

“ESPEJISMOS GRAVITACIONALES”

EDWIN ALEXANDER DELGADO INSUASTY

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXÁCTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE FÍSICA
SAN JUAN DE PASTO
2009

“ESPEJISMOS GRAVITACIONALES”

EDWIN ALEXANDER DELGADO INSUASTY

Trabajo presentado como requisito parcial para
optar el título de Físico

Msc. ALBERTO QUIJANO VODNIZA
Director

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXÁCTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE FÍSICA
SAN JUAN DE PASTO
2009

Las ideas y conclusiones aportadas en este trabajo, son responsabilidad exclusiva del autor.

Artículo primero del acuerdo N°324 de octubre 11 de 1966 del Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de aceptación

Director

Jurado

Jurado

San Juan de Pasto, Enero de 2009

AGRADECIMIENTOS

A todos mil y mil gracias por haberme enseñado a describir el mundo con sus palabras, por hacer de la física la mas bella de las aventuras que exploran el “kosmos” en perfecta armonía con la razón.

Agradezco especialmente a mis padres por hacer de la educación una verdadera manifestación de vida.

Por último mis más profundos agradecimientos aquellas personas que con orgullo llamo amigos, en especial a David y su familia quienes hicieron de su casa un segundo hogar para mi. A Oscar, William, Alejandro, Diego, Luís, Álvaro quienes con su alegría impulsaron mi trabajo.

DEDICATORIA

A Dios:
quien me enseñó el camino
y estuvo a mi lado
en esta aventura cognitiva.

RESUMEN

Se realizó un estudio teórico del efecto lente gravitacional desde la perspectiva de la relatividad general. Como punto de partida, se describe el movimiento de rayos de luz en una variedad curva. Con los resultados obtenidos en este proceso, se aborda el problema de cómo la deflexión de la luz tiene lugar en un espacio-tiempo curvo. Después de ello se encuentra la métrica para una distribución de masa esféricamente simétrica y con esta métrica se obtienen las ecuaciones de movimiento y el ángulo de deflexión para un rayo de luz.

Por último, desde la teoría de las lentes gravitacionales (LG) se tratan las principales características de las lentes gravitacionales y se estudia el caso especial de una lente de Schwarzschild.

ABSTRACT

A theoretical study of the gravitational lens effect from general relativity's perspective was carried out. As a start, the light rays' motion is described on a curve variety. With the results obtained in this process, we approach the problem of how the deflection of light takes place. Next it is found the metrics for a spherically symmetric mass distribution and from this we get both the motion equations and the deflection angle. Finally, from the GL theory, the main characteristics of the lenses are handled for a Schwarzschild lens' special case.

TABLA DE CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	16
1. OBJETIVOS	17
1.1 GENERAL	17
1.2 ESPECÍFICOS	17
2. ESPACIO-TIEMPO CURVO	18
2.1 LA TEORIA DE EINSTEIN	19
2.1.1 Elementos de la relatividad general (RG).	20
2.1.2 Cinemática de espacios curvos	24
2.2 LENTES GRAVITACIONALES (LG)	28
2.2.1 Reseña histórica	28
2.2.2 Deflexión de la luz	30
3. VARIETADES SIMÉTRICAS	32
3.1 SIMETRÍA	32
3.1.1 Isometrías	32
3.2 VECTORES DE KILLING	33
3.3 TENSORES EN VARIETADES MAXIMALMENTE SIMÉTRICAS	36
3.4 MÉTRICA PARA UNA SIMETRÍA ESFÉRICA	38
3.4.1 Ecuación para la órbita de un rayo de luz en el campo de Schwarzschild	47
3.4.2 Deflexión de la luz por el sol	50
4 TEORÍA BASICA DE LAS LENTES GRAVITACIONALES	54
4.1 APROXIMACIONES	54

4.1.1 Aproximación de campo débil	54
4.1.2 Aproximación de la óptica geométrica	54
4.1.3 Aproximación de ángulo pequeño	54
4.1.4 Aproximación de la lente delgada	55
4.2 GEOMETRÍA DE LG	55
4.3 ÁNGULO DE DEFLEXIÓN	56
4.4 ECUACIÓN DE LA LENTE	59
4.5 FORMACIÓN DE IMAGENES	61
4.6 AMPLIFICACIÓN	62
5. CONCLUSIONES	66
RECOMENDACIONES	67
BIBLIOGRAFÍA	68
ANEXOS	70

LISTA DE CUADROS

	pág.
Cuadro 1. Resultados experimentales para la deflexión de la luz.	29

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Diagrama espacio-tiempo de dos observadores en movimiento relativo uniforme.	19
Figura 2. Transporte paralelo de un vector.	23
Figura 3. Deflexión de los rayos de luz provenientes de una fuente S por la acción de una masa deflectora M .	31
Figura 4. Deflexión de la luz por el sol.	52
Figura 5. Geometría de LG.	55
Figura 6. Deflexión de la luz en el plano $z - x$.	58
Figura 7. Esquema de LG para una masa puntual.	61
Figura 8. Distorsión del ángulo sólido subtendido por una fuente.	64
Figura 9. Esquema para la distancia diametral angular.	77

LISTA DE ANEXOS

	pág.
Anexo A. S^2 .	70
Anexo B. Límite Newtoniano.	72
Anexo C. Medidas de distancia en cosmología.	73

INTRODUCCIÓN

En el contexto de la relatividad general, la propagación de la luz es un acontecimiento físico que tiene una interpretación simple y lógica: los rayos de luz siguen las líneas rectas que admite la métrica del espacio-tiempo donde tiene lugar el movimiento. Sin embargo, tal como se manifiesta en el capítulo dos de este trabajo, la descripción del movimiento con una geometría diferente aquella intrínseca a la región en consideración, hace que un observador cuyo punto de comparación es la geometría de Minkowski, vea una trayectoria curva.

Siguiendo la línea de pensamiento de Einstein, se puede describir este evento astronómico dentro de una teoría linealizada, si embargo, como alternativa a esta aproximación en el capítulo tres se encuentra una solución analítica a las ecuaciones de campo de Einstein bajo la condición de simetría esférica. En estos términos la métrica del espacio-tiempo en la región externa a una distribución de masa esféricamente simétrica es descrita por la métrica de Schwarzschild. A partir de ella se encuentra la ecuación de la órbita para un rayo de luz y así el ángulo de deflexión respecto al camino rectilíneo que seguiría el rayo en ausencia de materia.

Por último en el capítulo cuatro se lleva a cabo una recopilación de los aspectos más importantes de la teoría de las lentes gravitacionales para el caso de una masa puntual que actúa como objeto deflector.

1. OBJETIVOS

1.1 OBJETIVO GENERAL

Estudiar el efecto lente gravitacional y el movimiento geodésico para fotones en un espacio-tiempo curvo.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Realizar un estudio de la geometría producida por una distribución de masa esféricamente simétrica.
- Encontrar la ecuación de movimiento para rayos de luz que atraviesan el campo producido por esta distribución de masa.
- Derivar el ángulo de deflexión que sufren los rayos de luz al pasar cerca de una estrella esféricamente simétrica que genera un potencial gravitacional estático.
- Realizar un estudio de las principales características de las lentes gravitacionales.

2. ESPACIO-TIEMPO CURVO

En nuestro intento de comprender el mundo, se ha llegado a la conclusión de que la mejor forma de acceder al conocimiento, es a través de las relaciones más básicas entre los diferentes acontecimientos que tienen lugar en él. Estas relaciones son consecuencias de las medidas de distancia y tiempo entre eventos. Espacio y tiempo son definidos operacionalmente¹ de tal manera que tenga sentido hablar de ellos. Desde esta perspectiva el tiempo es el lapso medido por un reloj sobre la línea de universo de algún observador, convirtiéndose así, en la relación más sencilla que liga dos eventos sobre la misma línea de universo.

Conocemos directamente solo lo que nos acontece, sin embargo nos aventuramos a describir realidades externas a la nuestra, sucesos que tienen lugar en otras líneas de universo, por consiguiente, si se desea conocer las separaciones espaciales y temporales entre un evento propio y uno externo, es necesario enviar un rayo de luz, que salga de nuestra línea de universo en un instante determinado (a), llegue al evento externo (c) en el instante en que este sucede, se refleje instantáneamente en él y que sea recibido en un evento bien definido (d) sobre nuestra línea de universo.

