El Concepto de Función en Euler.

Ronald Steve Riascos Galeano

UNIVERSIDAD DE NARIÑO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

SAN JUAN DE PASTO

2009

El Concepto de Función en Euler.

Ronald Steve Riascos Galeano

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Mg. Andrés Chaves Beltrán
Asesor

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

SAN JUAN DE PASTO
2009

Nota de Aceptación

Jurado

Jurado

Asesor

San Juan de Pasto, Septiembre de 2009

A Dios ...

A la memoria de mi padre Carlos Hernando Riascos

A mi madre Ana Maria Galeano

A mi familia

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Andrés por su apoyo y gran motivación en el desarrollo del presente trabajo.
Al Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño por hacer parte de mi formación profesional.
A mi padre que desde el cielo iluminó mi camino para llegar hasta aquí.
A mi madre por darme su afecto y apoyo incondicional en cada etapa de mi vida y a quién dedico éste trabajo.
A mi familia por hacer parte de este importante logro y a Dios por darme la vida y hacer que este sueño se haya hecho realidad.

Ronald Steve Riascos Galeano

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
Septiembre 2009

TABLA DE CONTENIDO

Resumen

El presente trabajo tiene como finalidad presentar algunos aspectos histórico-epistemológicos acerca de la evolución de la noción de función y la trascendencia que tuvo esta misma durante los siglos XVII y XVIII. Leonard Euler uno de los matemáticos de esta época, a través de sus grandes avances y estudios realizados en el campo de las matemáticas, contribuyó de manera significativa en la evolución del concepto de función en su intento de consolidar el análisis infinitesimal como una rama independiente de las matemáticas a partir de su definición de función planteada en 1748. Por tal razón se exhibe un recorrido historiográfico en el cual se presenta a grandes rasgos la evolución del concepto de función partiendo de los trabajos de Descartes hasta llegar a la definición formal de Euler expuesta en su obra *introductio in analysin infinitorum (1748)*. Puesto que la concepción de Euler dejaba por fuera cierto tipo de funciones las cuales eran el resultado del estudio de problemas físicos, como el de la cuerda vibrante, se presenta un apartado dedicado al problema histórico de la cuerda vibrante, en el cual se expone la ecuación que modela el movimiento de la cuerda y las soluciones planteadas por D. Bernoulli, D'Alambert, Euler, entre otros y la influencia que tuvo dicho problema en la concepción de función de Euler. Finalmente se presenta la clasificación de funciones realizada por Euler en el año de 1755 donde se puede observar que dicha clasificación consiste, esencialmente, en una clasificación de las funciones en continuas y discontinuas.

Abstract

The present work has as an aim to present some historical-epistemologic aspects about the evolution of the function-notion and the importance that was the same during the seventeenth and eighteenth centuries. Leonard Euler one of the mathematicians of that time, through their great advances and studies in the field of mathematics, contributed significantly to the evolution of the function concept in his attempt to consolidate the infinitesimal analysis as an independent branch of mathematics from his definition of function raised in 1748. For this reason it exhibits a historiographical tour in which presents an overview of the evolution of the function concept starting off the works of Descartes up to the formal definition of Euler exposed in his work *introductio in analysin infinitorum (1748)*. Since the conception of Euler left out certain functions which were the result of the study of physical problems, such as the vibrating string, there is a section devoted to the historical problem of the vibrating string, in which is exposed the equation that models the motion of the string and the solutions proposed by D. Bernoulli, D'Alambert, Euler, among others and the influence that this problem in the conception of function of Euler had. Finally presents the classification of functions realised by Euler in the year 1755 where you can see that this classification is essentially a classification of functions in continuous and discontinuous.

Introducción

El concepto de función, junto con otros conceptos tales como el de número y medida, se encuentra en la base de gran parte de las matemáticas que se han desarrollado a lo largo de la historia. Numerosos son los estudios realizados por matemáticos de diferentes épocas que permitieron consolidar este concepto y hacer del mismo el objeto de estudio del análisis.

Reconocidos personajes como Descartes, Newton, Leibniz entre otros, contribuyeron para que este concepto fuera cada vez más autónomo, es decir, intentando desligarlo cada vez mas de la concepción geométrica de curva y de la noción física de movimiento.

En el siglo XVII es cuando aparece por primera vez el término función y además es donde se empieza a desarrollar el análisis, pues en esta época se abordan los conceptos de diferenciación e integración que constituyen el núcleo fundamental del análisis infinitesimal. Sin embargo la consolidación del concepto de función como objeto matemático, se debe, en gran parte, a los estudios realizados por el matemático suizo Leonard Euler para quién las funciones son la materia prima del cálculo o análisis infinitesimal, el cual era una rama de las matemáticas que durante la época mencionada anteriormente se encontraba en proceso de afianzamiento.

Los estudios realizados por Euler cobran un significado especial en cuanto a lo que el concepto de función se refiere. En ese sentido es importante señalar que Euler se dio a la tarea de establecer una definición del concepto que permitiera caracterizar propiedades de cualquier tipo de curva y en dar una clasificación de todas aquellas curvas conocidas en la época.

El primer capítulo de este trabajo de grado, presenta un recorrido historiográfico que muestra diferentes estadios de evolución del concepto de función, iniciando con los trabajos realizados por Descartes, pasando por las obras de Newton, Gregory y Leibniz; todos ellos, matemáticos del siglo XVII quienes acogieron la idea de variable en matemáticas. Los trabajos realizados por estos personajes representan la base para la teoría de funciones de Euler la cual tiene un apartado especial en este trabajo y se muestra en la sección 1.2.

René Descartes, matemático francés que se destacó por sus estudios en geometría y a quién se debe la creación de la geometría analítica es con quien se inicia el recorrido histórico del presente trabajo. El apartado correspondiente a Descartes, muestra la importancia de una de sus más significativas obras titulada *La géométrie* de 1637, en la cual se presenta el método de coordenadas, que es la semilla para la idea de representación analítica de Euler. En seguida, se aborda los estudios realizados por Newton durante los años 1665 y 1666, cuyos resultados concluyen en la obra *Tratado de método de series y fluxiones* donde se presenta las bases del cálculo diferencial. Inmediatamente después, se presenta a James Gregory quién desarrolla, al igual que Newton, el teorema binomial y aventura una primera definición de función ligada a la representación en series infinitas. Posteriormente se presenta las investigaciones de Leibniz en cuanto al cálculo, quién desarrolló las bases del mismo de forma independiente a la de Newton, a pesar de ser contemporáneos. Se debe a Leibniz una de las definiciones de función en su obra *Methodus Tangentium Inversa, seu de Functionibus* en la cual hace referencia más que todo a la noción de movimiento. Finalmente se presenta una pequeña reseña de la vida de Euler y se analiza la primera parte de la obra de titulada *Introductio in analysin infinitorum* publicada en el año de 1748 escrita por él mismo en la cual expone su primera de definición de función e implícitamente realiza la primera clasificación de funciones continuas.

Puesto que uno de los objetivos de las matemáticas de los siglos XVII y XVIII era dar solución matemática a un sin numero de problemas planteados por la física, durante esta época y mas específicamente en los años 1744-1749 Euler se dedicó a analizar este tipo de problemas y en particular, el de la cuerda vibrante el cual fue tema de discusión por varios años. Así, el segundo capítulo de este trabajo muestra la discusión generada por el problema en mención, partiendo de la ecuación que modela el movimiento de la cuerda para posteriormente mostrar las soluciones planteadas por D.Bernoulli, Euler y D'Alambert. Se expone además la influencia que tuvo dicho problema en la concepción de función de Euler para conducirlo en la aceptación de otro tipo de funciones que el catalogaría como discontinuas las cuales intervenían en la solución del problema. Así, Euler termina por aceptar este tipo de funciones en el análisis y presenta una nueva definición de función que le permite clasificar a las funciones esencialmente en continuas y discontinuas.

Por último, en el tercer capítulo se presentan algunas conclusiones de lo expuesto en los capítulos anteriores. Las primeras hacen referencia a lo propuesto en el recorrido histórico y muestran la importancia de las investigaciones de Descartes, Newton y Leibniz en la noción de función de Euler. Posteriormente, se presentan algunas conclusiones en base a la primera definición de función de Euler para finalmente exponer las reflexiones acerca del problema de la cuerda vibrante con respecto al cambio en la concepción de Euler.

Capítulo 1

Recorrido histórico

El concepto de función se puede considerar uno de los más relevantes dentro de las matemáticas actuales. Desde épocas remotas la humanidad ha hecho uso de funciones al asignar, por ejemplo, la estatura de las personas con su edad. En los últimos siglos este concepto ha evolucionado, desde las "ideas" de función ligada a curvas geométricas y al movimiento hasta la definición actual en la que interviene fuertemente la noción de conjunto.

Un recorrido histórico que muestre la evolución de dicho concepto podría remontarse a la antigüedad donde, intuitivamente, la humanidad empezó a relacionar ciertos fenómenos de la naturaleza con el tiempo, sin embargo, en éste trabajo, el recorrido historiográfico de la noción de función se centrará en los siglos XVII y XVIII, siglos que corresponden al periodo más fértil para la formación de dicho concepto, pues en éste periodo vivieron grandes eminencias de las matemáticas como Descartes, Newton, Leibniz y Gregory, quienes con sus grandes trabajos e investigaciones contribuyeron a la formación del concepto de función. Finalmente se presentará la concepción de función de Leonard Euler, quien hace un detallado estudio de éste concepto en su obra *Introductio in analysin infinitorum.*

1.1. El concepto de función en el siglo XVII

El siglo XVII tuvo un significado especial para la historia de las ciencias matemáticas, durante este periodo, matemáticos como Descartes, Leibniz y Newton, entre otros, se encargaron de aplicar diferentes métodos matemáticos a los fenómenos de la naturaleza. Cada uno de estos personajes trabajaba en numerosas ramas de las ciencias y cada nuevo éxito en dichas ramas, incrementaba las posibilidades de aplicación de la teoría matemática que se manejaba hasta ese entonces.

En este siglo se forman las primeras organizaciones científicas como: *La Royal Society en 1662* y *La Academia de París en 1666*, las cuales se convirtieron en una forma productiva de trabajo colectivo. De igual manera, se dio origen a las publicaciones periódicas como: *La Philosophical Transactions de Londres en el año 1665, El Acta Editorum* fundada por *Leibniz en 1682*, entre otras, que sirvieron para mostrar los trabajos de un sin número de científicos. Pero lo fundamental en este siglo es que las bases de las matemáticas (el estudio de los números, las magnitudes y las figuras) se complementaron con el estudio de los movimientos (las dependencias funcionales), es decir que el estudio del movimiento empezó a ser objeto de estudio en las matemáticas y por tanto, cambia el contenido interno de las mismas. Por esta razón es posible afirmar que en el siglo XVII nace el proceso de creación de las matemáticas de las variables, en la cual su mayor representante es *René Descartes*.

