Resolución de problemas de Olimpiadas matemáticas: estructurando sesiones de trabajo con secuencias apropiadas de problemas

Arturo Portnoy
Departamento de Ciencias Matemáticas
Universidad de Puerto Rico en Mayagüez, Puerto Rico
e-mail: portna@gmail.com

ALTENCOA6-2014
San Juan de Pasto, Colombia
11 al 15 de agosto de 2014

Resumen

Los estudiantes selectos de Olimpiadas matemáticas están impacientes por ponerse a trabajar en problemas retadores; esta premura hace natural buscar un preámbulo mínimo ante esta energía. La tradición de círculos matemáticos soviética está saturada de hermosas colecciones de problemas que son materiales ideales para crear secuencias de problemas que van guiando a estos entusiastas estudiantes a niveles cada vez mas profundos y sofisticados de las matemáticas, pero de forma muy proactiva; lejos de ser observadores pasivos mirando la pizarra del instructor, promueven ensuciarse las manos con intricados y hermosos probemas y acertijos. Presentaremos unas secuencias utilizadas exitósamente durante varios años en las Olimpiadas matemáticas de Puerto Rico.

Resolución de problemas de Olimpiadas matemáticas: estructurando sesiones de trabajo con secuencias apropiadas de problemas, día 1.

Arturo Portnoy

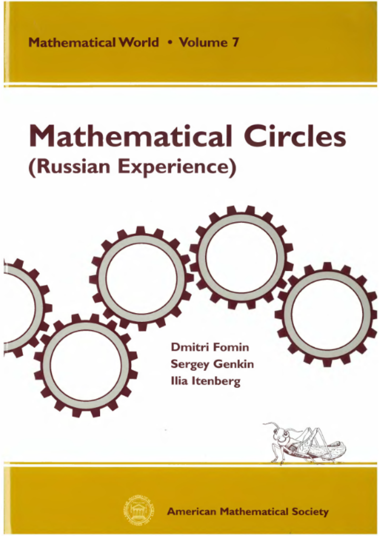
Departamento de Ciencias Matemáticas, Universidad de Puerto Rico en Mayagüez

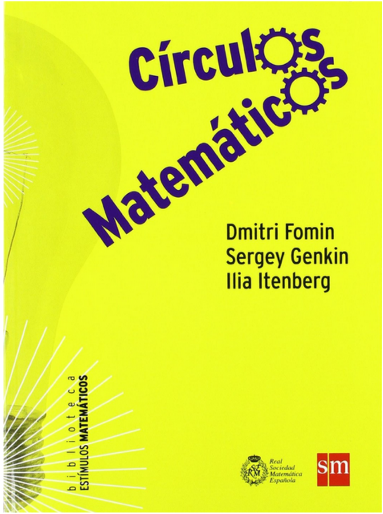
5 de agosto de 2014

Filosofía

- Entrenamiento dirigido a jóvenes talentosos de Olimpiadas Matemáticas.
- Teoría se presenta de forma muy resumida y conforme se va necesitando.
- Idea: proponer problemas lo antes posible sin un desarrollo amplio y formal de teoría prerequisito.
- Sembrar una semilla que propicie el aprendizaje autodidacta.
- Problemas diferentes, atractivos, retadores, pero no imposibles. Motivar, no frustrar.

Referencias

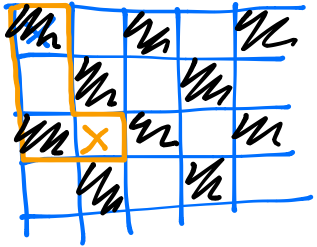




Paridad

Paridad

En un tablero de ajedrez, un caballo se coloca en una esquina y quiere llegar a la contra esquina pasando por todos los cuadros una sola vez (el caballo avanza en forma de L: tres espacios vertical u horizontalmente seguido de un espacio horizontal o verticalmente). ¿Es esto posible? Explica.



negro → blanco

blanco → negro

---

par de pasos

63 pasos

Paridad

Las contresquinas de un tablero de ajedrez son del mismo color. Basta entonces notar que: (1) Los movimientos del caballo lo llevan siempre de un color al otro, de manera que para que el caballo vuelva al mismo color de la casilla inicial, necesita hacer un número par de movimientos. (2) Para recorrer las 64 casillas del tablero una sola vez, habiendo ya recorrido la primera, necesita hacer 63 (impar) movimientos. Por lo tanto, asumir que se ha terminado el recorrido en la contraesquina nos lleva a la contradicción de que 63 es par. No es posible hacer el recorrido terminando en la contraesquina.