Los resultados obtenidos en este proceso de medición tienen dependencia del observador, dos observadores con (b) común a sus líneas de universo, asignaran distintas distancias y tiempos a la separación de este con un evento externo (c). No obstante podemos relacionar distancia y tiempo en tal forma que su resultado sea independiente del observador, obteniendo así una característica intrínseca entre eventos.

Cada región del universo es caracterizada por un conjunto de relaciones intrínsecas a los acontecimientos que tienen lugar en ella, dichos eventos definen y condicionan su geometría. De este modo es necesario determinar la geometría del espacio-tiempo en cada región, en cada punto del universo, a través de mediciones directas sobre él, “tal como lo plantea Riemann en su generalización a espacios multidimensionales de los resultados obtenidos por Gauss en la determinación de las propiedades geométricas de superficies 2- dimensionales”².

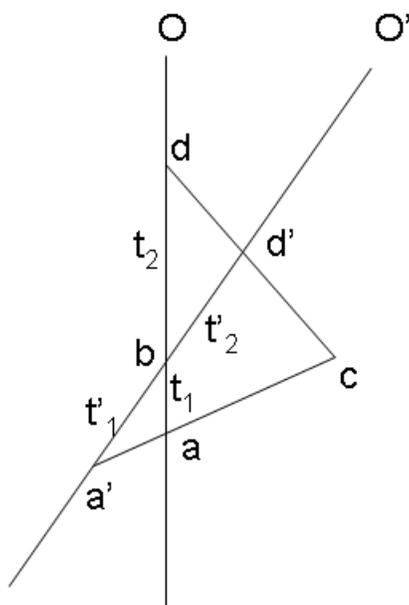
No se puede asumir una geometría válida en general, se la debe determinar a partir de los procesos físicos que tienen lugar en nuestro mundo. Dicha geometría, es independiente del observador y del sistema coordinado utilizado en su determinación, es una geometría dinámica que está en constante cambio debido a la presencia de masas o de cualquier manifestación de la energía y el momentum.

¹SEPULVEDA, Alonso. Los conceptos de la física : evolución histórica. 2 ed. Medellín : Universidad de Antioquia, 2003. p. 261.

²Ibid., p. 269.

De esta manera la geometría es un camino viable en la construcción física del mundo exterior.

Figura 1. Diagrama espacio-tiempo de dos observadores en movimiento relativo uniforme, los cuales asocian distintos tiempos y distancias entre dos eventos próximos (b,c). t_1 y t_2 son tiempos medidos sobre la línea de universo de un observador.



2.1 LA TEORÍA DE EINSTEIN

En 1915 Einstein presentó al mundo un conjunto de ideas revolucionarias, cuyos conceptos, claros a la razón y expresados en un lenguaje geométrico, constituyeron una perspectiva de la realidad que ampliaba los límites de los modelos existentes.

La relatividad general (RG), como se conoce a esta teoría del mundo físico, describe un modelo del espacio-tiempo que toma en cuenta los diversos aspectos que tienen influencia en la determinación de su geometría. Su construcción se basa en el hecho de que en una región de extensión infinitesimalmente pequeña las cosas se comportan como lo hacen en un espacio libre de gravitación (principio de equivalencia), así como también en el principio de covarianza general, el cual establece que las leyes de la física tienen la misma forma matemática para todos los observadores, cualquiera que sea su movimiento relativo³.

Sin embargo el paso clave en la construcción de RG es asociar los acontecimientos físicos con un continuum 4-dimensional al que llamamos espacio-tiempo, e iden-

³Ibid., p. 263.

tificar que su geometría es curva⁴ como consecuencia de la presencia de energía-momentum a su alrededor.

2.1.1 Elementos de la relatividad general (RG). A continuación se presentan sus principales elementos.

* La métrica.

Definición 1. Bajo el marco de la geometría Euclidiana, una métrica sobre un conjunto ϑ se define como una función

$$d : \vartheta \times \vartheta \longrightarrow \mathbb{R} \\ (P_1, P_2) \rightarrow d(P_1, P_2) ,$$

donde a cada pareja de elementos $P_1, P_2 \in \vartheta$ hace corresponder un número real positivo $d(P_1, P_2)$ que tiene las siguientes propiedades:

1. $d(P_1, P_2) = 0$ si y solo si $P_1 = P_2$.
2. Para cada pareja $P_1, P_2 \in \vartheta$, se tiene $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$.
3. Para toda terna $P_1, P_2, P_3 \in \vartheta$, se tiene $d(P_1, P_3) \leq d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$.

Un conjunto provisto de una métrica se llama espacio métrico, sus elementos se llaman puntos y el valor $d(P_1, P_2)$ se llama distancia entre los puntos P_1 y P_2 ⁵.

En RG la métrica juega dos papeles importantes: por una parte define la distinción local entre espacio y tiempo dependiendo de la relación entre eventos (espacialoide, temporaloide, luminoide).

La métrica determina la medida local de distancias de acuerdo a la relación

$$ds^2 = g_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu , \quad (1)$$

que representa el cuadrado del intervalo infinitesimal entre los puntos ξ^μ y $\xi^\mu + d\xi^\mu$, para una carta coordenada ξ^μ con $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Por otra parte la métrica⁶ define las trayectorias de las partículas (o rayos de luz) que caen libremente en una región del universo⁷. Desde esta perspectiva la métri-

⁴Esta no es una característica independiente de RG, la curvatura del espacio-tiempo es un hecho que puede obtenerse del principio de equivalencia (PE).

⁵HORVATH, Juan. Introducción a la topología general. Washington : Departamento de asuntos científicos y tecnológicos de la secretaría general de la organización de los estados americanos, 1969. p. 69.

⁶“Si $g_{\mu\nu}$ es la métrica medida por un reloj geometrodinámico, entonces el movimiento de las partículas de prueba libres de fuerzas externas, es a lo largo de las geodesicas de $g_{\mu\nu}$ ”.

⁷OHANIAN, Hans C. Gravitation and Spacetime. New York : W.W. Norton & Company, 1979. p. 203.

ca se constituye en un potencial gravitacional para un campo geométrico⁸.

* Variedad diferencial. Este es uno de los conceptos más fundamentales de la física y las matemáticas, “se puede entender como un espacio que puede ser curvo y tener una topología muy complicada, pero que localmente se mira como un espacio Euclidiano (o de Minkowski)”⁹.

En la construcción de la relatividad general se asume que el espacio-tiempo tiene las propiedades de un continuo y por consiguiente se identifica con un variedad 4-dimensional donde cada punto de este es rotulado con un conjunto de cuatro números reales ξ^μ a los que llamamos coordenadas del punto.

Definición 2. Una C^∞ - variedad diferencial (M) es un espacio topológico de Hausdorff que posee un atlas maximal.

Definición 3. Un espacio-tiempo es una variedad 4-dimensional equipada con una métrica Riemanniana con Signatura -2 ó (+, -, -, -)¹⁰.

* Conexión. Tan pronto como se define el concepto de variedad, se puede construir sobre él funciones, tomar sus derivadas, considerar caminos parametrizados y adicionar objetos geométricos tales como: Vectores, afinores, formas diferenciales y otras.

Pero si se quiere hacer física en esta variedad es necesario adicionar otras estructuras, tales como la métrica y la conexión afín.

Este último concepto surge en el intento de conectar las diferentes cantidades físicas (objetos geométricos) entre los espacios tangentes de los diferentes puntos de una variedad M_n . El proceso que permite esta conexión se conoce con el nombre de desplazamiento y consiste en transportar paralelamente las cantidades desde un espacio tangente local al punto ξ^μ a un espacio tangente al punto $\xi^\mu + d\xi^\mu$ ¹¹.

Un vector \mathcal{V}^μ paralelamente transportado desde ξ^μ a $\xi^\mu + d\xi^\mu$ cambia en una cantidad

$$d\mathcal{V}^\mu = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \mathcal{V}^\alpha d\xi^\beta, \quad (2)$$

donde el conjunto de 64 componentes $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ es la conexión afín.

Una vez dada la ley de transporte (2) la cual se puede extender a campos tensoriales de rango más alto y a densidades, se puede definir la derivada covariante con respecto a Γ .

⁸SEPULVEDA, Op. cit., p. 276.

⁹CARROLL, Sean M. gr-qc/9712019, 1997. p. 31.

¹⁰TEJEIRO, Juan Manuel. Gravitación y Cosmología. Bogotá : Universidad Nacional, 2000. p. 56.