Respecto a este cambio en las matemáticas Engels afirmó que: "El punto de viraje de las matemáticas fue la variable de Descartes. Gracias a esto se introdujo en las matemáticas el movimiento dando origen *al cálculo diferencial e integral* que comienza ahora y que *Newton y Leibniz* perfeccionaron"[1]. Es por esto que se partirá de los trabajos de Descartes para empezar a estudiar la evolución de la noción de función.

[1]Ríbnikov [8], pág. 154

Cabe señalar que para estudiar el concepto de función, algunos matemáticos, tanto del siglo XVII como del siglo XVIII, esbozaron previamente un nuevo cálculo, el cual era una nueva rama de la matemáticas que había recibido el nombre de *Análisis Infinitesimal*. Este nuevo cálculo se inicia con los trabajos de Newton y Leibniz a finales del Siglo XVII. Las obras[2] de estos, sirvieron de base para matemáticos posteriores. Tales obras fueron elaboradas de manera independiente, sin embargo, ambos incluyen aspectos que actualmente se consideran esenciales en el estudio del cálculo.

De igual manera, los más significativos aportes a las matemáticas de esta época se deben a científicos de primera fila como: la familia de los Bernoulli, l'Hopital y Leonard Euler, entre otros. La historia pone en manifiesto que los grandes descubrimientos de estos personajes no sólo contribuyeron a las matemáticas sino también a grandes campos de la ciencia. Sin embargo, lo relevante en este documento es estudiar el trabajo de Euler en lo concerniente a su noción de función.

1.1.1. René Descartes (1586 - 1650)

René Descartes, nació en Francia en el año 1586, fue uno de los matemáticos más importantes del siglo XVII, reconocido por su famoso *Discours de la méthode puor bien conduire sa raison et chercher la vérité dans las sciences* (Discurso del método para dirigir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias), de 1637, el cual contiene tres apartados independientes dedicados a la dióptrica (*Le dioptrique*), la meteorología (*Les météres*), y su parte final, a la que él llamó geometría (*La géométrie*) es la que presenta mayor interés en éste recorrido histórico, pues en ella se muestra la incorporación de una nueva rama de las matemáticas que puede considerarse como el aporte más significativo de Descartes a éste campo del conocimiento; *La geometría analítica*, con la que según Descartes:

[2] La obra de Newton que contiene su tratado de las fluxiones, lleva el título de *Tratado de métodos de series y fluxiones* y el texto de Leibniz en el cual presenta su cálculo de diferenciales se titula *Methodus Tangentium Inversa, seu de Functionibus*

> *Todo problema de la geometría puede reducirse fácilmente a términos tales que el conocimiento de las longitudes de determinados segmentos es suficiente para su construcción.*[3]

La geometría analítica persigue una construcción geométrica partiendo de las operaciones entre segmentos. Sin embargo, y con el pasar del tiempo, la geometría analítica fue considerada como un método que permitía interpretar problemas de la geometría como problemas algebraicos.

En *La géométrie*, Descartes muestra la importancia del álgebra y la geometría sin inclinarse por ninguna de las dos, pues según Boyer:

> *Descartes acusaba a la geometría de apoyarse excesivamente en diagramas y figuras que llegan a fatigar de manera innecesaria la imaginación y a la vez acusaba al álgebra de ser un arte confuso y oscuro que desconcierta a la mente.*

Así, el método de Descartes consistía en liberar en lo posible a la geometría, a través de los métodos algebraicos, del uso de las figuras y en darle un significado concreto a las operaciones del álgebra por medio de su interpretación geométrica.[4]

Como se ha mencionado, en *La géométrie* de Descartes, se muestra la aplicación del método analítico a diversos problemas geométricos; en este sentido, "el principio fundamental de la geometría analítica es descubrir que las ecuaciones indeterminadas en dos incógnitas, corresponden a lugares geométricos".[5]

Lo anterior se puede considerar un paso decisivo en la evolución del concepto de función del siglo XVII, pues la geometría analítica de Descartes, condujo a que las rectas, los círculos y las cónicas de un plano se pudieran definir por ecuaciones, además, es aquí

[3] El argumento es de Boyer [2] cap. XVII, pág. 427.
[4] Boyer [2] cap XVII, pág. 429
[5] Tomado de Boyer [2] cap. XVII, pág. 434

donde por primera vez, se sostiene la idea de que una ecuación en x e y es un medio para introducir una dependencia entre dos cantidades variables, de manera que permite el cálculo de los valores de una de ellas, correspondientes a valores dados de la otra variable.

Es así como en el siglo XVII, el concepto de función estuvo ligado al estudio de las curvas, ya sean provenientes de la geometría clásica o de trayectorias reguladas por algún movimiento. Descartes, como ya se ha mencionado, en su famoso *Discurso del Método* de 1637, más específicamente en su última parte a la cual llama geometría, usó la representación algebraica para distinguir entre *curvas geométricas y curvas mecánicas.* Las curvas geométricas eran aquellas que se podían representar mediante ecuaciones; una parábola por ejemplo dejaba de estar ligada a la acción de un plano que corta un cono, para convertirse en una ecuación de segundo grado; a éste tipo de curvas, Descartes les concedió el status geométrico, mientras que las curvas mecánicas eran aquellas curvas que en la época no se podían representar mediante ecuaciones; curvas de este tipo eran: la espiral, la cuadratriz, entre otros.[6] El método para producir estas ecuaciones era el método elaborado por el mismo Descartes y que fue llamado el método de coordenadas.[7]

Con la introducción del método analítico de Descartes se empezó a producir un cambio ontológico en las matemáticas. Este cambio ontológico, consistía en la aceptación de nuevos objetos matemáticos, como por ejemplo, el objeto función. Por tal razón las matemáticas (con el método analítico) empiezan a sufrir un proceso de algebrización, por tanto, en esta época se podía afirmar que lo matemáticamente aceptado era lo que se dejaba domesticar bajo el dominio del simbolismo algebraico.

[6] Actualmente las curvas mecánicas hacen referencia a los lugares geométricos descritos por algún movimiento.

[7] El método de coordenadas, también llamado el método analítico de Descartes, fue de gran utilidad para los matemáticos de la época y actualmente se usa en la enseñanza tradicional de las matemáticas.

No sería extraño entonces, que las primeras definiciones del concepto de función sean heredadas del método mencionado anteriormente.

1.1.2. Isaac Newton (1642 - 1727)

Nació en 1642 en Cambridge (Inglaterra). Su actividad científica estuvo encaminada hacia la física, la mecánica, la astronomía y la matemática. Famoso por su tratado de fluxiones el cual se puede considerar como la primera forma del análisis. Para Newton, las matemáticas hacían parte de la ciencia general y más que todo de eran la herramienta fundamental para las investigaciones científicas, en este sentido, la matemática debería considerar el movimiento y abarcar los conceptos de velocidad y aceleración, los cuales están íntimamente relacionados con el mismo. Puesto que el movimiento se introdujo en matemáticas gracias al método de coordenadas de Descartes,[8] Newton en su tratado de fluxiones, considera a las variables x e y como cantidades que van fluyendo a través del tiempo y que posteriormente las denominó *fluentes* y por tanto a su respectiva velocidad de variación la llamó fluxión.[9] Cabe recalcar que uno de los grandes aportes de Newton a las matemáticas es *El teorema Binomial* que le permitió considerar, en la elaboración de muchas de sus obras, series de potencias infinitas. Influenciado por la obra de Descartes, Newton, hizo de este tratamiento algebraico una útil herramienta de representación, la cual prefigura a la noción analítica de función.[10]

En las investigaciones realizadas por Newton en los años 1665 y 1666 se evidencia, que las curvas están íntimamente ligadas a la relación entre dos variables, y que dichas relaciones (con frecuencia eran llamadas relaciones funcionales), las cuales utiliza en sus manuscritos, se asemejan a las ecuaciones que se manejan actualmente, por ejemplo:

[8] Ríbnikov cap. 5 pág. 154 plantea que el cambio en las bases ideológicas en matemáticas se debe a la idea de variable de Descartes con la cual se introduce la noción de movimiento.

[9] El método de fluxiones de Newton no era más que un método para calcular la derivada de un determinada expresión, sin embargo el simbolismo abstracto empleado por Newton era de difícil asimilación.

[10] Recalde [7] pág. 9

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = \frac{x^3 + \sqrt{x - \sqrt{1-x^2}}}{\sqrt[3]{ax^2 + x^3}}$$

además denota, al igual como se hace en la actualidad, a x como la abscisa y a y como la ordenada.[11] En su *Tratado de Métodos de Series y Fluxiones*, describe a las curvas en términos de la composición de los movimientos en x y en y a los que llamó «fluentes». Newton introduce los términos «fluentes» y «fluxiones» para indicar las cantidades variables de su geometría analítica, pues a dichas cantidades las consideraba «cantidades fluyentes», es decir, cantidades que varían respecto al tiempo. Así, los «fluentes» hacen referencia a las cantidades que fluyen en una curva, mientras que las «fluxiones» indican la velocidad de cambio de los «fluentes» con respecto al tiempo.[12]

1.1.3. James Gregory (1638-1675)

Aunque el teorema binomial con exponentes naturales era bien conocido en Europa, la forma dada por Newton del mismo con exponentes fraccionarios aún no era reconocida; sin embargo, como lo indica Boyer([2], cap. XVIII, pág. 483), parece ser que James Gregory, matemático escocés ya tenía conocimiento sobre tal resultado. Al igual que Newton, Gregory reconocía la importancia de los métodos infinitos y más aún de la potencia que muestran los desarrollos de funciones en series infinitas. Como consecuencia de esto, en el año de 1667 Gregory publicó el libro: *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura* el cual contenía algunos resultados importantes del análisis infinitesimal y donde expone su definición de función: *como una cantidad que se obtiene de otras cantidades mediante una serie de operaciones algebraicas.*

[11] Recalde [7] pág. 10

[12] Véase: Grattan-Guinness [6] pág. 82

1.1.4. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716)

Leibniz, nació en Leipzig en el año de 1646, ingresó a la Universidad de dicha ciudad a la edad de 15 años donde adquirió conocimientos en teología, derecho, filosofía y matemáticas. En 1672 viajó a París donde conoció a Huygens quién le sugirió estudiar los trabajos de Pascal para adquirir formación en matemáticas.[13] En 1673 viajó a Londres donde conoció el texto *Lectiones geometricae* de Barrow (maestro de Newton), y entró a formar parte de la Royal Society.

Leibniz, al igual que Newton, encontró en las series infinitas una herramienta fundamental para el desarrollo de sus posteriores investigaciones, por ejemplo, en la suma de los inversos de los números triangulares, es decir, de la forma:

$$\frac{2}{n(n+1)}$$

donde llegó fácilmente a que la suma de los n primeros vale:

$$2\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)$$

y encontró además, que la suma de la serie infinita es 2 haciendo uso de la igualdad:

$$\frac{2}{n(n+1)} = 2\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)$$

A partir de este resultado,[14] Leibniz pudo concluir que podía sumar, prácticamente, cualquier suma infinita.

