$ y por lo tanto D, O y C son colineales. Así $\overline{DC}$ es un diámetro de la circunferencia.

Luego para encontrar el valor de $\overline{DC}$, observe que $\measuredangle JLC = 90^\circ$, de donde por la suma de los ángulos internos de un triángulo, se concluye que $\measuredangle LCJ = 45^\circ$. De lo anterior, se tiene que el $\triangle CJL$ es recto e isósceles, con $\overline{CL} = \overline{LJ}$. Por lo cual $\cos 45^\circ = \frac{\overline{LJ}}{5\sqrt{2}}$, es decir

$$\overline{LJ} = \overline{CL} = 5. \tag{3.38}$$

Observe en la Figura 3.38, que el cuadrilátero $DNCL$ es cíclico por definición, entonces por el Teorema 2.5, se cumple

$$\overline{NJ} \cdot \overline{CJ} = \overline{DJ} \cdot \overline{LJ}. \tag{3.39}$$

Luego como N, C y J son colineales, se tiene que $\overline{NJ} = \overline{NC} + \overline{CJ}$, de donde

$$\overline{NJ} = \frac{17\sqrt{2}}{2}. \tag{3.40}$$

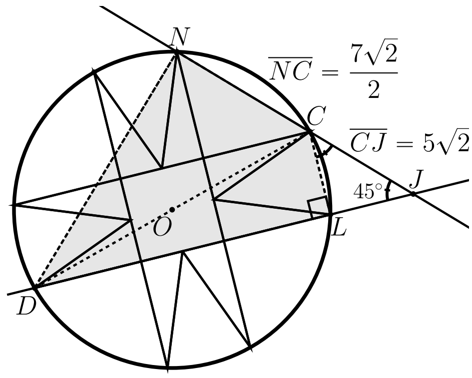


Figura 3.38: Cuadrilátero Cíclico en Sol de los Pastos.

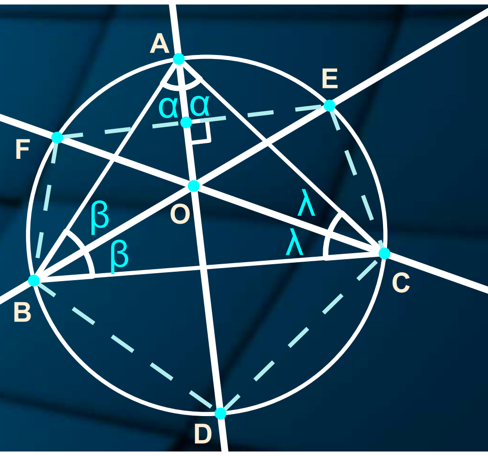
Así, reemplazando $\overline{CJ}$, (3.38) y (3.40) en (3.39), se tiene $\overline{DJ} = 17$. Ahora como $\overline{DJ} = \overline{DL} + \overline{LJ}$ entonces

$$\overline{DL} = 12. \tag{3.41}$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras, resulta $\overline{DC} = \sqrt{(\overline{DL})^2 + (\overline{CL})^2}$. De donde, reemplazando (3.38) y (3.41) y simplificando, se obtiene $\overline{DC} = 13$. Así, el radio de la circunferencia que inscribe al Sol de los Pastos es la mitad de $\overline{DC}$, es decir 6.5. $\square$

De esta manera, en este capítulo se comprobó que los cuadriláteros cíclicos y sus propiedades son de gran utilidad al enfrentarse a problemas geométricos, puesto que están presentes de manera implícita o explícita en los problemas de olimpiadas matemáticas, así como también en libros de geometría e inclusive se pueden diseñar problemas contextualizados donde se evidencie su aplicación.

Por otra parte, se debe tener en cuenta que aunque en las olimpiadas matemáticas no se permite el uso de artefactos tecnológicos, es importante que los software de geometría dinámica estén presentes en el proceso de preparación para dichas olimpiadas, pues ayudan a desarrollar la visualización y la asimilación efectiva de conceptos geométricos.



4. Problemas Propuestos

En este capítulo, con el fin de que se ponga en práctica las propiedades teóricas presentadas en el Capítulo 2 y la experiencia adquirida con los problemas resueltos que se exponen en el Capítulo 3, se presenta al lector una recopilación de problemas tomados de diferentes olimpiadas matemáticas y textos de geometría. Cabe anotar que en esta investigación se usó el repositorio de problemas que disponibiliza el equipo de Art Of Problem Solving en su página web, ver AOPS (2018).