¹¹SCHOUTEN, J. A. Tensor analysis for physicists. 2 ed. New York : General publishing company, 1989. p. 84.

Definición 4. Para un campo vectorial \mathcal{V}^μ la derivada covariante con respecto a la conexión $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ esta dada por

$$\mathcal{V}^\mu{}_{;\alpha} = \mathcal{V}^\mu{}_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \mathcal{V}^\beta. \quad (3)$$

Donde su significado físico puede expresarse diciendo que $\mathcal{V}^\mu{}_{;\alpha}$ es la razón de cambio del campo desde el punto de vista de un observador cuyo sistema de referencia local ha sido paralelamente transportado¹². Así, para definir la derivada covariante es necesario adicionar a nuestra variedad una conexión, la cual para una carta coordenada se especifica por un conjunto de coeficientes $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ que transforman de acuerdo a la ley

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu = \frac{\partial \bar{\xi}^\mu}{\partial \xi^\nu} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial \bar{\xi}^\alpha} \frac{\partial \xi^\tau}{\partial \bar{\xi}^\beta} \Gamma_{\sigma\tau}^\nu + \frac{\partial \bar{\xi}^\mu}{\partial \xi^\nu} \frac{\partial^2 \xi^\nu}{\partial \bar{\xi}^\alpha \partial \bar{\xi}^\beta}. \quad (4)$$

Estos coeficientes son elegidos de forma tal que la derivada covariante sea una cantidad tensorial. Evidentemente hay un gran número de conexiones que podríamos definir sobre nuestra variedad diferencial y cada una de ellas implica una noción diferente de la derivada covariante.

Aunque la métrica y la conexión son dos construcciones independientes sobre una variedad, en relatividad general cada métrica define una única conexión; para este fin la conexión debe satisfacer las siguientes condiciones¹³:

Simetría: $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \Gamma_{\beta\alpha}^\mu,$

Compatibilidad con la métrica: $g_{\mu\nu;\alpha} = 0.$

Estas condiciones permiten expresar las componentes de la conexión en términos de la métrica como

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\alpha\sigma,\beta} + g_{\beta\sigma,\alpha} - g_{\alpha\beta,\sigma}). \quad (5)$$

Esta conexión derivada desde la métrica se conoce como la conexión de Christoffel y sus componentes son los símbolos de Christoffel.

* **Curvatura.** En una variedad plana hay una conexión implícita que se usa todo el tiempo desde la métrica, aquí el resultado del transporte paralelo no depende del camino elegido. Así, cualquier dependencia del camino será una indicación de que la variedad en la que se esta trabajando es curva.

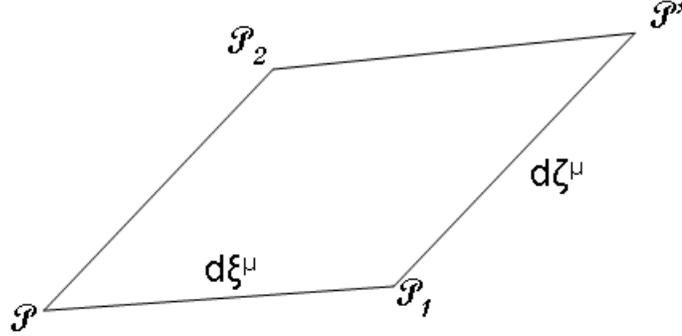
Si se transporta paralelamente un vector \mathcal{V}^α , alrededor de un lazo cerrado $\mathcal{P}\mathcal{P}_1\mathcal{P}'\mathcal{P}_2\mathcal{P}$ en una región lo suficientemente pequeña de una variedad provista con una

¹²Ibid., p. 84.

¹³CARROLL, Op. cit., p. 59.

conexión simétrica¹⁴.

Figura 2. Transporte paralelo de un vector.



Se encuentra que sus componentes cambian en una cantidad

$$\Delta \mathcal{V}^\alpha = R_{\beta\mu\nu}^\alpha \mathcal{V}^\beta d\xi^\nu d\zeta^\mu, \quad (6)$$

donde $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ es el afinor de Riemann

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = 2(\Gamma_{\beta[\nu,\mu]}^\alpha + \Gamma_{[\mu|\sigma}^\alpha \Gamma_{|\nu]\beta}^\sigma). \quad (7)$$

En RG la trayectoria que sigue una partícula de prueba que cae libremente en un campo gravitacional es descrita por la ecuación geodésica

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{d\xi^\alpha}{d\lambda} \frac{d\xi^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (8)$$

De esta manera se puede decir que la conexión gobierna la aceleración relativa de las partículas de prueba que se mueven únicamente bajo la acción de la gravedad; mientras que Riemann gobierna la diferencia en la aceleración de dos partículas que caen libremente la una muy cerca a la otra¹⁵.

* Ecuaciones de Campo de Einstein. La forma como la curvatura del espacio-tiempo reacciona a la presencia de energía-momentum es descrita por las ecuaciones de campo de Einstein

¹⁴OHANIAN, Op. cit., p. 241.

¹⁵MISNER, C. W. THORNE, K. S. WHEELER, J. A. Gravitation. New York : W. H. Freeman and Company, 1973. p. 29 - 37.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu}, \quad (9)$$

las cuales relacionan la curvatura del espacio-tiempo medida por el tensor de Einstein (\mathbf{G}) que se construye única y exclusivamente de la geometría del espacio-tiempo, con la distribución de materia y energía medida por el tensor energía-esfuerzo (\mathbf{T}). De esta manera “la geometría del espacio-tiempo es únicamente determinada por la energía-momentum y por las condiciones iniciales sobre la geometría”¹⁶.

En una región del universo, esta geometría se describe mediante la especificación de la métrica para todos los eventos que constituyen el espacio-tiempo allí, es decir mediante un conjunto de diez funciones $g_{\mu\nu}$, que pueden variar de un punto a otro. Seis de estas funciones se obtienen de las ecuaciones de campo, las otras representan cuatro grados de libertad en $g_{\mu\nu}$, cuya determinación dependerá de las coordenadas que se elija¹⁷.

* Tensor Energía - Esfuerzo. Las ecuaciones de campo tienen significado físico únicamente si se especifica el tensor energía-esfuerzo $T^{\alpha\beta}$ el cual en el vacío es cero.

En un marco inercial local, T^{00} representa la densidad de energía, cT^{0i} representa la densidad de flujo de energía y T^{ij} las componentes espaciales del tensor esfuerzo.

Para muchos propósitos astrofísicos, la materia del universo se idealiza a un fluido perfecto¹⁸, para el cual

$$T^{\alpha\beta} = (\rho c^2 + p)U^\alpha U^\beta - pg^{\alpha\beta}, \quad (10)$$

donde ρ es la densidad de masa y p la presión, ambas medidas por un observador comovil. U^α es la 4- velocidad normalizada a 1.

2.1.2 Cinemática de Espacios Curvos. Una vez se ha identificado la fuente de gravitación y se ha descrito la dinámica de la geometría por las ecuaciones de campo de Einstein, nos corresponde abordar el problema de cómo la materia responde a la geometría.

Para tal fin, se considera una región del universo libre de masas o cualquier manifestación de energía y/o momentum y se analiza el movimiento de una partícula

¹⁶OHANIAN, Op. cit., p. 262.

¹⁷MISNER, Op. cit., p. 404 - 409.

¹⁸Un fluido perfecto es un líquido o un gas que:

(1) Se mueve a través del espacio-tiempo con una 4- velocidad \mathbf{u} la cual puede variar de un evento a otro.

(2) Exhibe una densidad de masa- energía ρ y una presión isotrópica p en el marco inercial de cada elemento del fluido.

libre, desde el punto de vista de dos observadores: Uno de ellos en un marco de referencia inercial y el otro en un sistema acelerado (no inercial)¹⁹.

Para el observador inercial el movimiento de la partícula será rectilíneo y uniforme, en tanto el observador no inercial encontrara que el movimiento descrito por ella es acelerado y que por consiguiente su trayectoria puede ser curva.