Paridad

(a) 1 2 3 4 5 6 7 8

(a) Los números del 1 al 8 se escriben en una fila en la pizarra. ¿Será posible poner los signos + ó - entre ellos de tal forma que la suma resultante sea 0? (b) Los números del 1 al 10 se escriben en una fila en la pizarra. ¿Será posible poner los signos + ó - entre ellos de tal forma que la suma resultante sea 0?

(b) portna@gmail.com

Paridad

(a) Sí, es posible: 1-2-3+4+5-6-7+8=-1+1-1+1=0. (b) No es posible. No importa como coloquemos los signos, tenemos una suma o diferencia de un numero impar de impares (impar) y una suma o diferencia de un número impar de pares (par), y par mas impar es impar, que no puede ser 0.

Paridad

Los números 1, 2, 3, ... , 1984, 1985 se escriben en la pizarra. Decidimos borrar dos de ellos y reemplazarlos por su diferencia positiva*. Al hacer esto muchas veces, terminamos con un solo número en la pizarra. ¿Puede ser éste número el 0?

* ó cero

Paridad

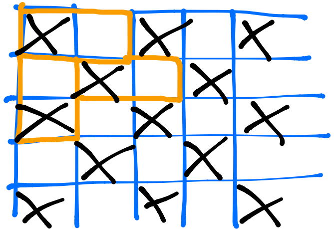
No es posible. El proceso es equivalente al problema dos y tenemos un número impar de impares, por lo tanto, el resultado debe ser impar, y por tanto no puede ser 0.

Paridad

Dos contraesquinas son del mismo color

Una ficha tapa 2 colores

¿Se puede cubrir un tablero de ajedrez (8×8) con fichas de domino (1×2), de tal forma que solo dos contra esquinas queden descubiertas?



Paridad

No es posible. Siempre que colocamos una pieza de dominó en un tablero de ajedrez, cubrimos un cuadro blanco y uno negro. Así, en un tablero cubierto debe haber el mismo número de cuadros blancos que de cuadros negros. El tablero con dos contraesquinas removidas no es así, por lo que es imposible cubrirlo con fichas de dominó.

Combinatoria

Si cada letra diferente representa un dígito distinto, ¿cuántos números distintos de 10 dígitos puede representar la palabra MATEMATICA?

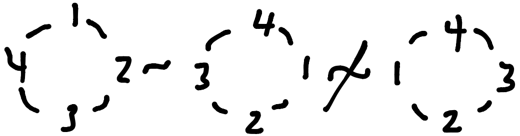
M A T E I C

$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$

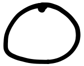
Combinatoria

La M puede tomar 9 valores distintos (no 0). La A otros 9, la T puede tomar 8 valores, la E puede tomar 7 valores y la I puede tomar 6 valores, ya que estas sí pueden ser 0 pero no pueden repetirse los valores ya tomados. Por lo tanto, el valor final es $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27,216$.

Un collar es una cuerda circular con cuentas. Se permite rotar el collar, pero no darle vuelta. ¿Cuántos collares diferentes se pueden hacer con 2011 cuentas diferentes?



$2011!$



$$\frac{2011!}{2011} = 2010!$$

Combinatoria

Las cuentas se pueden colocar linealmente en 2011! formas distintas, pero como el collar es un círculo y podemos rotarlo, tenemos que descontar las 2011 rotaciones posibles. Por lo tanto, el número total de collares es $2011!/2011 = 2010!$.

Combinatoria

$$\binom{9}{2}\binom{7}{3} = \binom{9}{2}\binom{7}{4} = \binom{9}{4}\binom{5}{2}$$

Juana tiene dos manzanas, tres peras y cuatro ~~chinas~~ naranja. Ella le da una fruta de almuerzo por nueve días a su hijo Juan. ¿De cuántas formas diferentes puede hacerlo?

$$\begin{array}{ccccccccc} 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ M & M & P & P & P & N & N & N & N \end{array}$$

$$\underbrace{M\ M}_{2!}\quad \underbrace{P\ P\ P}_{3!}\quad \underbrace{N\ N\ N\ N}_{4!}$$

$$\frac{9!}{2!\,3!\,4!}$$

Tenemos que asignarle un dia a cada fruta $(9!)$, pero descontar aquellas asignaciones de dias que son indistinguibles de otras, por haber repeticiones en las frutas. Por lo tanto, el número total de formas es $9!/(2! \cdot 3! \cdot 4!)$. Equivalentemente podemos elegir 2 dias de los 9 y 3 de los 7 restantes: $\binom{9}{2}\binom{7}{3}$. Aquí hay muchas soluciones equivalentes. Discutir la equivalencia es interesante.