Se recomienda al lector el uso de un ambiente de geometría dinámica para la visualización y entendimiento de los diferentes problemas. Algunas olimpiadas disponen de la solución de los problemas en sus páginas de internet oficiales, sin embargo se espera que esta sea la última alternativa para solucionar los problemas.

Problema 4.1. Tomado de IMO, año 1985.
Una circunferencia tiene su centro en el lado $\overline{AB}$ del cuadrilátero cíclico $ABCD$, los otros tres lados son tangentes a la circunferencia. Probar que $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB}$.

Problema 4.2. Tomado de OIM, año 1987.
En un triángulo ABC, M y N son los puntos medios respectivos de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, y P el punto medio de intersección de $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$. De-

muestre que, si es posible inscribir una circunferencia en el cuadrilátero $AMPN$, *entonces el triángulo* ABC *es isósceles.*

Problema 4.3. Tomado de OIM, año 1989.
La circunferencia inscrita en el triángulo ABC, *es tangente a los lados* $\overline{AB}$ *y* $\overline{AC}$ *en los puntos* M *y* N, *respectivamente. Las bisectrices de* A *y* B *intersecan a* $\overline{MN}$ *en los puntos* P *y* Q, *respectivamente. Sea* O *el incentro del triángulo* ABC. *Probar que* $\overline{MP} \cdot \overline{OA} = \overline{BC} \cdot \overline{OQ}$.

Problema 4.4. Tomado de OIM, año 1990.
En un triángulo ABC, *sean* I *el centro de la circunferencia inscrita y* D, E *y* F *sus puntos de tangencia con los lados* $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ *y* $\overline{AB}$, *respectivamente. Sea* P *el otro punto de intersección de la recta* $\overleftrightarrow{AD}$ *con la circunferencia inscrita. Si* M *es el punto medio de* $\overline{EF}$, *demostrar que los cuatro puntos* P, I, M *y* D *pertenecen a una misma circunferencia.*

Problema 4.5. Tomado de OIM, año 1994.
Sea un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, cuyos vértices se denotan consecutivamente por A, B, C *y* D. *Se supone que existe una semicircunferencia con centro en* AB, *tangente a los otros tres lados del cuadrilátero.*

- *Demostrar que* $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BC}$.
- *Calcular, en función de* $x = \overline{AB}$ *e* $y = \overline{CD}$, *el área máxima que puede alcanzar un cuadrilátero que satisface las condiciones del enunciado.*

Problema 4.6. Tomado de IMO, año 1994.
Sea ABC *un triángulo isósceles con* $\overline{AB} = \overline{AC}$. M *es el punto medio de* $\overline{BC}$ *y* O *es un punto sobre* $\overline{AM}$ *tal que* $\overline{OB}$ *es perpendicular a* $\overline{AB}$. Q *es un punto arbitrario sobre* $\overline{BC}$ *diferente de* B *y* C. E *se encuentra sobre* $\overline{AB}$ *y* F *sobre* $\overline{AC}$ *tal que* E, Q *y* F *son distintos y colineales. Probar que* $\overline{OQ}$ *es perpendicular a* $\overline{EF}$ *si y solo si* $\overline{QE} = \overline{QF}$.

Problema 4.7. Tomado de Posamentier y Salkind (1996).
Las diagonales $\overline{AC}$ *y* $\overline{BD}$ *del cuadrilátero* $ABCD$ *se cortan en el punto* E. *Si* $\overline{AE} = 2$, $\overline{BE} = 5$, $\overline{CE} = 10$, $\overline{DE} = 4$ *y* $\overline{BC} = \frac{15}{2}$, *encontrar* $\overline{AB}$.

Problema 4.8. Tomado de Posamentier y Salkind (1996).
Si el triángulo isósceles ABC *(con* $\overline{AB} = \overline{AC}$*) está inscrito en una circunferencia, y el punto* P *está sobre el arco* BC, *probar que* $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}+\overline{PC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ *es una constante del triángulo dado.*

Problema 4.9. Tomado de Posamentier y Salkind (1996).

Si el cuadrado $ABCD$ está inscrito en una circunferencia, y el punto P está sobre el arco BC, probar que $\frac{\overline{PA}+\overline{PC}}{\overline{PB}+\overline{PD}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PA}}$.

Problema 4.10. Tomado de Posamentier y Salkind (1996).