Pero pronto nos damos cuenta que sobre la partícula no ha actuado ningún agente externo que al aplicarle una fuerza le produzca una aceleración. Así la aceleración en el marco no inercial surge del hecho de que la geometría en su sistema, es diferente a la geometría de Minkowski, es decir, el observador acelerado ha sufrido una curvatura aparente en el espacio-tiempo a su alrededor, asociada con el cambio de sistema de referencia (inercial a no inercial). De esta manera se debe considerar que el movimiento de la partícula de prueba, es inercial para ambos observadores. La aplicación del principio de equivalencia nos permite afirmar, que en presencia de masas, la aceleración de una partícula libre, detectada en marcos no inerciales, no es debida a “fuerzas gravitacionales”, sino a la curvatura del espacio-tiempo a través del cual tiene lugar el movimiento de la partícula.

A este nivel, el movimiento de partículas de prueba en variedades curvas, es un estado de movimiento natural, tan natural que la trayectoria seguida a través de este espacio-tiempo es independiente de la estructura y composición de la partícula que cae libremente.

Cada partícula sigue una curva $P(\lambda)$, parametrizada por un número λ , el cual depende de la elección del tiempo²⁰ de origen $P(0)$ y de las unidades de medida del tiempo.

Con el propósito de obtener una parametrización única conviene restringir λ , únicamente a transformaciones lineales

$$\lambda_{\text{nuevo}} = a\lambda_{\text{viejo}} + b, \quad (11)$$

donde “ b ” es el nuevo origen del tiempo y “ a ” la razón entre las nuevas unidades y las viejas²¹.

A estas trayectorias se les da el nombre de geodésicas y λ se conoce como parámetro afín; Así finalmente se obtiene que las partículas libres siguen geodésicas del espacio-tiempo donde se encuentran. Sin embargo, la atención debe centrarse en el movimiento de los rayos luminosos que recorren el universo. Para ello se considera²² un observador con tiempo propio τ , línea de universo $\xi^\mu(\tau)$ y 4-velocidad $U^\alpha = d\xi^\alpha/d\tau$, para quien las ondas electromagnéticas que se propagan en una re-

¹⁹SEPULVEDA, Op. cit., p. 275.

²⁰Este tiempo debe ser medido por un reloj geometrodinámico.

²¹MISNER, Op. cit., p. 243 - 246.

²²Ibid., p. 570 - 580.

gión libre de fuentes son localmente planas y monocromáticas (longitud de onda reducida $\lambda_r \ll$ escala \mathcal{L} sobre la cual cambian la amplitud, la longitud de onda, o la polarización; y $\lambda_r \ll \mathcal{R} \equiv$ radio medio de curvatura del espaciotiempo).

Así, la forma diferencial $A_\mu(\xi)$ que describe esta onda electromagnética puede expresarse como

$$A_\mu = \Re\{(a_\mu + \epsilon b_\mu + \epsilon^2 c_\mu + \dots)e^{i\theta/\epsilon}\}, \quad (12)$$

donde $\Re\{\dots\}$ denota la parte real de la expresión entre llaves, θ es un campo escalar (fase) real que cambia rápidamente de acuerdo con $\theta \approx$ distancia propagada / λ_r . El término $(a_\mu + \epsilon b_\mu + \epsilon^2 c_\mu + \dots)$ es la amplitud compleja y ϵ es un parámetro que indica que tan rápido los términos en (12) se aproximan a cero (ó infinito) cuando $\lambda_r /$ (mínimo de \mathcal{L} y \mathcal{R}) se aproxima a cero.

En este contexto, los rayos de luz se definen como las curvas $P(\lambda)$ normales a las superficies de fase constante ($\theta =$ constante) y K^μ representa el vector de onda el cual es tangente al rayo de luz en cada punto de este.

Dado que K^μ es normal a estas superficies, la ecuación diferencial para un rayo de luz es

$$\frac{d\xi^\mu}{d\lambda} = K^\mu(\xi). \quad (13)$$

Con estos elementos como herramientas, se puede insertar (12) en la ecuación de onda libre de fuentes $A^{\alpha;\beta}{}_{;\beta} - R^\alpha{}_\beta A^\beta = 0$ y a un orden de ϵ^{-2} obtener²³

$$\begin{aligned} \Re \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon^2} K^\beta K_\beta (a^\alpha + \epsilon b^\alpha + \epsilon^2 c^\alpha + \dots) - \frac{2i}{\epsilon} K^\beta (a^\alpha + \epsilon b^\alpha + \epsilon^2 c^\alpha + \dots)_{;\beta} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{i}{\epsilon} K^\beta{}_{;\beta} (a^\alpha + \epsilon b^\alpha + \epsilon^2 c^\alpha + \dots) - (a^\alpha + \epsilon b^\alpha + \epsilon^2 c^\alpha + \dots)_{;\beta}{}^\beta \right] \right. \end{aligned} \quad (14)$$

$$\left. + R^\alpha{}_\beta (a^\beta + \epsilon b^\beta + \epsilon^2 c^\beta + \dots) \right] e^{i\theta/\epsilon} \} = 0.$$

$$K^\beta K_\beta a^\alpha = 0. \quad (15)$$

Si se supone que a^α se anula únicamente sobre las hiper-superficies se tiene

$$K^\beta K_\beta = 0. \quad (16)$$

²³Ibid., p. 573.

es decir K^α es un vector nulo.

Diferenciando covariantemente el vector tangente de un rayo de luz (K^α) a lo largo del rayo se llega al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} K^\alpha{}_{;\beta} \frac{d\xi^\beta}{d\lambda} &= K^\beta K^\alpha{}_{;\beta} , \\ &= K^\beta g^{\alpha\theta} K_{\theta;\beta} . \end{aligned}$$

Puesto que $K_\beta = \theta_{,\beta}$ es el gradiente de un escalar: $\theta_{;\alpha\beta} = \theta_{;\beta\alpha}$, la expresión anterior resulta en

$$\begin{aligned} K^\beta g^{\alpha\theta} K_{\theta;\beta} &= K^\beta g^{\alpha\theta} K_{\beta;\theta} , \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha\theta} (K^\beta K_\beta)_{;\theta} , \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Donde se ha utilizado la expresión

$$\begin{aligned} (K^\beta K_\beta)_{;\theta} &= K^\beta K_{\beta;\theta} + K^\beta{}_{;\theta} K_\beta , \\ &= K^\beta K_{\beta;\theta} + g^{\beta\sigma} K_{\sigma;\theta} K_\beta , \\ &= K^\beta K_{\beta;\theta} + K^\sigma K_{\sigma;\theta} , \\ &= 2 K^\beta K_{\beta;\theta} . \end{aligned}$$

Entonces la ecuación de propagación de los rayos de luz es

$$K^\alpha{}_{;\beta} K^\beta = 0, \quad (17)$$

o

$$\left(\frac{d\xi^\alpha}{d\lambda} \right)_{;\beta} \frac{d\xi^\beta}{d\lambda} = 0,$$

$$\left[\left(\frac{d\xi^\alpha}{d\lambda} \right)_{,\beta} + \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha \frac{d\xi^\sigma}{d\lambda} \right] \frac{d\xi^\beta}{d\lambda} = 0,$$

$$\frac{d\xi^\beta}{d\lambda} \left(\frac{d\xi^\alpha}{d\lambda} \right)_{,\beta} + \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha \frac{d\xi^\sigma}{d\lambda} \frac{d\xi^\beta}{d\lambda} = 0,$$

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha \frac{d\xi^\sigma}{d\lambda} \frac{d\xi^\beta}{d\lambda} = 0.$$

Es decir los rayos de luz son geodésicas nulas de la métrica.

2.2 LENTES GRAVITACIONALES

“La propagación de la luz en nuestro universo es influenciada por los campos gravitacionales de objetos masivos. A este fenómeno se le conoce con el nombre de “lensamiento gravitacional” o espejismo gravitacional”²⁴.

2.2.1 Reseña histórica²⁵. Parece que Newton fue el primero en darse cuenta que los rayos de luz podían ser deflectados. Así lo manifiesta en su *Opticks*, publicada en 1704, mediante la pregunta “¿ Los cuerpos no actúan a distancia sobre la luz, su acción no curva los rayos y no es esta acción mas fuerte a menor distancia?”

En 1801 J. Soldner en un artículo titulado “Über die ablenkung eines lichtstrahls von seiner geradlinigen bewegung durch die attraktion eines weltkörpers, an welchem er nahe vorbeigeht”²⁶, hacia referencia al error cometido en la determinación de las posiciones angulares de las estrellas. Soldner calcula la órbita de un cuerpo con velocidad constante V , el cual pasa cerca de una masa esférica M , con parámetro de impacto b y encuentra que el cuerpo es deflectado un ángulo²⁷

$$\alpha = \frac{2GM}{bV^2}. \quad (18)$$

En 1911 Einstein obtuvo este valor para el caso de la luz desde el principio de equivalencia bajo el marco de la relatividad especial. Sin embargo Einstein desde la teoría general de relatividad encuentra una expresión bien definida, la cual podía predecir cómo el camino de un rayo de luz que pasa razante a la superficie de un objeto masivo esférico se altera.

