LÍMITE DE FUNCIONES Y SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN. ESTUDIO COMPARATIVO DE TEXTOS ESCOLARES ANTES Y DESPUÉS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LOS ESTÁNDARES BÁSICOS DE MATEMÁTICAS

LEIDY MARCELA GÓMEZ MELO
YULY MARIBEL PANTOJA PORTILLO

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS Y ESTADISTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMATICAS
SAN JUAN DE PASTO
2012

LÍMITE DE FUNCIONES Y SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN. ESTUDIO COMPARATIVO DE TEXTOS ESCOLARES ANTES Y DESPUÉS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LOS ESTÁNDARES BÁSICOS DE MATEMÁTICAS

Trabajo de grado para optar por el título de Licenciado en Matemáticas

LEIDY MARCELA GÓMEZ MELO
YULY MARIBEL PANTOJA PORTILLO

Director:

LUIS FELIPE MARTINEZ PATIÑO

MG. En didáctica de las matemáticas.

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS Y ESTADISTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMATICAS
SAN JUAN DE PASTO
2012

Las ideas y conclusiones aportadas en la Tesis de Grado, son responsabilidad exclusiva de los actores.

Artículo 1°, del acuerdo 324 de octubre 11 de 1966, emanado del Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de aceptación

Director

Luis Felipe Martínez Patiño

Jurado

Erdulfo Ortega Patiño

Jurado

Gustavo Adolfo Marmolejo

San Juan de Pasto, noviembre de 2012

AGRADECIMIENTOS

A Dios especialmente por permitirnos alcanzar nuestras metas e iluminarnos para lograr nuestros objetivos.

A nuestros padres por darnos la vida y por su apoyo incondicional en el transcurso de nuestra carrera.

Al profesor Luis Felipe Martínez por su colaboración y orientación en la dirección de este estudio, puesto que su acompañamiento fue de vital importancia para llevar a buen término el proyecto.

A los profesores Gustavo Marmolejo y Erdulfo Ortega por sus acertadas recomendaciones en la elaboración y desarrollo de este estudio.

A nuestros compañeros y amigos por compartir con nosotros todos estos años, por su gran apoyo y hermandad.

RESUMEN

En este trabajo realizó un estudio comparativo acerca de los sistemas de representación utilizados por los libros de texto de grado once, específicamente, en la estructura de los ejemplos al desarrollar el concepto de límite de funciones; donde se discriminó los sistemas de representación utilizados por los textos escolares y se determinó los estándares de calidad de matemáticas que se desarrollan en éstos. El enfoque en el cual se enmarca éste trabajo es semiótico, dado que se hace referencia a la interpretación de los sistemas de representación del límite, que aparecen en los ejemplos al abordar el concepto.

La importancia de éste estudio radica en identificar por medio de las categorías planteadas en el instrumento de análisis, las características de los sistemas de representación y los cambios que se han dado en las ediciones de los manuales de texto de matemáticas, producidos antes y después de la implementación de los estándares básicos de matemáticas, permitiendo así, evidenciar si ésta restructuración es pertinente y aporta criterios para el mejoramiento de la práctica escolar.

ABSTRACT

In this paper a comparative study about representation systems used textbooks for grade eleven, specifically, in the structure of the examples to develop the concept of limits of functions, which discriminated representation systems used by textbooks and found the quality standards of mathematics that develop in them. The approach on which this work is semiotic frames, referred to as the interpretation of the boundary representation systems, in the examples that appear to address the concept.

The importance of this study is to identify through the categories raised in the analytical instrument, the characteristics of the systems of representation and the changes that have occurred in the editions of the math textbook, produced before and after implementation of basic math standards, allowing, show whether this restructuring is relevant and provides criteria for the improvement of school practice.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE GRÁFICAS Pág.

LISTA DE TABLAS Pág.

LISTA DE FIGURAS Pág.

LISTA DE ANEXOS Pág.

GLOSARIO

Asíntota horizontal: recta $y = a$ para la cual se verifica que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$

Asíntota vertical: recta $x = a$ para la cual se verifica que $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$

Función polinómica: función determinada por una ecuación de la forma $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, donde cada a_k es un número real y $a_n \neq 0$.

Función racional: función construida como el cociente de dos funciones polinómicas.

*Limite al infinito***:** variable independiente x que toma valores arbitrariamente grandes.

Limite infinito: valores de $f(x)$ variable dependiente) que toma valores arbitrariamente grandes.

Limite lateral: valor obtenido en el límite al tomar únicamente los valores menores (o los mayores) del punto en cuestión.

Representación: es una configuración de algún tipo que, en su totalidad o en parte, corresponde a, está asociado con, significa nboliza, interactúa de manera especial con, o representa algo.

*Representación interna***:** son las imágenes que creamos en la mente, para representar procesos u objetos matemáticos.

*Representación externa***:** son las repres aciones que comunicamos fácilmente a otras personas. Estas se hacen escr iendo en papel, dibujando, haciendo representaciones geométricas o ecuaciones.

*Sistema de representación***:** Conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, con reglas y convenios, que nos permiten expresar aspectos y propiedades de un concepto, teniendo presente que ningún sistema de representación agota por sí solo un concepto.

*Sucesión creciente***:** sucesión que satisface $f(n) \leq f(n+1)$, para todo número natural n.

*Sucesión decreciente***:** sucesión que satisface $f(n) \geq f(n+1)$, para todo número natural n.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza-aprendizaje del Cálculo en los niveles del bachillerato y primer año de universidad, presenta un desfase de tipo institucional, en cuanto a las diferencias de contrato didáctico (es decir, mientras en la universidad el estudiante sabe que ha de atenerse a la explicación teórica y formal del concepto, en el bachillerato se utiliza un discurso más intuitivo y de aplicación práctica más que teórica), que contribuye en un alto porcentaje al fracaso académico en las asignaturas de cálculo[1].

Son numerosos los estudiantes, que por una realización no adecuada de la transposición didáctica efectuada desde el saber a enseñar al saber enseñado en la escuela, que es donde intervienen los programas y los manuales de texto escolares, se encuentran con problemas cuando pretenden adquirir o mejorar sus conocimientos a través de los textos, detectándose dificultades y obstáculos por medio de sus errores. En este sentido, Rico (1992) afirma: "Siendo un objetivo permanente de la enseñanza de las matemáticas en el sistema escolar lograr un correcto aprendizaje de las mismas por parte de los alumnos, es claro que las producciones o respuestas incorrectas a las cuestiones que se les plantean se consideran como señales de serias deficiencias e incluso fracaso en el logro de dicho objetivo"[2]

Los textos escolares y sus representaciones juegan un papel fundamental en el aprendizaje de los estudiantes, en cualquier nivel escolar; pues estos son tomados como una guía y apoyo para acompañar tal aprendizaje y también por los docentes en el proceso de enseñanza. Esto motivó la realización de la presente investigación.

El trabajo está estructurado en cinco partes. En la primera se contextualiza el problema, se plantean las preguntas que orientan el estudio y los objetivos; en la segunda, se ubican, en el marco teórico los conceptos relacionados con este campo conceptual y sus representaciones, desde los aportes que hacen diferentes autores en especial Ana Medina, quien se basa en James Kaput y Gerald Goldin, en la tercera parte se plantea la metodología de la investigación, donde : se sustenta el enfoque, se explica la selección de la unidad información específica, se describe el instrumento de recolección de datos, y se estructura las etapas de la investigación. El análisis de resultados está organizado en dos partes, en la primera, se analiza las ediciones de los textos de grado once en el tema relacionado con el límite, antes y después de la implementación de los estándares

[1] Enríquez M. y Palles R. (2007). Un Estudio Acerca De Las Dificultades En El Aprendizaje Del Concepto De Límite De Una Función En El Grado Once De Enseñanza Media Del Colegio INEM-Pasto, p. 235.
[2] Rico L. y Coriat M. (1992). La asignatura didáctica de la matemática en el bachillerato en la universidad de Granada. Actas Del Congreso De Las Didácticas Especificas En El Bachillerato . Santiago de Compostela, pp (569-666).

curriculares de la editorial Norma, análogamente, en la segunda parte de la editorial Santillana. Por último se plantean las conclusiones.

1. LÍMITE DE FUNCIONES Y SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN. ESTUDIO COMPARATIVO DE TEXTOS ESCOLARES DE GRADO ONCE.

1.1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

La introducción al concepto de límite de una función se aborda al finalizar la enseñanza media en el área de matemáticas, y es el eje central para dar paso a conceptos como la derivada e integración, se trata de un concepto fundamental de cuyo aprendizaje depende gran parte del componente matemático de las carreras de ingeniería, ciencias económico-administrativas, ciencias naturales, entre otras.

El estudio de los conceptos como: límite, continuidad, y otros más de la topología de la recta, entre otros, generan las mayores dificultades al inicio de los estudios universitarios, en carreras técnicas y científicas, puesto que estos temas involucran procesos de avanzados de abstracción que el estudiante va logrando paulatinamente.
El cálculo es un área donde se presentan mayores índices de mortalidad y deserción estudiantil, es por esto que los estudiantes requieren una adecuada preparación en sus conocimientos matemáticos para que su desempeño en estos programas sea satisfactorio.

Debido a que el concepto de límite posee un cierto carácter instrumental, es usado como herramienta tanto en la solución de problemas matemáticos como de otras ciencias. En un sentido distinto, los primeros acercamientos a la noción de límite en el aula se realizan por medio de representaciones; a partir de las cuales se introducen y construyen los conceptos matemáticos. Generalmente, la noción de límite es abordada en principio desde la representación numérica, para luego pasar a la representación gráfica. Pero una y otra tienden a ser utilizadas de manera limitada[3]. En consecuencia, este tipo de representaciones no son utilizadas como apoyo para facilitar la comprensión del concepto.

Es aquí donde aparecen las dificultades en el aprendizaje del límite, pues los estudiantes usualmente aplican algoritmos sin comprender verdaderamente su significado; esto se ve reflejado en las concepciones erróneas que adquieren (Medina, 2001), las cuales se manifiestan cuando se enfrentan a la resolución de problemas en los que se hace necesaria la aplicación de límite. Muy a menudo, los objetivos de la enseñanza de las matemáticas se definen en términos de los tipos de problemas que los estudiantes sean capaces de resolver, o de las habilidades y conceptos que tengan.

[3] Medina, Ana Cecilia. Concepciones del concepto de límite en estudiantes universitarios. Bogotá, 2001, Trabajo de grado (Maestría en Docencia de la Matemática). Universidad Pedagógica Nacional. Facultad de Ciencias y Tecnología. Departamento de Matemáticas. 231 p.

Sin embargo, estas formulaciones de los objetivos de aprendizaje tienden a limitar la visión de la educación matemática. La razón de esto es que tales objetivos, no incorporan capacidades para nuevas construcciones espontáneas, ni para la síntesis de nuevas estrategias, tampoco al enfrentarse a situaciones desconocidas, o para actos matemáticos creativos[4]. Una de las principales razones de nuestro énfasis en los sistemas externos de representación es que proporcionan un medio para caracterizar los resultados del aprendizaje de una manera más valiosa.

Por otra parte, los textos escolares son, por un lado, los materiales didácticos de mayor uso por parte de educadores al preparar e implementar sus clases de matemáticas y por los estudiantes en sus intentos por comprender las matemáticas enseñadas (Pepin et al (2001)[5] citado por Marmolejo, Gonzales, 2011) y, de otro lado, al considerarse de parte de la comunidad educativa que: *"La enseñanza no está tan determinada por los decretos y órdenes ministeriales como por los libros de texto" (Shubring, 1987)*[6] se juzga que estos materiales didácticos son una potente herramienta para reflexionar sobre los elementos que caracterizan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Por todo lo anterior, este trabajo realizó un estudio comparativo acerca de los sistemas de representación utilizados por los libros de texto de grado once; este trabajo discriminó las representaciones que se usan en los textos escolares y se determinó los estándares de calidad de matemáticas que se desarrollan en éstos. La atención se centró en los ejemplos que se plantean en estos, pues, es aquí, en donde se evidencia la intencionalidad que tiene el autor al introducir las temáticas que corresponden a este caso y donde aparece una significativa variedad de representaciones utilizadas.

Las anteriores reflexiones permiten formular la siguiente pregunta:

¿Cuáles y cómo son los sistemas de representación utilizados en los libros de texto de grado once, antes y después de la implementación de los estándares básicos de calidad, al desarrollar el concepto de límite de una función?

---

[4] Goldin, Gerald A. y KAPUT, James J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. En Leslie P. Steffe y Pearla Nesher (Eds.), Teorías del aprendizaje matemático. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 133 p.

[5] Pepin, B. et al (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning culture. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 33(5). 17 p.

[6] Schubring, G. (1987). On the methodology of analyzing historical textbooks: lacroix as textbooks author. For the Learning of Mathematics**,** Vol. 7, 23 p.

1.2. JUSTIFICACIÓN

El trabajo matemático con los sistemas concretos que se encuentran particularmente en las matemáticas de la vida cotidiana y escolar, permite explorar y despertar el interés en el individuo, brindándole a sí mismo seguridad y confianza. El paso hacia el nivel de los sistemas simbólicos, según se ha comprobado, provoca rupturas debido a la descontextualización de los conceptos y problemas matemáticos; además, el quehacer matemático no se puede considerar simplemente como un juego lógico - simbólico, sino como, una elaboración de ideas u objetos conceptuales cuyos antecedentes están presentes en las situaciones de la cotidianidad y en la evolución histórica.

Según el MEN[7], la educación actual en matemáticas plantea conseguir una enseñanza del cálculo cognitivamente eficiente; pero la enseñanza de ésta área de la matemática no puede seguir siendo aquello que se reduce a la presentación formal de los conceptos, pues la investigación en educación matemática ha demostrado que las posibilidades de su comprensión reposan sobre nociones e ideas básicas como la de infinito, aproximación y variación.

El concepto de límite ocupa una posición central en el campo conceptual del cálculo; puesto que, por un lado, su carácter estructural constituye el eje central y básico sobre el cual se construye el cálculo diferencial e integral; y por otro lado, debido a su carácter instrumental, es usado como herramienta para la solución de problemas, tanto al interior de las matemáticas como de otras ciencias aplicadas. Por esta razón se consideró importante realizar un estudio sobre la manera cómo presentan los libros de texto escolares el concepto de límite, cómo se lo representa y qué sistemas de representación son utilizados al construir el concepto de límite de una función; la práctica escolar ha estado determinada más por el uso de los libros de texto que por los lineamientos del MEN, jugando un papel importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esto se hace evidente al indagar acerca de su utilización, pues estos se emplean como objeto de estudio, como material de consulta, como colección de ejercicios propuestos y problemas a resolver.[8]

Al respecto, Choppin (1980) considera al libro de texto desde dos puntos de vista: a la vez que es un “apoyo del saber en tanto que impone una distribución y una jerarquía de los conocimientos y contribuye a forjar los andamios intelectuales tanto de alumnos como de profesores; es instrumento de poder, dado que contribuye a la uniformalización lingüística de la disciplina, a la nivelación cultural y

---

[7] Ministerio de educación nacional. (2003) Matemáticas. Estándares básicos de competencias en matemáticas. MEN. Bogotá. 12 p.

[8] Sánchez Gómez, C et al. Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo xx. En: Revista de Investigación Didáctica. No. 17. (2004), 22, 3 p.

la propagación de las ideas dominantes" debido a esto, resulta de suma importancia analizar la contribución que los textos escolares de matemáticas hacen en el aula, así como también su función como transmisor de conocimientos socialmente aceptados.

Según Schubring (1987)," si se parte del hecho de que la práctica de la enseñanza no está tan determinada por los decretos y órdenes ministeriales como por los libros de texto utilizados para enseñar, se llega a la necesidad de un análisis de dichos libros de texto". Por esta razón es necesario identificar los cambios que se han dado en las ediciones de los manuales de texto de matemáticas, producidos antes y después de la implementación de los estándares curriculares, permitiendo así evidenciar si esta reestructuración es pertinente y aporta criterios para el mejoramiento de la práctica escolar.

En los últimos años se han realizado algunos estudios relacionados con el tema, por ejemplo en España, Love, E. y Pimm, D. (1996) reconocen que los manuales escolares son un elemento de gran importancia en el estudio de los fenómenos que subyacen al aprendizaje y enseñanza de las matemáticas[9], Sánchez, C. y Contreras, A. (1999) analizan manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función: una perspectiva desde la noción de obstáculo, Sierra, M. González, M. y López, C. (1999), realizan un estudio sobre la evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria, entre otros.

En Colombia; Guacaneme, E. (2001). Realizó un estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas, Fernández, E. (2010), hizo un análisis de textos escolares para el diseño de situaciones de enseñanza**,** Romero, J., García. G., Niño, I. (2009), estudian el papel de los textos escolares de matemáticas en la implementación de los lineamientos curriculares: el caso del razonamiento multiplicativo, Medina, A. (2001) estudia las concepciones del concepto de límite en estudiantes universitarios, donde expone una comparación de manuales de texto de nivel universitario.

Pero en cuanto al análisis de textos escolares relacionados con los sistemas de representación del concepto de límite de una función, no se han encontrado investigaciones hasta el momento, de aquí la relevancia y originalidad de llevar a cabo este trabajo.

[9] Love, E., & Pimm, D. (1996). 'This is so': A text on texts. In A. Bishop, K. Clements, C Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education*, 18 p. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer. 25 p.

Además esta investigación servirá para implementar a un futuro próximo, nuevas metodologías para la enseñanza del concepto de límite de una función y todas sus implicaciones y así corregir paulatinamente las dificultades que se presentan.

1.3. ESTADO DEL ARTE

En los últimos años el concepto de límite ha sido centro de numerosas investigaciones con diferentes enfoques, y buena parte de estas permitieron fundamentar este proyecto.

Entre estas están:

Dentro del campo de las representaciones se encuentra:

Goldin y Kaput (1993) quienes plantean como una meta principal aumentar la potencia de las representaciones, tanto las representaciones externas que se utilizan en las matemáticas y en la enseñanza de las matemáticas; como las capacidades de representación interna, que permitan a los individuos emplear todos los tipos de sistemas de representación funcionales para la resolución de problemas y el aprendizaje en las matemáticas. El modelo de Goldin hace hincapié en la importancia de la heurística, basado en imágenes, y sistemas efectivos de representación.

Duval (1999), citado por Medina (2001), quien ha estudiado la comprensión de los conceptos a través de las representaciones y la interacción entre los diferentes registros de representación, y afirma que "La construcción de los conceptos matemáticos depende estrechamente del dominio de los registros o sistemas de representación semiótica y de los distintos tipos de actividades asociadas a los mismos". Así, para tener certeza de que en realidad se ha comprendido y dominado satisfactoriamente el significado de un campo conceptual, se debe: conocer sus principales representaciones y el significado de cada una de ellas, y ser capaces de operar con las reglas internas de cada sistema y convertir unas representaciones en otras, identificando qué sistema es más favorable para trabajar con determinadas propiedades.

Por su parte, Blázquez S. y Ortega T. (2001), analizan "los sistemas de representación en la enseñanza de límite" en España, argumentando la necesidad de trabajar con diferentes sistemas de representación para mejorar la interpretación y comprensión de este concepto.

En cuanto al análisis de textos se encuentran las siguientes investigaciones:

A nivel internacional, Love, E. y Pimm, D. (1996) reconocen que los manuales escolares son un elemento de gran importancia en el estudio de los fenómenos que subyacen al aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, las características del lector, el escritor, el profesor y el libro en sí mismo, así como las interacciones que se dan entre estos, determinan la función de los manuales en el aula.

Por otra parte, con respecto a la didáctica, Sánchez, C. y Contreras, A. (1999) analizan manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función, con el fin de aportar orientaciones sobre lo que se debería tener en cuenta en la elaboración de textos para el estudiante, facilitando de esta manera la comprensión del concepto.

Así mismo, Sierra, M. González, M. y López, C. (1999), realizan un estudio sobre la evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria, estudiando los cambios que se han producido a lo largo de más de cincuenta años con relación al límite funcional; analizando y comparando diversas ediciones de manuales en determinados periodos de tiempo y su relación con los programas oficiales, proporcionando datos esenciales para concretar la evolución de dicho concepto.

En Colombia; Guacaneme, E. (2001). Realizó un estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad, efectuando una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas; en el cual se desarrollaron varias actividades tendientes a la identificación de teorías que abordan el tratamiento formal de las nociones de proporción y proporcionalidad y la selección, revisión y análisis de los programas y textos escolares objeto de estudio.

Al mismo tiempo, Fernández, E. (2010) hizo un análisis de textos escolares para el diseño de situaciones de enseñanza; vislumbrando los discursos matemáticos y las propuestas de enseñanza alrededor de un concepto matemático, que gira en torno a la factorización de polinomios y las cónicas. Esta mirada puede dar cuenta de lo que circula en el aula de matemáticas, generando ideas para la inspiración de diseños de situaciones didácticas de enseñanza que amplían sus efectos pedagógicos.

Análogamente, Marmolejo, G. (2007) analiza algunos textos escolares en los dos primeros grados de la educación básica, identificando el rol de las figuras geométricas, la visualización y los factores de visibilidad en el aprendizaje del área de las figuras geométricas bidimensionales, en donde se evidencia cómo el registro semiótico de las figuras se constituye en una herramienta heurística de gran interés en el intento de cargar de significado el aprendizaje del objeto matemático que se está estudiando.

De igual modo, Medina, A. (2001) estudia las concepciones del concepto de límite en estudiantes universitarios, donde expone una comparación de manuales de texto de nivel universitario. La presentación del concepto de límite en los textos analizados, se ubica en los marcos analítico y algebraico, el esquema o secuencia de la presentación del tema relacionado con límites, se caracteriza desde dos enfoques: uno, referente al papel del concepto de límite en la estructura secuencial y lineal del Cálculo y el otro, tiene que ver con el modelo didáctico de introducción del concepto.

Es importante aclarar que este estudio se apoya en la investigación sobre “concepciones del concepto de límite en estudiantes universitarios” de Anna Cecilia Medina (2001), quien en una parte de su trabajo lleva a cabo un análisis de textos universitarios, estableciendo una categorización de los sistemas de representación asociados al límite de una función, los cuales se toman como supuestos teóricos para discriminar los sistemas de representación utilizados por los textos escolares de grado once al construir el concepto de límite y determinar los estándares de calidad de matemáticas que se desarrollan en los manuales escolares.

Como se puede observar, en las anteriores investigaciones se realizan análisis de textos pero en su gran mayoría relacionados con temas diferentes al concepto de límite y sus sistemas de representación, de aquí la novedad y originalidad de abordar este estudio.

2. OBJETIVOS DE ESTUDIO

2.1. OBJETIVO GENERAL

Comparar los sistemas de representación utilizados al desarrollar el concepto de límite de funciones, en los libros de texto de grado once antes y después de la implementación de los estándares básicos de matemáticas.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Discriminar los sistemas de representación utilizados al desarrollar el concepto de límite de funciones en los textos escolares de grado once, antes y después de la implementación de los estándares básicos de matemáticas.

2. Determinar los estándares básicos de matemáticas que se desarrollan en los manuales escolares de grado once al presentar el concepto de límite.

3. PREGUNTAS QUE ORIENTAN EL ESTUDIO

¿Qué papel juegan las representaciones del concepto de límite en el contenido de los libros de texto?

¿Qué utilidad tienen para su aprendizaje las representaciones del concepto de límite?

¿Cuáles representaciones del concepto de límite son las más utilizadas en los libros de texto?

¿Qué función han desempeñado los estándares curriculares de matemáticas en la enseñanza del concepto de límite?

4. MARCO TEORICO

En este capítulo se desarrolla una perspectiva conjunta basada en las representaciones y sistemas de símbolos. Al abordar el tema de representación, se debe tener en cuenta el grado de complejidad y de abstracción que sugiere su estudio. La profundización de ciertas nociones relacionadas con la representación, y el desarrollo de una manera de hablar de ellas, la más sistemática y precisa, puede beneficiar en gran medida el ámbito de la educación matemática. Este capítulo se divide en 4 secciones y fue tomado y adaptado en forma de resumen del artículo de Gerald Goldin y James Kaput, titulado "Una perspectiva de conjunto sobre la idea de representación en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas; pues es en estos fundamentos teóricos en los cuales Medina (2.001) sustenta su trabajo de la siguiente forma:

En la primera sección se describe qué se entiende por representación, se distingue la representación interna de la externa, y se discute las relaciones entre las representaciones. En la segunda se describen los distintos tipos de sistemas de representación, en especial se analizan las características de los sistemas externos, pues estos constituyen el objeto de este estudio. En esta sección se incluye un breve debate sobre las representaciones externas vinculadas, los sistemas analógicos (externos e internos), y formales (sistemas de representación externos e internos). La tercera sección está dedicada a tipos básicos de actos de representación y sus estructuras. En la cuarta sección se caracteriza la construcción de potentes sistemas de representación como un objetivo global de aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo y, por último, se hace una brece descripción de los referentes curriculares.

4.1. REPRESENTACIÓN

Una representación es una configuración de algún tipo que, en su totalidad o en parte, corresponde a, está asociado con, significa, simboliza, interactúa de manera especial con, o representa algo[10]. Se habla "en términos generales" porque, entre otras características complejas, las representaciones no se producen de forma aislada. Por lo general, pertenecen a sistemas altamente estructurados, ya sea personal e idiosincrásico y cultural o convencionalmente. Estos han sido denominados "sistemas de símbolos"[11] o "sistemas de representación" (Goldin, 1987; Lesh, Landau, y Hamilton, 1983).

---

[10] Palmer, S. E. Fundamental aspects of cognitive representation. In E. Rosch & B. B. Lloyd (Eds.), Cognition and categorization. Hillsdale, NJ: Lawrence Eribaum Associates. 1977, 58 p.

[11] kaput, J. Toward a theory of symbol use in mathematics. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics, 1987, Hillsdale, NJ: Lawrence Eribaum Associates, 37 p.

4.2. REPRESENTACIÓN INTERNA VERSUS EXTERNA

Algunos autores han caracterizado una distinción entre el significado (representación interna) y el significante (representación externa); sin embargo, para este estudio se considera la relación de "qué significa" no como fija y unidireccional, sino como variable y reversible.

La representaciones internas son las posibles configuraciones mentales de los individuos, tales como los estudiantes o solucionadores de problemas. Por supuesto, por ser internas, estas configuraciones no son directamente observables.

Hasta cierto punto una persona puede ser capaz de describir sus propios procesos mentales, esto es lo que suele ocurrir, a través de la introspección. El término de representación interna se utiliza no para referirse al objeto directo de la actividad introspectiva, sino como una herramienta para desarrollar en un observador la capacidad de observación del comportamiento (incluyendo, por supuesto, el comportamiento verbal y matemático). Aunque la experiencia de la introspección es subjetiva, las descripciones que dan como resultado de la introspección son observables como, por ejemplo, el comportamiento verbal y gestual.

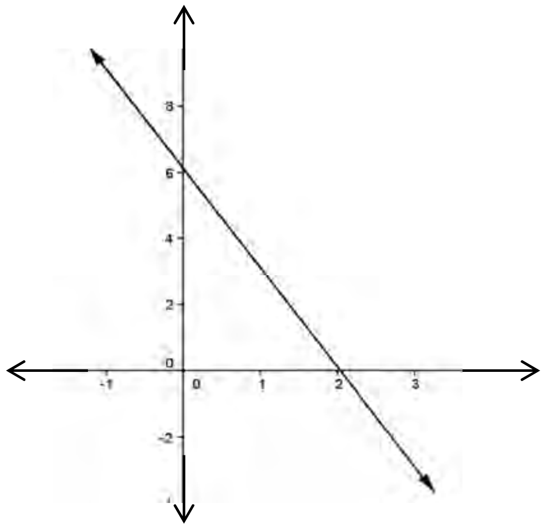
La representación externa son las posibles configuraciones físicamente incorporadas observables como palabras, gráficos, imágenes, ecuaciones etc. Estos son, en principio, accesibles a la observación por cualquier persona con conocimientos adecuados. Por supuesto, la interpretación de las representaciones externas como pertenecientes a los sistemas estructurados, y la interpretación de las relaciones que representan, no es "objetiva" o "absoluta" sino que depende de las representaciones internas de la persona (s) que hace de la interpretación.

Por ejemplo, se considera un gráfico dibujado en coordenadas cartesianas por una persona para "representar" la ecuación $y + 3x - 6 = 0$. El gráfico en particular no es un dibujo aislado, ocurre dentro de un sistema de representación de coordenadas, con base en normas y convenciones específicas, las que a su vez deben ser (al menos parcialmente) "entendibles" antes de que el acto de representación pueda tener lugar. Por lo tanto distinguir entre la gráfica externa y la gráfica visual interna, o cualquier otra representación que la gráfica puede provocar en un individuo; marca aún más la diferencia entre el sistema convencional de representación de coordenadas cartesianas (externa) y el sistema interno conceptual. Se debe tener en cuenta que los sistemas de representación internos de ninguna manera deben ser interpretados simplemente como una "imagen mental" o "copia" del sistema externo.

Por otra parte, el tipo de entidad conceptual que la gráfica "representa" puede variar enormemente de un contexto a otro por ejemplo, un gráfico puede ser tomado para representar la función

En lugar de una ecuación, (ver figura 1)

Figura 1. Representación gráfica-cartesiana de la funcion



Fuente: tomado de la investigación.

o podría representar la relación entre la posición y el tiempo de un objeto que se mueve al oeste con una velocidad constante de metros por segundo, a partir de metros al este del origen, o que puede suponer la hipotenusa de un triángulo rectángulo "hacia la derecha", cuya base es de unidades de longitud y cuya altura es de unidades, y así sucesivamente. La potencia y la utilidad de la representación claramente dependerá de ser parte de un sistema estructurado, y en el grado de flexibilidad o versatilidad en lo que puede representar.

4.2.1. La relación entre representaciones

De especial importancia son las interacciones bidireccionales entre representaciones internas y externas. A veces una persona exterioriza en forma física a través de actos derivados de las estructuras internas, es decir, los actos de escritura, expresión oral, la manipulación de los elementos de un sistema concreto externo, y así sucesivamente. Tales actos interpretativos pueden tener lugar tanto a un nivel activo, deliberado, sujetas a control consciente, y a un nivel automático más pasivo, donde actúan las estructuras físicas en el individuo como si "resonaran" con estructuras mentales previamente construidas[12] así, el lenguaje natural o las expresiones matemáticas conocidas son "entendibles" sin actividad mental deliberada y consciente. Las interacciones en ambas direcciones entre las representaciones internas y externas pueden (y lo más a menudo lo hacen) ocurren simultáneamente.

Según (Goldin, 1987, 1992ª; Kaput, 1987, 1991), un sistema de representación o sistema de símbolos puede ser entendido como un constructo a partir de caracteres primitivos o señales, no siempre discretos (como las palabras habladas, las cartas del alfabeto o los números). Estas señales son a menudo incorporadas en algún medio físico, sin embargo, los signos no deben ser entendidos literalmente como incorporaciones físicas, sino como clases de equivalencia de realizaciones, donde la equivalencia se determina a través de actos de interpretación. Así, cuando hablamos de "la gráfica de $y = 3x - 6$ en el contexto de la educación matemática, esta no significa generalmente un dibujo particular o una construcción matemática abstracta, definida con precisión, más bien se refiere a una clase más o menos acotada de realizaciones "aceptables" para un sistema de representación gráfico de coordenadas. De hecho, las clases de equivalencia para una representación externa pueden considerarse como los aspectos compartidos de un sistema de este tipo, con cualquier instancia particular o miembro de esta clase.[13]

Los signos o caracteres forman los cimientos de un sistema de representación y estos pertenecen a sistemas de representación estructurados. La pertenencia de un signo a un sistema depende exclusivamente de los criterios que este posee, ya sean implícitos o explícitos, además cada sistema posee también unas reglas específicas para combinar las señales en configuraciones permitidas, ya que existe una ambigüedad en la definición de las configuraciones de representaciones y las estructuras de los sistemas de representación, así como en las relaciones simbólicas entre ellos, de hecho, se ha observado que, sin ambigüedad, las representaciones son casi inútiles[14].

Así pues, un carácter externo se asume como algo significativo o no, dependiendo de que si coincide con la representación interna que la persona tiene en un sistema que para él o ella es operativo. Asimismo, una combinación de elementos de un sistema externo puede ser asumida como significativa o no, dependiendo de

[12] Grossberg, S. How does a brain build a cognitive code? Psychological Review, 1980, Vol. 87, p. 1 - 51.
[13] Goodman, N. Languages of art (rev. ed.). Amherst, MA: University of Massachusetts Press. 1976, p. 34 - 45.
[14] Davis, R. B. Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education. Norwood, NJ: Ablex, 1984, p. 13- 26..

si coincide con las expectativas basadas en construcciones (internas) existentes en los elementos del sistema.

La dirección de la correspondencia entre las representaciones puede variar con el acto de representación. Dugdale (1989) describe un experimento de enseñanza sobre las identidades trigonométricas, donde se invierte la relación habitual de referencia en el que los gráficos son considerados como las entidades representativas y las ecuaciones simbólicas como las entidades representadas.

Este cambio dio lugar a diferencias sustanciales en el pensamiento de los estudiantes y el aprendizaje. La tradición de Piaget se refiere a “significado” como el constructo mental (interno) y el “significante” como la representación física (externa). Por otro lado la relación se puede invertir cada vez que una representación externa es interpretada por un individuo, especialmente si la representación exterior es una que no fue producida por el intérprete. En ese caso, la construcción interna está actuando para representar la configuración externa, así un sistema particular, puede representar no solo uno sino muchas otras configuraciones notacionales en matemáticas, como por ejemplo una ecuación algebraica, puede modelar muchos diferentes tipos de representaciones, tales como gráficos, tablas de números, cantidades físicas, situaciones de la vida real y así sucesivamente.

En conclusión, las representaciones externas nos permiten hablar de relaciones matemáticas y su significado, aparte de inferencias sobre el alumno. Las representaciones internas nos dan el marco para describir las estructuras de conocimiento individual y procesos de solución de problemas. Las interacciones entre sistemas representacionales internos y externos proporcionan los medios para hacer inferencias acerca del aprendizaje de los individuos como consecuencia del ambiente y posibilidades del entorno.

4.3. TIPOS DE SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

4.3.1. Sistemas externos de representación

Un sistema de representación externa es una estructura que contiene reglas o mecanismos para la manipulación de sus elementos. En esta parte es importante diferenciar entre los sistemas de representación basados en imágenes o analógicos en los cuales los personajes fundamentales son los signos y las configuraciones, estas no son de carácter ni verbal ni formal, pero tienen algunas interpretaciones sensoriales parecidas a lo que se representa. El sistema basado en imágenes puede ser interpretado ampliamente para incluir imágenes internas y representaciones esquemáticas de la imagen (por ejemplo, los objetos y sus atributos),y también puede incluir representaciones externas inactivas y pictóricas, realizaciones concretas y manipulables, representaciones generadas por ordenadores etc. y las representaciones matemáticas las cuales son objetos abstractos con múltiples muestras físicas posibles.

Por otra parte la representación interna, basada en imágenes es esencial para casi toda la intuición matemática y comprensión, que van desde el concepto de número y el "sentido numérico", a los significados de las operaciones aritméticas y construcciones geométricas, a la comprensión de las ecuaciones y funciones a través de gráficos cartesianos. Las interacciones con sistemas de representación externas son importantes para facilitar la construcción de potentes sistemas internos de representación en los estudiantes.

4.3.2. Sistemas formales

Los sistemas formales de representación, son aquellos que se han construido conscientemente para lograr metas específicas, abiertas, y para los cuales las reglas son y no implícitas. *Los sistemas formales* de representación matemáticos son por ejemplo: el sistema de numeración, los sistemas algebraicos de notación, entre otros. *Los sistemas informales* han evolucionado con reglas predominantemente implícitas como la lengua natural. Algunos sistemas más o menos informales más tarde son formalizados. Está claro que el proceso de desarrollo de matemáticas durante siglos ha involucrado muchos actos de formalización, como la introducción de notaciones formales y la creación de definiciones, axiomas y métodos de prueba.

Cabe señalar, que el proceso de formalización tiene un aspecto funcional que sirve para propósitos importantes, que van desde la comodidad de la comunicación y el uso (economía o descripción, para la resolución de problemas) en tanto el dominio de las matemáticas del lenguaje natural. A medida que estos aspectos funcionales influyen en el desarrollo de los sistemas formales, los sistemas resultantes adquieren una estructura y pueden ser asumidos como sistemas de representación estructurados. Así como el desarrollo de los sistemas formales de representación externa requieren procesos constructivos más explícitos y menos implícitos, el desarrollo de los sistemas internos formales, difiere de los sistemas informales.

Hasta cierto punto, cuando los niños aprenden matemáticas, participan en los actos de formalización de los sistemas menos formales y en cierta medida, van construyendo nuevos sistemas a través de actos formales basados en reglas cada vez más explícitas. La construcción efectiva de los sistemas formales de representación interna (representaciones internas de los números, numeración y operaciones aritméticas, representaciones internas de la notación algebraica y los procedimientos de resolución de problemas, etc) depende en gran medida de la interacción entre sistemas tanto formales, como otros sistemas menos formales que permitan la interpretación de los sistemas formales a través de actos de representación. La potencia de las representaciones formales es que pueden proporcionar configuraciones comunes de representación que se conectan o unifican no sólo a diferentes tipos de fenómenos, sino también los distintos niveles de abstracción.

4.3.3. Vinculación de representaciones externas

Otra forma en la que el medio puede afectar a la actividad de representación es mediante la vinculación de las representaciones. Por ejemplo, una ecuación y su gráfica de coordenadas en la misma hoja de papel, ¿en qué sentido podría decirse que están vinculadas? físicamente, las representaciones externas no están relacionadas en absoluto, excepto, quizás, en el sentido más débil de adyacencia.
A nivel interno, como representaciones, podrían estar vinculadas en la mente de la persona que las produjo (a través de las representaciones internas), o podrían estar vinculadas en la mente de una persona que las lee (de nuevo, a través de las representaciones internas), en la medida en que la persona sea capaz de integrar las estructuras cognitivas para cada representación interna y externa, el individuo es capaz de predecir, identificar, o incluso producir su contraparte. Sin embargo, una especie mucho más fuerte de integración de representaciones es a través de una acción sobre uno de los representantes externos, en donde el individuo es capaz de predecir, identificar o producir los resultados de la acción correspondiente en su contraparte externa, tal vez incluso proporcionando configuraciones intermedias de representación.