El triángulo equilátero ACD está dibujado externamente sobre el lado $\overline{AC}$ del triángulo ABC. El punto P está sobre el lado $\overline{BD}$. Encontrar $\measuredangle APC$ tal que $\overline{BD} = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$.

Problema 4.11. Tomado de Posamentier y Salkind (1996).

Se dibuja una línea por el vértice A del triángulo equilátero ABC, esta corta a $\overline{BC}$ en D y al circuncírculo en P. Probar que $\frac{1}{\overline{PD}} = \frac{1}{\overline{PB}} + \frac{1}{\overline{PC}}$.

Problema 4.12. Tomado de Posamentier y Salkind (1996).

Se elige un punto P en el interior del paralelogramo $ABCD$ tal que los ángulos $\measuredangle BPA$ y $\measuredangle CPD$ son suplementarios. Probar que $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{BP} \cdot \overline{DP} + \overline{AP} \cdot \overline{CP}$.

Problema 4.13. Tomado de OIM, año 1997.

Con centro en el incentro I de un triángulo ABC se traza una circunferencia que corta en dos puntos a cada uno de los tres lados del triángulo: al segmento $\overline{BC}$ en D y P (siendo D el más cercano a B); al segmento $\overline{CA}$ en E y Q (siendo E el más cercano a C), y al segmento $\overline{AB}$ en F y R (siendo F el más cercano a A). Sea S el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $EQFR$. Sea T el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $DPFR$. Sea U el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $DPEQ$. Demostrar que las circunferencias circunscritas a los triángulos FRT, DPU y EQS tienen un único punto común.

Problema 4.14. Tomado de OIM, año 1999.

Un triángulo acutángulo ABC está inscrito en una circunferencia de centro O. Las alturas del triángulo son $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$. La recta $\overleftrightarrow{EF}$ corta a la circunferencia en P y Q.

- *Pruebe que $\overline{OA}$ es perpendicular a $\overline{PQ}$.*
- *Si M es el punto medio de $\overline{BC}$, pruebe que $(\overline{AP})^2 = 2\,\overline{AD} \cdot \overline{OM}$.*

Problema 4.15. Tomado de APMO, año 1998.

Sea ABC un triángulo y D el pie de la altura desde A. Sean E y F puntos que se encuentran en una línea que pasa por D tal que $\overline{AE}$ es perpendicular *a $\overline{BE}$, $\overline{AF}$ es perpendicular a $\overline{CF}$, y E y F son diferentes de D. Sean M y N los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$, respectivamente. Probar que $\overline{AN}$ es perpendicular a $\overline{NM}$.*

Problema 4.16. Tomado de OMCC, año 2000.
Sea ABC un triángulo acutángulo. C_1 y C_2 son circunferencias que tienen a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$ como diámetros, respectivamente. C_2 corta al lado $\overline{AB}$ en el punto F, $(F \neq A)$ y C_1 corta al lado $\overline{CA}$ en el punto E, $(E \neq A)$. Además, $\overline{BE}$ corta a C_2 en P y $\overline{CF}$ corta a C_1 en Q. Demuestra que las longitudes de los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ son iguales.

Problema 4.17. Tomado de OMCC, año 2001.
Sea $\overline{AB}$ un diámetro de una circunferencia S con centro O y de radio 1. Sean C y D dos puntos tales que $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se cortan en un punto Q situado en el interior de S y $\measuredangle AQB = 2\measuredangle COD$. Sea P el punto de corte de las tangentes a S que pasan por los puntos C y D. Determinar la longitud del segmento $\overline{OP}$.

Problema 4.18. Tomado de OIM, año 2001.
La circunferencia inscrita en el triángulo ABC tiene centro O y es tangente a los lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ en los puntos X, Y y Z, respectivamente. Las rectas $\overleftrightarrow{BO}$ y $\overleftrightarrow{CO}$ intersectan a la recta $\overleftrightarrow{YZ}$ en los puntos P y Q, respectivamente. Demostrar que si los segmentos $\overline{XP}$ y $\overline{XQ}$ tienen la misma longitud, entonces el triángulo ABC es isósceles.

Problema 4.19. Tomado de OIM, año 2002.
En un triángulo escaleno ABC se traza la bisectriz interior $\overleftrightarrow{BD}$, con D sobre $\overline{AC}$. Sean E y F, respectivamente, los pies de las perpendiculares trazadas desde A y C hacia la recta $\overleftrightarrow{BD}$, y sea M el punto sobre el lado $\overline{BC}$ tal que $\overline{DM}$ es perpendicular a $\overline{BC}$. Demuestre que $\measuredangle EMD = \measuredangle DMF$.