Combinatoria

¿De cuántas formas diferentes se puede separar a 14 personas en parejas?

Combinatoria

La respuesta es $\dfrac{\binom{14}{2}\binom{12}{2}\binom{10}{2}\cdots\binom{4}{2}}{7!}$.

Divisibilidad y Residuos

Divisibilidad y Residuos

Demuestre que el producto de 5 números naturales consecutivos es (a) divisible por 30 (b) divisible por 120.

	—	—	—	—	—
5	0	1	2	3	4
3	0	1	2	0	1
2	0	1	0	1	0
	1	0	1	0	1

(a) ✓

(b) ✓

Divisibilidad y Residuos

(a) 5 números naturales consecutivos contienen un múltiplo de 5, un múltiplo de 3 y un número par. Por lo tanto, su producto es divisible entre $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$. (b) De hecho, también contienen un múltiplo de 4 en adición al par, por lo que su producto tiene que ser divisible entre $30 \cdot 4 = 120$.

Dado un número primo p encuentre el número de naturales menores que p^2 que son primos relativos a p.

$$\#\{\text{no son: } p, 2p, 3p, \ldots, (p-1)p\} = p-1$$

$$p^2-1-(p-1) = p^2-p = p(p-1)$$

Divisibilidad y Residuos

Serían todos los naturales menores que p^2 excepto p, $2p$, ... , $(p-1)p$, es decir, $p^2 - p$ primos relativos.

Divisibilidad y Residuos

Los números naturales x, y, z satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$. Demuestre que al menos uno de ellos es divisible entre 3.

x	x^2
0	0
1	1
2	1

por contradicción

$x^2 = 1$

$y^2 = 1$

$z^2 = 1$

$x^2 + y^2 = 2 \neq 1$

Divisibilidad y Residuos

Pensemos en x, y, z en términos de sus residuos bajo división entre 3, y asumamos que ninguno es un múltiplo de 3, es decir que los residuos de todos son 1 ó 2. Elevando 1 ó 2 al cuadrado, vemos que el residuo bajo división entre 3 siempre es 1 y por lo tanto el residuo asociado con la suma de dos cuadrados siempre es 2 que no es igual al residuo de un cuadrado que es 1. Por lo tanto, la igualdad es imposible si ninguno es un múltiplo de 3.

(a) Se sabe que $2 + a$ y $35 - b$ son divisibles entre 11. Demuestre que $a + b$ también lo es. (b) Se sabe que $a + 1$ es divisible entre 3. Demuestre que $4 + 7a$ también lo es.

(a) $\underline{(35-b)} - \underline{(2+a)} = \underline{33} - (a+b)$

(b) $\underline{7a+7} = \boxed{7a+4} + \underline{3}$

(a) Si $2 + a$ y $35 - b$ son divisibles entre once, entonces $(2 + a) - (35 - b) = a + b - 33 = a + b - 3 \cdot 11$ también lo es, lo que implica que $a + b$ también es divisible entre 11. (b) Si $a + 1$ es divisible entre 3, entonces $7(a + 1) = 7a + 7$ también lo es. Por lo tanto $7a + 7 - 3 = 7a + 4$ también lo es.

Fin del Día 1

Resolución de problemas de Olimpiadas matemáticas: estructurando sesiones de trabajo con secuencias apropiadas de problemas, día 2.

Arturo Portnoy

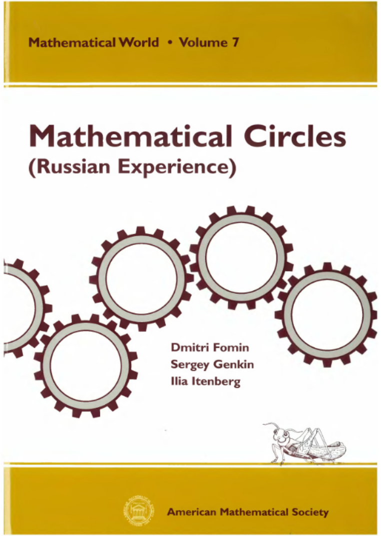
Departamento de Ciencias Matemáticas, Universidad de Puerto Rico en Mayagüez