Es aquí, en el nivel de acción, que la vinculación directa de las representaciones exteriores en los medios interactivos juega un papel importante, porque se le concede la oportunidad de integrar esa predicción, identificación, o la actividad de producción a través de las representaciones. Actuando en una de las representaciones vinculadas externamente y observando las consecuencias de esa acción en otro sistema de representación, o haciendo una predicción explícita sobre el segundo sistema representacional para comparar con el efecto producido por las acciones en la representación vinculada, el individuo experimenta los vínculos en nuevas formas y está provisto de nuevas oportunidades para construcciones internas.

4.4. TIPOS DE ACTOS DE REPRESENTACIÓN Y ESTRUCTURAS

A continuación se consideran brevemente algunos tipos básicos de estructuras de representación, y los actos que conllevan estas estructuras. Los sistemas externos físicos de representación parecen haber evolucionado al menos en parte como medio para superar las limitaciones cognitivas humanas: las limitaciones en la memoria y en la capacidad de proceso. Actos de representación personal y social, ya sea que estén o no deliberadamente emprendidas dentro de las restricciones sistemáticas de los sistemas particulares culturalmente desarrollados, a menudo ascienden a los esfuerzos para superar una o más de estas limitaciones. A continuación se describen algunas características generales de las estructuras de representación y de los tipos de actos.

4.4.1 En representación de las relaciones uno-a-Muchos

Un acto de representación muy importante es utilizar un elemento de representación para representar muchos otros, o para representar una secuencia de elementos. Cuando esto ocurre internamente, se ha llama "fragmentación". Debido a que este acto es cognitivo cabe aclarar que no es un útil para este estudio, ya que este se basa en el análisis de representaciones externas.

4.4.2 Sustituciones de representación según el grado de complejidad

Una estructura relacionada con la representación es la sustitución de un solo elemento de representación en una compleja red de elementos de representación. Esto ocurre cuando una letra o palabra se utiliza para representar una imagen, posiblemente elaborada, o un diagrama, o cuando un par ordenado de símbolos representa una entidad abstracta matemática: por ejemplo, (G, *) que se utiliza para representar un grupo G con la operación *. Con frecuencia la sustitución se basa en la equivalencia, donde se utiliza un elemento de representación individual en lugar de una clase de equivalencia, y las reglas para el manejo de estos elementos se basan en las clases representantes, como ocurre con las fracciones en aritmética, o los elementos del álgebra abstracta. Goodman (1976) señaló que usamos tales ejemplares de la clase de equivalencia en casi todos los sistemas basados en caracteres. Además de representar objetos complejos por simples símbolos, se puede representar procesos complejos por los símbolos. Se podría usar un único conjunto de símbolos para representar un proceso, como en la notación de Leibniz para las derivadas. Tal estructura tiene funciones complementarias, tanto internas como externas que ayuda a aliviar la carga de la memoria de trabajo, que a su vez es compatible con otro papel importante en las matemáticas, la construcción de sistemas más complejos.

4.4.3 La eliminación selectiva

Muchas representaciones implican un proceso de eliminación seleccionado entre otras representaciones, con ciertos tipos de detalles omitidos sistemáticamente. La mayoría de los mapas y diagramas emplean este enfoque, al igual que las aplicaciones más prácticas de la geometría. Esta es una manera importante como las representaciones apoyan el proceso clave de idealización en Matemáticas y Ciencias.

4.4.4 Cosificación

Algunas representaciones proporcionan una notación externa, física, y las correspondientes configuraciones internas que simbolizan las entidades que no suelen ser descritas físicamente. Este es el caso de prácticamente cualquier abstracción y es también el caso de eventos ambientales o cognitivos que tienen presencia física, pero no dejan un rastro satisfactorio. Por ejemplo, en un entorno informático basado en objetos manipulables, uno podría tener en mente crear alguna forma de registro de la secuencia de acciones que un usuario realiza (Kaput, 1995). Además, el sistema puede proporcionar los medios para que denote diversas estrategias para este tipo de acciones. Psicológicamente, la introducción de la configuración que representa "cosifica" la entidad representada de acuerdo a una "realidad" o "existencia" de modo que se puede discutir o manipular a través de su representación. La decisión de representar es la estrategia de un solucionador de problemas o la elección de los pasos con un ordenador cosifica a las entidades en este sentido, al igual que la decisión de representar a una construcción nueva física matemática y abstracta.

4.5. CONSTRUCCIÓN DE SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN DE GRAN ALCANCE COMO META DE APRENDIZAJE

Muy a menudo, los objetivos de la enseñanza de las matemáticas se definen en términos de los tipos de problemas que queremos los estudiantes sean capaces de resolver, o de las habilidades y conceptos que queremos que tengan. Sin embargo, estas formulaciones de los objetivos de aprendizaje tienden a limitar la visión que aportamos a la educación matemática. La razón de esto es que tales objetivos no incorporan capacidades para nuevas construcciones espontáneas, por extensión a situaciones desconocidas, para la síntesis de nuevas estrategias cuando sea necesario, o para actos matemáticos creativos. Una de las principales razones de nuestro énfasis en los sistemas externos de representación es que proporcionan un medio para caracterizar los resultados de aprendizaje de una manera mucho más valiosa.

En lugar de objetivos de aprendizaje tradicionales, se propone la formulación de los objetivos educativos en matemáticas, en términos de los tipos de sistemas internos de representación de los estudiantes que nos gustaría tener a su disposición. Es posible delinear un conjunto manejable relativamente pequeño de amplias capacidades internas de representación, cuya interacción se hace efectiva para un problema de la solución de gran alcance. También es posible describir, sistemas matemáticos de representación internos más especializados, que tienen una amplia gama de aplicabilidad. Ambos proporcionan maneras de definir lo que buscamos en la educación matemática.

En el currículo escolar de las matemáticas, ya que es más frecuente en la práctica, la mayor atención se presta a los sistemas formales de representación simbólica. Los estudiantes deben “entender” nuestro sistema de base 10 de la numeración y asociarlo a las normas de procedimiento para la suma, resta, multiplicación y división de números enteros escritos en base diez. Se espera extender estos métodos a sistemas de representación formal decimal, fraccionaria y algebraicos como convencionalmente se desarrollan. Mucho menos se presta atención a los sistemas basados en imágenes (igualmente matemáticos), técnicas de visualización, rotación mental, dibujo de diagrama e interpretación, proyección espacial etc...

Un aspecto significativo en un sistema de representación tiene que ver con el amplio dominio y la aplicabilidad en diferentes contextos, donde el sistema tenga “sentido” en relación con muchas otras representaciones diferentes. Este aspecto de la representación se llama versatilidad. Anteriormente se ha mencionado, como un ejemplo, los diferentes significados que se podría dar a un gráfico. La capacidad de construir una representación gráfica con versatilidad tiene que ser visto como un objetivo educativo importante en las matemáticas.

Otro sentido de gran alcance tiene que ver con la eficiencia del uso del procedimiento. La eficiencia puede incorporarse en la sintaxis de un sistema de representación (en particular, en un sistema formal), por lo que el sistema admite transformaciones con facilidad de una configuración a otra desde la cual pueden obtenerse percepciones. En este sentido, el sistema árabe hindú de numeración es más “eficiente” que los números romanos. Este aspecto del poder de la representación se llama eficiencia de la sintaxis. Es más fácil de caracterizar, en el caso de los sistemas formales, matemáticos de representación, tales como los sistemas formales de la aritmética y el álgebra, donde están bien definidas las reglas de la sintaxis y de procedimiento. Es mucho más difícil de describir, pero igual de importante, para los sistemas menos formales. Para los sistemas internos de representación, esta eficiencia se evidencia en el uso de procedimientos es también más fácil de medir en contextos en la educación formal como “pruebas de habilidad” estas tienden a predominar en los instrumentos de evaluación en la educación matemática, y las formas más auténticas de la evaluación se descuidan.

Otro tipo de poder en un sistema de representación tiene que ver con su eficacia en la abstracción de las características esenciales de las representaciones en otros sistemas, y la codificación de estas características de manera que los hace accesibles, o muestra las relaciones esenciales en algún grado. Este aspecto, se llama eficiencia de la codificación. Esto puede ser una característica especialmente sobresaliente de los sistemas basados en imágenes, donde las características abstraídas se pueden hacer directamente visibles[15]. En principio, la eficiencia de sintaxis o eficiencia de codificación puede caracterizar sistemas formales o sistemas basados en imágenes, es decir internos o externos.

Otros aspectos del poder de representación incluyen la capacidad de un sistema para codificar las relaciones generales en un muy pequeño conjunto de caracteres (por ejemplo, una característica del poder representativo de notación algebraica) y la capacidad de soportar acciones sistemáticas de elementos representacionales[16]. Así se debe hacer en aumentar la potencia de las representaciones como una meta, tanto en las representaciones externas que utilizamos en matemáticas y en la enseñanza de estas y en las capacidades de representación internas que permitan a los individuos emplear todos los tipos de estructuras de representación funcionales, para la resolución de problemas y el aprendizaje de las matemáticas, el modelo de Goldin hace énfasis en la especial importancia de la heurística de gran alcance, basado en imágenes, y los sistemas efectivos de la representación. En este apartado se hará referencia a los siguientes ejes temáticos: en primer lugar se describe de manera sucinta las representaciones, en segundo lugar atañe a los sistemas de representación del concepto de límite de una función, donde se especifica cada uno de ellos, y en tercer lugar se encuentran los referentes curriculares, en los cuales se alude a estándares relacionados con el concepto de límite.

En esta investigación se trabajará con las representaciones externas, las cuales se consideran como las configuraciones observables tales como: las palabras, gráficos, dibujos, ecuaciones, figuras etc., que representan cuestiones que son accesibles a la observación, ya que la población de estudio son libros de texto, y en estos se analizaran las representaciones que aparecen del concepto de limite.
En cuanto a los sistemas de representación se tomara la definición de Kaput (1987) citado por Medina (2001) quien define sistema simbólico matemático como: "una terna S = (E, F, c) conformado por un esquema simbólico E, cuya forma de representación externa (colección de caracteres, junto con reglas explícitas para identificarlos y combinarlos) pertenece al plano de la expresión y adquiere significado cuando se pone en relación con el plano de contenido o campo de referencia F, por medio de un código c o regla específica de correspondencia entre ambos, para fines comunicativos de conceptos matemáticos".

Además, expresamos la necesidad de emplear diferentes representaciones, ya que cada modo, significativamente distinto, de entender un concepto necesita de un sistema de simbolización propio. A continuación se presenta una macro estructura donde se presentan las ideas más importantes analizadas en el anterior marco teórico:

[15] Goldin, G. A. Mathematical language and problem solving. In R. Skemp (Ed.), Understanding the symbolism of mathematics [Special issue]. Visible Language, 1982, Vol.16, .p. 221- 238.
[16] Mahoney, M. The beginnings of algebraic thought in the seventeenth century. In S. Gankroger (Ed.), Descartes: Philosophy. Mathematics and Physics. Sussex, England: Harvester Press, 1980, .p. 198- 267.

igura 2. Macro-estructura del marco teórico

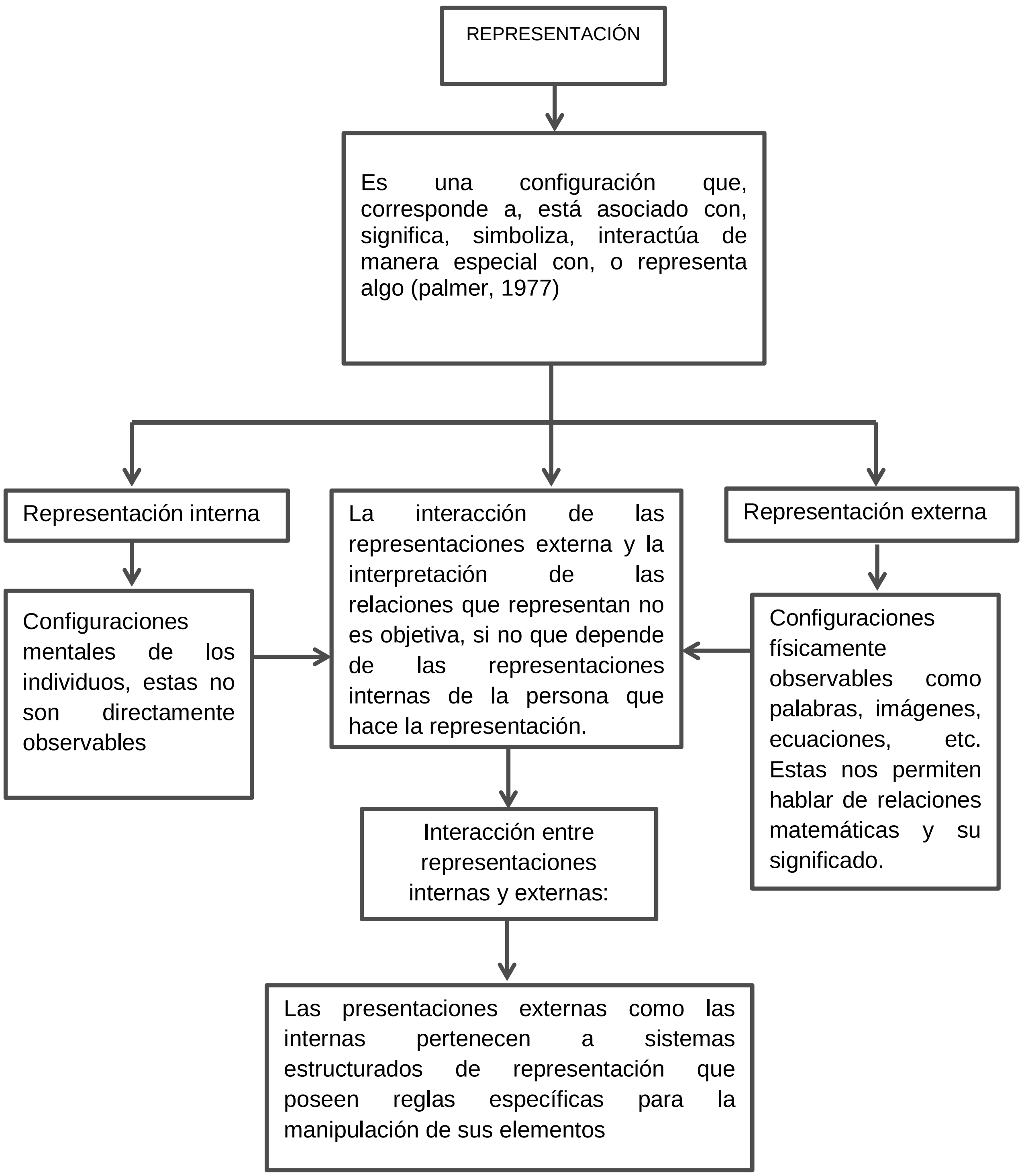
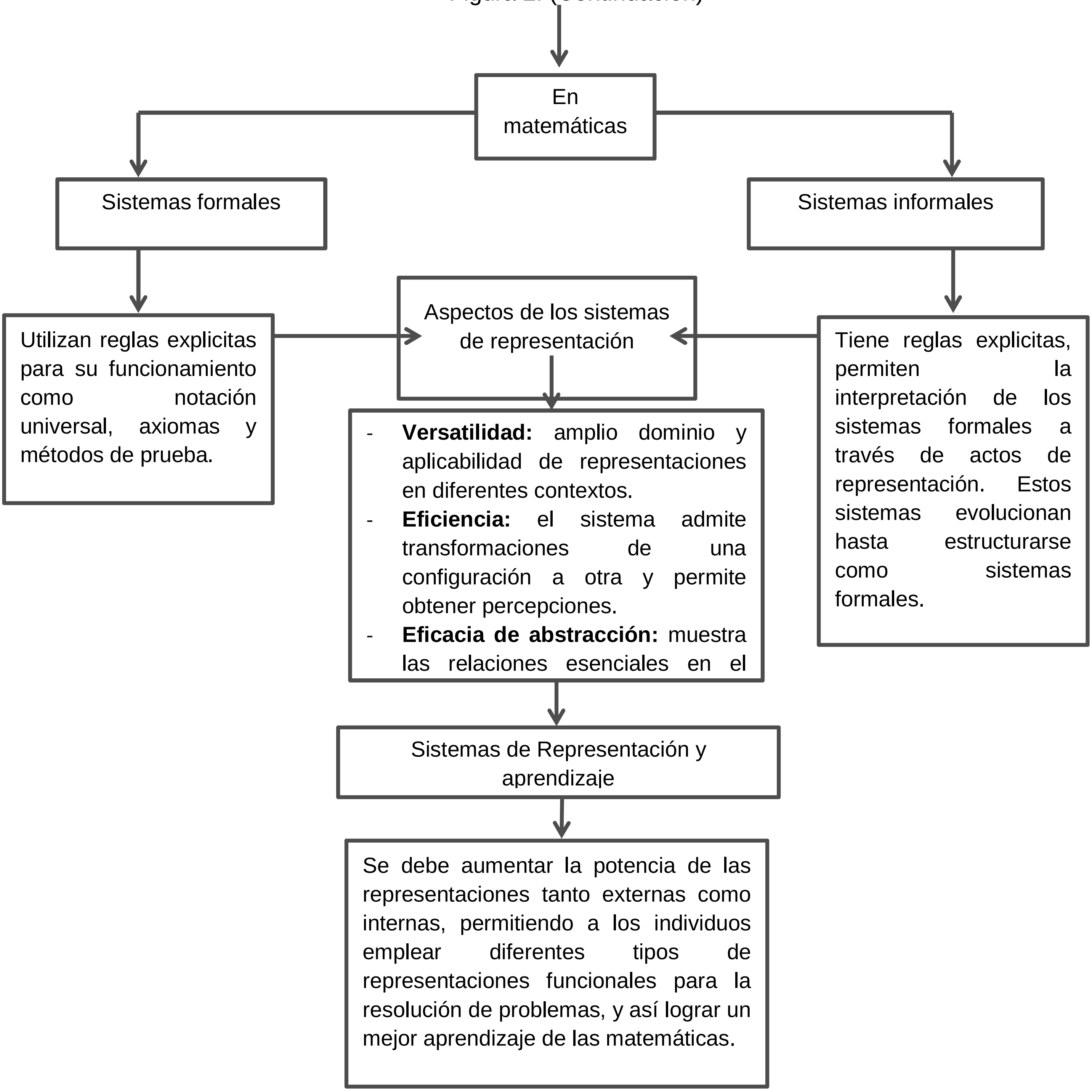


Figura 2. (Continuación)



Fuente: tomado de la investigación.

4.6. REFERENTES CURRICULARES

Debido a que en esta investigación se determinó los estándares de calidad de matemáticas que se desarrollan en los manuales escolares al construir el concepto de límite, es necesario enmarcar este estudio en documentos relacionados con políticas educativas colombianas como: los Estándares de Matemática(2003)[17]. La siguiente es una descripción de estos, en los aspectos más relevantes en relación a los planteamientos sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación escolar.

Al propiciar el pensamiento matemático, la educación matemática escolar debe desarrollar en los estudiantes las competencias matemáticas que se plantean en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2003) para la educación básica y media en relación a los cinco tipos de pensamiento matemático que se establecen en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998).

Uno de los primeros conceptos matemáticos que se aborda en el grado undécimo es el concepto de límite de una función, que por lo general, se tiene como un concepto previo para los conceptos de continuidad y derivada. Este se analizó en el marco del aspecto curricular y dentro de este en dos categorías que corresponden a los estándares que se refirieren al concepto de límite el cual se describe a continuación:

4.6.1. Aspecto Curricular

En este aspecto se presentan las categorías que hacen alusión a los estándares que se movilizan en el pensamiento numérico (P. NUM) y en el pensamiento variacional (P. VAR), que son los que se relacionan con el límite. Las subcategorías han sido designadas como indicadores de logro, donde aparecen los temas relacionados con el límite. Aquí, se debe identificar que temas de los mostrados en cada subcategoría se movilizan en cada ejemplo.

4.6.1.1. Utilización técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos (P. VAR)

Son cinco los tipos de contenidos que caracterizan esta categoría, a saber:

Interpreta y/o define gráficamente el límite de una función: se considera cuando en el ejemplo aparecen graficas relacionadas con el límite de una función y sucesión donde se evidencian aproximaciones.

---

[17] Ministerio de educación nacional. (2003) Matemáticas. Estándares básicos de competencias en matemáticas. MEN. Bogotá. 46 p.

Determina el límite de una función por aproximación: se considera cuando en el ejemplo aparecen tablas con aproximaciones.

Determina si existen, la ecuación de las asíntotas horizontales, verticales u oblicuas de una función: se considera cuando en el ejemplo se localizan las asíntotas de la curva

Aplica la definición formal del límite: esta definición proporciona un método para hallar el valor del límite de una función, pero se utiliza una vez se ha estimado este valor, para demostrar que en efecto es el límite verdadero.

Aplica la definición verbal del límite: se utiliza para explicar en forma menos formal la definición del límite, contextualizando las características de esta con el objetivo de que su significado quede más explícito y sea más fácil de comprender.

4.6.1.2. Uso de propiedades y representaciones en los números naturales y reales en el cálculo del límite (P. NUM)

Son cinco los tipos de contenidos que caracterizan esta categoría, a saber:

Aplica propiedades algebraicas y evalúa límites de funciones: se considera cuando se aplican propiedades algebraicas como: asociativa, distributiva, de potenciación, de radicación, etc. Y procesos como factorización, racionalización, uso de conjugadas, y simplificaciones para obviar indeterminaciones en el cálculo de límites y además cuando se realiza una sustitución directa que en este caso se denomina evaluación de límites para encontrar el valor del límite esta sustitución se realiza en la variable independiente sustituyendo el valor al que tiende está en el límite.

Calcula límites aplicando sus propiedades: utiliza las propiedades de los limites como: límite de una constante, adición y sustracción de límites, producto y cociente de límites, potencia de límites, para realizar cálculos de forma más económica.

Calcula límites infinitos y al infinito: en esta parte se deben considerar dos casos, el primero son los limites infinitos, los cuales se refieren a la posibilidad de hacer $f(x)$ tan grande como se quiera, tomando a x suficientemente cercana a a, entonces,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

y el segundo los límites al infinito, los cuales, se refieren a problemas en los cuales los valores de $f(x)$ cuando x crece ilimitadamente, es decir, si f es una función definida en un intervalo abierto de la forma $(a, +\infty)$, el limite de $f(x)$, cuando x tiende a mas infinito, es L.

Calcula límites de funciones indeterminadas: Cuando después de evaluar el límite de una función en un punto “a”, se obtiene una forma indeterminada como: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ etc; se dice que el límite cuando la función tiende a éste punto, es una “forma indeterminada”. Para poder evaluar el comportamiento de la función en el punto “a”, se debe hacer uso de reglas algebraicas tales como; factorización, racionalización entre otras, de ésta manera se transforma la función original en una nueva, y ahí sí puede evaluarla en éste punto.

Calcula límites trigonométricos: se calcula límites de funciones trigonométricas utilizando identidades trigonométricas y operaciones algebraicas según se necesite.

5. METODOLOGÍA

En esta sección se describen: las características de los libros de texto objeto de estudio, el tipo y enfoque de la investigación, la unidad de información específica, el proceso investigativo y la construcción del instrumento de análisis.

5.1. CARACTERÍSTICAS DE LA POBLACIÓN

Los libros de texto seleccionados tienen las siguientes características: son libros escolares utilizados por estudiantes de grado once, los cuales corresponden a textos escolares antes y después de la vigencia de los estándares curriculares de calidad. La metodología de selección de los textos consistió en aplicar una encuesta a cuatro docentes de los grados onces correspondientes a ocho instituciones diferentes, tanto públicas como privadas, en las que se indagó sobre la preferencia de los textos que siguen en su práctica pedagógica en la actualidad. De los textos de mayor frecuencia se escogieron ediciones antes y después de la implementación de los estándares. (Ver anexo A)

Los textos seleccionados, según la información obtenida en la tabla 1, fueron:

- *Antes de los estándares*

Matemática 11 de la editorial Santillana.
Dimensión matemática 11 de editorial Norma.

- *Después de los estándares*

Hipertexto 11 editorial Santillana
Espiral 11 editorial Norma.

Tabla 1. Frecuencias de textos escolares más usados en grado 11

Libros	Frecuencia
Matemática 11 de la editorial Santillana.	8
Dimensión matemáticas 11 de editorial Norma.	6
Hipertexto 11 editorial Santillana	8
Espiral 11 editorial Norma.	7
Matemática-Mente 11 Editorial Voluntad	2
Formula 11 editorial voluntad	1
Matemática 11 editorial norma	6
Matemática 11 editorial Mc Graw Hill	1
Total	40

Fuente: tomado de la investigación.

Además del criterio anterior se tuvo en cuenta la riqueza de representaciones que presentaban los textos, pues esto facilitó su análisis.

5.2. UBICACIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE EN LA SECUENCIALIZACIÓN TEMÁTICA DE LOS LIBROS DE TEXTO.

A continuación se presenta una descripción del contenido temático de cada texto analizado.

En el libro de texto "MATEMÁTICAS 11" de la editorial Santillana (1995) se aborda en principio aspectos relacionados a los números reales y sus propiedades así como los tipos de funciones reales. El tema *límite de una sucesión* aparece en la tercera unidad, y en unidades siguientes a esta se desarrollan los temas de continuidad, derivadas, integrales y aplicaciones de las derivadas e integrales, además el autor presenta en los dos últimos capítulos el tema de la probabilidad.

En cuanto al capítulo que desarrolla el tema límite de sucesiones cabe destacar los siguientes aspectos: en *las funciones reales*, se plantean ejemplos en los que se calcula; dominio y rango, suma, resta multiplicación y división y composición. *Las funciones inversas y reciprocas*, se desarrollan ejemplos apoyados en representaciones gráficas para calcular funciones inversas. *Las sucesiones de números reales*, muestran en los ejemplos tanto representaciones gráficas como numéricas. *Las sucesiones finitas e infinitas*, evidencian el cálculo de un número finito de términos.

En el tema de *sucesiones monótonas* se describen los tipos y características de estas, basándose en una representación gráfica de sucesión, para luego presentar un ejemplo en el que se pide demostrar que una sucesión es estrictamente creciente. *Las sucesiones acotadas* introducen al límite de sucesiones, puesto que primero se establece el acotamiento superior e inferior, para luego pasar a las sucesiones convergentes, donde plantea un ejemplo en que se debe determinar el punto de convergencia de una sucesión, tomando para su solución la representación verbal de sucesión.

Por último, el libro de texto plantea para el tema de límite de sucesiones dos ejemplos en los que involucra una representación verbal, en uno de los ejemplos la sucesión es convergente es decir que el límite existe, y en el otro ejemplo la sucesión es divergente, es decir que el límite no existe.

El límite de funciones aparece en la cuarta unidad, donde se presentan los siguientes aspectos: El autor plantea que el propósito de la unidad consiste en introducir uno de los conceptos más destacados del cálculo y el cual es el soporte de las derivadas e integrales refiriéndose al concepto de límite.

A continuación en la *aproximación del concepto del límite* se plantean ejemplos que involucran las representaciones verbal y numérico-tabular. En el tema d*efinición de límite*, se expresa la definición formal del límite utilizando los cuantificadores épsilon (ϵ) delta (δ), aquí se plantean dos ejemplos en los que se hace necesaria la aplicación de la definición formal del límite para resolver ejemplos de comprobación, en los dos casos se debe hallar un épsilon dado un delta para comprobar los límites, en el tema de p*ropiedades de los límites*, se plantean ejemplos que conllevan a la aplicación de suma, resta, multiplicación, división, entre otras propiedades. En algunas ocasiones cuando se utilizan las propiedades de los límites antes descritas se obtiene resultados carentes de sentido, que se conocen como *indeterminaciones.*

En *los límites en el infinito*, aparece en forma explícita la representación algebraica. Como ya se ha visto los límites de muchas funciones se pueden calcular mediante sustitución directa de igual manera *los límites de las funciones trigonométricas,* se pueden calcular directamente.

En el libro de texto "HIPERTEXTO 11" de la editorial Santillana (2011) se aborda en los dos primeros capítulos aspectos relacionados con la lógica, los conjuntos y números reales y sus propiedades así como las funciones y sus propiedades. El tema *límite de una función* y la continuidad de una función aparecen en la tercera unidad, y en unidades siguientes a esta se desarrollan los temas de derivación, integración y aplicaciones de las derivadas e integrales, además el autor presenta en el último capítulo una introducción a la estadística y probabilidad.

En cuanto al *límite de funciones* se reconocen los siguientes aspectos: en el primer grupo de ejemplos el autor pretende dar un idea intuitiva de límite considerando para ello funciones racionales, trigonométricas y radicales, en donde el límite se analiza desde las representaciones: gráfica-cartesiana, numérico-tabular y definición verbal. En *la definición de límite* y en *los límites infinitos* los ejemplos que se plantean se apoyan no solo en la definición verbal sino en representaciones gráfico-cartesianas, permitiendo un mejor acercamiento a la definición. Los *límites laterales* se abordan desde representaciones gráficas y verbales. En cuanto a los *límites de funciones indeterminadas, radicales* y *trigonométricas* se desarrollan aplicando propiedades de suma, resta, división potenciación y radicación. Los *límites en el infinito* y *los límites exponenciales* básicamente se apoyan en aspectos de tipo algebraico.

En la edición del texto "Dimensión Matemática 11" de la editorial Norma año 1997, antes de la implementación de los estándares curriculares se encuentra el concepto de límite en la quinta unidad llamada "Límite y análisis de funciones" en este se analiza los siguientes temas: algebra de funciones, sucesiones finitas e infinitas, límite de una sucesión de números reales, límite de funciones, cálculo de límites, límite de funciones cuando $x \to \infty$, límite de funciones circulares, asíntotas horizontales, verticales y oblicuas a una curva, continuidad de funciones y el área como límite.

Aquí se presenta una amplia exposición sobre funciones reales, en donde se privilegia la función como correspondencia arbitraria entre números reales y en donde prima la unicidad. A esta presentación precede una exposición sobre las cónicas y sus características.

Los ejemplos que se presentan en la parte inicial son relacionados con operaciones con funciones y algunas gráficas que describen su comportamiento, sobre todo en lo relacionado con sus operaciones, después aparecen ejemplos de sucesiones donde las gráficas ilustran áreas de polígonos regulares y los ejemplos se limitan a cálculos de términos y demostraciones, después aparece el límite de funciones y los ejemplos en esta parte se caracterizan por su riqueza de gráficas cartesianas de funciones reales, en primera instancia se presenta el límite como aproximación por medio de tablas, y las representaciones cartesianas muestran los acercamientos laterales al límite, para luego abordar el cálculo de límites y limites infinitos, también se presentan ejemplos donde se trabaja con limites trigonométricos o circulares y por último aparecen ejemplos donde se muestra el procedimiento para encontrar y graficar las asíntotas de las curvas utilizando el límite de las funciones. Posterior al tema de límites, se presenta continuidad de funciones, para disponer el camino hacia la diferenciación y la integración.

En la edición del texto “Espiral 11” de la editorial Norma año 2005, después de la implementación de los estándares curriculares se encuentra el concepto de límite en la tercera unidad llamada “Límites y continuidad”. En este se analiza los siguientes temas: noción de límite de una función, propiedades de los limites, limites laterales y continuidad, limites infinitos, al infinito y asíntotas, limites trigonométricos, límites de funciones exponenciales y logarítmicas. A esta presentación precede una exposición sobre funciones y sus propiedades.

Iniciando la tercera unidad aparecen los estándares curriculares de calidad, los pensamientos matemáticos que se va a desarrollar en el transcurso del capítulo y sus respectivos procesos, de la siguiente manera:

Tabla descriptiva 2. Descripción de los pensamientos y estándares presentes en el texto.

Pensamientos	Estándares
Pensamiento variacional	- Utilizar técnicas de aproximación en procesos numéricos infinitos - Analizar intuitivamente gráficas formadas por rectas y curvas para establecer características como la continuidad y la existencia del límite.
Pensamiento numérico	- Usar representaciones decimales de los números en el proceso de construcción del concepto de límite. - Usar las propiedades de los números reales en el cálculo de límites y en la determinación de la continuidad de funciones.
Fuente: tomado de la investigación.	

Cabe anotar que aunque en este capítulo se analiza la continuidad de las funciones nuestro estudio no toma en cuenta estos ejemplos.

Los ejemplos que se presentan en la parte inicial hacen énfasis en la utilidad de las tablas y los gráficos para comprender la noción de límite, sin embargo se exponen varias razones donde se muestra la ineficiencia de estos, para el cálculo de límites, pues a veces no se conoce la gráfica de la función o es muy difícil de trazar, además no siempre el valor que se puede deducir de las tablas es siempre el correcto.

Después aparecen ejemplos de la aplicación de las propiedades de los límites, donde se argumenta que el uso adecuado de estas facilita el cálculo y nos da certeza sobre los resultados obtenidos, luego aparecen los límites laterales y continuidad utilizando las mismas pautas del tema anterior para su análisis, es decir, basándose en las mismas propiedades y técnicas, posteriormente aparecen los límites infinitos, al infinito y asíntotas donde se hace especial énfasis en el comportamiento de las funciones, justificando las respuestas con argumentos matemáticos, por último aparecen los límites de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, en esta parte la mayoría de los ejemplos se reducen a la aplicación de algoritmos utilizando las propiedades y conceptos en cuestión aunque sigue predominando el uso de gráficos para ilustrar mejor la tendencia de las variables. Posterior al tema de límites y continuidad, se presenta la derivada de una función, para disponer el camino hacia la integración.

5.3. TIPO Y ENFOQUE DE LA INVESTIGACIÓN

Este trabajo se enmarca en un enfoque semiótico dado que se hace referencia a la interpretación de los sistemas de representación del límite de una función que aparecen en los ejemplos al desarrollar el concepto en los libros de texto de grado once, además es de tipo cualitativo, descriptivo y comparativo.

Es *cualitativo* por la forma de interpretar los métodos centrados en el análisis de las representaciones y la influencia de los diferentes elementos que intervienen en ellas y porque en lugar de estudiar directamente a las personas se hace indirectamente a través del análisis de manuales escolares.

Es *descriptivo*, porque mediante el análisis de las representaciones, se identifica las características propias de cada sistema de representación. En este sentido, descripción no puede ser simplemente una presentación de elementos asociados arbitrariamente, sino que tiene que responder a una trama de relaciones claramente establecida por el camino de las diferentes representaciones. De otra parte es preciso clarificar la dinámica de esa red de relaciones en la perspectiva de dos momentos, antes y después de la implementación de los estándares curriculares de calidad.

Es *comparativo,* porque se trata de identificar las características, el tipo de representación, los estándares involucrados en cada ejemplo a medida que se va desarrollando el concepto en los libros de texto de grado once.

Este trabajo implica conocer el funcionamiento de los sistemas de representación que se encuentran plasmados en los textos escolares y sobretodo la temática relacionada con el límite de funciones, para analizar la contribución que los textos escolares de matemáticas hacen en el aula, así como también su función como transmisores de conocimientos socialmente aceptados[18].

5.4. UNIDAD DE INFORMACIÓN ESPECÍFICA.

Este estudio se centró en la exploración de los ejemplos que muestran los manuales de texto al presentar el concepto de límite, pues en estos se plasma su desarrollo y sus características más relevantes. Además en los ejemplos aparece de manera explícita las representaciones y constituyen una pauta para la comprensión e interpretación de las diferentes temáticas. Según Love y Pimm "Los dispositivos utilizados para organizar el trabajo del lector con el texto incluye: exposición, explicación, preguntas, ejercicios, ejemplos y pruebas. Estos son medios para lograr tanto un lector más activo del texto y para manifestar los objetivos de matemáticas y lograr una progresión cognitiva. El tipo más común de organización del texto es la exposición, los ejemplos y los

[18] Gutiérrez, A. (1991): La investigación en didáctica de las matemáticas, en Gutiérrez, A. (ed.), *Área de conocimiento Didáctica de la Matemática* (colección "Matemáticas: Cultura y aprendizaje" nº 1). (Síntesis: Madrid), pp. 149-194.

ejercicios”[19]. Aunque la exposición es importante en la medida que trata de manifestar el tema en una forma discursiva, y en ocasiones pueden utilizar dispositivos tales como preguntas, material visual, o tareas para el estudiante, es en los ejemplos donde el lector evidencia la puesta en práctica de la teoría planteada y donde se evidencia de forma más clara el papel que cumplen las representaciones en la construcción del conocimiento. Es por esta razón que se eligió los ejemplos como unidad de investigación especifica en la organización de los textos escolares elegidos.

5.5. PROCESO INVESTIGATIVO

La realización del trabajo de grado involucra el desarrollo de las siguientes fases:

Fase Teórica: Revisión documental.

- Elección de los textos escolares para realizar el análisis correspondiente.
- Revisión de textos escolares que usan los estudiantes de grado undécimo de educación media implicados en el estudio, para identificar las representaciones que portan los textos y su incidencia en la enseñanza del concepto de límite.
- Revisión de teorías semiótica y curricular: concepto de representación, sistemas de representación asociados al concepto de límite, y referentes curriculares.
- Adaptación de las categorías de análisis tomadas de Medina (2001) sobre los criterios que describe cada sistema de representación asociado al concepto de límite, como marco de referencia interpretativo.

Fase Interpretativa

- Diseño y aplicación del instrumento para la recolección de información.
- Registro de datos: representaciones encontradas en los ejemplos descritos en los textos.
- Análisis e interpretación de los datos.

Es importante resaltar que el análisis fue fundamentalmente de carácter exploratorio, y se hizo por medio de la interpretación de las representaciones plasmadas en los libros de texto, tomando como referencia el modelo teórico planteado en la fase teórica. Los datos recogidos se clasifican según categorías fijadas (que se describen más adelante).

[19] Love, E., & Pimm, D. (1996). ‘This is so’: A text on texts. In A. Bishop, K. Clements, C Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education*, 18 p. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 269 p.

5.6. FASE DE CONTRASTACIÓN DE RESULTADOS

Se hizo la contrastación del modelo teórico de la primera fase (revisión bibliográfica) y los resultados de la segunda fase (interpretativa), para identificar la situación del funcionamiento de los aspectos semiótico y curricular para generar nuevas reflexiones y cuestionamientos que promuevan el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas.

5.7. CONSTRUCCIÓN DEL INSTRUMENTO DE ANÁLISIS

En lo que sigue, describimos las categorías a considerar en el análisis, igualmente se designará los elementos que les caracterizan y que están presentes en los ejemplos de los manuales de texto de grado once con relación al concepto del límite. Además debido a que este estudio es de carácter semiótico estructural, es decir, se analiza como conviven los sistemas de representación en la manera como los textos escolares presentan el concepto de límite; se tomó para este análisis dos aspectos principales las cuales son: *Aspecto Semiótico*: hace referencia a los sistemas de representación presentes en los textos al desarrollar el concepto de límite. *Aspecto curricular*: hace referencia a los estándares y contenidos que se movilizan en estos, en los ejemplos planteados por los manuales de texto.