Problema 4.20. Tomado de OMCC, año 2002.
Sean ABC un triángulo, D el punto medio de $\overline{BC}$ y E un punto sobre el segmento $\overline{AC}$ tal que $\overline{BE} = (2)\overline{AD}$ y F el punto de intersección de $\overline{AD}$ con $\overline{BE}$. Si el ángulo $\measuredangle DAC$ mide 60°, encuentre la medida de los ángulos del triángulo AEF.

Problema 4.21. Tomado de IMO, año 2004.
En un cuadrilátero $ABCD$ la diagonal $\overline{BD}$ no biseca a $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle CDA$. El punto P está dentro de $ABCD$ y satisface $\measuredangle PBC = \measuredangle DAB$ y $\measuredangle PDC = \measuredangle BDA$. Probar que $ABCD$ es cíclico si y solo si $\overline{AP} = \overline{CP}$.

Problema 4.22. Tomado de OMCC, año 2003.

Sea S una circunferencia y $\overline{AB}$ un diámetro de ella. Sea t la recta tangente a S en B y considere dos puntos C, D en t tales que B esté entre C y D. Sean E y F las intersecciones de S con $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ y sean G y H las intersecciones de S con $\overline{CF}$ y $\overline{DE}$. Demostrar que $\overline{AH} = \overline{AG}$.

Problema 4.23. Tomado de OMCC, año 2003.

Sean S_1 y S_2 dos circunferencias que se intersectan en dos puntos distintos P y Q. Sean l_1 y l_2 dos rectas paralelas, tales que:

- *l_1 pasa por el punto P e intersecta a S_1 en un punto A_1 distinto de P y a S_2 en un punto A_2 distinto de P.*
- *l_2 pasa por el punto Q e intersecta a S_1 en un punto B_1 distinto de Q y a S_2 en un punto B_2 distinto de Q.*

Demostrar que los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 tienen igual perímetro.

Problema 4.24. Tomado de OMPR, año 2003-2004.

Sea ABC un triángulo, y sea D el pie de la altura desde A. Sean E y F puntos diferentes, distintos de D, de modo que:

- *La línea determinada por E y F pasa por D.*
- *El segmento $\overline{AE}$ es perpendicular al segmento $\overline{BE}$.*
- *El segmento $\overline{AF}$ es perpendicular al segmento $\overline{CF}$.*

Demuestre que si M y N son los puntos medios de los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$, respectivamente, entonces el segmento $\overline{AN}$ es perpendicular al segmento $\overline{NM}$.

Problema 4.25. Tomado de OMPR, año 2004-2005.

El triángulo ABC está inscrito en una circunferencia y $\overline{BP}$ biseca $\measuredangle ABC$. Si $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$ y $\overline{AC} = 7$, calcule $\overline{BP}$.

Problema 4.26. Tomado de ONG, año 2006.

Sea un triángulo ABC y las cevianas[1] $\overline{AL}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CM}$ tal que $\overline{AL}$ biseca al ángulo en A. Si $\measuredangle ALB = \measuredangle ANM$, probar que $\measuredangle MNL = 90°$.

Problema 4.27. Tomado de OMPR, año 2007.

Considerar el $\triangle ABC$. Sean E y F los pies de las alturas desde C y desde

[1] Una *ceviana* es un segmento que une un vértice del triángulo con su respectivo lado opuesto.

B, respectivamente. Sea H el punto medio de $\overline{EF}$. Demostrar que el segmento perpendicular a $\overline{EF}$ que pasa por H divide al segmento $\overline{BC}$ en dos partes iguales.

Problema 4.28. Tomado de MMO, año 2007.
Las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ de un cuadrilátero cíclico $ABCD$ se intersectan en el punto E. Dado que $\overline{AB} = 39$, $\overline{AE} = 45$, $\overline{AD} = 60$ y $\overline{BC} = 56$, determine la longitud de $\overline{CD}$.

Problema 4.29. Tomado de OME, año 2007.
Dada una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB} = 2R$, se considera una cuerda $\overline{CD}$ de longitud fija c. Sea E la intersección de $\overline{AC}$ con $\overline{BD}$ y F la intersección de $\overline{AD}$ con $\overline{BC}$. Probar que el segmento $\overline{EF}$ tiene longitud constante y dirección constante al variar la cuerda $\overline{CD}$ sobre la semicircunferencia.