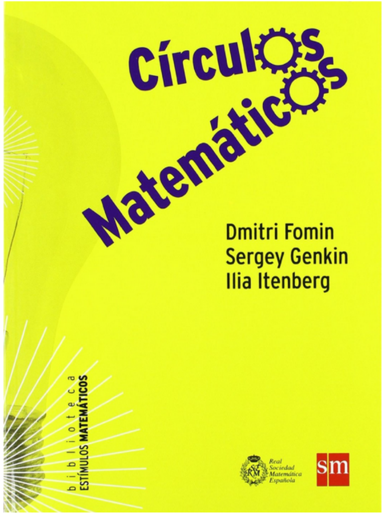
30 de julio de 2014

Filosofía

- Entrenamiento dirigido a jóvenes talentosos de Olimpiadas Matemáticas.
- Teoría se presenta de forma muy resumida y conforme se va necesitando.
- Idea: proponer problemas lo antes posible sin un desarrollo amplio y formal de teoría prerequisito.
- Sembrar una semilla que propicie el aprendizaje autodidacta.
- Problemas diferentes, atractivos, retadores, pero no imposibles. Motivar, no frustrar.

Referencias





Principio del palomar

Principio del palomar

25 cajas de manzanas son entregadas a una tienda. Las manzanas son de tres tipos distintos y las manzanas en cada caja son del mismo tipo. Demuestre que entre estas cajas hay por lo menos 9 de ellas que tienen manzanas del mismo tipo.

A B C

Principio del palomar

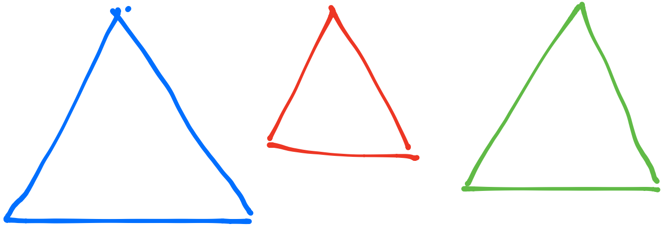
Por contradicción, si asumimos que hay menos de 9 cajas de cada tipo de manzanas, hay a lo más 24 cajas de manzanas en la tienda, lo cual es una contradicción.

Principio del palomar

Palomas: vértices (3) Palomares: 2 triángulos chicos

$\therefore$ Hay 2 vértices azules dentro de un Δ chico

Demuestre que un triángulo equilátero no puede cubrirse completamente por dos triángulos equilaterós mas pequeños.

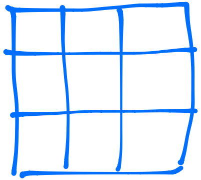


Principio del palomar

Por contradicción, si asumimos cubierto el triángulo grande, por el pricipio del palomar, debe haber por lo menos dos vértices en uno de los triángulos pequeños. Esta es una contradicción, ya que el triángulo pequeño sería por lo menos del tamaño del grande.

Principio del palomar

En un tablero 3×3 se llenan sus casillas con los números -1, 0 y 1. Demuestre que de las 8 posibles sumas de sus renglones, columnas y diagonales, dos sumas deben ser iguales.



posibles sumas: 7

$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

8 sumas

Principio del palomar

El valor máximo de cada suma es 3, mientras que el valor mínimo es -3. Así que hay solo 7 valores posibles (-3,-2,-1,0,1,2,3) (palomares) pero 8 sumas (palomas). Por el principio del palomar, debe haber por lo menos dos sumas iguales.

Principio del palomar

Quince jóvenes recogieron 100 mangos en total. Demuestre que dos de ellos recogieron el mismo número de mangos.

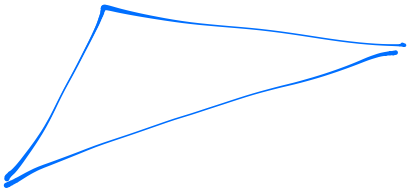
$0 \quad 1 \quad 2 \quad \cdots \quad 14$

$\frac{14 \cdot 15}{2} = 105$

Principio del palomar

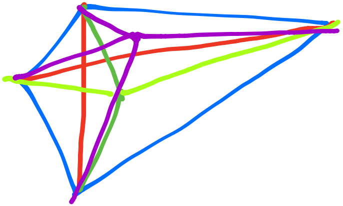
Procediendo por contradicción, supongamos que todos recogieron un número distinto de mangos. Entonces, las cantidades mínimas de mangos recogidas son 0, 1, 2, 3, ... , 14. El total mínimo es 105, lo cual es una contradicción.