²⁴PEACOCK, J. A. *Cosmological Physics*. New York : Cambridge university Press, 1999. p. 101.

²⁵SCHNEIDER, P. EHLERS, J. FALCO, E. E. *Gravitational lenses*. New York : Springer - Verlag, 1992. p. 1 - 10.

²⁶Concerniente a la deflexión de un rayo de luz desde su camino recto, debido a la atracción de un cuerpo masivo.

²⁷Este se conoce como el valor Newtoniano del ángulo de deflexión.

Para el caso de un objeto de masa M y radio R obtuvo el doble del valor Newtoniano.

$$\alpha = \frac{2GM}{Rc^2}. \quad (19)$$

Un análisis de los archivos de Einstein²⁸ muestra que él había investigado y derivado las ecuaciones fundamentales del “lensamiento estelar” en el año de 1912, antes de la publicación en 1936 de las notas sobre este aspecto de la física. En 1921, durante el eclipse total del 29 de Mayo, dos equipos de astrónomos, liderados por Sir Arthur Eddington, llevaron a cabo mediciones “simultaneas” en dos zonas Ecuatoriales: Sobral en el Brasil y la isla de Principe en el golfo de Guinea.

Comparando las posiciones relativas medidas durante el eclipse con aquellas usuales, se constató que las estrellas más cercanas al sol están ligeramente desplazadas con respecto a sus posiciones normales. Ambos grupos de astrónomos midieron valores similares, correspondientes a una pequeña variación de 1.75”, para estrellas ubicadas en el borde aparente del sol. Los resultados de estas expediciones hicieron de la relatividad general, una teoría creíble y popular.

Pruebas de este tipo fueron realizadas durante muchos eclipses confirmando la veracidad de los primeros resultados. En la siguiente tabla se muestran algunos resultados experimentales sobre la deflexión de la luz.

Cuadro 1: Datos experimentales de la deflexión de la luz

Observatorio	Eclipse	Sitio	θ (seg)
Greenwich	Mayo 29, 1919	Sobral	1.98 ± 0.16
Greenwich	Mayo 29, 1919	Principe	1.61 ± 0.40
Adelaide Greenwich	Sept. 21, 1922	Australia	1.77 ± 0.40
Victoria	Sept. 21, 1922	Australia	1.42 a 2.16
Lick	Sept. 21, 1922	Australia	1.72 ± 0.15
Lick	Sept. 21, 1922	Australia	1.82 ± 0.20
Potsdam	Mayo 9, 1929	Sumatra	2.24 ± 0.10
Sternberg	Junio 19, 1936	U.S.S.R	2.73 ± 0.31
Sendai	Junio 19, 1936	Japon	1.28 a 2.13
Yerkes	Mayo 20, 1947	Brasil	2.01 ± 0.27
Yerkes	Mayo 25, 1952	Sudan	1.70 ± 0.10
U. de Texas	Junio 30, 1973	Mauritania	1.58 ± 0.16

Fuente. OHANIAN, Hans C. Gravitation and Spacetime. New York : W: W Norton & Company, 1979. p. 124.

Desde entonces se ha continuado estudiando este evento y los aportes en este campo de la ciencia han sido significativos, entre ellos están los trabajos de Laplace,

²⁸SAUER, Tilman. Arch. Hist. Exact. Sci. D0110. 1007/ 500 407 - 007 - 0008 - 4, 2008. p. 1 - 6.

Cavendish, Eddington, Chowlson, Mandel quien fue el primero en mencionar que la acción de la gravedad de un cuerpo masivo sobre la luz es similar a la refracción de la luz producida por una lente óptica y la llamó “lente gravitacional”.

J. Lodge quien introdujo el término lente en el contexto de la deflexión gravitacional de la luz, hizo una importante restricción en cuanto en el uso de este término, por cuanto no es posible asociar con el campo gravitacional una distancia focal.

La posibilidad de utilizar las lentes gravitacionales como un telescopio cósmico fue mencionada por Fritz Zwicky en 1937 en su artículo “Nebulae as gravitational lens”; Allí indicaba el papel de las galaxias como objetos deflectores de luz, las cuales podrían producir múltiples imágenes de las fuentes de fondo, también señalaba la posibilidad de imágenes con forma de anillo, la amplificación del flujo y el uso de este fenómeno para entender la estructura a gran escala del universo.

En 1979 se paso de la especulación teórica a la evidencia experimental con el descubrimiento de la primera lente (galaxia) que involucraba a dos cuasares de espectros muy similares (0957 + 5619).

2.2.2 Deflexión de la luz. Todos nuestros conocimientos sobre el mundo provienen de las percepciones (información por medio de los órganos de los sentidos y de la interacción del ser con el universo) y las disposiciones en nuestra razón, las cuales contribuyen a determinar nuestro concepto de la realidad²⁹.

Todo lo que vemos, lo percibimos ante todo como un fenómeno en el tiempo y el espacio. Lo que vemos depende además de la vida individual, del grado de desarrollo cultural o del medio en que se viva, de la profundidad individual de pensamiento, etc. Así es necesario relacionar lo observado con el sistema que observa y ver como influye este en la observación, dependiendo de que se encuentre o no entre sus variables³⁰.

De acuerdo con Einstein el espacio-tiempo alrededor de un cuerpo masivo es curvo y lo único que hace la luz es seguir el camino mas recto posible dibujando aquella geometría. Resulta que esas trayectorias las vemos curvas en el espacio o cuando la geometría que se utiliza para describirlas no es la adecuada.

Un sistema lente gravitacional típico tiene como componentes: una fuente S , una masa deflectora M , un observador O , y una imagen I , tal como se presenta en la siguiente figura.

Para un rayo luminoso que pasa razante a la superficie del cuerpo³¹ y que inicia su movimiento en S , el espacio-tiempo cerca de la masa deflectora es curvo y por consiguiente la luz en su camino geodésico seguirá una trayectoria que la llevara

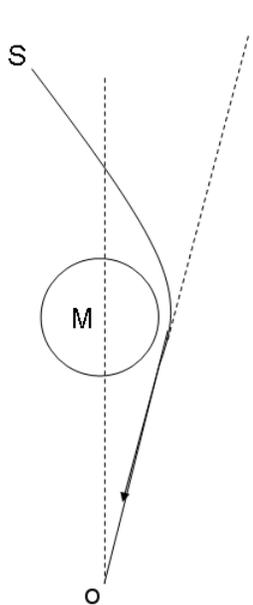
²⁹LAVALLE, Carlos. El hombre y el tiempo : de la conciencia al concepto. México : Limusa, 2006. p. 26 - 33.

³⁰Planteamiento filosófico Kantiano, para mas información ver GAARDER, Jostein. El Mundo de Sofía. Madrid : Patria, 1995. p. 393.

³¹Por simplicidad consideramos un cuerpo con simetría esférica.

hasta O , allí al observador le parecerá que la luz viene de I y no de S .³²

Figura 3. Deflexión de los rayos de luz provenientes de una fuente S por la acción de una masa deflectora M .



³²SEPULVEDA, Op. cit., p. 278 - 279.

3. VARIETADES SIMÉTRICAS

3.1 SIMETRÍA

Desde el punto de vista físico, el concepto de simetría, juega un papel fundamental en la formulación y desarrollo de las leyes de la naturaleza. La existencia de un grupo de simetrías provee información, algunas veces, muy detallada acerca de los sistemas físicos, aun cuando no se entiende qué exactamente son estos sistemas³³. En el mundo en que vivimos, los campos gravitacionales no son altamente simétricos, pero a menudo admiten un grupo de transformaciones, cuya información puede utilizarse para solucionar las ecuaciones de campo de Einstein.

En mecánica analítica, cuando las ecuaciones de movimiento se derivan desde un principio variacional, existe un procedimiento general que nos permite establecer leyes de conservación y constantes del movimiento como una consecuencia de las propiedades de invarianza, así las leyes de conservación y las reglas de selección en la naturaleza deben ser impuestas como simetrías del lagrangiano que restringen o prescriben su forma.