Problema 4.30. Tomado de OMI, año 2007.
Sea ABC un triángulo, G el centroide, M el punto medio de $\overline{AB}$, D un punto en $\overline{AG}$, tal que $\overline{AG} = \overline{GD}$, $A \neq D$, E un punto en $\overline{BG}$ tal que $\overline{BG} = \overline{GE}$, $B \neq E$. Demuestre que el cuadrilátero $BDCM$ es cíclico si y solo si $\overline{AD} = \overline{BE}$.

Problema 4.31. Tomado de OMA, año 2008.
Sea ABC un triángulo, D, E y F los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$, respectivamente. Sea P el punto de intersección de $\overline{CF}$ con la circunferencia inscrita. Si $ABPE$ es un cuadrilátero cíclico demostrar que $\overline{DP}$ es paralelo a $\overline{AB}$.

Problema 4.32. Tomado de OMCC, año 2008.
Sea ABC un triángulo acutángulo. Tome los puntos P y Q en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, tal que $BCQP$ es cíclico. El circuncírculo de $\triangle ABQ$ intersecta a $\overline{BC}$ en S y el circuncírculo de $\triangle APC$ intersecta a $\overline{BC}$ en R, $\overline{PR}$ y $\overline{QS}$ se intersectan en L. Pruebe que la intersección de $\overline{AL}$ y $\overline{BC}$ no depende de la selección de P y Q.

Problema 4.33. Tomado de OME, año 2008.
En un cuadrilátero convexo se trazan las perpendiculares desde cada vértice a la diagonal que no pasa por él. Demostrar que los cuatro puntos de intersección de cada perpendicular con su correspondiente diagonal forman un cuadrilátero semejante al dado.

Problema 4.34. Tomado de OMCC, año 2009.

Dos circunferencias r_1 *y* r_2 *se intersectan en los puntos* A *y* B*. Considere la circunferencia* r *contenida en* r_1 *y* r_2 *que es tangente a ambas en* D *y* E*, respectivamente. Sea* C *un punto de intersección de la recta* $\overleftrightarrow{AB}$ *con* r*,* F *la intersección de la recta* $\overleftrightarrow{EC}$ *con* r_2 *y* G *la intersección de la recta* $\overleftrightarrow{DC}$ *con* r_1*. Sean* H *e* I *los puntos de intersección de la recta* $\overleftrightarrow{ED}$ *con* r_1 *y* r_2*, respectivamente. Pruebe que* F*,* I*,* G *y* H *están sobre la misma circunferencia.*

Problema 4.35. Tomado de OMPR, año 2009.

El cuadrilátero $ABCD$ *está inscrito en una circunferencia y sus diagonales se cortan en* Q*. El lado* $\overline{DA}$ *prolongado a partir de* A *y el lado* $\overline{BC}$ *prolongado a partir de* B *se cortan en* P*.* $\overline{CD} = \overline{CP} = \overline{DQ}$*, calcular la medida del* $\measuredangle CAD$*.*

Problema 4.36. Tomado de CNO, año 2009.

Dado un triángulo agudo PBC *con* $\overline{PB} \neq \overline{PC}$*. Los puntos* A *y* D *sobre* $\overline{PB}$ *y* $\overline{PC}$ *respectivamente.* $\overline{AC}$ *y* $\overline{BD}$ *se intersectan en* O*. Sean* E *y* F *el pie de la perpendicular de* O *a* $\overline{AB}$ *y* $\overline{CD}$*, respectivamente. Denote con* M *y* N *los puntos medios de* $\overline{BC}$ *y* $\overline{AD}$*.*

- *Si cuatro puntos* A*,* B*,* C *y* D *están sobre una circunferencia, entonces* $\overline{EM} \cdot \overline{FN} = \overline{EN} \cdot \overline{FM}$*.*

- *Determine si el recíproco del anterior ítem es verdadero o no, justifique su respuesta.*

Problema 4.37. Tomado de OMCC, año 2010.

Sea ABC *un triángulo y* L*,* M *y* N *los puntos medios de* $\overline{BC}$*,* $\overline{CA}$ *y* $\overline{AB}$*, respectivamente. La recta tangente al circuncírculo del* $\triangle ABC$ *intersecta a la recta* $\overleftrightarrow{LM}$ *en* P *y a la recta* $\overleftrightarrow{LN}$ *en* Q*. Muestre que las rectas* $\overleftrightarrow{CP}$ *y* $\overleftrightarrow{BQ}$ *son paralelas.*

Problema 4.38. Tomado de OMCS, año 2014.