Desigualdad triangular



Desigualdad triangular

Encuentre el punto dentro de un cuadrilátero convexo tal que la suma de las distancias del punto a los vértices es mínima.

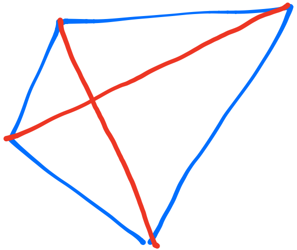


Desigualdad triangular

Consideremos el cuadrilátero $ABCD$. El punto en cuestión tiene que ser la intersección de las diagonales, O, porque para cualquier desviación de este punto, llamémosle P, tenemos que $AP + PC > AO + OC = AC$ y $BP + PB > BO + OD = BD$ por la desigualdad triángular.

Desigualdad triangular

Demuestre que la suma de las diagonales de un cuadrilátero convexo es menor que su perímetro, pero mayor que la mitad de su perímetro.



$S < P$

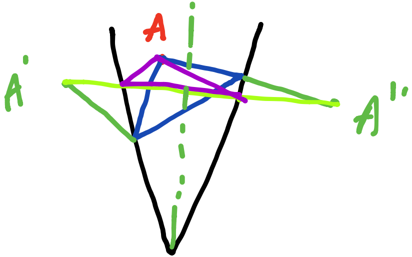
$P < 2S$

Desigualdad triangular

Consideremos el cuadrilátero $ABCD$ y sea O la intersección de las diagonales. Entonces tenemos que $DB < DA + AB$ y $DB < DC + CB$, por la desigualdad triangular. Por tanto, $2DB < \text{perímetro}$. Similarmente tenemos que $2AC < \text{perímetro}$. Por lo tanto $AC + DB < \text{perímetro}$. Además, tenemos que $DA < DO + OA$, $AB < AO + OB$, $BC < BO + OC$ y $CD < CO + OD$, por la desigualdad triangular. Por lo tanto, sumando las cuatro desigualdades tenemos que $\text{perímetro} < 2(AC + DB)$. Por lo tanto $\text{perímetro}/2 < AC + DB < \text{perímetro}$.

Desigualdad triangular

La casa de un pescador está en el interior de una península cuya forma es la de un ángulo agudo. El pescador debe salir de su casa, ir a una de las costas de la península, luego ir a la otra, y volver a su casa. ¿Cómo puede encontrar la ruta más corta?

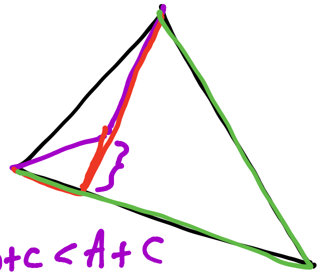


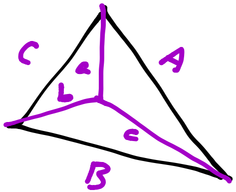
Desigualdad triangular

Sea O la casa del pescador, sean A y B las reflexiones de O con respecto a los rayos que forman el ángulo respectivamente. Entonces cada ruta de O a una costa tiene su contraparte reflejada de igual longitud y vemos que el circuito O-costa 1-costa 2-O tiene su contraparte A-costa 1-costa 2-B de igual longitud. Entonces la ruta mas corta entre A y B, que es una linea recta (por la desigualdad triangular), tiene su contraparte en un circuito cerrado desde la casa y corresponde al circuito de mínima longitud.

Desigualdad triangular

Demuestre que las suma de las distancias de un punto O a los vértices de un triángulo es menor que su perímetro si el punto está dentro del triángulo. ¿Qúe ocurre si el punto O está fuera del triángulo?





$b+c < A+C$

$a+b < A+B$

$a+c < B+C$

$2a+2b+2c < 2A+2B+2C$

Desigualdad triangular

Sea O un punto interior del triángulo ABC y sea D la intersección de la recta AO con el lado CB. Luego $AB + BD > AD$ y $OD + DC > OC$ por la desigualdad triangular. Sumando ambas y restando OD a ambos lados obtenemos que

$$AB+BC = AB+BD+OD+DC-OD > AD+OC-OD = AO+OC.$$

Aplicando esto a a cada pareja de lados y sumando las desigualdades, obtenemos el resultado.