Luego de sus estudios sobre las series infinitas, Leibniz se encargo de estudiar los trabajos de Pascal relacionados con el cálculo infinitesimal y fue precisamente a partir de éstos que Leibniz, en este mismo año (1673), se dio cuenta que la determinación de la

[13] La sugerencia hecha a Leibniz por Huygens, se debió a que durante esta época Leibniz estaba ocupado, casi exclusivamente de asuntos diplomáticos.

[14] El resultado expuesto muestra la importancia que tenían los desarrollos en series infinitas para la resolución de problemas sobre el trazado de una tangente a la curva. En este sentido , el trazado de la recta tangente, le permite a Leibniz dar una idea del concepto de función a través de la noción de movimiento.

tangente de una curva, depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y las abscisas cuando estas diferencias se hacen infinitamente pequeñas. De igual manera, pudo determinar que las cuadraturas[15] dependen de las sumas de las ordenadas o de los diferentes rectángulos infinitamente estrechos que constituyen el área; además determinó que en geometría, los problemas de las cuadraturas y las tangentes son problemas inversos.

Posteriormente, Leibniz se dedicó a buscar un simbolismo[16] adecuado para el cálculo[17] desarrollado por él y que además consideraba de gran utilidad puesto que según Leibniz era aplicable a las funciones ya sean racionales, irracionales, algebraicas o trascendentes. En este sentido, en su obra *Methodus Tangentium Inversa, seu de Functionibus* de 1673 y en sus investigaciones de 1692 y 1694 Leibniz, utilizó la palabra función para *designar cualquier cantidad que varía de un punto a otro sobre una curva.*

Se puede observar que en la definición de Gregory, el término función está ligado a las operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación y división), mientras que en la definición de Leibniz este término hace referencia a la representación gráfica de las funciones y más que todo al movimiento.

[15] Los problemas de cuadraturas, hacen referencia a lo que actualmente se conoce como el área bajo una curva. En este sentido, uno de los métodos o reglas más conocido en la época de Newton y Leibniz para encontrar la cuadratura de casi todas las curvas era: $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$.

[16] Leibniz tuvo siempre una fina apreciación de la importancia que tiene una buena notación para ayudar a los procesos de pensamiento y la que eligió para el cálculo, era especialmente afortunada. Por tal razón se puede considerar que los matemáticos de la época, tuvieron la tendencia a aceptar las ideas de Leibniz sobre las de Newton, pues el simbolismo empleado por Leibniz era más comprensible para los lectores, a tal punto que en la actualidad aún éste se conserva.

[17] El calculo de Leibniz, como ya se mencionó, consistía en la determinación de las tangentes, que exigían el uso del *calculus differentialis* y en el cálculo de las cuadraturas el cual requería del *calculus summatorius* o *calculus integralis*, nombres que provienen del latín y que actualmente se conocen como cálculo diferencial y cálculo integral.

1.1.5. El concepto de función en el análisis

Con la incorporación de la palabra función en matemáticas, se quería identificar un concepto totalmente autónomo, es decir, un concepto libre de todo referente geométrico y físico, por tal razón, los trabajos realizados por Gregory y Leibniz no eran suficientes para que el concepto de función sea considerado como objeto matemático.

Lo que se puede llamar la emergencia de un nuevo objeto matemático (función) con su simbología y significado propio se da a partir de Leonard Euler, para quién dicho concepto es lo fundamental para la consolidación del análisis. En este sentido Euler en su obra *Introductio in analysin infinitorum (1748)* intenta desligar al término función de todo referente geométrico y algebraico puesto que, como se verá posteriormente, su noción con respecto al concepto de función se basa fundamentalmente en la idea de expresión analítica, la cual puede estar compuesta de una cantidad infinita de términos,[18] además intenta desligar al concepto de función de la noción de movimiento la cual, como se mencionó en la sección 1.1.1, fue introducida por Descartes mediante su método de coordenadas.

El concepto de función se encuentra en la base de la construcción teórica de Euler, con quien se constituye el concepto central del análisis, de hecho, antes de Euler no se podía hablar del análisis como una disciplina independiente, por ejemplo para D'Alambert:

> *El análisis es el método utilizado para resolver problemas matemáticos al reducirlos a ecuaciones. Para resolver todos los problemas, el análisis utiliza la ayuda del álgebra o del cálculo de las magnitudes en general; por eso, estas dos palabras, análisis-álgebra se consideran a menudo como sinónimos.*[19]

En general, el análisis consistía en un conjunto de métodos para resolver problemas en los cuales se manejaban cantidades geométricas variables. Sin embargo, las curvas

[18]Cantidad infinita de términos, hace referencia a las series infinitas de potencias las cuales introduce Euler en su *Introductio.*

[19]Recalde [7], pág. 11

trascendentes[20] planteaban problemas que escapaban al ámbito del álgebra, los cálculos donde intervenían logaritmos, senos y cosenos se fueron tornando cada vez más complicados con la sola intervención de las operaciones aritméticas que eran las únicas operaciones las cuales contaban con algoritmos operatorios. Se hacía necesario encontrar métodos que permitieran caracterizar cualquier tipo de curva, ya sea de tipo algebraico o trascendente. Dichos métodos tenían una estrecha relación con algo que los matemáticos de ese periodo, habían tratado de eludir por todos los medios: *El Infinito*.

Como se mencionó el concepto de función de Euler, esta ligado a la idea de expresión analítica, así se aborda de alguna manera el problema del infinito al proponer que:

> *El análisis es una rama de las matemáticas cuyo campo de acción son las funciones.*[21]

Hasta ahora, se ha presentado un pequeño recorrido historiográfico con el cual se ha querido mostrar cómo ha evolucionado el concepto de función tomando como punto de partida el método de coordenadas de Descartes hasta llegar a la obra de Euler.

En la siguiente sección se presenta algunos datos de la vida de Euler, quién se dio a conocer en el mundo matemático por su gran capacidad para abordar todas las ramas tanto de la matemática pura como de la matemática aplicada desde los niveles más elementales, hasta los más avanzados. Complementariamente, es importante señalar que Euler no sólo contribuyó con sus estudios en el campo de las matemáticas, sino también a otros campos de la ciencia como la teología, la medicina, la física, entre otras lo cual lo llevó a ser una de las personalidades más importantes en la Academia de San Petersburgo.

Puesto que uno de los aportes más significativos de Euler a las matemáticas es la obra: *Introductio in analysin infinitorum*; se presenta a continuación un análisis de la obra en

[20]Las curvas trascendentes de Euler son aquellas curvas que no se basan en operaciones algebraicas.
[21]Recalde [7], pág. 11

mención en lo concerniente al concepto de función, con la cual Euler empieza su trabajo de consolidación del análisis como rama independiente de las matemáticas. Esta obra, se puede considerar la obra más representativa en toda la carrera de éste gran matemático del siglo XVIII puesto que marca el punto de partida en lo que se puede llamar una definición formal del concepto de función.

1.2. La obra de Leonard Euler (1707 - 1783)

Leonard Euler matemático suizo, nació en 1707 en Basilea. Su padre, Paul Euler fue un pastor pobre apasionado por las matemáticas y quiso que su hijo siguiera sus pasos eclesiásticos. Sin embargo, Leonard en la Universidad de Basilea adquirió el gusto de su padre por las matemáticas, estudió bajo la influencia de Johan Bernoulli y obtuvo el grado científico de maestro. A la edad de 20 años viajó a Rusia para trabajar en la Universidad de San Petersburgo, para ser reconocido posteriormente como uno de los matemáticos mas destacados de su época.

La herencia científica de Euler es, sin ninguna duda, vital en el campo de las matemáticas, pues desde su llegada a la Academia de Ciencias de San Petersburgo, la comunidad matemática se vio nutrida por las publicaciones de Euler en la revista *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*. Los editores de esta revista nunca se preocupaban por una eventual escasez de artículos para publicar, y afirmaban, que mientras la pluma de Euler permaneciese activa, esto jamás sucedería.[22] Como consecuencia de sus constantes trabajos e investigaciones, en el año de 1735 Euler perdió la vista de su ojo derecho, sin embargo, esto no le impidió seguir con su producción investigativa, y a pesar de haber perdido la vista totalmente en 1776 se conoce que sus obras ascienden a más de 886 libros y artículos con los cuales adquirió fama internacional y un sin número de galardones y menciones honoríficas.

De todos sus grandes trabajos, en este apartado se pretende reconocer la importancia que tuvo la obra titulada *Introductio in analysin infinitorum*, con la cual Euler ejerció una fuerte influencia en el campo del análisis, pues es en esta obra donde por primera vez, y como se verá más adelante, define de manera general el término función.[23]

[22]El argumento es de Boyer [2] cap. XXI, pág. 554

[23]Como ya se ha mencionado, para Euler el análisis es una rama de las matemáticas cuyo campo de acción son las funciones, motivándolo a establecer una definición de función que le permitiera moverse dentro de dicho campo.

El texto mencionado anteriormente está escrito a manera de proposiciones y su primer capítulo habla sobre las funciones en general, es decir, de sus propiedades, operaciones y expone, a grandes rasgos, la primera clasificación que Euler realiza de éstas.

Para empezar con el estudio de las funciones, en la proposición 1 de [4], se define una cantidad constante de la siguiente manera:

> *Una cantidad constante es una cantidad determinada la cual guarda siempre el mismo valor.*

Se entiende por cantidad determinada, como los números de todas las clases los cuales guardan el mismo valor constante una vez han sido asignados. Si se quiere representar cantidades constantes a través de símbolos se utilizan las letras iniciales del alfabeto como a, b, c. En álgebra, donde sólo cantidades fijas son consideradas, estas primeras letras del alfabeto usualmente denotan cantidades conocidas, mientras que las letras finales representan cantidades desconocidas.

Si a representa una cantidad constante bajo la noción de Euler, se tiene que a puede ser reemplazada por un número natural e incluso por un número complejo. Similar a como lo manifiesta Euler, actualmente una cantidad constante representa un número que por lo general, si la función es de variable real, pertenece al conjunto de los números reales, pero si la función es de variable compleja, la constante se toma dentro del conjunto de los números complejos. Así, mientras para Euler las constantes se pueden tomar de manera arbitraria, en la actualidad se debe tener en cuenta el conjunto en el cual se ha definido la función, para escoger de manera adecuada las constantes.

Una vez se ha definido cantidad constante, Euler en el segundo ítem de su *Introductio* define una cantidad variable como sigue:

> *Una cantidad variable es aquella que no está determinada o es universal, la cual puede tomar cualquier valor.*

Dado que todos los valores determinados pueden ser expresados como números, una cantidad variable se asume como todos los posibles números, es decir, los números de todas las clases. Por tal razón, en una cantidad variable están contenidas todas las cantidades determinadas.

