Estrategias de resolución de problemas: Grafos

JOHN H. CASTILLO
CATALINA M. RÚA A.
FERNANDO A. BENAVIDES

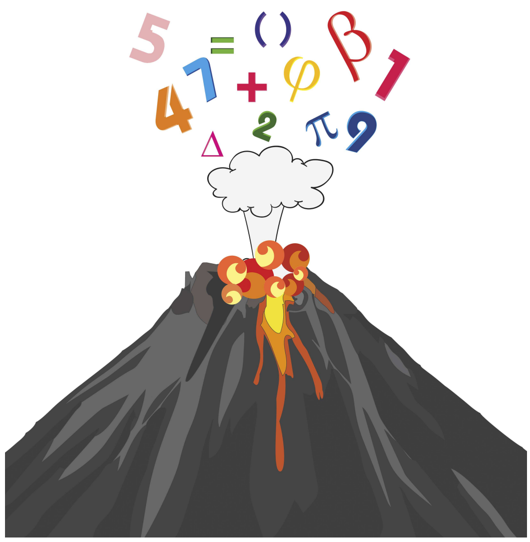
Editorial
Universidad de Nariño

TANTVM POSSVMVS QVANTVM SCIMVS
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
Editorial
Universidad de **Nariño**

Estrategias de resolución de problemas:
Grafos

Estrategias de resolución de problemas:

Grafos



John H. Castillo **Catalina M. Rúa**

Fernando A. Benavides

Olimpiadas Regionales de Matemáticas
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño
San Juan de Pasto

Editorial
Universidad de Nariño

Castillo Gómez, John Hermes

Estrategias de resolución de problemas: Grafos / John Hermes Castillo Gómez, Catalina María Rúa Álvarez, Fernando A. Benavides.- - San Juan de Pasto: Editorial Universidad de Nariño, 2021.

134p.:il

Incluye bibliografía
2ª Olimpiadas Regionales de matemáticas

ISBN: 978-958-5123-64-9 Impreso
ISBN: 978-958-5123-63-2 Digital

1. Teoría de grafos – enseñanza 2. Teoría de grafos – enseñanza – problemas 3. Teoría de grafos – soluciones. I. Grupo de investigación: Álgebra, Teoría de Números y Aplicaciones: ERM

511.5 C352–SCDD.ed 22 Biblioteca Alberto Quijano Guerrero

Estrategias de resolución de problemas: Grafos

© John Hermes Castillo Gómez
jhcastillo@udenar.edu.co

© Catalina María Rúa Alvarez
catalina.rua@udenar.edu.co

© Fernando Andrés Benavides Agredo
fandresbenavides@udenar.edu.co

ISBN: 978-958-5123-63-2
DOI: https://doi.org/10.22267/lib.udn.022
Primera Edición

Diseño y diagramación: John Hermes Castillo Gómez y Catalina M. Rúa Alvarez
Grupo de investigación: Álgebra, Teoría de Números y Aplicaciones: ERM

Mayo de 2021
San Juan de Pasto, Nariño, Colombia

Índice general

II Problemas

III Soluciones

Índice de figuras

Índice de tablas

Prefacio

Nos alegra comprobar que las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad de Nariño (ORM-UDENAR) ayudaron a crear nuevos espacios en el contexto de la formación matemática en la región de influencia de nuestra institución, especialmente en el Departamento de Nariño. A partir de las ORM-UDENAR surgieron o se fortalecieron, entre otras cosas, clubes de matemáticas y competencias de matemáticas internas en las instituciones educativas de la región. Las dos ediciones realizadas hasta la fecha motivaron la institucionalización de las ORM-UDENAR en nuestra universidad, esto mediante el Acuerdo número 011 emanado por el Honorable Consejo Académico, documento en el cual se destaca, entre otras cosas "Que este importante proyecto se consolida como un aporte al programa de interacción social de la Universidad de Nariño con la región" y "Que el proyecto además de fortalecer las competencias y destrezas con las matemáticas de los estudiantes y colegios de Nariño, se constituye en la ventana abierta de la Universidad con la región". Este es un acontecimiento que esperamos ayude a consolidar el desarrollo de ediciones futuras de las ORM-UDENAR y especialmente a que su impacto perdure en el tiempo.

Este texto presenta a la comunidad educativa en general los problemas y sus soluciones de la Segunda Olimpiada Regional de Matemáticas de la Universidad de Nariño (2da ORM-UDENAR), certamen que se desarrolló durante el 2017. Debemos anotar que el paro del magisterio que se desarrolló en el primer semestre del 2017 impidió que se siguiera el cronograma inicialmente planteado, por lo que el Comité Organizador en consenso con los Profesores Coordinadores de las Instituciones Educativas participantes, propuso el siguiente cronograma:

Fase	Fecha
Inscripciones	1 de marzo al 5 de mayo
Primera Fase	31 de agosto, 1 y 2 de septiembre
Segunda Fase	5, 6 y 7 de octubre
Fase Final	10 de noviembre
Premiación	18 de noviembre

Tabla 1: Cronograma 2da ORM-UDENAR.

Nos emociona anotar que para esta versión se inscribieron 2021 estudiantes provenientes de 43 instituciones educativas de los departamentos de Nariño, Cauca y Putumayo, ver tablas 5 y 6, estos números reflejan un crecimiento sustancial (en la 1ra ORM-UDENAR participaron 950 estudiantes de 25 instituciones educativas) y por supuesto avalan todo tipo de apoyo que se le pueda brindar a este proyecto. La participación de las instituciones de la región fue amplia y la acogida durante las capacitaciones fue cautivante y emocionante. Estas últimas se realizaron los días 30 de septiembre, 7, 13 y 14 de octubre de 2017, en las sedes de la Universidad de Nariño en los municipios de Ipiales, Túquerres y Pasto, además de las visitas que se realizaron a algunas de las instituciones educativas en otros municipios como Túquerres y Pasto.

Durante este proceso contamos con la asistencia de estudiantes y docentes de las instituciones educativas participantes en la 2da ORM-UDENAR. En ellas se resolvieron problemas de la PRIMERA FASE de la 2da ORM-UDENAR y se estudiaron estrategias para resolver problemas matemáticos.

Las actividades que se desarrollaron durante las capacitaciones fueron coordinadas en el marco del *Seminario de Resolución de Problemas*, y en su representación se conformaron equipos que las dirigieron de la siguiente manera:

- *Ipiales*: Profesores Catalina M. Rúa, John H. Castillo, Fernando A. Benavides y Gabriela Erazo y los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas Carlos Alberto Apraez, Juneth Andrea Terán, Katherine Nathaly Paz y Pablo Lasso.
- *Túquerres*: Profesores Catalina M. Rúa, John H. Castillo y los estudiantes de

la Lic. en Matemáticas Jhony Fernando Caranguay, Ana Cecilia Díaz, Yimy Popayán y Brayan Arley Pantoja.

- *Pasto*: Profesores Catalina M. Rúa, John H. Castillo, Gabriela Erazo, Marisol Cerón y los estudiantes Angie Sandalie Enríquez, Nathaly Cifuentes, Claudia Patricia Ordoñez, Milena Rojas, Alba Patricia Rosales, Juneth Andrea Terán, Victor Bravo, Fernanda Pantoja, Brayan Arley Pantoja, Carlos Alberto Apraez, Ana Cecilia Díaz, Deiby Castillo y Blanca Lucía Guerra.

Para la FASE FINAL clasificaron 530 estudiantes, los cuales presentaron simultáneamente el examen en las sedes de la Universidad de Nariño en Ipiales, Túquerres y Pasto. En en esta versión se premiaron a los 6 participantes con los mejores puntajes en la Fase Final de cada uno de los dos niveles. Así se entregaron medallas de Oro, Plata y Bronce a los estudiantes que resumimos en las tablas 2 y 3. Por otro lado, además de los ganadores globales, también se premiaron a los estudiantes que por cada institución tuvieron un desempeño destacado en el desarrollo del evento. Para ver el listado completo de los ganadores por institución invitamos al lector a visitar la página web orm.udenar.edu.co/?page_id=1294. De tal manera se entregaron 227 medallas de Oro, Plata y Bronce a estudiantes de cada una de las Instituciones Educativas que participaron en la FASE FINAL de la 2da ORM-UDENAR. Resaltamos que esta fue una actividad que ayuda a estimular la participación en las ORM-UDENAR y certámenes similares. A todos los ganadores y participantes en general nuestro reconocimiento por su valiosa participación.

Distinción	Nombres	Institución Educativa	Municipio
Medalla de oro	Bayron Natib Benavides	I.E. Instituto Técnico Girardot	Túquerres
	Daniel Mora Ramírez	I.E.M. Ciudad de Pasto	Pasto
Medalla de plata	Andrés Felipe Bastidas Romo	I.E.M. Ciudad de Pasto	Pasto
	Nicolás Meza Ortega	Liceo UDENAR	Pasto
Medalla de bronce	Juliana Ortega Oviedo	I.E. Ciudad de Ipiales	Ipiales
	Carlos Portilla Rodríguez	Liceo UDENAR	Pasto

Tabla 2: Medallistas Nivel I, 2da ORM-UDENAR.

Distinción	Nombres	Institución Educativa	Municipio
Medalla de oro	Carolina Romo Ojeda	I.E. Sucre	Ipiales
	Luis Rendón Mejía	I.E. Luis Delfin Insuasty Rodríguez	Pasto
Medalla de plata	José Guerrero Cuarán	I.E.M. Ciudad de Pasto	Pasto
	Andrés Adarme Benavides	Liceo UDENAR	Pasto
Medalla de bronce	Nayat Nasif Montenegro	Instituto Champagnat	Pasto
	Javier Pérez	Instituto Champagnat	Pasto

Tabla 3: Medallistas Nivel II, 2da ORM-UDENAR.

Tal vez este es un momento adecuado para reconocer una vez más el trabajo desarrollado por los participantes en el *Seminario de Resolución de Problemas*, todas las actividades desarrolladas en el marco de las ORM-UDENAR fueron ideadas en este valioso espacio. Con alegría hoy vemos que muchos de los estudiantes que hicieron parte de este seminario hoy son docentes en diversos municipios de nuestra región y otros han continuado sus estudios de posgrado, y con mayor emoción hoy podemos observar que varios aplican los aprendizajes adquiridos en el seminario en su desarrollo profesional, a todos un agradecimiento especial. A continuación presentamos un listado de algunos de los integrantes (varios hoy docentes) que en su momento hicieron parte del seminario.

Ana Díaz	Andrea Terán	Angie Enriquez
Angie Acosta	Brayan Florez	Brayan Pantoja
Cesar Bolaños	Carlos Apraez	Camila Arcos
Camilo Jaramillo	Claudia Ordóñez	Daniel Ascuntar
Deiby Castillo	Doris Madroñero	Fulvio Colimba
Fernanda Pantoja	Gabriela Erazo	Janeth Alpala
Jhony Caranguay	Jimmy Díaz	José Jácome
Lucia Guerra	Marcos Suarez	Maria Delgado
Marisol Cerón	Melissa Rojas	Milena Rojas
Mónica Díaz	Nathaly Cifuentes	Nathaly Paz
Nazly Cabezas	Neyer Gaviria	Pablo Lasso
Patricia Rosales	Ronaldo Reina	Santiago Eraso
Víctor Bravo	Yadira Quitiaquez	Yimy Popayán
Yobani Ordóñez	Jennifer Medina	José Figueroa

Tabla 4: Estudiantes integrantes *Seminario de Resolución de Problemas*.

No.	Institución Educativa	Profesor Coordinador	Municipio
1	I.E. Agropecuaria La Vega	Marco Antonio Santacruz Chaves	San Bernardo
2	I.E. Juanambú	Carmen Julia Cardenas	La Unión
3	I.E. Francisco José de Caldas	Omar Andres Lasso Solis	Pasto
4	I.E. Litoral Pacífico	Erky Saya Castro	Olaya Herrera
5	I.E.M. Ciudad de Pasto - Mañana	Yaneth Milena Mora	Pasto
6	I.E. Sagrado Corazón de Jesús	José Eduardo Benavides	San Lorenzo
7	I.E. San José de Telembí	Adolfo Antonio Becerra	Roberto Payán
8	I.E. Policarpa	Engracia Rocio Peralta	Roberto Payán
9	I.E. Agropecuaria Bomboná	Francisco Javier Meneses	Consacá
10	I.E. Genaro León	Adelina del Socorro Pineda	Guachucal
11	I.E.M. Luis Eduardo Mora Osejo	Arnovia Manduvy Gómez	Pasto
12	I.E. Valparaiso Bajo	Eduar Alirio Erazo	San Lorenzo
13	I.E. Normal Superior La Inmaculada	Yuby Yolanda Ortiz	Barbacoas
14	I.E. José Antonio Llorente	María Victoria Villota	Cumbal
15	I.E.M. Luis Delfín Insuasty Rodríguez	Aldemar Córdoba	Pasto
16	I.E. Educativa La Herradura	Jesús Gonzalo Sotelo	Almaguer, Cauca
17	I.E. Puenes	Patricia Aux Narváez	Ipiales
18	I.E. Agropecuaria Inga de Aponte	Luis Hernando Carlosama	El Tablón de Gómez
19	I.E. Los Arrayanes	Miguel Rufino Martinez	Córdoba
20	I.E. Sebastián Belalcázar	Germán Alberto Guerrero	Sapuyes
21	I.E. Santa Catalina Laboure	Martha Alexandra Díaz	Bolívar, Cauca

Tabla 5: Instituciones Educativas participantes 2da ORM-UDENAR.

No.	Institución Educativa	Profesor Coordinador	Municipio
22	I.E. Ciudadela Educativa de Pasto	Francisco Javier Paredes	Pasto
23	I.E. Escuela Normal Superior Santa Clara	Iván Hernán Cortés	Almaguer, Cauca
24	I.E. Nuestra Señora de Guadalupe	Franco Edilberto Melo Díaz	Pasto
25	I.E.M. Nuestra Señora de la Visitación	Yazmin Jaramillo	Pasto
26	I.E. Instituto Teresiano	Gonzalo Javier López	Túquerres
27	I.E.M. Ciudad de Pasto - Tarde	Andrea Revelo Ceballos	Pasto
28	I.E. Policarpa Salavarrieta	Luis Armando Andrade	Samaniego
29	I.E. Sucre	Elena Ortega Grijalba	Ipiales
30	I.E. Instituto Bet-El de Pasto	Oscar Mauricio Chilanguad	Pasto
31	I.E. Colegio Técnico Sucre	Jhon Jairo Cabrera	Colón, Putumayo
32	I.E. El Diviso	Gloria Rosero Paz	Barbacoas
33	I.E. José Antonio Galán	Belsy Paz	Iles
34	I.E.. Instituto Jorge Eliecer Gaitán	Javier García Ordoñez	Pasto
35	I.E. Ciudad de Ipiales	Wilson Fabian Ruano	Ipiales
36	I.E. Instituto Técnico Girardot	Gema del Carmen Ortega, Jaime Bacca	Túquerres
37	Escuela Normal Superior Pio XII	Carlos Arturo Jiménez	Pupiales
38	I.E. del Sur	Liliana Coral Luna	Ipiales
39	I.E. Tomás Arturo Sánchez	Claudia Stephania Naranjo	Ipiales
40	Instituto Champagnat	Laura Karola Salazar Paz	Pasto
41	Liceo José Félix Jiménez	Amanda Paz	Pasto
42	I.E.M. Técnico Industrial	Serafin Ortega Moreano	Pasto
43	Liceo Universidad de Nariño	German Mesias Sanchez	Pasto

Tabla 6: Continuación IES participantes 2da ORM-UDENAR.

Este libro se divide en tres partes. En la primera parte se presentan los conceptos básicos de la teoría de grafos y la forma de cómo estos pueden utilizarse para resolver problemas matemáticos, incluye una sección de problemas resueltos y otra de problemas propuestos. Luego, en la segunda se destina a la presentación por nivel de los problemas que se propusieron en la 2da ORM-UDENAR, mientras que en la tercera se dan las soluciones de cada problema. Recalcamos que las soluciones que presentamos, no necesariamente son las únicas, y por este motivo invitamos al lector a intentar resolver primero cada problema.

Este texto hace parte de los resultados del proyecto de investigación "Resolución de problemas: un medio para la formación matemática", aprobado mediante el Acuerdo 090 de noviembre 20 de 2014 y financiado por la Vicerrectoría de Investigaciones, Postgrados y Relaciones Internacionales de la Universidad de Nariño, actualmente Vicerrectoría de Investigaciones e Interacción Social.

Para finalizar dejamos al lector algunos registros fotográficos de las capacitaciones, el examen de la fase final y la premiación de la 2da ORM-UDENAR.

Comité Organizador ORM-UDENAR
San Juan de Pasto, agosto de 2019.

(a) Ipiales

(b) Ipiales

(c) Túquerres

(d) Túquerres

(e) Pasto

(f) Pasto

Figura 1: Capacitaciones 2da ORM-UDENAR

Figura 2: Examen FASE FINAL 2da ORM-UDENAR

Figura 3: Premiación 2da ORM-UDENAR

I

Resolución de problemas con grafos

1. Grafos en la resolución de problemas

1.1 Presentación

En la infancia nuestros amigos del colegio, del barrio o incluso nuestros padres nos planteaban problemas que desafiaban nuestra mente. Este es el caso del reto de trazar la Figura 1.1, sin levantar el lápiz ni repetir un segmento de recta.

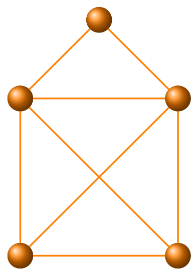


Figura 1.1: Trazar sin levantar el lápiz.

Esta figura es un caso particular de un objeto combinatorio que en matemática se denomina grafo. Este concepto fue introducido por el famoso matemático Leonhard Euler en el año de 1736, quien solucionó el problema de los 7 puentes de Königsberg, ciudad rusa que actualmente se llama Kaliningrado. El problema pedía determinar o refutar la existencia de un camino que atravesará cada uno de los siete puentes que existían en la ciudad de Königsberg, pero sin cruzar cada puente más de una vez, ver la Figura 1.2. Euler (1736) demostró una condición necesaria y estableció una condición suficiente para la existencia de dicho camino en su famoso artículo *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, y fue Hierholzer quien en 1873 verificó la veracidad de la condición de suficiencia, ver Hopkins y Wilson (2004) y Hudson (2004). Estos fueron los orígenes de lo que se conoce hoy en día como la teoría de grafos.

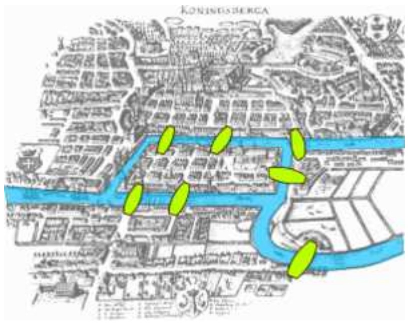
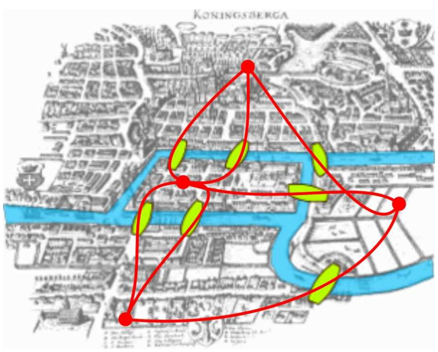
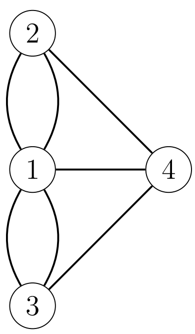


Figura 1.2: Puentes de Königsberg.

El problema de los puentes se traduce en determinar si es posible trazar la Figura 1.3b, sin levantar el lápiz ni repetir cada segmento de recta o curva. Un *grafo* es un objeto matemático muy simple de comprender y sus aplicaciones abarcan un gran número de áreas como biología, ciencias de la computación, química, economía, etc. Existen diferentes clases de grafos, el más básico es un grafo simple, el cual consta de un conjunto finito de vértices o nodos V y un conjunto de aristas E, las cuales son subconjuntos de V de tamaño 2.



(a) Puentes de Königsberg.



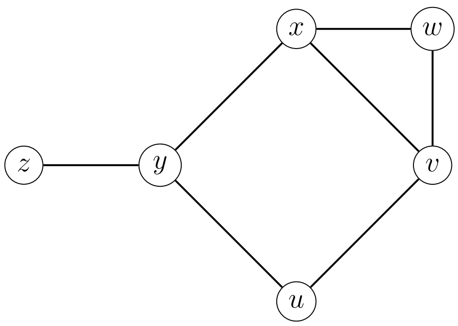
(b) Grafo asociado.

Figura 1.3: Problema de los 7 puentes de Könisberg.

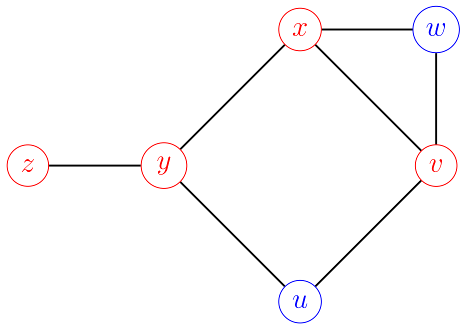
Por ejemplo, en el caso de los puentes de Königsberg cada vértice representa una porción de la ciudad y se traza una arista entre un par de ellas si existe un puente que permita conectarlas. La Figura 1.3b muestra el grafo que se le asocia al problema de los puentes de Königsberg.

El análisis de la existencia de dicho camino está basado en las conexiones de los vértices que conforman el grafo asociado a los 7 puentes de Königsberg. En general en cualquier grafo el *grado* de un vértice v se define como el número de aristas mediante las cuales se conecta a otro vértice. De esta manera, en la terminología moderna un grafo puede trazarse sin levantar el lápiz y recorriendo cada arista una sola vez si y solo si existen dos vértices de grado impar, ver Bollobás (1998). Además, un recorrido termina donde empieza si y solo si el número de vértices de grado impar es cero. Un grafo que puede ser trazado con estas condiciones se le conoce como *camino Euleriano* o *circuito Euleriano*.

En la Figura 1.4 se presenta un grafo en el cual los vértices u y w (coloreados con azul) tienen grado 2 mientras que los demás (coloreados de rojo) tienen grado impar, los vértices v, x y y tienen grado igual a 3 y el vértice z grado 1. Esto implica que dicho grafo no es un camino Euleriano.



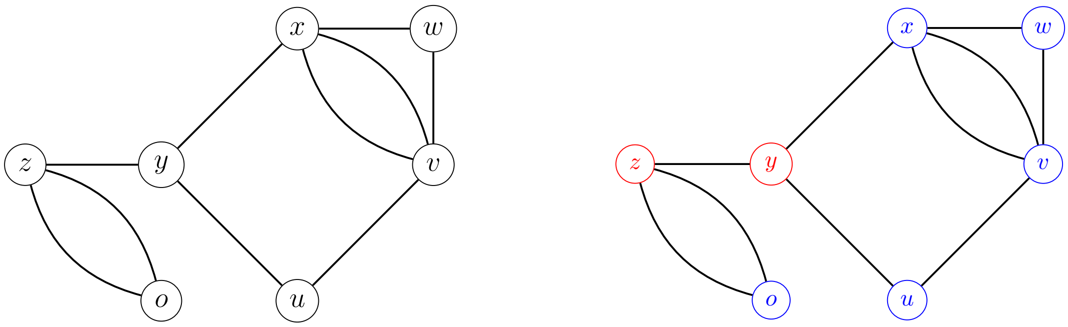
(a) Grafo 1.



(b) Grafo con vértices coloreados.

Figura 1.4: Grafo sin recorrido Euleriano.

Por otro lado, en la Figura 1.5 se muestra un grafo que sí es un camino Euleriano, el cual comienza en el vértice z y termina en el vértice y. Note que esto se debe a que los únicos vértices de grado impar son y y z (coloreados de rojo), mientras que los demás vértices (coloreados de azul) son de grado par. Este camino se obtiene según la secuencia de vértice $z, o, z, y, u, v, w, x, v, x, y$.



(a) Grafo 2. (b) Grafo con vértices coloreados.

Figura 1.5: Grafo con recorrido Euleriano.

Por otro lado, a Euler también se le debe el famoso resultado conocido como Lema del apretón de manos, el cual se expone a continuación.

Lema del apretón de manos

En cualquier grafo simple la suma de los grados de los vértices es igual al doble del número de aristas en el grafo, es decir

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|,$$

donde $\deg(v)$ denota el grado del vértice v.

Coloquialmente el Lema del apretón de manos afirma que en una reunión el número de personas que saludaron a un número impar de asistentes a la reunión debe ser par. Por ejemplo, en el grafo de la Figura 1.5 se tiene que los grados de sus vértices son,

$$\begin{array}{llll} \deg(o) = 2, & \deg(u) = 2, & \deg(v) = 4, & \deg(w) = 2, \\ \deg(x) = 4, & \deg(y) = 3 \text{ y} & \deg(z) = 3, & \end{array}$$

de donde se sigue que la suma de dichos grados es igual a 20 y esto es equivalente al doble de las aristas del grafo.

1.2 Planaridad y coloración de grafos

Muchos de los resultados que se conocen en la actualidad en teoría de grafos han sido originados o motivados a partir de pasatiempos o juegos, como puede verse en el caso de la caracterización de los grafos planos. Un grafo es *plano* si este puede ser dibujado en el plano sin que ninguna de sus aristas se crucen excepto quizá en los extremos, por ejemplo los grafos en las Figuras 1.4 y 1.5 son planos. Al respecto encontramos dos problemas acerca de planaridad, uno planteado por Möebius en 1840 y el otro por Dudeney en 1917, los cuales tienen un significado importante en la caracterización de los grafos planos dada por Kuratowsky en 1920, ver Hudson (2004). El primero de ellos dice:

Problema del testamento

Hubo una vez un rey que tenía cinco hijos. En su testamento el rey estableció que después de su muerte sus hijos deberían dividir el reino en cinco regiones de manera tal que cada región tuviese una frontera común con cada una de las otras cuatro regiones.