En el aspecto semiótico se encuentran las tres categorías y doce subcategorías para las cuales se tomó como guía la categorización de las concepciones históricas, que realizó Ana C. Medina en su tesis de maestría titulada "Concepciones del concepto de límite en estudiantes universitarios" (Universidad pedagógica Nacional, 2001), donde se hace una caracterización de los sistemas de representación (analítico, algebraico, aritmético, geométrico, en contextos de variación) según los contextos matemáticos a lo largo de la historia, y se trata de identificar algunos elementos correspondientes a estos sistemas. Cabe aclarar que se realizó una serie de adaptaciones sobre todo con respecto a la redacción de los criterios que describen cada sistema de representación para hacerlo de cierta forma más accesible a la población que colaboró para la validación del instrumento de análisis.

Además después de realizar un primer sondeo a los ejemplos objeto de estudio en cada texto escolar, se eligieron tres de los cinco sistemas de representación que plantea Medina, estos son; el sistema de representación analítico, aritmético y algebraico, debido a que los dos sistemas restantes es decir el sistema de representación geométrico y en contextos de variación no aparecen en el contenido de los ejemplos o en ocasiones están ausentes completamente en el desarrollo del concepto en el texto. Esto debido a que el trabajo de Medina se centra en un análisis histórico, epistemológico y didáctico, donde cobra importancia la construcción del concepto de limite desde sus orígenes basado en la aproximación de áreas por esto su caracterización geométrica y también por que este se abordó por medio de problemas de variación y cambio a lo largo de la historia donde estaba implícito el sistema de representación en contextos de variación.

En el aspecto curricular se encuentran dos categorías y diez subcategorías las cuales fueron tomadas de los libros de texto objeto de estudio, las dos categorías están relacionadas con los estándares de calidad que se movilizan en los ejemplos al abordar el concepto de límite, los cuales son: *el pensamiento variacional*: "utilizar técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos" en donde se determina el límite de una función por aproximación y también si existen, la ecuación de las asíntotas horizontales, verticales u oblicuas de una función, además se interpreta y/o define gráficamente el límite de una función, también aplica la definición formal y verbal del límite; y *el pensamiento numérico*: "usar las propiedades y representaciones en los números naturales y reales en el cálculo del límite" en donde se calcula límites infinitos de funciones indeterminadas y trigonométricos, también se aplica propiedades algebraicas y se evalúa límites de funciones reales utilizando sus propiedades, también calcula límites trigonométricos.

Se ha elaborado un instrumento para el análisis, teniendo en cuenta las categorías y subcategorías de los dos aspectos antes mencionados definiéndose veintidós subcategorías agrupadas en las cinco categorías.

En el anexo B, se presentan de manera sintética esta estructura; la lectura horizontal permite observar los diferentes ejemplos encontrados en los textos clasificados uno a uno según los criterios de cada sistema de representación; mientras que, la lectura vertical permite identificar las diferentes subcategorías que se han tenido en cuenta; lo cual da una visión global del tipo de análisis realizado.

A continuación se presentan algunas consideraciones importantes que se deben tener en cuenta dentro del aspecto semiótico y curricular en cada categoría, así:

5.7.1. Aspecto Semiótico

5.7.1.1. Sistema de representación analítico de funciones

Hacen referencia al límite de funciones y por tanto se apoyan en las representaciones de las funciones. (Tomado de Medina, 2001). En esta categoría se encuentran las siguientes subcategorías:

Representación numérico-tabular: muestra la evaluación de la función en valores cercanos a la variable independiente.

Ejemplo:

Figura 3. Representación numérico-tabular de

1. Calcular el límite de $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ para $x \to 3$.

Solución:

La tabla muestra los valores *f(x)* en varios *x* cercanos al 3.

x	4	3,5	3,1	3,01	3,001	3	2,999	2,99	2,9
$\frac{x^2-9}{x-3}$	7	6,5	6,1	6,01	6,001	?	5,999	5,99	5,9

$\longrightarrow \qquad \longleftarrow$

Luego: concluimos que el límite es 6.

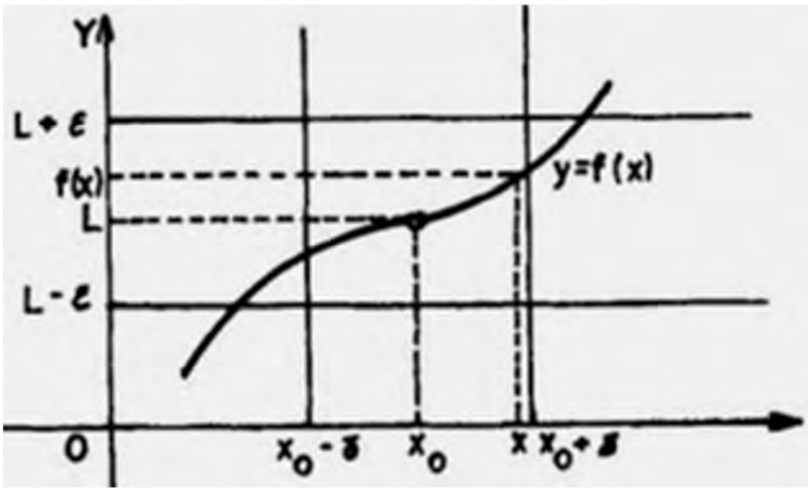
Fuente: tomado del libro Matemáticas 11, Ed. Santillana 1995.

En el ejemplo podemos observar, los valores de la variable tanto por derecha como izquierda y sus correspondientes valores de en la función , en donde se evidencia de forma intuitiva el valor al que tiende el limite, este ejemplo muestra de forma explícita una tabla de valores indicando las aproximaciones al punto de interés.

Representación gráfica-cartesiana de función: describe gráficamente el acercamiento de la variable dependiente a un valor cuando la variable independiente se acerca a otro; en ocasiones no se describen los acercamientos, solo aparece la curva de la función.

Ejemplo:

Figura 4. Representación gráfica-cartesiana dela función



Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

La representación gráfica es una herramienta muy útil para comprender la definición formal del límite, ya que de su análisis se puede extraerse la idea intuitiva de que el límite de una función cuando tiende a , es si puede lograrse que esté tan próximo a como se desee, siempre que se tomen valores de lo suficiente próximos a . Esto significa que la distancia entre y puede hacerse tan pequeña como se desee y de aquí que para cada número positivo , por pequeño que este sea, se tenga que:

"para ciertos valores de ".

Representación simbólico-específica de función: se llama representación simbólico-específica cuando se presenta un ejercicio de cálculo de límite de la forma y se procede a evaluarlo, obteniendo así el límite .

Ejemplo: hallar el límite de la función , cuando

En este caso la representación debe estar explicita en el texto, y no se tienen en cuenta aquellos ejemplos en los que no aparece el proceso de evaluación en la función correspondiente. Este proceso también se conoce como sustitución directa.

Representación verbal de función: en esta dimensión se presenta una descripción de la definición formal sin el uso de símbolos que caracterizan la definición formal (como □ y y los cuantificadores y) pero que están implícitos.

Ejemplo:

Figura 5. Representación verbal del límite dela función

,

Enunciado

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x > 0 \\ 1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Usemos la **propiedad L1** para mostrar que $\lim_{x \to 0} f(x)$, no existe

Solución

Observando la figura 3.16 podemos concluir que si nos acercamos a 0 a través de valores positivos de x, encontramos que $f(x)$ se aproxima a 0. Si nos acercamos a 0 a través de valores negativos, vemos que $f(x)$ toma siempre el valor 1.

Hay dos valores posibles para el $\lim_{x \to 0} f(x)$, que son 0 y 1. Como el límite si existe, es único, podemos afirmar que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe. ■

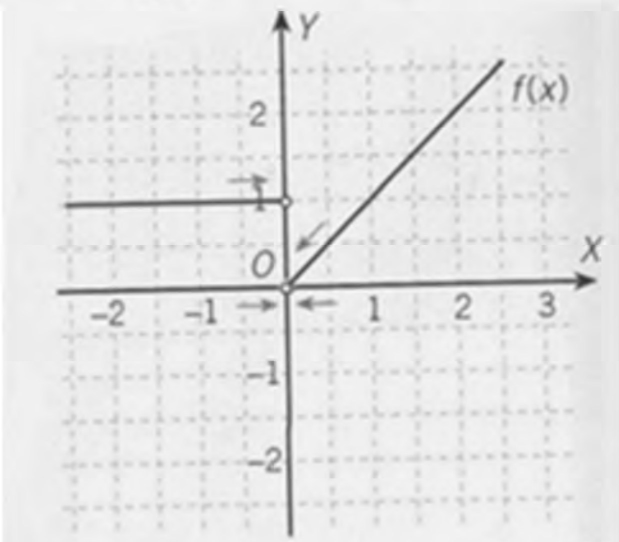


Fig. 3.16

Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

En la solución del problema que muestra el ejemplo, aparece explícitamente la expresión “nos acercamos a a través de valores positivos de , encontramos que se aproxima a ”, evidenciando aspectos como la tendencia de los valores de las aproximaciones en las variables, además en algunos casos también se hace alusión a las distancias entre las variables.

Definición formal de función: en esta dimensión aparece explicita la siguiente definición:

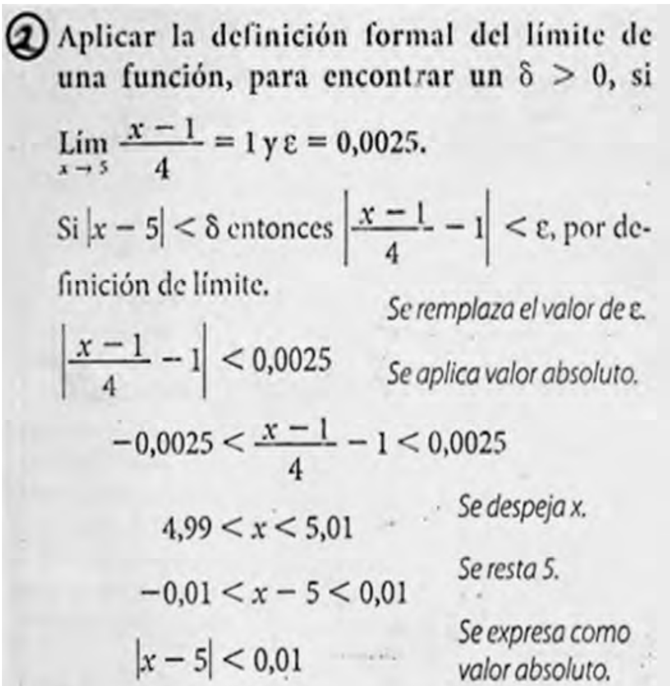
Definición formal de límite de una función: sea una función cuyo dominio es el intervalo *.* Sea “ ” un valor cualquiera que puede o no pertenecer a . Decimos que: si y solo si:

$\varepsilon >$, $\delta >$o tal que si $< | \quad | < \delta$ entonces $| \quad | < \varepsilon$.

De igual manera esta dimensión se evidencia en ejemplos donde se comprueba la existencia de límite aplicando la definición.

Ejemplo:

Figura 6. Definición formal de la función —


2 Aplicar la definición formal del límite de una función, para encontrar un $\delta > 0$, si

$\lim_{x \to 5} \frac{x-1}{4} = 1$ y $\varepsilon = 0{,}0025$.

Si $|x-5| < \delta$ entonces $\left|\frac{x-1}{4} - 1\right| < \varepsilon$, por definición de límite.

Se remplaza el valor de ε.

$\left|\frac{x-1}{4} - 1\right| < 0{,}0025$ *Se aplica valor absoluto.*

$-0{,}0025 < \frac{x-1}{4} - 1 < 0{,}0025$

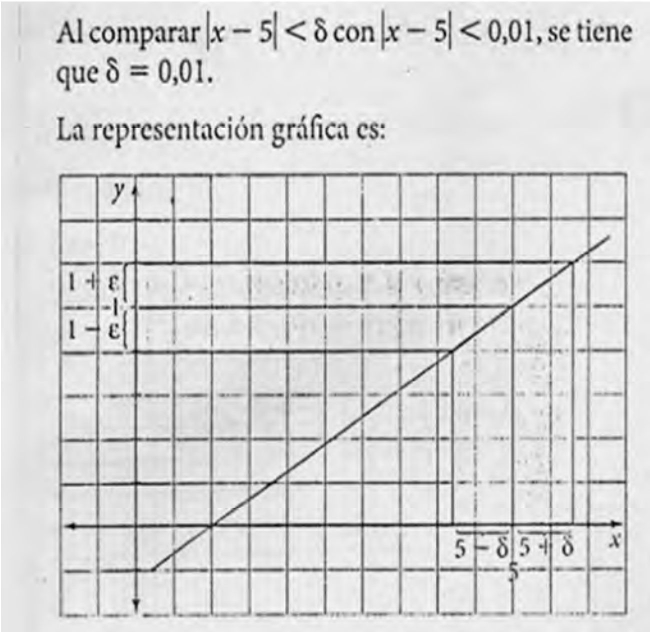
$4{,}99 < x < 5{,}01$ *Se despeja x.*

$-0{,}01 < x - 5 < 0{,}01$ *Se resta 5.*

$|x-5| < 0{,}01$ *Se expresa como valor absoluto.*

Fuente: tomado del libro Matemáticas 11, Ed. Santillana 1995.

Figura 6. (Continuación)



Fuente: tomado del libro Matemáticas 11, Ed. Santillana 1995.

Los conceptos *cerca* y *suficientemente cerca* son matemáticamente poco precisos. Por esta razón, se da una definición formal de límite que precisa estos conceptos. Lo importante es comprender que el formalismo no lo hacen los símbolos matemáticos, sino, la precisión con la que queda definido el concepto de límite. Esta notación es tremendamente poderosa, pues, nos dice que si el límite existe, entonces se puede estar tan cerca de él como se desee. Si no se logra estar lo suficientemente cerca, entonces la elección del no era adecuada. La definición asegura que si el límite existe, entonces es posible encontrar tal .

5.7.1.2. Sistema de Representación Algebraico

Se hace uso de notaciones y simbolismo algebraico asociados a funciones y el cálculo de límites se reduce a la aplicación de teoremas de límites y uso de algoritmos algebraicos, factorización, racionalización, uso de conjugadas y simplificaciones para obviar indeterminaciones. En esta categoría se encuentran la siguiente subcategoría:

Representación algebraica de función y sucesión: se llama representación algebraica cuando en el proceso del cálculo de un límite, se requiere el uso de procedimientos algebraicos como: factorización, racionalización, uso de conjugadas y simplificaciones para obviar indeterminaciones.

Ejemplo:

Figura 7. Representación algebraica de

2. Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

Solución:

Primero eliminamos la indeterminación:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.$$

Luego: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \dfrac{1}{4}$

Fuente: tomado del libro Matemáticas 11, Ed. Santillana 1995.

Para calcular el límite de la función:

En el ejemplo se acude a racionalizar el numerador para obviar la indeterminación y posteriormente ese evalúa el límite en el punto correspondiente.

5.7.1.3. Sistema de Representación Aritmético

En este ámbito se representan límites de sucesiones y están asociados a representaciones de números y sus operaciones. En esta categoría se encuentran las siguientes subcategorías:

Representación numérico-tabular de una sucesión: en esta dimensión la representación del límite se hace por medio de una tabla de valores en la que se expresan valores de la variable independiente y valores de la sucesión, con la intensión de mostrar la tendencia del límite.

Ejemplo:

Tabla 3. Aproximaciones para la suma de – – – — —,

n	s_n	s_n	$/1-s_n/$
1	½	0.5	0.5
2	¾	0.75	0.25
3	7/8	0.875	0.125
4	15/16	0.9375	0.0625
.	.	.	.
10	1023/1024	0.999023437	0.000976563
.	.	.	.
30		0.999999999	0.00000000093
...	.		

Fuente: tomado del libro Matemáticas 11, Ed. Santillana 1995.

La tabla 1 representa acercamientos infinitos numerables y sucesivos. Pero solo muestra el comienzo de una sucesión. Se construye con base en cálculos numéricos y se hace uso de la inducción incompleta, esto es, basta con tener un número finito de casos para sacar una conclusión.

Representación simbólico-específica de una sucesión: se da cuando se presenta un ejercicio de cálculo de límite de una sucesión de la forma

obteniendo así el límite .

Ejemplo: – ejemplo tomado del libro "Matemática 11" editorial Santillana (1995), p. 42.

La representación simbólico-especifica de una sucesión se evidencia de forma diferente en los ejemplos; mientras que en la representación simbólico-especifica de una función se evalúa en la función el valor al que tiende en la sucesión esta representación se constata de forma intuitiva como se observa en el ejemplo; por medio del comportamiento de la sucesión se concluye el valor al que tiende el límite.

Definición formal de una sucesión: en esta subcategoría aparece explicita la siguiente definición:

Una sucesión tiene límite si, para cada número positivo , existe un número positivo (que en general depende de) tal que,

– para todo (Medina A. 2001, p. 47)

Al introducir el cuantificador universal para implica una aproximación infinita y al tomar el acercamiento o distancia a , como una métrica, se reconoce la existencia de un conjunto infinito al exigir que se tomen todos los términos de la sucesión después de un . Pero en la definición formal estos procesos infinitos quedan encapsulados y no se identifican.

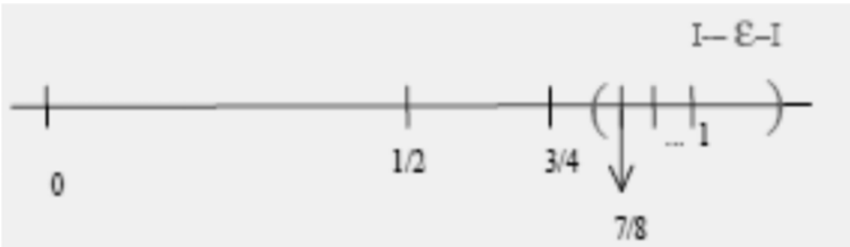
Representación verbal de una sucesión: en esta dimensión se presenta una descripción de la definición formal de sucesión sin el uso de símbolos que caracterizan la definición formal (como y los cuantificadores y) pero que están implícitos.

Ejemplo: "El límite de una sucesión es el número respecto al cual todos los términos de la sucesión, después de cierto punto varían solamente por un número pequeño y esto para todo " (Vinner, 1991, p. 78).

Representación de la recta real: en esta dimensión se usa la recta real para expresar el concepto de límite, ubicando puntos en la recta cada vez más próximos al punto limite siempre que n sea más grande.

Ejemplo:

Figura 8: representación del límite de la sucesión – —



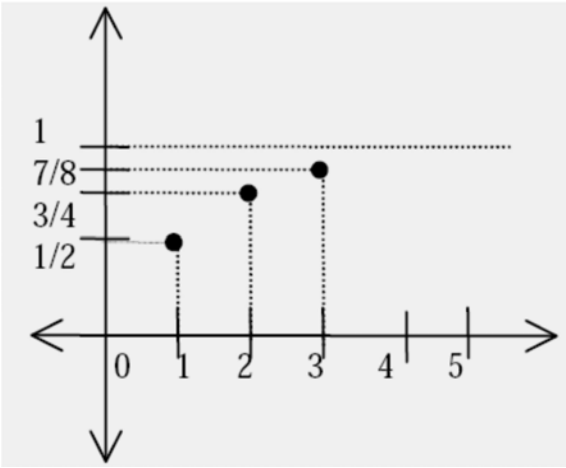
Fuente: tomado del libro Hipertexto 11, Ed. Santillana 2011.

La cercanía se mide con distancia o en forma más general, con métrica. Cualquier intervalo centrado en contiene una infinidad de los elementos de la sucesión y de hecho después de un valor contiene a todos los valores que le siguen. Se exige que se tomen todos los términos de la sucesión. Esto lleva a la idea de límite como aproximación infinita.

Representación cartesiana de sucesión: los valores de la iteración de la sucesión forman un conjunto discreto de puntos, quedando representada la sucesión como función.

Ejemplo:

Figura 9: Representación cartesiana de la sucesión – —



.

Fuente: tomado del libro Hipertexto 11, Ed. Santillana 2011.

Esta representación es de carácter global y muestra un punto de vista funcional. Los valores de la iteración de la sucesión forman un conjunto discreto de puntos, quedando representada la sucesión como función. Si no se considera intervalo de radio sobre el eje , porta la idea de aproximación finita, o acercamiento a la recta como medida de la distancia de los puntos a la recta. Y si se considera tal intervalo o vecindad, se asocia la idea de límite como aproximación infinita.

5.7.2. Aspecto Curricular

En este aspecto se presentan las categorías que hacen alusión a los estándares que se movilizan en el pensamiento numérico (P. NUM) y en el pensamiento variacional (P. VAR), que son los que se relacionan con el límite. Las subcategorías han sido designadas como indicadores de logro donde aparecen los temas relacionados con el límite. Aquí se debe identificar qué temas de los mostrados en cada subcategoría se movilizan en cada ejemplo.

5.7.2.1. Estándar: utilización de técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos (P. NUM)

Son cinco los tipos de contenidos que caracterizan esta categoría, a saber:

Interpreta y/o define gráficamente el límite de una función: se considera cuando en el ejemplo aparecen gráficas relacionadas con el límite de una función y sucesión donde se evidencian aproximaciones.

Determina el límite de una función por aproximación: se considera cuando en el ejemplo aparecen tablas con aproximaciones.

*Determina si existen, la ecuación de las asíntotas horizontales, verticales u oblicuas de una función**:*** se considera cuando en el ejemplo se localizan las asíntotas de la curva.

*Aplica la definición formal del límite**:*** esta definición proporciona un método para hallar el valor del límite de una función, pero se utiliza una vez se ha estimado este valor, para demostrar que en efecto es el límite verdadero.

*Aplica la definición verbal del límite**:*** se utiliza para explicar en forma menos formal la definición del límite, contextualizando las características de esta, con el objetivo de que su significado quede más explícito y sea más fácil de comprender.

5.7.2.2. Estándar: uso de propiedades y representaciones en los números naturales y reales en el cálculo del límite (P. VAR)

Son cinco los tipos de contenidos que caracterizan esta categoría, a saber:

Aplica propiedades algebraicas y evalúa límites de funciones: se considera cuando se aplican propiedades algebraicas como: asociativa, distributiva, de potenciación, de radicación, etc. y procesos como factorización, racionalización, uso de conjugadas, y simplificaciones para obviar indeterminaciones en el cálculo de límites y además cuando se realiza una sustitución directa que en este caso se denomina evaluación de límites para encontrar el valor del límite; esta sustitución se realiza en la variable independiente sustituyendo el valor al que tiende está en el límite.

*Calcula límites aplicando sus propiedades**:*** se considera cuando se utiliza las propiedades de los límites como: límite de una constante, adición y sustracción de límites, producto y cociente de límites, potencia de límites, para realizar cálculos de forma más económica.

Calcula límites infinitos y al infinito: en esta parte se deben considerar dos casos: el primero, son los límites infinitos, los cuales se refieren a la posibilidad de hacer $f(x)$ tan grande como se quiera, tomando a x suficientemente cercano a a**,** entonces,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty,$$

y el segundo, los límites al infinito, se refieren a problemas en los cuales; si f es una función definida en un intervalo abierto de la forma $(a, +\infty)$, decir que el límite de $f(x)$, cuando x tiende a mas infinito, es L, significa que si x crece sin cota (x es mayor que cualquier numero positivo), entonces los valores de $f(x)$ se aproximan a L, tomado del libro "Espiral 11" editorial Norma (2005), p. 146.

Calcula límites de funciones indeterminadas: Cuando después de evaluar el límite de una función en un punto "a", se obtiene una forma indeterminada como: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, etc. Se dice que el límite cuando la función tiende a éste punto es una "forma indeterminada". Para poder evaluar el comportamiento de la función en el punto "a", se debe hacer uso de reglas algebraicas tales como: la factorización, la racionalización, entre otras, de ésta manera se transforma la función original en una nueva, para luego evaluarla en este punto.

Calcula límites trigonométricos: se calcula límites de funciones trigonométricas utilizando identidades trigonométricas y operaciones algebraicas según se necesite.

5.8. Validación del instrumento de análisis

El primer instrumento se sometió al juicio de dos profesores de matemáticas y a un grupo de diez estudiantes de décimo semestre de Licenciatura en Matemáticas de las universidad de Nariño (Pasto), uno de los profesores que participó en la validación es especialista en el área de didáctica de las matemáticas en grado de maestría y ha sido profesor de la universidad de Nariño de estudiantes participantes en la asignatura de trabajo de grado I y II. El otro profesor es especialista en análisis de textos matemáticos en grado de doctorado y ha dirigido en la misma universidad, cursos de taller de enseñanza y seminario de énfasis, en donde participaron los estudiantes en cuestión.

En un primer momento se presentó el instrumento de análisis en un seminario de investigación al profesor especialista en análisis de textos matemáticos y a un grupo de cuatro estudiantes de los mencionados antes, quienes se encontraban realizando trabajos de tesis relacionados con el análisis de textos matemáticos, de esta primera exposición se obtuvieron los siguientes resultados:

- La propuesta inicial fue analizar los ejemplos en dos grupos: en el primer grupo se clasificaron los ejemplos que movilizan un sistema de representación, en el segundo grupo se clasificaron los ejemplos que movilizan dos sistemas de representación, pero esta clasificación no era pertinente dado que era estrictamente necesario analizar cada uno de los ejemplos antes de que estos fuesen agrupados, además dicha estructura no permitía obtener conclusiones al momento de realizar la clasificación. Un aporte significativo para la restructuración del instrumento fue que se debía incluir las facetas semiótica y curricular que posteriormente se designaron como categorías (Ver Anexo C).

Referente al planteamiento de las categorías y subcategorías del instrumento de análisis se propuso designar:

- En la faceta semiótica, como categorías los sistemas de representación y como subcategorías las diferentes representaciones presentes en cada sistema, y en la faceta curricular se propuso designar como categorías el logro relacionado con el concepto del límite y como subcategorías los indicadores de logro, tomados del libro de texto de hipertexto matemáticas de Santillana 11.

- En la faceta de lo *semiótico* se propuso designar las categorías (sistemas de representación) como subcategorías, y las subcategorías (diferentes representaciones) como dimensiones, dado que se debía tener en cuenta las facetas semiótica y curricular.

- En la faceta de lo *curricular* se propuso tomar los estándares curriculares relacionados con el límite como categorías y los indicadores de logro como subcategorías, dado que son los estándares curriculares que se movilizan en los libros de texto el objeto de este estudio y no los logros como se había considerado en un principio.

- En cuanto a la exposición de las diferentes categorías y subcategorías, se observó poca claridad. Para lo cual el aporte que se hizo fue redactar en un lenguaje menos técnico tanto las definiciones de las categorías como subcategorías y el planteamiento de un ejemplo de cada una cada de ellas. También se sugirió la exposición de un ejemplo de codificación con el fin de lograr mayor entendimiento de la actividad y de tal manera que los estudiantes puedan encontrar un modelo que les permita realizar la codificación de manera más eficiente.

- En cuanto al tiempo requerido para la codificación, se observó que se necesitaba más de dos horas para realizarla, por lo cual se plantearon dos sesiones de dos horas cada una, ya que era necesario efectuar un primer acercamiento con los estudiantes al contenido de cada ítem relacionado con la descripción de las categorías y subcategorías a considerar en la codificación de los ejemplos propuestos y luego realizar la codificación.

En un segundo momento, teniendo en cuenta las recomendaciones anteriores se envió vía correo electrónico un archivo que contenía toda la temática planteada en el instrumento de análisis, para que tanto el profesor especialista en didáctica de las matemáticas como el grupo de los ocho estudiantes pudiesen empaparse del tema con anterioridad, después se realizó una puesta en común por parte de las investigadoras, explicando detalladamente todo lo concerniente al instrumento de análisis, una vez expuestos los propósitos de la actividad los estudiantes efectuaron una segunda lectura en grupos, expusieron y aclararon sus dudas y en la segunda sesión realizaron el proceso de codificación (ver Anexo D). En esta ocasión se obtuvieron las siguientes sugerencias:

- En relación a la temática, a pesar de la explicación anterior y las adecuaciones que se hicieron para hacer más accesible la información aún se suscitaban muchas dudas con respecto al contenido de la información, por ejemplo: la representación algebraica se tendía a confundir con la representación simbólica-especifica, además se encontraron algunas incoherencias en la estructura del instrumento, para lo cual se planteó una mejor explicación del contenido de cada categoría determinando sus características fundamentales.

- Del mismo modo, se presentó confusión en la identificación de los sistemas de representación correspondientes al límite de funciones y de sucesiones, ya que no se explicitó que el sistema de representación aritmético estuviese relacionado con el límite de sucesión y de igual manera no se evidenciaba la relación del límite de función con el sistema de representación analítico. Para esto se designó específicamente el sistema de representación analítico para el límite de funciones y el sistema de representación aritmético para el límite de sucesiones, lo cual se fundamenta en la caracterización realizada por Medina (2001).

- En cuanto a la estructura del instrumento de análisis, se presentaron algunas inconvenientes en la compresión de la organización del mismo, pues esta no permitía diferenciar las distintas dimensiones, para lo que se delimitó cada una de las subcategorías y dimensiones presentes en el instrumento de análisis.

En un tercer momento, dado que en la primera codificación se obtuvo un porcentaje de coincidencias inferior al 80%, se hizo necesario realizar una nueva codificación con las correcciones anteriormente suscitadas tanto de estudiantes como profesores, para lo cual el instrumento se sometió nuevamente al juicio del mismo grupo estudiantes. En esta oportunidad los resultados de la aplicación fueron satisfactorios ya que se obtuvo un porcentaje de coincidencias superior al 80% (ver Anexo E)

Se aplicó el instrumento de análisis que aparece en el Anexo B, a los cuatro libros de texto que conformaron la muestra y la clasificación obtenida constituyó los datos para el estudio.

6. ANÁLISIS DE DATOS

En este capítulo se realiza el análisis de cada una de las categorías planteadas en la metodología. La primera categoría se analiza en todos los libros y de igual manera las demás categorías, luego, se hace un contraste entre algunas de las categorías en cada libro, dependiendo de las variables que se tienen en cuenta; posteriormente, se determina los estándares de calidad de matemáticas que se desarrollan en los manuales escolares al construir el concepto de límite.

Para esto se tuvo en cuenta la siguiente codificación de cada una de las categorías y subcategorías, que resulta adecuada y cómoda a la hora del análisis.

Tabla descriptiva 4. Codificación de las categorías de análisis

Categorías	Codificación
Sistema de representación analítico del límite de una función.	S.R. analítico
Sistema de representación algebraico del límite de una función.	S.R. algebraico
Sistema de representación aritmético del límite de una sucesión.	S.R. aritmético
Utilización de técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.	E. 1
Uso de propiedades y representaciones en los números naturales y reales en el cálculo del límite.	E. 2

Fuente: tomado de la investigación.

Tabla descriptiva 5.Ccodificación subcategorías del S.R. analítico

Subcategorías	Codificación
Numérico-tabular	R1F
Gráfica-cartesiana	R2F
Simbólico-especifica	R3F
Definición verbal	R4F
Definición formal	R5F

Fuente: tomado de la investigación.

Tabla descriptiva 6. Codificación subcategorías del S.R. algebraico

Subcategorías	Codificación
Algebraico	R6F

Fuente: tomado de la investigación.

Tabla descriptiva 7. Codificación subcategorías del S.R. aritmético

Subcategorías	Codificación
Numérico-tabular	R1S
Gráfica-cartesiana	R2S
Simbólico-especifica	R3S
Definición verbal	R4S
Definición formal	R5S

Fuente: tomado de la investigación.

Las subcategorías del estándar "utilizar técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos" se codificaron así:

Tabla descriptiva 8. Codificación subcategorías del E.1

Subcategorías	Codificación
Determina el límite de una función por aproximación.	ILA1
Interpreta y/o define gráficamente el límite de una función.	ILA2
Determina si existen, la ecuación de las asíntotas horizontales, verticales u oblicuas de una función.	ILA3
aplica la definición formal del límite	ILA4
aplica la definición verbal del límite	ILA5

Fuente: tomado de la investigación.

Las subcategorías del estándar "usar propiedades y representaciones en los números naturales y reales en el cálculo del límite" se codificaron así:

Tabla descriptiva 9. Codificación subcategorías del E.2

Subcategorías	Codificación
Aplica propiedades algebraicas y evalúa límites de funciones.	ILB6
calcula límites aplicando sus propiedades	ILB7
Calcula límites infinitos.	ILB8
Calcula límites de funciones indeterminadas	ILB9
Calcula límites trigonométricos.	ILB10

Fuente: tomado de la investigación.

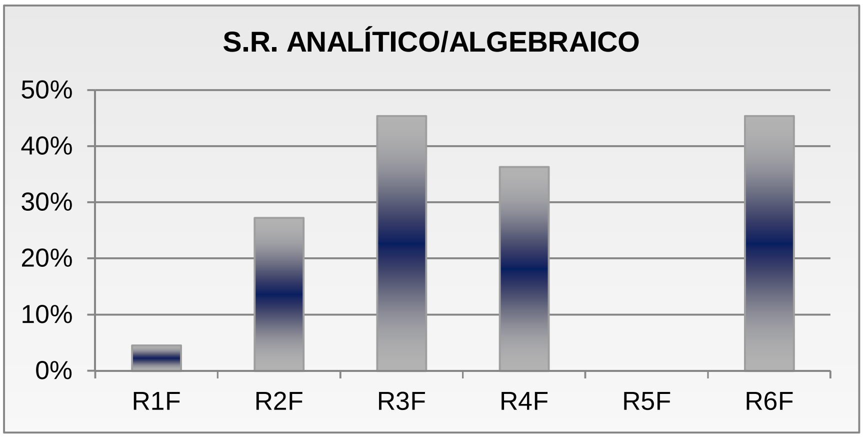
A continuación se presentan los histogramas de frecuencia de cada una de las categorías y en cada uno de los libros, en donde se toman en cuenta las características más relevantes de estas.

6.1. LIBRO DIMENSIÓN MATEMÁTICA 11 EDITORIAL NORMA, 1997

6.1.1. Sistema De Representación Analítico/Algebraico

En este apartado se realiza el análisis de datos del libro de texto “Dimensión Matemática 11” de la editorial Norma 1997 y en él las siguientes categorías: “Sistema de Representación Analítico”, “Sistema de Representación Algebraico”, “Sistema de Representación Aritmético” y los estándares E1 y E2; además se hace la comparación entre los diferentes sistemas de representación, las representaciones que pertenecen a estos, indicadores de logro presentes en cada uno de los estándares e indicadores de logro presentes en los dos estándares. Para esto se presenta un histograma de frecuencias del sistema; iniciando el análisis con el “Sistema de Representación Analítico-Algebraico”:

Gráfica 1. Porcentaje de representaciones presentes en los ejemplos en los S.R analítico y algebraico



Fuente: tomado de la investigación.

En la gráfica 1 se observa que la “representación simbólico-específica” (R3F), presenta un porcentaje de 45% de ejemplos, en los que se evalúa límites de funciones realizando sustituciones del valor al que tiende la variable independiente en la función correspondiente, este proceso conlleva a varias opciones; en algunos ejemplos se puede evaluar el límite directamente y obtener un valor, en otros, al evaluar se llega a una indeterminación como $0/0$, ∞/∞, etc, donde se procede a factorizar para obviar la indeterminación y así encontrar el límite buscado, en otros ejemplos, al evaluar el límite, en ocasiones se llega a que este no existe; en otros ejemplos, se evalúa en la función los acercamientos de la variable independiente, asignándole valores a x tanto por derecha como por izquierda, consignados en tablas de tal forma que se pueda evidenciar el límite a partir de la observación de las aproximaciones de la variable dependiente e independiente, sin necesidad de calcular el límite por sustitución directa. El límite de cuando no depende del valor de *f* en puesto que puede no pertencer al dominio de *,* y sin embargo existir en dicho punto.

Con respecto a los ejemplos de límites de funciones circulares o trigonométricas, se realiza evaluación directa de los ángulos a los que tiende la variable independiente y se factoriza para obviar indeterminaciones. Cabe aclarar que los ejemplos a los que se hace referencia también presentan otras representaciones simultáneamente. Para el desarrollo de los límites circulares o trigonométricos se tiene en cuenta teoremas como:

ó

;

más adelante se analiza en detalle este tipo de límites, que son fundamentales a la hora de calcular ejemplos que involucran funciones trigonométricas.

La “representación algebraica” presenta el mismo porcentaje que la “representación simbólico-especifica”; en estos ejemplos se aplica procesos algebraicos como: factor común, racionalización, factorización de funciones para obviar indeterminaciones, división de polinomios, simplificaciones, etc.

Es de resaltar que la “definición formal” no aparece en ninguno de los ejemplos que se plantean en el libro; lo cual en alguna forma es una desventaja ya que es necesario que todo proceso algorítmico se formalice y más aún sea verificado con una regla general, lo cual es el objetivo que se busca al aplicar la definición formal.

Contrario a esto, “la definición verbal” que hace referencia al uso de símbolos que caracterizan la definición formal, como ε y y los cuantificadores y (pero que están implícitos) posee un porcentaje 36%, esto es bastante significativo e implica que sí se está haciendo una contextualización de los ejemplos que se plantean, permitiendo así una mayor compresión de estos.
La “representación numérico-tabular” (R1F) posee un porcentaje de 5%, donde el límite se obtiene a partir de tablas con aproximaciones al punto al que tiende la variable independiente, tanto por derecha como por izquierda, es decir, sin necesidad de realizar una sustitución directa, se obtiene el valor del límite.

Figura 10. Representación numérico-tabular de la función

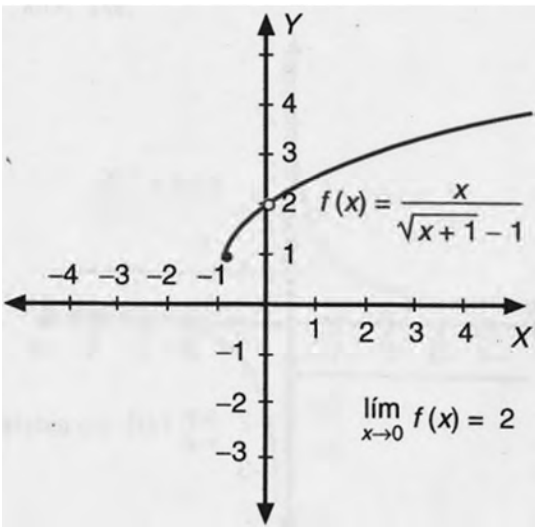
	$x \to 0^-$					$0^+ \leftarrow x$			
x	−0.1	−0.01	−0.001	−0.0001	...	0.0001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	1.9487	1.9950	1.9995	1.9999	...	2.0001	2.0005	2.0050	2.0488
	$f(x) \to 2$					$2 \leftarrow f(x)$			

Fuente: tomado de la investigación.