Definición 5. Una simetría de un tensor \mathbf{T} , es un difeomorfismo³⁴ ϕ , que deja al tensor invariante bajo su aplicación.

$$\phi_* \mathbf{T} = \mathbf{T}, \quad (20)$$

donde $\phi_* \mathbf{T}$ denota el pullback de \mathbf{T} por ϕ .

3.1.1 Isometrías³⁵. De todas las simetrías, las más importantes son las de la métrica. Se dice que una métrica $g_{\mu\nu}(\xi)$ es invariante en forma bajo una transformación infinitesimal de coordenadas $\xi^\mu \rightarrow \tilde{\xi}^\mu$, cuando la métrica transformada $\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{\xi})$ es la misma función de sus argumentos $\tilde{\xi}^\mu$ como la métrica $g_{\mu\nu}(\xi)$ lo es de ξ^μ , esto es

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\zeta) = g_{\mu\nu}(\zeta) \quad \text{Para todo } \zeta. \quad (21)$$

Para algún punto P , la ley de transformación que siguen las componentes de la métrica es dada por la relación

$$g_{\mu\nu}(\xi) = \frac{\partial \tilde{\xi}^\alpha}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial \tilde{\xi}^\beta}{\partial \xi^\nu} \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{\xi}). \quad (22)$$

³³GEORGI, Howard. Lie algebras in particle physics. 2 ed. s.l. : The Benjamin/ Cummings publishing company, 1982. p. 1.

³⁴Un difeomorfismo es una transformación coordenada activa.

³⁵WEINBERG, Steven. Gravitation and cosmology : principles and applications of the general theory of relativity. New York : John Wiley & Sons, 1972. p. 375 - 376.

La cual, bajo la restricción impuesta por (21), toma la forma

$$g_{\mu\nu}(\xi) = \frac{\partial \tilde{\xi}^\alpha}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial \tilde{\xi}^\beta}{\partial \xi^\nu} g_{\alpha\beta}(\tilde{\xi}). \quad (23)$$

De esta manera, toda transformación coordenada $\xi^\mu \rightarrow \tilde{\xi}^\mu$, la cual satisface la ecuación (23), es una simetría de la métrica y recibe el nombre especial de isometría.

3.2 VECTORES DE KILLING³⁶

En geometría diferencial, los vectores de Killing son la herramienta oficial para la descripción de la simetría, así en este nuevo lenguaje se puede obtener las constantes del movimiento y usar la simetría de la métrica para obtener información acerca de ella.

Consideremos una transformación infinitesimal de coordenadas

$$\xi^\mu \rightarrow \tilde{\xi}^\mu = \xi^\mu + \epsilon \eta^\mu(\xi) \quad \text{con} \quad |\epsilon| \ll 1. \quad (24)$$

Dado que ϵ es un infinitesimal, la sustitución de (24) en (23), resulta en

$$(\delta_\mu^\alpha + \epsilon \eta^\alpha_{,\mu})(\delta_\nu^\beta + \epsilon \eta^\beta_{,\nu})(g_{\alpha\beta} + \epsilon g_{\alpha\beta,\sigma} \eta^\sigma) = g_{\mu\nu}. \quad (25)$$

A este nivel todas las cantidades en (25), son funciones únicamente de ξ . Continuando con la simplificación de esta ecuación se obtiene:

$$\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta g_{\alpha\beta} + \epsilon \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta g_{\alpha\beta,\sigma} \eta^\sigma + \epsilon g_{\alpha\beta} \delta_\mu^\alpha \eta^\beta_{,\nu} + \epsilon g_{\alpha\beta} \delta_\nu^\beta \eta^\alpha_{,\mu} = g_{\mu\nu},$$

$$\eta^\beta_{,\nu} g_{\mu\beta} + \eta^\alpha_{,\mu} g_{\alpha\nu} + \eta^\sigma g_{\mu\nu,\sigma} = 0. \quad (26)$$

Esta última ecuación puede reescribirse en términos de las derivadas de las componentes covariantes $\eta_\mu = g_{\mu\beta} \eta^\beta$.

Dado que

$$\begin{aligned} \eta_{\mu,\nu} &= (g_{\mu\beta} \eta^\beta)_{,\nu}, \\ &= g_{\mu\beta} \eta^\beta_{,\nu} + g_{\mu\beta,\nu} \eta^\beta. \end{aligned}$$

³⁶Ibid., p. 376 - 380.

La sustitución de esta igualdad en (26) proporciona

$$\eta_{\mu,\nu} - g_{\mu\beta,\nu} \eta^\beta + \eta_{\nu,\mu} - g_{\alpha\nu,\mu} \eta^\alpha + \eta^\sigma g_{\mu\nu,\sigma} = 0,$$

$$\eta_{\mu,\nu} + \eta_{\nu,\mu} - \eta^\sigma [g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}] = 0. \quad (27)$$

Por otra parte, de la definición de la conexión en términos de la métrica

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} [g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}], \quad (28)$$

se puede encontrar una igualdad para los términos entre corchetes en la ecuación (27)

$$g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma} = 2 g_{\alpha\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha. \quad (29)$$

Insertando este resultado en (27) se tiene

$$\begin{aligned} \eta_{\mu,\nu} + \eta_{\nu,\mu} - 2\eta_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= 0, \\ \eta_{\mu;\nu} + \eta_{\nu;\mu} &= 0, \end{aligned}$$

$$\eta_{(\mu;\nu)} = 0. \quad (30)$$

Definición 6. Cualquier campo vectorial $\eta^\alpha(\xi)$ que satisface la ecuación (30), se conoce como campo vectorial de Killing y genera una familia de isometrías de la métrica.

De esta manera el problema de determinar las isometrías de la métrica se reduce a encontrar los vectores que satisfacen la ecuación de Killing $\eta_{(\mu;\nu)} = 0$.

Dados los valores de η_μ y $\eta_{\mu;\nu}$ en algún punto $P \in M$, se puede construir un campo general de Killing (si existe) como una serie de Taylor al rededor de P . De la fórmula: $2\eta_{\mu;[\alpha;\beta]} = R_{\mu\alpha\beta}^\lambda \eta_\lambda$, para el conmutador de las segundas derivadas parciales del campo $\eta_\mu(\xi)$ y la relación para la suma cíclica del afinor de Riemann $R^\alpha_{[\beta\mu\nu]} = 0$, se observa que el campo de Killing satisface la siguiente relación.

$$\eta_{\mu;\alpha;\beta} = R_{\mu\alpha\beta}^\lambda \eta_\lambda. \quad (31)$$

Para una variedad plana³⁷, la ecuación (31) se reduce a

³⁷Una variedad plana, es una variedad para la cual la curvatura escalar es nula.

$$\eta_{\mu; \alpha; \beta} = 0, \quad (32)$$

cuya solución general es de la forma

$$\eta_{\mu}(\xi) = a_{\mu} + b_{\mu\nu} \xi^{\nu}. \quad (33)$$

Donde a_{μ} y $b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}$ son constantes de integración.

Como $b_{\mu\nu}$ es antisimétrico en μ y ν , $\tilde{b}_{\mu\nu} = 2b_{\mu\nu}$, también será simétrico en estos índices. De esta manera podemos reescribir (33) como

$$\begin{aligned} \eta_{\mu} &= a_{\mu} + \tilde{b}_{\mu\nu} \xi^{\nu}, \\ &= a_{\mu} + b_{\mu\nu} \xi^{\nu} + b_{\mu\nu} \xi^{\nu}, \\ &= a_{\mu} + b_{\mu\nu} \xi^{\nu} - b_{\sigma\mu} \xi^{\sigma}, \\ &= a_{\lambda} \delta_{\mu}^{\lambda} + b_{\sigma\nu} (\delta_{\mu}^{\sigma} \xi^{\nu} - \delta_{\mu}^{\nu} \xi^{\sigma}). \end{aligned} \quad (34)$$

Así, se tiene un total de $n(n+1)/2$ vectores de Killing independientes, los cuales se pueden denotar como³⁸

$$\begin{aligned} \eta_{\mu}^{(\lambda)}(\xi) &= \delta_{\mu}^{\lambda} & \mu, \lambda &= 1, 2, 3, \dots, n. \\ \eta_{\mu}^{(\sigma\nu)} &= \delta_{\mu}^{\sigma} \xi^{\nu} - \delta_{\mu}^{\nu} \xi^{\sigma} & \mu, \sigma, \nu &= 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (35)$$

Donde los n vectores $\eta_{\mu}^{(\lambda)}$, representan translaciones y los $n(n-1)/2$ vectores $\eta_{\mu}^{(\sigma\nu)}$ están asociados a rotaciones para los cuales

$$\eta_{\mu; \alpha}^{(\sigma\nu)} = \eta_{\mu, \alpha}^{(\sigma\nu)} = \delta_{\mu}^{\sigma} \delta_{\alpha}^{\nu} - \delta_{\mu}^{\nu} \delta_{\alpha}^{\sigma}. \quad (36)$$

Definición 7. Una variedad de Riemann M , se dice que es homogénea, si existen isometrías infinitesimales que al actuar sobre un punto determinado $P \in M$, lo convierten en otro punto en su vecindad inmediata.