De igual manera la pregunta es ¿los hijos del rey podrán cumplir con el testamento de su padre? El problema expuesto por Möebius se puede representar en el contexto de la teoría de grafos, donde cada región determina un vértice y dos de ellos son adyacentes si las respectivas regiones tienen una frontera en común. Por lo cual, dadas las condiciones del testamento el grafo que modela el problema es K_5, el grafo completo de 5 vértices que se muestra en la Figura 1.6, asì la pregunta es equivalente a preguntarse si K_5 es un grafo plano. El grafo completo con n vértices, denotado con K_n, es aquel que tiene una arista para cada par de vértices distintos.

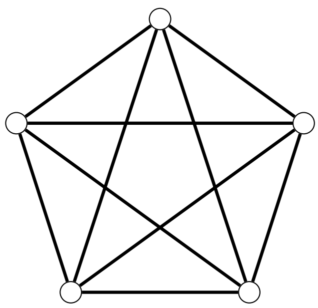


Figura 1.6: Grafo completo K_5.

El segundo problema denominado el problema de los tres servicios (agua, gas y electricidad) dice lo siguiente:

Problema de los tres servicios

Considerar tres casas C_1, C_2 y C_3 y tres suministros: agua, gas y electricidad. Se desea determinar si es posible extender conexiones de los tres servicios a cada una de las tres casas de tal manera que ningún par de las conexiones se crucen.

De igual manera que con el problema del testamento, el problema de los servicios se representa por un grafo con 6 vértices C_1, C_2, C_3, A, G, E, donde hay una arista de cada servicio a cada una de las casas. Este es un tipo particular de grafo denominado bipartito completo y se denota por $K_{3,3}$, ver Figura 1.7. En general, el grafo bipartito completo $K_{m,n}$ es aquel cuyo conjunto de vértices es una partición $V = V_1 \bigcup V_2$, donde el número de elementos de V_1 es m y el de V_2 es n y solo existen aristas entre los vértices de V_1 y V_2.

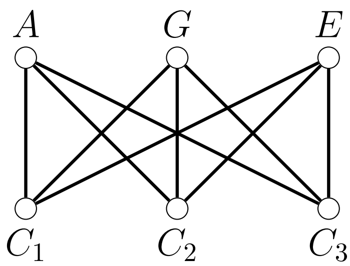


Figura 1.7: Grafo bipartito completo $K_{3,3}$.

Una de las implicaciones de la caracterización dada por Kuratowski (1930), determina que un grafo es plano si este no contiene a K_5 o a $K_{3,3}$ como subgrafos. De donde se evidencia que los grafos K_5 y $K_{3,3}$ no son planos, por lo cual no es posible que los hijos del rey dividan el reino en cinco regiones con las condiciones de su padre, así como no es posible extender conexiones de los servicios de agua, gas y electricidad a cada una de las casas sin que se crucen.

Otro de los aspectos importantes en la teoría de grafos moderna tiene que ver con la teoría de coloración, en la cual uno de sus resultados más importantes es el *Teorema de los cuatro colores*. Este resultado tiene sus orígenes en 1852 cuando Augustus De Morgan envió una carta a su amigo William Rowan Hamilton informándole que uno de sus estudiantes había observado que eran necesarios solo 4 colores para pintar el mapa de las regiones de Inglaterra. El problema formalmente establece: determinar el mínimo número de colores necesarios para pintar cualquier mapa de tal manera que ningún par de regiones que compartan parte de sus fronteras (no solo un punto) tuviesen color distinto, o determinar si era posible colorear las regiones de cualquier mapa con solo 4 colores de tal manera que dos de ellas que compartieran frontera no tuviesen el mismo color, ver Figura 1.8. Esta pregunta se conoció como la conjetura de los cuatro colores.

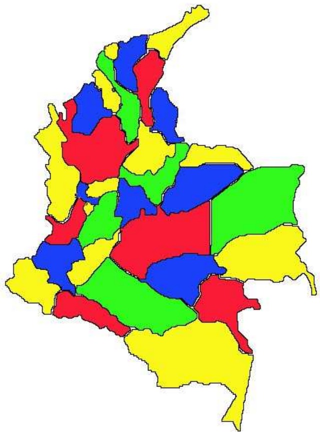


Figura 1.8: Coloración del mapa de Colombia.

Si se denota cada región del mapa con un vértice y dos vértices se conectan con una arista si las correspondientes regiones comparten frontera, entonces en términos de la teoría de grafos el problema preguntaba si era posible colorear los vértices de un grafo plano con solo cuatro colores sin que dos vértices conectados por una arista compartan el mismo color, ver Kubale (2004). Después de muchos intentos fallidos Kenneth Appel y Wolfgang Haken anunciaron una prueba completa, la cual fue publicada en Appel y Haken (1977). En la actualidad la coloración de grafos puede definirse sobre los vértices o aristas del grafo. En el primer caso se habla de una vértice-coloración y en el segundo de una arista-coloración. Formalmente, una *k-vértice-coloración* se define como una función $c : V \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ sobre los vértices del grafo tal que $c(v) \neq c(w)$ si los vértices v y w están conectados por una arista.

La coloración de grafos tiene una gran cantidad de aplicaciones en las ciencias de la computación (calendarización, asignación de registros, búsqueda de patrones, entre otras), en la solución de puzzles como el sudoku o en la resolución de problemas matemáticos.

El *sudoku* es uno de los pasatiempos más famosos que ha recorrido el mundo, el cual está conformado por un tablero de tamaño 9×9, que se encuentra a su vez subdividido en 9 subcuadrículas de 3×3, como el de la Figura 1.9. El objetivo del pasatiempo es ubicar los números del 1 al 9 en cada fila, cada columna y cada subcuadrícula de forma tal que no se repitan. Según Boyer (2007), en julio de 1895 se publicó en el periódico francés *La France* una versión cercana al sudoku. Sin embargo, según Delahaye (2006) la versión moderna del sudoku es una invención americana, de la cual existe evidencia que su autor fue Howard Garns, y su publicación se dio en 1979 por el *Dell Puzzle Magazin* bajo el nombre de *Number Place*. Posteriormente a mediados de los 80, este pasatiempo fue publicado en Japón por la compañia Nikoli en el *Monthly Nikolist* como *suji wa dokushin ni kagiru* el cual traduce *el dígito debe ser único*, tiempo después cambió su nombre a sudoku.

5	3			7				
6			1	9	5	3		
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2			6	
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

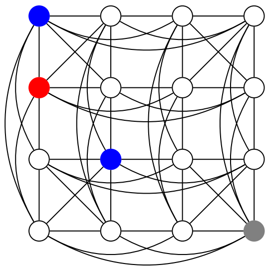
Figura 1.9: Cuadrícula del sudoku 9×9.

Hoy en día existen variantes del sudoku tanto en el tamaño de la cuadrícula como en el diseño de las subcuadrículas. Por ejemplo, consideremos la cuadrícula de tamaño 4×4 que se muestra en la Figura 1.10, en la cual se deben colocar los números del 1 al 4 en cada fila, columna y subcuadrícula de forma tal que no se repitan.

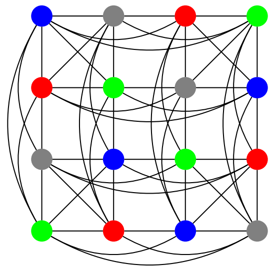
1			
2			
	1		
			3

Figura 1.10: Cuadrícula del sudoku 4×4.

La coloración de grafos puede ser una herramienta para encontrar su solución. Para esto a la cuadrícula se le asocia el grafo donde cada vértice representa una celda del sudoku y dos vértices se unen mediante una arista si sus correspondientes celdas están en la misma fila, columna o subcuadrícula de 2×2. De esta manera el grafo asociado al sudoku de la Figura 1.9 se presenta en la Figura 1.11a. Ahora bien, si el color azul representa el número 1, rojo representa el número 2, gris representa el número 3 y verde representa el número 4 se tiene que el problema se transforma en determinar una 4-vértice coloración del grafo de la Figura 1.11a, y cuya solución se muestra en la Figura 1.11b.



(a) Grafo asociado al sudoku 4×4.



(b) 4-vértice coloración del grafo.

Figura 1.11: Grafo y coloración del sudoku 4×4.

Para finalizar la presente sección consideremos el siguiente problema, el cual es tomado de Cognigni, Braicovich, y Reyes (2008).

Problema del traslado en el zoológico

Algunos animales de un zoológico deben ser trasladados y es necesario saber el número mínimo de jaulas necesarias para el traslado, teniendo en cuenta que hay animales que no pueden estar juntos de acuerdo a las siguientes restricciones: (1) El cocodrilo no puede estar junto al ciervo, al antílope, al mono y al elefante. (2) El hipopótamo no puede estar con el ciervo, elefante ni jirafa. (3) La cebra no puede estar con el rinoceronte, el antílope ni el cocodrilo. (4) La jirafa no puede estar con el mono y (5) el oso no puede estar junto al ciervo, al rinoceronte ni al cocodrilo.

Para su solución consideremos el grafo conformado por 10 vértices, los cuales estarán etiquetados por cada uno de los animales, y cada arista unirá dos vértices si los correspondientes animales no pueden estar juntos en la misma jaula, ver Figura 1.12.

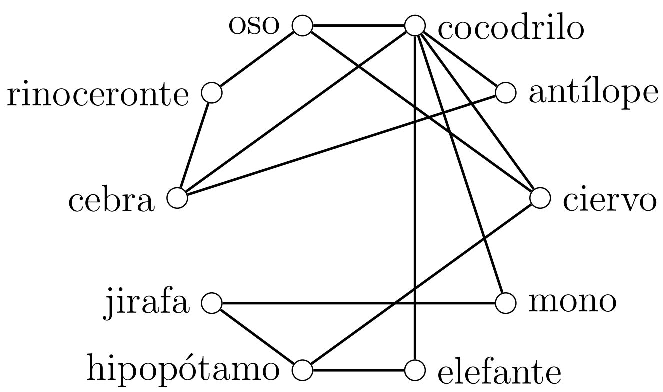


Figura 1.12: Problema del zoológico.

De esta manera el problema se traduce en determinar una vértice-coloración del grafo que represente el número de jaulas y que utilice el menor número de colores posible. De donde se puede ver que una coloración con la condición de minimalidad debe utilizar 3 colores como se muestra en la Figura 1.13. Observe que no es posible colorear los vértices del grafo con solo 2 colores puesto que alguna pareja conformada entre los animales ciervo, cocodrilo y oso estarián en la misma jaula, lo cual no es posible. Por lo tanto, el número mínimo de jaulas es 3.

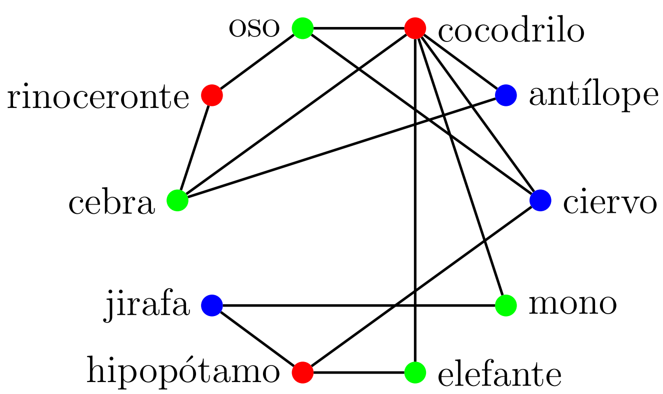


Figura 1.13: Coloración grafo del zoológico.

1.3 Problemas resueltos

En esta sección se proponen algunos problemas, así como sus soluciones, en las cuales se utiliza la teoría de grafos. Algunos de los problemas son modificaciones de problemas planteados en textos de matemática recreativa o de documentos de entrenamientos para olimpiadas matemáticas.

Problema 1.3.1 — Tomado de Recamán (2012).
Considere el siguiente tablero (modificado) de ajedrez, ver Figura 1.14, en el cual se encuentran dos caballos negros, dos blancos, una torre blanca y una negra. El problema consiste en intercambiar los dos caballos negros con los dos caballos blancos y la torre blanca con la torre negra. Para ello los movimientos permitidos son los habituales del caballo y la torre de ajedrez, pero sin que sea obligatorio alternar los movimientos de las piezas blancas y negras.

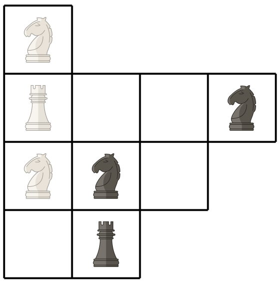


Figura 1.14: Problema de las fichas de ajedrez.

Solución. Con el fin de obtener una mejor visualización de los recorridos que pueden realizar los caballos dentro del tablero y poder así determinar cuales serían los movimientos adecuados para intercambiar los caballos negros con los blancos, consideraremos el grafo cuyo conjunto de vértices corresponde a las celdas del tablero etiquetadas según como se muestra en la Figura 1.15.

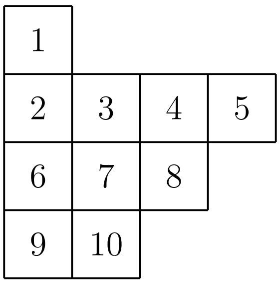
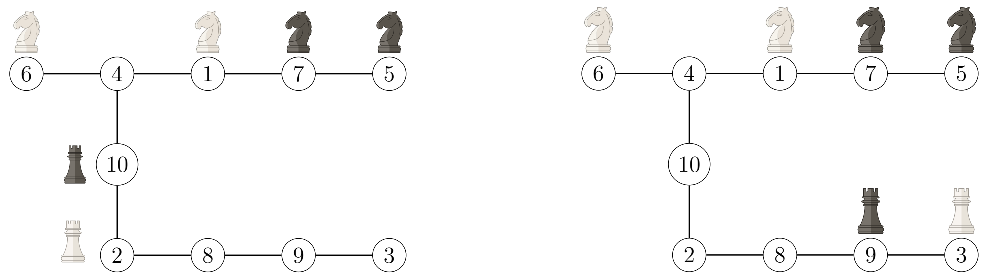


Figura 1.15: Tablero de ajedrez etiquetado.

Adicionalmente, trazamos una arista entre los vértices i y j, si un caballo (negro o blanco) puede pasar de la celda i a la celda j (o viceversa). El grafo construido se muestra en la Figura 1.16a. Observe que de esta manera cada configuración del tablero, que se obtiene con cada movimiento de un caballo, se representa mediante un grafo. Por ejemplo el caballo que está en la celda 1 se puede mover a la celda 4 o la celda 7, por esta razón en el grafo de la Figura 1.16a existen aristas que conectan al vértice 1 con los vértices 4 y 7. A continuación presentamos los pasos para intercambiar los caballos negros con los caballos blancos.

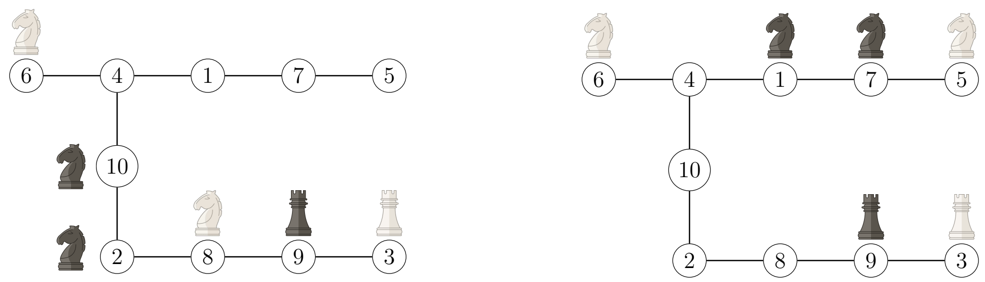
Paso 1: Pasamos la torre blanca al vértice 3 y la torre negra al vértice 9, ver Figura 1.16b.



(a) Grafo configuración inicial. (b) Grafo resultante del paso 1.

Figura 1.16: Grafos configuración inicial y paso 1.

Paso 2: Luego pasamos el caballo que está en el vértice 1 al vértice 8. Para realizar este cambio seguimos las conexiones de cada vértice en la Figura 1.16b, es decir el caballo pasa de la celda 1 a la celda 4, luego de la 4 a la 10, de la 10 a la 2 y finalmente de la 2 a la celda 8. Siguiendo esta idea pasamos los caballos negros que están en los vértices 7 y 5 a los vértices 2 y 10 respectivamente, ver Figura 1.17a.

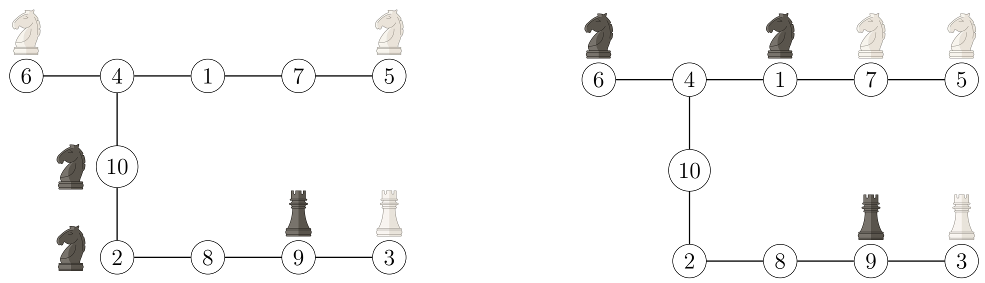


(a) Grafo resultante del paso 2. (b) Grafo resultante del paso 3.

Figura 1.17: Grafos pasos 2 y 3.

Paso 3: Pasamos el caballo que está en el vértice 6 al vértice 5, los caballos negros que están en los vértices 10 y 2 a los vértices 7 y 1 respectivamente y el caballo blanco que está en el vértice 8 al vértice 6, ver Figura 1.17b.

Paso 4: Pasamos los caballos negros que están en los vértices 1 y 7 a los vértices 2 y 10 respectivamente, ver Figura 1.18a.



(a) Grafo resultante del paso 4. (b) Grafo resultante de paso 5.

Figura 1.18: Grafos pasos 4 y 5.

Paso 5: Movemos el caballo blanco que está en el vértice 6 al vértice 7 y los caballos negros que están en los vértices 10 y 2 a los vértices 6 y 1 respectivamente, ver Figura 1.18b.

Ahora bien para ubicar las torres en las posiciones deseadas, primero pasamos el caballo negro que está en el vértice 6 al vértice 4. De esta manera podemos pasar la torre negra al vértice 2. Luego regresamos el caballo negro en la celda 4 a su posición anterior, y movemos el caballo negro que está en la posición 1 a la posición 4 y el caballo blanco de la posición 7 a la posición 1.

Finalmente, podemos pasar la torre blanca que está en la posición 3 a la posición 10 y regresar el caballo de la posición 1 a la 7, y el caballo de la posición 4 a la posición 1. De esta forma, intercambiamos las posiciones entre las fichas blancas y negras. ■

Problema 1.3.2 — Tomado de Gleason, Greenwood, y Kelly (1980).
Probar que en una reunión de 6 personas siempre habrá 3 personas que se conocen entre sí o 3 que no se conocen.

Solución. Consideremos el grafo completo K_6 conformado por el conjunto de vértices $V = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ y sus aristas las coloreamos de azul o rojo, donde una arista es coloreada de azul si las correspondientes personas se conocen y una arista es coloreada de rojo si las respectivas personas no se conocen. De esta manera nuestro objetivo es mostrar que bajo cualquier coloración de las aristas del grafo siempre encontramos un triángulo cuyas aristas son de color rojo o uno cuyas aristas son de color azul.
Ahora bien, la persona p_1 no conoce a al menos 3 o conoce a al menos 3 de los asistentes a la reunión. Consideremos el primer caso y supongamos que a las tres personas que no conoce son a p_3, p_4 y p_5, ver Figura 1.19.

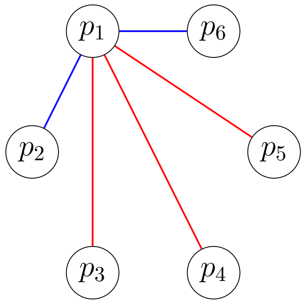


Figura 1.19: Grafo Problema 1.3.2.

Caso 1. Si los asistentes p_3, p_4 y p_5 se conocen entre sí entonces en el grafo se forma un triángulo cuyas aristas son de color azul, ver Figura 1.20.

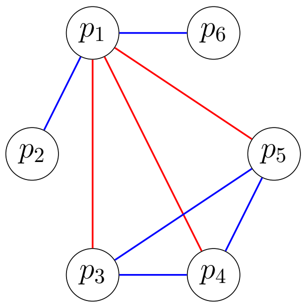


Figura 1.20: Grafo asociado al caso 1.

Caso 2. En caso contrario, existen dos de los asistentes p_3, p_4 y p_5 que no se conocen, los cuales junto con p_1 forman un triángulo con aristas rojas, es decir que ellos no se conocen entre sí, ver Figura 1.21.

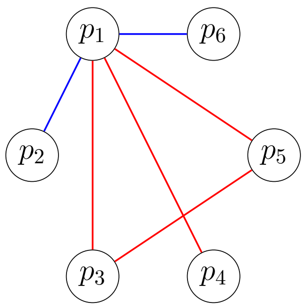


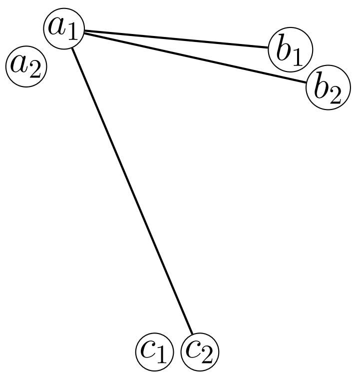
Figura 1.21: Grafo asociado al caso 2.

Ahora, si p_1 conoce a al menos 3 de los asistentes el razonamiento es similar al anterior caso. ■

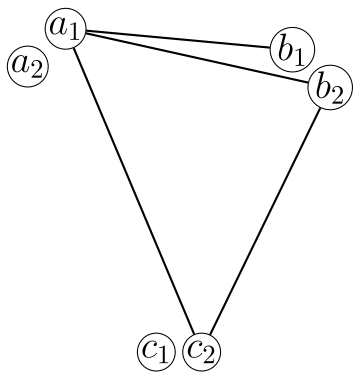
Problema 1.3.3

Se tienen tres escuelas A, B y C, cada una con 2 estudiantes. Cada estudiante conoce solo a 3 estudiantes de las otras dos escuelas. Probar que existen tres estudiantes de diferentes escuelas que se conocen entre sí.

Solución. Consideremos el conjunto de vértices $V = \{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2\}$ donde a_1, a_2 son los estudiantes de la escuela A, b_1, b_2 son los estudiantes de la escuela B y c_1, c_2 son los estudiantes de la escuela C. Además, una arista representará que los correspondientes estudiantes se conocen, de ahí que nuestro objetivo es mostrar que existe un triángulo con un vértice en cada una de las escuelas en cualquiera de los grafos que se pueden construir bajo estas convenciones. Como el estudiante a_1 conoce exactamente a 3 estudiantes de las otras escuelas, entonces en cualquiera de los grafos se tiene que él debe conocer a los dos estudiantes de la escuela B o de la escuela C. Supongamos que conoce a los estudiantes b_1 y b_2 de la escuela B y a c_2 de la escuela C. Es decir los subconjuntos $\{a_1, b_1\}$, $\{a_1, b_2\}$ y $\{a_1, c_2\}$ son aristas del grafo, ver Figura 1.22a.



(a)



(b)

Figura 1.22: Problema de las tres escuelas.

Ahora observe que el estudiante c_2 debe conocer a al menos un estudiante de la escuela B, digamos a b_2, de ahí que $\{b_2, c_2\}$ es una arista y por lo tanto en el grafo se forma un triángulo entre los vértices a_1, b_2 y c_2 lo cual implica que los respectivos estudiantes se conocen entre sí, ver Figura 1.22b.

El caso en que el estudiante a_1 conoce a los dos estudiantes de la escuela C es similar. ■

Problema 1.3.4 — Tomado de IMO (2008).

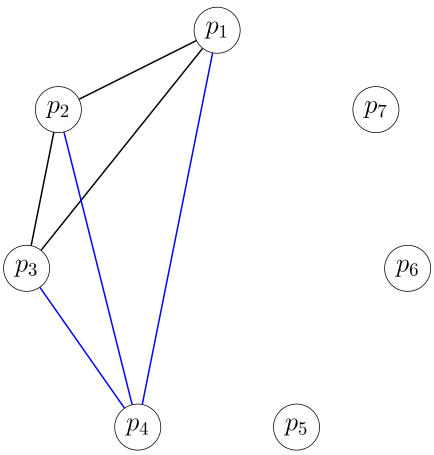
Una reunión de 7 personas tiene la curiosa particularidad que para cada 3 de ellos existe un cuarto asistente que es familiar de los 3. Probar que existe un familiar de cada uno de los asistentes.

Solución. Sea el grafo G con conjunto de vértices

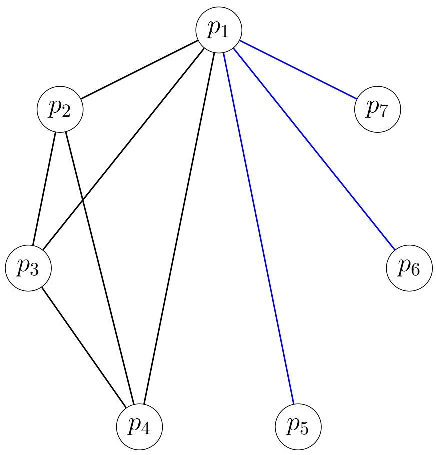
$$V = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\},$$

donde cada arista $\{p_i, p_j\}$ representa que las personas p_i y p_j son familiares. Consideremos las personas p_1, p_2 y p_3.

Caso 1. Supongamos que p_1, p_2 y p_3 son todas familiares entre sí. Entonces existe una cuarta persona, digamos p_4, que es familiar de p_1, p_2 y p_3, ver Figura 1.23a.



(a)



(b)

Figura 1.23: Familiar en un conjunto de 7 personas.

Ahora, considerando el grupo de personas p_5, p_6 y p_7 una de las primeras cuatro personas es familiar de ellos y por lo tanto es familiar de todos, ver Figura 1.23b.