Las cantidades de este tipo son usualmente representadas por las letras finales del alfabeto como x, y, z.

Siendo consecuente con sus definiciones, en el numeral 3 de *Introductio* Euler afirma que:

> *Una cantidad variable es determinada cuando un valor definido le es asignado.*

Por el numeral 2 de *Introductio*, una cantidad variable puede ser determinada de muchas maneras, puesto que absolutamente todos los números pueden ser sustituidos por ésta, por tal razón el signo de la cantidad variable puede ser cualquiera, así una cantidad variable abarca dentro de sí misma todos los números negativos y positivos, enteros y racionales, irracionales y trascendentes,[24] aún el cero y los números complejos no son excluidos del significado de cantidad variable.

Hay que señalar que Euler incorpora la noción de cantidad variable como una salida formal a la intuición de movimiento. Para Euler geométricamente, una cantidad variable se representa mediante una recta orientada y dotada de un origen. Sin embargo, la noción de movimiento, a pesar de la incorporación de las cantidades variables, aun sigue vigente en su definición de función.

[24]Actualmente, los números irracionales son aquellos reales que no admiten la representación de la forma $\frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$. Para Euler, los números irracionales, son aquellos números que se encuentran afectados por radicales. Por otra parte, los números trascendentes de Euler son aquellos que tiene una representación serie infinita, mientras que en la actualidad, los números trascendentes son aquellos números que no son soluciones de una una ecuación polinómica con coeficientes racionales.

Con la ayuda de las tres definiciones anteriores Euler prosigue a dar su definición de función en el numeral 4 así:

> *Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta, de cualquier manera que sea, de ésta misma cantidad y de números o de cantidades constantes*

De esta manera, toda expresión analítica en la cual todas las cantidades componentes excepto la variable z son constantes, será una función de z, por ejemplo:

$$a + 3z;\ az - 4z^2;\ az + b\sqrt{a^2 - z^2}$$

La idea de *expresión analítica* no se especifica en el texto de Euler, sin embargo en Recalde [7], pág. 12 se afirma, que expresión analítica bajo los términos de Euler se entiende como:

> *Una fórmula constituida a partir de las operaciones elementales de la aritmética, la composición de funciones, las series y los productos infinitos.*

Así por ejemplo

$$x^n, (x+a)^n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

representan expresiones analíticas, es decir, funciones dentro de esta concepción.

Luego de la definición de función que plantea Euler, se desprenden, en el resto del capítulo, todas las operaciones que son permitidas entre las funciones y el nombre que reciben de acuerdo a la estructura que ellas presentan. Euler afirma, en consecuencia del numeral 4 de su *Introductio*, que:

> *Una función en sí misma de una cantidad variable es una cantidad variable.*

Como es permitido sustituir todos los valores determinados por la cantidad variable, la función tomará innumerables valores determinados; por esta razón ningún valor de los cuales la función puede tomar es excluido, puesto que la cantidad variable puede tomar incluso valores complejos. Por ejemplo, si se considera la función $\sqrt{9-z^2}$ en la cual si se reemplaza la variable z solo por valores reales, nunca se obtendrá un valor más grande que 3, pero si se da a dicha variable valores complejos, por ejemplo $5i$, se obtiene de la función un número mayor que 3, y así, no hay valor el cual no pueda ser obtenido de la expresión $\sqrt{9-z^2}$. Sin embargo, existen algunas aparentes funciones las cuales representan un único valor, sin importar en que forma la cantidad variable sea combinada; esas funciones son:

$$z^0;\ 1^z;\ \frac{a^2-az}{a-z}$$

las cuales asumen la apariencia de funciones pero en realidad representan cantidades constantes.

Debido a esto, existe una diferencia fundamental en lo que puede ser considerada una expresión analítica o mejor una función, como cantidad variable o como simplemente una cantidad constante. Como se vio en el párrafo anterior esto depende de la forma en la cual se expresa una determinada cantidad. Al respecto Euler, en el numeral 6 de *Introductio* plantea estas diferencias, las cuales dependen de las operaciones por las cuales las cantidades variables y las constantes pueden ser acomodadas y mezcladas al mismo tiempo. Estas operaciones son: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y extracción de raíces. Además de estas operaciones, las cuales usualmente son llamadas algebraicas, existen otras que son trascendentales; tales como exponenciales y logaritmos. La solución de ecuaciones también se considera una operación para las funciones.

Por otra parte, ciertas clases de funciones pueden ser notadas como múltiplos, tales como: $2z$; $3z$; $\frac{3}{5}z$; az; etc y potencias de z en sí mismas como: z^2; z^3; $z^{\frac{1}{2}}$; z^{-1}; etc. las cuales surgen de una sola operación que son en este caso la multiplicación y la potenciación respectivamente. Por tanto toda expresión formada por algún tipo de operación algebraica será distinguida con el nombre de función.

Se puede afirmar entonces, que la combinación de una cantidad variable con cantidades constantes mediante operaciones tanto algebraicas como trascendentales, recibe el nombre de expresión analítica y por tal razón lo que indica la palabra función bajo los términos de Euler no es más que un conjunto de operaciones donde no importa que valor sea asignado a la variable z (o cualquiera que sea la cantidad variable), la expresión analítica así formada se asocia a lo que Euler concibe como función.

El número de operaciones de una expresión analítica no es necesariamente limitado, por tanto el número de operaciones de la misma se puede considerar de carácter infinito. Por otra parte, las cantidades variables a las cuales hace referencia Euler, pueden tomar innumerables valores, entre ellos valores complejos, hecho que conlleva a que la función tome todos los valores determinados los cuales se han venido mencionando desde el inicio del texto de Euler [4]. Así, la noción de función que presenta Euler en su *Introductio* es diferente a la que se maneja en la actualidad y el punto clave de esta diferencia está en la incorporación de la teoría de conjuntos con la cual Euler no contaba; por ejemplo en la expresión z^0 se puede afirmar que bajo los términos de Euler dicha expresión representa una "aparente" función, pero en realidad no es más que una cantidad constante donde z puede ser reemplazada por cualquier valor incluso el cero. Sin embargo, y con la ayuda de la teoría de conjuntos actualmente podemos decir que z^0 es una función constante, siempre y cuando z sea diferente de cero (z $\in \mathbb{R}$ - $\{0\}$), es decir, la expresión z^0 representa una función si se restringe el dominio de la misma a todos los números reales excepto el cero, ya que en ese punto la función no estaría definida, pues el término 0^0 representa una indeterminación. Lo mismo ocurre si traemos a mención la expresión

$$\frac{a^2 - az}{a - z}$$

la cual no estaría definida cuando $z = a$.

Continuando con el estudio de la obra de Euler, en el numeral 7 de *Introductio*, se encuentra que:

> *Las funciones son divididas en algebraicas y trascendentes. Las primeras son construidas solamente con operaciones algebraicas, las últimas envuelven operaciones trascendentales.*

Los múltiplos y potencias de z, como se mencionó anteriormente, son funciones algebraicas; además de aquellas expresiones formadas por operaciones algebraicas, las cuales fueron recordadas previamente.

Por ejemplo, la expresión:

$$\frac{a + bz^n - c\sqrt{2z - z^2}}{az^2 - 3bz^3}$$

representa una función algebraica.

Ahora, una función será trascendente sólo si la "operación trascendental[25]", afecta a la cantidad variable, de lo contrario, si dicha operación sólo afecta a las cantidades constantes, la función será considerada algebraica. Así por ejemplo, si C denota la circunferencia de un círculo con radio igual a 1, C será una cantidad trascendental, no obstante las siguientes expresiones: $C + z$; Cz^2; $4z^C$; etc. son funciones algebraicas de z.

Como se menciona en el numeral 6 de [4], la diferencia principal de las funciones recae en las operaciones que inciden o afectan a la cantidad variable, así entonces, en el numeral 7 se inicia la clasificación de funciones de Euler teniendo muy en cuenta lo estipulado en el numeral 6. Lo que se presenta en el ítem 7 de [4], es el primer esbozo, realizado por Euler, de la clasificación de funciones en la cual se distingue en primera instancia

[25] La "operación trascendental" se asume como la aplicación sobre la variable z de un logaritmo, una exponencial o una función trigonométrica.

a las funciones algebraicas y a las trascendentes.

Siguiendo el recorrido del texto [4] se encuentra, en el ítem 8 que:

> *Las funciones algebraicas son divididas en funciones no irracionales e irracionales: las primeras son tales que la cantidad variable de ningún modo está envuelta con irracionalidad; las últimas son aquellas en las que la cantidad variable es afectada por signos radicales.*

Por tanto, en las funciones no-irracionales[26] no hay más operaciones que las de adición, sustracción, multiplicación, división y potencias en las cuales los exponentes son enteros, por ejemplo:

$$a + z;\ a - z;\ az;\ \frac{a^2 + z^2}{a + z};\ az^3 - bz^5$$

son funciones no-irracionales. Por otra parte, tales expresiones como:

$$\sqrt{z};\ a + \sqrt{a^2 - z^2};\ (a - 2z + z^2)^{\frac{1}{3}};\ \frac{a^2 - z\sqrt{a^2 + z^2}}{a + z}$$

son funciones irracionales de z.

Dentro de las funciones irracionales, es conveniente distinguir éstas, en funciones irracionales explícitas e implícitas. Las funciones explícitas son aquellas que son expresadas con signos radicales; como las presentadas en los ejemplos anteriores. Las implícitas son esas funciones irracionales las cuales surgen de la solución de ecuaciones. Así, Z es una función irracional implícita de z si está definida por una ecuación tal como:

$$Z^7 = az \text{ o } Z^2 = bz^5$$

[26]Para Euler, las funciones no irracionales hacen referencia a aquellas funciones que no están afectadas por signos radicales. Actualmente, este tipo de funciones son entendidas como funciones racionales, las cuales se expresan como un cociente de polinomios.

El numeral 9 expresa que:

> *Las funciones no irracionales son subdivididas en funciones polinomiales y funciones racionales.*

En una función polinomial la variable z no tiene exponentes negativos (cualquiera que sea), ni contiene expresiones fraccionarias en las cuales la variable z se encuentre en el denominador. Las funciones racionales son entendidas como aquellas en las que se presenta z en el denominador o exponentes negativos de z.
La fórmula general para funciones polinomiales es :

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \ldots$$ [27]

Es imposible pensar una función polinomial que no esté incluida en la expresión anterior.

Ahora, puesto que la suma de varias fracciones puede ser expresada como una sola fracción, todas las funciones racionales están contenidas en la siguiente fórmula:

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \ldots}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \epsilon z^4 + \zeta z^5 + \ldots}$$

donde las constantes $a, b, c, d,$ etc. y $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$ etc. sin importar por que valor sean sustituidas, no cambian la naturaleza de la función.