En un ejemplo aparece la "representación gráfica-cartesiana" (ver figura 7), en donde a partir de los datos que arroja la tabla, se observan las tendencias de las variables dependiente e independiente tanto por derecha como por izquierda, evidenciándose, que a medida que , y a medida que la función , concluyendo que el límite es 2; este ejemplo se basa además, en la "representación simbólico-especifica", que como ya se ha mencionado, es un gran apoyo a la hora de analizar la tendencia de un límite.

La "representación gráfica-cartesiana" (R2F) posee un porcentaje de 27%; las gráficas que presenta el texto se toman como un apoyo para calcular el límite, en donde se intenta describir gráficamente el acercamiento de la variable dependiente a un valor, cuando la variable independiente se acerca a otro, tanto por derecha como por izquierda, además, no aparecen de manera explícita los acercamientos, solo se presenta la curva de la función. En el ejemplo (ver figura 8) se describe una función racional que no está determinada en el punto al que tiende el límite, al igual que en el ejemplo 5; que expone una función a trozos, en las dos funciones el límite existe y es igual a 2 y en los ejemplos 19, 20 y 22 usa las gráficas de las funciones para evidenciar las asíntotas: horizontal, vertical y oblicua.

Figura11. Ejemplo de representación gráfica-cartesiana
De la función



Fuente: tomado de la investigación.

Con relación a los ejemplos de límites al infinito, a veces es importante conocer el comportamiento de una función f(x) cuando x se hace arbitrariamente grande con valores positivos, que se indica, $x \to +\infty$, o cuando x toma valores negativos con valor absoluto arbitrariamente grande, que se indica, $x \to -\infty$; también puede suceder que cuando $x \to +\infty$ ó $x \to -\infty$ una función tienda a ser grande y positiva o se mantenga así, o arbitrariamente pequeña y negativa, es decir

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \text{ ó}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \text{ ó}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

en tales casos el límite no existe, pues ∞ y $-\infty$ no son números reales. En el caso de los límites infinitos, no se realiza la evaluación directa, puesto que la función se acerca a la asíntota vertical por la derecha como por la izquierda, pero no la interseca.

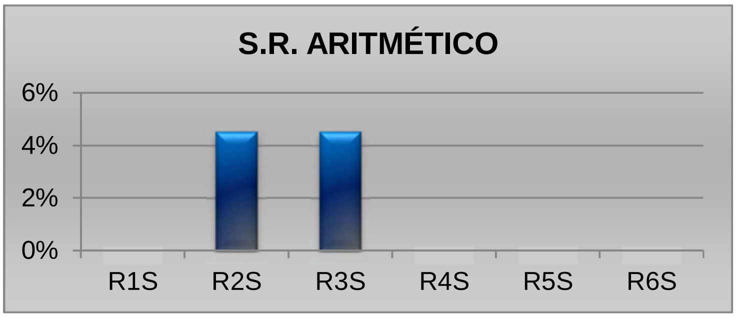
En resumen, los ejemplos que presenta el libro son bastante significativos y no tienen tendencia algorítmica, como generalmente se suelen presentar; en los libros de texto escolares, su gran mayoría presenta buenos y variados ejemplos que incluyen las representaciones: “gráfica-cartesiana”, “simbólico-específica”, “algebraica” y “la definición verbal”; se presentan la mayoría de ejemplos, de manera explicativa y analítica, mostrando propiedades y características, tanto de las funciones como de los límites que se calculan.

Cabe aclarar, que los “Sistemas de Representación Analítico y Algebraico” se analizaron en el instrumento de análisis en el texto de manera separada, sin embargo, para facilidad del análisis de los datos y dado que el sistema de representación algebraico posee una sola subcategoría, se presentó un histograma de frecuencias que reúne los dos sistemas de representación.

6.1.2. Sistema de Representación Aritmético

A continuación se presenta el análisis del sistema de representación aritmético:

Gráfica 2. Porcentaje de representaciones presentes en los ejemplos en el S.R aritmético

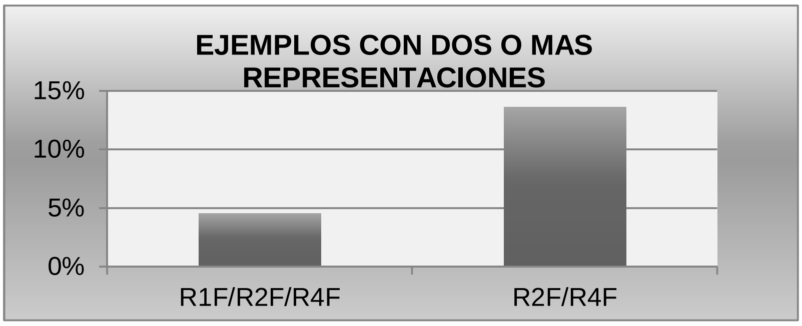


Fuente: tomado de la investigación.

Como se puede observar en la gráfica 2, el porcentaje de incidencia de la "representación simbólico-específica" y la "definición verbal" es el mismo y corresponde a un 5%; en el primer ejemplo se muestra una sucesión oscilante, en el segundo ejemplo se hace alusión a una sucesión divergente, es decir, el límite cuando no existe y en el tercer ejemplo se presenta una sucesión convergente, es decir, el límite cuando , existe y es igual a –, las representaciones "numérico-tabular", "gráfica-cartesiana", de la "recta real" y la "definición formal" no se desarrollan en los ejemplos del texto; esto hace evidente que los ejemplos relacionados con el límite de sucesiones, sea muy pobre y dado que el límite de una sucesión es uno de los conceptos más antiguos del análisis matemático, se debería incluir en el texto de manera más profundizada permitiendo al lector una mayor comprensión del concepto.

Hasta aquí se analizaron las representaciones del "Sistema de Representación Analítico, Algebraico y Aritmético", pero también es preciso señalar que en el texto se presentan ejemplos que movilizan más de una representación en el mismo sistema, al igual que más de un sistema de representación en el mismo ejemplo, por esta razón se presenta a continuación el histograma que muestra; en primer lugar aquellos ejemplos que relacionan dos o más representaciones en un mismo ejemplo

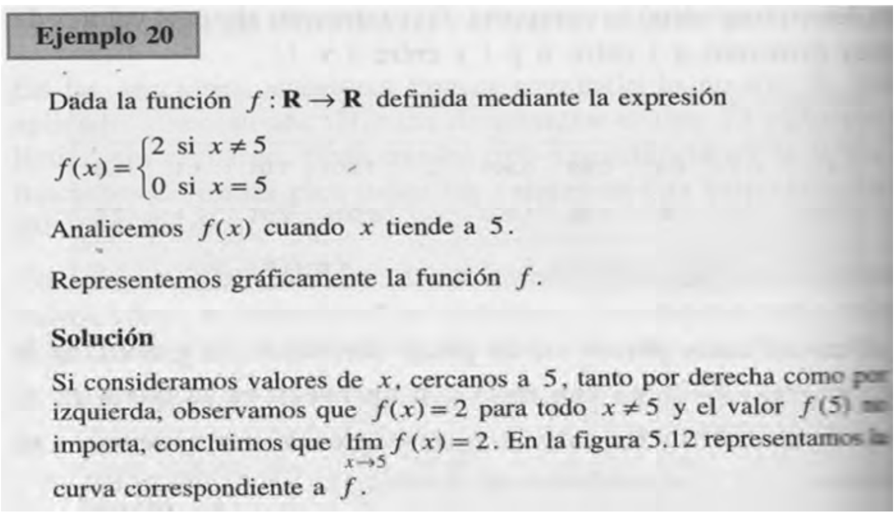
Gráfica 3. Porcentaje de ejemplos con dos o más representaciones



Fuente: tomado de la investigación.

El porcentaje correspondiente a estos ejemplos es de 14% y aunque no es muy significativo, aporta información relevante. En este texto aparecen en total 4 ejemplos con dos o más representaciones, de los cuales tres movilizan las representaciones: "gráfica-cartesiana" y "definición verbal", el primero de ellos se presenta al introducir el límite (ver figura 9), donde se plantea una función a trozos, y se analiza cuando tiende a , en él considera valores tanto por derecha como por izquierda, donde se concluye que el límite de dicha función existe, y se apoya en la representación gráfica para mirar la tendencia de la función. Los otros dos ejemplos conciernen a límites infinitos en uno de ellos se calcula el límite infinito de una función polinomial, analizado cuando y cuando , aquí la gráfica de la función es un apoyo fundamental a la hora de analizar las tendencias de la variable independiente (Ver figura 10). En el otro se encuentra la asíntota vertical de una función racional cuyo denominador se hace cero en el punto donde (ver figura 11).

Figura12. Representaciones: gráfica-cartesiana y definición verbal de



Ejemplo 20

Dada la función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida mediante la expresión

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \neq 5 \\ 0 & \text{si } x = 5 \end{cases}$$

Analicemos $f(x)$ cuando x tiende a 5.

Representemos gráficamente la función f.

Solución

Si consideramos valores de x, cercanos a 5, tanto por derecha como por izquierda, observamos que $f(x) = 2$ para todo $x \neq 5$ y el valor $f(5)$ no importa, concluimos que $\lim_{x \to 5} f(x) = 2$. En la figura 5.12 representamos la curva correspondiente a f.

Figura 12. (Continuación)

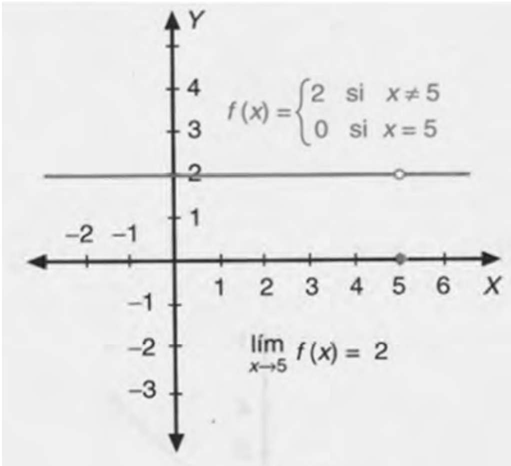


Figura 5.12

Fuente: tomado del libro Dimensión 11, Ed. Norma 1997.

Figura 13: representaciones: gráfica-cartesiana
y definición verbal de

Ejemplo 24

Encontremos $\lim_{x \to \infty} (2 + 3x^2 - x^3)$ y $\lim_{x \to -\infty} (2 + 3x^2 - x^3)$.

Solución

Si extraemos en $f(x)$ como factor el término que contiene la máxima potencia de la variable x, obtenemos:

$$\lim_{x \to \infty} \left[-x^3\left(-\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x} + 1\right)\right].$$

Cuando $x \to \infty$, el factor $-x^3 \to -\infty$ y el otro factor se aproxima a 1. En consecuencia, $\lim_{x \to \infty} (2 + 3x^2 - x^3) = -\infty$.

Si hacemos que x tienda a $-\infty$, entonces $-x^3 \to +\infty$ y el segundo factor nuevamente tiende a 1. Entonces, $\lim_{x \to \infty} (2 + 3x^2 - x^3) = \infty$.

El significado de las expresiones anteriores las representamos en la figura 5.16. La curva baja o desciende indefinidamente cuando $x \to \infty$ y sube indefinidamente cuando $x \to -\infty$.

Figura 13. (Continuación)

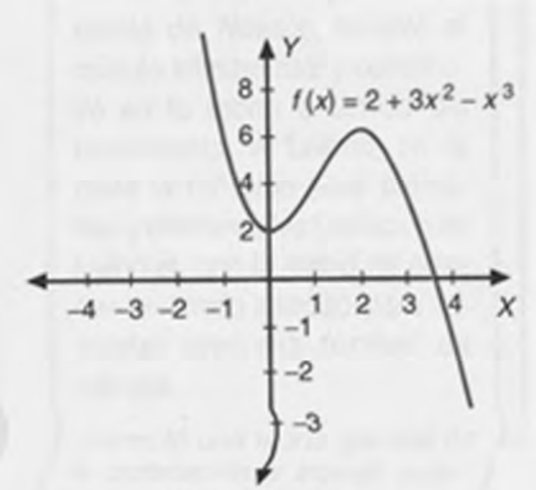


Figura 5.16

Fuente: tomado del libro Dimensión 11, Ed. Norma 1997.

Figura 14. Representaciones: gráfica-cartesiana y Definición verbal de

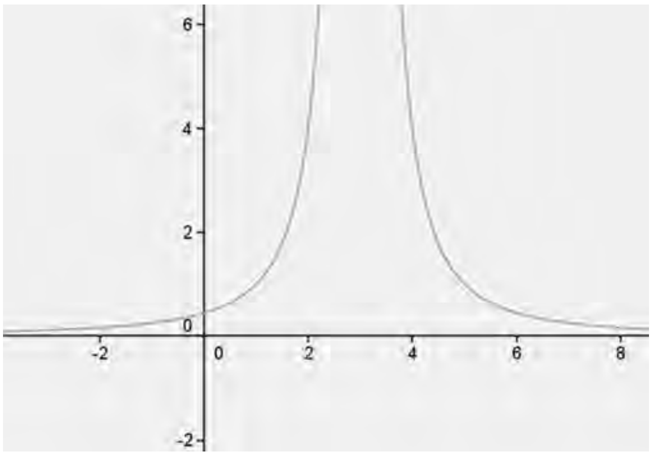
Consideremos la función $f(x) = \dfrac{4}{(x-3)^2}$ y evaluemos $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4}{(x-3)^2}$.

Cuando x se aproxima al valor 3 tanto por la derecha, $(x \to 3^+)$, como por la izquierda, $(x \to 3^-)$, $(x-3)^2$ es un número positivo cada vez más pequeño, o, lo que es lo mismo, $(x-3)^2 \to 0$. Por tanto, $\dfrac{4}{(x-3)^2}$ es un número real positivo que crece sin límite.

En consecuencia, $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4}{(x-3)^2} = \infty$.

Geométricamente, esto significa que la curva representativa de $\dfrac{4}{(x-3)^2}$ que se muestra en la figura 5.19 se acerca tanto por la derecha como por la izquierda a la recta de ecuación $x = 3$, pero no la interseca. Esta línea recta es llamada una *asíntota vertical* de la curva.

Figura 11. (Continuación)

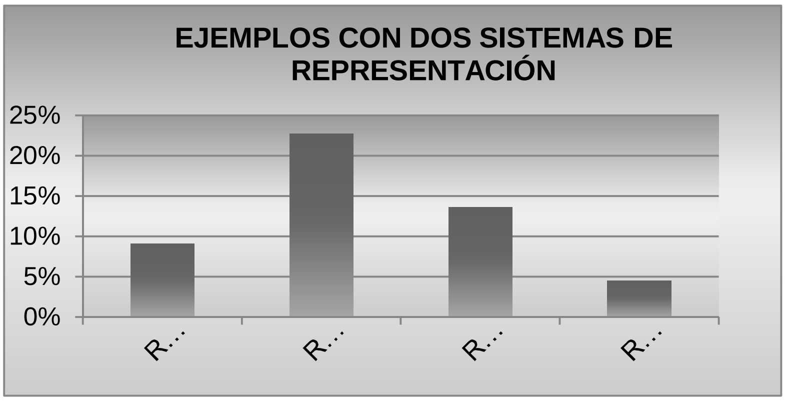


Fuente: tomado del libro Dimensión 11, Ed. Norma 1997..

El otro ejemplo posee un porcentaje de 5% y moviliza las presentaciones: “numérico-tabular”, “gráfica-cartesiana” y “definición verbal”; es importante mencionar que este ejemplo, se apoya en primer lugar, en la representación numérico-tabular para estimar el valor del límite, luego en la gráfica de la función, se muestra el punto , en donde la función tiene un hueco, y partir de las dos representaciones y usando la definición verbal, concluye que el valor que se puede estimar para es 2.

En segundo lugar, se muestra el histograma que desarrolla aquellos ejemplos que relacionan dos sistemas de representación en un mismo ejemplo:

Gráfica 4. Porcentaje de ejemplos con dos sistemas de representación



Fuente: tomado de la investigación.

El porcentaje de ejemplos que movilizan la “representación simbólico-Específica y algebraica” corresponde a un 2%; la característica que distingue a estos ejemplos es que son de tipo algorítmico, pues como ya se ha mencionado la “representación simbólico-especifica” hace referencia a la evaluación del límite en un punto y la representación algebraica se aplica cálculos algebraicos para estimar el límite.

En cuanto a los ejemplos que movilizan tres representaciones se destacan tres de ellos, los cuales presentan los procesos algorítmicos usuales y adicionalmente una descripción verbal; los tres ejemplos tratan funciones racionales que incluyen expresiones radicales, por lo cual se aplican procesos de racionalización, factorización y simplificación. En 2 de los 22 ejemplos se plantean: la “representación gráfica-cartesiana” y la “representación algebraica”; en ellos se desea calcular las asíntotas horizontal y oblicua; se hace uso de la gráfica de la función, lo cual ayuda a visualizar de mejor manera el papel que juega el límite dentro de la representación gráfica. Además es importante mencionar que según Blázquez (2000)[20] es muy relevante y de gran importancia la exposición de este tipo de ejemplos, pues el manejo varios sistemas de representación contribuye a la comprensión de los conceptos; ya que brinda una amplia perspectiva de las propiedades y características de cada concepto, y así apreciarlo desde diferentes ópticas.

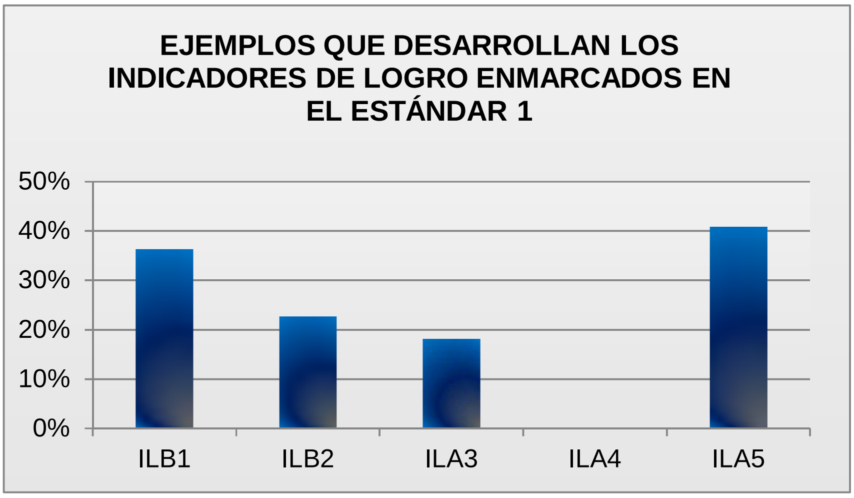
A continuación se analiza el aspecto semiótico, el cual se compone de dos categorías que se han descrito como E1 (estándar 1) y E2 (estándar 2).

6.1.3. Estándar E1

En cuanto al primer estándar (E1), el histograma que resultó de la codificación de los datos es el siguiente:

[20] Blázquez, S. y Ortega, T. (2001): « *Los sistemas de representación en la enseñanza del límite* ». *ICME-8, Sevilla.* Grupo Editorial Iberoamericana SA de CV. Capítulo XIII, 331-354.

Gráfica 5. Porcentaje de los ejemplos que desarrollan los indicadores de logro enmarcados en el estándar 1 (E1).



Fuente: tomado del libro Dimensión 11, Ed. Norma 1997.

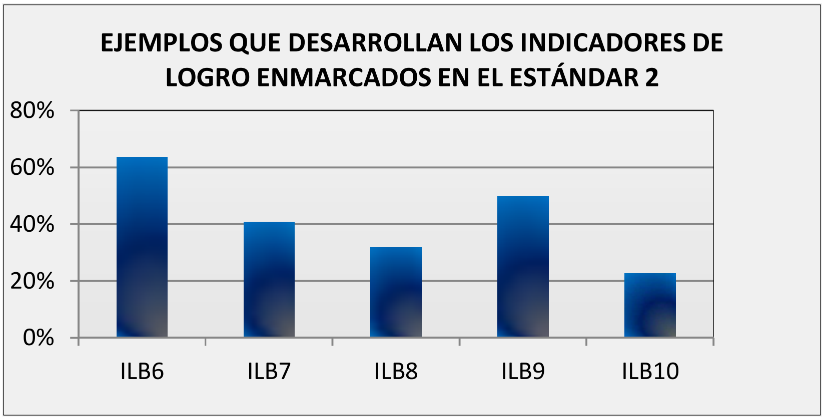
Como ya se ha mencionado el estándar E1 se refiere a la "utilización de técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos" el cual se enmarca en el pensamiento variacional; según la figura 5 el porcentaje con mayor significación es el que corresponde a la determinación del límite de una función por aproximación, con un 41%, en ellos, solo uno corresponde al límite de sucesiones, el resto conciernen a límites de funciones: racionales, por partes y radicales; los cuales se apoyan en aproximaciones por medio de tablas y de gráficas.

En cuanto a la "definición formal" del límite se observa ausencia total en el texto lo cual permite analizar que, por un lado, el tratamiento del límite por medio de la definición verbal es más accesible para el lector, y por otro lado, al utilizar en la definición verbal expresiones como "la variable se aproxima al límite" sufre ambiguas ideas de tiempo y movimiento, es así como la aplicación de la definición formal permite evolucionar entre la idea dinámica de límite (como un proceso) hacia la idea estática de límite (como un objeto).

6.1.4. Estándar E2

En cuanto al segundo estándar (E2), el histograma que resultó de la codificación de los datos es el siguiente:

Gráfica 6. Porcentaje de los ejemplos que desarrollan
los indicadores de logro enmarcados en el estándar 2 (E2).



Fuente: tomado del libro Dimensión 11, Ed. Norma 1997.

De los ejemplos que se muestran en el libro, el tema que más aparece es la aplicación de propiedades algebraicas y la evaluación de límites de funciones, de ellos, solo uno es de límite de sucesiones y los trece restantes son de límites de funciones; de estos últimos, 10 evalúan límites, en su mayoría usando algún tipo de simplificación algebraica, y solo algunos por sustitución directa, y tres ellos aplican algún tipo de análisis algebraico o analítico para obtener el límite, dado que se trata de límites al infinito.

El tema que aparece en menor proporción es el de los límites trigonométricos, con un porcentaje de 23%; en cuanto este tipo de límites se tiene en cuenta para su desarrollo, dos límites especiales que se analizan por medio de la representación numérico-tabular, planteando dos tablas; en la primera analiza que la función

tiende al valor 1 cundo x tiende al valor cero, concluyendo que,

y en la otra tabla, considera que la función

tiende a cero cuando x tiende a cero, deduciendo que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(kx)}{ka} = 0$$

Estos dos hechos se generalizan en el teorema 4 del texto para

$$f(x) = \frac{sen(kx)}{kx}$$

$$\text{y } f(x) = \frac{1 - cos(kx)}{kx}$$

de la siguiente manera:

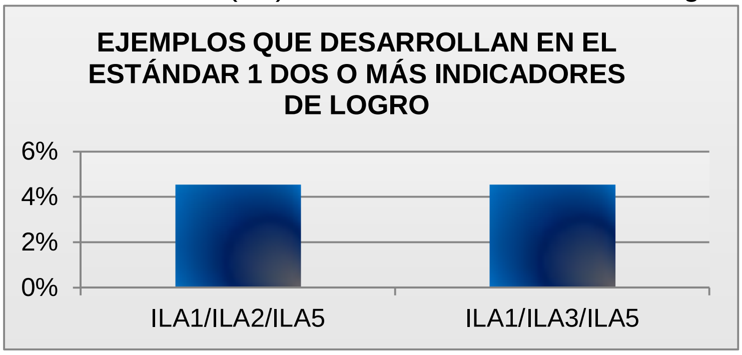
$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(kx)}{ka} = 1, donde\ kx \neq 0, k \in R$$

$$\text{Y } \lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(kx)}{ka} = 0, donde\ kx \neq 0, k \in R$$

A partir de estos dos límites, refiere los seis ejemplos que en él aparecen, en uno de los ejemplos aplica una identidad trigonométrica y luego aplica el límite y en general se realiza el proceso de sustitución directa en casi todos los ejemplos.

Otro aspecto que arrojó el estudio del instrumento de análisis, es lo relacionado con los ejemplos que desarrollan en su contenido más de una tema, pues como ya se ha mencionado, las subcategorías que corresponden a los indicadores de logro, se tomaron en los libros de texto como los temas que se desarrollan en los mismos. Así se presenta el siguiente histograma para el estándar E1:

Gráfica 7. Porcentaje de los ejemplos que desarrollan en el estándar 1 (E1) dos o más indicadores de logro.



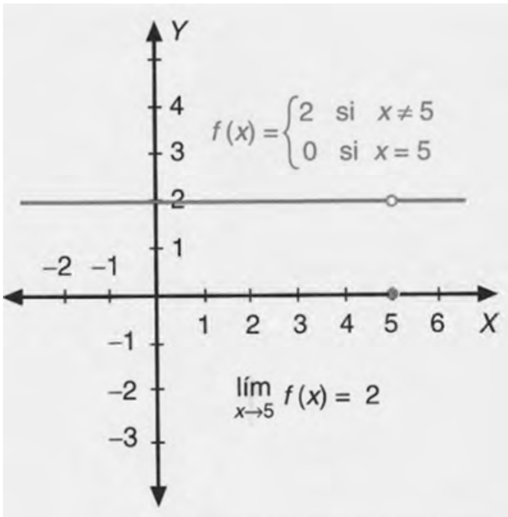
Fuente: tomado del libro Dimensión 11, Ed. Norma 1997.

La gráfica muestra que existe un 5% de ejemplos que desarrollan en su contenido dos o más temas; en uno de los ejemplos se movilizan los indicadores ILA1, ILA2 e ILA5; se aplica la definición verbal del límite, lo cual conlleva a determinarlo usando aproximaciones, y se apoya en la representación gráfica de la función para realizar la interpretación respectiva de la función

La función que se plantea en estos ejemplos es

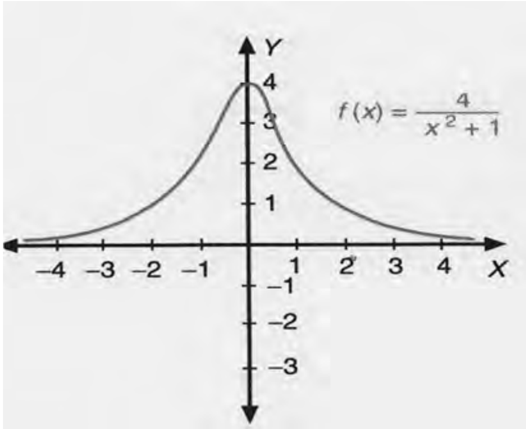
En donde analiza la función cuando tiende a , considerando valores cercanos a tanto por derecha como por izquierda, apoyado en primer lugar en su representación gráfica (ver figura 12). Este ejemplo aporta buena información para el lector por que le permite identificar características tanto de las funciones como del límite mismo.

Figura 15. Representación gráfica-cartesiana de la función



Fuente: tomado del libro Dimensión 11, Ed. Norma 1997.

Figura 16. Ejemplo de representación gráfica-cartesiana



Fuente: tomado del libro Dimensión 11,

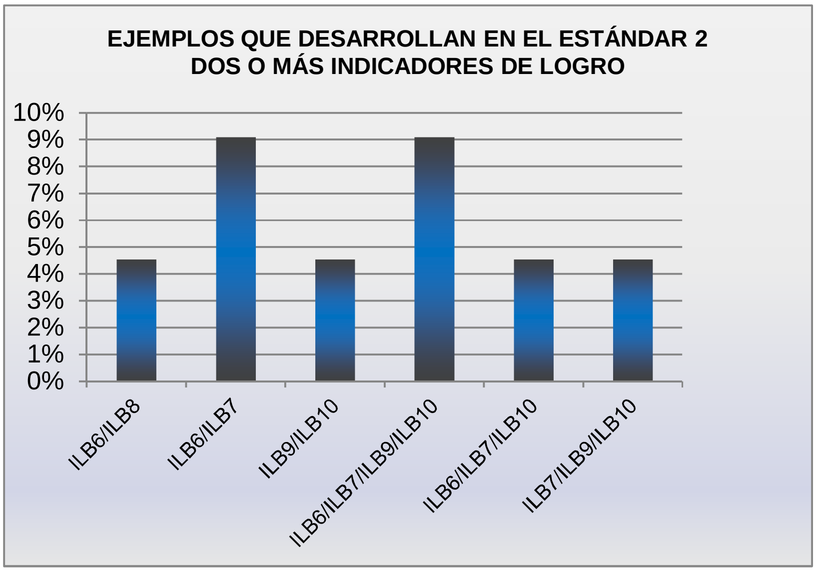
Ed. Norma 1997.

En cuanto al otro ejemplo, considera la función que se muestra en la gráfica (ver figura 13) y evalúa:

Analiza los acercamientos a por derecha y por izquierda; en este ejemplo, la gráfica es fundamental para su comprensión, porque se logra observar la tendencia de la función y por ende la tendencia del límite, que en este caso se aproxima hacia el infinito.

Para el estándar E2 se presenta la siguiente gráfica:

Gráfica 8. Porcentaje de los ejemplos que desarrollan en el estándar (E2) dos o más indicadores de logro.



Fuente: tomado de la investigación.

Al comparar los ejemplos del estándar 2 con los ejemplos del estándar 1, se nota un aumento considerable; esto se debe, según los resultados de las representaciones y sus sistemas, a que varios de los ejemplos son de tipo procedimental más que analítico. Por ejemplo, en la gráfica 8 se observan dos barras con porcentaje de 9%; en una de ellas se movilizan dos indicadores relacionados con propiedades de límites y aplicación de propiedades algebraicas; en la otra barra con igual porcentaje se movilizan 4 indicadores de logro; estos ejemplos corresponden a funciones trigonométricas, en los que se aplican identidades trigonométricas, y se hace uso de propiedades algebraicas para obviar indeterminaciones para proceder luego a evaluar el límite.

También hay otros 4 ejemplos que desarrollan dos o más temas, como es el caso del ejemplo 3, que refiere a límite de sucesiones; en donde se hace uso de los límites en el infinito y propiedades algebraicas para su solución, en otro ejemplo que corresponde a funciones trigonométricas, se desarrollan tres indicadores de logro, que tiene que ver con la aplicación de propiedades algebraicas para obviar indeterminaciones.

Por último, al igual que se analizó en los ejemplos aquellos que involucran en su desarrollo dos sistemas de representación, también es pertinente analizar los indicadores de logro de uno y otro estándar.

Gráfica 9. Porcentaje de ejemplos que desarrollan indicadores de logro en los estándares E1 y E2.

Fuente: tomado de la investigación.

Estos ejemplos se caracterizan por involucrar en su desarrollo dos o más indicadores de logro presentes tanto en el estándar 1, como en el estándar 2. Hay un porcentaje de 9% de ejemplos que contiene 5 indicadores de logro, los cuales se encuentran en el tema de cálculo funciones; se realiza un acercamiento a su solución usando la definición verbal y aplicando propiedades de los límites y propiedades algebraicas de las funciones.

Se presenta un porcentaje de 5% de ejemplos que utilizan para su desarrollo los indicadores ILA5 e ILB8, es decir, se aplica la “definición verbal”, para estimar el valor de un límite infinito. Hay también huy 5% de ejemplos que involucran en su desarrollo los indicadores de logro ILA1, ILA2, ILB6, ILB9, en la figura 14 que se muestra a continuación, se puede observar en detalle los temas que moviliza y su relevancia en la estimación del límite.

Figura 17: estimación del

Ejemplo 19

Consideremos la función $f : x \to \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ definida en el conjunto de todos los números reales $x \geq -1$ y $x \neq 0$.

Evaluemos a $f(x)$ en varios puntos próximos a $x = 0$, acercándonos lateralmente por derecha y por izquierda y usemos la tabla obtenida para representar gráficamente la función y para estimar el límite.

Solución

Damos a x valores -0.1, -0.01, -0.001 y -0.0001 muy próximos a 0 por la izquierda y nos acercamos a 0 por la derecha dando a x los valores 0.1, 0.01, 0.001 y 0.0001, para los cuales los valores de $f(x)$ se muestran en la siguiente tabla.

	$x \to 0^-$					$0^+ \leftarrow x$			
x	−0.1	−0.01	−0.001	−0.0001	...	0.0001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	1.9487	1.9950	1.9995	1.9999	...	2.0001	2.0005	2.0050	2.0488
	$f(x) \to 2$					$2 \leftarrow f(x)$			

En la figura 5.11 representamos la curva correspondiente a $f(x)$ la cual en el punto $(0, 2)$ tiene un hueco. La tabla dada y la curva nos muestran que el valor que podemos estimar para $\lim_{x \to 0} f(x)$ es 2.

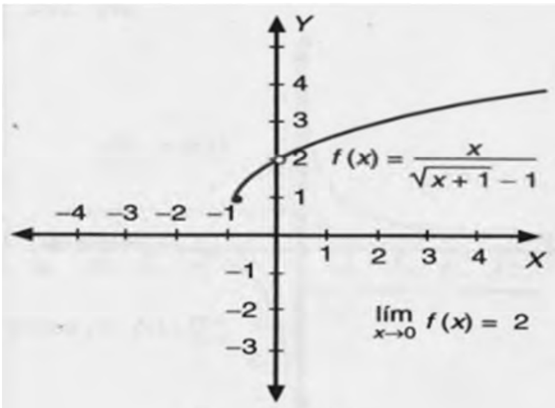


Figura 5.11

Fuente: tomado del libro Dimensión 11, Ed. Norma 1997.

En la gráfica 9 se evidencia un 5% de ejemplos que contienen los indicadores ILA1, ILA5, ILB6, ILB9, en la figura 15, que se muestra a continuación, se evidencia explícitamente los logros que se menciona:

Figura 18: estimación del límite ——

Ejemplo 22

Dada la función $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$, $x\neq 2$; observamos que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no puede calcularse directamente, puesto que $f(2)$ no existe. Sin embargo, para valores de x muy próximos a 2 se tiene que $x-2\neq 0$; por tanto, podemos transformar a $f(x)$ en la función $g(x)=x^2+2x+4$, la cual coincide con $f(x)$ en todos los valores reales, $x\neq 2$.

En efecto:

$$\frac{x^3-8}{x-2}=\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{x-2}}=x^2+2x+4 \text{ para } x\neq 2.$$

Luego $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2} x^2+2x+4=\lim\limits_{x\to 2} g(x)=g(2)=12$.

Fuente: tomado del libro Dimensión 11, Ed. Norma 1997.

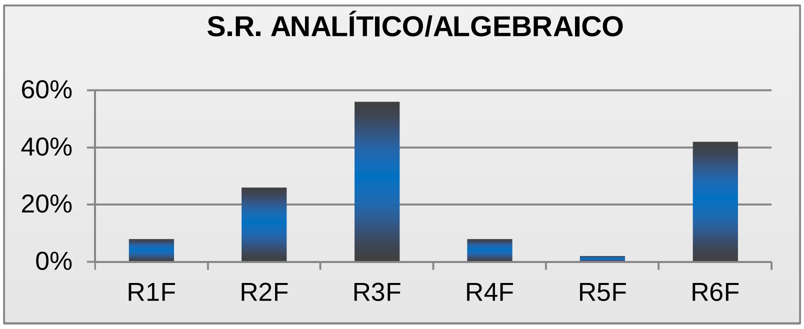
A partir de lo que se observa en las figuras y en la gráfica 9, se puede concluir que el texto sí toma en consideración; al momento de plantear y desarrollar los ejemplos, las diferentes temáticas que plantean los estándares E1 y E2, además, se hace un uso adecuado de las temáticas que los indicadores de logro proponen para el desarrollo de los temas. Con esto, el texto permite a los lectores una mejor aproximación a una de los conceptos más abstractos y difíciles al introducir el cálculo infinitesimal.

6.2. LIBRO ESPIRAL 11 EDITORIAL NORMA 2005

6.2.1. Sistema De Representación Analítico/Algebraico

En este apartado se realiza el análisis de datos del libro de texto “ESPIRAL 11” de la editorial Norma 2005, y en él las siguientes categorías: “Sistema de Representación Analítico”, “Sistema de Representación algebraico”, los estándares E1 y E2, además, se hace la comparación entre los diferentes sistemas de representación, representaciones, indicadores de logro presentes en cada uno de los estándares e indicadores de logro presentes en los dos estándares.

Gráfica 10. Porcentaje de representaciones presentes en los ejemplos en los S.R analítico y algebraico



Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

El texto que se analizó en este apartado, introduce la noción del límite por medio de las representaciones: “gráfica-cartesiana”, “numérico-tabular”, “definición verbal”, “definición formal” y en mayor número de ejemplos se usa la representación “simbólico-especifica”; como lo corrobora la gráfica 10, en donde se observa que esta representación posee un porcentaje de 56% de ejemplos que en texto desarrollan el tema límite de funciones; los 7 primeros corresponden al tema propiedades de los límites, los cuales se solucionan realizando en su gran mayoría sustitución directa y solo en algunos casos se hace algún tipo de procedimiento algebraico; más adelante aparecen ejemplos de funciones racionales indeterminadas.

En general cuando se calcula

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

puede ocurrir: 1) que a este en el dominio de f y

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

2) que a este en el dominio de f, pero el comportamiento de la función en las proximidades de a difiera de la imagen de a;

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$$

3) que a no este en el dominio de la función, pero tenga sentido preguntarse por el comportamiento de la misma, en las proximidades de a. En general,

no depende del punto , sino de lo que ocurra en los valores próximos a .

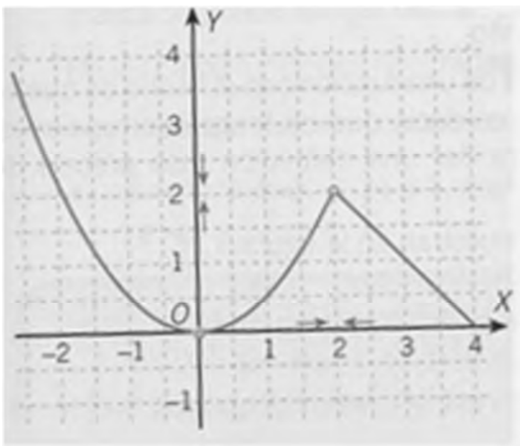
En un apartado del libro titulado “límites laterales y continuidad”, se parte de los límites laterales para introducir el tema de continuidad, partiendo de la función:

En donde se analiza el límite cuando x toma valores mayores que , es decir , evaluando el límite en la función ; al aplicar propiedades se obtiene que límite es , cuando toma valores menores que es decir , evaluando el límite en la función ; se llega a que el límite es , de ahí se concluye que

Por la naturaleza de algunas funciones, es necesario descomponer el problema sobre el imite en dos pasos, es decir, calcular el límite por la derecha o por la izquierda o por ambos. De aquí que el límite de la función f(x) exista y sea 2.