Caso 2. Supongamos que las personas p_1, p_2 y p_3 no son familiares entre sí y que p_4 es familiar de p_1, p_2 y p_3, ver Figura 1.24a.

Ahora tomamos el grupo de personas p_2, p_3 y p_4, entonces tenemos que alguna de las personas entre p_5, p_6 y p_7, debe ser familiar de ellos, digamos p_5. De donde se sigue que p_3, p_4 y p_5 son familiares entre sí, y de esta manera estamos en el Caso 1, ver Figura 1.24b.

Caso 3. Supongamos que existe al menos un par de personas (entre las consideradas) que son familiares, digamos p_2 y p_3 y las cuales tendrán a un familiar en común, digamos a p_4. De esta forma para p_2, p_3 y p_4, podemos aplicar el primer caso. ∎

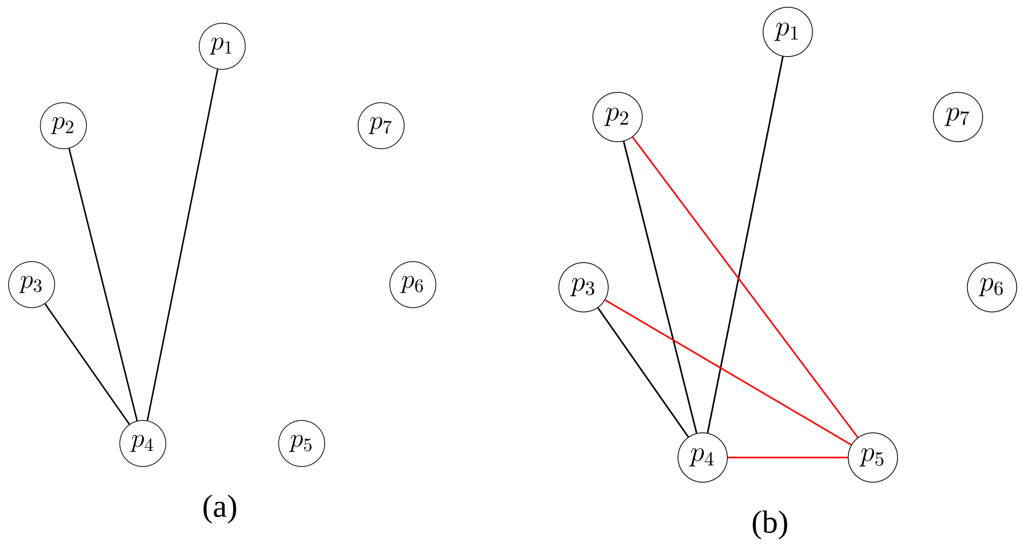


Figura 1.24: Familiar en un conjunto de 7 personas.

Problema 1.3.5

Cinco amigos salen de vacaciones al mismo tiempo y a diferentes lugares. Deciden que al llegar a su destino cada uno de ellos enviará una postal a tres de los restantes. ¿Es posible que cada amigo reciba postales de precisamente los tres amigos a los que él envió las suyas?

Solución. Consideremos el grafo con conjunto de vértices dado por $V = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, donde a_i representa al i-ésimo amigo y una arista $\{a_i, a_j\}$ representa que el amigo a_i le envió una postal al amigo a_j y viceversa. Entonces por el lema del apreton de manos se tiene que,

$$\sum_{i=1}^{5} \deg(a_i) = 3+3+3+3+3 = 15 = 2|E|,$$

lo cual claramente no puede suceder dado que 15 no es un número par. Por lo tanto, no es posible que cada amigo reciba postales de precisamente los tres amigos a los que él envió las suyas. ■

Problema 1.3.6

Probar que en una reunión de 8 personas existen al menos dos personas que tienen el mismo número de amigos. Convenimos que cada persona tiene al menos un amigo.

Solución. Sea G el grafo definido sobre el conjunto de vértices

$$V = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8\}$$

y cada arista $\{p_i, p_j\}$ representa que las personas p_i y p_j son amigos.
Por otro lado, observemos que dado que cada persona que asiste a la reunión tiene al menos 1 amigo y máximo 7, es decir que $\deg(p_i) \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$, donde $\deg(p_i)$ es el número de amigos de la persona p_i. Luego, como en la reunión hay 8 personas y existen 7 posibilidades para $\deg(p_i)$, entonces deben existir al menos dos personas p_k y p_j para los cuales $\deg(p_k) = \deg(p_j)$ y por lo tanto tienen el mismo número de amigos. ■

Problema 1.3.7 — Tomado de ORM-UDENAR (2017).
Siguiendo la dirección de las flechas en la Figura 1.25 ¿de cuántas maneras se puede formar el número 2017?

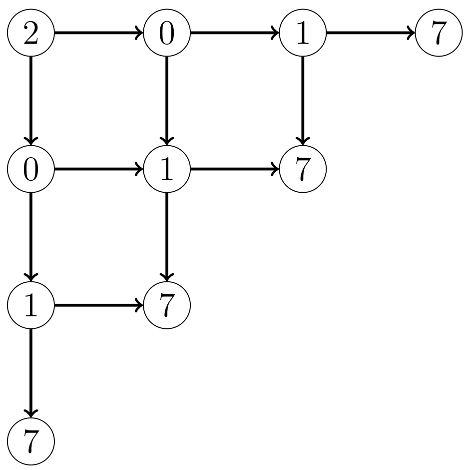


Figura 1.25: Problema del número 2017.

Solución. Con el fin de tener orden etiquetamos las filas de la Figura 1.25. Nuestra primera fila será aquella que tiene todas las cifras del número 2017, la segunda la que tiene las cifras 0, 1 y 7, y así sucesivamente. Observe que solo existe una posición etiquetada con el número 2. Por otro lado, en cualquier camino de longitud máxima que inicie en el 2, siguiendo las direcciones de las flechas, se forma el número 2017. Por lo cual, primero contaremos el número de maneras de llegar a una posición etiquetada con el número 0 comenzando en el 2.
Para llegar a la cifra 0 que está en la primera fila solo se puede hacer de una manera, lo mismo sucede para la cifra 0 de la segunda fila. Este número de formas la vamos colocando junto a cada posición como en la Figura 1.26a.

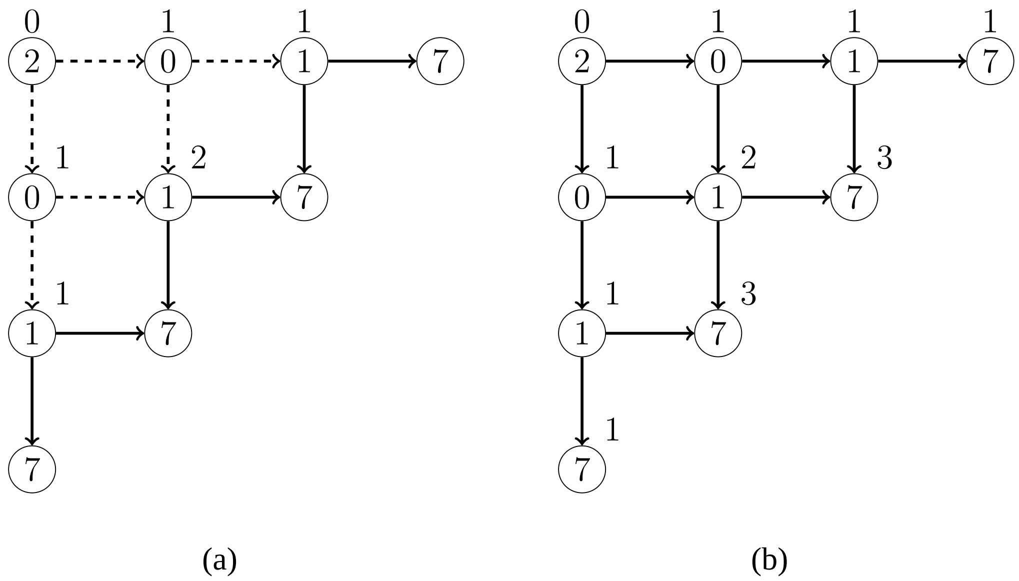


Figura 1.26: Etiquetamiento de vértices problema del número 2017.

Ahora bien, para llegar a una posición con cifra 1 primero debemos pasar por una posición con cifra 0 por lo cual, por ejemplo, el número de formas para llegar a la posición que tiene la cifra 1 de la segunda fila es igual al número de maneras de llegar al 0 de la primera fila más el número de formas de llegar al 0 de la segunda fila, ver Figura 1.26a.
Siguiendo este procedimiento se obtiene que el número de maneras de llegar al número 7 de la primera fila es 1, al 7 de la segunda y tercera fila es 3, y al 7 de la cuarta fila es 1, ver Figura 1.26b. Por lo tanto, el número de maneras de formar el 2017 es igual a

$$1+3+3+1=8.$$

■

1.4 Problemas propuestos

En esta sección se proponen algunos problemas los cuales pueden ser resueltos utilizando las técnicas de la teoría de grafos estudiadas aquí.

Problema 1.4.1 — Tomado de Fomin, Genkin, y Itenberg (1996).
Consideremos un tablero de ajedrez de tamaño 3×3 en el cual se encuentran dos caballos blancos y dos negros, como se muestra en la Figura 1.27. Determinar si es posible intercambiar los caballos blancos con los negros.

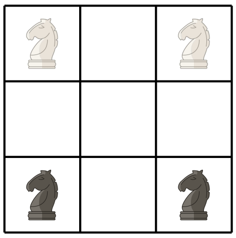


Figura 1.27: Problema piezas de ajedrez 1.

Problema 1.4.2 — Tomado de Fomin *et al.* (1996).
Consideremos un tablero de ajedrez de tamaño 3×3 en el cual se encuentran dos caballos blancos y dos negros, como se muestra en la Figura 1.28a. Determinar si es posible mover las piezas de su posición inicial para obtener la configuración que se muestra en la Figura 1.28b. Para ello los movimientos permitidos son los habituales del caballo, sin que sea obligatorio alternar los movimientos de las piezas blancas y negras.

(a) Configuración inicial. (b) Configuración final.

Figura 1.28: Problema piezas de ajedrez 2.

Problema 1.4.3 — Tomado de IMO (1964).
Cada uno de los estudiantes de un grupo con 17 integrantes habla con cada uno de los demás. Todos ellos hablan de tres temas diferentes. Cada pareja de estudiantes habla entre sí solamente de uno de los tres temas. Probar que hay tres estudiantes que hablan entre ellos del mismo tema.

Problema 1.4.4 — Tomado de Avendaño y Charry (2013).
En el país de Primolandia hay nueve ciudades, con los nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. La aerolínea Primos S.A. es la única compañía aérea del país. Dicha empresa establece una ruta aérea (ida y regreso) entre dos ciudades si y solamente si el número formado por la suma de los nombres de las ciudades es un número primo. Si visitas este extraño país

1. ¿Se puede viajar de manera directa por avión de la ciudad 1 a la ciudad 9?

2. ¿Cuál será el número mínimo de vuelos para viajar desde la ciudad 1 hasta la ciudad 9?

3. ¿Se puede visitar cada una de las ciudades sin repetir visita?

Problema 1.4.5 — Tomado de Avendaño y Charry (2013).
Una persona encargada del aseo de uno de los bloques de la Universidad de Nariño, debe iniciar sus labores con las oficinas marcadas por las letras A, B, C y D, tal como se muestra en la Figura 1.29. La encargada solo puede pasar de una oficina a otra por medio de las puertas P_1, P_2, P_3 y P_4. La encargada de la limpieza está a las 7 a.m. en la oficina A y hasta las 8 a.m. ha pasado 7 veces por la puerta P_1, 4 veces por la P_2, 6 veces por la P_3 y 4 veces por la P_4. ¿Puedes decir en que compartimiento está la señora Después del recorrido?

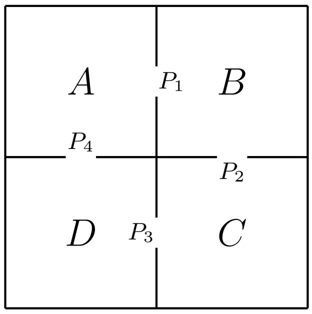


Figura 1.29: Problema de las oficinas.

Problema 1.4.6
Un grupo de 7 personas acuerdan cenar juntas en diferentes ocasiones. En cada ocasión se sientan alrededor de una mesa redonda de modo que cada persona tiene a sus dos lados comensales distintos en cenas diferentes. Si todos quieren sentarse junto a todos los demás, ¿Cuántos días deberán citarse para cenar?

Problema 1.4.7
Consideremos el siguiente juego de dos participantes. El jugador 1 dice en voz alta un número del 1 al 3. El segundo jugador suma al número dicho 1, 2 o 3 y dice el resultado en voz alta. Entonces el primer jugador sumará a este resultado 1, 2 o 3 mencionando en voz alta el nuevo número, y asi sucesivamente. Gana el primero que diga 31. ¿Existe alguna estrategia ganadora?

Problema 1.4.8
En un grupo de 9 personas, ¿es posible que cada uno conozca a 3 personas de las demás?

Problema 1.4.9 — Tomado de UCC-MEP (2019).
Una reunión de 11 personas tiene la curiosa particularidad que para cada 5 de ellos existe un sexto asistente que es familiar a los 5. Probar que existe un familiar común a todos los asistentes.

Problema 1.4.10
Probar que en un conjunto de 9 personas existen 3 que son amigos entre sí o 4 que son extraños entre sí.

Problema 1.4.11 — Tomado de Avendaño y Charry (2013).
En un hotel de la ciudad de Pasto llegarán un conjunto de 7 excursionistas, quienes son de distintas nacionalidades. El gerente del hotel desea hacer una recepción para sus huéspedes, pero uno de los inconvenientes para que la recepción sea un éxito es que no todos hablan un idioma en común, por lo cual le encargó a su secretaria que determinará, en base a la información de la Tabla 1.1, si es posible que si dos de ellos no hablan un idioma en común entonces pudiesen comunicarse por intermedio de otro huésped.

	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7
Inglés	sí	sí	sí				
Español		sí		sí			
Italiano			sí		sí		
Ruso			sí			sí	
Japonés				sí		sí	
Francés						sí	sí
Alemán					sí		sí

Tabla 1.1: Información huéspedes.

Problema 1.4.12
Colocar los números del 1 al 7 en los cuadros blancos de la Figura 1.30 de manera tal que para pasar del 1 al 2 haya que desplazarse 1 cuadro en el sentido de las manecillas del reloj. Para pasar del 2 al 3 haya que desplazarse 2 cuadros, del 3 al 4, 3 cuadros, y así sucesivamente con todos los movimientos en el sentido de las manecillas del reloj.

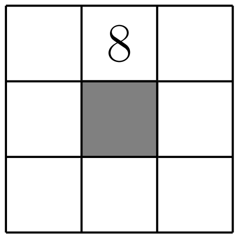


Figura 1.30: Cuadro Problema 1.4.12.

Problema 1.4.13

Determinar el número de maneras de llegar del punto A al punto B, en la Figura 1.31, si solo se puede avanzar hacia la derecha, hacia abajo o en diagonal.

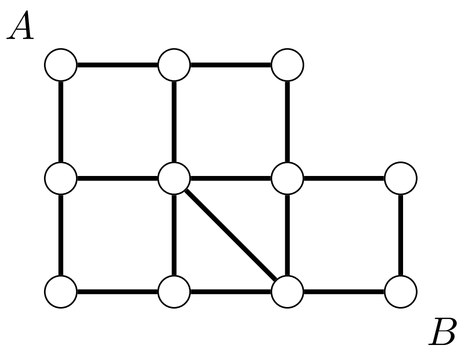


Figura 1.31: Caminos de A a B.

Problema 1.4.14

Los barrios de la ciudad de Pasto están agrupados en 12 comunas, como se muestra en la Figura 1.32.

1. Trazar el grafo de comunas de Pasto, donde cada comuna representa un vértice del grafo y dos vértices están unidos por una arista si las correspondientes comunas comparten frontera (no solo un punto).
2. Encontrar el número mínimo de colores para pintar el mapa de las comunas de Pasto de manera tal que dos de ellas con frontera común tengan colores distintos.

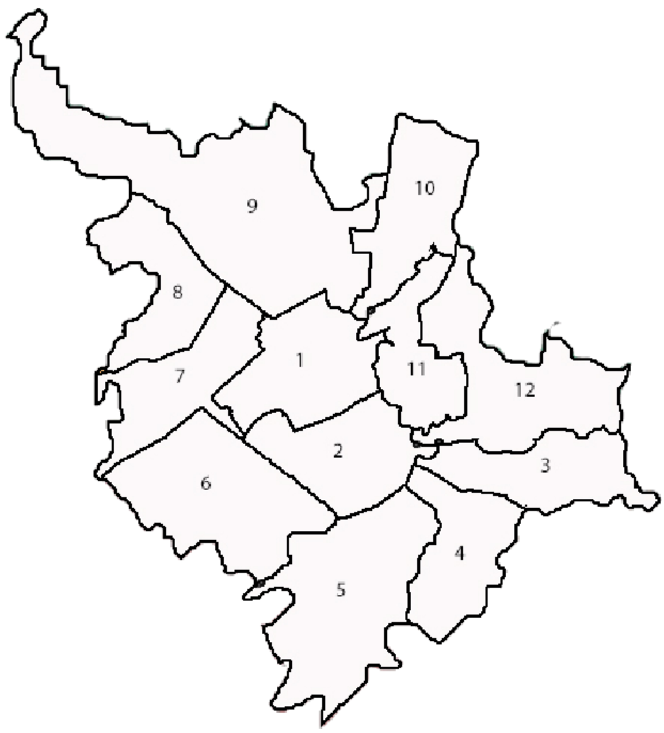


Figura 1.32: Comunas de Pasto.

II

Problemas

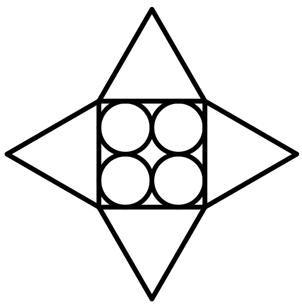
2. Problemas Nivel I (Sexto y Séptimo)

2.1 Primera fase

1. Un entero positivo se llama *guagua* si al multiplicarlo por su consecutivo su producto termina en 6. Por ejemplo, 7 es un *guagua* porque $7 \times 8 = 56$. ¿Cuántos números *guagua* hay menores que 50?

   a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

2. Cuatro círculos iguales tocan los lados de un cuadrado, como se muestra en la figura.

   A cada lado del cuadrado, se dibuja un triángulo equilátero para formar una estrella de cuatro puntas. Si el perímetro de la estrella es 160 cm, ¿cuál es el radio de los círculos?

   a) 1 cm b) 3 cm c) 5 cm d) 7 cm e) 9 cm

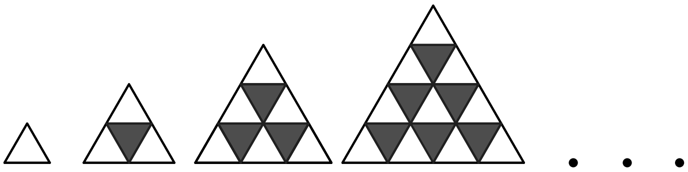
3. Un número *quimbolo* es un número natural formado por la resta del cuadrado de dos números consecutivos. Así 7 es un número *quimbolo*, pues $4^2 - 3^2 = 7$. ¿Cuántos números *quimbolos* hay desde el 0 hasta el 10?

   a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

4. Si a la suma de todos los números impares de dos dígitos se le resta la suma de todos los números pares de dos dígitos, se obtiene:

   a) 46 b) 45 c) 48 d) 49 e) 50

5. Considere la siguiente sucesión de figuras:

   ¿Cuántos triángulos sombreados hay en el centésimo elemento de la sucesión?

   a) 3000 b) 4851 c) 4950 d) 5050 e) 6000

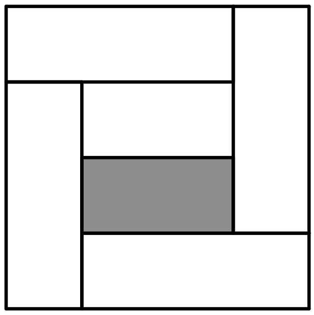
6. Si $a \clubsuit b = b^2 - a^2$, entonces el resultado de $\dfrac{3\clubsuit 7}{4} - \dfrac{6\clubsuit 4}{5}$ es:

   a) -14 b) 0 c) 6 d) 14 e) 15

7. En una fiesta, un mago esconde en su sombrero una gran cantidad de canicas de colores amarillo, azul y rojo. Si el mago afirma que consigue concentrarse para que cualquier participante que saque 3 canicas del sombrero siempre tome por lo menos una amarilla, ¿cuántas canicas de color azul hay en el sombrero?

   a) 0 b) 1 c) 3 d) 5 e) 100

8. Mercedes cortó una tira de papel en seis rectángulos del mismo ancho y con ellos formó un cuadrado de 36 cm^2 de área, como se muestra en la figura.



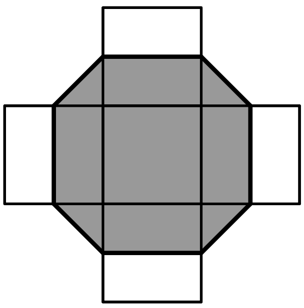
El perímetro en centímetros del rectángulo sombreado es:

a) 5 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

9. Un campesino le preguntó a su hijo: ¿cuántos pies puedes contar cuando estoy ordeñando una vaca? El niño respondió: son 6, 4 de la vaca y los 2 suyos. El padre cariñosamente le responde: en realidad son 9, olvidaste contar los 3 del banquito en el que estoy sentado mientras ordeño la vaca. Entonces el padre le dijo: ahora estás listo para el siguiente reto. En un corral hay personas, vacas y banquitos, por lo menos uno de cada uno. El número total de pies es 22 y de cabezas es 5. ¿Cuántas vacas hay en el corral? El niño esta vez resolvió el problema correctamente, ¿cuál fue su respuesta?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

10. En la figura, los cinco cuadrados son iguales y los vértices del polígono sombreado son puntos medios de los lados de los cuadrados. Si el área de cada cuadrado es 1 cm^2, ¿cuál es el área en centímetros cuadrados del polígono sombreado?



a) 2 b) 2.5 c) 3 d) 3.5 e) 4

11. ¿Cuál es el siguiente elemento en la progresión aritmética

$$1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots, 2017, \boxed{}\ ?$$

a) 2019 b) $\frac{2017}{2}$ c) $\frac{2019}{2}$

d) $\frac{4035}{2}$ e) $\frac{4037}{2}$

12. La gatica de Cami se enfermó y para su recuperación el veterinario le mandó 10 pastillas que deben ser suministradas de a $1/3$ de pastilla cada 12 horas. ¿Cuántos días dura el tratamiento de la gatica?

    a) 5 b) 6 c) 9 d) 10 e) 15

13. En un juego, la mamá de Juan y María les pidió que cada uno de ellos diera una única respuesta correcta a tres preguntas que ella haría.

    - Primero preguntó, **¿Qué día de la semana fue ayer?** Martes, respondió Juan. Miércoles, contestó María.
    - Después preguntó, **¿Qué día de la semana es hoy?** Hoy es jueves, dijo Juan. Es viernes, respondió María.
    - Finalmente ella preguntó, **¿Qué día de la semana será mañana?** Lunes, afirmó Juan. Mañana será domingo, dijo María.

    ¿En qué día de la semana estaban jugando?

    a) Lunes b) Martes c) Miércoles

    d) Jueves e) Viernes

14. Atapuma y Quintana participan en una contrarreloj. Manteniendo velocidad constante, Atapuma realiza la etapa en 20 minutos y Quintana, en 30 minutos. ¿En cuántos minutos alcanzará Atapuma a Quintana, si parte 5 minutos después de él?

    a) 10 minutos b) 12 minutos c) 15 minutos

    d) 18 minutos e) No lo alcanza

15. Francisco digita un número en la calculadora. Si lo duplica, luego al resultado le suma 9 y al valor obtenido lo divide por 3, obtiene el número 11. ¿Cuál fue el número que ingresó Francisco en la calculadora?

    a) 11 b) 6 c) 0 d) 12 e) 15

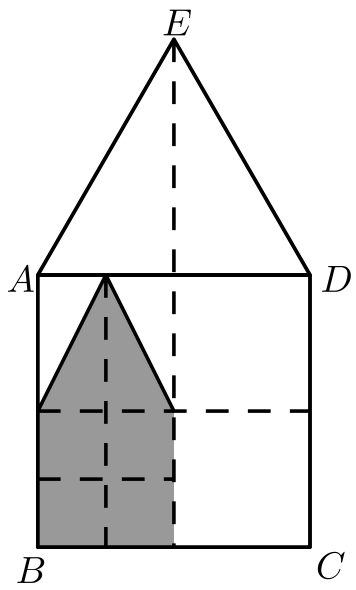
2.2 Segunda fase

Preguntas de selección múltiple

1. Si $a \ominus b = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$, entonces el resultado de $21\,(3 \ominus 7) - 12\,(6 \ominus 4)$ es:

   a) -3 b) 3 c) -5 d) 5 e) $\frac{45}{42}$

2. Sean $\triangle ADE$ un triángulo equilátero y $ABCD$ un cuadrado que se dividió en cuatro cuadrados iguales, de los cuales uno se subdividió nuevamente en cuatro cuadraditos congruentes, como se ve en la figura.