Respecto a esta subdivisión de las funciones que realiza Euler, muy poco de lo que se presenta tanto en sus definiciones como en sus ejemplos es acogido actualmente, por ejemplo, las funciones que Euler llama como funciones no-irracionales-racionales simplemente son funciones polinómicas, pues en realidad la racionalidad ya sea de un número o de un polinomio no implica más que una división. Sin embargo, algo que aún se

[27] Los puntos suspensivos, en la actualidad, no denotan infinidad de términos. Una función polinomial, actualmente, está regida por una cantidad finita de términos. Para Euler, sin embargo, los puntos suspensivos denotan una infinidad de términos, puesto que una función para él se construye de esta manera obedeciendo a su noción de expresión analítica.

usa y con bastante frecuencia en la actualidad es la notación con exponente fraccionario de un radical como se muestra en la expresión $(a - 2z + z^2)^{\frac{1}{3}}$, la cual representa una función irracional donde el índice de la raíz es 3.

Finalmente en el numeral 10 del texto [4], se encuentra que:

> *Es necesario hacer una distinción entre funciones uni-valuadas y multi-valuadas.*

Una función uni-valuada es aquella que sin importar que valor sea asignado a la variable z, un solo valor de la función es determinado. Por otro lado, una función multi-valuada es aquella que, para algún valor sustituido por la variable z la función determina varios valores.

De lo anterior se concluye que toda función no-irracional, ya sea polinomial o racional es una función uni-valuada, ya que cualquiera que sea el valor asignado a la variable z siempre se produce un solo valor de la función. Sin embargo las funciones irracionales son todas multi-valuadas, porque los signos radicales son ambiguos y dan valores pareados.[28]

Las funciones que Euler considera como uni-valuadas, en la actualidad representan a las funciones de variable real las cuales determinan un solo valor de la función cuando la variable independiente es reemplazada por un número el cual pertenece al conjunto de los números reales, de lo contrario si la función determina más de un valor la expresión así formada no es considerada función.

Con lo presentado hasta el momento del texto [4] se observa, que en el primer capítulo, Euler analiza detenidamente el concepto de función y para ello empieza definiendo sus

[28] Para Euler las funciones irracionales corresponden a funciones multivaluadas, puesto que asume dos signos para el radical, por ejemplo, $\sqrt{2z + z^2}$ es una función multivaluada de z, y mas exactamente una función bivaluada, la cual se obtiene de una ecuación cuadrática de la forma $Z^2 - PZ + Q$, donde P y Q representan funciones uni-valuadas, puesto que para un valor de la variable z se obtienen dos valores de la función Z a saber: $\sqrt{2z + z^2}$ y $-\sqrt{2z + z^2}$

nociones iniciales que son: las cantidades constantes y las cantidades variables. Con éstas nociones y con la idea de expresión analítica Euler define función en el numeral 4 de su *Introductio*.

Por tanto, una función conceptuada simplemente como una expresión analítica, se forma, según Euler mediante una clase de operaciones admisibles en las que entran las operaciones de la aritmética, las potencias y la extracción de raíces. En el resto del capítulo Euler se dedica a realizar la clasificación de funciones teniendo en cuenta la definición planteada en el numeral 4.

Se puede afirmar, que con la definición de función de Euler, se estaba limitando la clase de funciones con las cuales era permitido trabajar en el nuevo cálculo, pues al restringirse en la consideración de función solo a las expresiones analíticas, todas las funciones las considera representadas por una serie de potencias de la forma:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... + a_n z^n + ...$$

Estrechamente ligada a la noción de función estaba la noción de curva y para Euler existían dos tipos de curvas «continuas» y «discontinuas o mixtas». Según Euler la *continuidad* significaba inmutabilidad o invariabilidad de la ley de la ecuación determinante de la función en todo el dominio de valores de la variable, mientras que la *discontinuidad* de una función significaba un cambio de la ley analítica o la existencia de leyes diferentes sobre dos o más intervalos del dominio.[29] Estas últimas surgen del estudio de problemas físicos tales como el de la cuerda vibrante.

En el siguiente capítulo, se describe el problema histórico de la cuerda vibrante y se muestra que este motivó un cambio en la concepción de función de Euler.

[29] Las funciones discontinuas o mixtas corresponden a las actuales funciones continuas por partes.

Capítulo 2

El problema de la cuerda vibrante

El problema de la cuerda vibrante, uno de los problemas clásicos de la física matemática, fue de gran interés para muchos matemáticos tanto del siglo XVII como del siglo XVIII, ya que en las diferentes soluciones planteadas, se encontraban un sin número de funciones las cuales no hacían parte del nuevo cálculo. Es así como este problema se convirtió en un tema de discusión y de gran controversia para el círculo de matemáticos del siglo XVIII. De otro lado, surge en este mismo siglo la posibilidad de expresar una función arbitraria de x en términos de una serie trigonométrica que involucre senos y cosenos de múltiplos de la variable, por lo cual se buscaron soluciones para el problema mencionado en términos de estas series trigonométricas. Dicho problema, como se mencionó anteriormente, ya había sido tratado por científicos del siglo XVII como Galilei, Mersenne, Descartes, Huygens y otros. Taylor, uno de los matemáticos de esta época, dio la primera interpretación del problema en el año de 1715 cuando dedujo las ecuaciones de la oscilación de una cuerda partiendo de la condición de que la aceleración de un punto de la cuerda $\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)$, es inversamente proporcional al radio de curvatura.

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}{\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

Para resolver el problema de la cuerda vibrante, es necesario conocer en que consiste éste y por tal motivo, en las siguientes secciones se presenta la deducción de la ecuación que modela el movimiento de la cuerda y algunas de las posibles soluciones planteadas por grandes personajes de los siglos XVII y XVIII.

2.1. La Ecuación que modela el movimiento de la cuerda

El problema de la cuerda vibrante consistía en determinar el movimiento de una cuerda, es decir, calcular su posición, velocidad y aceleración en cualquier instante de tiempo t dadas las condiciones de frontera las cuales expresan que los extremos, que en este caso son los puntos $x = 0$ y $x = \pi$, permanecen fijos y las condiciones iniciales que aseguran que para $t = 0$ la cuerda no tiene movimiento y que $y = f(x)$ es la forma inicial de la cuerda.

Para modelar la ecuación que determina el movimiento de la cuerda, se harán varias suposiciones, en primer lugar, supóngase que se tiene una cuerda flexible la cual se ha tensado sobre el eje x con una fuerza de tensión T y se encuentra en reposo. Si se introduce un pequeño desplazamiento $y(x,t)$, dependiente de x, se obtiene vibraciones y debido a éstas, dicho desplazamiento también dependerá del tiempo t.

Otra de las suposiciones, es que la cuerda sólo vibra en sentido vertical (ya que en realidad también existe un pequeño desplazamiento horizontal), y además, se supondrá que la fuerza de tensión permanece constante. Cabe aclarar que las suposiciones mencionadas anteriormente son buenas aproximaciones sólo si la cuerda se encuentra muy cerca de la posición horizontal, es decir, si la pendiente de la cuerda es pequeña en todas partes a lo largo de la cuerda.

Ahora, se considera la ecuación de la fuerza vertical para un pequeño segmento de la cuerda entre x y $x + \Delta x$ que en su posición de equilibrio tiene longitud Δx como se muestra en la figura 1.

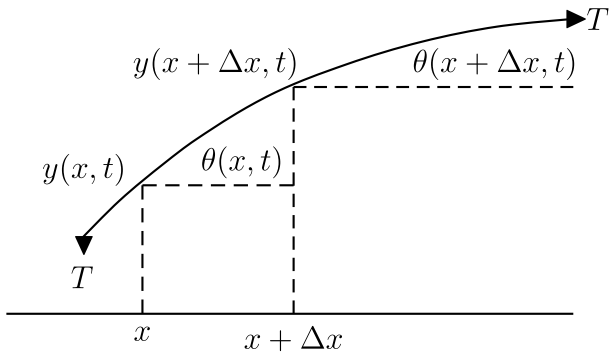

figura 1

La densidad de la cuerda es $\rho = \frac{m}{l}$, donde m es la masa de la cuerda y l representa la unidad de longitud de la cuerda. Por tanto, la masa para el pequeño segmento de cuerda queda determinada por: $m = \rho\Delta x$ ($l = \Delta x$ es la longitud de la cuerda cuando se encuentra en reposo), además, la posición del pequeño segmento será tratada como una masa puntual situada en $y(x,t)$. Supóngase ahora, que las únicas fuerzas que actúan sobre la cuerda son las fuerzas de tensión actuando en los dos extremos de la cuerda en la dirección indicada. Como se muestra en la figura 1, el extremo derecho de la cuerda es jalado hacia arriba por el resto de la cuerda, mientras que el extremo izquierdo de la cuerda es jalado hacia abajo. Esto debido a que la cuerda se encuentra sujeta en dos puntos del eje x.

Como la cuerda es flexible, la tensión T está dirigida a lo largo de la tangente, y si el ángulo que forma (en los puntos $y(x,t)$ y $y(x+\Delta x,t)$), con la horizontal es θ, la componente vertical de la tensión es $T\operatorname{sen}\theta$. Así, por la segunda ley del movimiento de Newton ($ma = F$) se tiene que:

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T\operatorname{sen}\theta(x,t) + T\operatorname{sen}\theta(x+\Delta x,t) \tag{1}$$

Dividiendo (1) entre Δx y tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$ se tiene:

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\,\text{lím}_{\Delta x\to 0}\frac{sen\theta(x+\Delta x,t) - \operatorname{sen}\theta(x,t)}{\Delta x} = T\frac{\partial}{\partial x}[\operatorname{sen}\theta(x,t)] \tag{2}$$

El lado derecho de la ecuación (2) es la derivad parcial de $sen\theta(x,t)$ con respecto a x tomando a t como constante.

Por otra parte, existe una relación entre el ángulo $\theta(x,t)$ y la pendiente $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ de la cuerda, es decir:

$$\tan\theta(x,t) = \frac{\partial y}{\partial x} \tag{3}$$

Como se mencionó al inicio de este capítulo, la validez de la ecuación (1) depende de varias suposiciones, como las tensiones constantes que son buenas aproximaciones para pequeños desplazamientos a partir de una cuerda tensa en posición horizontal, por tanto, las ecuaciones (1) y (2) sólo se deben utilizar si el ángulo, que para este caso se ha llamado $\theta(x,t)$, es pequeño. Si $\theta(x,t)$ es pequeño, entonces:

$$\tan\theta(x,t) \approx \operatorname{sen}\theta(x,t)$$

De esta manera es posible aproximar $sen\theta$ en (2) por (3). Así la ecuación (2) se convierte en:

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

Finalmente se obtiene:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{4}$$

Donde

$$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

La ecuación (4) actualmente es conocida como la ecuación de onda unidimensional donde una solución $y(x,t)$ debe satisfacer unas condiciones de frontera y unas condiciones iniciales. El problema de la cuerda vibrante consistía en dar solución a esta ecuación.