Figura 19. Representación gráfica-cartesiana

de



Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005..

La gráfica de la función (ver figura 16), que muestra los acercamientos tanto en la variable dependiente como independiente, es un apoyo a la hora de analizar el ejemplo, el cual es bastante significativo, puesto que usan adecuadamente las representaciones: “gráfica-cartesiana”, “definición verbal” y “simbólico-especifica”.

En el otro ejemplo se realiza un análisis similar a la función

—

cuando tiende a cero, como se puede observar en la figura 17 que me muestra a continuación:

Figura 20. Cálculo del límite de —

Ejemplo 14

Enunciado

Sea la función h definida por la expresión $h(x) = \frac{|x|}{x}$. Investiguemos los límites laterales de $h(x)$ cuando x tiende a 0 y el límite cuando x tiende a 0.

Solución

Primero veamos cómo se define la función a la derecha y a la izquierda de 0.

- Si $x < 0$, $|x| = -x$, entonces, $h(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$
- Si $x \geq 0$, $|x| = x$, entonces $h(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$

Podemos ver la gráfica en la figura 3.25.

Procedemos a calcular los límites laterales.

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} (1) = 1$$

Como $\lim_{x \to 0^-} h(x) \neq \lim_{x \to 0^+} h(x)$, entonces

concluimos que $\lim_{x \to 0} h(x)$ no existe. ■

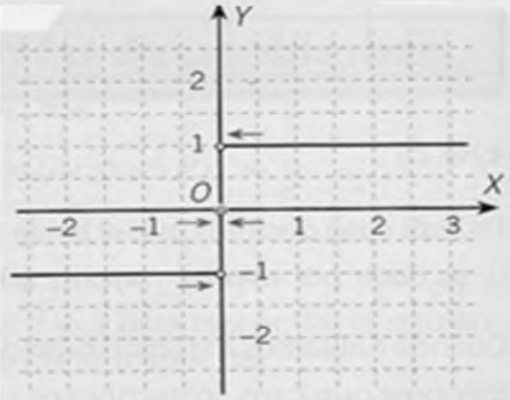


Fig. 3.25

Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

A partir de análisis de los dos ejemplos anteriores se concluye que:

Figura 21: condición de existencia de un límite, usando límites laterales

si f es una función definida en un intervalo abierto que contiene el punto a, excepto posiblemente en a:

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, si y solo si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$
- Si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe.
- Si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ no existe o $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ no existe, entonces tampoco existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

Los siguientes ejemplos del apartado analizan continuidad de funciones por medio de los límites laterales, sin embargo, el tema de continuidad no hace parte de los objetivos de este estudio, por lo cual no se profundiza en esta temática.

En otro apartado del libro aparecen ejemplos pertenecen al tema límites trigonométricos; para su solución se parte del hecho intuitivo que las funciones trigonométricas son continúas en todos los puntos de su dominio, y por consiguiente, si , es parte de dominio de la función escogida, se concluye que:

➢

➢

➢

➢

➢

➢

A partir de estas condiciones y teniendo en cuanta los dos "límites trigonométricos fundamentales" (ver página 69) se desarrolla todos los límites trigonométricos.

Otros límites que se consideran en el texto tienen que ver con las funciones exponenciales y logarítmicas, y dado que estas son inversas entre sí; se estudian algunos ejemplos simultáneamente. Los ejemplos en general son de evaluación directa, no aportan mayor información sobre las funciones ni sus límites y se toma

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

en los últimos ejemplos pertenecientes a esta temática.

Según la gráfica 10, la “definición formal” es la que presenta una menor incidencia con tan solo un 2% de ejemplos; se debe mencionar que anteriormente se hace alusión a la definición formal indicando que los términos “estar próximo a” o “acercarse a” debe precisarse matemáticamente, dado que esta precisión es necesaria para dar la definición formal. Así mismo, se menciona que la expresión “acercarse a” es arbitraria, pues una distancia puede representar una cercanía en una situación y la misma distancia puede representar lejanía en otra situación, por ello, la proximidad a un punto se mide por la distancia a este punto. Aproximarse más y más a un punto significa estar a distancias cada vez menores. El texto también aclara que la definición formal no proporciona un método para hallar el valor del límite de una función, pero se utiliza una vez se ha estimado dicho valor, para mostrar que en efecto es el límite verdadero. En este ejemplo además de la “definición verbal” se hace uso de las representaciones: “gráfica-cartesiana” y “numérico-tabular”.

La “representación numérico-tabular” presenta un 8% de ejemplos, tomándola como un apoyo para encontrar el límite buscado, donde se hace uso de tablas para tomar aproximaciones de las funciones que se analizan.

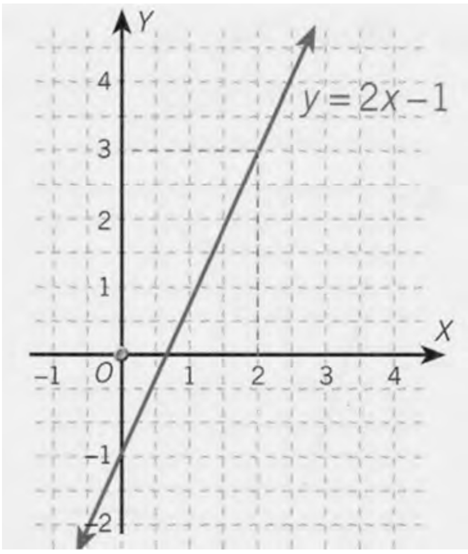
Al igual que la “representación numérico-tabular”, la “definición verbal” también posee un porcentaje de 8% de ejemplos, de los cuales se menciona en algunos casos acercamientos por derecha y por izquierda o acercamientos a través de valores positivos y negativos; otros se apoyan en una tabla de valores y su gráfica, para indicar que, cuando x se acerca a 2, la variable independiente $f(x)$ se acerca a 3.

La “representación gráfica-cartesiana” posee un porcentaje significativo de 26%; en estos ejemplos, dicha representación se toma como un apoyo para desarrollar los límites; al mostrando en las gráficas de las funciones, se intenta describir gráficamente el acercamiento de la variable dependiente a un valor cuando la variable independiente se acerca a otro. En ocasiones no se describen los acercamientos (ver figura 19), solo aparece la curva de la función; como en el caso del ejemplo de la función,

$$f(x) = 2x - 1$$

En donde aparecen dos graficas; en una de ellas aparece la curva de la función y en la otra se describen los acercamientos tanto por derecha como por izquierda.

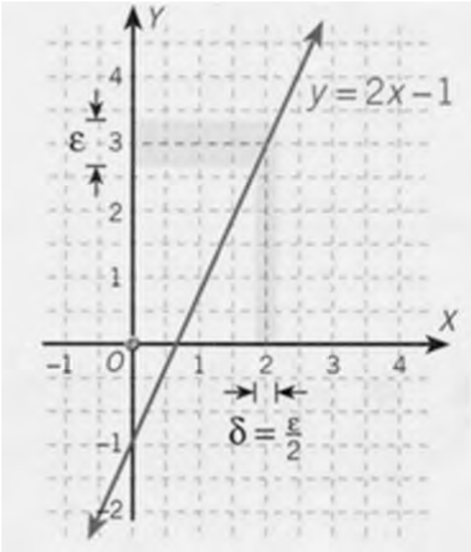
Figura 22. Representación gráfica-cartesiana de



Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

Así, cuando se halla el límite de una función en un punto a, calculando imágenes de puntos cercanos a , se puede decir que se ha encontrado un posible valor para el límite. Como se observa en la figura 20, solo cuando se muestra que la distancia de a se puede hacer tan pequeña como se quiera, tomando valores de suficientemente cercanos a , se ha probado que es el límite de cuando tiende hacia .

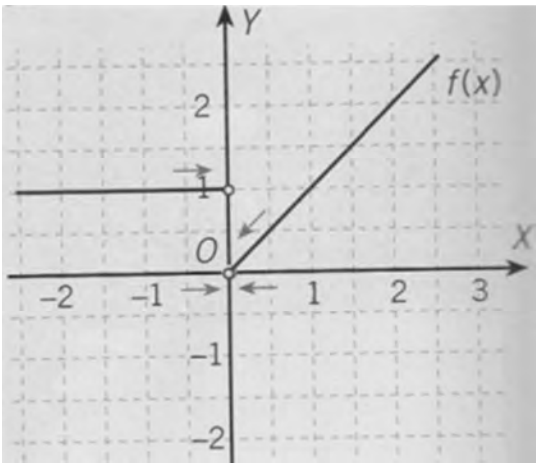
Figura 23. Representación gráfica-cartesiana usando cuantificadores



Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

La representación gráfica-cartesiana se usa en el libro mostrando en forma explícita los acercamientos como se indica en la figura 21, que ilustra esta situación.

Figura 24. Representación gráfica-cartesiana de



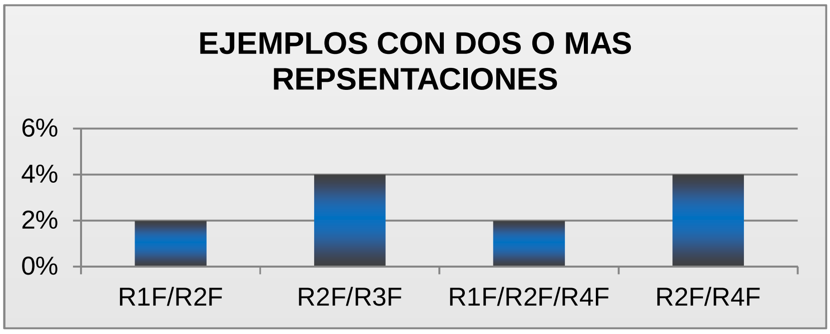
Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

Para comprender la noción de límite es muy útil el trabajo con las tablas y con gráficas. Sin embargo trabajar en esta forma no es muy eficiente para calcular límites por varias razones: 1) a veces no conocemos la gráfica de la función o es muy difícil de trazar, 2) para algunas funciones puede ser difícil la elaboración de la tabla utilizando únicamente una calculado sencilla, 3) no siempre el valor que se puede deducir de la tabla es el correcto. El uso adecuado de las propiedades de los límites facilita el caculo y nos da certeza sobre los resultados obtenidos.

Así, la “presentación algebraica” cobra importancia en la medida que es utilizada en notaciones y simbolismo algebraico asociados a funciones; el cálculo de límites se reduce a la aplicación de teoremas de límites y uso de algoritmos algebraicos: factorización, racionalización, uso de conjugadas y simplificaciones para obviar indeterminaciones, en este texto, esta representación tiene un porcentaje de incidencia del 42%, lo cual es bastante significativo si se compara, con las representaciones “gráfica-cartesiana”, “numérico-tabular”, “definición verbal” o “definición formal”.

Como ya se ha mencionado, el “Sistema de Representación Aritmético” hace referencia al límite de sucesiones; en este texto, se hace una pequeña introducción a las sucesiones, mostrando algunas características de las sucesiones: crecientes, decrecientes y constantes, también se hace alusión a las series, identificándolas como funciones que tienen como dominio el conjunto de los números enteros positivos, sin embargo, no aparece de forma explícita el tema de sucesiones convergentes y divergentes; tema en el cual el límite se aplica.
Hasta aquí se analizaron las representaciones del “Sistema de Representación Analítico”, “Sistema de Representación Algebraico” y “Sistema de Representación Aritmético”; ahora se analizan los ejemplos que movilizan dos o más representaciones y ejemplos que trabajan con más de un sistema de representación, por esta razón se presenta a continuación el histograma que muestra; en primer lugar aquellos ejemplos que relacionan dos o más representaciones en un mismo ejemplo:

Gráfica 11. Porcentaje de ejemplos con dos o más representaciones.



Fuente: tomado de la investigación.

El total de ejemplos que cumplen con la característica de poseer más de una representación tienen el mismo porcentaje (4%), los dos primeros se encuentran en el tema propiedades de los límites, para su desarrollo se usan las representaciones; “gráfica-cartesiana” y “definición verbal”, además de la siguiente propiedad fundamental de los límites de funciones: si es una función definida en un intervalo abierto que contiene a , no necesariamente en , y existe

Entonces este límite existe y es único. Uno de los ejemplos que se expone de este tipo, analiza una función por partes, y aunque ya se habían analizado en apartados anteriores en este texto, es importante confirmarlo con la aplicación de esta propiedad, que da un argumento para concluir que el límite no existe, otros dos ejemplos analizan funciones racionales y por partes, mostrando las tendencias de las funciones y sus límites en una gráfica continuación se muestra la figura 22 que muestra esta situación:

Figura 25. Cálculo del límite

Ejemplo 3

Enunciado

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} x, \text{ si } x > 0 \\ 1, \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Usemos la **propiedad L1** para mostrar que $\lim_{x \to 0} f(x)$, no existe

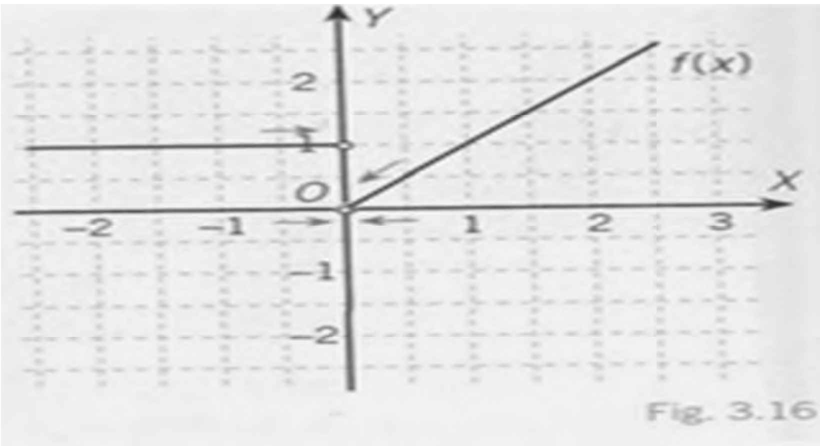
Solución

Observando la figura 3.16 podemos concluir que si nos acercamos a 0 a través de valores positivos de x, encontramos que $f(x)$ se aproxima a 0. Si nos acercamos a 0 a través de valores negativos, vemos que $f(x)$ toma siempre el valor 1.

Hay dos valores posibles para el $\lim_{x \to 0} f(x)$, que son 0 y 1. Como el límite si existe, es único, podemos afirmar que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe. ■

Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

Figura 25. (Continuación)



Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

Hay un ejemplo dentro de los 6 que se encuentran categorizados en la gráfica 11 que desarrolla las representaciones; “numérico-tabular”, “grafica-cartesiana” y “definición verbal”. En este caso la función que se plantea, se indefine en el punto al que tiende la variable independiente, por ello analiza por medio de una tabla de valores las proximidades a dicho punto para observar así las tendencias de la función, en figura 23 se observa la situación:

Figura 26. Calculo de

Ejemplo 18

Enunciado

Para la función $g(x) = \frac{1}{x+1}$ calculemos el límite cuando x tiende a -1.

Solución

Nos podemos preguntar por el comportamiento de la función g en las proximidades de -1 aun cuando este número no está en el dominio de g.

$\rightarrow -1 \leftarrow$

x	$-0,5$	$-0,9$	$-0,99$	$-0,999$		$-1,001$	$-1,01$	$-1,1$	$-1,5$
$\frac{1}{x+1}$	2	10	100	1000		-1000	-100	-10	-2

$\rightarrow +\infty \qquad -\infty \leftarrow$

Tabla 3.13

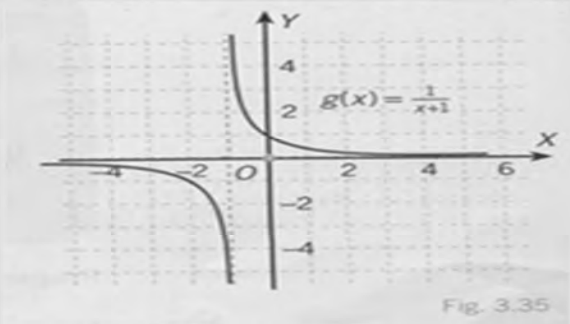


Figura 26. (Continuación)

La tabla 3.13 nos muestra que $g(x)$ crece sin límite cuando x se acerca a -1 por la derecha y decrece sin límite cuando x se aproxima a -1 por la izquierda.

En la gráfica también podemos observar este comportamiento de la función (figura 3.35).

Es importante observar que $x + 1$ toma valores positivos cuando x tiende a -1 por la derecha y toma valores negativos cuando x tiende a -1 por la izquierda. De allí que el límite en el primer caso sea más infinito y en el segundo, menos infinito.

El comportamiento de la función en las proximidades de -1 se describe simbólicamente con las expresiones:

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty \text{ y } \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty \blacksquare$$

Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

Otro ejemplo que posee un porcentaje de incidencia del 2%; se tiene en cuenta las presentaciones; “grafica-cartesiana” y “numérico-tabular”. Donde a partir de la observación de una tabla de valores se encuentra el límite buscado, además se presenta una gráfica que muestra las tendencias de las variables dependiente e independiente (ver figura 24), como se observa en la siguiente figura.

Figura 27. Representación gráfica-cartesiana y numérico-tabular de la función

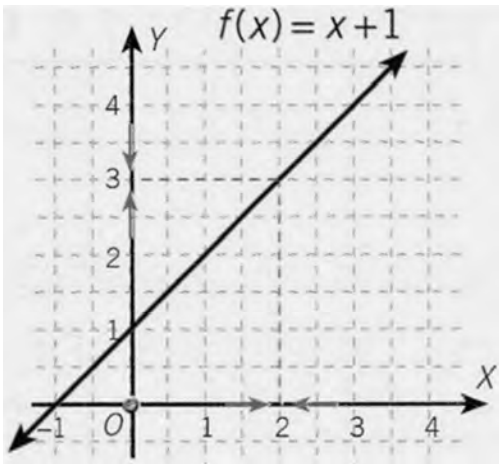


Figura 27 (Continuación)

$\rightarrow 2 \leftarrow$

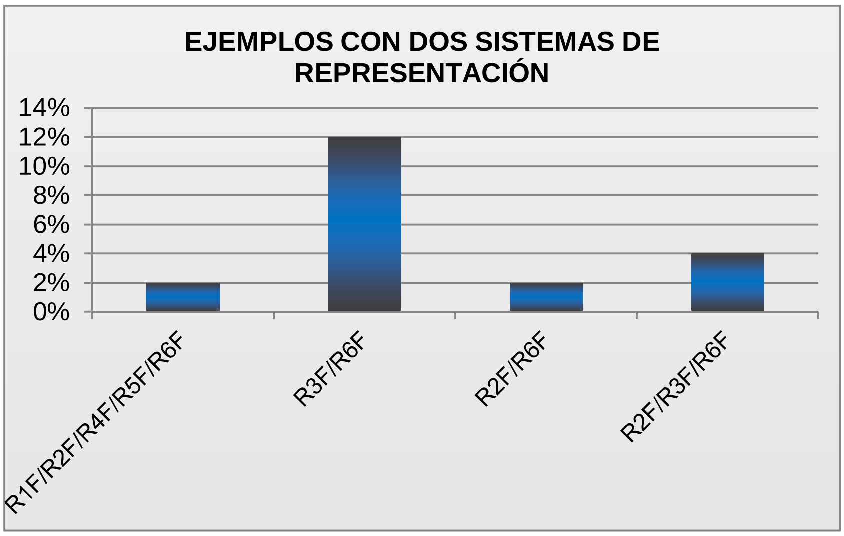
x	1,9	1,99	1,999		2,001	2,01	2,1
$f(x)$	2,9	2,99	2,999		3,001	3,01	3,1

$\rightarrow 3 \leftarrow$

Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

En segundo lugar, se muestra el histograma que desarrolla aquellos ejemplos que relacionan dos sistemas de representación en un mismo ejemplo:

Gráfica 12. Porcentaje de ejemplos con dos sistemas de representación



Fuente: tomado de la investigación.

El porcentaje de ejemplos que movilizan la representación “simbólico-específica” y “algebraica” corresponde a un 12%; estos ejemplos desarrollan procesos algorítmicos, pues como se ha mencionado la representación “simbólico-especifica” hace referencia a la evaluación del límite en un punto, y en la representación algebraica se aplican caculos algebraicos para calcular el límite, que es lo que desarrollan estos ejemplos.

En un porcentaje menor (2%), se encuentran dos ejemplos; en uno de ellos desea calcular el límite de cuando tiende a , usando la "definición formal" demuestra que el número que se halla corresponde efectivamente al límite buscado. En primer lugar se estima el límite usando tabla de valores y se apoya además en una gráfica para llegar a que , a continuación aplica la definición formal del límite en donde supone un valor para , para hallar luego el correspondiente valor para –, además se aclara más adelante que se puede escoger cualquier valor para y se llegaría por razonamientos al mismo valor para . En la figura 25 se puede observar el proceso que se llevó a cabo para verificar el límite.

Figura 28: caculo del límite , usando definición verbal

Solución

Estimemos el límite.

$\rightarrow 2 \leftarrow$

x	1,9	1,99	1,999		2,001	2,01	2,1
$2x - 1$	2,8	2,98	2,998		3,002	3,02	3,2

$\rightarrow 3 \leftarrow$

Tabla 3.7

Analizando la tabla 3.7 y observando la gráfica de la función que se muestra en la figura 3.12a, parece que, cuando x se acerca a 2, $f(x)$ está cada vez más cerca de 3. Estimamos que $\lim_{x \to 2} 2x - 1 = 3$

- Para demostrar esto escojamos, por ejemplo, $\varepsilon = 0{,}01$, y hallemos el correspondiente δ que dependerá de ε, tal que si $|x - 2| < \delta$ entonces $|f(x) - 3| < \varepsilon$.

  Tenemos que
  $$\begin{aligned} f(x) - 3 &= (2x - 1) - 3 \\ &= 2x - 1 - 3 \\ &= 2x - 4 \\ &= 2(x - 2) \end{aligned}$$

  De lo anterior concluimos que $|f(x) - 3| = 2|x - 2|$ y por el supuesto, $|f(x) - 3| < \varepsilon$, con $\varepsilon = 0{,}01$, entonces:

  $2|x - 2| < 0{,}01$ luego $|x - 2| < \frac{0{,}01}{2}$.

  Concluimos entonces que $\delta = \frac{0{,}01}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$, ya que $|x - 2| < \delta$.

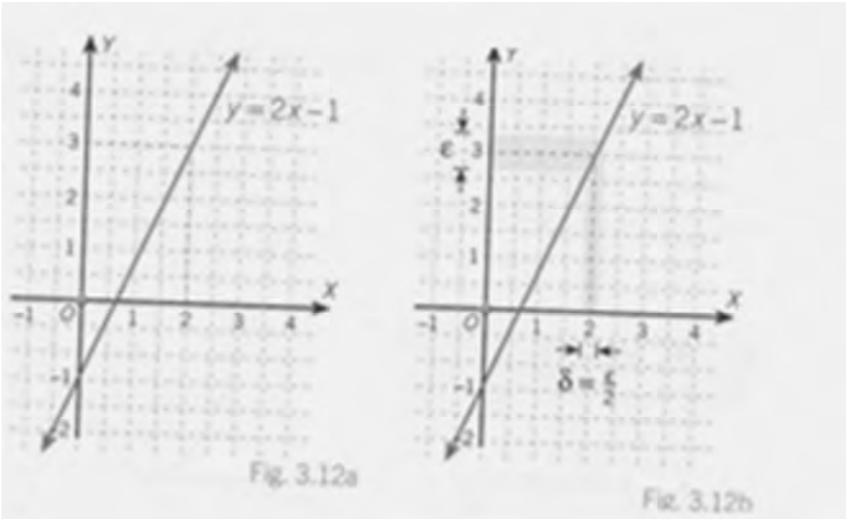
  Vemos que basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ con $\varepsilon = 0{,}01$ para que $|f(x) - 3| < 0{,}01 = \varepsilon$ (figura 3.12b).

  Así como se escogió $\varepsilon = 0{,}01$, habíamos podido escoger cualquier otro valor y con el mismo razonamiento encontraríamos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

  Hemos probado entonces que $\lim_{x \to 2} (2x - 1) = 3$ porque para cualquier $\varepsilon > 0$ que escojamos, hallamos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ tal que si $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $|f(x) - 3| < \varepsilon$. ■

Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

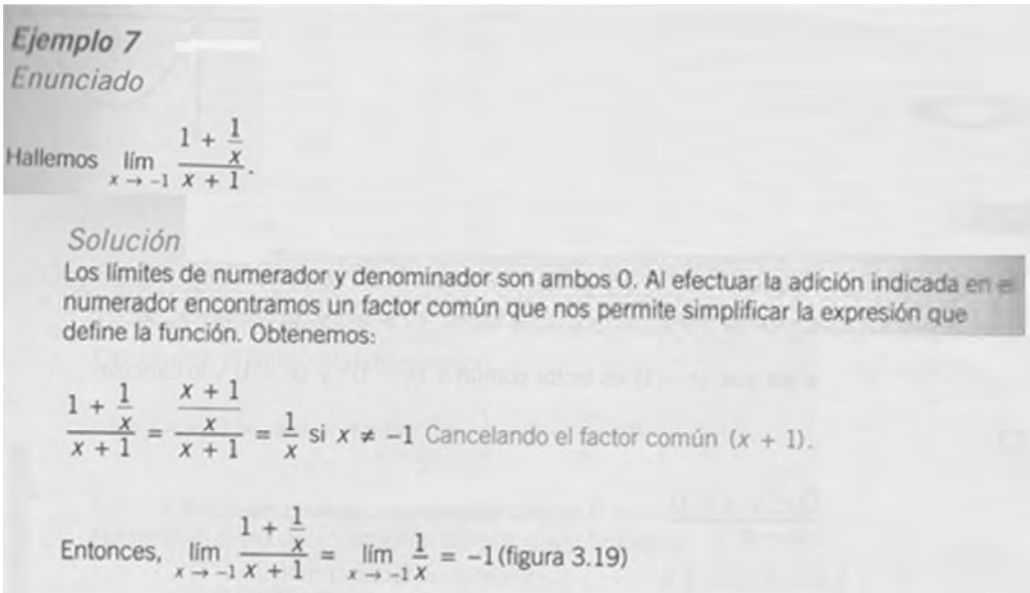
Figura 28. (Continuación)



Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

El otro ejemplo con 2% de incidencia toma una función racional donde los límites tanto del numerador como del denominador son 0, donde se realiza un proceso de simplificación para definir la función, la figura 26 ilustra la situación:

Figura 29. Cálculo de



Ejemplo 7

Enunciado

Hallemos $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1 + \frac{1}{x}}{x + 1}$.

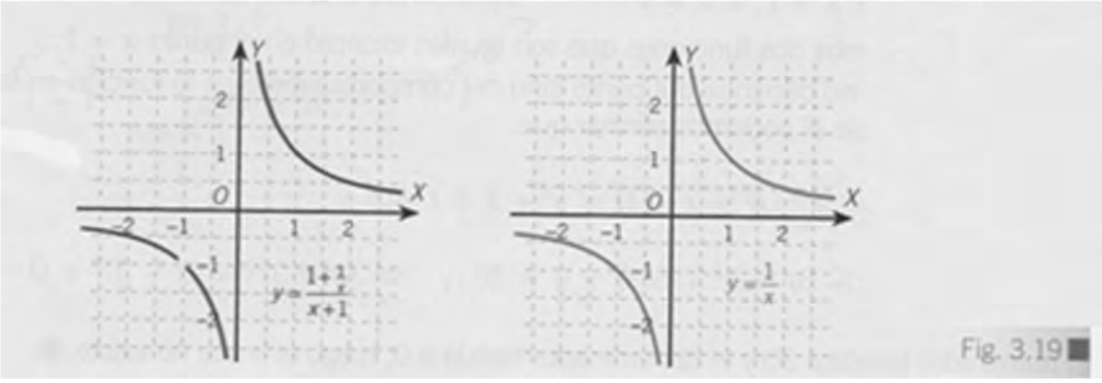
Solución

Los límites de numerador y denominador son ambos 0. Al efectuar la adición indicada en el numerador encontramos un factor común que nos permite simplificar la expresión que define la función. Obtenemos:

$$\frac{1 + \frac{1}{x}}{x + 1} = \frac{\frac{x + 1}{x}}{x + 1} = \frac{1}{x} \text{ si } x \neq -1 \text{ Cancelando el factor común } (x + 1).$$

Entonces, $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1 + \frac{1}{x}}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{x} = -1$ (figura 3.19)

Figura 29. (Continuación)



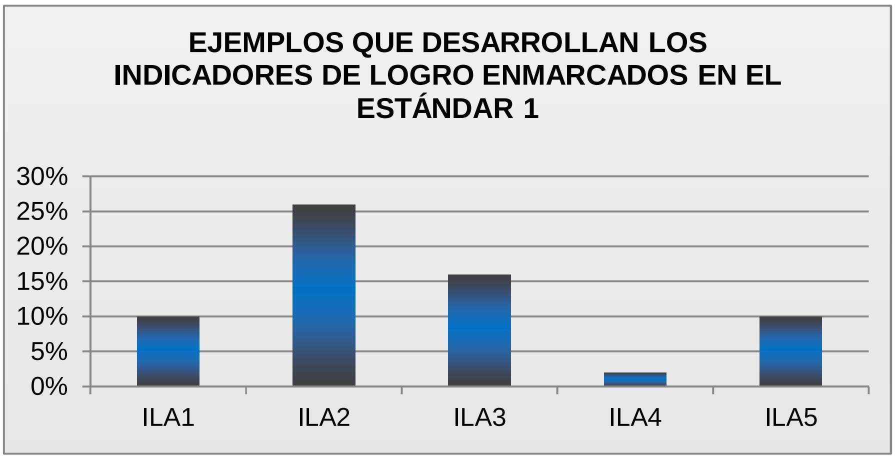
Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

Hay dos ejemplos más que exponen 3 representaciones que son la R2F (“gráfica-cartesiana”), R3F (“simbólica-específica”), y R6F (“algebraica”); se reducen a la aplicación de procedimientos algorítmicos con la ventaja de que, en este caso, se apoyan para su análisis en una gráfica.

A continuación se analiza el aspecto semiótico, el cual se compone de dos categorías que se han descrito como E1 (estándar 1) y E2 (estándar 2).

6.2.2. Estándar E1

Gráfica 13. Porcentaje de los ejemplos que desarrollan los indicadores de logro enmarcados en el estándar 1 (E1).



Fuente: tomado de la investigación.

En la gráfica se observa que el indicador de logro con mayor incidencia es ILA2 el cual consiste en "Interpretar y/o definir gráficamente el límite de una función", el porcentaje de este indicador es de 26%. Como ya se ha analizado antes, es bastante ventajoso desarrollar el concepto de límite basándose en su representación gráfica, ya que esta muestra de manera explícita los acercamientos de las variables; dependiente e independiente tanto por derecha como por izquierda, o por arriba como por abajo, o en el caso en que solo aparezca la gráfica de la función.

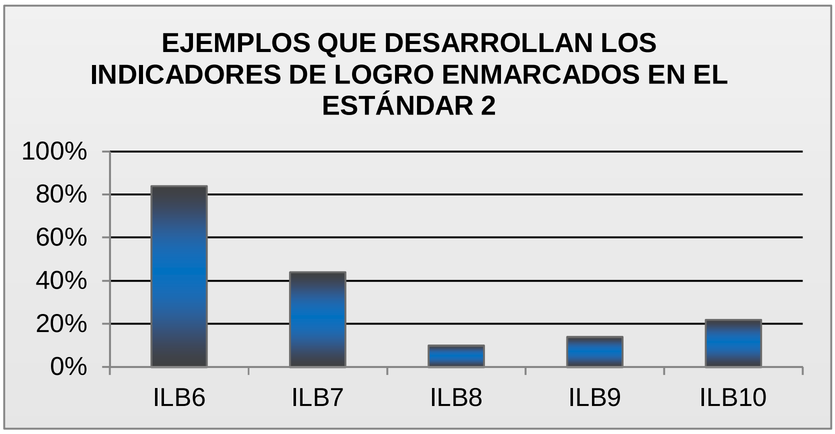
El indicador de logro en el que se hace aplicación de la definición formal del límite posee un porcentaje de 2%; se destaca uso de las letras griegas ε y δ que se utilizan en cantidades muy pequeñas, al desarrollar estos ejemplos.

Los indicadores de logro; ILA1 que consiste en "determinar el límite de una función por aproximación" e ILA5 en el cual se "aplica la definición verbal del límite" se presenta en un porcentaje de 10% de ejemplos, un porcentaje significativo es el que aplica el indicador ILA3 que consiste en determinar si existen, la ecuación de las asíntotas horizontales, verticales u oblicuas de una función.

6.2.3. Estándar E2

En cuanto al segundo estándar (E2), el histograma que resultó de la codificación de los datos es el siguiente:

Gráfica 14. Porcentaje de los ejemplos que desarrollan los indicadores de logro enmarcados en el estándar 2 (E2).



Fuente: tomado de la investigación.

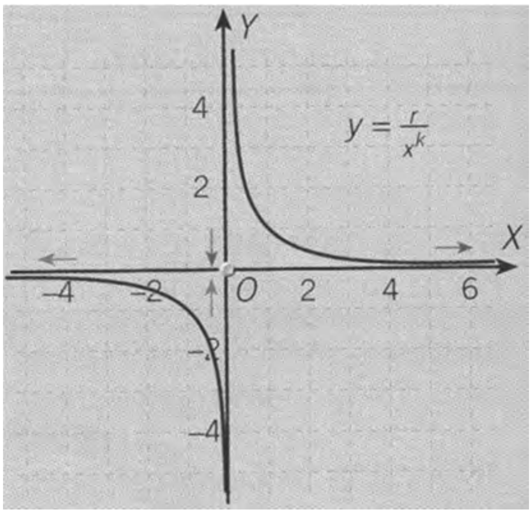
En la gráfica 13 se observa que el indicador con más incidencia en el texto es ILB6, el cual hace referencia a la aplicación de propiedades algebraicas y a la evaluación de límites de funciones; el porcentaje de aparición en el texto de este indicador es de 84%; los ejemplos que se platean son de índole algorítmicos más que analíticos.

En cuanto al cálculo de límites al infinito, son pocos los ejemplos que se evidencian en el texto, el porcentaje es de 10%; para su desarrollo se aplica una propiedad de los límites que es la siguiente: si *k* es un entero positivo y r es un número real, entonces:

1. —
2. —

Cabe aclarar que los símbolos y no representan números y por esta razón no se puede operar con ellos como se hace con los números reales. Son usados aquí para simbolizar comportamientos de las funciones. También aparece una figura que muestra las tendencias de las variables dependiente e independiente.

Figura 30. Representación gráfica-cartesiana de la función —

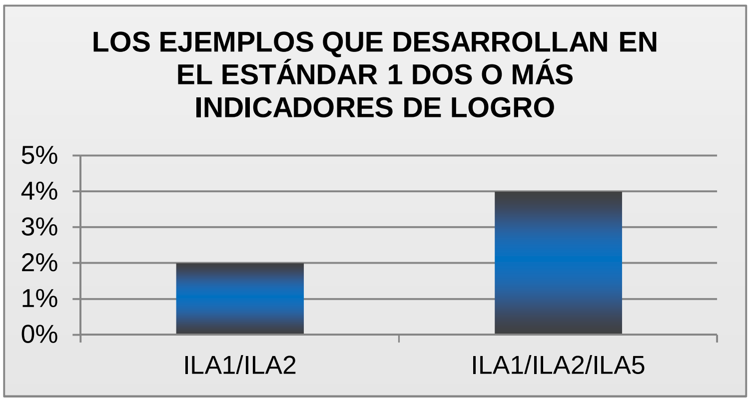


Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

También se tiene en cuenta que, para calcular el límite de una función racional cuando la variable independiente x tiende a o a , se dividen el numerador y el denominador por la mayor potencia de x y se aplica la propiedad anterior y otras propiedades que se mencionan anteriormente. También se tiene en cuenta que para hallar asíntotas horizontales, se calcula el límite cuando x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$. Además se menciona que si el límite es un número real, la recta y=L es una asíntota horizontal.

Otro aspecto que arrojó el estudio del instrumento de análisis, es lo relacionado con los ejemplos que desarrollan en su contenido más de una tema, pues como ya se ha mencionado, las subcategorías que corresponden a los indicadores de logro, se tomaron en los libros de texto como los temas que se desarrollan en los mismos. Así se presenta el siguiente histograma para el estándar E1:

Gráfica 15. Porcentaje de los ejemplos que desarrollan en el estándar 1 dos o más indicadores de logro.



Fuente: tomado de la investigación.

El estándar E1 se encuentra dentro del pensamiento variacional; permitiendo al lector el uso de aproximaciones adecuadas para encontrar límites de funciones, expresar ideas sobre límites de una función en forma: oral, escrita o mediante gráficas. En este caso solo se presentan en el texto, tres ejemplos que cumplen algunas de estas características, como es el caso de los dos ejemplos en donde se determina el límite de una función por aproximación, usando para ello una interpretación gráfica, que explicita la tendencia de las variables dependiente e independiente. Y además describe dichas aproximaciones usando la definición verbal del límite.

El otro ejemplo es el primero que se plantea para introducir el concepto de límite en él hace uso de los indicadores ILA1 que se refiere a; "la determinación el límite de una función por aproximación" y al indicador de logro ILA2 que se refiere a; "Interpretar y/o definir gráficamente el límite de una función". El porcentaje que corresponde a estos ejemplos es de 2%, esto es, un solo ejemplo de los 50 que se analizaron en total en el texto.

Gráfica 16. Porcentaje de los ejemplos que desarrollan
en el estándar 2, dos o más indicadores de logro.