Esto es la métrica debe admitir vectores de Killing que tomen todos los valores posibles en P . Para una variedad n -dimensional se puede elegir un conjunto de n vectores linealmente independientes, tales que

$$\eta_{\mu}^{(\lambda)}(P) = \delta_{\mu}^{\lambda}. \quad (37)$$

Definición 8. Una variedad de Riemann M , se dice que es isotrópica alrededor de un punto $P \in M$, si existen isometrías infinitesimales que dejen el punto fijo y

³⁸Aquí, el índice μ denota las componentes de los vectores y los índices λ, σ, ν numeran los diferentes vectores.

para las cuales $\eta_{\mu;\alpha}(P)$ toma todos los valores posibles.

Así, para una variedad n -dimensional M se puede elegir un conjunto de $n(n-1)/2$ vectores de Killing $\eta_{\mu}^{(\sigma\nu)}(\xi)$ con

$$\begin{aligned}\eta_{\mu}^{(\sigma\nu)}(P) &= 0, \\ \eta_{\mu;\alpha}^{(\sigma\nu)}(P) &= \eta_{\mu,\alpha}^{(\sigma\nu)}(P) = \delta_{\mu}^{\sigma} \delta_{\alpha}^{\nu} - \delta_{\mu}^{\nu} \delta_{\alpha}^{\sigma}.\end{aligned}\quad (38)$$

Definición 9. Una métrica que admite el número máximo³⁹ de vectores de Killing, se dice que es maximalmente simétrica.

Una variedad que es homogénea e isotrópica alrededor de un punto P , admite $n(n+1)/2$ vectores de Killing $\eta_{\mu}^{(\lambda)}$ y $\eta_{\mu}^{(\sigma\nu)}$, los cuales son linealmente independientes, esto es

$$\begin{aligned}C_{\lambda} \eta_{\mu}^{(\lambda)} + C_{\sigma\nu} \eta_{\mu}^{(\sigma\nu)} &= 0, \\ C_{\sigma\nu} &= -C_{\nu\sigma},\end{aligned}\quad (39)$$

implica que $C_{\lambda} = 0$ y $C_{\sigma\nu} = 0$ en $P \in M$. Así, una variedad que es homogénea e isotrópica alrededor de un punto es maximalmente simétrica. Por otra parte el “recíproco” también es cierto, una variedad maximalmente simétrica es homogénea e isotrópica alrededor de todo punto.

3.3 TENSORES EN VARIEDADES MAXIMALMENTE SIMÉTRICAS⁴⁰

De acuerdo con la ecuación (26), un campo tensorial $A_{\mu\nu\dots}(\xi)$, es invariante en forma bajo una transformacion infinitesimal de coordenadas

$$\tilde{\xi}^{\mu} = \xi^{\mu} + \epsilon \eta^{\mu}(\xi) \quad \text{con} \quad |\epsilon| \ll 1.$$

si satisface a primer orden en ϵ , la siguiente ecuación:

$$\eta^{\lambda}{}_{,\mu} A_{\lambda\nu\dots}(\xi) + \eta^{\lambda}{}_{,\nu} A_{\mu\lambda\dots}(\xi) + \dots + \eta^{\lambda} A_{\mu\nu\dots,\lambda}(\xi) = 0. \quad (40)$$

Definición 10. Un tensor en una variedad maximalmente simétrica, se dice que es maximalmente invariante en forma, si satisface la ecuación (40), para todos los $n(n+1)/2$ vectores de Killing linealmente independientes.

³⁹Para una variedad n -dimensional el numero máximo de vectores de Killing linealmente independientes es $n(n+1)/2$.

⁴⁰Ibid., p. 392 - 395.

Utilizando la anterior definición y la ecuación (40), se debe centrar la atención a un tensor $A_{\mu\nu}(\xi)$, maximalmente invariante en forma de rango dos. Los resultados en este proceso serán de gran utilidad en la siguiente sección.

Con el propósito de simplificar los cálculos, es conveniente elegir un vector de Killing en algún punto $P \in M$, tal que

$$\eta^\lambda(P) = 0 \quad (41)$$

y

$$\eta_{\mu;\alpha}(P) = g_{\mu\beta} \eta^\beta{}_{,\alpha}|_{\xi=P}, \quad (42)$$

sea una matriz antisimétrica arbitraria. En estos términos la ecuación (40) toma la forma

$$\eta_{\alpha;\mu} A^\alpha{}_\nu + \eta_{\alpha;\nu} A_\mu{}^\alpha = 0, \quad (43)$$

la que se puede re-escribir como

$$\eta_{\alpha;\beta} \{ \delta_\mu{}^\beta A^\alpha{}_\nu + \delta_\nu{}^\beta A_\mu{}^\alpha \} = 0. \quad (44)$$

Multiplicando por 2 ambos lados de esta nueva ecuación se tiene

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha;\beta} \{ \delta_\mu{}^\beta A^\alpha{}_\nu + \delta_\nu{}^\beta A_\mu{}^\alpha \} + \eta_{\alpha;\beta} \{ \delta_\mu{}^\beta A^\alpha{}_\nu + \delta_\nu{}^\beta A_\mu{}^\alpha \} &= 0, \\ \eta_{\alpha;\beta} \{ \delta_\mu{}^\beta A^\alpha{}_\nu + \delta_\nu{}^\beta A_\mu{}^\alpha \} + \eta_{\beta;\alpha} \{ \delta_\mu{}^\alpha A^\beta{}_\nu + \delta_\nu{}^\alpha A_\mu{}^\beta \} &= 0, \\ \eta_{\alpha;\beta} \{ \delta_\mu{}^\beta A^\alpha{}_\nu + \delta_\nu{}^\beta A_\mu{}^\alpha - (\delta_\mu{}^\alpha A^\beta{}_\nu + \delta_\nu{}^\alpha A_\mu{}^\beta) \} &= 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Como $\eta_{\alpha;\beta}$ es una matriz arbitraria, los términos dentro del paréntesis en la última de las ecuaciones (45), deben ser simétricos en α y β :

$$\delta_\mu{}^\beta A^\alpha{}_\nu + \delta_\nu{}^\beta A_\mu{}^\alpha = \delta_\mu{}^\alpha A^\beta{}_\nu + \delta_\nu{}^\alpha A_\mu{}^\beta. \quad (46)$$

Contrayendo μ con β y luego bajando el índice α , se llega a la siguiente expresión:

$$(n-1) A_{\lambda\nu} + A_{\nu\lambda} = g_{\nu\lambda} A_\mu{}^\mu. \quad (47)$$

Sustrayendo la misma ecuación con λ y ν intercambiados se tiene

$$(n-2)(A_{\lambda\nu} - A_{\nu\lambda}) = 0. \quad (48)$$

Esta ecuación nos dice que para $n \geq 3$, el tensor $A_{\lambda\nu}$, es simétrico

$$A_{\lambda\nu} = A_{\nu\lambda}. \quad (49)$$

Así, se puede utilizar este resultado en la ecuación (47) para obtener⁴¹

$$\begin{aligned} A_{\lambda\nu} &= f g_{\lambda\nu}, \\ f &= \frac{A_{\mu}{}^{\mu}}{n}. \end{aligned} \quad (50)$$

Remplazando $A_{\lambda\nu} = f g_{\lambda\nu}$ en la ecuación (40), se encuentra la dependencia de la función f sobre las coordenadas ξ^{μ}

$$f[\eta^{\alpha}{}_{,\lambda} g_{\alpha\nu} + \eta^{\alpha}{}_{,\nu} g_{\lambda\alpha} + \eta^{\alpha} g_{\lambda\nu,\alpha}] + \eta^{\alpha} g_{\lambda\nu} f_{,\alpha} = 0. \quad (51)$$

De acuerdo con (26), el término entre corchetes se anula, esto es $g_{\lambda\nu}$ satisface la ecuación de Killing. Así

$$g_{\lambda\nu} \eta^{\alpha} f_{,\alpha} = 0. \quad (52)$$

Por otra parte la variedad diferencial M es maximalmente simétrica, por consiguiente en algún punto $P \in M$, η^{α} puede tomar un valor arbitrario y la ecuación (52) se reduce a

$$f_{,\alpha} = 0. \quad (53)$$

Como resultado se tiene que el único tensor de rango dos el cual es maximalmente invariante en forma es el tensor métrico o un producto de este con una constante.