2.2. La solución planteada por Daniel Bernoulli

Daniel Bernoulli, uno de los miembros de la reconocida familia de los Bernoulli, nació en Holanda en el año de 1700. Este personaje entró en la discusión del problema de la cuerda vibrante, afirmando que: *dicha cuerda presenta en cada instante una combinación de vibraciones sinusoidales*[1].

En este apartado, se pretende esbozar la solución realizada por D. Bernoulli en el año de 1755.[2] Para ello, en primer lugar supóngase que se tiene una cuerda flexible la cual se ha tensado en el eje x y sujetado de los puntos $x = 0$ y $x = \pi$. D. Bernoulli plantea que las condiciones de frontera están dadas por:

$$y(0, t) = 0 \tag{5}$$

y

$$y(\pi, t) = 0 \tag{6}$$

mientras que las condiciones iniciales son:

$$\frac{\partial y}{\partial t} \mid_{t=0} = 0 \tag{7}$$

y

$$y(x, 0) = f(x) \tag{8}$$

Las condiciones de frontera (5) y (6), aseguran que los extremos de la cuerda se mantienen fijos en los puntos $x = 0$ y $x = \pi$, en tanto que las condiciones iniciales (7) y (8), aseguran que para $t = 0$, la cuerda no tiene movimiento y que $y = f(x)$ es su forma inicial.

Ahora, para dar una solución de la ecuación (4), D. Bernoulli utiliza el método de variables separables, es decir, va a suponer que la solución tiene la forma:

$$y(x, t) = u(x)v(t)$$

[1] Tomado de Grattan-Guinness [6] pág.130

[2] Solución planteada en Farfán Márquez [5] Capítulo II

donde las funciones $u(x)$ y $v(t)$ dependen de una sola de las variables independientes x y t respectivamente.

Ahora, reemplazando la anterior igualdad en la ecuación (4) se tiene:

$$v''(t)u(x) = a^2u''(x)v(t)$$

ó lo que es lo mismo:

$$\frac{1}{a^2}v''(t)u(x) = u''(x)v(t)$$

Aplicando el método de separación de variables se obtiene:

$$\frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{v''(t)}{v(t)} \tag{9}$$

El lado izquierdo de la ecuación (9) es una función que no depende de t, mientras que el lado derecho es una función que no depende de x, por tanto, esta relación solamente se cumple cuando ambos miembros de dicha ecuación son constantes. Si se llama a esa constante $-\lambda$, la ecuación (9) da paso a dos ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo grado a saber:

Si el lado derecho de la ecuación (9) es igual a $-\lambda$ se obtiene:

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0 \tag{10}$$

y si el lado izquierdo de la ecuación mencionada anteriormente es igual a $-\lambda$ se obtiene:

$$v''(t) + \lambda a^2v(t) = 0 \tag{11}$$

Ahora, para dar las soluciones de estas ecuaciones se debe tener en cuenta que la ecuación (10) está sujeta a las condiciones de frontera, $u(0) = 0$ y $u(\pi) = 0$ las cuales se obtienen de la relación $y(x,t) = u(x)v(t)$, es decir:

$$y(o,t) = u(0)v(t) \qquad\qquad y(\pi,t) = u(\pi)v(t)$$

$$0 = u(0)v(t) \qquad\qquad 0 = u(\pi)v(t)$$

$$0 = u(0) \qquad\qquad 0 = u(\pi)$$

mientras que la ecuación (11) obedece a las condiciones iniciales.

Así, parte del trabajo al resolver las ecuaciones (10) y (11) consiste en determinar los valores de λ para los cuales el problema puede resolverse. Para esto se estudiará los casos en que $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ y $\lambda > 0$.

Para el caso en que $\lambda = 0$, una solución para la ecuación (10) es :

$$u(x) = c_1 x + c_2$$

y si se incluye las condiciones $u(0) = 0 = u(\pi)$ se tiene que la única solución que satisface las condiciones de frontera es la solución trivial. Lo mismo sucede si $\lambda < 0$. Para el caso en que $\lambda > 0$, se tiene que dos soluciones son:

$$u_1(x) = sen\sqrt{\lambda}x$$

$$u_2(x) = cos\sqrt{\lambda}x$$

por lo tanto, cualquier combinación lineal de ellas también es solución de la ecuación (10). De esta manera, la solución para dicha ecuación cuando $\lambda > 0$ está dada por:

$$u(x) = c_1 sen\sqrt{\lambda}x + c_2 cos\sqrt{\lambda}x$$

y si se impone la condición $u(0) = 0$, la solución anterior se reduce a:

$$u(x) = c_1 sen\sqrt{\lambda}x$$

ahora de la condición $u(\pi) = 0$ se debe cumplir que $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$, es decir, $\sqrt{\lambda} = n$ para algún entero positivo n (ya que $\lambda > 0$), de donde $\lambda = n^2$. Por tanto λ debe tomar los valores $1,4,9,...$ (ó lo que es equivalente a $n = 1,2,3,...$),que son los valores en que $sen\, n\pi = 0$ y sus soluciones correspondientes están dadas por:

$$senx, sen2x, sen3x, ...$$

además, para cada constante a_i diferente de cero, las funciones:

$$a_1senx, a_2sen2x, a_3sen3x, ...$$

son las soluciones correspondientes para los mismos valores de λ.

Así entonces, las soluciones de la ecuación (10) cuando $\lambda > 0$ son:

$$u_n(x) = a_nsen\, nx \qquad n = 1,2,3,...$$

Análogamente se puede verificar que para los mismos valores de λ, y en particular cuando $\lambda > 0$, una solución para la ecuación (11) es:

$$v(t) = c_1sen\, nat + c_2cos\, nat$$

pero, con la condición inicial $v'(0) = 0$, la cual se obtiene de:

$$y(x,t) = u(x)v(t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}\,|_{t=0} = u(x)v'(0)$$

$$0 = u(x)v'(0)$$

$$0 = v'(0)$$

se tiene que:

$$v'(0) = c_1nacos\, na0 - c_2nasen\, na0$$

de donde:

$$v'(0) = c_1 na$$

$$0 = c_1 na$$

$$c_1 = 0$$

Por tanto las soluciones para la ecuación (11) están dadas por:

$$v_n(t) = a_n cos\ nat$$

Finalmente, como la solución planteada por Daniel Bernoulli para la ecuación que describe el movimiento de cuerda tiene la forma:

$$y(x,t) = u(x)v(t)$$

las soluciones para dicha ecuación son de la forma

$$y_n(x,t) = a_n sen\ nx\ cos\ nat; \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Se puede verificar, que toda combinación lineal de las anteriores funciones:

$$a_1 sen\ x\ cos\ at + a_2 sen\ 2x\ cos\ 2at + ... + a_n sen\ nx\ cos\ nat$$

además de ser solución de la ecuación (4), también satisface las condiciones (5), (6) y (7).

Si se extiende tal combinación al caso infinito (obviamente con sumatorias convergentes), se tiene que:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen\ nx\ cos\ nat$$

también es solución de la ecuación (4) y cumple con las condiciones (5), (6) y (7).

Por último si se impone la condición (8), es decir, que para $t = 0$, $y = f(x)$ es la forma inicial de la cuerda se tiene:

$$y(x,0) = a_1 sen\ x\ cos\ at + a_2 sen\ 2x\ cos\ 2at + ... + a_n sen\ nx\ cos\ nat + ...$$

es decir:

$$f(x) = a_1 sen\ x\ cos\ at + a_2 sen\ 2x\ cos\ 2at + ... + a_n sen\ nx\ cos\ nat$$

representa una familia de soluciones al problema de la cuerda vibrante.

Al analizar la solución anterior, se puede afirmar que bajo la condición inicial (8) que plantea D. Bernoulli, se ha obtenido la solución al problema de la cuerda vibrante partiendo del hecho de que $f(x)$ es la forma inicial de la cuerda y sobre dicha forma (de la cuerda) no se ha supuesto nada más, por tanto la forma inicial de la cuerda es arbitraria.

La solución que se ha expuesto en este apartado (que data del año 1755), pone en manifiesto que cualquier función arbitraria, en el sentido de Bernoulli, se puede representar a través de una serie trigonométrica infinita. Como $y(x, 0) = f(x)$ es la forma inicial de la cuerda, de la cual no se ha hecho ninguna suposición adicional, ésta es de hecho arbitraria, y por tanto según Bernoulli esta función solo debe admitir funciones como la expuesta en la solución al problema de la cuerda vibrante.

2.3. La solución planteada por Euler

La solución planteada por Daniel Bernoulli no tenía gran relevancia para Leonard Euler, pues en primer lugar señala que esa solución restringe la clase de funciones, que se deben admitir en la forma inicial de la cuerda, a las funciones que se pueden representar mediante una serie trigonométrica infinita. Al respecto, Euler plantea que se puede admitir una parábola en la forma inicial de la cuerda, además, afirma que dicha forma puede estar descrita por curvas que obedecen a la representación de un sin número de expresiones analíticas distintas entre sí.[3]

[3]Las curvas de este tipo fueron denominadas por Euler como curvas discontinuas las cuales se estudiarán en la sección 2.4, de esta manera algunas funciones definidas a trozos podían ser admitidas en la forma inicial de la cuerda.

Euler resolvió el problema de la cuerda vibrante en el año de 1748 afirmando que:

> *Toda expresión de la forma*
>
> $$y = f(x + at) + g(x - at)$$
>
> *donde f y g son funciones arbitrarias, es solución de la ecuación de onda:*
>
> $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Para verificar esto, Euler llama a $x + at = u$ y $x - at = v$. De esta manera se tiene que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 = \frac{\partial v}{\partial x} \qquad y \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial t}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}[f(u) + g(v)] = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} + g'(v)\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= f'(u) + g'(v) \end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(u)\frac{\partial u}{\partial x} + g''(v)\frac{\partial v}{\partial x} = f''(u) + g''(v)$$

Por otra parte

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[f(u) + g(v)] = f'(u)\frac{\partial u}{\partial t} + g'(v)\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$= af'(u) - ag'(v)$$

además:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 f''(u) + a^2 g''(v) = a^2(f''(u) + g''(v))$$

de donde:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

De esta manera, la expresión presentada por Euler es también solución de la ecuación que modela el movimiento de la cuerda, dejando en claro que la solución dada por D. Bernoulli no es más que un caso particular, pues esta solución es más general y admite una enorme cantidad de funciones las cuales pueden ser incluidas en la forma inicial de la cuerda.