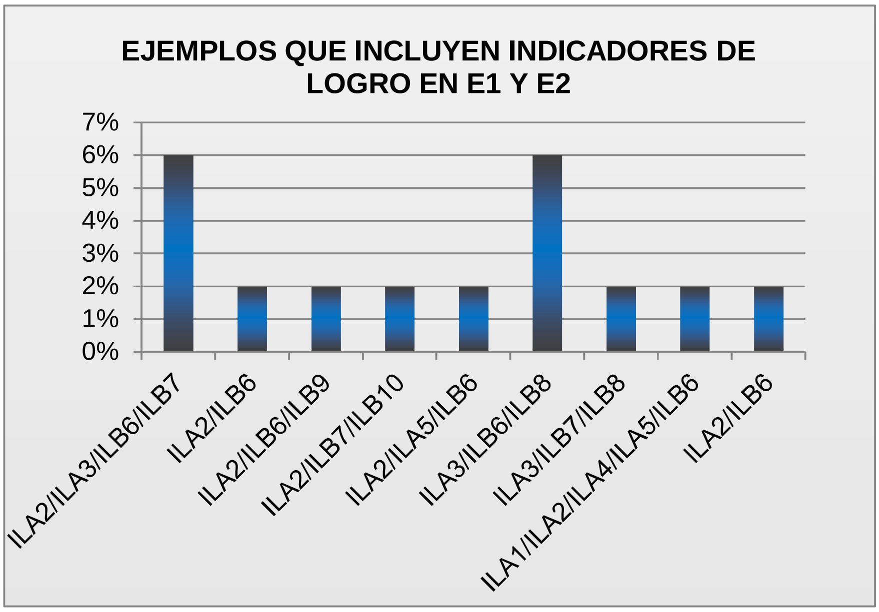
Fuente: tomado de la investigación.

Este estándar se enmarca en el pensamiento numérico y hace referencia al "uso de propiedades y representaciones en los números naturales y reales en el cálculo de límites", en él, el lector podrá; aplicar propiedades de los límites, justificar un procedimiento o una respuesta en el cálculo de límite de una función, entre otros; en cuanto a los resultados de la gráfica, es destacable el hecho de que se sigue presentando mayor frecuencia al igual que en el libro "Dimensión matemática 11", en los indicadores ILB6 que tiene que ver con "la aplicación de propiedades algebraicas y la evaluación de límites de funciones" e ILB7 en dónde "calcula límites aplicando propiedades", el porcentaje de incidencia de dichos indicadores es de 22% que comparado con otros indicadores es bastantes significativo.

En la gráfica también hay un porcentaje de 2% de ejemplos que tienen tres indicadores de logro que son ILB6, ILB7, ILB9; los dos primeros como se mencionó antes, son de índole algebraico y el ultimo tiene que ver con el cálculo límites de funciones indeterminadas; es claro que para solucionar un límite que incluya una función indeterminada de aplica algún proceso algebraico y luego se evalúa para encontrar el límite. En otro ejemplo se movilizan solo dos indicadores, ILB6 e ILB9, con un porcentaje de 2%, se encuentran los indicadores ILB6, ILB9 e ILB10, este último relacionado con el cálculos de límites trigonométricos concernientes a un porcentaje de 2% de ejemplos, la octava barra de la figura moviliza 4 indicadores de logro en donde analiza el límite de una función trigonométrica.

Por último, al igual que se analizó en los ejemplos aquellos que involucran en su desarrollo dos sistemas de representación, también es pertinente analizar los indicadores de logro de uno y otro estándar.

Gráfica 17. Porcentaje de los ejemplos que incluyen indicadores de logro en E1 y E2.



Fuente: tomado de la investigación.

En la gráfica se observa que un 6% de ejemplos movilizan 4 indicadores de los dos estándares específicamente; ILA2 e ILA3 pertenecientes al primer estándar, ILB6 e ILB7 del segundo estándar; en uno de los ejemplos se tiene la función

$$g(x) = \frac{1}{x+1}$$

y se calcula el límite cuando x tiende a -1.

Evidentemente, la función se indefine en el punto donde $x = -1$; pero se analiza, por medio de una tabla de valores (ver figura 28) el comportamiento de la función g en las proximidades de -1, a pesar de que este número no esté en el dominio de g.

Figura 31. Representación numérico-tabular de la función

$\rightarrow -1 \leftarrow$

x	−0,5	−0,9	−0,99	−0,999		−1,001	−1,01	−1,1	−1,5
$\frac{1}{x+1}$	2	10	100	1000		−1000	−100	−10	−2

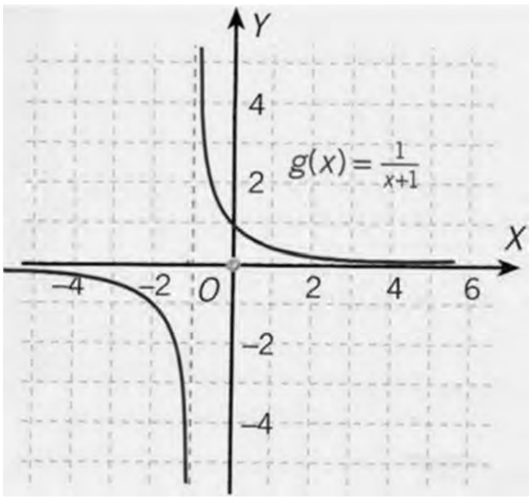
$\rightarrow +\infty \quad -\infty \leftarrow$

Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

La tabla muestra que crece sin límite cuando se acerca a por la derecha y decrece sin límite cuando se aproxima a por la izquierda.

Además, en la figura 29 se puede observar el comportamiento de la función; toma valores positivos cuando tiende a y toma valores negativos cuando tiende a . Dando como resultado que el límite por un lado es y por el otro lado da . Este resultado se expresa simbólicamente:

Figura 32. Representación gráfica-cartesiana de la función



Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

También hay un 6% de ejemplos que desarrollan los ejemplos con base en los indicadores de logro ILA3 perteneciente al primer estándar e ILB6, ILB8, concernientes al segundo estándar; el indicador ILA3 hace referencia a la determinación de asíntotas, el indicador ILB6 tiene que ver con el cálculo de límites aplicando propiedades y el indicador ILB8 alude al cálculo de límites infinitos.

En cuanto a los ejemplos que poseen un porcentaje de incidencia del 2%; cada uno de ellos involucra indicadores tanto del estándar 1 como del estándar 2, en particular existe un ejemplo que moviliza 5 indicadores, es decir para su desarrollo aplica 5 temas concernientes al tema límite de funciones, en el resto también aplica propiedades similares

6.3. COMPARACIÓN DE TEXTOS NORMA ANTES Y DESPUÉS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LOS ESTÁNDARES CURRICULARES DE CALIDAD

Hasta ahora se ha analizado las características más relevantes de los textos, según las categorías planteadas tanto en el aspecto semiótico como curricular, además se han realizado comparaciones internas -es decir, en cada libro de texto- relacionadas con los sistemas de representación y los estándares que moviliza el concepto de límite, los cuales se constituyen como categorías de análisis en este estudio.

En análisis anterior permitió realizar comparaciones, en los libros de texto; "Dimensión Matemática 11" de la editorial Norma, editado en el año 1997 -antes de la implementación de los estándares- y "Espiral 11" de la editorial Norma, editado en el año 2005 -después de la implementación de los estándares- en ellos se las diferencias y semejanzas, tanto en la presentación del tema, como en la exposición de los ejemplos.

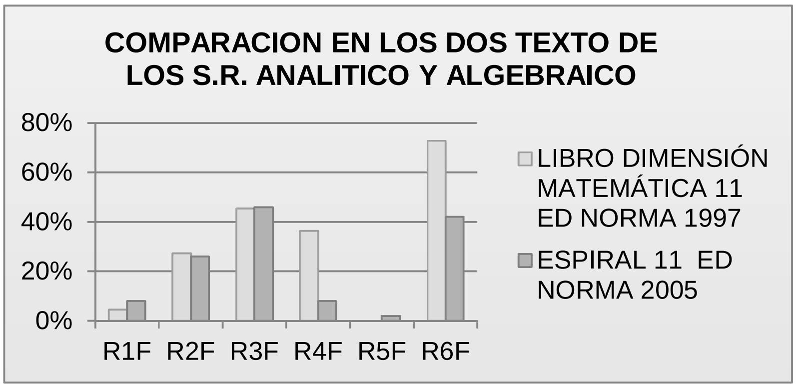
El punto de partida para la elaboración de los estándares curriculares, fueron los lineamientos curriculares producidos por el Ministerio de Educación. Su desarrollo se enriqueció con la participación de maestros de diversas regiones y de académicos, así como con la consulta a currículos de otros países.

Con los estándares curriculares se busca dar mayor concreción a los lineamientos expedidos, de manera que las instituciones escolares cuenten con una información común para formular sus planes de estudio, respetando su autonomía. Es aquí en donde aparece lo más relevante en este estudio, dado que si los libros de texto han logrado realizar una buena implementación de los estándares de calidad; permitirá a la comunidad estudiantil como docente, una mejor aproximación a los conceptos básicos.

6.3.1. Comparación Sistema Analítico-Algebraico

A continuación se realiza la comparación de las representaciones, presentes en el sistema de representación analítico-algebraico, en los textos antes y después de la implementación de los estándares básicos de calidad en matemáticas.

Gráfica 18. Comparación de los libros entes y después de la implementación de los estándares en el S.R. analítico-algebraico.



Fuente: tomado de la investigación.

En la gráfica se puede observar que el libro de texto "Dimensión Matemática 11" presenta un diferencia considerable del 31% en la representación algebraica con relación al libro de texto "Espiral 11"; el porcentaje es similar, ya que el segundo tiene mayor número de ejemplos; el libro de texto "Dimensión Matemática 11" se analizaron 22 ejemplos mientras que en libro "Espiral 11" se tomaron para el análisis 50 ejemplos.

También la gráfica 17 muestra que la representación "simbólico-especifica" presenta el segundo mayor porcentaje en los dos textos con una diferencia en este caso del 1%, al igual que la representación "gráfica-cartesiana" Lo cual era de esperarse dado que en los dos textos se maneja la misma estructura. En cuanto a las temáticas que conciernen al concepto del límite, con la diferencia es únicamente en la cantidad de ejemplos planteados.

Otras representaciones como la "numérico-tabular" presentan porcentajes similares del 5% y 8% respectivamente, aunque cabe anotar que el manual "Dimensión Matemática11", no solo emplea esta representación para introducir el concepto de límite, sino que también la utiliza en otros temas como el de límites infinitos.

Con respecto a la definición verbal se puede observar que los porcentajes difieren en un 28%, debido a que el texto "Dimensión Matemática11", tiene más ejemplos en comparación con el texto “Espiral 11”; en general la utilización de esta representación en ambos textos es limitada. De la misma forma ocurre con la definición formal; la diferencia de porcentaje es del 2%, que como ya se mencionó en el libro de texto antes de la implementación de los estándares no aparecen ejemplos, mientras que, en el manual después de la implementación de los estándares aparece un solo ejemplo, en el que se aplica esta definición.

En conclusión, la estructura de estos dos textos, no presenta mayores diferencias sobre todo en la forma como se aborda el tema de límite de una función, pues en ambos casos se realiza de una aproximación por medio de tablas y graficas que ayudan al lector a formarse una idea del concepto, para luego pasar a formalizarlo por medio de la representación formal, además, esta forma de introducir el concepto, permite al lector mayor provecho a la hora de adquirir propiedades y características de las funciones que se analizan, como del concepto en cuestión.

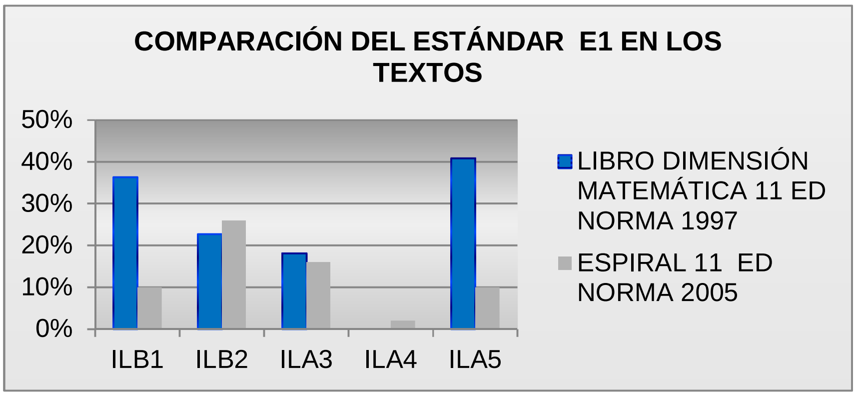
6.3.2. Comparación Sistema Aritmético

Con respecto a este sistema, la diferencia si es importante ya que en el libro “Espiral” no aparece el límite de sucesiones y por lo tanto tampoco el “Sistema de Representación Aritmético”, ya que este fue designado especialmente para ser utilizado en el planteamiento de este tipo de temas; debido a sus características, pues el límite de sucesiones se enmarca en el pensamiento numérico.

En el texto “Dimensión Matemática11” aparece el tema de límite de sucesiones en forma muy reducida, solamente presenta una aproximación a la “definición formal” de sucesión y presenta tres ejemplos referentes al tema sin ninguna profundización al respecto.

6.3.3. Comparación Indicadores de Logro

Gráfica 19. Porcentaje de comparación del estándar 1 en los textos



Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

En este caso la comparación radicó en observar qué indicadores de logro se desarrollan en ambos textos, tomando como base los indicadores planteados en el texto “Espiral 11” ya que en el texto “Dimensión Matemáticas 11” aún no se implementaban los estándares básicos de calidad en matemáticas.

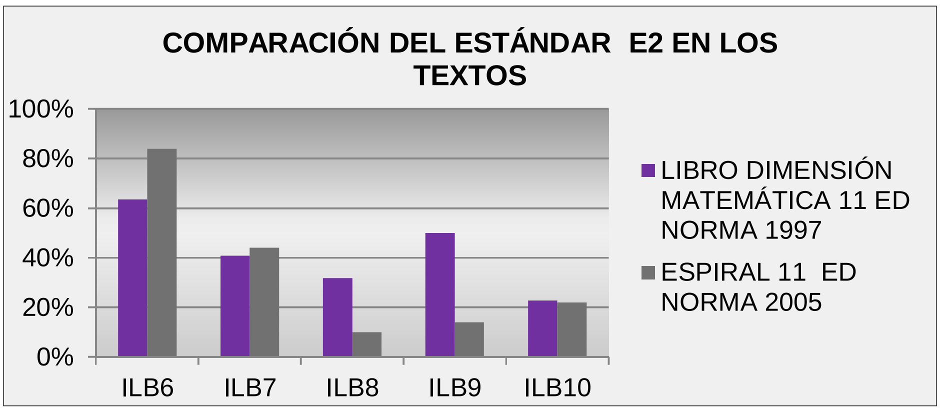
En primera instancia, se tomó el estándar E1 que se refiere a “la utilización de técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos” el cual de enmarca dentro del pensamiento variacional (P.VAR); se analizó cómo los ejemplos planteados en cada texto desarrollan cada indicador de logro, o si son pertinentes a la hora de abordar este tema.

Una diferencia significativa que se puede observar en la gráfica, es que el indicador de logro “aplica la definición formal del límite” (ILA4) no aparece en el texto “Dimensión Matemáticas 11” esto debido a que la definición formal del límite tampoco aparece en este texto específicamente en los ejemplos.

La diferencia de porcentaje en el indicador de logro “determina el límite de una función por aproximación” (ILA1) es del 26%, esto debido a la diferencia en el número de ejemplos en cada texto, pero en general se aborda de manera similar en ambos textos. Lo mismo ocurre con el indicador de logro “aplica la definición verbal del límite” (ILA5), en donde la diferencia porcentual es de un 31%.

En conclusión, con respecto a este estándar las diferencias son poco notorias ya que la mayoría de temas que se presentan en el texto “Dimensión Matemática 11” antes de la implementación los estándares, también se desarrollan en el texto más actual “Espiral 11”, y aunque la forma de presentar los ejemplos en ambos textos es similar, el texto actual presenta un considerable aumento en los ejemplos propuestos, además este presenta gráficas cartesianas que evidencian aproximaciones de la variables dependiente e independiente, tanto por derecha como por izquierda, lo cual permite una mejor aproximación al concepto.

Gráfica 20. Porcentaje de comparación del estándar 2 en los textos.



Fuente: tomado de la investigación.

Con respecto al Estándar E2 el cual se refiere a “uso de las propiedades y representaciones en los números naturales y reales en el cálculo del límite”, que se incluye dentro del pensamiento numérico (P. NUM), la diferencia en porcentajes más marcada se da en el indicador de logro “calcula límites de funciones indeterminadas” (ILB9), debido a que el texto actual presenta mayor número de ejemplos y gran parte de estos, sobre todo en los temas relacionados con: limites trigonométricos, límites al infinito, entre otros, se trabaja con diferentes tipos de funciones, varias de ellas son indeterminadas por lo tanto gran parte de los ejemplos hacen referencia a este tipo de funciones en diferentes temas planteados en el texto.

El indicador de logro “aplica propiedades algebraicas y evalúa límites de funciones” (ILB6); cuenta con un porcentaje considerable en comparación con los otros indicadores pero como ya se mencionó anteriormente su aparición es debido a que varios ejemplos planteados en los dos textos desarrollan procesos no solo analíticos sino también algorítmicos para su solución.

El indicador de logro que se desarrolla en la menor cantidad de ejemplos es el que se refiere a “calcular limites trigonométricos” (ILB10); ya que el número de ejemplos utilizados para abordar este tema es muy pequeño en ambos textos, estos solo se limitan a evaluar límites y aplicar identidades trigonométricas. Los demás indicadores se presentan de forma similar en los dos textos.

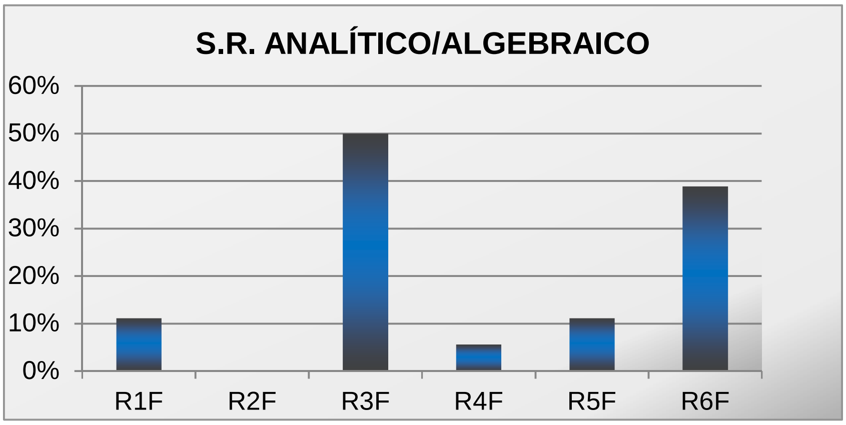
En conclusión con relación a los indicadores de logro que pertenecen a este estándar en su totalidad; se desarrollan en los dos textos, pero la forma como lo hacen es similar en ambos, salvo que en “Espiral 11” se presentan un aumento considerable de ejemplos con relación al texto anterior pero en las características de su estructura no se notan cambios sustanciales.

En este sentido se puede inferir que la implementación de los estándares únicamente se ve reflejada en la organización de los contenidos pero no en la forma como se exponen las temáticas en el texto ya que no se notan cambios sustanciales de la edición actual a la anterior.

6.4. LIBRO MATEMATICA 11 EDITORRIAL SANTILLANA 1995

6.4.1. Sistemas De Representación Analítico –Algebraico

Gráfica 21. Porcentaje de representaciones presentes en los ejemplos en los S.R analítico y algebraico.



Fuente: tomado de la investigación.

En la gráfica 20, se observa que la subcategoría R3F representación simbólico-especifica, presenta un mayor porcentaje de incidencia con 50%; en estos ejemplos se evalúan límites de funciones, realizando sustituciones del valor al que tiende la variable independiente en la función correspondiente. Este tipo de sustitución se presenta sobre todo, en los ejemplos donde se trabajan con las propiedades del límite y en las funciones donde es necesario obviar la indeterminación para poder calcular el valor del límite; también se aplica en los ejemplos donde se trabajan con funciones trigonométricas, como se muestra en la figura 30.

Figura 33. Cálculo de límite de la función

Ejemplos:

1. Calcular el límite de $f(x) = \dfrac{\tan x}{\text{sen } x}$ cuando $x \to 0$.

Solución:

Utilizamos la identidad trigonométrica de $\tan x$, para eliminar la indeterminación.

Por tanto: $$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{\text{sen } x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\text{sen } x}{\cos x}}{\text{sen } x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{\text{sen } x}}{\cos x \, \cancel{\text{sen } x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$$

Luego: $$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{\text{sen } x} = 1$$

Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

La sustitución directa, que en este caso, corresponde a la representación simbólico-especifica (R3F), se puede aplicar tanto en funciones polinómicas como en funciones racionales, cuyo denominador sea diferente de cero; en el caso de los ejemplos planteados en este texto, solamente se trabaja con funciones: polinómicas, racionales, radicales y trigonométricas, dejando de lado las funciones exponenciales y logarítmicas.

Con relación a los ejemplos que presentan el tema límites al infinito, el texto solo aborda las funciones de la forma

Donde es un número racional positivo y es un número real cualquiera

Con esta propiedad solo aparecen dos ejemplos, donde para hallar el límite, cuando ,se lleva la función a la forma y luego se divide cada termino por la potencia de mayor exponente; por lo tanto, en esta parte no se aplica la representación simbólico-especifica, como se muestra en la figura 31.

Figura 34. Cálculo de límite de la función ———

Ejemplos:

Calcular: a) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x^2 + x + 7}{x^2 + 3} \right)$

Solución:

En ambos casos debemos expresar la función en la forma $\dfrac{c}{x^a}$:

a) Dividimos cada término de la función por la potencia de mayor exponente.

En este caso es x^2.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2 + x + 7}{x^2 + 3} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{2x^2 + x + 7}{x^2}}{\dfrac{x^2 + 3}{x^2}}$$

Luego: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{7}{x^2}}{1 + \dfrac{3}{x^2}} = \dfrac{2}{1} = 2.$

Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

En el tema de límites trigonométricos, los ejemplos presentados, emplean en su gran mayoría, la “representación simbólica específica”, junto con la aplicación de identidades trigonométricas para obviar indeterminaciones y así resolver los límites. Como se observa en la figura 32:

Figura 35. Cálculo de límite de la función ——

1. Calcular $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$

Solución:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{(x + 5)\cancel{(x - 5)}}{\cancel{(x - 5)}} = \lim_{x \to 5} (x + 5) = 5 + 5 = 10$$

Luego: $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} = 10$

Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

Cabe anotar, que en la gráfica 20, es evidente la ausencia de la representación gráfica-cartesiana (R2A) en los ejemplos que desarrolla el texto; ya que, estos tienen una estructura de corte algorítmico, y no se apoyan en la representación gráfica para ilustrar de mejor forma los contenidos planteados.

La definición formal (R5F) y la representación numérica tabular (R1F) tienen igual porcentaje de incidencia (11%). En el primer ejemplo se aplica la definición formal de límite para probar su existencia y en el segundo, se obtiene el valor del límite en forma intuitiva, por medio de tablas de valores, donde se consignan las aproximaciones al valor al cual tiende la variable independiente.

En la gráfica 20, también se presenta el sistema de representación algebraico; en esta parte es importante aclarar que el análisis de los ejemplos se realizó por separado, es decir, se analizaron los ejemplos en cada sistema, pues, así se plantea en la categorización en la cual se basa este estudio, pero para comodidad del análisis de los datos se integraron los dos sistemas, ya que, el sistema de representación algebraico solo posee una sola representación y no es posible analizarlo por separado.

Ahora, con respecto al sistema de representación algebraico, este aparece en gran parte de los ejemplos analizados con un porcentaje del 44%; en estos ejemplos se aplica procesos algebraicos, como: factor común, racionalización, factorización de funciones indeterminaciones, división de polinomios, simplificaciones y propiedades de los límites, como se muestra en la figura 32:

Figura 36. Cálculo de límite de la función

2. Calcular $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

Solución:

Primero eliminamos la indeterminación:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.$$

Luego: $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \dfrac{1}{4}$

Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

Es importante aclarar que en este texto no se analizan límites infinitos, por lo tanto, no aparecen ejemplos relacionados con este tema, tampoco se analiza el límite en las ecuaciones de asíntotas.

En realidad los temas presentados con referencia al límite se exponen en forma muy resumida en el presente texto, con uno o dos ejemplos por cada temática, y en la mayoría de ejemplos se trabaja únicamente con propiedades de los límites. La estructura de los ejemplos como se mencionó anteriormente es de corte algorítmico, es decir, solo plantean procedimientos sistemáticos y propiedades para realizar cálculos precisos. Además, estos carecen de gráficos o imágenes que ilustren mejor su desarrollo y de explicaciones concretas que muestren los procesos realizados para la solución obtenida.

Hasta aquí se analizaron las representaciones de la categoría “Sistema de Representación Analítico y Algebraico”, pero se debe tener en cuenta que existen ejemplos donde están presentes más de una representación dentro de cada sistema y también más de un sistema de representación en cada ejemplo; en este texto aparece un solo ejemplo con dos representaciones, la representación numérico tabular (R1F) y la definición verbal (R4F) pertenecientes al sistema de representación analítico como se observa en la figura 34:

Figura 37. Representación gráfica-cartesiana y verbal

las funciones —— y –

1. Calcular el límite de $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ para $x \to 3$.

Solución:

La tabla muestra los valores *f(x)* en varios *x* cercanos al 3.

x	4	3,5	3,1	3,01	3,001	3	2,999	2,99	2,9
$\frac{x^2-9}{x-3}$	7	6,5	6,1	6,01	6,001	?	5,999	5,99	5,9

Luego: concluimos que el límite es 6.

2. Calcular el límite de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ para $x \to 0$.

Solución:

Cuando $x \to 0$ por la derecha o por la izquierda, *f(x)* crece sin tope.

Luego : decimos que no existe el límite de *f(x)* porque no se aproxima a un número real *L* cuando $x \to 0$.

Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

En el primer ejemplo, se pretende encontrar intuitivamente el valor del límite de una función racional de la forma

——

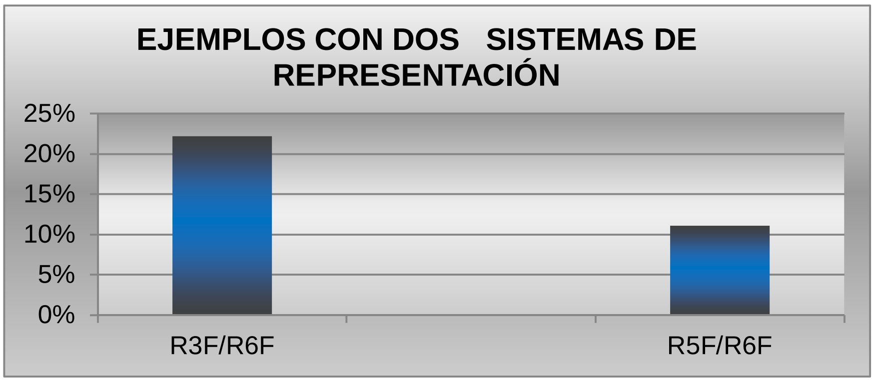
Para lo cual se realiza un tabla de valores con aproximaciones al valor al cual tiende la variable independiente, y en el segundo ejemplo, se plantea una explicación acerca de la existencia del límite de la función

–

En este caso, se concluye que limite no existe, debido al comportamiento de la función en los valores cercanos al punto.

También aparecen cuatro ejemplos donde se presentan dos sistemas de representación diferentes: el “Sistema de Representación Analítico” y dentro de este la “definición formal” y el “Sistema de Representación Algebraico”, como se muestra en la gráfica 22.

Gráfica 22. Porcentaje de ejemplos con dos o más representaciones.



Fuente: tomado de la investigación.

En los primeros dos ejemplos, se aplica la "definición formal", donde es necesario realizar procesos algebraicos para encontrar el valor de ε, y en los dos últimos, se presenta la representación "simbólico-específica", perteneciente al sistema de representación "Analítico", y la "representación algebraica", perteneciente al sistema de representación con el mismo nombre; en estos ejemplos se realizan procesos algebraicos, en este caso, factorización y racionalización para obviar indeterminaciones, y posteriormente se procede a evaluar para encontrar el valor del límite. Cabe resaltar la importancia de este tipo de ejemplos pues según Blázquez (2001) manejar varios sistemas de representación ayuda mucho para la comprensión de los conceptos pues brinda un panorama más amplio de las características más relevantes de cada concepto y de esta forma se lo puede apreciar desde diferentes perspectivas facilitando su comprensión.

Figura 38. Definición formal del límite de la función

2. Utilizar la definición de límite para comprobar que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{2+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{3}$

Solución:

Por definición de límite, tenemos:

$$\left|\frac{1}{2+\sqrt{x}} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3-(2+\sqrt{x})}{3\,(2+\sqrt{x})}\right| = \left|\frac{1-\sqrt{x}}{3\,(2+\sqrt{x})}\right| =$$

$$= \left|\frac{(1-\sqrt{x})\,(1+\sqrt{x})}{3\,(2+\sqrt{x})\,(1+\sqrt{x})}\right| = \left|\frac{1-x}{3\,(2+\sqrt{x})\,(1+\sqrt{x})}\right| =$$

$$= \frac{|1-x|}{6+9\sqrt{x}+3x} < \frac{|1-x|}{6}$$

Resulta que dado $\varepsilon > 0$, para $\delta = 6\varepsilon$ se cumple la condición de límite, ya que: $[|x-1| < \delta = 6\varepsilon]$.

Luego: $\left|\dfrac{1}{2+\sqrt{x}} - \dfrac{1}{3}\right| < \dfrac{|1-x|}{6} < \dfrac{\delta}{6} = \varepsilon$

Fuente: tomado de la investigación.

En la figura 38, se puede observar la estructura de un ejemplo en el cual se pide comprobar que

Utilizando la definición formal; donde se muestra el proceso algorítmico para aplicar esta definición, pero, carece de una explicación e inducción detallada que conduzca al lector a involucrase en el tema, es decir, no presenta de forma explícita la intencionalidad que el ejemplo debe tener, limitando al lector a adquirir solamente la habilidad para realizar cálculos sistemáticos. Esto no genera un dominio del concepto, por el contrario aleja al lector de la verdadera comprensión; como lo afirma Sierpinska (1990): “se considera la comprensión en el sentido en que el proceso de interpretación, está relacionado con las representaciones y, por tanto con el dominio del concepto”.

6.4.2. Sistema De Representación Aritmético

Siguiendo el orden, aparece el “Sistema de Representación Aritmético” el cual consta de seis representaciones definidas anteriormente, de las cuales, solo una de ellas aparece en los ejemplos que trabajan el límite de sucesiones, con un porcentaje del 11%; pues este sistema solo se aplica para este tipo de funciones según la definición de la categoría. Debido a que el texto abarca de forma muy reducida este tema las cinco representaciones restantes están ausentes completamente.

Cabe señalar que el texto presenta de forma muy reducida el límite de sucesiones, solamente presenta una aproximación a la definición formal de sucesión y presenta dos ejemplos referentes al tema, en el primer ejemplo se utiliza la definición verbal (R4S), probando que límite de una sucesión es cero (como muestra la figura 36) y en el segundo se verifica por medio del cálculo de límite que una sucesión, si está, converge o diverge; pero en ninguno de los dos se aplica directamente la definición de sucesión, si no que se describe en forma verbal lo referente a la aplicación de esta; de tal forma que la definición queda implícita en el desarrollo de los ejemplos presentados. A este tema le precede el estudio de sucesiones el cual si se presenta en forma más detallada.

Figura 39. Cálculo del límite de la sucesión –

Probar que el límite de la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ es 0.

Solución:

Según la definición, hay que probar que cuanto más grande sea *n*, el valor de la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ se acerca más a cero.

Los términos $\left(\frac{1}{n}\right)$ son $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$

Luego: el límite de la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ es 0.

Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

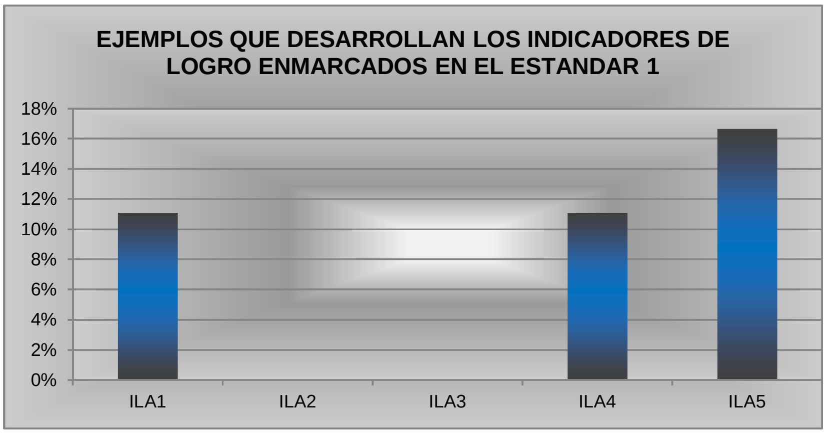
6.4.3. Estándar E1

Por último se identificaron los estándares, que movilizan los ejemplos analizados anteriormente, de la siguiente forma:

En la categoría estándar E1; se encuentran cinco indicadores de logro (subcategorías) codificados anteriormente, en el texto se presentan ejemplos que desarrollan indicadores de logro solamente de un estándar y otros ejemplos desarrollan indicadores de logro de los dos estándares simultáneamente.

En la gráfica 22 se muestran los ejemplos que desarrollan los indicadores de logro del estándar E1 así:

Gráfica 23. Porcentaje de los ejemplos que desarrollan los indicadores de logro enmarcados en el estándar 1.



Fuente: tomado de la investigación.

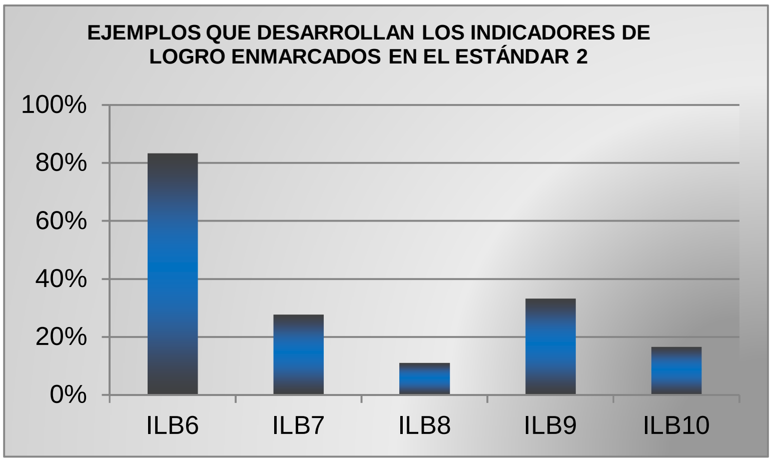
La categoría estándar E1 se refiere a la "Utilización de Técnicas de Aproximación en Procesos Infinitos Numéricos" (P. VAR), en el presente texto, tres ejemplos desarrollan el indicador de logro (ILA5), el cual hace referencia a la "definición verbal", con un porcentaje del 17%; dos ejemplos son del tema relacionado con límite de sucesiones y el otro es de límite de funciones, específicamente en este ejemplo se determina la existencia del límite; también aparecen dos ejemplos que desarrollan el indicador de logro (ILA1) que se refiere a la "determinación del límite de una función por aproximación", con un porcentaje de 11%; aquí prima la utilización de tablas de valores para intuir el valor del límite, ya que, no es explicita la evaluación del límite en el punto al cual tiende la variable independiente, por esto, se intuye el comportamiento del límite por medio de la tabla y de esta forma se encuentra el valor de este.

Por ultimo aparece el indicador de logro (ILA4), el cual se refiere a la definición formal del límite, con relación a este, se presentan dos ejemplos que corresponden al 11%; en estos se aplica la definición formal del límite para demostrar la existencia de este en los dos casos.

6.4.4. Estándar 2

En la gráfica 24 se muestran los ejemplos que desarrollan los indicadores de logro (subcategorías) de la categoría estándar E2 así:

Gráfica 24. Porcentaje de los ejemplos que desarrollan los indicadores de logro enmarcados en el estándar 2.



Fuente: tomado de la investigación.

La categoría estándar E2, hace referencia al “Uso de las Propiedades y Representaciones en los Números Naturales y Reales en el cálculo del límite” (P. NUM), en el texto un 83% de los ejemplos desarrollan el estándar (ILB6); el cual se refiere a la aplicación de propiedades algebraicas y a la evaluación de límites; cabe resaltar que el porcentaje es muy significativo, pues, 15 ejemplos de los 18 analizados desarrollan este indicador, en su gran mayoría los ejemplos evalúan límites, sobretodo en el tema de los límites trigonométricos y en las propiedades de los límites.

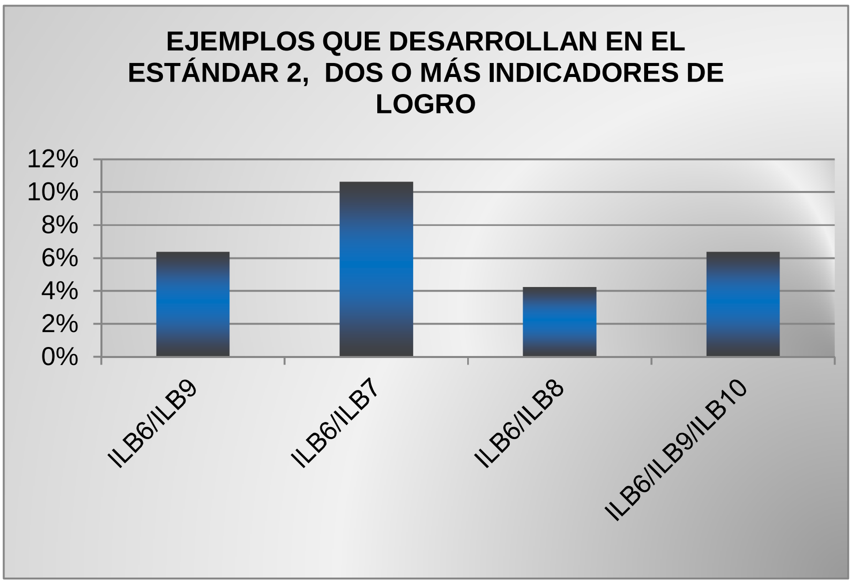
Contrario a esto, un 11% de los ejemplos desarrollan el estándar (ILB8); el cual se refiere al cálculo de límites infinitos, esto porque el texto aborda de forma muy reducida este tema, es decir, solo se presentan dos ejemplos relacionados, en los cuales se trabajan con funciones polinómicas y se aplican propiedades algebraicas para posibilitar el cálculo de estos límites.

Los indicadores de logro ILB7 Y ILB9, hacen referencia al cálculo de límites aplicando sus propiedades, con un porcentaje del 28%, y al cálculo del límite de funciones indeterminadas con un porcentaje del 33% respectivamente, presentando una incidencia significativa.