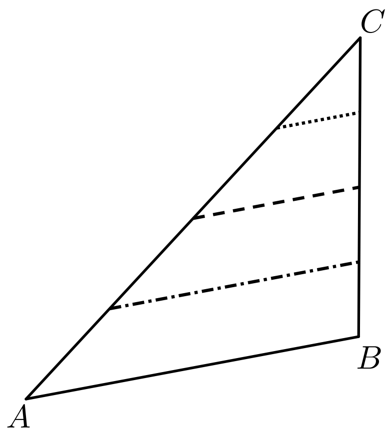
   Si el perímetro del polígono $ABCDE$ es 100 cm, ¿cuánto vale, en centímetros cuadrados, el área de la región sombreada?

   a) 100 b) 110 c) 125 d) 150 e) 160

3. Un número *serio* es un número natural tal que todos sus dígitos son números primos. Así 372 es un número *serio*, pues 3, 7 y 2 son primos. ¿Cuántos números *serios* hay de dos dígitos?

   a) 16 b) 5 c) 12 d) 36 e) 25

4. En la siguiente figura, los segmentos punteados dentro del triángulo $\triangle ABC$ son paralelos al segmento $\overline{AB}$ y dividen en cuatro partes iguales al segmento $\overline{BC}$. Si el segmento $\overline{AB}$ mide 4 cm, ¿cuál es el valor de la suma de la medida de los tres segmentos punteados?



a) 7 b) 5 c) 4 d) 8 e) 6

5. Antonio, Bernardo, Carolina y Diana forman dos parejas de esposos. Los cuatro tienen edades diferentes. Antonio es mayor que Carolina y más joven que Diana. El esposo de Carolina es el mayor del grupo. Es correcto afirmar que:

   a) Antonio es mayor que Bernardo y su esposa es Diana.
   b) Antonio es más viejo que su esposa Diana.
   c) Carolina es más joven que todos y su marido es Bernardo.
   d) Diana es mayor que Carolina y su marido es Bernardo.
   e) Carolina es mayor que su marido Antonio.

6. En el restaurante *Cuy Sabor* se ofrecen platos con las siguientes opciones: tres tipos de carnes diferentes (cuy, pollo, res), cuatro acompañamientos distintos (papa, maduro, yuca, lapingachos) y dos tipos de bebidas (limonada, café). Si cada cliente debe seleccionar solamente un tipo de carne, de acompañante y bebida, ¿de cuántas formas diferentes se puede elegir un plato?

   a) 24 b) 4 c) 9 d) 12 e) 18

7. Cuando María llegó a su casa encontró un jarrón roto y al lado un balón de fútbol. Inmediatamente María cuestionó a sus cuatro hijos Abel, Byron, Carlos y Daniel, para identificar al único culpable.

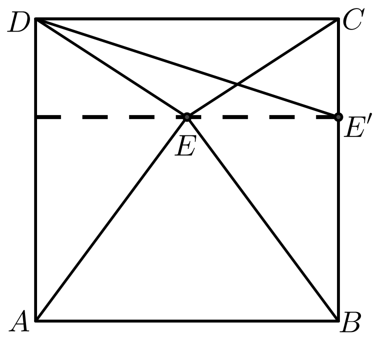
   - Abel dijo que él había sido.
   - Byron afirmó que el culpable fue Abel o Daniel.

- Carlos dijo que él no había sido.
- Daniel aceptó la culpa.

Si María sabe que solo uno tiene la razón, ¿cuál de sus cuatro hijos lo hizo?

a) Abel b) Byron c) Carlos
d) Daniel e) Ninguno

8. Sea $ABCD$ un cuadrado. Dado que los puntos E y E' se encuentran sobre un segmento perpendicular al lado $\overline{AD}$ del cuadrado, es **CIERTO** que al comparar los triángulos $\triangle DCE$ y $\triangle DCE'$.



a) El perímetro no varía.
b) El área es la misma.
c) La altura es diferente.
d) El área del triángulo $\triangle DCE$ es mayor que la del triángulo $\triangle DCE'$.
e) Todas las anteriores.

Preguntas para completar la respuesta

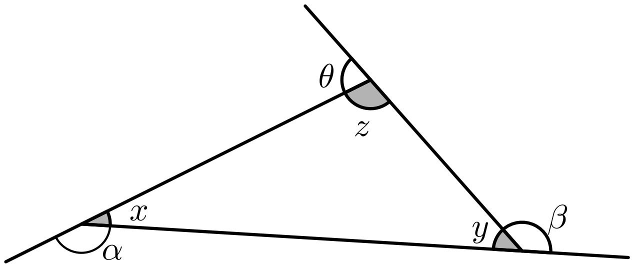
9. Al unir las fechas en las que es posible presentar la segunda fase de las ORM-UDENAR, se obtiene el número

$$510201761020177102017.$$

Se deben borrar de este valor únicamente 10 dígitos de tal forma que se obtenga el menor valor posible. ¿Cuál es este valor?

Respuesta: ______

10. En la siguiente figura, ¿cuál es el valor de $\alpha + \beta + \theta$, si $x = 30^\circ$ y $y = 45^\circ$?



Respuesta: ______

11. Francisco le envía un mensaje secreto a Diana.

67 P7Z CA4308Z7 CA8 587 1A8R317

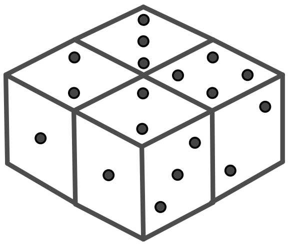
Luego, él le dice que para descifrar el mensaje tenga en cuenta el siguiente código:

E	S	T	I	M	U	L	A	N	D	O
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A

¿Cuál es el mensaje enviado por Francisco?

Respuesta: ______

12. Se tienen cuatro dados idénticos que satisfacen que la suma de los puntos de dos caras opuestas siempre es 7 y se pegan como muestra la figura.



¿Cuánto es la suma de los puntos de las ocho caras que están pegadas, si se sabe que esta es un número primo?

Respuesta: ______

2.3 Fase final

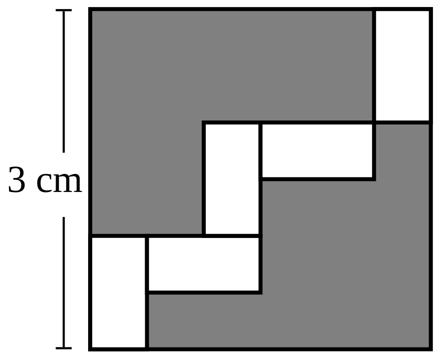
Preguntas de selección múltiple

1. Siguiendo la dirección de las flechas, ¿de cuántas maneras se puede formar el número 2017?

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & 7 \\ 0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & 7 & \\ 1 \arrow[r] \arrow[d] & 7 & & \\ 7 & & & \end{tikzcd}$$

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

2. Dentro de un cuadrado de 3 cm de lado, se ubican 5 rectángulos iguales como se muestra en la figura. En centímetros cuadrados, ¿cuál es el área de la región sombreada?



a) $\frac{13}{2}$ b) $\frac{15}{2}$ c) 6 d) $\frac{11}{2}$ e) $\frac{7}{2}$

3. En la quesera *La vaquita feliz* de Guachucal Nariño, venden un delicioso queso doble crema. Si $\frac{4}{3}$ de este queso se equilibran en una balanza con $\frac{6}{5}$ de libra, ¿cuántos quesos son necesarios para completar 18 libras?

a) 8 b) 12 c) 18 d) 20 e) 22

4. Doña Ximena tiene en su casa cuatro tipos de dulces en cuatro cajas distintas. Doña Ximena cansada de que su hija Elsa y sus amigas se comieran los dulces, decidió colocarlos todos en una sola caja y cada caja la marcó con un mensaje:

Caja 1: Los dulces están aquí.

Caja 2: Los dulces están en la primera o en la cuarta caja.

Caja 3: Los dulces no están aquí.

Caja 4: Los dulces están aquí.

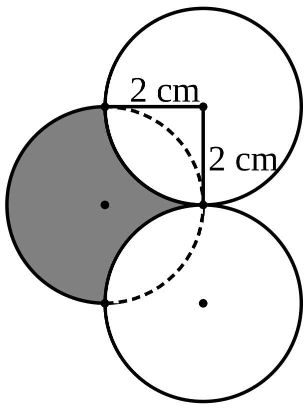
Elsa y sus amigas pueden comer los dulces si descubren en cual caja están, sabiendo que solo uno de los mensajes es correcto. Si Elsa y sus amigas se comieron todos los dulces, ¿en cuál caja estaban los dulces?

a) Caja 1 b) Caja 2 c) Caja 3

d) Caja 4 e) En ninguna caja

Preguntas para completar la respuesta

5. Tres circunferencias de 2 cm de radio se ubican como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área en centímetros cuadrados de la región sombreada?



Respuesta: ______

6. Un número *quimbolo* es un número natural formado por la resta del cuadrado de dos números consecutivos. Dado que $a \ominus b = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$, determine el resultado de $20(a \ominus b) + 5$, donde a es la cantidad de números *quimbolos* que hay entre 0 y 10, incluyéndolos y b es la cantidad de números *quimbolos* que hay desde el 100 hasta el 120.

Respuesta: ______

Preguntas para justificar la respuesta

7. La primera fase de las ORM-UDENAR consta de 15 preguntas de selección múltiple que se califican de la siguiente manera:

La presentación del examen: 15 puntos, cada respuesta correcta: 4 puntos, cada respuesta incorrecta: -1 punto y preguntas sin contestar: 0 puntos.

Si Andrea únicamente dejó una respuesta sin contestar y la puntuación que obtuvo fue 31, ¿cuántas preguntas correctas contestó?

8. La siguiente construcción se obtiene al ir agregando las letras de ORM-UDENAR.

O
O R M
O R M U D
O R M U D E N
O R M U D E N A R
O R M U D E N A R O R
O R M U D E N A R O R M U
$\iddots \qquad \vdots \qquad \ddots$

(a). (Valor **2.0**) ¿Cuántas veces aparece la letra O si la construcción tiene 10 filas?

(b). (Valor **3.0**) ¿Cuántas veces aparece **horizontalmente** la palabra ORMUDENAR si la construcción tiene 10 filas?

(c). (Valor **5.0**) ¿Cuántas veces aparece **horizontalmente** la palabra ORMUDENAR si la construcción tiene 20 filas?

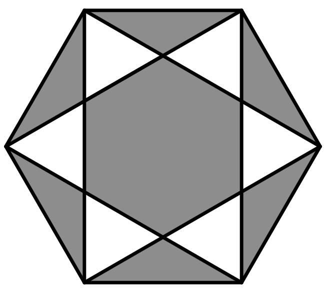
3. Problemas Nivel II (Octavo y Noveno)

3.1 Primera fase

1. Un agricultor siembra $\frac{1}{3}$ de sus semillas el lunes, y $\frac{1}{4}$ de lo que le queda el martes. ¿Qué fracción, de la cantidad inicial de semillas, le queda para la próxima siembra?

   a) $\dfrac{1}{12}$ b) $\dfrac{2}{7}$ c) $\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{5}{7}$ e) $\dfrac{11}{12}$

2. En la figura se tiene un hexágono regular con algunas de sus diagonales. Si el área del hexágono es 54 cm^2, ¿cuál es el área en centímetros cuadrados de la región sombreada?



   a) 20 b) 24 c) 36 d) 48 e) 50

3. Julián, María, Pedro y Luisa tienen cada uno un animal, de entre los siguientes: un gato, un perro, un pez rojo y un canario. María tiene un animal que tiene pelo; Luisa, uno de cuatro patas; Pedro un pájaro y se sabe que a Julián y a María no les gustan los gatos. ¿Cuál de las siguientes frases **NO** es cierta?

   a) Luisa tiene un perro.

   b) Pedro tiene un canario.

   c) Julián tiene un pez.

   d) Luisa tiene un gato.

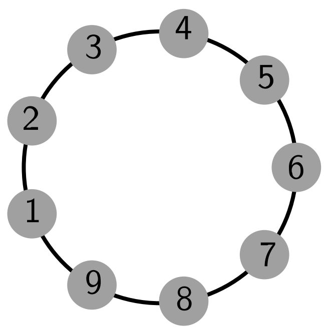
   e) María tiene un perro.

4. La expresión $\dfrac{2017^{2017}}{\underbrace{2017+\cdots+2017}_{\text{2017-veces}}}$ es igual a:

   a) 2017 b) 2017^{2015} c) 2017^{2}

   d) 2017^{2016} e) 2017^{2010}

5. Caterine escribió los números del 1 al 9 en una circunferencia, como se muestra en la figura.



   A partir del número 1, comenzó a saltar de 4 en 4 siempre en sentido de las manecillas del reloj. En el primer salto fue del 1 al 5, en el segundo del 5 al 9, en el tercero del 9 al 4 y así sucesivamente. ¿Después de saltar 2017 veces, en que número está parada?

   a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

6. Un trabajo de matemáticas tiene 30 preguntas de Aritmética y 50 de Geometría. Nelcy respondió correctamente 70 % de las preguntas de Aritmética y

80 % del total de preguntas. ¿En cuántas preguntas de Geometría se equivocó Nelcy?

a) 1 b) 5 c) 6 d) 7 e) 10

7. Dados dos enteros positivos a y b, con $a\clubsuit b$ se representa el número de cuadrados perfectos que hay entre a y b, incluyéndolos. Así por ejemplo, $1\clubsuit 9 = 3$, puesto que entre 1 y 9 están los cuadrados $1, 4$ y 9. De esta manera, $[(5\clubsuit 9)\clubsuit 16]\clubsuit 30$ es igual a:

   a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

8. Sean a, b, c y d números enteros tales que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{3}{5}$. ¿Cuánto vale $\frac{a-c}{b-d}$?

   a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{5}{3}$ e) $\frac{3}{8}$

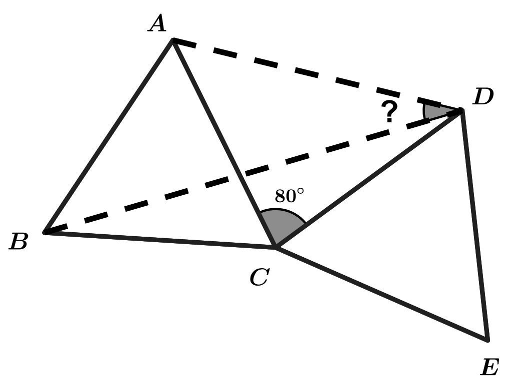
9. ¿Cuál es el siguiente elemento de la sucesión $2, 8, 18, 32, \ldots$?

   a) 40 b) 42 c) 48 d) 50 e) 52

10. Steven escribió cinco dígitos diferentes de cero en un tablero. Él descubrió que ninguna suma de dos números escritos es igual a 10. ¿Cuál de los siguientes números definitivamente escribió Steven en la pizarra?

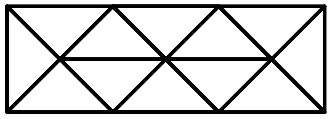
    a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

11. En la figura, ABC y CDE son dos triángulos equiláteros congruentes. Si el ángulo $\measuredangle ACD$ mide 80°, ¿cuánto mide el ángulo $\measuredangle ADB$?



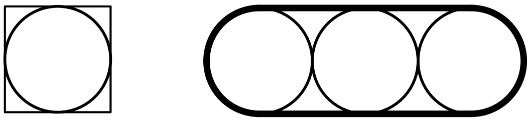
a) 20° b) 30° c) 40° d) 50° e) 60°

12. ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



a) 12 b) 14 c) 16 d) 18 e) 20

13. El área del cuadrado de la figura de la izquierda es a, y el área del círculo es b. ¿Cuánto vale el área encerrada por la línea gruesa en la figura de la derecha?



a) $3b$ b) $a+2b$ c) $a+b$

d) $2a+b$ e) $3a$

14. En un juego, la mamá de Juan y María les pidió que cada uno de ellos diera una única respuesta correcta a tres preguntas que ella haría.

- Primero preguntó, **¿Qué día de la semana fue ayer?** Martes, respondió Juan. Miércoles, contestó María.
- Después preguntó, **¿Qué día de la semana es hoy?** Hoy es jueves, dijo Juan. Es viernes, respondió María.
- Finalmente ella preguntó, **¿Qué día de la semana será mañana?** Lunes, afirmó Juan. Mañana será domingo, dijo María.

¿En qué día de la semana estaban jugando?

a) Lunes b) Martes c) Miércoles

d) Jueves e) Viernes

15. ¿Cuántos números hay entre 1 y 100 que no son ni múltiplos de 7 ni tienen al 7 entre sus dígitos?

a) 10 b) 35 c) 55 d) 70 e) 85

3.2 Segunda fase

Preguntas de selección múltiple

1. Andrés, Bernardo, Carlos y David participaron en la fase final de la 1ra ORM-UDENAR en Pasto. Los cuatro son de municipios diferentes de Nariño: Ipiales, Olaya Herrera, Túquerres y Consacá.

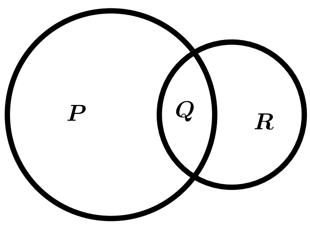
   - Andrés y el chico de Ipiales llegaron a Pasto temprano en la mañana el día del examen. Ninguno de los dos conoce Túquerres ni Consacá.
   - Carlos no es de Consacá y se fue de Pasto el mismo día que el chico de Túquerres.
   - David y el joven de Consacá almorzaron juntos ese día.

   ¿Quién es el estudiante de Consacá?

   a) Andrés b) Bernardo c) Carlos

   d) David e) No hay como saberlo

2. Los círculos de la figura tienen radios 3 cm y 2 cm. Si el área de la región P es tres veces el área de la región R, el área de la región Q en centímetros cuadrados es:



   a) $\frac{5}{2}\pi$ b) π c) 8π d) $\frac{3}{2}\pi$ e) 9π

3. Sea xyz un número de tres cifras con $x > z > 0$. Si

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ - & z & y & x \\ \hline & 4 & ? & ? \end{array}$$

   entonces la segunda y tercera cifras de esta diferencia en este orden son:

a) 5 y 9 b) 9 y 5 c) 0 y 6 d) 5 y 4 e) 4 y 5

4. Se llenan los cuadrados vacíos de la tabla de la figura dada de manera que los números de cada fila, de cada columna y de las dos diagonales forman progresiones aritméticas. ¿Cuál debe ser el número x?

				21
	16			
		27		
				x

a) 42 b) 53 c) 58 d) 60 e) 65

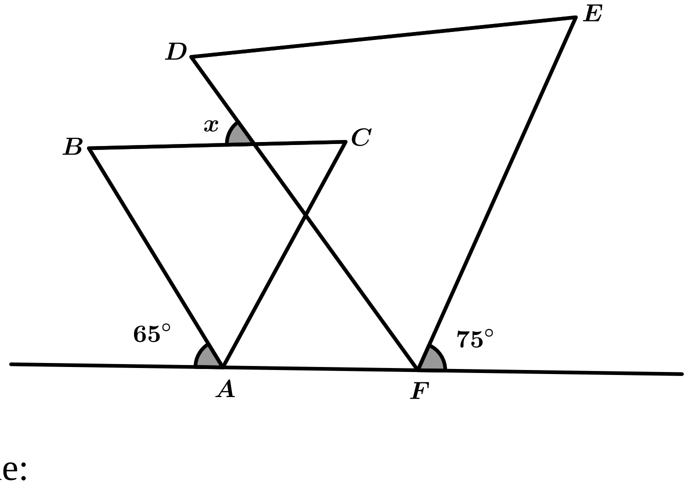
5. Los enteros positivos x y y no tienen divisores comunes mayores que 1, y se cumple que $x \times y = 300$. ¿Cuál es el menor valor posible de $x + y$?

a) 30 b) 35 c) 37 d) 56 e) 79

6. Un número *serio* es un número natural tal que todos sus dígitos son números primos. Así 372 es un número *serio*, pues 3, 7 y 2 son primos. ¿Cuántos números *serios* hay de tres dígitos?

a) 32 b) 48 c) 55 d) 64 e) 70

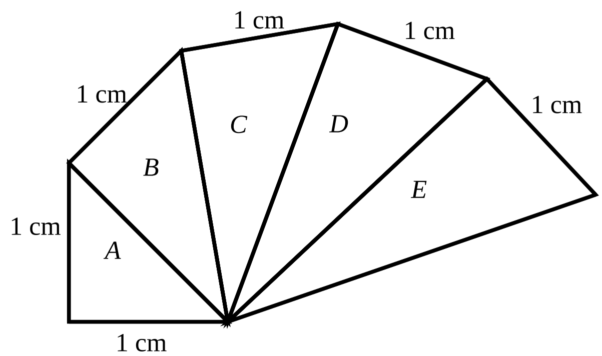
7. En la figura los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son equiláteros.



El ángulo x mide:

a) 30 b) 37 c) 40 d) 50 e) 60

8. En la imagen se muestran cinco triángulos rectángulos. La **ÚNICA** afirmación **FALSA** es:



a) El área del triángulo B es mayor que el área del triángulo A.

b) El perímetro del triángulo E es mayor que el perímetro del triángulo C.

c) Los triángulos E y C tienen diferente área.

d) El área del triángulo D es 1 cm^2.

e) La hipotenusa del triángulo B mide 2 cm.

Preguntas para completar la respuesta

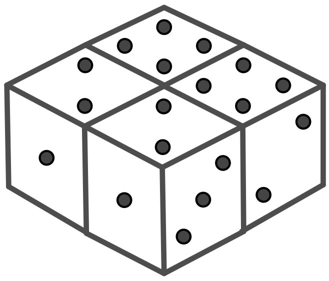
9. En una reunión de chicas, todas se ubican en una mesa redonda. Andrea es la sexta a la izquierda de Blanca y la cuarta a la derecha de Blanca. ¿Cuántas chicas hay en la reunión?

   Respuesta: ______

10. En un campeonato de fútbol Radamel y sus dos compañeros de ataque marcaron **JUNTOS** 17 goles. ¿Cuál es el mínimo número de goles que pudo haber marcado Radamel para que un periodista afirme que **marcó más goles que cualquiera** de los otros dos delanteros?

    Respuesta: ______

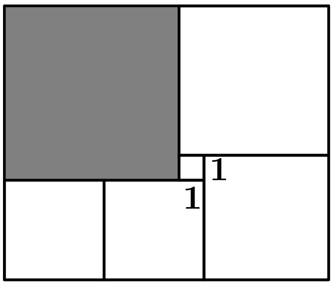
11. Se tienen cuatro dados idénticos que satisfacen que la suma de los puntos de dos caras opuestas siempre es 7 y se pegan como muestra la figura.



Si se sabe que el producto de las ocho caras que están pegadas es divisible por 5^2 pero no por 6^4, ¿cuál es la suma de los puntos de las caras que están pegadas?

Respuesta: ______

12. En la figura el rectángulo se dividió en seis cuadrados. Los lados del cuadrado más pequeño miden 1 cm. ¿Cuál es el área en centímetros cuadrados del cuadrado sombreado?

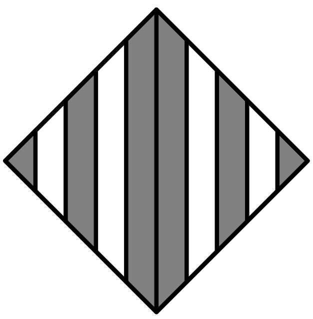


Respuesta: ______

3.3 Fase final

Preguntas de selección múltiple

1. Las baldosas de la casa de Pepito son cuadradas y están divididas simétricamente como se muestra en la figura.



Si las regiones sombreadas tienen el mismo ancho, ¿cuál fracción representa la región sombreada en cada una de las baldosas?

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{4}{5}$ e) 1

2. Clarita sube los escalones de uno en uno o de dos en dos, pero nunca de tres en tres. Si tiene que subir una escalera de 10 escalones pisando obligatoriamente el sexto escalón, ¿de cuántas maneras puede hacerlo?

a) 55 b) 65 c) 75 d) 85 e) 95

3. Tres parejas de esposos se reúnen para jugar en los carnavales de Negros y Blancos del 2017. Entre todos compran una caja con 16 latas de espuma de carnaval para divertirse. Ángela paga una lata, Bibiana dos y Carmen compra tres latas. Carlos Gutiérrez paga tantas latas como su esposa. Pedro Pérez paga el doble de latas que su esposa y Ramón Martínez el triple de su esposa. ¿Cuál es el apellido del esposo de Ángela?

a) Pérez b) Gutiérrez c) Gómez
d) Martínez e) Imposible saberlo

4. En un salón de clase tienen un código secreto para enviarse mensajes. El código está formado por tres dígitos distintos y diferentes de cero. Descubra cual es el código con las siguientes informaciones:
   - **123**: Ningún dígito correcto.
   - **456**: Un solo dígito correcto y en la posición correcta.
   - **612**: Un solo dígito correcto, pero en la posición equivocada.
   - **547**: Un solo dígito correcto, pero en la posición equivocada.
   - **843**: Un solo dígito correcto y en la posición correcta.

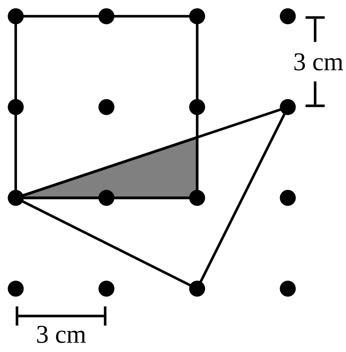
a) 137 b) 876 c) 786 d) 678 e) 576

Preguntas para completar la respuesta

5. Dados a y b dos números enteros se define $a \star b = a^2 - ab + b^2$. Determine $[(2 \star 0) \star 1] \star 7$.

Respuesta: ______

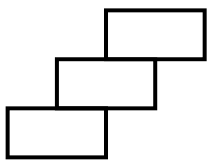
6. Los puntos en la siguiente figura están igualmente espaciados. ¿Cuál es el área en centímetros cuadrados de la región sombreada?



Respuesta: ______

Preguntas para justificar la respuesta

7. Ana tiene 3 bloques rectangulares de 1 cm $\times$ 2 cm y arma una escalera como se muestra en la figura.



Observe que el perímetro de la escalera anterior es 14 cm. ¿Cuál será el perímetro de una escalera construida de manera similar si Ana tiene 2017 bloques rectangulares?

8. La siguiente construcción se obtiene al ir agregando las letras de ORM-UDENAR.

O
O R M
O R M U D
O R M U D E N
O R M U D E N A R
O R M U D E N A R O R
O R M U D E N A R O R M U
⋰ ⋮ ⋱

(a). (Valor **2.0**) ¿Cuántas veces aparece la letra R si la construcción tiene 10 filas?

(b). (Valor **3.0**) ¿Cuántas veces aparece **horizontalmente** la palabra ORMUDENAR si la construcción tiene 13 filas?

(c). (Valor **5.0**) ¿Cuántas filas son necesarias para que aparezca **horizontalmente** 36 veces la palabra ORMUDENAR?