Sea $ABCD$ *un cuadrilátero inscrito en una circunferencia con centro* O *tal que* O *esté en el interior del cuadrilátero y* $\measuredangle CAB = \measuredangle ODA$*. Sea* E *la intersección de* $\overline{AC}$ *y* $\overline{BD}$*. Sean* r *y* s *las rectas perpendiculares a* $\overline{BC}$ *y* $\overline{AD}$*, respectivamente. Sea* P *el punto de intersección de* r *con* $\overline{AD}$ *y* M *la intersección de* s *con* $\overline{BC}$*. Sea* N *el punto medio de* $\overline{EO}$*. Demostrar que* M*,* N *y* P *son colineales.*

Problema 4.39. Tomado de TJNO, año 2010.
Una circunferencia pasa por el vértice A de el rectángulo $ABCD$ intersecta al lado $\overline{AB}$ en un segundo punto E diferente de B. La recta que pasa por B es tangente al círculo en T, y el círculo con centro en B y que pasa por T intersecta al lado $\overline{BC}$ en F. Mostrar que si $\measuredangle CDF = \measuredangle BFE$, entonces $\measuredangle EDF = \measuredangle CDF$.

Problema 4.40. Tomado de BNO, año 2011.
El punto O está dentro del $\triangle ABC$. El pie de la perpendicular de O a $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ son D, E y F, respectivamente. Las perpendiculares de A y B, respectivamente, a $\overline{EF}$ y $\overline{FD}$ se cortan en P. Sea H el pie de la perpendicular de P a $\overline{AB}$. Probar que D, E, F y H son cocíclicos[2] .

Problema 4.41. Tomado de APMO, año 2012.
Sea ABC un triángulo agudo. Denote con D el pie de la perpendicular desde A al lado $\overline{BC}$, con M el punto medio de $\overline{BC}$ y con H el ortocentro de $\triangle ABC$. Sea E el punto de intersección del circuncírculo del $\triangle ABC$ y el punto medio de $\overline{MH}$, y F el punto de intersección (diferente de E) de $\overline{ED}$ y del circuncírculo. Probar que $\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}$.

Problema 4.42. Tomado de IMO, año 2014.
Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $\measuredangle ABC = \measuredangle CDA = 90^\circ$. El punto H es el pie de la perpendicular desde A hasta $\overline{BD}$. Los puntos S y T están sobre $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$, respectivamente, tal que H se encuentra dentro del triángulo CST y $\measuredangle CHS - \measuredangle CSB = 90^\circ$, $\measuredangle THC - \measuredangle DTC = 90^\circ$. Pruebe que la recta $\overleftrightarrow{BD}$ es tangente a la circunferencia que inscribe al triángulo HST.

Problema 4.43. Tomado de OMPR, año 2015-2016.
Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, sea P la intersección de las rectas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AD}$. La recta $\overleftrightarrow{AC}$ corta a la circunferencia circunscrita del triángulo BDP en S y T, con S entre A y C la recta $\overleftrightarrow{BD}$ corta a la circunferencia circunscrita del triángulo ACP en U y V, con U entre B y D. Demostrar que $\overline{PS} = \overline{PT} = \overline{PU} = \overline{PV}$.

Problema 4.44. Tomado de OMI, año 2016.
Sea ABC un triángulo. Sean D y E las proyecciones ortogonales de A sobre las bisectrices de los ángulos $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle BCA$, respectivamente. Demostrar que $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{BC}$.

[2] Los puntos *cocíclicos* son aquellos que pertenecen a una misma circunferencia.

Problema 4.45. Tomado de BNO, año 2016.

Sea ABC un triángulo isósceles con $\overline{AC} = \overline{BC}$. El punto D se encuentra en la extensión de $\overline{AC}$, más allá de C y tal que $\overline{AC} > \overline{CD}$. La bisectriz del ángulo $\measuredangle BCD$ intersecta a $\overline{BD}$ en N y sea M el punto medio de $\overline{BD}$. La tangente por M al circuncírculo del triángulo AMD intersecta a $\overline{BC}$ en P. Probar que los puntos A, P, M y N son cocíclicos.

Problema 4.46. Tomado de IMO, año 2017.