Adicionalmente a esto aparecen ejemplos que movilizan más de un indicador de logro en cada estándar, en del estándar E1, solamente se presenta un ejemplo donde se desarrollan los indicadores de logro “determina el límite de una función por aproximación”(ILA2) y “aplica la definición verbal del límite”(ILA4); en este ejemplo, se presenta, además de la tabla de valores, una explicación acerca de la tendencia de los datos al acercarse al punto a por derecha y por izquierda, mostrando de forma intuitiva el valor límite.

De la misma forma en el estándar E2, varios ejemplos desarrollan más de un indicador de logro, como se puede observar en la gráfica 24:

Gráfica 25. Porcentaje de los ejemplos que desarrollan en el estándar 2 (E2) dos o más indicadores de logro.



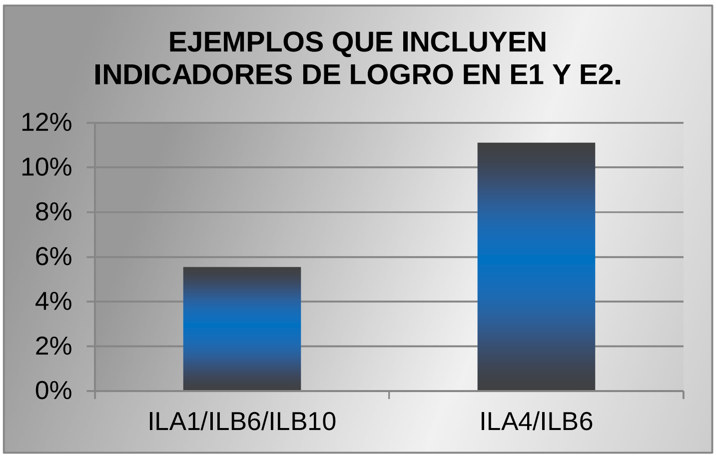
Fuente: tomado de la investigación.

En esta gráfica 24 se puede observar que un porcentaje del 11%, de los ejemplos, desarrolla los indicadores de logro “aplica propiedades algebraicas y evalúa límites de funciones”(ILB6) y “calcula límites aplicando sus propiedades”(ILB/); esto debido a que el texto maneja varios ejemplos, donde se realizan procesos algorítmicos para calcular los límites.

Otro tipo de ejemplos más robustos desarrollan tres indicadores del logro como: “aplica propiedades algebraicas y evalúa límites de funciones” (ILB6), “calcula límites de funciones indeterminadas” (ILB9) y “calcula límites trigonométricos” (ILB10); estos se presentan sobre todo, en los ejemplos que trabajan el tema de límites trigonométricos, ya que para solucionar este tipo de ejemplos, es necesaria la aplicación de propiedades algebraicas, identidades trigonométricas y sustitución directa; principalmente para se trabaja con funciones indeterminadas; esto debido a que en estos ejemplos no presentan ningún tipo de análisis, sino que solamente se limita a calcular el límite correspondiente.

Los ejemplos analizados desarrollan en su gran mayoría los temas planteados en los indicadores de logro analizados, pero cabe resaltar, que muy pocos ejemplos movilizan indicadores de logro de los dos estándares, es decir trabajan temas en forma integrada; en la siguiente gráfica se muestra esta comparación:

Gráfica 26. Porcentaje de los ejemplos que incluyen indicadores de logro en E1 y E2.



Fuente: tomado de la investigación.

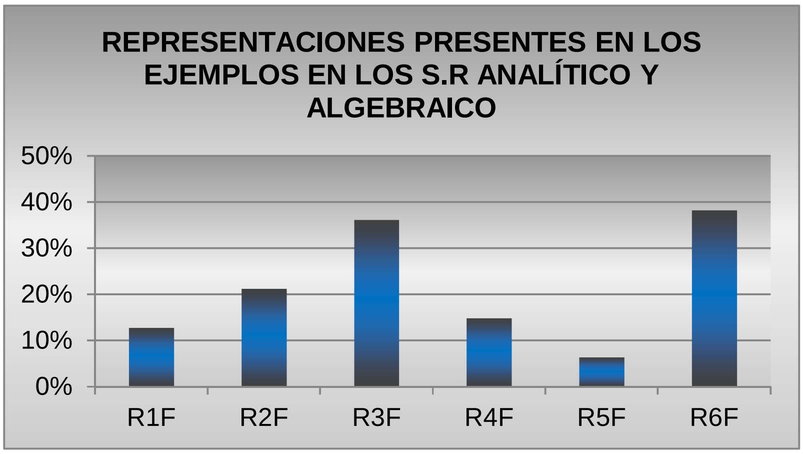
La gráfica 25, muestra que únicamente dos ejemplos de los 18 analizados desarrollan dos indicadores de logro con un porcentaje del 11%; uno perteneciente al primer estándar, específicamente a la subcategoría ILA4 (definición formal) y otro perteneciente al segundo estándar específicamente a la subcategoría ILB6 (aplica propiedades algebraicas y evalúa límites de funciones); estos ejemplos aplican la definición formal del límite para probar su existencia y en el proceso se aplican procesos algebraicos como racionalización y factor común respectivamente.

Solamente un ejemplo, desarrolla tres indicadores de logro, con un porcentaje del 6%; uno de ellos, perteneciente al E1 específicamente la subcategoría ILA1 (determina límites de una función por aproximación) y los otros dos pertenecientes al E2 específicamente la subcategoría ILB6 (aplica propiedades algebraicas y evalúa límites de funciones) y ILB10 (calcula límites trigonométricos). En conclusión los ejemplos planteados en este texto, trabajan los temas de forma aislada, sin realizar contrastaciones entre ellos, siendo esto muy importante a la hora de profundizar los contenidos aprendidos; además la presentación de los temas y el planteamiento de los ejemplos, se realiza de manera muy plana y algorítmica, sin contextualizar los conceptos, para facilitar su comprensión, también es evidente la ausencia de gráficos o imágenes que ilustren el proceso de la solución de los ejemplos, tornándose estos poco accesibles para la comprensión de sus posibles lectores.

6.5. LIBRO HIPERTEXTO 11 EDITORIAL SANTILLANA 2011

6.5.1. Sistemas De Representación Analítico/Algebraico

Gráfica 27. Porcentaje de representaciones presentes en los ejemplos en los S.R analítico y algebraico.



Fuente: tomado de la investigación.

En la gráfica 27, se puede observar que el mayor porcentaje corresponde a la subcategoría “representación algebraica”(R6F), con un porcentaje del 38%; esta representación aparece en un principio, en los ejemplos que trabajan la definición formal del límite, sobre todo en la solución de las inecuaciones que se realizan para encontrar el valor de ε; luego aparece en los ejemplos donde se trabaja con límites indeterminados, donde es necesario factor izar las funciones para obviar la indeterminación y de esta forma poder calcular el límite; también se utiliza está representación, en los ejemplos que trabajan límites trigonométricos, límites al infinito, límite de funciones exponenciales y logarítmicas, aplicándola, en procesos de factorización y simplificación; como se observa en la figura 37.

Figura 40. Cálculo del límite de la función –

Calcular los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$$

Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

A esta subcategoría le sigue la (R3F) “representación simbólica-especifica”, que presenta un porcentaje del 36%; una parte de los ejemplos hace referencia al cálculo de límites aplicando sus propiedades, y se trabaja con funciones racionales, polinómicas, radicales, logarítmicas y exponenciales; realizando únicamente la sustitución directa, como es el caso de la representación simbólica-específica; en esta parte no aparecen aun funciones indeterminadas.

En la segunda parte de los ejemplos, aparecen funciones indeterminadas, donde es necesario aplicar operaciones algebraicas para obviar las indeterminaciones, y posteriormente se procede a realizar la sustitución directa, es decir, la representación simbólica-específica; se trabaja con funciones como las nombradas anteriormente, más algunas funciones trigonométricas donde la sustitución corresponde al ángulo al cual tiende la variable independiente.

La representación que menos aparece en el desarrollo de los ejemplos del libro de texto, es la “definición formal” (R5F), esta definición formaliza la idea intuitiva de que los valores de la función estén tan cercanos como queramos a , siempre que los valores de la variable independiente , estén suficientemente cerca del punto . Para esto, se debe elegir un tan pequeño como se quiera.

Así para todo existe un (dependiente de delta), tal que,

si ,

Lo que quiere decir es que los valores de la variable independiente , pueden estar tan cercanos como queramos al punto , pero nada se dice acerca de la cercanía de a (que a fin de cuentas es lo que interesa).

En conclusión, asimilar la definición de límite y aplicarla es muy difícil, esto, debido a lo abstracto del concepto. Como muestra la figura 38:

Figura 41. Definición formal del límite de la función

Hallar un $\delta > 0$, si $\lim\limits_{x \to 1} x^2 + 3 = 4$ y $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Si $|x + 1| < \delta$ entonces $|(x^2 + 3) - 4| < \varepsilon$, por definición de límite.

$$|(x^2 + 3) - 4| < \frac{1}{2}$$

Se remplaza el valor de ε.

$$-\frac{1}{2} < |(x^2 + 3) - 4| < \frac{1}{2}$$

Se aplica desigualdad con valor absoluto.

$$-\frac{1}{2} < x^2 - 1 < \frac{1}{2}.$$

Se realiza la operación indicada.

Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

En este ejemplo juega un papel importante la aplicación de procesos algebraicos, para encontrar el valor adecuado para ; además la explicaciones son de gran ayuda para comprender los pasos del proceso.

Posteriormente, se encuentra la subcategoría "representación gráfica-cartesiana " (R2F), con un porcentaje que corresponde a un 21%; esta representación se utiliza para explicar de mejor manera los contenidos planteados por el texto; cabe resaltar la presencia de este tipo de representación, pues, en el texto anterior antes de la implementación de los estándares de calidad no se encuentra ninguna gráfica-cartesiana, y se debe mencionar que una de las características principales de esta representación, es su utilidad a la hora de interpretar el concepto de límite, pues es aquí, donde se evidencian los acercamientos al punto al que tiende y también sus imágenes en eje con respecto al límite . Además a través de la representación gráfica, se puede evidenciar y comprender de mejor forma la elección del valor de épsilon y delta respectivamente, y entender el papel de las distancias en la definición formal. La representación gráfica cartesiana también juega un papel importante en el análisis de límites indeterminados, de funciones a trozos, en funciones discontinuas, donde se evidencia que el límite no existe debido a que los límites laterales no coinciden, en la ilustración de los límites al infinito, donde el límite de , cuando , es lo cual significa que si *crece sin cota, entonces lo valores de* se aproximan a *.* (ver gráfica 39)

Figura 39. Gráfica-cartesiana y de la función —

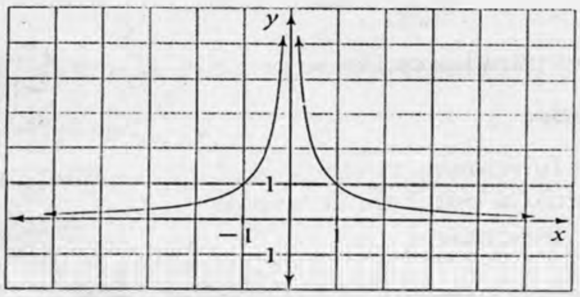
1 **Elaborar una tabla de valores y determinar si el límite de la función $f(x)$ crece o decrece sin cota.**

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{x^2}$$

La tabla de valores es:

x	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	0	$0{,}001$	$0{,}01$	$0{,}1$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	100	10.000	?	1.000.000	10.000	100	0,8414

La gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es:



En la tabla y la gráfica se observa que cuando x se aproxima a 0, tanto por la izquierda o por la derecha; la función $f(x)$ crece sin cota.

Por lo tanto, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

Además, $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty$ y $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Es importante tener presente que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ no existe, a pesar de que los límites laterales son iguales.

Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

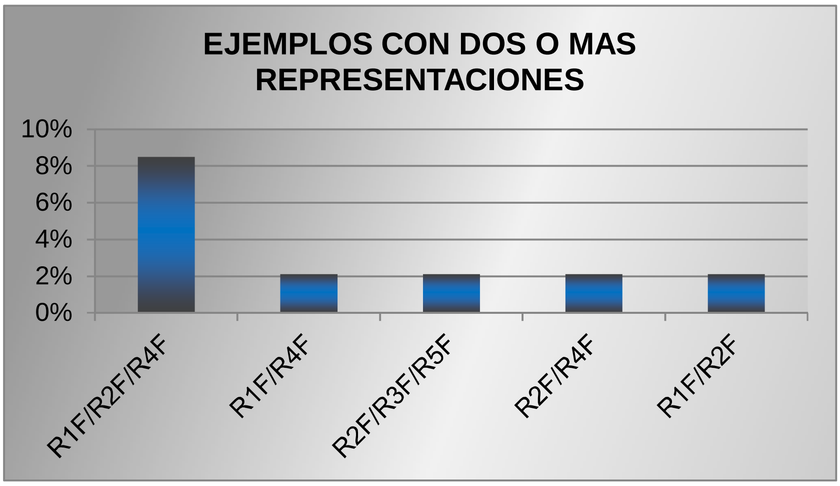
Las funciones que ilustran las gráficas son variadas van desde funciones polinómicas hasta trigonométricas, en algunas se muestra que a pesar que la función no está definida en el punto donde tiende la variable independiente, sin embargo, el límite existe, en otras se muestran los acercamientos por derecha y por izquierda al punto al cual tiende y los acercamientos de la función al límite ; es decir, los valores que toma la función en lugares cercanos a cierto punto y el comportamiento de la misma en una zona muy cercana ha dicho punto. Los ejemplos también utilizan gráficos cartesianos para describir el comportamiento de las ecuaciones de las asíntotas de una función en el tema límites al infinito.

En general la "representación gráfica cartesiana" utilizada adecuadamente ayuda en gran manera para la interpretación y comprensión de los contenidos relacionados con el límite y es importante resaltar que el texto Santillana 2011 aprovecha de manera considerable la versatilidad de esta representación, en la mayoría de los temas relacionados con el concepto de límite, presentando ejemplos muy ricos en representaciones que permiten profundizar en cada tema y entenderlo de mejor manera. Sin embargo esta representación sin una intencionalidad bien estructurada, no realiza grandes aportes a la comprensión de los conceptos, ya que, la representación por sí misma en muchas ocasiones, no dice mucho si no está acompañada por un enunciado que dirija o que organice su intencionalidad y de esta forma pueda convertirse en una herramienta pertinente en los libros de texto.

Por último, aparece la subcategoría "definición verbal"; esta como se explicó anteriormente se refiere: a la explicación de la definición formal del límite y a la descripción de acercamientos por derecha y por izquierda relacionados con el comportamiento del límite de la función; esta representación presenta un porcentaje del 15%; la característica fundamental de está, es que trata de contextualizar el aspecto abstracto de la definición formal, explicando en palabras menos formales y más accesibles el comportamiento de las funciones cuando se aplica esta definición, sobre todo en el análisis de los acercamientos o las distancias a las que hace referencia, cuando se habla de definición formal del límite.

Siguiendo el orden, aparece el "Sistema de Representación Aritmético"; el cual no aparece en el presente texto, ya que, esté no aborda los temas de sucesiones, ni de límite se sucesiones y este sistema esta designado específicamente para las características de este tema, según aparece en las categorías de análisis planteadas.

Gráfica 28. Porcentaje de ejemplos con dos o más representaciones



Fuente: tomado de la investigación.

Como se mencionó anteriormente, algunos ejemplos presentan más de una representación para desarrollar el contenido planteado dentro de un mismo sistema de representación. Así aparecen ejemplos que presentan tres representaciones como: la “representación numérico-tabular”, “gráfica-cartesiana”, y “definición verbal”, con un porcentaje del 9%; ya que son pocos los ejemplos que gozan de esta estructura en comparación con el total de ejemplos analizados, la importancia de contar con varias representaciones en el mismo ejemplo, radica en que este, brinda más alternativas para facilitar la comprensión de los conceptos[21] y además si estas representaciones se utilizan adecuadamente pueden aportar de manera significativa al aprendizaje del concepto de límite. Como se muestra en la figura 40:

[21] Blázquez, S. y Ortega, T. (2001): « *Los sistemas de representación en la enseñanza del límite* ». *ICME-8, Sevilla.* Grupo Editorial Iberoamericana SA de CV. Capítulo XIII, 331-354.

Figura 40. Representaciones R1F, R2F y R3F del límite de la función

—

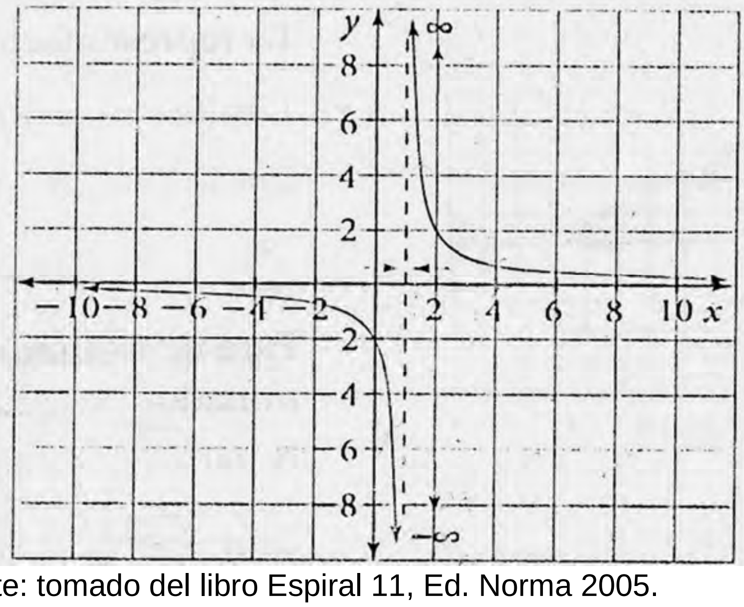
② Dada la función $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$.

a. Elaborar una tabla para valores muy cercanos a 1 y trazar la gráfica.

La tabla correspondiente es:

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	−20	−200	−2.000	−20.000	?	20.000	2.000	200	20

La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ es:



Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

Figura 40. (Continuación)

b. Hallar los límites laterales en $x = 1$.

A partir de la tabla de valores y la gráfica de la función se tiene que:

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, pues a medida que x tiende a 1 por la izquierda se cumple que $f(x)$ decrece sin cota.

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ porque cuando x tiende a 1 por la derecha, $f(x)$ crece sin cota.

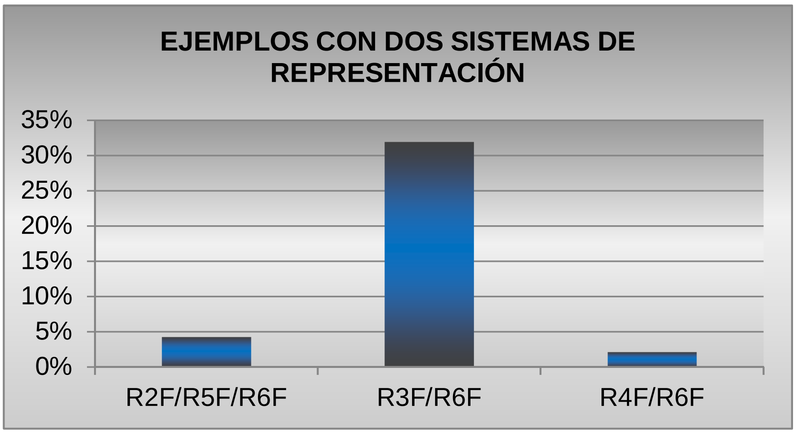
En este caso, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2}{x-1}$ no existe.

Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

En este ejemplo están presentes tres representaciones tales como: R1F, R2F y R3F, ofreciendo un amplio panorama para el análisis del límite de esta función y la respectiva apropiación de los conceptos que se quieren trabajar.

En la gráfica 28, también se observa que existen otros ejemplos con un porcentaje del 2%, donde también se utilizan tres representaciones, pero diferentes a las de los ejemplos anteriores, las cuales son “gráfica-cartesiana”, “simbólica-específica” y “definición formal”; aunque el porcentaje no es significativo, es importante señalar la utilidad de este tipo de ejemplos y sobretodo reconocer que los textos deberían utilizar diferentes representaciones e incluso diferentes sistemas de representación para ilustrar sus ejemplos; de tal forma que estos brinden varias alternativas para su comprensión y los lectores puedan abordar el concepto de límite desde diferentes puntos de vista para lograr una mejor interpretación y aprendizaje del mismo.

Gráfica 29. Porcentaje de ejemplos con dos sistemas de representación.



Fuente: tomado de la investigación.

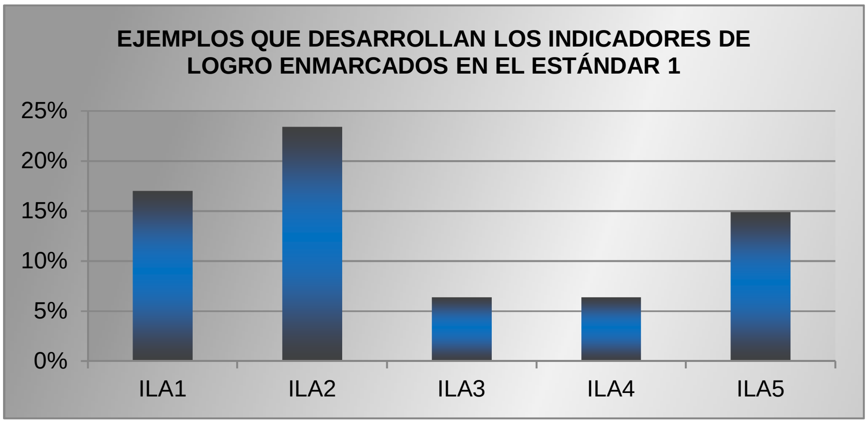
Algunos ejemplos también presentan dos sistemas de representación, en este texto la mayoría de los ejemplos emplean el "Sistema de Representación Analítico" y el "Algebraico", con un porcentaje del 32%; esto se debe a que en su gran mayoría los ejemplos trabajan con funciones de diferentes tipos, y al calcular los limites es necesario realizar procesos algebraicos y sustituciones directas, pero, esta es una característica de los ejemplos algorítmicos, que solo se limitan a calcular límites de forma mecánica, y este tipo de proceso se evidencian en gran parte de los ejemplos de este texto, ya que, se relega a un segundo plano los ejemplos que necesitan de análisis para su resolución y se trabajan los temas relacionados con el límite de manera sistemática y procesual.

Por último la gráfica 29, muestra que un mínimo porcentaje de ejemplos correspondiente al 4% y 2%, trabajan con dos sistemas antes mencionados, pero con diferentes representaciones, pertenecientes a estos, y con las mismas características de los anteriores ejemplos.

6.5.2. Estándar E1

En la gráfica 30 se muestran los ejemplos que desarrollan los indicadores de logro del estándar E1 así:

Gráfica 30. Porcentaje de los ejemplos que desarrolla
los indicadores de logro enmarcados en el estándar 1.



Fuente: tomado de la investigación.

La categoría estándar E1 se refiere a “La utilización de Técnicas de Aproximación en Procesos Infinitos Numéricos” (P. VAR), en el texto once ejemplos desarrollan el indicador de logro (ILA2), el cual hace referencia a “la interpretación y/o definición gráfica del límite de una función”, con un porcentaje significativo del 23%; en este se muestran graficas cartesianas utilizadas como apoyo para aclarar los temas relacionados con el límite, además estas se utilizan de forma eficiente, pues describen las características más relevantes, aunque la mayoría carecen de enunciados que complementen y hagan una utilización óptima de este tipo de representación. Es importante mencionar que este tipo de representación no aparece en el texto antes de la implementación de los estándares curriculares, sobretodo en el desarrollo de los ejemplos, el presente texto se caracteriza por presentar un número considerable de ejemplos en diversos temas del concepto de límite, pero mantiene una estructura algorítmica en su solución.

Un número similar de ejemplos desarrollan los indicadores de logro “determina el límite de una función por aproximación” (ILA1) y “aplica la definición verbal de límite” (ILA5), con un porcentaje de 17% y 15% respectivamente. En los ejemplos del primer tema se desarrolla una idea intuitiva del límite por medio de aproximaciones, sobre todo en los ejemplos donde se introduce el concepto para dar una noción del mismo, y poder abordar la definición formal, también para introducir el tema límites infinitos y límites exponenciales, generalmente este tipo de ejemplos es muy útil para los estudiantes, pues en estos, se trata de contextualizar las características más relevantes del concepto, para intentar dar sentido a la definición formal la cual es abordada posteriormente.

La utilidad de este tema radica en mostrar el límite como aproximaciones sucesivas por medio de tablas de valores, se complementa de forma muy eficaz con la representación gráfica, para brindar ejemplos mucho más significativos y eficientes a la hora de entender cada tema. Con relación al segundo tema “definición verbal del límite”, esta se utiliza en los ejemplos en forma muy limitada, ya que, los ejemplos que plantea el texto son en su gran mayoría de corte algorítmico, es decir, no se adjunta una explicación detallada que ayude a comprender mejor la intencionalidad de cada ejemplo; como lo afirma Blázquez (2001), al referirse a la definición verbal como una concepción del límite dinámica tan rigurosa y tan abstracta como la definición formal pero sin el formalismo de esta, más vinculada a fenómenos reales y más próxima al desarrollo cognitivo del alumno.[22]

Por ultimo aparecen los indicadores de logro “determina si existen, la ecuación de las asíntotas” (ILA3) y “aplica la definición formal de límite” (ILA5), ambas con un porcentaje de 6%; con respecto al primer tema los ejemplos que aparecen en el texto solo se limitan a encontrar las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de las funciones, es decir, falta una introducción al tema donde se encadene los temas anteriores, en los cuales se habla de límites de funciones exponenciales y logarítmicas con el papel que juega el límite en el cálculo de las ecuaciones de las asíntotas, ya que, solamente aparece una definición de asíntotas verticales y horizontales he inmediatamente se prosigue a desarrollar ejemplos donde se pide hallar las ecuaciones de las asíntotas en un proceso sistemático sin mucho análisis.

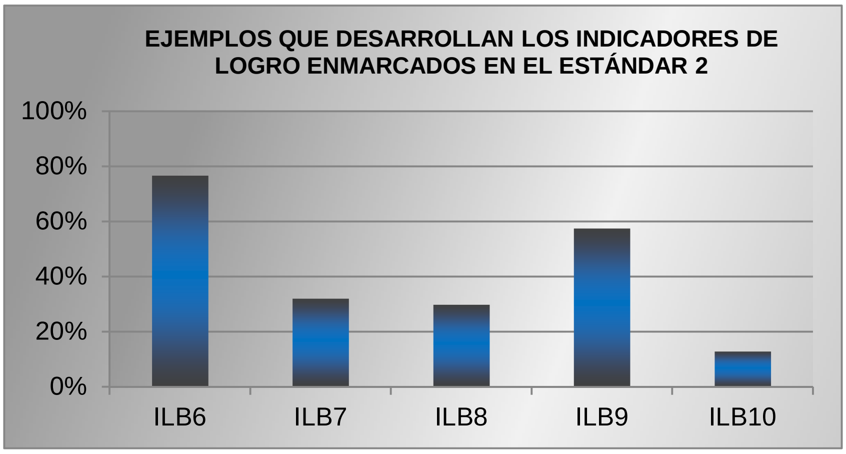
Con relación a la ”definición formal”, se presenta generalmente después de haber abordado el tema de las aproximaciones, sin embargo, el texto se limita a realizar ejemplos en los que se aplica la definición de forma muy algorítmica y algebraica, sin ahondar en el verdadero sentido que conlleva la interpretación del concepto de límite debido a su dificultad y abstracción, aunque en este texto es importante resaltar que se juega con la representación gráfica como apoyo para diversos temas tratados, incluido la definición formal.

6.5.3. Estándar E2

En la gráfica 31, se muestran los ejemplos que desarrollan los indicadores de logro del estándar E2 así:

[22] Blázquez, S. y Ortega, T. (2001): « *Los sistemas de representación en la enseñanza del límite* ». *ICME-8, Sevilla.* Grupo Editorial Iberoamericana SA de CV. Capítulo XIII, 331-354.

Gráfica 31. Porcentaje de los ejemplos que desarrollan los indicadores de logro enmarcados en el estándar 2.



Fuente: tomado de la investigación.

En la gráfica 31, se puede observar que el indicador de logro que más se desarrolla en el presente texto es “aplica propiedades algebraicas y evalúa límite de funciones” (ILB6), con un porcentaje del 77%, este resultado es casi lógico debido a que el texto trabaja los ejemplos de forma procesual y mecánica, donde es necesario la utilización de procesos algebraicos y sustituciones directas para poder encontrar los valores de los limites propuestos.

A este tema le sigue el indicador de logro “calcula el límite de funciones indeterminadas”, con un porcentaje del 57%, esto debido a que la mayoría de ejemplos trabaja con este tipo de funciones en diferentes temas como límites trigonométricos y límites en el infinito.

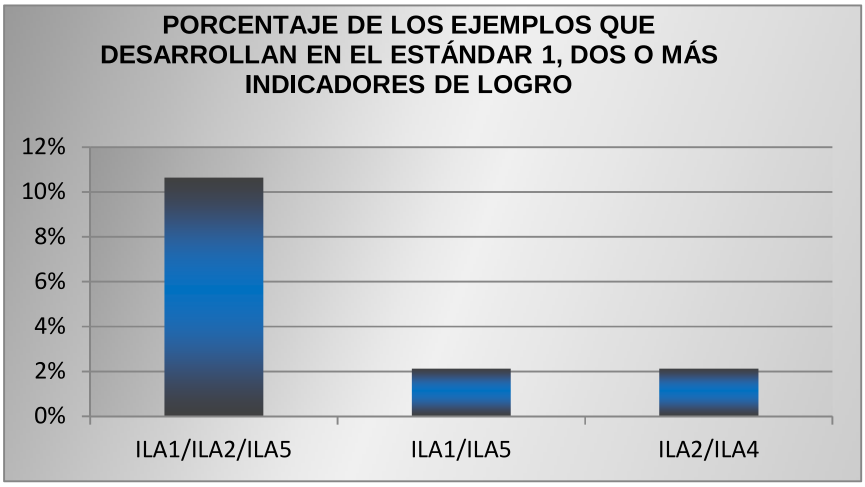
Luego aparecen los indicadores de logro “calcula límites aplicando sus propiedades” y “calcula límites infinitos”, con porcentajes similares del 15% y 14% respectivamente; con respecto a las propiedades del límite, estas se aplican a diversas funciones desde polinómicas hasta radicales, en los ejemplos se evidencia las características fundamentales de estas, y su utilidad a la hora de simplificar procedimientos al calcular los límites. Los ejemplos referentes a límites infinitos se apoyan en la “representación numérica tabular” y “gráfica-cartesiana”, para exponer de mejor manera su contenido; en contraste los límites en el infinito trabajan con la representación algebraica por que los ejemplos solo se limitan a realizan cálculos de límites.

Por último, se analiza un pequeño porcentaje de ejemplos que movilizan indicadores de logro de los dos estándares conjuntamente, con un porcentaje del 4% y 2%; construyéndose como los ejemplos más completos y ricos tanto en representaciones como en temáticas abordadas en este texto; pero que en realidad carecen de versatilidad la hora de presentar innovaciones para desarrollar la capacidad analítica, ya que, los ejemplos que desarrollan persisten en su naturaleza algorítmica.

Como se mencionó en el texto anteriormente analizado, en la categoría estándar E1 se encuentran cinco indicadores de logro (subcategorías); en el presente texto se presentan el porcentaje de ejemplos que movilizan los indicadores de logro de cada estándar, también los ejemplos que desarrollan indicadores de logro solamente de un estándar y otros ejemplos que desarrollan indicadores de logro de los dos estándares simultáneamente.

En contraste con lo anterior es importante analizar los ejemplos que dentro del mismo estándar desarrollan varios indicadores de logro, como se observa en la gráfica 32:

Gráfica 32. Porcentaje de los ejemplos que desarrollan en el estándar 1 (E1) dos o más indicadores de logro.



Fuente: tomado de la investigación.

Con un porcentaje del 11%, los ejemplos analizados desarrollan tres indicadores de logro integradamente los cuales son: “determina el límite de una función por aproximación” (ILA1), “interpreta y/o define gráficamente el límite de una función”,(ILA2) y “aplica la definición formal de límite” (ILA5); estos tres indicadores se complementan a la hora de abordar las diferentes temáticas relacionadas, ya que, sus características permiten interpretar y profundizar de forma más efectiva, la intencionalidad que presenta cada ejemplo al desarrollar los temas planteados referentes al límite, como es el caso de los límites infinitos, al infinito, y la definición formal del límite, donde se hace necesario abordar con anterioridad estos temas, para comprender verdaderamente el significado de la tendencia al infinito, ya que, este es un concepto abstracto y difícilmente se puede contextualizar para poder analizarlo desde diferentes perspectivas; en el texto los ejemplos que integran estos tres temas, tienen la intencionalidad de explicar de manera eficaz este tipo acercamiento, aunque no se explota de manera óptima la riqueza de estos, se intenta dar el mejor uso para alcanzar el logro propuesto.

Por ultimo aparecen ejemplos que desarrollan dos indicadores de logro, el primero "determina el límite de una función por aproximación" (ILA1), y "aplica la definición formal de límite" (ILA5), con igual porcentaje correspondiente al 2% y el segundo desarrolla los indicadores "interpreta y/o define gráficamente el límite de una función",(ILA2) y "aplica la definición formal de límite" (ILA4), trabajando como complemento para hacer que los ejemplos sean más accesibles y eficaces a la hora de estudiar los temas presentados. (Ver figura 41):

Figura 41. Representación numérico-tabular y gráfica-cartesiana del límite de la función

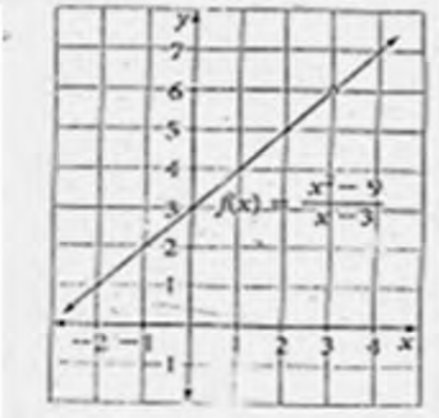
Determinar el límite indicado para cada una de las funciones dadas. Luego, realizar su representación gráfica.

a. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

Se elabora una tabla de valores, tomando valores cercanos a 3, así:

x	2,8	2,89	2,9	2,99	2,999	3	3,001	3,01	3,1	3,2	3,3
$f(x)$	5,8	5,89	5,9	5,99	5,999	?	6,001	6,01	6,1	6,2	6,3

Los valores 2,8; 2,89; 2,9; 2,99; 2,999 son acercamientos a 3 por la izquierda y los valores 3,001; 3,01; 3,1; 3,2; 3,3 son acercamientos a 3 por la derecha, no interesa el valor en 3. Luego, cuando x se aproxima a 3 por la izquierda y por la derecha, la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ se acerca a 6. Es decir, $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$. Ver figura 1.



Fuente: tomado del libro Espiral 11, Ed. Norma 2005.

.Análogamente el texto presenta ejemplos que desarrollan indicadores de logro del estándar E2 como se puede observar en la gráfica 33:

Gráfica 33. Porcentaje de los ejemplos que desarrollan en el estándar 2 (E2) dos o más indicadores de logro.

Fuente: tomado de investigación.

Como se puede observar en la gráfica 33, varios ejemplos desarrollan hasta cuatro indicadores de logro, pero el mayor número de estos, se concentra en 10 ejemplos que presentan los indicadores "aplica propiedades algebraicas y evalúa límites de funciones" (ILB6) y "calcula límites aplicando sus propiedades" (ILB7); estos ejemplos se caracterizan por realizar cálculos para encontrar el valor de los límites; también aparecen ejemplos con tres indicadores de logro como: indicadores "aplica propiedades algebraicas y evalúa límites de funciones" (ILB6), "calcula límites infinitos" (ILB8) y "calcula límites de funciones indeterminadas"(ILB9), con un porcentaje del 17%, de la misma forma 4 ejemplos desarrollan tres indicadores diferentes en su combinación, con un porcentaje del 9%, los cuales son: "aplica propiedades algebraicas y evalúa límites de funciones" (ILB6), "calcula límites de funciones indeterminadas"(ILB9) y "calcula límites trigonométricos" (ILB10).

Cabe resaltar que 2 ejemplos desarrollan cuatro indicadores de logro como los nombrados anteriormente, esto permite inferir que los temas de este estándar están directamente relacionados con la temática referente al límite, o es el estándar más pertinente con relaciona a la estructura del texto, y esto tiene coherencia debido a que la definición del estándar E2 antes mencionada, hace referencia al "Uso de las Propiedades y Representaciones en los Números

Naturales y Reales en el cálculo del límite” (P. NUM) y esto está relacionado directamente con la estructura algorítmica del presente texto.

6.6. COMPARACIÓN DE TEXTOS SANTILLANA ANTES Y DESPUÉS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LOS ESTÁNDARES CURRICULARES DE CALIDAD

Hasta el momento se ha analizado las características más relevantes de los textos según las categorías planteadas tanto en el aspecto semiótico como curricular, también se han realizado comparaciones internas relacionadas con los sistemas de representación y los estándares que moviliza el concepto de límite, los cuales se constituyen como categorías de análisis en este estudio.

La anterior información permitió realizar una comparación de los textos pertenecientes a la misma editorial en este caso Santillana, donde se evidenció las diferencias y semejanzas de los textos analizados antes y después de la implementación de los estándares curriculares, como es el caso del libro de texto Santillana “Matemática 11” 1995 y Santillana “Hipertexto 11” 2011; como se puede observar en el año de edición de cada uno de estos, surgen en momentos diferentes en el desarrollo educativo de nuestro país y lo más relevante es que este lapso de tiempo contiene la implementación de los estándares curriculares de calidad que se difundió en el año 2003.

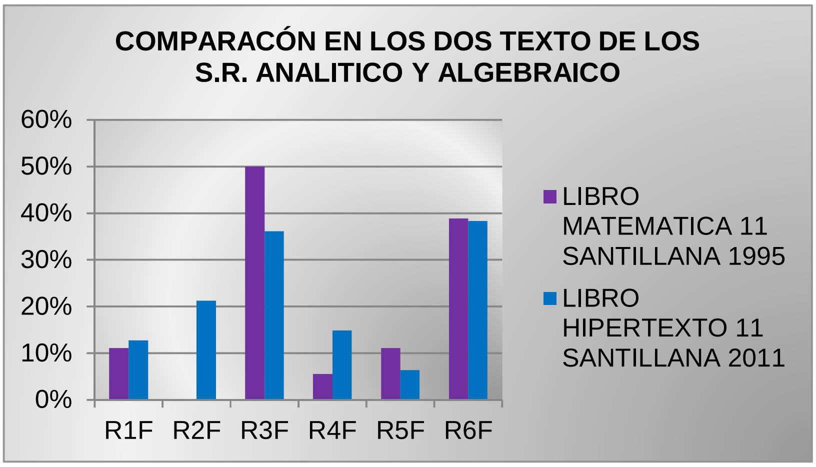
El punto de partida para la elaboración de los estándares curriculares fueron los lineamientos curriculares producidos por el Ministerio de Educación. Su desarrollo se enriqueció con la participación de maestros de diversas regiones y de académicos, así como con la consulta a currículos de otros países.