III

Soluciones

4. Soluciones Nivel I (Sexto y Séptimo)

4.1 Primera fase

1. Comenzaremos realizando algunas multiplicaciones en busca de números *guagua* para luego intentar determinar algún patrón que nos ayude a identificar cuáles son los números *guagua* que hay antes de 50. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
1 \times 2 &= 2 && \rightarrow 1 \text{ no es un número } \textit{guagua}, \\
2 \times 3 &= \mathbf{6} && \rightarrow 2 \text{ es un número } \textit{guagua}, \\
3 \times 4 &= 12 && \rightarrow 3 \text{ no es un número } \textit{guagua}, \\
7 \times 8 &= 5\mathbf{6} && \rightarrow 7 \text{ es un número } \textit{guagua}, \\
11 \times 12 &= 132 && \rightarrow 11 \text{ no es un número } \textit{guagua}, \\
12 \times 13 &= 15\mathbf{6} && \rightarrow 12 \text{ es un número } \textit{guagua}.
\end{aligned}$$

   Podemos observar que entre los productos de números de un solo dígito solo hay dos resultados que incluyen en sus unidades el número **6**, y esas son 2×3 y 7×8.

   Ahora analizamos los números de dos dígitos a partir del diez y si nos fijamos en las unidades de los números que cumplen la condición pedida, son las mismas anteriormente encontradas. Partiendo de este hecho nos centraremos solo en los números consecutivos en los cuales sus unidades son 2 y 3, o 7 y 8, así nos aseguraremos que al multiplicarlos el dígito de las unidades del producto sea 6 sin que sea de mucha importancia los dígitos en las decenas o centenas. Continuando de esta forma los números que cumplirían con la condición, a parte de los ya encontrados, son:

$$17 \times 18 \rightarrow 17 \text{ es un número } \textit{guagua},$$
$$22 \times 23 \rightarrow 22 \text{ es un número } \textit{guagua},$$
$$27 \times 28 \rightarrow 27 \text{ es un número } \textit{guagua},$$
$$32 \times 33 \rightarrow 32 \text{ es un número } \textit{guagua},$$
$$37 \times 36 \rightarrow 37 \text{ es un número } \textit{guagua},$$
$$42 \times 46 \rightarrow 42 \text{ es un número } \textit{guagua},$$
$$47 \times 48 \rightarrow 47 \text{ es un número } \textit{guagua}.$$

Finalmente, concluimos que hay **10** números *guagua* menores que 50.

2. Como los triángulos son equiláteros tienen sus tres lados iguales. Además como el perímetro es el contorno de la estrella, el cual está formado por 8 lados de los triángulos, podemos conocer el valor de cada lado dividiendo el perímetro entre el número de lados. Por lo tanto, la medida de cada lado de los triángulos es $\frac{160}{8} = 20$ cm, como mostramos en la siguiente figura.

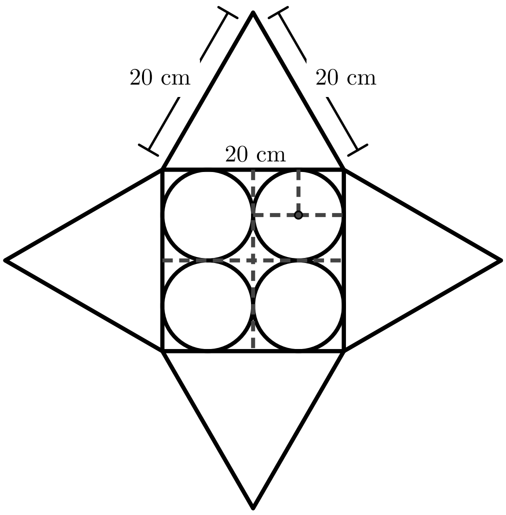


Figura 4.1: Medida de lados en cada triángulo.

Luego, dado que el diámetro de cada círculo es la mitad del lado del cuadrado, obtenemos que el valor de cada diámetro es 10 cm y por lo tanto el radio es **5 cm**.

3. Vamos a ir formando números *quimbolos* comenzando por el 1 y 0, como mostramos a continuación:

$$\begin{aligned}
&1^2-0^2=1-0=\mathbf{1} && \rightarrow 1 \text{ es un número } \textit{quimbolo},\\
&2^2-1^2=4-1=\mathbf{3} && \rightarrow 3 \text{ es un número } \textit{quimbolo},\\
&3^2-2^2=9-4=\mathbf{5} && \rightarrow 5 \text{ es un número } \textit{quimbolo},\\
&4^2-3^2=16-9=\mathbf{7} && \rightarrow 7 \text{ es un número } \textit{quimbolo},\\
&5^2-4^2=25-16=\mathbf{9} && \rightarrow 9 \text{ es un número } \textit{quimbolo},\\
&6^2-5^2=36-25=11 && \rightarrow 11 \text{ es un número } \textit{quimbolo},\\
&7^2-6^2=49-36=13 && \rightarrow 13 \text{ es un número } \textit{quimbolo}.
\end{aligned}$$

   Podemos observar que 9 es el último número *quimbolo* menor que 10, por lo tanto hay **5 números** *quimbolos* desde el 0 hasta el 10.

4. Recordemos que los números impares de dos dígitos son: $11, 13, 15, \ldots, 97$ y 99 y los números pares de dos dígitos son: $10, 12, 14, \ldots, 96$ y 98. Así hay $50-5=45$ números impares de dos dígitos y 45 números pares de dos dígitos.

   Ahora al aplicar la propiedad asociativa entre sumas y restas, tenemos

$$\begin{aligned}
&(11+13+15+\cdots+97+99)-(10+12+14+\cdots+96+98)=\\
&\qquad (11-10)+(13-12)+(15-14)+\cdots+(97-96)+(99-98).
\end{aligned}$$

   Observemos que todas estas diferencias cumplen que

$$\begin{aligned}
11-10&=1,\\
13-12&=1,\\
15-14&=1,\\
&\vdots\\
97-96&=1,\\
99-98&=1.
\end{aligned}$$

   Luego el resultado es: $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{45-veces}}=\mathbf{45}$.

5. Observando la gráfica del problema nos damos cuenta que en la primera figura no hay triángulos sombreados, en la segunda hay **un** triángulo sombreado, en la tercera hay **tres** triángulos sombreados que podemos representarlos como $1+2$ y en la cuarta hay $1+2+3=\mathbf{6}$ triángulos sombreados. De este

modo, la siguiente figura en la sucesión tendrá $1+2+3+4=\mathbf{10}$ triángulos sombreados. Por lo tanto, para saber cuántos triángulos sombreados hay en el centésimo elemento de la sucesión debemos realizar la siguiente suma

$$0+1+2+3+\cdots+97+98+99.$$

Sin embargo, realizar esta suma se vuelve muy larga y tediosa, por lo que debemos encontrar una estrategia para hacer la operación de forma ágil. Una forma sería usar la propiedad asociativa de la suma e ir sumando los números de los extremos, por ejemplo

$$\begin{aligned} 99+0&=99,\\ 98+1&=99,\\ 97+2&=99,\\ &\vdots\\ 51+48&=99,\\ 50+49&=99. \end{aligned}$$

Nos damos cuenta que agrupando de esta forma siempre hemos obtenido 99 como resultado. Luego solo debemos multiplicar este valor por el número de parejas que formamos en el proceso anterior y esto es fácil deducirlo ya que al hacer parejas sería dividir cien elementos entre dos y esto nos da 50 parejas. Por lo tanto, la respuesta es $99\times 50=\mathbf{4950}$.

6. Teniendo en cuenta la definición dada de $a\clubsuit b=b^2-a^2$, calculamos

$$\begin{aligned} 3\clubsuit 7&=7^2-3^2=49-9=40,\\ 6\clubsuit 4&=4^2-6^2=16-36=-20. \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{3\clubsuit 7}{4}-\frac{6\clubsuit 4}{5}=\frac{40}{4}-\frac{(-20)}{5}=10+4=\mathbf{14}.$$

7. Debemos observar que no importa el orden en que se saquen las canicas. En la Tabla 4.1 presentamos todos los posibles casos de sacar tres canicas, teniendo en cuenta que “cualquier participante que saque 3 canicas del sombrero, saca por lo menos una canica amarilla”. Por ejemplo, en el Caso 1 la canica 1 es roja, la canica 2 es azul y la canica 3 es amarilla.

	Canica 1	Canica 2	Canica 3	Número de canicas amarillas
Caso 1	Roja	Azul	Amarilla	1
Caso 2	Roja	Amarilla	Amarilla	2
Caso 3	Azul	Amarilla	Amarilla	2
Caso 4	Amarilla	Amarilla	Amarilla	3

Tabla 4.1: Casos en los que se cumple lo dicho por el mago.

En cualquiera de estos casos, la persona tomará por lo menos una canica amarilla, es decir puede tomar una o más de una canica de este color. Recordemos que el mago escondió canicas de los tres colores, con lo cual por lo menos hay una roja, una azul y una amarilla. Ahora bien, si en la bolsa hubieran dos azules podríamos tener la situación que un participante saque las dos azules y una roja, es decir no se cumpliría la condición de sacar por lo menos una amarilla. Luego, el número de canicas de color azul debe ser menor que 2. Como sabemos que hay una azul, entonces en la bolsa hay exactamente **1 canica azul**.

8. Dado que el área del cuadrado es 36 cm^2, cada uno de sus lados mide 6 cm. Además, si trazamos líneas auxiliares extendiendo las dadas por el problema nos queda dividido como en la Figura 4.2.

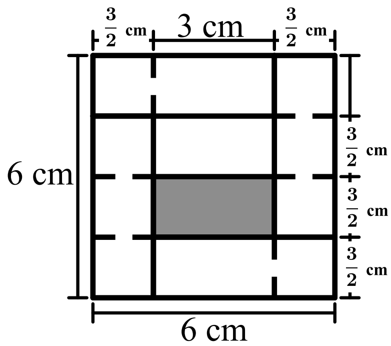


Figura 4.2: Líneas auxiliares.

De esta forma, observamos que el lado del cuadrado es 4 veces el ancho de la tira. Así el ancho de la tira mide $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ cm. Luego podemos obtener el perímetro del rectángulo sombreado con ayuda de la Figura 4.3.

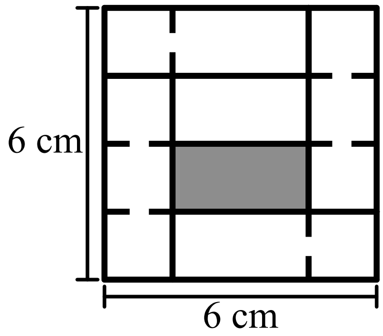


Figura 4.3: Medida perímetro.

De donde el perímetro es

$$3+\frac{3}{2}+3+\frac{3}{2}=\mathbf{9\ cm}.$$

9. Para solucionar este problema vamos a tomar los casos posibles con las condiciones pedidas. Nos fijaremos primero en que deben haber 5 cabezas, pero los banquitos no tienen cabeza por lo tanto las cabezas que contaremos solo serán de personas o vacas y que por lo menos debe haber uno de cada uno. Así los casos que podemos tener son:
   Caso 1. En el corral pueden haber 1 persona, 4 vacas y 1 banquito.
   Caso 2. En el corral pueden haber 2 personas, 3 vacas y 2 banquitos.
   Caso 3. En el corral pueden haber 3 personas, 2 vacas y 3 banquitos.
   Caso 4. En el corral pueden haber 4 personas, 1 vaca y 4 banquitos.

   Ahora ya podemos mirar en la Tabla 4.2 cuántos pies hay en cada caso.

Caso	Pies personas	Pies vacas	Pies banquitos	Total pies
Caso 1	2	16	3	21
Caso 2	4	12	6	22
Caso 3	6	8	9	26
Caso 4	8	4	12	28

Tabla 4.2: Total de pies para cada caso.

Por lo tanto, el Caso 2 es el único caso que cumple la condición de que sean 22. En conclusión hay **3 vacas**.

10. **Primera solución**

    Podemos observar que el polígono está compuesto por un cuadrado, cuatro rectángulos y por cuatro triángulos que conforman las esquinas del polígono. Ahora como los vértices del polígono están ubicados en los puntos medios de los lados de los cuadrados, entonces la base y la altura de cada uno de los triángulos es $\frac{1}{2}$ cm, de donde su área es

    $$\frac{\frac{1}{2}\text{ cm} \times \frac{1}{2}\text{ cm}}{2} = \frac{1}{8}\text{ cm}^2.$$

    Por otro lado, el área de los rectángulos es $\frac{1}{2}$ cm $\times$ 1 cm $= \frac{1}{2}$ cm^2 y la del cuadrado es 1 cm^2. De esta manera, obtenemos que el área del polígono sombreado en centímetros cuadrados es

    $$1 + \left(4 \times \frac{1}{2}\right) + \left(4 \times \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{2} = \mathbf{3.5}.$$

    Segunda solución

    En la Figura 4.4 mostramos una transformación de la figura dada por el problema. Dado que en la Figura 4.4c tenemos tres cuadrados sombreados y la mitad del área de un cuadrado (ver Figura 4.4d), entonces concluimos que el área de la región sombreada en centímetros cuadrados es

    $$3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} = \mathbf{3.5}.$$

11. Cada término en la progresión aritmética se obtiene a partir de sumarle al término anterior $\frac{1}{2}$, como mostramos a continuación:

    $$\begin{aligned} &1, \\ 1 + \frac{1}{2} &= \frac{3}{2}, \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2} &= \frac{4}{2} = 2, \\ 2 + \frac{1}{2} &= \frac{5}{2}, \\ \frac{5}{2} + \frac{1}{2} &= \frac{6}{2} = 3. \end{aligned}$$

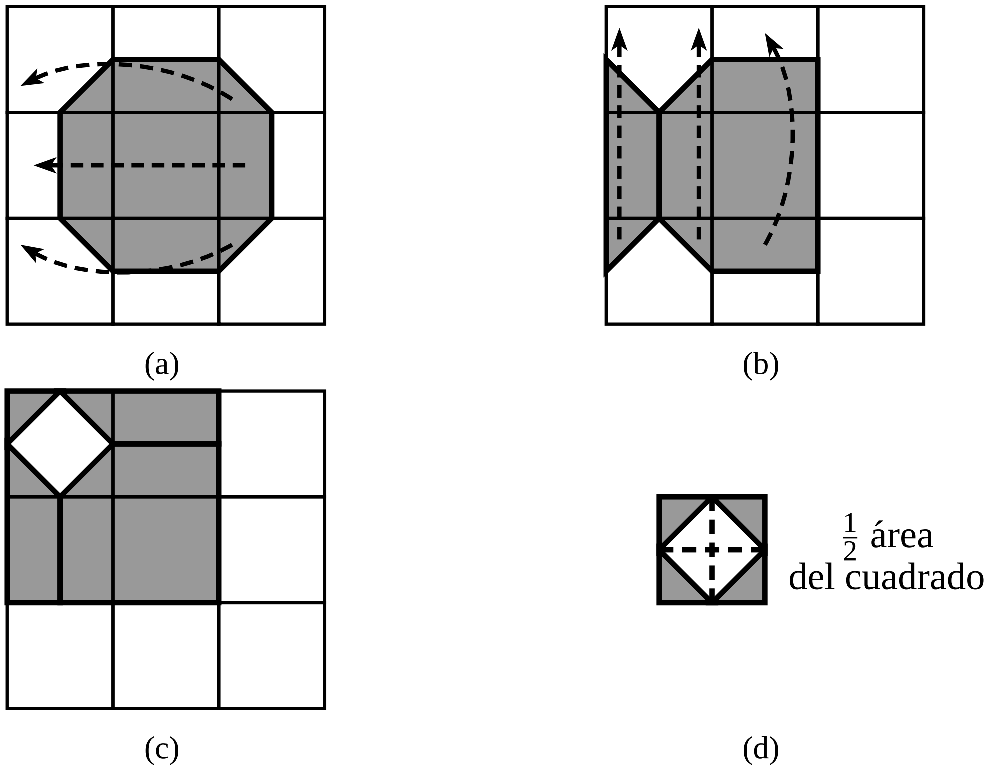


Figura 4.4: Transformación de la figura del problema.

Así el siguiente elemento de la progresión aritmética es

$$2017 + \frac{1}{2} = \frac{\mathbf{4035}}{\mathbf{2}}.$$

12. Como Cami le debe dar $\frac{1}{3}$ de pastilla cada 12 horas a su gatica, cada 3 días gasta 2 pastillas completas. Luego, las $2 \times 5 = 10$ pastillas del tratamiento las tomará en $3 \times 5 =$ **15 días.**

13. Para resolver este ejercicio vamos a organizar las respuestas dadas por Juan y María en la siguiente tabla.

Día	Juan	María
Ayer	Martes	Miércoles
Hoy	Jueves	Viernes
Mañana	Lunes	Domingo

Tabla 4.3: Respuestas de Juan y María.

Ahora, como sabemos que cada uno solo dio una respuesta verdadera, entonces vamos a probar con las respuestas de Juan suponiendo que una es verdadera y las otras dos falsas y miraremos que pasa con las respuestas de María.

Caso 1. La primera respuesta de Juan es verdadera. Esto lo representamos en la siguiente tabla.

Día	Juan		María	
Ayer	Martes	V	Miércoles	F
Hoy	Jueves	F	Viernes	F
Mañana	Lunes	F	Domingo	F

Tabla 4.4: La primera respuesta de Juan es verdadera.

Esto significa que todas las respuestas de María fueron falsas, porque si ayer fue martes, no puede suceder a la misma vez que ayer también sea miércoles. De igual forma, si ayer fue martes es imposible que hoy sea viernes y mucho menos que mañana pueda ser domingo.

Podemos hacer un análisis similar en los dos casos restantes.

Caso 2. La segunda respuesta de Juan es verdadera. Organizamos estos datos en la siguiente tabla.

Día	Juan		María	
Ayer	Martes	F	Miércoles	V
Hoy	Jueves	V	Viernes	F
Mañana	Lunes	F	Domingo	F

Tabla 4.5: La segunda respuesta de Juan es verdadera.

Aunque este caso satisface las condiciones del problema es necesario verificar que la respuesta es única. Veamos que sucede con el último caso.

Caso 3. La tercera respuesta de Juan es verdadera. Consignamos esta información en la siguiente tabla.

Día	Juan		María	
Ayer	Martes	F	Miércoles	F
Hoy	Jueves	F	Viernes	F
Mañana	Lunes	V	Domingo	F

Tabla 4.6: La tercera respuesta de Juan es verdadera.

Podemos observar que la Tabla 4.5 es la única que con que sea cierta solo una de las respuestas tanto para Juan como para María, por lo tanto el día en el que están jugando es el **jueves**.

14. Como la velocidad es constante, observemos que en 10 minutos Atapuma realiza la mitad del recorrido, mientras que Quintana necesita 15 minutos para llegar hasta la mitad. Sin embargo, dado que Quintana partió 5 minutos antes, los dos se encontrarán en la mitad del recorrido a los **10 minutos** de haber empezado Atapuma.

15. Para resolver este ejercicio lo que haremos es regresarnos partiendo del último resultado obtenido que es el número 11 y haciendo operaciones opuestas a las realizadas por Francisco. Por ejemplo, para obtener el 11 antes se dividió por 3, entonces lo que nosotros haremos para regresarnos es multiplicar 11 por 3 y obtenemos 33. A este resultado le restamos 9, para conseguir 24 y luego lo dividimos entre 2, para finalmente encontrar que **12** fue el número digitado por Francisco.

    Podemos revisar que el resultado es el correcto con el siguiente diagrama.

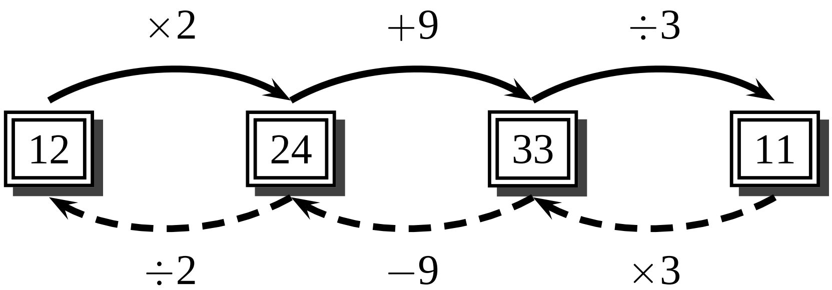


Figura 4.5: Revisión del resultado.

4.2 Segunda fase

1. Teniendo en cuenta que $a \oplus b = \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}$, calculamos

$$3 \oplus 7 = \frac{1}{7} - \frac{1}{3} = \frac{3-7}{21} = -\frac{4}{21} \quad \text{y}$$
$$6 \oplus 4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{6-4}{24} = \frac{1}{12}.$$

   Luego

$$21(3 \oplus 7) - 12(6 \oplus 4) = 21\left(-\frac{4}{21}\right) - 12\left(\frac{1}{12}\right) = -4 - 1 = -\mathbf{5}.$$

2. Dado que $ABCD$ es un cuadrado y el triángulo $\triangle ADE$ es equilátero, tenemos que

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA}.$$

   Luego, como el perímetro del polígono $ABCDE$ es 100 cm, entonces

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA} = 100 \text{ cm},$$

   de donde

$$5\,\overline{AB} = 100 \text{ cm},$$

   por lo que $\overline{AB} = 20$ cm. En consecuencia el cuadrado $ABCD$ tiene área igual a 400 cm^2. A partir de aquí presentamos dos soluciones para encontrar el área de la región sombreada.

   Primera solución

   Por un lado, como el cuadrado $ABCD$ se divide en cuatro cuadrados iguales, tenemos que el área del cuadrado que hace parte de la región sombreada es la cuarta parte del área del cuadrado $ABCD$, esto es 100 cm^2. Además, el área del triángulo de la región sombreada es la mitad de esta última área es decir 50 cm^2, luego el área de la región sombreada es $100 + 50 =$ **150 cm^2**.

   Segunda solución

   Por otro lado, agregando las letras F, G, H e I como mostramos en la Figura 4.6, tenemos que el área de la región sombreada es igual a

$$\text{Área del cuadrado } BFGI + \text{Área del triángulo } \triangle IGH.$$

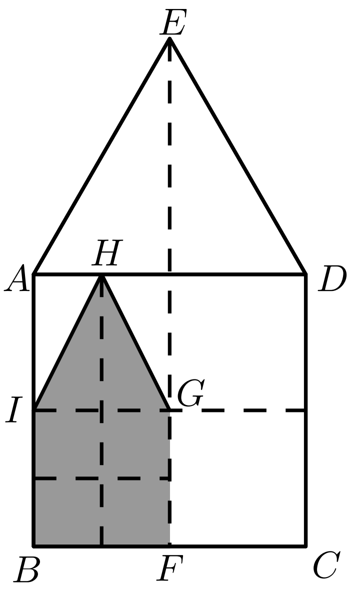


Figura 4.6: Área de la región sombreada.

Como sabemos que $\overline{AB} = \overline{BC} = 20$ cm, entonces $\overline{BF} = \overline{BI} = \overline{IA} = 10$ cm y así obtenemos que el

$$\text{área del cuadrado } BFGI = 100 \text{ cm}^2.$$

y que además el

$$\begin{aligned}\text{área del triángulo } \triangle IGH &= \frac{\overline{IG} \times \overline{IA}}{2}, \\ &= 50 \text{ cm}^2,\end{aligned}$$

por lo que el área de la región sombreada es **150 cm**^{2}.

3. Recordemos que los dígitos que son primos son 2, 3, 5 y 7. De esta manera, para saber cuántos números *serios* de dos dígitos hay, debemos saber cuántos números podemos formar con estos cuatro dígitos.

   Dado que tanto el primer dígito como el segundo tienen 4 posibilidades cada uno, entonces existen $4 \times 4 =$ **16 números *serios***.

4. A continuación presentamos dos soluciones.

   Primera solución

   Identificamos con las letras D, E, F, G, H e I los puntos de intersección de los segmentos punteados con los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, con x la medida de los segmentos iguales del lado $\overline{BC}$ y con a, b y c las medidas respectivas de los segmentos punteados.

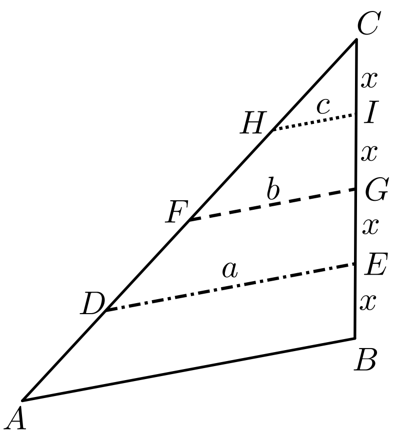


Figura 4.7: Identificación de puntos y medidas de segmentos punteados.

Dado que los segmentos punteados son paralelos al lado $\overline{AB}$, tenemos que los triángulos $\triangle DEC$, $\triangle FGC$ y $\triangle HIC$ son semejantes al triángulo $\triangle ABC$. Luego, tenemos que los lados correspondientes de estos triángulos son proporcionales a los lados correspondientes del triángulo $\triangle ABC$. En consecuencia, obtenemos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EC}},$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{4 \text{ cm}}{4x} = \frac{a}{3x},$$

de donde $a = 3$ cm. Similarmente, tenemos que

$$\frac{4 \text{ cm}}{4x} = \frac{b}{2x} \qquad \text{y} \qquad \frac{4 \text{ cm}}{4x} = \frac{c}{x}.$$

Así $b = 2$ cm y $c = 1$ cm. Por lo tanto, la suma de la medida de los tres segmentos punteados es igual a

$$a + b + c = \mathbf{6\ cm}.$$

Segunda solución

Formamos el paralelogramo $ABCB'$ poniendo sobre el segmento $\overline{AC}$ el triángulo $\triangle AB'C$ congruente con el triángulo $\triangle ABC$. Luego, extendemos los segmentos paralelos a $\overline{AB}$ como mostramos en la Figura 4.8.