Juegos

Juegos

Tenemos tres montones de piedras: uno con 10 piedras, otro con 15 y un último con 20. En cada turno, un jugador puede elegir uno de los montones y dividirlo en dos montones con menos piedras cada uno. El perdedor es aquel jugador que no puede dividir ningún montón. ¿Existe alguna estrategia ganadora para algún jugador, si juegan dos jugadores?

Juegos

No existe estrategia ganadora alguna. No importa que decisiones tomen los jugadores, cada jugada aumenta un montón al juego, que terminará cuando haya 45 montones de una piedra, es decir, en 42 jugadas. Así, el segundo jugador siempre ganará.

Juegos

Dos jugadores colocan dominos (1×2) en un tablero 10×10 de manera que ninguna pieza colocada se encima en otra ni sale del tablero. El jugador que no pueda colocar una pieza pierde. ¿Existe alguna estrategia ganadora para algún jugador?

Juegos

El segundo jugador tiene una estrategia ganadora: jugar con simetría con respecto al centro del tablero en respuesta a la jugada del primer jugador. Siempre puede contestar la jugada así el segundo jugador, y el juego terminará cuando el primer jugador no pueda jugar.

Juegos

Una caja contiene 300 palillos. Dos jugadores toman turnos sacando no mas que la mitad de los palillos. El jugador que no pueda jugar, pierde. ¿Existe alguna estrategia ganadora para algún jugador?

Juegos

La posición ganadora (la que pone al contrincante en posición de perder) es de la forma $2^n - 1$, así que el primer jugador puede sacar 45 palillos y dejar el juego en $255 = 2^8 - 1$, asegurando su victoria.

Juegos

112 posición ganadora : [112,1000] intervalo de posiciones ganadoras

El juego comienza con el número 1. Dos jugadores toman turnos multiplicando el número del momento por cualquier entero entre el 2 y el 9 (inclusive los extremos). El primer jugador que genere un número mayor que 1000 gana. ¿Existe alguna estrategia ganadora para algún jugador?

111 es el inicio de un intervalo de posiciones perdedoras

[56, 111] es perdedor

[4,6] es perdedor

Juegos

Las posiciones ganadoras son del 56 al 111 (porque al multiplicar del 2 al 9 producen números menores que mil pero en la siguiente jugada uno puede hacerlos pasar de mil) y del 4 al 6 (porque al multiplicar del 2 al 9 no llegan a las otras posiciones ganadoras, pero en la siguiente jugada se puede lograr una posición ganadora). Así que el primer jugador puede poner el juego en posición 4, 5 ó 6 y ganar.

Fin del Día 2

Resolución de problemas de Olimpiadas matemáticas: estructurando sesiones de trabajo con secuencias apropiadas de problemas, día 3.

Arturo Portnoy

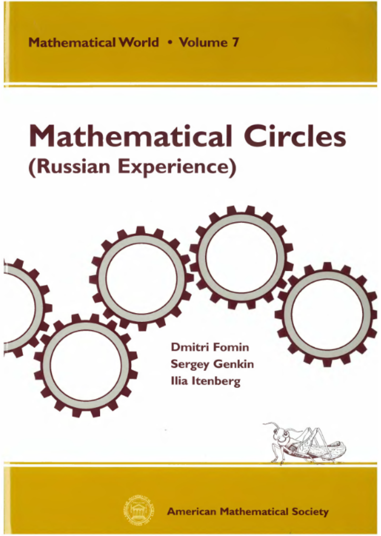
Departamento de Ciencias Matemáticas, Universidad de Puerto Rico en Mayagüez

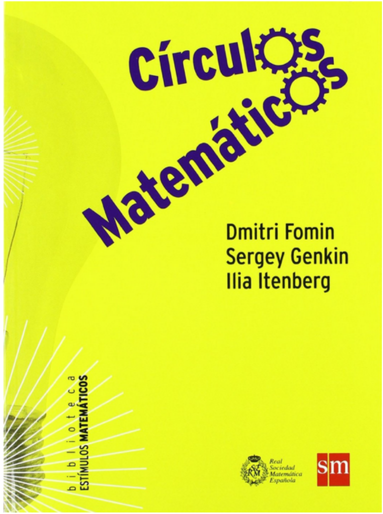
5 de agosto de 2014

Filosofía

- Entrenamiento dirigido a jóvenes talentosos de Olimpiadas Matemáticas.
- Teoría se presenta de forma muy resumida y conforme se va necesitando.
- Idea: proponer problemas lo antes posible sin un desarrollo amplio y formal de teoría prerequisito.
- Sembrar una semilla que propicie el aprendizaje autodidacta.
- Problemas diferentes, atractivos, retadores, pero no imposibles. Motivar, no frustrar.