2.4. La segunda definición de función de Euler

El problema de la cuerda vibrante puso bajo inspección los fundamentos sobre los cuales se apoyaba el análisis, tales como la teoría de funciones y la interpretación física de las soluciones matemáticas; y fue a través del mismo, que Euler tuvo la necesidad de considerar funciones más generales que las funciones analíticas: las funciones arbitrarias (o discontinuas), las cuales surgen de un estudio profundo sobre las curvas realizado por Euler en el trascurso de los años 1744 a 1748

> *Una línea curva continua es aquella cuya naturaleza se expresa por una sola función determinada de x. Pero, si una línea curva está compuesta de diferentes porciones BM, MD, DM, etc., determinadas por varias funciones de x, de modo que siendo una parte BM el resultado de una función, otra parte MD sea el de la segunda función, etc., llamamos a esta clase de líneas curvas discontinuas, porque no están formadas según una sola ley constante y están compuestas de porciones de diferentes curvas continuas.*[4]

[4]Farfán Márquez [5], pág 41

Así, considera funciones discontinuas a expresiones tales como:

$$
\begin{aligned}
y &= x \qquad\quad en \;\; [0, \frac{\pi}{2}] \\
y &= \pi - x \quad en \;\; [\frac{\pi}{2}, \pi]
\end{aligned}
$$

cuya gráfica se presenta en la figura 2:

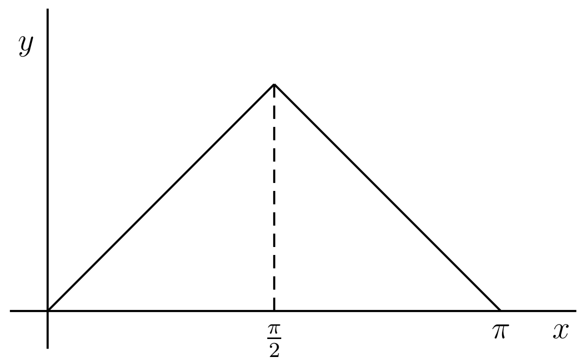

figura 2

Esta gráfica, cuya representación es poligonal es precisamente la función inicial que define la vibración de la cuerda al pulsarla por su punto medio. Este tipo de funciones (discontinuas) que intervenían en la solución de las cuerdas vibrantes, no estaban necesariamente definidas por una única expresión analítica. Por esta razón, Euler empieza a construir una noción más abstracta y universal del concepto de función, la cual se expone en su obra *Institutiones calculi differentialis*, publicada en el año de 1755. En esta obra Euler define función de la siguiente manera:

> *Si ciertas cantidades dependen de otras cantidades de tal manera que si las otras cambian, estas cantidades cambian también, entonces, tenemos la costumbre de llamar a estas cantidades funciones de estas últimas; esta denominación es la más extensa y contiene en ella misma todas las formas por las cuales una cantidad puede ser determinada por otras. Por consiguiente, si x designa una cantidad variable, entonces todas las otras cantidades que dependen de x, no importa de que manera, son llamadas funciones de x.* (Ruíz [9], pág. 129)

Por tanto "para Euler una función $y = f(x)$ estaba definida cuando en el sistema de coordenadas, x, y se da trazada una curva cualquiera".[5] Se puede observar que en esta nueva definición de Euler no aparece, explícitamente, la noción de expresión analítica, concepto que es fundamental en la primera definición que el presento y que fue expuesta en el capítulo 1, para ser reemplazada por una idea más general como la de correspondencia arbitraria. Es así como Euler realiza su clasificación de funciones distinguiendo esencialmente entre funciones continuas y funciones discontinuas. La clasificación de funciones realizada por Euler en 1755 se presenta en la figura 3.

Las funciones continuas corresponden a aquellas funciones determinadas por una sola ley de representación analítica,[6] mientras que las funciones discontinuas corresponden a aquellas funciones con representación precisa de varias expresiones analíticas[7].

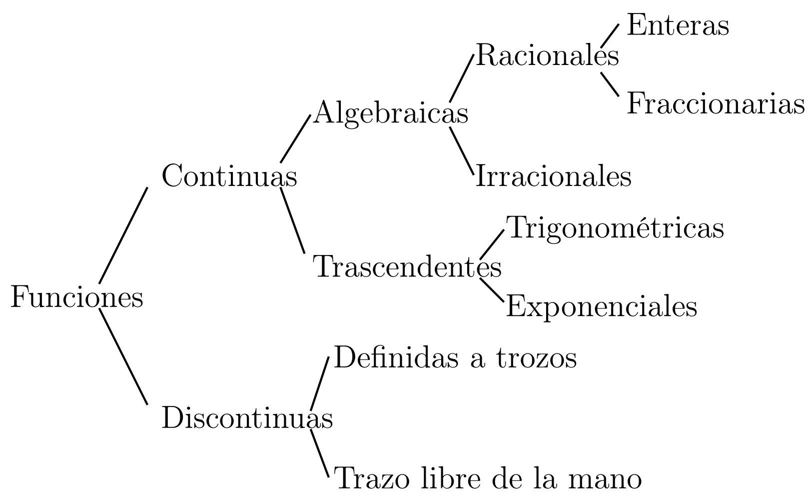

figura 3

[5] Como se plantea en [1], pág. 51, una curva cualquiera, hace referencia al grado de discontinuidad (en el sentido de Euler) que presenta la función.
Cabe señalar que la notación $f(x)$ utilizada hasta nuestros días, fue empleada por primera vez por Leonard Euler en 1740.

[6] Las funciones continuas son aquellas que obedecen a la primera definición de Euler.

[7] Las curvas discontinuas o definidas a trozos son aquellas que dan cuenta de curvas construidas de cualquier manera, como por ejemplo el trazo libre de la mano (las funciones construidas bajo el trazo de la mano se mencionan con más claridad en las conclusiones). Estas funciones se acogen a la segunda definición de Euler

Las funciones continuas pueden ser algebraicas o trascendentes. Las funciones algebraicas son aquellas en las cuales la variable está afectada por las operaciones finitas de suma, resta, multiplicación y división. Las funciones trascendentes como las trigonométricas y las exponencial son aquellas que admiten desarrollo en series de potencias.

Las funciones algebraicas se dividen en racionales e irracionales. Las racionales comprenden las funciones construidas bajo la adición, multiplicación, división y potencias enteras de la variable. Cuando las potencias son positivas, las funciones racionales se denominan enteras, de lo contrario cuando la variable figura en denominadores (potencias negativas), las funciones racionales se denominan fraccionarias. Las funciones irracionales son aquellas en las que la variable está afectada por radicales.

Capítulo 3

Conclusiones

Las conclusiones que se presentan a continuación, se fundamentan en las obras y/o comentarios de algunos historiadores en lo referente a la temática trabajada. Las obras se han referenciado a lo largo de este trabajo, y han servido para la recopilación historiográfica que se presenta en el primer capítulo. Este capítulo se ha dividido en tres partes: la primera, hace referencia al recorrido histórico, la segunda trata lo concerniente a la definición de función de Euler y finalmente se presentan los conclusiones relacionadas con el problema de la cuerda vibrante y su influencia en Euler para llevarlo a modificar su primera definición de función.

3.1. Acerca del recorrido histórico

1. Los trabajos realizados por Descartes tienen, una particular importancia en la evolución del concepto de función, especialmente en la concepción de Euler. Gracias a Descartes se introdujo en matemáticas la idea de las variables, y durante el siglo XVII se hablaba de la dependencia entre ellas, lo cual prefiguraba el concepto de función. La geometría analítica de Descartes fue uno de los avances más significativos para la evolución de la noción de función en el siglo XVII, debido a esto era posible interpretar algunos objetos geométricos y ciertos tipos de curvas a través de ecuaciones, además, gracias al método analítico se distinguían dos tipos de curvas: las que se podían modelar a través de una ecuación a las que Descartes llamó "curvas geométricas" y las "curvas mecánicas", las cuales, se

decía, no se podían modelar mediante una ecuación. Es así como en matemáticas se introduce, además de las variables, la noción de movimiento, noción que llevaría al surgimiento del cálculo que posteriormente debido a Euler, recibió el nombre de análisis infinitesimal.

2. Para Newton, el movimiento debe ser uno de los objetos de estudio en matemáticas, y para él, las matemáticas son una herramienta que le permite abordar los problemas de la ciencia. Es así, como a partir de este razonamiento que Newton publica su *Tratado de método de series y fluxiones* el cual contiene su tratado de fluxiones donde considera a las variables dependientes como cantidades que transcurren de forma continua y poseen una velocidad de cambio dejando en claro que el movimiento es la parte esencial en sus investigaciones referentes al cálculo. Los trabajos realizados por Newton tienen una fuerte influencia de los trabajos de Descartes puesto que, como se mencionó en el apartado 1.1.2, su principal objeto de estudio es el movimiento y utiliza el método analítico para designar la dependencia entre las relaciones funcionales las cuales son los primeros indicios de la noción analítica de función.

3. A Leibniz se debe en gran medida el simbolismo que actualmente se maneja en el cálculo. Este expresa que la suma de pequeñas diferencias conduce a los problemas de cuadraturas, es decir, que las operaciones de diferenciación e integración (como se conocen en la actualidad), como se trató en el apartado 1.1.4, se consideran inversas. Leibniz, podía aplicar sus operadores a una cierta clase de funciones, y, hacia el año de 1673 utiliza la palabra función dentro del contexto del movimiento refiriéndose a dicho concepto, como a un problema del cálculo de ordenadas. Este contexto de función ligado al movimiento y a referentes geométricos quiso ser cambiado por Euler.

4. El concepto de función durante los siglos XVII y XVIII carecía de un "status" matemático, puesto que no había una definición formal que permitiera caracterizar cualquier tipo de curva. Por consiguiente, es claro que los intentos de varios

matemáticos de esta época por dar una definición de dicho concepto no eran suficientes para que sea considerado como un objeto matemático. Sin embargo hay que reconocer la importancia que tuvieron los aportes de Descartes, Newton, Leibniz, entre otros, en la concepción analítica desarrollada por Euler quien intenta desligar el concepto, planteado por los anteriores autores, del referente geométrico y físico presente en la idea de curva, puesto que con el término función se quería identificar un término totalmente autónomo. Por tanto se puede considerar que el desarrollo del análisis infinitesimal se debe en gran medida a Leonard Euler para quién el análisis era una rama de las matemáticas que se ocupa de las funciones, en este sentido para Euler antes de convertir el análisis en una rama independiente de las matemáticas, en primer lugar, era indispensable saber de que se trataba dicho campo y es así como propone su definición de función en términos de expresiones analíticas que le permite clasificar, en el texto [4], de manera retórica las funciones que el define como continuas.

3.2. De la primera definición de Euler

1. Según Recalde [7] página 13, en la primera definición de función, dada en el apartado 1.2, Euler concibe la continuidad para las funciones y para las curvas como una propiedad subordinada a la idea de expresión analítica. Para Euler la continuidad de una función no depende de la naturaleza de la curva que representa, sino más bien del hecho de que se pueda representar a partir de una única expresión analítica. Euler se centra en mostrar que toda expresión representada mediante una serie de potencias infinita determina una función, dejando de lado el gráfico de la misma.