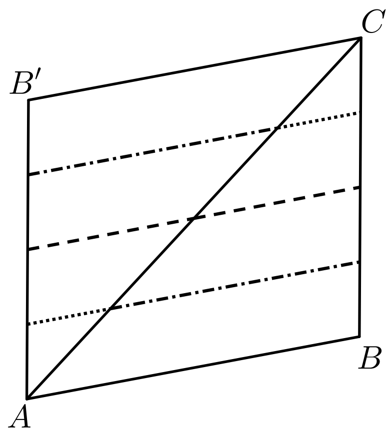


Figura 4.8: Paralelogramo $ABCB'$.

De la simetría y por los segmentos punteados en la Figura 4.8, observamos que obtenemos exactamente un segmento con igual medida que $\overline{AB}$, esto es 4 cm, y otro que mide la mitad. Luego, la suma de la medida de los tres segmentos punteados es igual a **6 cm**.

5. Para resolver este problema primero ubicaremos a los personajes de izquierda a derecha, según su edad, de menor a mayor, teniendo en cuenta los datos proporcionados.

   Así tenemos que

   Carolina – Antonio → porque Antonio es mayor que Carolina.
   Antonio – Diana → porque Antonio es más joven que Diana.

   Luego, como sabemos que el esposo de Carolina es el mayor del grupo, podemos organizarlos de la siguiente manera

   Carolina – Antonio – Diana – Esposo de Carolina.

   En consecuencia, deducimos que el esposo de Carolina es Bernardo y por lo tanto la única opción correcta es que **Carolina es más joven que todos y su marido es Bernardo**.

6. Sabemos que podemos seleccionar un tipo para cada una de las opciones de carne, acompañante y bebida. Así podemos elegir un plato de varias maneras. Por ejemplo, podríamos escoger cuy, papa y café.

Carne	Acompañante	Bebida
3	4	2

Tabla 4.7: Número de opciones de cada componente de un plato.

Por lo tanto, podemos escoger el plato de $3 \times 4 \times 2 = $ **24 maneras distintas**.

Otra forma de ver la solución
Sabemos que podemos seleccionar únicamente un tipo para cada una de las opciones de carne, acompañante y bebida, por lo cual podemos elegir un plato de varias maneras. Así por ejemplo, en la Figura 4.9, tenemos los platos posibles que se forman si seleccionamos *cuy* en la opción de carne.

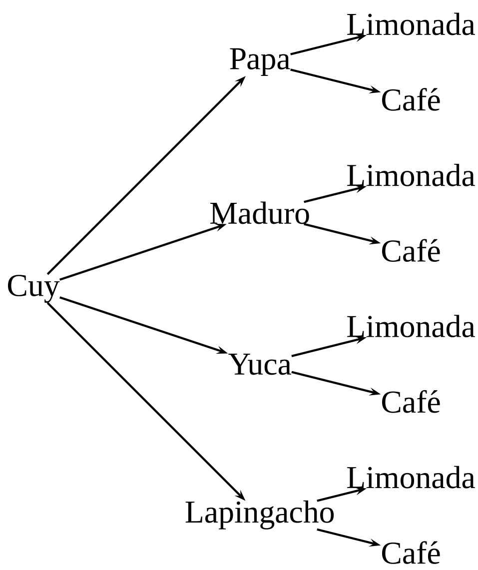


Figura 4.9: Opciones de platos con elección de cuy como carne.

Luego, tomando *cuy* en la opción de carne hay $4 \times 2 = 8$ opciones distintas de pedir el plato.

De igual forma, si escogemos pollo o res tendríamos 8 opciones de formar platos diferentes por cada uno. Por lo tanto, podemos elegir el plato de $3 \times 8 = $ **24 maneras distintas**.

7. María sabe que solo uno de sus cuatro hijos dice la verdad. Analizaremos cada uno de los casos por separado, dependiendo de quien está diciendo la verdad.
Caso 1. Abel dice la verdad.

Entonces Abel y Byron también estarían diciendo la verdad, lo cual no puede ser. Así Abel no fue quien quebró el jarrón.

Caso 2. Byron dice la verdad.

Como ya sabemos que Abel no es el responsable, entonces tendríamos de la afirmación dicha por Byron que quien quebró el jarrón fue Daniel. Pero en este supuesto Daniel también estaría diciendo la verdad, lo que es imposible. De donde, podemos concluir que Daniel tampoco fue el responsable y está mintiendo al asumir la culpa. Luego el único que dijo la verdad debió ser Carlos, el cual es el siguiente caso que consideraremos.

Caso 3. Carlos dice la verdad.

Entonces Carlos tampoco fue el culpable. Por lo tanto al único que no podemos descartar es Byron, esto significa que **Byron** fue el responsable de quebrar el jarrón.

8. Podemos tomar el lado $\overline{DC}$ del cuadrado $ABCD$ como base de los triángulos $\triangle DCE$ y $\triangle DCE'$. Además, sabemos que los puntos E y E' pertenecen a un segmento perpendicular al lado $\overline{AD}$, en consecuencia este segmento es paralelo al lado $\overline{DC}$, por lo que E y E' se encuentran a la misma distancia del lado $\overline{DC}$, esto significa que los dos triángulos tienen igual altura, y en consecuencia **el área es la misma**.

9. Dado que en un número los ceros a la izquierda no se tienen en cuenta, esto es por ejemplo 00100 en realidad es igual a 100; lo mejor es borrar cuidadosamente de izquierda a derecha los dígitos diferentes de cero que aparecen en el número. De esta manera, al borrar los primeros ocho dígitos distintos de cero, obtenemos el número

$$\cancel{5}\cancel{1}0\cancel{2}0\cancel{1}\cancel{7}\cancel{6}\cancel{1}0\cancel{2}0177102017 = 0000177102017 = 177102017.$$

Sin embargo, notemos que si continuamos borrando los próximos dos dígitos distintos de cero, es decir el 1 y el 7, tendríamos el número

$$\cancel{1}\cancel{7}7102017 = 7102017,$$

el cual tiene al 7 como su primer dígito y este es un valor muy grande para estar en la cifra correspondiente a los millones. De aquí, concluimos que no era conveniente borrar el número 1, sino que debemos borrar otro que nos ayude a formar un número menor. De donde, cancelamos los dos números 7 consecutivos. Así, el número obtenido tendrá el menor número de dígitos posible y es el menor de los números que podemos formar. Por lo tanto, obtenemos el número

$$1\cancel{7}\cancel{7}102017 = \mathbf{1102017},$$

o lo que es lo mismo **1’102.017**.

10. Dado que $x = 30^\circ$ y $y = 45^\circ$, entonces $\alpha = 150^\circ$ y $\beta = 135^\circ$. Además, como sabemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, entonces $z = 105^\circ$. En consecuencia, $\theta = 75^\circ$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \theta &= 150^\circ + 135^\circ + 75^\circ \\ &= \mathbf{360}^\circ.\end{aligned}$$

Observemos que la solución de este problema en realidad no depende de la medida de los ángulos x y y. Dado que las parejas de ángulos x y α, y y β y z y θ son suplementarios, tenemos que

$$\begin{aligned}x + \alpha &= 180^\circ, \\ y + \beta &= 180^\circ \quad \text{y} \\ z + \theta &= 180^\circ.\end{aligned}$$

Luego sumando estas tres ecuaciones, obtenemos

$$x + y + z + \alpha + \beta + \theta = 540^\circ$$

y como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, entonces

$$x + y + z = 180^\circ,$$

por lo cual reemplazando, concluimos que

$$180^\circ + \alpha + \beta + \theta = 540^\circ,$$

es decir

$$\alpha + \beta + \theta = 540^\circ - 180^\circ = \mathbf{360}^\circ.$$

11. Teniendo en cuenta el código dado tenemos que

el 6 corresponde a la L,
el 7 corresponde a la A,
el 4 corresponde a la M,
el 3 corresponde a la I,

y así sucesivamente. A partir de aquí, realizando las sustituciones adecuadas en el mensaje secreto, obtenemos que el mensaje de Francisco es:

LA PAZ COMIENZA CON UNA SONRISA.

12. Identificamos los dados con D_1, D_2, D_3 y D_4 como mostramos en la figura a seguir.

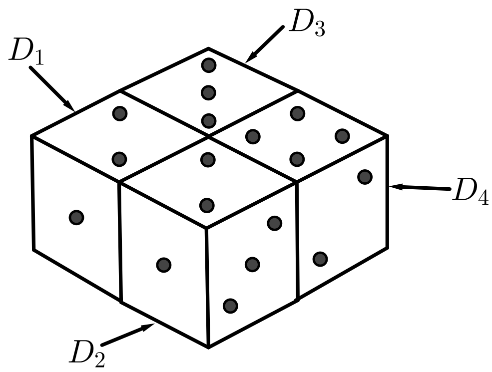


Figura 4.10: Identificación de los dados del problema.

Sabemos que cada dado tiene dos caras ocultas y que están pegadas con las caras de otro dado. Dado que en la suma no importa el orden de los números podemos llamar las caras ocultas y pegadas con D_{i1} y D_{i2} para cada uno de los dos dados, donde $i = 1, 2, 3$ o 4, según sea el caso. Por ejemplo, D_{32} representa la segunda cara oculta del dado D_3.

Siguiendo el hecho de que los dados son **idénticos** y que la suma de los puntos de dos caras opuestas es 7, tenemos que las dos caras ocultas del dado D_2 son 4 y 6, así podemos escribir $D_{21} = 4$ y $D_{22} = 6$. Análogamente, tenemos que $D_{11} = 6$ y $D_{12} = 3$.

Adicionalmente, tenemos que una de las caras ocultas del dado D_4 es 5 y que la otra debe ser 1 o 6. Sin embargo, puesto que los dados son idénticos, podemos girar el dado D_2 para obtener el dado D_4 como se muestra en la Figura 4.11, entonces concluimos que la otra cara de D_4 debe ser 1.

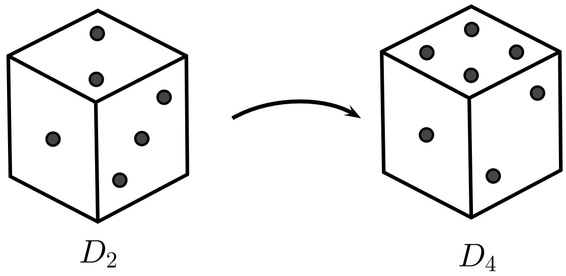


Figura 4.11: Giro del dado D_2 para obtener el dado D_4.

Reunimos esta información en la siguiente tabla donde colocamos las posibilidades para las otras caras restantes.

D_{11}	D_{12}	D_{21}	D_{22}	D_{31}	D_{32}	D_{41}	D_{42}
6	3	4	6	2 o 5	1 o 6	5	1

Tabla 4.8: Posibilidades para las caras D_{i1} y D_{i2} para $i = 1,2,3$ y 4.

Así podemos calcular las cuatro posibles sumas que se pueden obtener, como mostramos a continuación.

D_{11}	D_{12}	D_{21}	D_{22}	D_{31}	D_{32}	D_{41}	D_{42}	Suma
6	3	4	6	2	1	5	1	28
6	3	4	6	2	6	5	1	33
6	3	4	6	5	1	5	1	**31**
6	3	4	6	5	6	5	1	36

Tabla 4.9: Posibles sumas que podemos obtener.

Entonces la suma de las caras ocultas y pegadas de los dados es igual a **31**, pues esta es la única de las posibles sumas que es un número primo.

4.3 Fase final

1. Existen varias formas de obtener el número 2017, para contar el número total, vamos a tener en cuenta la posición de los números 7 de la gráfica. Por ejem-

plo, con el 7 de la primera fila, solo se puede de una manera, como mostramos con líneas punteadas en la siguiente figura.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{2} \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \mathbf{0} \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \mathbf{1} \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \mathbf{7} \quad 1 \\
\mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{7} & \\
\mathbf{1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{7} & & \\
\mathbf{7} & & &
\end{tikzcd}
$$

Figura 4.12: Número de formas de obtener 2017 usando el 7 de la primera fila.

Hacemos lo mismo con el 7 de la segunda fila.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{2} \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \mathbf{0} \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \mathbf{1} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \mathbf{7} \quad 1 \\
\mathbf{0} \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \mathbf{1} \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \mathbf{7} \quad 3 & \\
\mathbf{1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{7} & & \\
\mathbf{7} & & &
\end{tikzcd}
$$

Figura 4.13: Número de formas de obtener 2017 con el 7 de la segunda fila.

Así tenemos que hay tres maneras de escribir 2017 con este 7. Realizamos lo mismo con los otros 7's para obtener la figura, en la cual anotamos el número de formas con cada 7.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{2} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{7} \quad 1 \\
\mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{7} \quad 3 & \\
\mathbf{1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{7} \quad 3 & & \\
\mathbf{7} \quad 1 & & &
\end{tikzcd}
$$

Figura 4.14: Número de formas de obtener según cada 7 por fila.

Así en total hay $1+3+3+1=$ **8 formas** de obtener el número 2017 siguiendo la dirección de las flechas.

Resaltamos que este problema también se solucionó en el Capítulo 1 usando la estrategia de grafos.

2. Presentamos dos soluciones usando dos particiones diferentes de la figura.

Primera solución

Realizamos la siguiente partición en la figura dada.

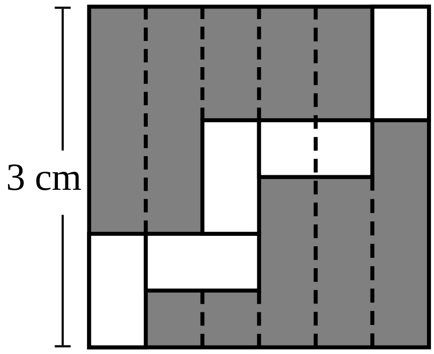


Figura 4.15: Partición en la figura del problema.

En consecuencia, tenemos que el cuadrado se puede dividir en 6 rectángulos de igual área, la cual es

$$\frac{\text{Área del cuadrado}}{6} = \frac{9}{6}\ \text{cm}^2 = \frac{3}{2}\ \text{cm}^2.$$

Además, vemos que 3 de los rectángulos sin sombra forman uno de los rectángulos de la partición realizada, por lo tanto cada uno tiene área igual a

$$\frac{\text{Área de un rectángulo de la partición}}{3} = \frac{\frac{3}{2}}{3}\ \text{cm}^2 = \frac{3}{6}\ \text{cm}^2 = \frac{1}{2}\ \text{cm}^2.$$

De esta manera, el área de la región sombreada es

$$\text{Área del cuadrado} - 5 \times \text{Área de un rectángulo sin sombra, es decir}$$

$$9\ \text{cm}^2 - 5 \times \frac{1}{2}\ \text{cm}^2 = \mathbf{\frac{13}{2}\ cm}^2.$$

Segunda solución

Fraccionamos el cuadrado dado, extendiendo los lados de los rectángulos dados como se muestra en la figura a continuación.

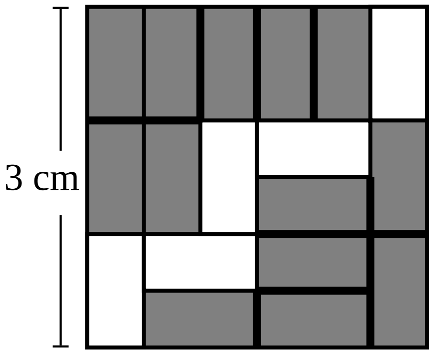


Figura 4.16: Fraccionamiento de la figura dada por el problema.

Luego, dado que el área del cuadrado es 9 cm^2 y como este se divide, ver Figura 4.16, en 18 rectángulos iguales, de los cuales 13 están sombreados, concluimos al usar fracciones que el área de la región sombreada es

$$\frac{13}{18} \times 9 \text{ cm}^2 = \mathbf{\frac{13}{2}} \textbf{ cm}^2.$$

3. Observemos que

$$\frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4 \text{ quesos},$$

los cuales pesan

$$3 \times \frac{6}{5} = \frac{18}{5} \text{ libras}.$$

Así que para que tengamos $5 \times \frac{18}{5} = 18$ libras, debemos tener $5 \times 4 =$ **20 quesos**.

4. El mensaje en la caja 2 no puede ser verdadero, pues entonces el mensaje en la caja 1 o en la caja 4 también serían verdaderos. Así sabemos que los mensajes en las cajas 1, 2 y 4 son falsos. Por lo tanto, el único mensaje verdadero es el que está en la caja 3 y así los dulces estaban en la **caja 2**.

5. Inscribimos en un cuadrado el círculo que incluye la región sombreada, usando los radios indicados en la figura dada por el problema, como se muestra en la Figura 4.17a.

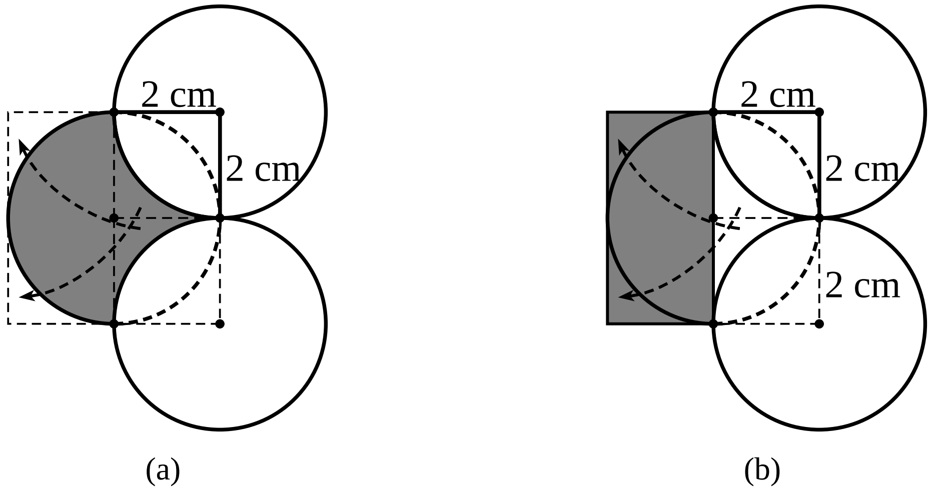


Figura 4.17: Desplazamiento de regiones sombreadas.

Por lo tanto, el área que buscamos corresponde al área del rectángulo sombreado en la Figura 4.17b. Así, el área de la región sombreada es

$$2 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} = \mathbf{8\ cm^2}.$$

6. Los números *quimbolos* entre 0 y 10 son

$$\begin{aligned} 1^2-0^2&=1-0=1, & 4^2-3^2&=16-9=7,\\ 2^2-1^2&=4-1=3, & 5^2-4^2&=25-16=9.\\ 3^2-2^2&=9-4=5, \end{aligned}$$

Así los números *quimbolos* menores que 10 coinciden con los números impares entre 0 y 10, esto significa que $a=5$. Ahora para saber cuántos números *quimbolos* hay desde el 100 hasta el 120, podemos ver que estos son los números impares en este rango, es decir: 101, 103, 105, 107, 109, 111, 113, 115, 117 y 119. Por lo tanto, $b=10$.

Luego,

$$a \oplus b = \frac{1}{10} - \frac{1}{5} = \frac{-5}{50} = \frac{-1}{10}.$$

Así

$$20\,(a \oplus b) + 5 = 20\left(\frac{-1}{10}\right) + 5 = -2 + 5 = \mathbf{3}.$$

7. Dado que Andrea dejó una respuesta sin contestar la suma del número de respuestas correctas y del número de respuestas incorrectas debe ser 14. Además,

recordemos que por presentar el examen Andrea ya tiene 15 puntos. Por ejemplo, si Andrea hubiera respondido 10 respuestas correctas y 4 respuestas incorrectas, el puntaje que obtendría sería

$$10\times 4+4\times(-1)+15=(40-4)+15=36+15=51.$$

A continuación presentamos mediante una tabla diferentes ejemplos de posibles puntajes que podría haber obtenido Andrea según sea el número de respuestas correctas e incorrectas.

No. de respuestas correctas	No. de respuestas incorrectas	Puntaje
14	0	71
13	1	66
12	2	61
11	3	56
10	4	51
9	5	46
8	6	41
7	7	36
6	8	31
5	9	26

Tabla 4.10: Algunos posibles puntajes de Andrea.

Es claro que si continuamos con la construcción de la tabla cada vez aparecerán puntajes menores. Como el puntaje obtenido por Andrea fue 31, esto significa que el número de respuestas correctas de Andrea fueron **6**.

8. (a). Observemos que cada fila se construye pegando en el extremo derecho de la fila anterior dos letras, las cuales pueden ser RM, UD, EN, AR, OR, MU, DE, NA o RO. En la siguiente tabla vemos cuales parejas de letras se adicionan en cada una de las 10 primeras filas. Esta tabla nos permitirá determinar el número de veces que aparecerá la letra O.

Fila	Letras adicionadas	Fila	Letras adicionadas	Fila	Letras adicionadas
2	RM	5	AR	8	DE
3	UD	6	OR	9	NA
4	EN	7	MU	10	RO

Tabla 4.11: Letras adicionadas en cada fila.

Dado que la O es la primera letra de la construcción, esta aparecerá en las 10 filas, además podemos ver que nuevas letras O se agregan a la construcción a partir de las filas 6 y 10.

Dado que cada adición que contenga la letra O se repetirá en la pirámide de ahí en adelante, debemos contar una letra O en cada una de las filas siguientes. Así, por ejemplo, como OR se agrega en la sexta fila, entonces hasta la décima fila esto lleva a que la O aparezca 5 veces más. En consecuencia tenemos

$$\begin{aligned} \text{OR} &\rightarrow \text{ 5 veces,} \\ \text{RO} &\rightarrow \text{ 1 vez.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, con 10 filas la O aparecerá **16 veces**.

(b). Observemos que la primera vez que se forma la palabra ORMUDENAR completa es en la 5ta fila. De ahí en adelante la palabra ORMUDENAR aparecerá una vez en las filas 5,6,7,8 y 9. Como se agregan dos letras en cada nueva fila, la próxima vez que aparecerá ORMUDENAR será en la fila 10, pues esta palabra tiene 9 letras. Siguiendo con este razonamiento la palabra no volverá a completarse hasta la fila 14. En consecuencia tenemos que

$$\begin{gathered} \text{Aparece una vez en cada fila entre las filas 5 y 9} \rightarrow \text{5 veces,} \\ \text{Aparece dos veces en la fila 10} \rightarrow \text{2 veces.} \end{gathered}$$

Por lo tanto, aparece en total $5+2=$ **7 veces**.

(c). Siguiendo con el razonamiento anterior tendremos que la próxima vez que se completa la palabra ORMUDENAR es en la fila 14. De esta manera organizamos la información en la siguiente tabla.

Filas	**Repetición por fila**	**Total**
1-4	0 veces	0
5-9	1 vez por fila	5
10-13	2 veces por fila	$2 \times 4 = 8$
14-18	3 veces por fila	$3 \times 5 = 15$

Tabla 4.12: Repeticiones por fila de ORMUDENAR.

En consecuencia, hasta aquí la palabra ORMUDENAR apareció 28 veces. Como la próxima vez que se completa la palabra ORMUDENAR es en la fila 19, esto implica que en las filas 19 y 20 aparece 8 veces más completando 36 veces. Esto significa que si la construcción tiene 20 filas la palabra ORMUDENAR aparecerá **36 veces**.

5. Soluciones Nivel II (Octavo y Noveno)

5.1 Primera fase

1. Para este problema presentamos dos soluciones.

   Primera solución

   Vamos a denotar con X a la cantidad de semillas. Como el lunes siembra $\frac{1}{3}$ de X, entonces le restan

   $$X - \frac{1}{3}X = \frac{2}{3}X.$$

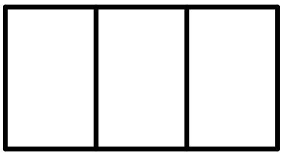
   Luego el martes siembra $\frac{1}{4}$ de lo que le había quedado, entonces le restan

   $$\begin{aligned} \frac{2}{3}X - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}X\right) &= \frac{2}{3}X - \frac{1}{6}X \\ &= \left(\frac{4-1}{6}\right)X = \frac{1}{2}X. \end{aligned}$$

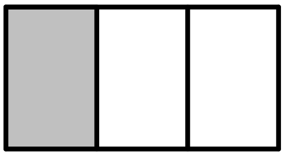
   Por lo tanto, la fracción que le queda para la próxima siembra es $\mathbf{\frac{1}{2}}$.

   Segunda solución

   También es posible obtener la solución a partir de la interpretación gráfica de fracción sobre una unidad cualquiera. Así, si tomamos la unidad que representa la cantidad inicial de semillas como el rectángulo en la Figura 5.1a, entonces $\frac{1}{3}$ de esta unidad es la región sombreada en la Figura 5.1b.



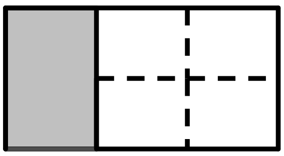
(a)



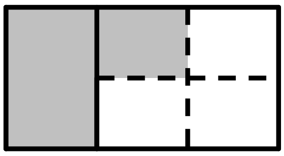
(b)

Figura 5.1: Representación gráfica de $\frac{1}{3}$.

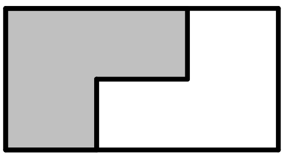
Así, para determinar la cuarta parte de las semillas restantes, dividimos en cuatro la región sin sombrear como está en la Figura 5.2a. De aquí la representación gráfica para $\frac{1}{4}$ de las semillas que quedan, la cual mostramos en la Figura 5.2b, equivale a sombrear uno de estos cuatro rectángulos.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.2: Representación gráfica de otras fracciones.

Luego observamos que la región en blanco representa las semillas que sobran y la gris las que se han gastado con respecto a la cantidad de semillas inicial, es decir que aún tenemos $\mathbf{\frac{1}{2}}$ de la cantidad inicial de semillas como vemos en la Figura 5.2c.

2. Para iniciar nombramos algunos vértices en la siguiente figura.

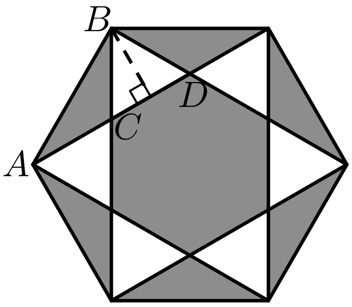


Figura 5.3: Marcamos algunos vértices en la gráfica.