Sean R y S puntos diferentes de la circunferencia C_1 tal que $\overline{RS}$ no es un diámetro. Sea l la recta tangente a C_1 por R. El punto T es tal que S es el punto medio del segmento $\overline{RT}$. El punto J se escoge en el arco más corto de RS. La circunferencia C_2 que inscribe al triángulo JST intersecta a l en dos puntos distintos. Sea A el punto de intersección de C_2 y l más cercano a R. La recta $\overleftrightarrow{AJ}$ intersecta a C_1 en K. Pruebe que la recta $\overleftrightarrow{KT}$ es tangente a C_2.

Problema 4.47. Tomado de TJNO, año 2017.

En un cuadrilátero convexo cuyas diagonales se intersectan en E se tienen las igualdades $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{CD}|} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AD}|} = \sqrt{\frac{|\overline{BE}|}{|\overline{ED}|}}$. Probar que $ABCD$ es un paralelogramo o un cuadrilátero cíclico.

Problema 4.48. Tomado de GNO, año 2017.

Un triángulo agudo ABC con $\overline{AB} < \overline{AC} < \overline{BC}$ está inscrito en la circunferencia $c(O, R)$. La circunferencia $c_1(A, \overline{AC})$ intersecta a C en D y a $\overline{CB}$ en E. Si la recta $\overleftrightarrow{AE}$ intersecta a c en F y G que se encuentran en $\overline{BC}$ tal que $\overline{EB} = \overline{BG}$, probar que F, E, D y G son cocíclicos.

Problema 4.49. Tomado de CNO, año 2018.

$ABCD$ es un cuadrilátero cíclico cuyas diagonales se intersectan en P. El circuncírculo del $\triangle APD$ corta al segmento $\overline{AB}$ en los puntos A y E. El circuncírculo del $\triangle BPC$ corta al segmento $\overline{AB}$ en los puntos B y F. Sean I y J los incentros de $\triangle ADE$ y $\triangle BCF$, respectivamente. Los segmentos $\overline{IJ}$ y $\overline{AC}$ se cortan en K. Probar que los puntos A, I, K y E son cocíclicos.

Problema 4.50. Tomado de APMO, año 2018.

Sea H el ortocentro del triángulo ABC. Sean M y N los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Asuma que H está dentro del cuadrilátero $BMNC$ y que los circuncírculos de los triángulos BMH y CNH son tangentes entre sí. La línea que pasa por H paralela a $\overline{BC}$ intersecta *a los circuncírculos de los triángulos* BMH *y* CNH *en los puntos* K *y* L, *respectivamente. Sea* F *la intersección de* $\overline{MK}$ *y* $\overline{NL}$ *y sea* J *el incentro de el triángulo* MHN. *Probar que* $\overline{FJ} = \overline{FA}$.

Referencias

Referencias

Andreescu, T., y Gelca, R. (2009). *Mathematical olympiad challenges* (2 ed.). Boston, Estados Unidos: Birkhäuser.

Art Of Problem Solving. (2018). Recuperado de https://artofproblemsolving.com

Asian Pacific Mathematics Olympiad. (2018). Recuperado de http://www.ommenlinea.org/apmo

Barnett, R. (1997). *Geometría* (2 ed.). México D.F, México: McGraw-Hill.

Bulgaria National Olympiad. (2018). Recuperado de https://artofproblemsolving.com/community/c3275

Cáceres, L. (2010). *Congruencia, semejanza y concurrencia.* Mayagüez, Puerto Rico: OMPR.

Canguro Matemático. (2018). Recuperado de http://www.canguromat.org.es

Castillo, D., y Paz, K. (2018). *Los cuadriláteros cíclicos como herramienta en la resolución de problemas* (tesis de pregrado). Universidad de Nariño, Pasto, Colombia.

China National Olympiad. (2018). Recuperado de https://artofproblemsolving.com/community/c3284

Coxeter, H., y Greitzer, S. (1967). *Geometry revisited.* Washington D.C, Estados Unidos: The Mathematical Association of America.

De Guzmán, M. (1995). *Para pensar mejor: desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos.* Madrid, España: Pirámide.

De la Peña, J. A., Pineda, A., Cáceres, L., Di Prisco, C., y Solotar, A. (2014). *Mathematics in Latin America and the Caribbean* (Inf. Téc.). IMU CDC LAC Report. Recuperado de https://blog.wias-berlin.de/imu-news/files/2014/07/LAC-Report.pdf

Greece National Olympiad. (2018). Recuperado de https://artofproblemsolving.com/community/c3302

Heiberg, J. (2007). *Euclid's elements of geometry* (R. Fitzpatrick, Trans.). Recuperado de http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf

Hemmerling, E. M. (2003). *Geometría elemental.* México D.F., México: Limusa.