Con los estándares curriculares se busca dar mayor concreción a los lineamientos expedidos, de manera que las instituciones escolares cuenten con una información común para formular sus planes de estudio, respetando su autonomía.

A continuación se inicia comparando el aspecto semiótico para luego pasar al curricular.

6.6.1. Comparación Sistema Analítico/Algebraico

Gráfica 34. Comparación de los libros antes y después de la Implementación de los estándares en el S.R. analítico-algebraico.



Fuente: tomado de investigación

En la gráfica 34, se puede observar que el libro de texto “Matemáticas 11” presenta un diferencia considerable del 13% en la “representación simbólico específica”, con relación al libro de texto “Hipertexto 11”, en realidad el porcentaje es similar ya que el segundo texto tiene mayor número de ejemplos, y que está representación tenga un porcentaje mayor en los dos textos era de esperarse debido a que los dos textos presentan ejemplos mecánicos enfocados en el cálculo de límites únicamente, como se mencionó anteriormente.

También la gráfica 34, muestra que la representación algebraica presenta el segundo mayor porcentaje en los dos textos con una diferencia en este caso del 1%, por las razones anteriormente mencionadas. Con relación a la “representación gráfica cartesiana” la diferencia es notable ya que en el texto “Matematicas11” está completamente ausente esta representación, mientras que en el texto “Hipertexto 11”, presenta un porcentaje del 21%.

Otras representaciones como la “numérico-tabular”, presentan porcentajes similares del 11% y 13% respectivamente, aunque cabe anotar que el texto “Hipertexto 11”, no solo emplea esta representación para introducir el concepto de límite, sino que también la utiliza en otros temas como en límites infinitos.

Con respecto a la definición verbal se puede observar que los porcentajes difieren en un 9%, esto debido a que el texto “Hipertexto 11”, tiene más ejemplos en comparación con el texto “matematicas11”, pero en general la utilización de esta representación en ambos textos es muy limitada. De la misma forma ocurre con la definición formal la diferencia de porcentaje es del 5%, por la razones mencionadas antes.

En conclusión, la estructura de estos dos textos en realidad no presenta mayores diferencias sobre todo en la forma como se aborda el concepto de límite, pues en ambos casos se realiza de forma mecánica y los ejemplos que se presentan son de corte algorítmico, donde no se busca desarrollar en el lector la capacidad analítica, solo se presenta una información acerca del tema en cuestión y se presenta una serie de ejemplos que inducen a ejercitarse en el cálculo de límites, pero no se hace especial énfasis en profundizar en el significado del concepto y de esta forma interpretar sus características más relevantes.

6.6.2. Comparación Sistema Aritmético

Con respecto a este sistema, la diferencia si es importante ya que en el "Hipertexto11" no aparece el límite de sucesiones y por lo tanto tampoco el "Sistema de Representación Aritmético", ya que, este fue designado especialmente para ser utilizado en el planteamiento de este tipo de temas, debido a sus características, como se ve en el distribución de los pensamientos matemáticos, pues el límite de sucesiones se enmarca en el pensamiento numérico. De todas formas, aunque el tema de límite de sucesiones si aparece en el texto "Matemáticas 11", este se borda de forma muy resumida, solamente se presenta una pequeña introducción y dos ejemplos, con lo cual es poco lo que se puede decir con relación a sus características.

6.6.3. Comparación Indicadores de Logro

Gráfica 35: comparación de los libros antes y después de la implementación de los estándares

Fuente: tomado de la investigación.

En este caso la comparación radico en observar que indicadores de logro se desarrollan en ambos textos, tomando como base los indicadores planteados en el texto “Hipertexto 11”, ya que, en el texto “Matemáticas 11” aún no se implementaban los estándares curriculares de calidad.

En primera instancia se tomó el estándar E1 que se refiere a “La Utilización de Técnicas de Aproximación en Procesos Infinitos Numéricos” (P. VAR), y se analizó como los ejemplos planteados en cada texto, desarrollan cada indicador de logro o si estos, son pertinentes a la hora de abordar este tema.

Una diferencia significativa que se puede observar en la gráfica 35, es que el indicador de logro “interpreta y/o define gráficamente el límite de una función” (ILA2) no aparece en el texto “Matemáticas 11” esto debido a que la representación gráfica cartesiana tampoco aparece en este texto específicamente en los ejemplos. Tampoco aparece el indicador de logro “determina si existen la ecuación de las asíntotas horizontales, verticales u oblicuas de una función” (ILA2), esto debido a que el texto “Matemáticas 11” no aborda el tema en cuestión.

La diferencia de porcentaje en el indicador de logro “determina el límite de una función por aproximación” (ILA1) es del 4%, esto debido a la diferencia en el número de ejemplos en cada texto, pero en general se aborda de manera similar en ambos textos. Lo mismo ocurre con el indicador de logro “aplica la definición verbal del límite” (ILA5).

En conclusión con respecto a este estándar las diferencias son muy notorias ya que existen varios temas que no se presentan en el texto “Matemáticas 11” antes de la implementación los estándares y los cuales si se desarrollan en el texto más actual “Hipertexto 11”, a pesar que la forma de presentar los ejemplos en ambos textos es similar, el texto actual presenta un considerable aumento en los ejemplos propuestos, además este presenta gráficas cartesianas para ilustrar de mejor manera los contenidos que se pretenden analizar en cada ejemplo.

Gráfica 36. Comparación de los libros antes y después de la implementación de los estándares.

Fuente: tomado de la investigación.

Con respecto al Estándar E2 el cual se refiere a "Uso de las propiedades y Representaciones en los Números Naturales y Reales en el Cálculo del Límite" (P. NUM), la diferencia en porcentajes más marcada se da en el indicador de logro "calcula límites de funciones indeterminadas" (ILB9), debido a que el texto actual presenta mayor número de ejemplos y en gran parte de estos sobre todo en los temas relacionados con limites trigonométricos, límites al infinito entre otros, se trabaja con diferentes tipos de funciones donde varias de ellas son indeterminadas, por lo tanto, gran parte de los ejemplos hacen referencia a este tipo de funciones en diferentes temas planteados en el texto.

El indicador de logro "aplica propiedades algebraicas y evalúa límites de funciones" (ILB6), cuenta con un porcentaje considerable en comparación con los otros indicadores, pero como ya se mencionó anteriormente su aparición es debido a que la mayoría de ejemplos planteados en los dos textos desarrollan procesos algorítmicos para su solución.

El indicador de logro que se desarrolla en la menor cantidad de ejemplos es el que se refiere al "cálculo de limites trigonométricos" (ILB10), ya que el número de ejemplos utilizados para abordar este tema es muy pequeño en ambos textos, estos solo se limitan a evaluar límites y aplicar identidades trigonométricas. Los indicadores restantes, se presentan de forma similar en los dos textos.

En conclusión con relación a los indicadores de logro que pertenecen a este estándar, en su totalidad estos se desarrollan en los dos textos y la forma como lo hacen, es similar en ambos textos, salvo que en "Hipertexto 11" se presentan un aumento considerable de ejemplos con relación al texto anterior, pero en las características de su estructura no se notan cambios sustanciales.

En este sentido se puede inferir que la implementación de los estándares únicamente se ve reflejada en la organización de los contenidos, pero no en la forma como se exponen las temáticas en el texto ya que no se notan cambios considerables de la edición actual a la anterior.

CONCLUSIONES

A raíz del análisis que se realizó y teniendo en cuenta los objetivos planteados se formulan las siguientes conclusiones:

Con relación al concepto de límite y teniendo en cuenta los sistemas de representación y estándares básicos de calidad se concluyó lo siguiente:

Los sistemas de representación juegan un papel importante en la estructura explicativa de los textos, pues es a través de ellos como se logra dar sentido a muchas características de los conceptos matemáticos como el límite, que no se logran explicar fácilmente, porque los objetos matemáticos no son objetos del mundo real o material.

En la mayoría de los casos, los lectores buscan encontrar en los textos, ejemplos reveladores que logren aclarar las dudas que deja la lectura de la teoría que se plantea en los mismos; en ocasiones, es solo a través de los ejemplos como se logra comprender las temáticas planteadas y más en el tema del límite de funciones, el cual se caracteriza por ser tan difícil y abstracto para lograr su comprensión. Por esto, es necesario que los textos se conviertan en una alternativa pertinente a la hora aprender el concepto de límite y no que lleven a los lectores a solucionar problemas mecánicamente, sin entender el sentido de los conceptos estudiados.

- En los ejemplos de los textos analizados predomina el tratamiento con representaciones analíticas y algebraicas, con la intención de desarrollar destrezas: para manipular la simbología de la definición $\varepsilon - \delta$, para calcular límites indeterminados, para aplicar propiedades de límites, entre otras, pero se descuida el diseño de ejemplos donde se utilicen las representaciones con una coherencia e intencionalidad, que permita despertar en el lector un conflicto cognitivo, que aporte significativamente a la comprensión y así al aprendizaje de las temáticas relacionadas con el límite Sierpinska (1990),

- En los textos publicados, antes de la implementación de los estándares básicos de matemáticas, se privilegia el Sistema de Representación Algebraico para abordar la definición formal de límite, en cambio, en los textos publicados, después de implementación, se privilegia el uso de representaciones: gráfico-cartesianas, tabulares y verbales, que pretenden hacer ostensiva la definición formal. En consecuencia, los textos actuales brindan al lector una mejor comprensión del concepto, pues según Dreyfus (1991), es necesario utilizar sistemáticamente varios sistemas de representación e incidir en sus relaciones desde el principio de la enseñanza, para evitar que los estudiantes obtengan visiones sesgadas de los conceptos.

- Es importante resaltar que en las ediciones de texto publicadas antes de la implementación de los estándares básicos de matemáticas, se presentan los contenidos relacionados con el límite, de forma similar que en las publicaciones actuales, sin embargo, en las primeras no se enfatiza en el trabajo con competencias matemáticas como en las segundas, donde se utilizan las representaciones como herramientas para la comunicación del lenguaje matemático, buscando desarrollar en el lector el dominio de diferentes sistemas de representación para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista.[23]

- En la estructura de los ejemplos que presentan en las ediciones publicadas antes de la implementación de los estándares, se realiza una descripción minuciosa de los contenidos y representaciones del concepto de límite, mostrando de forma explícita la mayoría de las características que se pretenden comunicar, mientras que, en las ediciones publicadas posteriormente, se privilegia una estructura que invita al análisis y razonamiento matemático, donde los planteamientos de los ejemplos no revelan toda la información, permitiendo al lector indagar, conjeturar y deducir los contenidos que se pretenden desarrollar.

- Llama la atención que la representación gráfica-cartesiana, se presenta con mayor frecuencia en las ediciones de textos actuales, en comparación, con las ediciones publicadas antes de la implementación de los estándares básicos de matemáticas; esto debido, a que las competencias matemáticas privilegian el uso de representaciones gráficas, para lograr una mejor comprensión de los conceptos, ya que, ésta proporciona una visión más completa a la hora de abordar el concepto de límite. Esta representación ayuda en gran manera en la interpretación de la definición formal, específicamente, en lo concerniente al concepto de valor absoluto, también es útil para entender las tendencias de las variables y en el trabajo con asíntotas de las funciones.

[23] Ministerio de educación nacional. (2003) Matemáticas. Estándares básicos de competencias en matemáticas. MEN. Bogotá. 34 p.

RECOMENDACIONES

La estructura mecánica y algorítmica que manejan muchos libros de texto escolares incluyendo algunos analizados en este estudio no aporta para el desarrollo de la capacidad analítica de los lectores, si no, que los sumerge en un estancamiento cognitivo, donde no van a ser capaces de enfrentarse a problemas reestructurados que se salgan del esquema que han adquirido, ni mucho menos aplicar sus conocimientos a situaciones problema, en las cuales es vital comprender el verdadero significado de los conceptos.

- Es importante que los autores de los textos tengan en cuenta que, no solamente deben presentar ejemplos cargados de representaciones, ya que esto, solo adornaría la presentación de los ejemplos; según Sierpinska (1990), la importancia de utilizar varias representaciones radica en la coherencia e intencionalidad que éstas tengan al complementarse de tal manera que logren despertar en el lector un conflicto cognitivo que aporte significativamente a la comprensión y así al aprendizaje de las temáticas relacionadas con el límite.

- Se recomienda a los docentes, realizar un estudio exhaustivo, de tipo: semiótico, epistemológico y contextual situado, a las representaciones que presentan los ejemplos del concepto de límite en los textos, para comprender su sentido, y así crear nuevos ejemplos que combinen diferentes tipos de representaciones, que aporten a un mejor aprendizaje.

- Se recomienda a los estudiantes que además de buscar ser competentes en la habilidad para solucionar problemas por medio de procesos algorítmicos, tengan en cuenta los otros tipos de representaciones como: la representación numérico- tabular, gráfica y verbal que acompañan a éstos, para dar verdadero sentido al concepto de límite y desarrollar destrezas para argumentar y comunicar sus conocimientos.

BIBLIOGRAFÍA

ARTIGUE, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? En: Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.1998, vol. 1 n_o.1,.p. 99-105

BLÁSQUEZ, S. y ORTEGA Tomás, Sistemas de representación en la enseñanza del límite. Universidad de Valladolid (España) 2001 pág. 229-230

CASTRO, E. y CASTRO, E. Representaciones y modelización. En: L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* Barcelona, España: Horsori.1997, vol. 11 n_o. DAVIS, R. Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education. Norwood, NJ: Ablex, 1984, 1 .p. 95-124.

CHEVALLARD, Yves. La Transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado. 3 ed. Argentina.: Copyright Aique Grupo editor S.A.1998. .p. 63-105

CLAROS, F., SÁNCHEZ, M. y Coriat, M. (2007). Fenómenos que organizan el límite. [En línea] <http://www.pna.es/Numeros/pdf/Claros2007Fenomenos.pdf> [citado el 3 de octubre de 2011]

CORNU, Bernard. (1991) Limits. En: Advanced Mathematical Thinking. 3 ed. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991, .p. 153-165

DELGADO G. (1998). Estudio Microgenético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso. Tesis Doctoral en matemáticas. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona. Departament de Didáctica de les Mathemá tiques i de les CienciesExperimentals, 1998. 421 p.

DUVAL, R. Semiosis y pensamiento humano. Cali, Colombia. Peter Lang S. A y Artes Gráficas Univalle, 1999. 576 p.

ENCUENTRO COLOMBIANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA. (13, 2010: Bogotá, Colombia). Análisis de textos escolares para el diseño de situaciones de enseñanza. Memoria 11°, Bogotá D.C.: Universidad Di strital Francisco José de Caldas y la Universidad Pedagógica Nacional, 2010.

ENCUENTRO COLOMBIANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA. (8: 8-10, marzo, 2007: Cali Colombia). Análisis de textos escolares en los dos primeros ciclos de la educación básica, identificando el rol de las figuras geométricas, la visualización y los factores de visibilidad en el aprendizaje del área de las figuras geométricas bidimensionales. Cali: Universidad del valle, 2007

GARCÍA, G., SERRANO, C. y ESPÍTIA, L. El concepto de función en textos escolares. Bogotá. D.C.1997., Colciencias – U.P.N. 84 p.

GOODMAN, N. (1976). Languages of art (rev. ed.). Amherst, MA: University of Massachusetts Press, 48 p.

GROSSBERG, S. How does a brain build a cognitive code. Psychological Review, 1980, Vol. 87, .p. 1-51

GUACANEME, E. Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas. Tesis de maestría no publicada. Cali, Colombia: Universidad del Valle. 2001, .p. 46-70

GUTIÉRREZ, A. La investigación en didáctica de las matemáticas, en Gutiérrez, A. (ed.), *Área de conocimiento Didáctica de la Matemática* (colección "Matemáticas: Cultura y aprendizaje"). (Síntesis: Madrid), 1991, nº 1, .p. 149-194.

HITT, F. Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En: Investigaciones en Matemática Educativa. Grupo Editorial Iberoamericana. 1996, .p. 245-264.

KAPUT, J. y GOLDIN, G. Representation Systems and Mathematics. En: Janvier, C. Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. Ed. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. New Jersey, USA, 1987. .p. 397- 431

LEITHOLD, Louis. Funciones, Límite y continuidad. En: El Cálculo con geometría analítica. 7 ed. Harla, S. A. México. 1994, .p. 1 - 93

LOVE, E. y PIMM, D. This is so: a text on texts. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), International handbooks in mathematics education. 1996. Dordrecht Netherlands: Kluwer, pp. 371-410.

MEDINA, Ana Cecilia. Concepciones del concepto de límite en estudiantes universitarios. Trabajo de grado (Maestría en Docencia de la Matemática). Bogotá D.C. :Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias y Tecnología. Departamento de Matemáticas. 2001, 231 h.

Ministerio de Educación Nacional (2003) Matemáticas. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. MEN. Bogotá - Colombia. 47 p.

Ministerio de Educación Nacional (2003) Matemáticas. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. MEN. Gados once. Bogotá - Colombia. 56 p.

Ministerio de Educación Nacional (1998) Lineamientos curriculares en Matemáticas. MEN. Bogotá – Colombia, .P. 76 – 78

PALMER, S. E. Fundamental aspects of cognitive representation. In E. Rosch & B. B. Lloyd, ed, Cognition and categorization. Hillsdale, NJ: Lawrence Eribaum Associates, 1977, 87 p.

PEPIN, B. et al. Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning culture. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 2001, Vol. 33, n_o. 5. 17 p.

RICO L, .y CORIAT M. La asignatura didáctica de la matemática en el bachillerato en la universidad de Granada. En: Actas del congreso de las didácticas específicas en el bachillerato. Universidad Santiago de Compostela. España, 1992, .p. 569 - 666

ROMERO, I y RICO, L. Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria. En: Revista EMA, Una empresa Docente. Universidad de los Andes. Colombia, 1999, Vol. 4, n_o. 2, .p. 117 - 151

SÁNCHEZ Y CONTRERAS. Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función: una perspectiva desde la noción de obstáculo. En: Enseñanza de las Ciencias, 1998, Vol. 16, n_o. 1, .p. 73-84.

SANCHEZ GOMEZ, C et al. Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo xx. En: Revista de Investigación Didáctica, 2004, Vol. 22 n_o. 3. 18 p

SIERRA, M., GONZÁLEZ, M.T. y LÓPEZ, C. El concepto de continuidad en los manuales escolares de educación secundaria de la segunda mitad del siglo xx. 2003. 96 p.

SIERRA, M., GONZÁLEZ, A. y LÓPEZ, C. Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de bachillerato y curso de orientación universitaria. Enseñanza de las ciencias. En: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1999, Vol. 17, n_o. 3, .p. 76 - 98

SIERPINSKA, A. Obstáculos epistemológicos relativos a la noción de límite. Traducido por, DELGADO, Cesar Augusto, 1985. .p. 165 – 248.

SIERPINSKA, A. Humanitiesstudents y epistemological obstacles related to limits. En: Educational Studies in Mathematics, 1987, Vol. 18, .p. 371 – 397.

SONSOLES BLÁZQUEZ, S., et al. Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. En: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 2006, vol. 9 n_o.2, .p. 189-210

SCHUBRING, G. On the methodology of analyzing historical textbooks: lacroix as textbooks author. For the Learning of Mathematics*,* 1987, Vol. 7 n_o. 3, 235 p .

TALL, D. y VINNER, S. Concept Image y Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. En: Educational Studies in Mathematics,1981, Vol. 12, .p. 151 – 169.

VINNER, Shlomo. The Role of definitions in the teaching and learning of mathematics En: TALL, David. En: Advanced Mathematical Thinking. Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 1991, 16 p.

ANEXOS

Anexo A: Encuesta aplicada a docentes para indagar sobre la preferencia de los textos que siguen en su práctica pedagógica en la actualidad.

¿Usa libros de texto para preparar sus clases, en el aula escolar, para realizar guías o para otra actividad relacionada con la práctica escolar?

¿Qué editoriales prefiere y porque?

Anexo B**:** instrumento de análisis final

CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
SISTEMA DE REPRESENTACIÓN ANALÍTICO DE FUNCION	Numérico-tabular
	Grafica-cartesiana
	Simbólico-especifica
	Definición verbal
	Definición formal
SISTEMA DE REPRESENTACIÓN ALGEBRAICO DE FUNCION	algebraica
SISTEMA DE REPRESENTACIÓN ARITMÉTICO DE SUCESIÓN	numérico-tabular
	Representación simbólica-específica
	Definición verbal
	Definición formal
	Recta real
	Recta Cartesiana
UTILIZACION DE TÉCNICAS DE APROXIMACIÓN EN PROCESOS INFINITOS NUMÉRICOS	Determina el límite de una función por aproximación.
	Interpreta y/o define gráficamente el límite de una función.
	Determina si existen, la ecuación de las asíntotas horizontales, verticales u oblicuas de una función.
	Aplica la definición formal del limite
	Aplica la definición verbal del limite
USO DE LAS PROPIEDADES y REPRESENTACIONES EN LOS NUMEROS NATURALES Y REALES EN EL CÁLCULO DEL LIMITE	Aplica propiedades algebraicas y evalúa límites de funciones.
	Calcula limites aplicando sus propiedades
	Calcula límites infinitos.
	Calcula límites de funciones indeterminadas
	Calcula límites trigonométricos.

Anexo C**:** primer aproximación al instrumento de análisis

<table>
<tr><th>CATEGORÍAS</th><th>SUBCATEGORÍAS</th><th colspan="2">DIMENSIONES</th><th>G 1</th><th>G 2</th></tr>
<tr><td rowspan="13">SEMIOTICA</td><td rowspan="6">SISTEMA DE REPRESENTACIÓN ANALÍTICO/ ALGEBRAICO</td><td colspan="2">Representación numérico-tabular</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Representación gráfica-cartesiana</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Representación simbólico-especifica</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Representación algebraica</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Definición verbal</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Definición formal</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">SISTEMA DE REPRESENTACIÓN ARITMÉTICO (SUCESIÓN)</td><td colspan="2">Representación numérico-tabular</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Representación simbólica-específica</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Definición formal</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Definición verbal</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Repres entacio nes graficas</td><td>Representación recta real</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Representación Cartesiana</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>SISTEMA DE REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICO</td><td colspan="2">Representación de áreas de figuras curvilíneas.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="8">CURRICULAR</td><td rowspan="8">UTILIZO TÉCNICAS DE APROXIMACIÓN EN PROCESOS INFINITOS NUMÉRICOS</td><td colspan="2">Determina el límite de una función por aproximación.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Define e interpreta gráficamente el límite de una función.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Evalúa límites de funciones reales utilizando sus propiedades.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Aplica propiedades algebraicas en el cálculo de límites.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Calcula límites infinitos.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Calcula límites de funciones indeterminadas.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Calcula límites trigonométricos.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Determina si existen, la ecuación de las asíntotas horizontales, verticales u oblicuas de una función.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Anexo D**:** segunda aproximación al instrumento de análisis

Categorías	Subcategorías	Dimensiones
Semiótica	Sistema de representación analítico/ algebraico	Representación numérico tabular
		Representación gráfica cartesiana
		Representación simbólico especifica
		Representación algebraica
		Definición formal
		Definición verbal
	sistema de representación aritmético (sucesión)	Representación operatoria
		Representación numérico/ tabular
		Definiciones verbales o informales
		Representación recta real
		Representación Cartesiana
		Representación operatoria
		Definición formal
		Definición verbal
Curricular	Utilizo técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos	Determina el límite de una función por aproximación.
		Define e interpreta gráficamente el límite de una función
		Evalúa límites de funciones reales utilizando sus propiedades
		Aplica propiedades algebraicas en el cálculo de límites
		Calcula límites infinitos.
		Calcula límites de funciones indeterminadas
		Calcula límites trigonométricos
		Determina si existen, la ecuación de las asíntotas horizontales, verticales u oblicuas de una función.

Anexo E: instrumento de análisis codificado

CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS	Ej1	Ej2	Ej3	Ej4
SISTEMA DE REPRESENTACIÓN ANALÍTICO DE FUNCION	Numérico-tabular	x			
	Grafica-cartesiana		x		
	Simbólico-especifica				
	Definición verbal		x		
	Definición formal				x
SISTEMA DE REPRESENTACIÓN ALGEBRAICO DE FUNCION	algebraica		x		x
SISTEMA DE REPRESENTACIÓN ARITMÉTICO DE SUCESIÓN	numérico-tabular	x			x
	Representación simbólica-específica				
	Definición verbal		x		
	Definición formal			x	
	Recta real		x		
	Recta Cartesiana				x
UTILIZACION DE TÉCNICAS DE APROXIMACIÓN EN PROCESOS INFINITOS NUMÉRICOS	Determina el límite de una función por aproximación.	x			x
	Interpreta y/o define gráficamente el límite de una función.		x		
	Determina si existen, la ecuación de las asíntotas horizontales, verticales u oblicuas de una función.	x			x
	Aplica la definición formal del limite			x	
	Aplica la definición verbal del limite		x		x
USO DE LAS PROPIEDADES y REPRESENTACIONES EN LOS NUMEROS NATURALES Y REALES EN EL CÁLCULO DEL LIMITE	Aplica propiedades algebraicas y evalúa límites de funciones.	x			x
	Calcula limites aplicando sus propiedades		x		
	Calcula límites infinitos.			x	
	Calcula límites de funciones indeterminadas			x	
	Calcula límites trigonométricos.				x

Anexo F**:** tabla de frecuencias del libro de texto Dimensión matemática 11 de la editorial Norma año 1997

S.R ANALÍTICO					
FRECUENCIA	R1F	R2F	R3F	R4F	R5F
Frecuencia absoluta	1	6	10	8	0
frecuencia porcentual	5%	27%	45%	36%	0%

S.R. ALGEBRAICO	
FRECUANCIA	R6F
Frecuencia absoluta	16
frecuencia porcentual	73%

S.R. ANALÍTICO/ALGEBRAICO						
FRECUENCIA	R1F	R2F	R3F	R4F	R5F	R6F
Frecuencia absoluta	1	6	10	8	0	16
frecuencia porcentual	5%	27%	45%	36%	0%	73%

S.R. ARIMÉTICO						
FRECUENCIA	R1S	R2S	R3S	R4S	R5S	R6S
Frecuencia absoluta	0	1	1	0	0	0
frecuencia porcentual	0%	5%	5%	0%	0%	0%

E1					
FRECUENCIA	ILA1	ILA2	ILA3	ILA4	ILA5
Frecuencia absoluta	8	5	4	0	9
frecuencia porcentual	36%	23%	18%	0%	41%

E2					
FRECUENCIA	ILB6	ILB7	ILB8	ILB9	ILB10
Frecuencia absoluta	16	9	7	11	5
frecuencia porcentual	73%	41%	32%	50%	23%

EJEMPLOS CON DOS O MAS REPSENTACIONES				
FRECUENCIA	R1F/R2F/R4F	R2F/R4F	R3F/R4F	R2F/R3F
Frecuencia absoluta	1	3	3	1
frecuencia porcentual	5%	14%	14%	5%

EJEMPLOS CON DOS O MAS SISTEMAS DE REPSENTACION					
FRECUENCIA	R2F/R6F	R2F/R3F/R6F	R3F/R6F	R3F/R4F/R6F	R4F/R6F
Frecuencia absoluta	1	1	6	3	1
frecuencia porcentual	5%	5%	27%	14%	5%

EJEMPLOS QUE DESARROLLAN LOS ESTANDARES E1 Y E2									
FRECUENCIA	ILA5/ILA8	ILA1/ILA2/ILA5/ILA9	ILA1/ILA5/ILA6/ILA9	ILA1/ILA5/ILA6/ILA7/ILA9	ILA1/ILA2/ILA5/ILA8	ILA1/ILA5/ILA6/ILA8/ILA9	ILA2/ILA3/ILA6	ILA3/ILA6/ILA7/ILA8/ILA9	ILA2/ILA3/ILA6/ILA8/ILA9
Frecuencia absoluta	1	1	1	2	1	1	1	1	1
frecuencia porcentual	5%	5%	5%	9%	5%	5%	5%	5%	5%

EJEMPLOS QUE DESARROLLAN EL E1		
FRECUENCIA	ILA1/ILA2/ILA5	ILA1/ILA3/ILA5
Frecuencia absoluta	1	1
frecuencia porcentual	5%	5%

EJEMPLOS QUE DESARROLLAN EL E2					
FRECUENCIA	ILA6/ILA8	ILA6/ILA7	ILA6/ILA9/ILA10	ILA6/ILA7/ILA9/ILA10	ILA6/ILA7/ILA10
Frecuencia absoluta	1	2	1	3	1
frecuencia porcentual	5%	9%	5%	14%	5%

Anexo G: tabla de frecuencias del libro de texto Espiral 11 de la editorial Norma año 2005.

S.R. ANALÍTICO					
FRECUENCIA	R1F	R2F	R3F	R4F	R5F
Frecuencia absoluta	4	13	23	4	1
frecuencia porcentual	8%	26%	46%	8%	2%

S.R. ALGEBRAICO	
FRECUENCIA	R6F
Frecuencia absoluta	18
frecuencia porcentual	36%

S.R. ANALÍTICO/ALGEBRAICO						
FRECUENCIA	R1F	R2F	R3F	R4F	R5F	R6F
Frecuencia absoluta	4	13	23	4	1	38
frecuencia porcentual	8%	26%	46%	8%	2%	76%

EJEMPLOS CON DOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN					
FRECUENCIA	RIF/R2F/R6F	R1F/R2F/R4F/R5F/R6F	R3F/R6F	R2F/R6F	R2F/R3F/R6F
Frecuencia absoluta	1	1	13	2	3
frecuencia porcentual	2%	2%	26%	4%	6%

EJEMPLOS CON DOS O MAS REPRESENTACIONES				
FRECUENCIA	R1F/R2F	R2F/R4F	R1F/R2F/R4F	R2F/R3F
Frecuencia absoluta	1	2	1	1
frecuencia porcentual	2%	4%	2%	2%

E1					
FRECUENCIA	ILA1	ILA2	ILA3	ILA4	ILA5
Frecuencia absoluta	5	13	8	1	5
frecuencia porcentual	10%	26%	16%	2%	10%

E2					
FRECUENCIA	ILB6	ILB7	ILB8	ILB9	ILB10
Frecuencia absoluta	46	20	5	6	11
frecuencia porcentual	92%	40%	10%	12%	22%

EJEMPLOS QUE DESARROLLAN LOS ESTANDARES E1 Y E2								
FRECUENCIA	ILA2/ILA6	ILA1/ILA2/ILA4/ILA5/ILA6	ILA2/ILA6/ILA10	ILA2/ILA5/ILA6	ILA3/ILA6/ILA7/ILA8	ILA3/ILA6/ILA8	ILA1/ILA2/ILA3/ILA5	ILA2/ILA3/ILA6/ILA7
Frecuencia absoluta	3	1	1	1	1	3	1	3
frecuencia porcentual	6%	2%	2%	2%	2%	6%	2%	6%

EJEMPLOS QUE DESARROLLAN EL ESTANDAR E1		
FRECUENCIA	ILA1/ILA2	ILA1/ILA2/ILA5
Frecuencia absoluta	1	2
frecuencia porcentual	2%	4%

EJEMPLOS QUE DESARROLLAN EL ESTANDAR E2								
FRECUENCIA	ILA6/ILA7	ILA6/ILA7/ILA9	ILA6/ILA9	ILA6/ILA7/ILA8	ILA6/ILA10	ILA6/ILA7/ILA10	ILA6/ILA9/ILA10	ILA6/ILA7/ILA9/ILA10
Frecuencia absoluta	12	1	1	1	5	1	3	1
frecuencia porcentual	24%	2%	2%	2%	10%	2%	6%	2%

Anexo H: comparación de los libros de texto de la editorial Norma antes y después de la implementación de los estándares.

COMPARACIÓN DE LOS LIBROS ANTES Y DESPUÉS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LOS ESTÁNDARES EN EL S.R. ANALÍTICO-ALGEBRAICO.						
FRECUENCIA	R1F	R2F	R3F	R4F	R5F	R6F
frecuencia porcentual T1	5%	27%	45%	36%	0%	73%
frecuencia porcentual T2	8%	26%	46%	8%	2%	42%

COMPARACIÓN DE LOS LIBROS EN EL ESTÁNDAR 1					
FRECUENCIA	ILB1	ILB2	ILA3	ILA4	ILA5
frecuencia porcentual T1	36%	23%	18%	0%	41%
frecuencia porcentual T2	10%	26%	16%	2%	10%

COMPARACIÓN DE LOS LIBROS EN EL ESTÁNDAR 2					
FRECUENCIA	ILB6	ILB7	ILB8	ILB9	ILB10
frecuencia porcentual T1	64%	41%	32%	50%	23%
frecuencia porcentual T2	84%	44%	10%	14%	22%

Anexo J: tablas de frecuencias del libro de texto matemáticas 11, editorial Santillana, año 1995

S.R. ANALÍTICO/ALGEBRAICO						
FRECUENCIA	R1F	R2F	R3F	R4F	R5F	R6F
Frecuencia absoluta	2	0	9	1	2	7
frecuencia porcentual	11%	0%	50%	6%	11%	39%

S.R ARITMETICO						
FRECUENCIA	R1S	R2S	R3S	R4S	R5S	R6S
Frecuencia absoluta	0	0	2	0	0	0
frecuencia porcentual	0%	0%	11%	0%	0%	0%

EJEMPLOS CON DOS O MAS REPRESENTACIONES	
FRECUENCIA	R1F/R4F
frecuencia absoluta	1
frecuencia porcentual	6%

EJEMPLOS CON DOS O MAS SISTEMAS DE REPRESENTACION		
FRECUENCIA	R3F/R6F	R5F/R6F
frecuencia absoluta	4	2
frecuencia porcentual	22%	11%

EJEMPLOS QUE DESARROLLAN LOS INDICADORES DE LOGRO ENMARCADOS EN EL ESTÁNDAR 2					
FRECUENCIA	ILB6	ILB7	ILB8	ILB9	ILB10
Frecuencia absoluta	15	5	2	6	3
frecuencia porcentual	83%	28%	11%	33%	17%

EJEMPLOS CON DOS O MAS INDICADORES DE LOGRO							
FRECUENCIA	ILA1/ILA5	ILA1/ILB6/ILB9	ILA4/ILB6	ILB6/ILB7	ILB6/ILB9	ILB6/ILB8	ILB6/ILB9/ILB10
Frecuencia absoluta	1	1	2	5	2	2	3
frecuencia porcentual	6%	6%	11%	28%	11%	11%	17%

Anexo K: tablas de frecuencias del libro de texto hipertexto 11, editorial Santillana, año 2011

S.R. ANALÍTICO/ALGEBRAICO						
FRECUENCIA	R1F	R2F	R3F	R4F	R5F	R6F
Frecuencia absoluta	4	13	23	4	1	38
frecuencia porcentual	8%	26%	46%	8%	2%	76%

S.R. ALGEBRAICO	
FRECUENCIA	R6F
Frecuencia absoluta	18
frecuencia porcentual	36%

EJEMPLOS CON DOS O MAS REPRESENTACIONES				
FRECUENCIA	R1F/R2F	R2F/R4F	R1F/R2F/R4F	R2F/R3F
Frecuencia absoluta	1	2	1	1
frecuencia porcentual	2%	4%	2%	2%

EJEMPLOS CON DOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN					
FRECUENCIA	RIF/R2F/R6F	R1F/R2F/R4F/R5F/R6F	R3F/R6F	R2F/R6F	R2F/R3F/R6F
Frecuencia absoluta	1	1	13	2	3
frecuencia porcentual	2%	2%	26%	4%	6%

EJEMPLOS QUE DESARROLLAN LOS INDICADORES DE LOGRO ENMARCADOS EN EL ESTÁNDAR 1					
FRECUENCIA	ILA1	ILA2	ILA3	ILA4	ILA5
Frecuencia absoluta	5	13	8	1	5
frecuencia porcentual	10%	26%	16%	2%	10%

EJEMPLOS QUE DESARROLLAN LOS INDICADORES DE LOGRO ENMARCADOS EN EL ESTÁNDAR 2					
FRECUENCIA	ILB6	ILB7	ILB8	ILB9	ILB10
Frecuencia absoluta	46	20	5	6	11
frecuencia porcentual	92%	40%	10%	12%	22%

EJEMPLOS QUE DESARROLLAN EN EL ESTÁNDAR 1, (DOS O MÁS INDICADORES DE LOGRO		
FRECUENCIA	ILA1/ILA2	ILA1/ILA2/ILA5
Frecuencia absoluta	1	2
frecuencia porcentual	2%	4%

EJEMPLOS QUE DESARROLLAN EN EL ESTÁNDAR 2, DOS O MÁS INDICADORES DE LOGRO								
FRECUENCIA	ILA6/ILA7	ILA6/ILA7/ILA9	ILA6/ILA9	ILA6/ILA7/ILA8	ILA6/ILA10	ILA6/ILA7/ILA10	ILA6/ILA9/ILA10	ILA6/ILA7/ILA9/ILA10
Frecuencia absoluta	12	1	1	1	5	1	3	1
frecuencia porcentual	24%	2%	2%	2%	10%	2%	6%	2%

Anexo L: comparación libros de texto Santillana antes y después de la implementación de los estándares curriculares

COMPARACION EN LOS DOS TEXTO DE LOS S.R. ANALITICO Y ALGEBRAICO						
FRECUENCIA	R1F	R2F	R3F	R4F	R5F	R6F
frecuencia porcentual T1	11%	0%	50%	6%	11%	39%
frecuencia porcentual T2	13%	21%	36%	15%	6%	38%

COMPARACION DE LOS TEXTOS EN EL ESTANDA1					
FRECUENCIA	ILA1	ILA2	ILA3	ILA4	ILA5
frecuencia porcentual T1	11%	0%	0%	11%	17%
frecuencia porcentual T2	17%	23%	6%	6%	15%

COMPARACION DE LOS TEXTOS EN EL ESTANDA2					
FRECUENCIA	ILB6	ILB7	ILB8	ILB9	ILB10
frecuencia porcentual T1	83%	28%	11%	33%	17%
frecuencia porcentual T1	77%	32%	30%	57%	13%