Ahora notemos que el área del triángulo $\triangle ABC$ es igual a la del triángulo $\triangle BCD$, pues tenemos que las bases $\overline{AC}$ y $\overline{CD}$ para ambos triángulos tienen la misma medida. Además la altura del triángulo $\triangle ABC$, que cae sobre la extensión de la base $\overline{AC}$, es también altura del triángulo $\triangle BCD$ y así ambos triángulos tienen igual área.

Luego podemos trazar las diagonales del hexágono interno como en la siguiente figura.

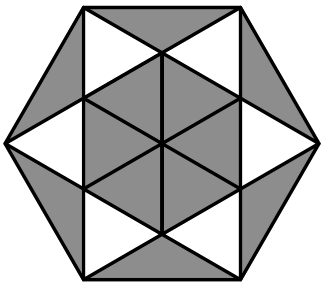


Figura 5.4: Diagonales trazadas en la gráfica del problema.

Si observamos con detenimiento se forman 18 triángulos que tienen la misma área. Ahora como el área del hexágono es 54 cm^2, entonces el área de cada uno de los 18 triángulos formados es $\frac{54}{18}$ cm^2 $=$ 3 cm^2. Dado que la región sombreada está compuesta por 12 triángulos, entonces su área es 3 cm $\times$ 12 cm $=$ **36 cm^2**.

Existen otras particiones del hexágono original que igualmente llevan a la solución, a continuación presentamos dos de estas e invitamos al lector a solucionar el problema con ellas y a pensar en otras posibles particiones.

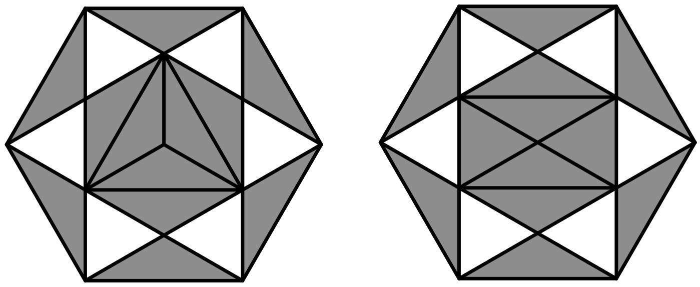


Figura 5.5: Dos particiones extra de la gráfica del problema.

3. De la información que nos han dado iremos analizando el caso de cada uno y así podremos dar algunas conclusiones que luego organizaremos. Por ejemplo,

   - María tiene un animal que tiene pelo, podría ser un gato o un perro, pero a María no le gustan los gatos. Por lo tanto María debe tener un perro.
   - Luisa tiene un animal que tiene cuatro patas, nuevamente puede ser un gato o un perro, pero dijimos que María tiene un perro. Por lo tanto Luisa debe tener un gato.
   - Pedro tiene un pájaro, y el único pájaro de los cuatro animales es el canario, así que Pedro tiene el canario.
   - Julián tendría el animal que nos hace falta que es el pez rojo.

   Ahora podemos organizar la información que tenemos en una tabla para que nos sea más sencillo poder determinar que afirmación es falsa.

	Perro	Gato	Canario	Pez rojo
María	X			
Luisa		X		
Pedro			X	
Julián				X

Tabla 5.1: Información del problema.

En conclusión la afirmación que no es verdadera es **Luisa tiene un perro**.

4. La expresión es igual a

$$\frac{2017^{2017}}{2017+\cdots+2017} = \frac{2017^{2017}}{2017\times 2017} = \frac{2017^{2017}}{2017^2} = \mathbf{2017^{2015}}.$$

5. Comenzaremos revisando los primeros saltos que Caterine hizo:

$$\begin{aligned}
&\text{Salto 1: } 1 \longrightarrow 5,\\
&\text{Salto 2: } 5 \longrightarrow 9,\\
&\text{Salto 3: } 9 \longrightarrow 4,\\
&\text{Salto 4: } 4 \longrightarrow 8,\\
&\text{Salto 5: } 8 \longrightarrow 3,\\
&\text{Salto 6: } 3 \longrightarrow 7,\\
&\text{Salto 7: } 7 \longrightarrow 2,\\
&\text{Salto 8: } 2 \longrightarrow 6,\\
&\text{Salto 9: } 6 \longrightarrow 1.
\end{aligned}$$

Podemos observar que a los 9 saltos vuelve al punto inicial, esto hace que el proceso se repita cíclicamente, es decir que en el salto 18 otra vez estará parada en el 1. En consecuencia, en el salto 19 se encontrará en el 5, en el salto 20 en el 9 y así sucesivamente.

De esta manera para identificar la equivalencia entre cada salto debemos tener en cuenta los múltiplos del número 9 como punto de partida. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
18 &= 9\times 2+0 \rightarrow \text{Salto 18 = Salto 1},\\
19 &= 9\times 2+1 \rightarrow \text{Salto 19 = Salto 2},\\
20 &= 9\times 2+2 \rightarrow \text{Salto 20 = Salto 3},\\
&\vdots\\
26 &= 9\times 2+8 \rightarrow \text{Salto 26 = Salto 9},\\
27 &= 9\times 3+0 \rightarrow \text{Salto 27 = Salto 1}.
\end{aligned}$$

De aquí, dado que

$$2017 = 9\times 224+1,$$

tenemos que en el salto 2017 estará en el **5**.

6. A continuación presentamos dos soluciones.

Primera solución

Sabemos que Nelcy contestó bien el 70 % de las 30 preguntas de aritmética, lo que corresponde a $30 \times 70\,\% = 21$ preguntas correctas de Aritmética. Además, conocemos que del total de preguntas respondió bien el 80 % lo que representan $80 \times 80\,\% = 64$ preguntas correctas en la prueba.

Ahora, al total de preguntas correctas le restamos las que respondió correctamente de Aritmética para obtener la cantidad de preguntas de Geometría que respondió correctamente, esto es

$$64 - 21 = 43 \text{ preguntas correctas de Geometría.}$$

Por último, como eran 50 preguntas de geometría entonces Nelcy se equivocó en $50 - 43 =$ **7 preguntas** de Geometría.

Segunda solución

Dado que el cálculo de porcentajes también lo podemos expresar por medio de fracciones, para representar el 70 % de las preguntas de Aritmética en la Figura 5.6 distribuimos las 30 preguntas en 10 regiones y sombreamos 7 de ellas, puesto que $70\,\% = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$.

3	3	3	3	3
3	3	3	3	3

Figura 5.6: Representación gráfica del 70 % de 30.

De la figura anterior concluimos que Nelcy obtuvo $3 \times 7 = 21$ respuestas correctas y $3 \times 3 = 9$ respuestas incorrectas en Aritmética. Razonando de esta manera, sabemos que de las 80 preguntas realizadas, Nelcy contestó el 80 % correctas, lo cual representamos en la Figura 5.7.

8	8	8	8	8
8	8	8	8	8

Figura 5.7: Representación gráfica del 80 % de 80.

Luego concluimos que en total tuvo $2 \times 8 = 16$ respuestas incorrectas y como en Aritmética obtuvo 9 erradas, entonces en Geometría falló en $16-9=\mathbf{7}$ **preguntas**.

7. Para realizar esta operación comenzaremos resolviendo los paréntesis más internos y continuaremos con las operaciones hacia afuera. Empezamos calculando

$$5\clubsuit 9 = 1, \text{ puesto que 9 es el único cuadrado entre 5 y 9.}$$

Luego

$$[(5\clubsuit 9)\clubsuit 16] = 1\clubsuit 16 = 4,$$

dado que entre 1 y 16 están los cuadrados 1, 4, 9 y 16. De ahí que, como hay cuatro cuadrados entre 4 y 30, concluimos que

$$[(5\clubsuit 9)\clubsuit 16]\clubsuit 30 = 4\clubsuit 30 = \mathbf{4}.$$

8. De las igualdades dadas, se sigue que

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{5} \Longrightarrow a = \frac{3}{5}b,$$
$$\frac{c}{d} = \frac{3}{5} \Longrightarrow c = \frac{3}{5}d.$$

Luego,

$$\frac{a-c}{b-d} = \frac{\frac{3}{5}b - \frac{3}{5}d}{b-d} = \frac{\frac{3}{5}(b-d)}{b-d} = \mathbf{\frac{3}{5}}.$$

9. **Primera solución**

Para resolver este problema trataremos de encontrar un patrón que pueda darnos la respuesta que necesitamos. Con esto en mente vamos a calcular la diferencia entre dos elementos consecutivos de la sucesión, como sigue:

la diferencia entre 8 y 2 es 6,
la diferencia entre 18 y 8 es 10,
la diferencia entre 32 y 18 es 14.

Podemos observar que la diferencia va aumentando 4 en cada par de números consecutivos en la sucesión, de esta manera, para encontrar el siguiente término de la sucesión debemos aumentarle a la diferencia anterior 4 y ese resultado sumarlo al último elemento de la sucesión que se lleva hasta el momento. Dado que la última diferencia fue 14, entonces la próxima diferencia será $14+4=18$. Luego el siguiente elemento de la sucesión es $32+18=\mathbf{50}$.

Segunda solución

Observemos que los números de la sucesión son pares, entonces si dividimos por 2 los términos dados de la sucesión, obtenemos 1, 4, 9 y 16 los cuales todos son cuadrados perfectos consecutivos. Así como el cuadrado que le sigue a 16 es 25, entonces el siguiente término en la sucesión original es $2 \times 25 =$ **50**.

10. Recordemos que los dígitos diferentes de cero son: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Notemos que si Steven escribe el 1 no puede escribir el 9 porque su suma daría 10. Similarmente, tenemos que

    si escribe 2 no puede escribir el 8,
    si escribe 3 no puede escribir el 7,
    si escribe 4 no puede escribir el 6,

    y viceversa, pues la suma es conmutativa. Dado que hay cuatro parejas, donde si escribe el uno entonces no puede escribir el otro y fueron cinco los números escritos en el tablero, definitivamente Steven debió haber escrito el **5**.

11. Dado que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle CDE$ son equiláteros y congruentes, en la Figura 5.8 agregamos una marca para indicar los lados que tienen la misma medida.

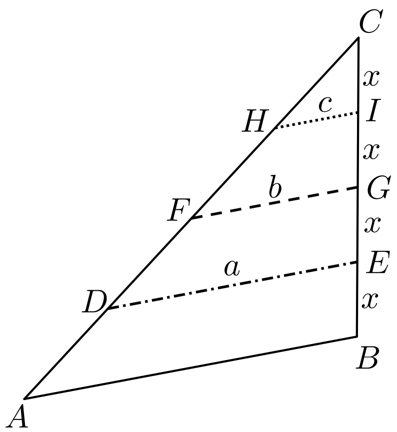


Figura 5.8: Identificación de segmentos congruentes.

Observemos que el triángulo $\triangle ACD$ es isósceles, de esta manera los ángulos de la base son congruentes y como el ángulo $\measuredangle ACD$ mide 80°, entonces la suma de las medidas de los ángulos de la base debe ser igual a 100. Es decir que la medida del ángulo $\measuredangle ADC$ es 50°. Además, el triángulo $\triangle BCD$ también es isósceles y como la medida del ángulo $m(\measuredangle BCA) = 60^\circ$, dado que el triángulo $\triangle ABC$ es equilátero, tenemos que

$$2m(\measuredangle CDB) = 180^\circ - (80^\circ + 60^\circ) = 40^\circ.$$

Esto significa que $m(\measuredangle CDB) = 20^\circ$ y por lo tanto $m(\measuredangle ADB) = \mathbf{30}^\circ$.

12. Recordemos que un triángulo está formado por tres lados o lo que es lo mismo por tres vértices distintos. Primero podemos observar que en la figura se tienen 12 triángulos pequeños, como los sombreados en la Figura 5.9.

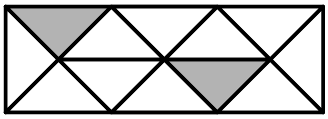


Figura 5.9: Ejemplo de triángulos pequeños sombreados.

Adicionalmente, se pueden contar 4 triángulos medianos cada uno conformado por dos triángulos pequeños como el que se muestra sombreado en la figura a continuación.

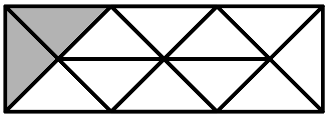


Figura 5.10: Ejemplo de triángulo mediano sombreado.

Finalmente, la figura contiene otros 4 triángulos grandes conformados cada uno por 4 triángulos pequeños, como el de la siguiente figura.

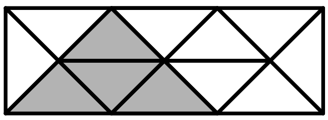


Figura 5.11: Ejemplo de triángulo grande sombreado.

Por lo tanto, en total se tienen **20 triángulos** de tamaños diferentes.

13. En la gráfica podemos realizar las siguientes divisiones.

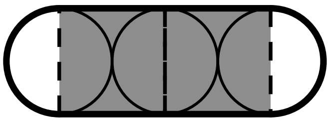


Figura 5.12: Gráfica con divisiones.

De esta manera tenemos dos cuadrados, formando así una región sombreada de área $2a$. Además, con las regiones restantes formamos un círculo de área b. Así el área encerrada por la línea gruesa es $2a + b$.

14. Ver la solución dada para el Problema 13 en la primera fase del nivel I. Resaltamos que este problema de lógica se usó en los dos niveles, incluso lo podemos usar tanto con niños como con adultos.

15. Primero observemos que aquellos números que tienen al 7 en alguno de sus dígitos son:

$$\underbrace{7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 87, 97}_{\text{19 números}}.$$

Por otro lado, los números entre 1 y 100 múltiplos de 7 son:

$$\underbrace{\mathbf{7}, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, \mathbf{70}, \mathbf{77}, 84, 91, 98}_{\text{14 números}}.$$

Por lo tanto, al contarlos sin tener en cuenta las repeticiones obtenemos 30 números. Es decir, que en total se tienen $100 - 30 =$ **70 números** que no tienen al 7 entre sus dígitos y no son múltiplos de 7.

5.2 Segunda fase

1. Para este problema presentamos dos formas diferentes de obtener la solución.

Primera solución

Organizaremos en una tabla la información dada en el problema, de la siguiente forma. A partir de las afirmaciones realizadas para cada uno de los estudiantes escribiremos «Sí» o «No» dependiendo del municipio del que provenga cada uno de ellos. Así por ejemplo, la primera afirmación nos dice que Andrés no es de Túquerres ni de Consacá y como esta afirmación también es válida para el joven de Ipiales, concluimos que Andrés tampoco es de

Ipiales. De esta forma, ubicamos estas conclusiones en la segunda columna de la Tabla 5.2.

	Andrés	Bernardo	Carlos	David
Ipiales	**No**			
Olaya Herrera				
Túquerres	**No**			
Consacá	**No**			

Tabla 5.2: Inclusión de la primera afirmación.

Teniendo en cuenta que todos los jóvenes son de municipios diferentes, tenemos que el «Sí» solo puede aparecer una vez en cada fila y en cada columna de la tabla donde agrupamos la información. Por lo tanto, en la Tabla 5.3, agregamos «Sí» en la posición faltante de la columna correspondiente a Andrés y además, completamos con «No» las posiciones vacías en la fila de Olaya Herrera. De lo anterior obtenemos que Andrés pertenece al municipio de Olaya Herrera.

	Andrés	Bernardo	Carlos	David
Ipiales	No			
Olaya Herrera	**Sí**	**No**	**No**	**No**
Túquerres	No			
Consacá	No			

Tabla 5.3: Resultado de la primera afirmación.

Continuando de esta manera, por la segunda afirmación, incluimos en la Tabla 5.4 que Carlos no es de Consacá ni de Túquerres. De donde, completamos con «Sí» el espacio vacío que nos quedaría en la posición de Ipiales de la columna correspondiente a Carlos y luego agregamos «No» a las casillas faltantes en la fila de Ipiales.

	Andrés	Bernardo	Carlos	David
Ipiales	No	**No**	**Sí**	**No**
Olaya Herrera	Sí	No	No	No
Túquerres	No		**No**	
Consacá	No		**No**	

Tabla 5.4: Resultado después de incluir la segunda afirmación.

Finalmente, siguiendo el proceso realizado, completamos toda la información en la Tabla 5.5 pues de la última afirmación tenemos que David no es de Consacá.

	Andrés	Bernardo	Carlos	David
Ipiales	No	No	Sí	No
Olaya Herrera	Sí	No	No	No
Túquerres	No	**No**	No	**Sí**
Consacá	No	**Sí**	No	**No**

Tabla 5.5: Sí debe aparecer una sola vez en cada fila y columna.

De la Tabla 5.5 concluimos que el estudiante de Consacá es **Bernardo**.

Segunda solución

En este proceso usaremos la lógica para buscar la solución. De la primera afirmación sabemos que Andrés debe ser el estudiante de Olaya Herrera, pues no conoce Túquerres ni Consacá y él tampoco es de Ipiales, pues se dice que llegó a Pasto temprano como lo hizo el chico de Ipiales. De la segunda afirmación tenemos se dice que Carlos no es de Túquerres ni de Consacá, pero como ya sabemos que Andrés es de Olaya Herrera, entonces Carlos es de Ipiales. Finalmente, como sabemos que David no es de Consacá por la tercera afirmación, concluimos que el estudiante de Consacá es **Bernardo**.

2. Sabemos que el área de un círculo C de radio r está dada por

$$A(C) = \pi r^2.$$

De esta manera, el círculo mayor y menor, tienen área

$$\begin{aligned} A(C_1) &= \pi 3^2 = 9\pi \qquad \text{y} \\ A(C_2) &= \pi 2^2 = 4\pi, \end{aligned}$$

respectivamente. Además, tenemos que

$$\begin{aligned} A(C_1) &= P + Q \qquad \text{y} \\ A(C_2) &= Q + R. \end{aligned}$$

Luego restando estas dos igualdades, tenemos

$$A(C_1) - A(C_2) = P - R,$$

de donde

$$P - R = 5\pi.$$

Pero como $P = 3R$, entonces $2R = 5\pi$ o lo que es lo mismo

$$R = \frac{5}{2}\pi.$$

Finalmente, como $Q = A(C_2) - R$, obtenemos

$$Q = 4\pi - \frac{5}{2}\pi = \mathbf{\frac{3}{2}}\pi.$$

3. Denotamos con A y B respectivamente, la segunda y tercera cifras que queremos determinar en la diferencia dada. Es decir,

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ - & z & y & x \\ \hline & 4 & A & B \end{array}$$

Luego, haciendo la diferencia en las unidades tenemos que $z - x = B$. Sin embargo, como $x > z$, debemos "prestar" una decena de y para hacer la resta, de donde en realidad tenemos que

$$10 + z - x = B. \tag{5.1}$$

Análogamente, como a y lo disminuimos en 1, para realizar la diferencia en las decenas "prestamos" una decena a x. Lo que usualmente representamos por

$$\begin{array}{rccc} & x & y & z \\ - & z & y & x \\ \hline & 4 & A & B \end{array}$$

Por tanto, tenemos que

$$(10+y-1)-y=A,$$

de donde simplificando obtenemos que $A=9$. Finalmente, de la diferencia en las centenas, llegamos a que

$$(x-1)-z=4.$$

Así de esta última ecuación concluimos que

$$x-z=5. \tag{5.2}$$

Luego, reemplazando (5.2) en (5.1), tenemos que $B=10-5=5$. Por lo tanto, la segunda y la tercera cifra son **9** y **5**, respectivamente.

4. Recordemos que una progresión aritmética es una sucesión de números en la que cada término, excepto el primero, se obtiene sumando al anterior un número o cantidad fija que llamamos diferencia. La diferencia puede ser positiva o negativa. Por ejemplo, la siguiente sucesión

$$2,5,8,11,14,17,\dots$$

es una progresión aritmética donde la diferencia es 3.

De esta manera, dado que la diferencia entre 16 y 27 es 11, en la diagonal que contiene al 16 y al 27 el siguiente número debe ser 38 y el siguiente a ese es el 49. Ahora en la columna en la que se encuentra x tenemos que entre el 21 y el 49 hay 4 espacios y dado que la diferencia entre ellos es 28, podemos deducir que la diferencia entre cada uno de los elementos consecutivos de esta columna es $\dfrac{28}{4}=7$. Así, podemos ir completando la tabla como sigue.

				21
	16			28
		27		35
			38	x
				49

Figura 5.13: Algunos de los elementos en la tabla.

Por lo tanto, x es **42**.

5. De la factorización prima de $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$, podemos construir una tabla que contenga x y y con las características solicitadas como mostramos a continuación.

x	y	$x+y$
2^2	3×5^2	79
$2^2 \times 3$	5^2	37
$2^2 \times 5^2$	3	103
$2^2 \times 3 \times 5^2$	1	301

Tabla 5.6: Posibles valores para x y y.

De donde concluimos que el menor valor que puede tomar $x+y$ es **37**.

6. Existen cuatro dígitos que son números primos 2, 3, 5 y 7. Esto significa que para formar un número *serio* tenemos cuatro posibilidades para cada dígito y así existen $4 \times 4 \times 4 = 4^3 =$ **64 números *serios* de tres dígitos**.

7. Dado que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son equiláteros, todos sus ángulos son congruentes y miden 60°; así podemos ver que

$$m(\measuredangle CAF) = 55^\circ \text{ y } m(\measuredangle DFA) = 45^\circ.$$

De tal manera, podemos completar los ángulos como en la siguiente figura.

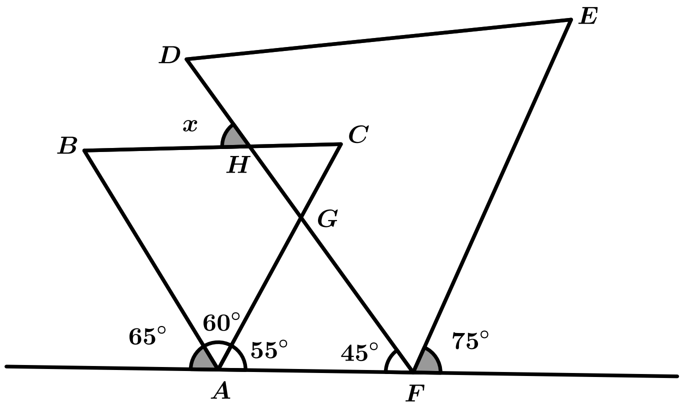


Figura 5.14: Algunos ángulos adicionales en la figura.

Recordemos que la suma de la medida de los ángulos de un triángulo es igual a 180. Así $m(\measuredangle AGF) = 180^\circ - (55^\circ + 45^\circ) = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$ y esto implica que también $m(\measuredangle CGH) = 80^\circ$. Como $m(\measuredangle C) = 60^\circ$ entonces $m(\measuredangle x) = 180^\circ - (80^\circ + 60^\circ) = \mathbf{40}^\circ$.

8. Por el Teorema de Pitágoras podemos encontrar las hipotenusas de cada uno de los triángulos; esto lo resumimos en la siguiente figura.

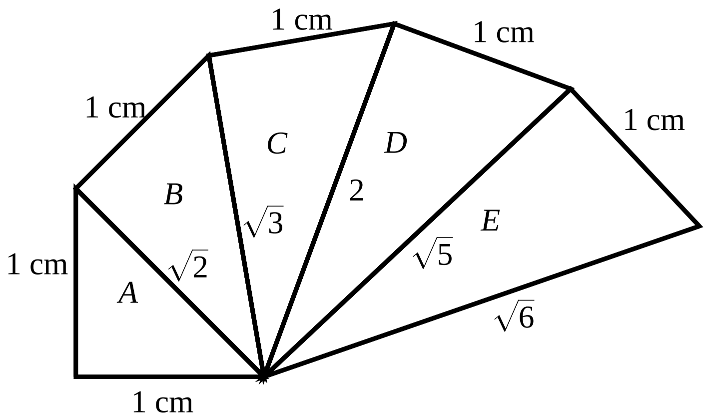


Figura 5.15: Hipotenusas de los triángulos en la figura dada.

Así podemos ver que la única afirmación falsa es **la hipotenusa del triángulo** *B* **mide 2 cm**, puesto que como vemos la medida de la hipotenusa de *B* es $\sqrt{3}$ cm. Además, podemos verificar que todas las demás son verdaderas.

9. De la información suministrada podemos realizar el siguiente diagrama, donde *A* y *B*, representan a Andrea y Blanca, respectivamente.

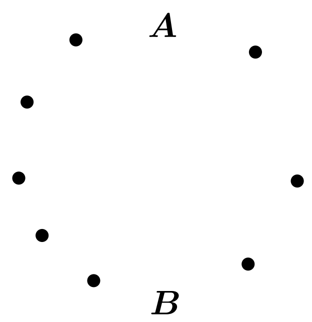


Figura 5.16: Diagrama que representa la información del problema.

Esto significa de hay **10 chicas** en la reunión.

10. Dado que entre los tres marcaron 17 goles, para que el periodista hiciera la afirmación "*marcó más goles que cualquiera de los otros dos delanteros*" como mínimo Radamel debió haber marcado **9 goles**. Observemos, por ejemplo que si él hubiera marcado 8 goles (o menos), entre los otros dos delanteros deberían haber marcado 9 goles (o más), con lo cual puede darse el caso que uno de ellos podría haber marcado al menos 8 goles.
11. Identificamos los dados con D_1, D_2, D_3 y D_4 como mostramos en la siguiente figura.

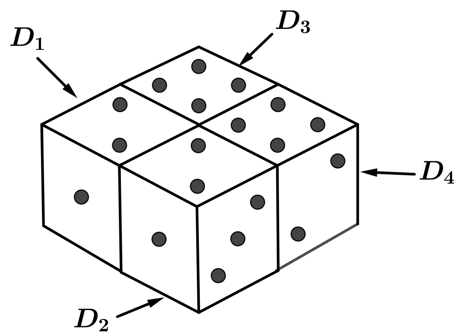


Figura 5.17: Identificación de los dados del problema.

Sabemos que cada dado tiene dos caras ocultas y que están pegadas con las caras de otro dado. Como en el producto no importa el orden de los números podemos llamar las caras ocultas y pegadas con D_{i1} y D_{i2} para cada uno de los dos dados, donde $i = 1,2,3$ o 4, según sea el caso. Por ejemplo, D_{32} representa la segunda cara oculta del dado D_3.