Referencias





Inducción Matemática

$P(n)$

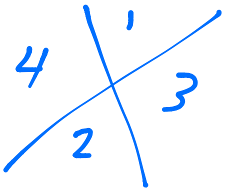
$n=1: \quad P(1)$ ✓

Asumiendo $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$

Inducción Matemática

Asumimos cierto para n líneas

El plano está dividido en regiones por varias lineas rectas. Demuestre que podemos colorear el plano con dos colores de tal forma que dos regiones adyacentes cualesquiera siempre tienen colores diferentes (dos regiones son adyacentes si comparten al menos un segmento rectilineo).



Inducción Matemática

Se trabaja con n líneas. Es evidente que para $n = 1$ el enunciado es cierto. Lo asumimos cierto para n y tiramos una línea adicional. Ahora basta observar que si se invierten los colores de un lado de la línea adicional, el plano queda coloreado correctamente.

Inducción Matemática

$n=1: \quad 4^1+15\cdot 1-1=18$ ✓

$P(n)$

Demuestre que para cualquier número natural n, $4^n + 15n - 1$ es divisible por 9.

$4^{n+1}+15(n+1)-1$

Inducción Matemática

El enunciado es cierto para $n = 1$. Entonces, asumiendo cierto para n, tenemos que

$$4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 3 \cdot (4^n + 5) + (4^n + 15n - 1)$$

pero 4^n tiene residuo 1 al dividirlo entre 3 y por lo tanto $4^n + 5$ es divisible entre 3, y con esto demostramos la proposición por inducción.

Inducción Matemática

Asumiendo que $x + \frac{1}{x}$ es entero, demuestre que $x^n + \frac{1}{x^n}$ tambien lo es, para cualquier n natural.

Inducción Matemática

La proposición es cierta para $n = 1$, se esta asumiendo así.
Observemos que

$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)$$

y usando el principio de inducción fuerte o modificado sabemos que todos los términos entre paréntesis del lado derecho de la igualdad son enteros, haciendo el lado derecho de la igualdad un entero.

Inducción Matemática

Demuestre que un cuadrado se puede cortar en n cuadrados para $n \geq 6$.

Primero hay que ver que un cuadrado se puede dividir en 4 cuadrados. Después basta ver que podemos dividirlo en 6, 7 y 8 cuadrados. En 7 lo hacemos tomando el que esta dividido en cuatro y dividiendo un cuadradito en 4 mas. En 6 y 8 ponemos 5 y 7 cuadraditos en forma de L, respectivemante, y en la esquina un cuadrado grande mas. Luego, mostramos que si podemos dividirlo en k, $k+1$ y $k+2$ cuadrados, podemos dividirlo en $k+3$, $k+4$ y $k+5$ cuadrados, completando la inducción. Esto se hace tomando un cuadrado de cada caso y dividiéndolo en cuatro.

Varios

Varios

El producto de 22 enteros es 1. Demuestre que su suma no puede ser 0.

Varios

Los 22 enteros tienen que ser 1 o -1. Para que el producto sea positivo, tiene que haber un número par de -1, pero para que la suma de anule, debe haber el mismo número de 1 que de -1, es decir 11. Ambas condiciones no se pueden cumplir simultáneamente.

Varios

¿Cuántos números de 6 dígitos tienen al menos un dígito par?

Varios

Es mejor contar el complemento en este caso, es decir, cuanto número de 6 dígitos no tienen ni un dígito par: 5^6. Esto lo restamos del total de números de 6 dígitos para obtener el resultado: $9 \cdot 10^5 - 5^6 = 884,375$.

Varios

(a) Demuestre que $p^2 - 1$ es divisible entre 24 si p es un primo mayor que 3. (b) Demuestre que $p^2 - q^2$ es divisible entre 24 si p y q son primos mayores que 3.