2. En el texto [5], página 43, Farfán afirma que las curvas discontinuas de Euler no poseen una representación simple, es decir, no se pueden expresar a través de una sola expresión analítica y por tal razón, una curva de esta clase no corresponde a una función dentro del análisis de Euler, ya que este tipo de curvas

se catalogan como objetos compuestos, incluso como varios objetos o posiblemente una infinidad de ellos. De ésta manera se establece un circulo vicioso; la falta de una representación adecuada impide el manejo de las curvas discontinuas en el análisis, lo que restringe el concepto de función, recíprocamente, es el limitado concepto de función lo que impide dar una representación a las curvas discontinuas que surgen del problema físico de la cuerda vibrante.

La obra *Introductio* fue una de las obras más relevantes en el estudio del análisis durante el siglo XVIII, pues como se ha mencionado en este trabajo, en ella se plantea una primera definición formal de función que marcaría la pauta en las investigaciones de los matemáticos de esta época pues tuvo gran aceptación; además muestra el estudio de las funciones que Euler cataloga como continuas y que eran las únicas funciones con las cuales era posible trabajar en el análisis y cuyo distintivo (continuas) se debe a la definición de función que Euler plantea en este texto y que se mencionó en el apartado 1.2. Sin embargo, la definición de Euler planteada en [4] limita el tipo de curvas del nuevo cálculo, a las curvas representables mediante una sola expresión analítica y utiliza este "concepto" (expresión analítica) como la "única" herramienta para construir funciones. Por tal razón esta definición impide que las funciones discontinuas sean tratadas en el análisis pues para Euler este tipo de curvas no poseen una representación única.

3.3. Posteriores al problema de la cuerda vibrante

1. De acuerdo con el texto [5], el problema de la cuerda vibrante puso bajo inspección los fundamentos sobre los cuales se apoyaba el análisis, tales como la teoría de funciones, el papel del álgebra, la interpretación física de las soluciones matemáticas, entre otros, ya que el cálculo algebraico del siglo XVIII consistía básicamente en un calculo de operadores (diferenciación e integración), donde cualquier operador debía aplicarse a una función que obedeciera a una ley de

continuidad. Estas funciones, a las cuales era posible aplicar las operaciones del cálculo, eran las polinomiales, las funciones exponenciales y las trigonométricas, sin embargo, Euler en la solución al problema de la cuerda vibrante acoge funciones con picos, es decir, funciones que actualmente se consideran como no derivables, funciones que él catalogó como discontinuas y que eran el tipo de funciones que modelaban la solución al problema de la cuerda vibrante. Es así como el problema en mención motivó no solo a Euler sino a un sinnúmero de matemáticos a considerar la existencia de las funciones discontinuas y por ende ser tratadas en el análisis. Posteriormente, en el texto *Institutiones calculi differentialis,* Euler presenta una nueva definición de función la cual acoge tanto funciones continuas como discontinuas (la definición se presentó en el apartado 2.4)

2. La evolución del concepto de función se ha presentado a medida que se acoge funciones cada vez mas arbitrarias. La concepción de función arbitraria se relaciona con la idea del grado de discontinuidad de una función. Así, Bernoulli condiciona las funciones arbitrarias, que son solución del problema de la cuerda vibrante, al hecho de ser representadas por series trigonométricas, que permiten solo una cantidad finita de discontinuidades (discontinuidad en el sentido de Euler), o cambios de ley de formación en un intervalo acotado.

3. Las funciones como trazos libre de la mano se clasifican según Euler entre las funciones discontinuas. Este tipo de funciones hacen referencia, según Euler, a funciones arbitrarias, entendiendo por funciones arbitrarias como aquellas funciones con cierto grado de discontinuidad y entendiendo por discontinuidad en términos de Euler como el cambio de la ley analítica sobre dos o más intervalos del dominio. Sin embargo, las funciones discontinuas como el trazo libre de la mano no son tan generales, este tipo de funciones para Euler tienen cierta particularidad y es que son funciones poligonales y/o con picos, las que actualmente se conocen como funciones no derivables en al menos un punto. Esta aparente diferencia se puede observar en los siguientes gráficos:

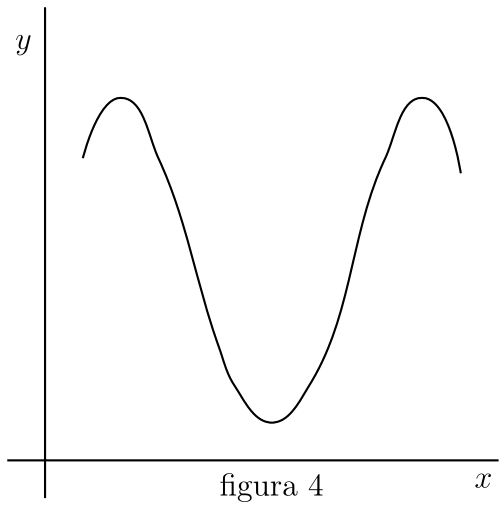

figura 4

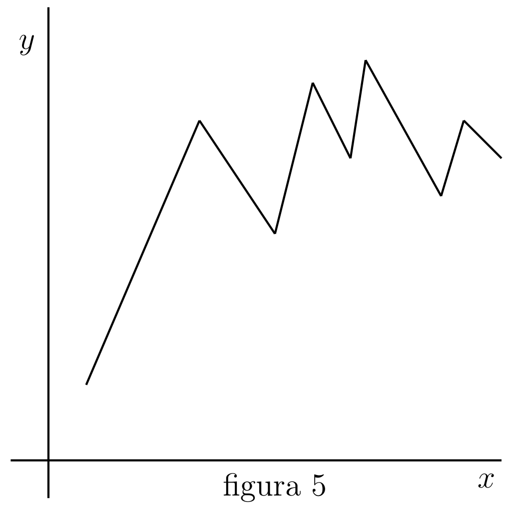

figura 5

Para Euler la figura 4 no representa un trazo libre de la mano, y por tanto corresponde a la gráfica de una función continua, pues para Euler este tipo de curvas se pueden modelar a través de una sola expresión analítica, en cambio en la actualidad esta curva es el prototipo de trazo libre de la mano, obedeciendo a lo que la misma expresión “trazo libre de la mano” indica. La figura 5 corresponde, para Euler, a un trazo libre de la mano pues presenta varios picos y por ende incita, según Euler, a un cambio en la ley de formación de la función y por tanto representa una función discontinua. Actualmente, este tipo de funciones son catalogadas como funciones no derivables en los puntos en los cuales presentan cambios bruscos, sin embargo representa una función continua.

4. Históricamente, la forma de representar las funcionas ha ido evolucionando, Euler por ejemplo representaba a las funciones (en [4]) mediante series de potencias infinitas y consideraba que estas funciones, que él llamaba continuas, eran las únicas funciones permitidas en el cálculo. Es claro entonces, que para Euler las funciones “continuas” son su prioridad aunque posteriormente reconoce la importancia de las funciones discontinuas en el análisis. Así, estas funciones discontinuas, las cuales poseen una representación “diferente” (en el sentido de Euler) a la de las funciones continuas, incursionan en el análisis como funciones

compuestas por diferentes funciones continuas. Se puede decir entonces, que la clasificación de funciones de Euler presentada en el apartado 2.4 no clasifica a las funciones sino mas bien su representación. La evolución de la representación se puede evidenciar claramente en Cauchy quién en el año de 1844 propuso una representación analítica para la función:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

esta función que actualmente se conoce como la función valor absoluto se clasificaba, según Euler, como una función discontinua pues obedece a la representación de dos expresiones analíticas. Cauchy afirma que la función valor absoluto puede ser representada por una sola ecuación en la que para todo $x \in \mathbb{R}$ la función será continua (en el sentido de Euler) y cuya representación es

$$f(x) = \sqrt{x^2}$$

De esta manera Cauchy hizo que la distinción de las funciones entre continuas y discontinuas expresada por Euler fuese insostenible y por tanto la forma de representar las funciones debería evolucionar hasta la forma en que se conoce actualmente.

Cronología del concepto de función en los siglos XVII y XVIII

En este apartado se muestra la evolución del concepto de función a manera de línea de tiempo, en los autores más influyentes del concepto de función. Para tener una visión mas general, acerca de la evolución del concepto de función, puede verse el apartado 6 de [7], que trata la cronología de la clasificación de funciones hasta principios del siglo XX.

1637 René Descartes, en *La géométrie*, mediante su método analítico clasifica las curvas en mecánicas y geométricas, según se puedan o no representar por una ecuación.

1666 Isaac Newton reconoce en la representación analítica de Descartes una herramienta útil para la representación analítica de función.

1667 James Gregory en su libro *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura*, presenta una primera definición de función como una cantidad que se obtiene de otras cantidades mediante una serie de operaciones algebraicas.

1673 Gottfried W. Leibniz, en el texto *Methodus Tangentium Inversa, seu de Functionibus* utilizó la palabra función para designar cualquier cantidad que varía de un punto a otro sobre una curva.

1671 Newton introduce una noción cinemática de las funciones donde define los fluentes (que representan actualmente nuestras variables dependientes) como cantidades que varían con el tiempo.

1748 Leonard Euler, en su *Introductio in analysin infinitorum*, define función como una expresión analítica compuesta, de cualquier manera que sea, de ésta misma cantidad y de números o de cantidades constantes.

1755 Euler, en el texto *Institutiones calculi differentialis*, define función de la siguiente manera: "Si ciertas cantidades dependen de otras cantidades de tal manera que si las otras cambian, estas cantidades cambian también, entonces, tenemos la costumbre de llamar a estas cantidades funciones de estas últimas; por consiguiente, si x designa una cantidad variable, entonces todas las otras cantidades que dependen de x, no importa de que manera, son llamadas funciones de x". Con esto Euler clasifica a las funciones en continuas y discontinuas.

Bibliografía

[1] Azcárate Giménez, C. Deulofeu Piquet, J. (1996). *Funciones y gráficas*, Madrid: Editorial Síntesis.

[2] Boyer, C. (1986). *História de la matemática*, Madrid: Alianza Universidad Textos.

[3] Campbell, S. Haberman, R. (1997). *Introducción a las ecuaciones diferenciales con problemas de valor de frontera*, McGraw-Hill

[4] Euler, L. (1988). *Introduction to analysis of the infinite (traducción de la obra: Introductio in analysin infinitorum (1748))*, New York: Editorial Springer-Verlag

[5] Fárfan Márquez, R. (1997). *Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*, Cd de Mexico: Grupo editorial Iberoamericana.

[6] Gratann-Guinness, I. (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*, Madrid: Alianza Editorial.

[7] Recalde, L. (2004). *La Teoría de Funciones de Baire*, Instituto de educación y pedagogía. Universidad del Valle. Cali-Colombia.

[8] Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las matemáticas*, Moscú: Editorial Mir.

[9] Ruíz Higeras, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didactico*, Universisdad de Jaén.