Siguiendo la regla de que los dos dados son idénticos y que la suma de los puntos de dos caras opuestas es 7, tenemos por ejemplo que las dos caras ocultas del dado D_2 son 4 y 6, así podemos escribir $D_{21} = 4$ y $D_{22} = 6$. Similarmente, tenemos que $D_{41} = 5$, $D_{11} = 6$ y $D_{12} = 3$. Reunimos esta información en la siguiente tabla donde colocamos las posibilidades para las otras caras restantes.

D_{11}	D_{12}	D_{21}	D_{22}	D_{31}	D_{32}	D_{41}	D_{42}
6	3	4	6	1 o 6	2 o 5	5	1 o 6

Tabla 5.7: Posibilidades para las caras D_{i1} y D_{i2} para $i = 1,2,3$ y 4.

Consideremos el producto

$$\begin{aligned} P &= D_{11}D_{12}D_{21}D_{22}D_{31}D_{32}D_{41}D_{42} \\ &= 6 \times 3 \times 4 \times 6 \times D_{31} \times D_{32} \times 5 \times D_{42}. \end{aligned}$$

Entonces para que este producto sea divisible por 5^2 la cara D_{32} debe ser igual a 5. Observemos que hasta el momento tenemos que P es divisible por 6^3, ya que $P = 6 \times 3 \times 4 \times 6 \times D_{31} \times 5 \times 5 \times D_{42}$.

Como P no puede ser divisible por 6^4, entonces ninguna de las caras faltantes puede ser igual a 6, por lo cual $D_{31} = D_{42} = 1$.

Así la suma de las caras pegadas es

$$6+3+4+6+1+5+5+1 = \mathbf{31}.$$

12. Sea x el lado del cuadrado sombreado. Como la medida de los lados del cuadrado más pequeño es 1 cm, debemos tener que el cuadrado ubicado en la parte superior derecha tiene lado $x-1$. Siguiendo de esta forma el cuadrado de la parte inferior derecha tiene lado de medida $x-2$. Así los otros dos tienen lados que miden $x-3$.

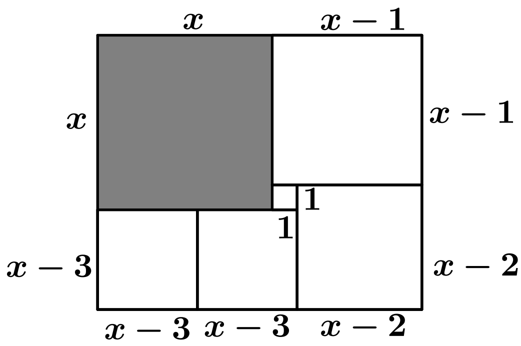


Figura 5.18: Medidas de los lados de los cuadrados de la figura.

Luego como las medidas de los lados opuestos en un rectángulo son iguales, entonces

$$x+x-1 = x-3+x-3+x-2.$$

Así

$$2x-1 = 3x-8,$$

de donde $x = 7$ y por lo tanto el cuadrado sombreado tiene área **49 cm**^{2}.

5.3 Fase final

1. Observemos que a la figura de la baldosa podemos aplicarle la siguiente transformación.

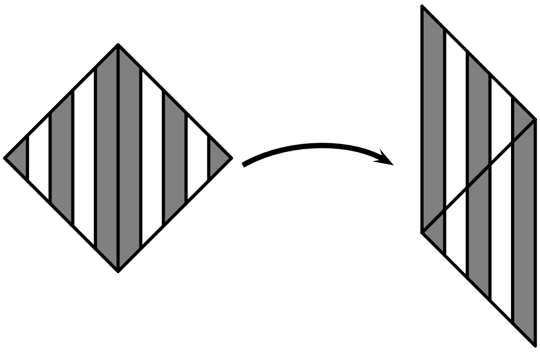


Figura 5.19: Transformación aplicada a la figura del problema.

Naturalmente tenemos que el área del paralelogramo que se define tiene la misma área de la baldosa. Además, en esta nueva figura las áreas de las regiones sombreadas y las blancas son iguales, por lo tanto, el área de la región sombreada en la baldosa es $\mathbf{\frac{3}{5}}$.

2. Hagamos un ejemplo de los saltos de Clarita. Recordemos que no puede saltar tres escaleras, es decir puede saltar de 1 en 1 o de 2 en 2 y además, debe pisar el sexto escalón.

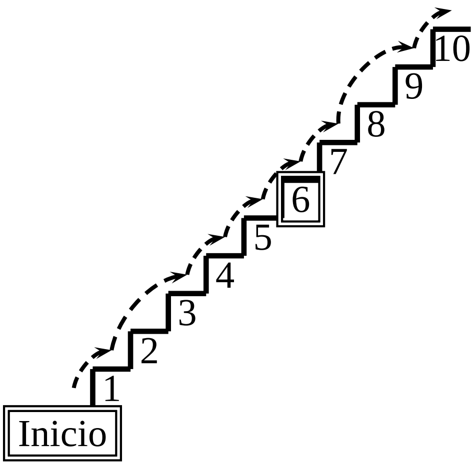


Figura 5.20: Un ejemplo de saltos de Clarita.

En la Figura 5.20 representamos un ejemplo de como Clarita podría dar sus saltos. En este ejemplo, tenemos que

$$\begin{aligned}
\text{Del inicio saltó al 1er escalón} &\longrightarrow \text{1 escalón},\\
\text{del 1er escalón saltó al 3er escalón} &\longrightarrow \text{2 escalones},\\
\text{del 3er escalón saltó al 4to escalón} &\longrightarrow \text{1 escalón},\\
\text{del 4to escalón saltó al 5to escalón} &\longrightarrow \text{1 escalón},\\
\text{del 5to escalón saltó al 6to escalón} &\longrightarrow \text{1 escalón},\\
\text{del 6to escalón saltó al 7mo escalón} &\longrightarrow \text{1 escalón},\\
\text{del 7mo escalón saltó al 9no escalón} &\longrightarrow \text{2 escalones},\\
\text{del 9no escalón saltó al 10mo escalón} &\longrightarrow \text{1 escalón}.
\end{aligned}$$

Observemos que podemos contar por separado el número de formas en que puede saltar del primer al sexto y del sexto al décimo escalón.

Número de formas para ir del primer al sexto escalón.

Como vemos, el ejemplo dado en la Figura 5.20 podemos representarlo mediante sumas. Así tenemos

$$6 = 1 + 2 + 1 + 1 + 1.$$

Dado que importa el orden en que Clarita dé los saltos, el problema es equivalente a contar de cuántas maneras se puede escribir el 6 como suma de 1's y 2's, pero teniendo en cuenta el orden de los sumandos. Por ejemplo, no es lo mismo que Clarita salte para ir del primer al sexto escalón, como en la Figura 5.20, a que lo haga de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
\text{Del inicio saltó al 1er escalón} &\longrightarrow \text{1 escalón},\\
\text{del 1er escalón saltó al 2do escalón} &\longrightarrow \text{1 escalón},\\
\text{del 2do escalón saltó al 3er escalón} &\longrightarrow \text{1 escalón},\\
\text{del 3er escalón saltó al 5to escalón} &\longrightarrow \text{2 escalones},\\
\text{del 5er escalón saltó al 6to escalón} &\longrightarrow \text{1 escalón}.
\end{aligned}$$

De esta manera, en la suma con la que representemos al 6, debemos tener en cuenta el orden de los sumandos. Por ejemplo, la suma $6 = 1+1+1+1+2$, representa 5 formas diferentes de subir los escalones, puesto que

$$\begin{aligned}
6 &= 1+1+1+1+2,\\
&= 1+1+1+2+1,\\
&= 1+1+2+1+1,\\
&= 1+2+1+1+1,\\
&= 2+1+1+1+1.
\end{aligned}$$

Igualmente, observemos que la suma $6 = 1+1+2+2$ representa 6 formas diferentes, como vemos a continuación

$$\begin{aligned}
6 &= 1+1+2+2,\\
&= 1+2+1+2,\\
&= 2+1+1+2,\\
&= 1+2+2+1,\\
&= 2+1+2+1,\\
&= 2+2+1+1.
\end{aligned}$$

También sabemos que $6 = 1+1+1+1+1+1 = 2+2+2$. A continuación, anotamos al frente de cada suma el número de formas que esta proporciona para ir del primer escalón al sexto.

$$\begin{aligned}6 =&1+1+1+1+1+1 \longrightarrow \textbf{1 forma},\\ =&1+1+1+1+2 \longrightarrow \textbf{5 formas},\\ =&1+1+2+2 \longrightarrow \textbf{6 formas},\\ =&2+2+2 \longrightarrow \textbf{1 forma}.\end{aligned}$$

Así Clarita puede ir del primer al sexto escalón de 13 formas diferentes.

Número de formas para ir del sexto al décimo escalón.

Realizando un análisis similar podemos ver que Clarita puede saltar del 6to al 10mo de 5 formas diferentes, puesto que

$$\begin{aligned}4 =&1+1+1+1 \longrightarrow \textbf{1 forma},\\ =&1+1+2 \longrightarrow \textbf{3 formas},\\ =&2+2 \longrightarrow \textbf{1 forma.}\end{aligned}$$

En consecuencia, por el principio de la multiplicación hay $13\times 5 =$ **65 formas diferentes** para que Clarita salte del escalón 1 al 10, pasando siempre por el sexto escalón.

3. Denotemos con C,P y R, el número de latas que compraron Carlos, Pedro y Ramón, respectivamente. Similarmente con E_C,E_P y E_R, representamos el número de latas que compraron la esposa de Carlos, la esposa de Pedro y la esposa de Ramón, respectivamente.

   De esta manera, tenemos que

$$\begin{aligned}C &= E_C,\\ P &= 2E_P,\\ R &= 3E_R.\end{aligned} \tag{5.3}$$

   Así como el grupo compró en total 16 latas, entonces

$$C+E_C+P+E_P+R+E_R = 16. \tag{5.4}$$

   Luego reemplazando las igualdades de (5.3) en (5.4) tenemos que

$$2E_C+3E_P+4E_R = 16. \tag{5.5}$$

   En la ecuación (5.5) el lado derecho es par, como $2E_C$ y $4E_R$ son pares, entonces $3E_P$ debe ser par, pero esto solo es posible si E_p también es par. Como entre las cantidades de latas que compraron las esposas la única par es 2, esto significa $E_P = 2$, lo que significa que la esposa de Pedro es Bibiana. Por lo tanto, la ecuación (5.5) se transforma en

$$2E_C + 4E_R = 10. \tag{5.6}$$

Ahora, si la esposa de Carlos es Angela, entonces la esposa de Ramón es Carmen. Así $E_C = 1$ y $E_R = 3$. Sin embargo, estos valores no satisfacen la ecuación (5.6), esto quiere decir que la esposa de Carlos debe ser Carmen.

Por lo tanto la esposa de Ramón es Angela, lo que implica que el apellido del esposo de Angela es **Martínez**.

4. De la primera afirmación, tenemos que en el código secreto no están ni el 1, ni el 2, ni el 3. Luego de la tercera afirmación, se sigue que 6 es un dígito que aparece en el código, pero que debe estar en la segunda o tercera posición. Esto queda claro de la segunda afirmación, por lo cual el 6 es el último dígito del número. Además, de esta afirmación también resulta que 4 y 5 tampoco son dígitos del código.

   Por otro lado, de la última afirmación tenemos que el 8 es el primer dígito del número y de la cuarta que el 7 es un dígito presente en el código, pero que debe estar en la segunda posición. Por lo tanto, el código secreto es **876**.

5. Como sabemos, los paréntesis nos dicen en que orden debemos realizar las operaciones. Así desarrollaremos los cálculos en este orden

$$\begin{aligned} 2 \star 0 &= 2^2 - 2 \times 0 + 0^2 = 4, \\ (2 \star 0) \star 1 &= 4 \star 1 = 4^2 - 4 \times 1 + 1^2 = 16 - 4 + 1 = 13. \end{aligned}$$

   Por lo tanto,

$$[(2 \star 0) \star 1] \star 7 = 13 \star 7 = 13^2 - 13 \times 7 + 7^2 = 169 - 91 + 49 = \mathbf{127}.$$

6. **Primera solución**

   En la figura dada por el problema, marcamos los puntos A, B y C, las longitudes a y b y trazamos el segmento $\overline{AC}$.

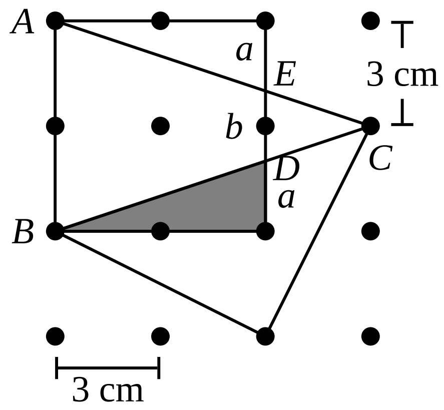


Figura 5.21: Marca de puntos y longitud de segmentos en la figura del problema.

Observemos que los dos segmentos que se forman al cortarse la recta $\overline{ED}$ con los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son congruentes. Por esta razón marcamos su longitud con a. Además esta es la altura del triángulo al que necesitamos calcular su área. Luego, el triángulo $\triangle ABC$ tiene área

$$\frac{6 \text{ cm} \times 9 \text{ cm}}{2} = 27 \text{ cm}^2.$$

Por otro lado el trapecio $\triangle AEDB$ tiene área

$$\left(\frac{6+b}{2}\right)6 = (6+b)3 = 18+3b,$$

y el triángulo $\triangle EDC$ tiene área

$$\frac{b \text{ cm} \times 3 \text{ cm}}{2} = \frac{3b}{2} \text{ cm}^2.$$

Así,

$$A(\triangle AEDB) + A(\triangle EDC) = 18+3b+\frac{3b}{2} = 27.$$

De esta manera,

$$\left(3+\frac{3}{2}\right)b = 27-18 = 9.$$

Esto es $\frac{9}{2}b = 9$, lo que implica que $b = 2$ cm. Luego como $2a+b = 6$, entonces $2a = 4$ y así $a = 2$ cm.

En consecuencia, la región sombreada tiene área

$$\frac{2 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}}{2} = \mathbf{6\ cm^2}.$$

Segunda solución

En la figura dada por el problema, marcamos los puntos A, B, C, D y E.

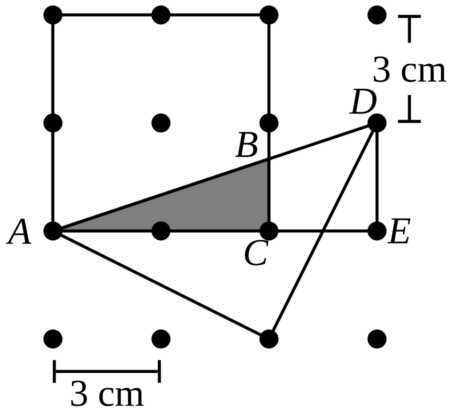


Figura 5.22: Puntos en la figura del problema.

Notamos que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADE$ son semejantes, de donde

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}},$$

es decir

$$\frac{\overline{BC}}{3\text{ cm}} = \frac{6\text{ cm}}{9\text{ cm}}.$$

Por lo tanto, $\overline{BC} = 2$ cm.

Así el área de la región sombreada o lo que es lo mismo el área del triángulo $\triangle ABC$ es

$$A(\triangle ABC) = \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{6\text{ cm} \times 2\text{ cm}}{2} = \mathbf{6\ cm}^2.$$

7. Podemos obtener el valor del perímetro teniendo en cuenta el número de bloques usados para construir la escalera.

$$\begin{gathered}\text{Usando 1 bloque} \to \text{el perímetro es } 4 + 2 = 6\text{ cm},\\ \text{usando 2 bloques} \to \text{el perímetro es } 4 + 2 \times 3 = 10\text{ cm},\\ \text{usando 3 bloques} \to \text{el perímetro es } 4 + 2 \times 5 = 14\text{ cm}.\end{gathered}$$

De esta manera, observamos que cada vez que aumentamos un nuevo bloque sumamos 4 centímetros al perímetro anterior, lo cual se evidencia en la siguiente figura.

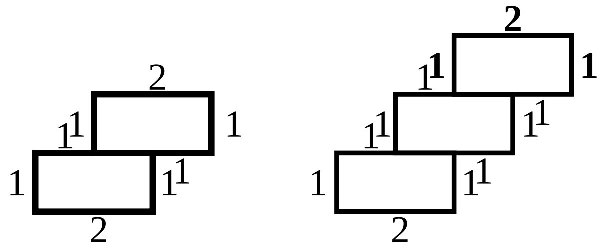


Figura 5.23: Adición de un bloque a la figura anterior.

Así por ejemplo al usar 4 bloques el perímetro es igual a $4+14 = 4+2\times 7 = 18$ cm. En consecuencia, tenemos que una escalera construida con n bloques tiene

$$4+2\times(2n-1),$$

centímetros de perímetro. En conclusión, una escalera con 2017 bloques tiene perímetro igual a $4+2\times(2\times 2017-1) =$ **8070 cm**.

8. (a). Observemos que cada fila se construye pegando en el extremo derecho de la fila anterior dos letras, las cuales pueden ser RM, UD, EN, AR, OR, MU, DE, NA o RO. En la siguiente tabla vemos cuales parejas de letras se adicionan en cada una de las 10 primeras filas. Esta tabla nos ayudará a saber cuántas veces aparece la letra R cuando la construcción tenga 10 filas.

Fila	Letras adicionadas	Fila	Letras adicionadas
2	RM	7	MU
3	UD	8	DE
4	EN	9	NA
5	AR	10	RO
6	OR		

Tabla 5.8: Letras adicionadas en cada fila.

Observemos que en las primeras 10 filas, una nueva letra R se agrega en las filas: 2, 5, 6 y 10. Dado que cada vez que se incluya una nueva letra R, esta se repetirá en la construcción de ahí en adelante, debemos tenerla en cuenta en las filas siguientes. Así por ejemplo como RM se agrega en la segunda fila, entonces hasta la décima fila esto lleva a que la R aparezca

9 veces. A continuación, resumimos el número de veces que aparece la letra R, a partir de cada una de las nuevas apariciones.

$$\text{RM} \rightarrow 9 \text{ veces},$$
$$\text{AR} \rightarrow 6 \text{ veces},$$
$$\text{OR} \rightarrow 5 \text{ veces},$$
$$\text{RO} \rightarrow 1 \text{ veces}.$$

Por lo tanto, si la construcción tiene 10 filas la R aparecerá **21 veces**.

(b). Observemos que la primera vez que se forma la palabra ORMUDENAR completa es en la quinta fila. Como se agregan dos letras en cada nueva fila, la próxima vez que aparecerá ORMUDENAR será en la décima fila, pues esta palabra tiene 9 letras. Siguiendo con este razonamiento no volverá a completarse hasta la fila 14.

En consecuencia tenemos que ORMUDENAR:

$$\text{Aparece una vez en cada fila entre las filas 5 y 9} \rightarrow 5 \text{ veces},$$
$$\text{aparece dos veces en cada fila entre las filas 10 y 13} \rightarrow 2 \times 4 = 8 \text{ veces}.$$

Por lo tanto, cuando la construcción tenga 13 filas, la palabra ORMUDENAR aparece $5+8 =$ **13 veces**.

(c). Siguiendo con el razonamiento hecho en el inciso anterior tenemos que la próxima vez que se completa la palabra ORMUDENAR es en la fila 14.

Filas	Repetición por fila	Número de repeticiones
1-4	0 veces	0
5-9	1 vez por fila	5
10-13	2 veces por fila	$2 \times 4 = 8$
14-18	3 veces por fila	$3 \times 5 = 15$

Tabla 5.9: Repeticiones por fila de la palabra ORMUDENAR.

En consecuencia, hasta aquí la palabra ORMUDENAR apareció 28 veces. Adicionalmente, sabemos que la próxima vez que se completa la palabra ORMUDENAR es en la fila 19. Esto implica que en las filas 19 y 20 aparece 8 veces más completando las 36 veces. Por lo tanto, son necesarias **20 filas** para que ORMUDENAR aparezca 36 veces en la construcción.

6. Respuestas

Problema	Nivel I	Nivel II
1	e	c
2	c	c
3	c	a
4	b	b
5	c	e
6	d	d
7	b	d
8	d	a
9	c	d
10	d	e
11	d	b
12	e	e
13	d	d
14	a	d
15	d	d

Tabla 6.1: Respuestas primera fase, 2da ORM-UDENAR.

Problema	Nivel I	Nivel II
1	c	b
2	d	d
3	a	b
4	e	a
5	c	c
6	a	d
7	b	c
8	b	e
9	1102017	10
10	360°	9
11	LA PAZ COMIENZA CON UNA SONRISA	31
12	31	49 cm^2

Tabla 6.2: Respuestas segunda fase, 2da ORM-UDENAR.

Problema	Nivel I	Nivel II
1	c	c
2	a	b
3	d	d
4	b	b
5	8 cm^2	127
6	3	6 cm^2
7	6	8070 cm
8	(a). 16 veces (b). 7 veces (c). 36 veces	(a). 21 veces (b). 13 veces (c). 20 filas

Tabla 6.3: Respuestas fase final, 2da ORM-UDENAR.

Referencias

Appel, K., y Haken, W. (1977). Every planar map is four colorable. part I: Discharging. *Illinois J. Math.*, *21*(3), 429–490. Recuperado de https://projecteuclid.org:443/euclid.ijm/1256049011.

Avendaño, B., y Charry, O. (2013). *La enseñanza de la teoría de grafos como estrategia para desarrollar procesos de matematización* (Tesis de maestría). Universidad Sergio Arboleda, Bogotá D.C., Colombia.

Bollobás, B. (1998). *Modern graph theory* (Vol. 184). Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0619-4.

Boyer, C. (2007). Sudoku's french ancestors. *The Mathematical Intelligencer*, *29*, 37 - 44. https://doi.org/10.1007/BF02984758.

Cognigni, R., Braicovich, T., y Reyes, C. (2008). Recorriendo grafos a lo largo de la educación general básica. *Revista de Educación Matemática*. Recuperado de revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10460.

Delahaye, J. P. (2006). The science behind sudoku. *Scientific American*, *294*(6), 80–7.

Euler, L. (1736). Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, *8*, 128–140.

Fomin, D., Genkin, S., y Itenberg, I. (1996). *Mathematical Circles: Russian experience* (Vol. 7). Estados Unidos: American Mathematical Society.

Gleason, A. M., Greenwood, R. E., y Kelly, L. M. (1980). *The William Lowell Putnam Mathematical Competition, 1938 - 1964*. Estados Unidos: MAA Problem Books.

Hopkins, B., y Wilson, R. (2004). The truth about Konisberg. *The College Mathematics Journal*, *35*, 198–207. https://doi.org/10.1080/07468342.2004.11922073

Hudson, R. A. (2004). *Planar graphs: a historical perspective* (Master's thesis). University of Louisville, United States.

International Mathematical Olympiad. (2020). Recuperado de https://www.imo-official.org.

Kubale, M. (Ed.). (2004). *Graph colorings*. Estados Unidos: American Mathematical Society.

Kuratowski, K. (1930). Sur le probléme des courbes gauches en topologie. *Fundamenta Mathematicae (in French)*, *15*, 271–283. https://doi.org/10.4064/fm-15-1-271-283.

Olimpiadas Regionales de Matemáticas Universidad de Nariño. (2020). Recuperado de `https://orm.udenar.edu.co`.

Recamán, B. (2012). *Ejercicios cerebrales: ochenta juegos, acertijos y desafíos mentales para que se divierta y su cerebro no se deteriore.* Bogotá D.C., Colombia: Random House Mondadori.

UCC Mathematics Enrichment Programme. (2019). *Imo training 2008: Graph theory.* Recuperado de https://sites.google.com/site/imocanada/2008-summer-camp.

Sobre los autores

John Hermes Castillo Gómez: Matemático, de la Universidad del Cauca. Realizó estudios de Maestría en Matemáticas en la Universidad de Antioquia y Doctorado en Matemáticas en el Instituto de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Sao Paulo, Brasil. Actualmente es Profesor Asociado del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño. Fundador e integrante del Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad de Nariño.

Catalina María Rúa Alvarez: Matemática, de la Universidad de Antioquia. Realizó estudios de Maestría en Computación Científica en la Universidad de Puerto Rico Recinto Mayagüez y Doctorado en Matemática Aplicada en el Instituto de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Sao Paulo, Brasil. Actualmente es Profesora Asociada del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño. Fundadora e integrante del Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad de Nariño.

Fernando Andrés Benavides Agredo: Matemático, de la Universidad del Cauca. Realizó estudios de Maestría en Matemáticas en la Universidad de Antioquia y Doctorado en Ciencias Matemáticas en la Universidad Autónoma de México, México. Actualmente es Profesor Asociado del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño. Integrante del Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad de Nariño.

En la primera parte de este libro se presentan los conceptos básicos de la teoría de grafos y la forma de cómo estos pueden utilizarse para resolver problemas matemáticos, incluye una sección de problemas resueltos y otra de problemas propuestos. Adicionalmente, se pone a disposición de la comunidad educativa en general los problemas y sus soluciones de la Segunda Olimpiada Regional de Matemáticas de la Universidad de Nariño (2da ORM-UDENAR), certamen que se desarrolló durante el 2017. De esta manera, la segunda parte se destina a la presentación por nivel de los problemas que se propusieron en la 2da ORM-UDENAR, mientras que en la tercera se dan las soluciones de cada problema. Una vez más, recalcamos que las soluciones que presentamos, no necesariamente son las únicas, y por este motivo invitamos al lector a intentar resolver primero el problema.

Este texto hace parte de los resultados obtenidos con el proyecto de investigación "Resolución de problemas: Un medio para la formación matemática", financiado por la Vicerrectoría de Investigaciones e Interacción Social - VIIS de la Universidad de Nariño.

ISBN: 978-958-5123-64-9
9 789585 123649

O R M
U D E N A R

ALTENUA
Grupo de Álgebra, Teoría de Números y Aplicaciones

Editorial
Universidad de **Nariño**