Hilbert, D. (1950). *The foundations of geometry* (E. Townsend, Trans.). Illinois, Estados Unidos: The Open Court Publishing Co.

Hohenwarter, M., Borcherds, M., Ancsin, G., Bencze, B., Blossier, M., Éliás, J., ... Tomaschko, M. (2018, octubre). *GeoGebra 5.0.507.0.* http://www.geogebra.org.

International Mathematical Olympiad. (2018). Recuperado de https://www.imo-official.org

Kichenassamy, S. (2010). Brahmagupta's derivation of the area of a cyclic quadrilateral. *Historia Mathematica*, *37*(1), 28 - 61. https://doi.org/10.1016/j.hm.2009.08.004

Mediterranean Mathematics Olympiad. (2017). Recuperado de https://artofproblemsolving.com/community/c3232

Morfín, M. (2007). *Geometría* (4 ed.). México D.F., México: McGraw-Hill.

Olimpiada Iberoamericana de Matemática. (2017). Recuperado de http://www.oei.es/historico/oim/problemas.htm

Olimpiada Matemática Argentina. (2018). Recuperado de http://www.oma.org.ar

Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe. (2007). Recuperado de http://www.oei.es/historico/oim/omcc.htm

Olimpiada Matemática del Cono Sur. (2018). Recuperado de http://www.oma.org.ar/internacional/cono.htm

Olimpiada Matemática Italiana. (2017). Recuperado de https://artofproblemsolving.com/community/c3325

Olimpiada Nacional de Grecia. (2018). Recuperado de http://www.hms.gr

Olimpiada Matemática Española. (2018). Recuperado de http://www.olimpiadamatematica.es

Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. (2018). Recuperado de http://oc.uan.edu.co/olimpiada-colombiana-de-matematicas/eventos

Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico. (2018). Recuperado de http://www.om.pr

Pólya, G. (1965a). *Cómo plantear y resolver problemas.* México D.F., México: Trillas.

Pólya, G. (1965b). *Mathematical discovery. On understanding, learning, and teaching problem solving. Vol. II.* New York, Estados Unidos: John Wiley & Sons.

Posamentier, A., y Salkind, C. (1996). *Challenging problems in geometry.* New York, Estados Unidos: Dover publications.

Quijano, A. J., Morales, H., Ordóñez, A. L., Guerrero, M., y Castillo, W. (2001). Recuperación de la Piedra de los Machines en el resguardo de Cumbal: bien de interés cultural del Departamento de Nariño. Recuperado de http://www.rupestreweb.info/machines.html

Santos, L. (2014). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos* (2 ed.). México D.F., México: Trillas.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, Estados Unidos: Academic press.

Turkey Junior National Olympiad. (2017). Recuperado de https://artofproblemsolving.com/community/c3399

Zill, D. G., y Dewar, J. M. (2012). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica* (3 ed.). México D.F., México: McGraw-Hill.

El principal interés del libro "Los Cuadriláteros Cíclicos como Herramienta en la Resolución de Problemas", es introducir al lector al tema de los cuadriláteros cíclicos. En este trabajo se exponen algunas de sus caracterizaciones, propiedades y teoremas, resaltando la importancia de su aplicación en la resolución de problemas geométricos.

Este libro se encuentra dividido en dos partes: Cuadriláteros Cíclicos y Problemas. En la primera parte, se exponen preliminares geométricos que se deben tener en cuenta al abordar el estudio de los cuadriláteros cíclicos, para luego dar paso a teoremas y caracterizaciones. En la segunda parte, se presentan problemas tomados de diferentes competencias matemáticas y textos de geometría, incluyendo algunas soluciones donde el uso de las propiedades de los cuadriláteros cíclicos juegan un papel determinante, y se presenta una amplia recopilación de problemas con los que se pretende que el lector pueda practicar y adquirir más habilidades en la resolución de problemas geométricos relacionados con cuadriláteros cíclicos.

Este texto hace parte de los resultados obtenidos con el proyecto de investigación "Resolución de problemas: Olimpiadas Universitarias de Matemáticas UDENAR", financiado por la Vicerrectoría de Investigaciones, Posgrados y Relaciones Internacionales de la Universidad de Nariño.

ISBN: 978-958-8958-90-3

9 789588 958903

Universidad de Nariño