Varios

(a) $p^2-1=(p-1)(p+1)$, donde ambos factores son pares consecutivos, asi que uno es divisible entre 2 y otro entre 4. Por otro lado, $p-1, p, p+1$ son tres números consecutivos, así que uno de ellos es divisible entre 3, y no lo es p, así que lo es uno de los otros dos. Por los tanto, tenemos divisibilidad entre $2\cdot3\cdot4=24$.
(b) $p^2-q^2=(p-q)(p+q)$, donde ambos factores son pares. Además, si ambos factores son pares y ninguno es divisible entre 4, sus residuos bajo división entre 4 son 2 y por tanto su suma ($2p$) es divisible entre 4 (contradicción). Por tanto alguno es divisible entre 4. Por otro lado, si ninguno es divisible entre 3, sus residuos bajo division entre 3 son 1 ó 2, haciendo que su suma o diferencia sea divisible entre 3, lo cual es una contradicción. Por tanto, alguno es divisible entre 3. Así que tenemos divisibilidad entre $2\cdot3\cdot4=24$.

Varios

Dados 11 numeros naturales menores que 21, demuestre que se pueden elegir dos tal que uno divide al otro.

Varios

Se pueden dividir los naturales menores que 21 en 10 clases disjuntas de números tales que en una pareja de una clase, siempre uno divide al otro: {1,2,4,8,16}, {3,6,12}, {5,10,20}, {9,18}, {7,14}, {11}, {13}, {15}, {17}, {19}. Por el principio del palomar, si elegimos 11 números (palomas) y hay 10 clases disjuntas (palomares), debe haber dos números en una misma clase. Por tanto, uno divide al otro.

Varios

El punto A, que está dentro de un ángulo agudo, se refleja con respecto a ambos lados del ángulo para obtener los puntos B y C. El segmento BC intersecta los lados del ángulo en los puntos D y E respectivamente. Demuestre que $BC/2 > DE$.

Varios

Sean B' y C' las intersecciones de los segmentos AB y AC con los respectivos lados del ángulo. El triángulo $AB'C'$ es semejante al triángulo ABC, y sus lados estan en razón $1:2$. Por lo tanto $B'C' = BC/2$. Basta observar que $B'C' > DE$. (Esto se desprende de Tales, o alternativamente es consecuencia de que la ruta $A \to B' \to C'$ no es el circuito mínimo, mientras que $A \to D \to E$ sí lo es, al mismo tiempo que AB' y AC' son las rutas mínimas de A a los lados del ángulo.)

Varios

Dos niños se turnan en romper una barra de chocolate que es de 5×10 cuadraditos. Solo pueden romper la barra usando las divisiones entre los cuadraditos. El jugador que primero rompa un cuadrito individual gana. ¿Existe alguna estrategia ganadora para algún jugador?

Varios

El primer jugador tiene la oportunidad de partir la barra en dos barras iguales 5×5, y de ahí en adelante hacer jugadas simétricas al contrincante, hasta que una barra con base o altura 1 sea desprendida y ahí romper el cuadrito ganador.

Varios

Demuestre que para cualquier número natural n, $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ es divisible por 9.

Varios

Para $n = 1$ es cierto, ya que 1+8+27=36. Ahora,

$$(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3 = n^3+(n+1)^3+(n+2)^3+9n^2+27n+9.$$

Los primeros tres terminos son divisibles entre 9 por la hipotesis de inducción, y los últimos 3 evidentemente tienen un factor 9.

Varios

Dos jugadores ponen, uno despues del otro, monedas en una mesa circular. Las monedas no pueden estar amontonadas una encima de la otra. Pierde el que ya no puede poner moneda. Existe alguna estrategia ganadora para algun jugador?

Varios

El primer jugador tiene una estrategia ganadora: pone la primera moneda en el centro de la mesa. Después de eso responde a la jugada del segundo jugador simétricamente (respecto al centro). El juego termina cuando el segundo jugador ya no puede poner moneda.

Varios

Un tablero 6x6 se llena de fichas 1x2. Demuestra que sin importar como se llena, siempre existe una linea, horizontal o vertical, que divide el tablero en dos si partir ninguna ficha.

Varios

Primero, observemos que si una linea divisora parte una ficha, tiene que partir un número par de ellas; de otra forma, al remover las fichas partidas, quedaría una region impar cubierta por fichas pares. Ahora, por contradicción, asumamos que todas las lineas divisoras parten fichas. Hay 5 lineas divisoras verticales y 5 horizontales, que por la primera observación tendrían que partir al menos 20 fichas. Pero el tablero se cubre con 18 fichas: contradicción.

Fin del Día 3