3.4 MÉTRICA PARA UNA SIMETRÍA ESFÉRICA

Como punto de partida en la descripción de la geometría en el exterior de una distribución de masa esféricamente simétrica, se considera como verdaderos tres resultados muy conocidos en esta área:

1. El campo gravitacional alrededor de una distribución de masa esféricamente simétrica es estático y tiene simetría esférica⁴².
2. Un espacio-tiempo esféricamente simétrico puede descomponerse en esferas⁴³.

⁴¹El resultado de la ecuación (50), también es válido para la parte simétrica de $A_{\lambda\nu}$, cuando $n = 2$.

⁴²OHANIAN, Op. cit., p. 281 - 299.

⁴³CARROLL, Op. cit., p. 164 - 165.

3. Asintóticamente la geometría se reduce a la de Minkowski⁴⁴.

Así, estamos interesados en encontrar la forma que adopta la métrica $g_{\mu\nu}(\xi)$ del espacio-tiempo bajo la simetría maximal que presentan sus subespacios⁴⁵. Para ello se adopta un sistema de coordenadas apropiado⁴⁶.

Si la dimensión de la variedad espacio-tiempo es n , y m la de los subespacios, entonces se puede usar un conjunto de $(n - m)$ funciones coordenadas v^a para distinguir un subespacio de otro y un conjunto de (m) funciones coordenadas u^i , para indicar los diferentes puntos sobre el subespacio. Además es conveniente hacer un convenio sobre los índices: los índices a, b, c, \dots , para las coordenadas de v corren de 1 a $(n - m)$, y los índices i, j, k, l, \dots , para las coordenadas de u recorren los m valores restantes.

De esta manera la ecuación (26) da origen a tres ecuaciones para los $m(m + 1)/2$ vectores de Killing de los subespacios que generan isometrías de $g_{\mu\nu}(\xi)$.

Para $\mu = i, \nu = j$ tenemos

$$\eta^k{}_{,j}(u, v) g_{ik}(u, v) + \eta^k{}_{,i}(u, v) g_{kj}(u, v) + \eta^k(u, v) g_{i,j,k}(u, v) = 0. \quad (54)$$

La cual nos dice que para un valor fijo de v^a , $g_{ij}(u, v)$ es la métrica de una variedad m - dimensional con coordenadas u^i que admite vectores de Killing η^i . Dado el carácter maximal de estos subespacios, en cualquier punto u_0 se puede encontrar vectores $\eta^i(u, v)$ para los cuales $\eta^i(u_0, v)$ y $\eta_{i;j}(u_0, v)$ toman valores arbitrarios, sujetos únicamente a $\eta_{i;j} = -\eta_{j;i}$.

Para $\mu = a, \nu = b$ se tiene

$$\eta^k{}_{,b}(u, v) g_{ak}(u, v) + \eta^k{}_{,a}(u, v) g_{kb}(u, v) + \eta^k(u, v) g_{a,b,k}(u, v) = 0 \quad (55)$$

y Para $\mu = i, \nu = a$

$$\eta^k{}_{,a}(u, v) g_{ik}(u, v) + \eta^k{}_{,i}(u, v) g_{ka}(u, v) + \eta^k(u, v) g_{i,a,k}(u, v) = 0. \quad (56)$$

Con el fin de obtener información de estas ecuaciones, es conveniente elegir un nuevo conjunto de coordenadas ⁴⁷ $\bar{u}^i(u, v)$ para los subespacios maximalmente

⁴⁴MISNER, Op. cit., p. 594.

⁴⁵En nuestro caso, los subespacios son dos esferas. Más información acerca de la simetría maximal de S^2 la encontramos en el anexo A.

⁴⁶WEINBERG, Op. cit., p. 395 - 396.

⁴⁷La prueba de que siempre es posible construir tal sistema, la podemos encontrar en el capítulo 13 de WEINBERG, Steven. Gravitation and cosmology : Principles and applications of the general relativity. New York : John Wiley & Sons, 1972.

simétricos, tal que $\bar{g}_{i_a} = 0$. Aceptando que se esta trabajando en estas coordenadas, se puede suprimir las barras y remplazar $g_{i_a} = 0$ en las ecuaciones (55) y (56) para obtener

$$\eta^k g_{ab,k} = 0, \quad (57)$$

$$\eta^k_{,a} g_{ik} = 0. \quad (58)$$

Dado que g_{ik} no es singular, la ecuación (58) revela que los vectores de Killing η^k son independientes de las coordenadas v . Así para un valor fijo v_0 , los $m(m+1)/2$ vectores de Killing de $g_{ik}(u, v_0)$ son también vectores de Killing de $g_{ik}(u, v)$ para cualquier v .

Cada uno de estos vectores satisface la condición de Killing (54) para $v = v_0$ y para v en general:

$$\begin{aligned} \eta^k_{,j}(u) g_{ik}(u, v_0) + \eta^k_{,i}(u) g_{kj}(u, v_0) + \eta^k(u) g_{ij,k}(u, v_0) &= 0, \\ \eta^k_{,j}(u) g_{ik}(u, v) + \eta^k_{,i}(u) g_{kj}(u, v) + \eta^k(u) g_{ij,k}(u, v) &= 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Las anteriores ecuaciones muestran que $g_{ij}(u, v)$ es un tensor maximalmente invariante en forma en un variedad maximalmente simétrica con métrica $g_{ij}(u, v_0)$, lo cual de acuerdo con las ecuaciones (50) y (53) se traduce en el hecho que el tensor $g_{ij}(u, v)$ es proporcional a la métrica $g_{ij}(u, v_0)$ con un coeficiente independiente de u .

$$g_{ij}(u, v) = f(v) g_{ij}(u), \quad (60)$$

donde v_0 se ha retirado de $g_{ij}(u, v_0)$ argumentando que el valor de v puede fijarse a nuestro gusto.

Teniendo en cuenta que en cualquier punto u_0 se puede encontrar vectores de Killing para los cuales η^k puede tomar valores arbitrarios, la ecuación (57) muestra que g_{ab} es independiente de las coordenadas u , esto es

$$g_{ab,k} = 0. \quad (61)$$

Con estos resultados se construye el elemento de línea que gobierna la estructura de una variedad diferencial la cual tiene subespacios con simetría maximal.

$$\begin{aligned}
ds^2 &= g_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu , \\
&= g_{ij}(u, v) du^i du^j + g_{ib}(u, v) du^i dv^b + g_{aj}(u, v) dv^a du^j \\
&\quad + g_{ab}(v) dv^a dv^b , \\
&= g_{ab}(v) dv^a dv^b + f(v) g_{ij}(u) du^i du^j .
\end{aligned} \tag{62}$$

Dada la simetría esférica de nuestra variedad es conveniente trabajar en coordenadas polares t, r, θ, ϕ , eligiendo el origen en el centro de la distribución de masa. Las variables t y r se las utilizamos como coordenadas v y las variables θ y ϕ , como las coordenadas u de los subespacios maximalmente simétricos. En nuestro caso tales subespacios corresponden a 2- esferas para las cuales el elemento de línea $g_{ij}(u) du^i du^j$ toma la forma

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2. \tag{63}$$

En estos términos la ecuación (62) adopta la forma⁴⁸

$$\begin{aligned}
ds^2 &= g_{tt}(t, r) dt^2 + 2g_{rt}(t, r) dr dt + g_{rr}(t, r) dr^2 \\
&\quad + f(t, r) d\Omega^2 .
\end{aligned} \tag{64}$$

La condición que el campo se estático demanda que la métrica sea independiente del tiempo e invariante bajo transformaciones $t \rightarrow -t$, este último hecho prohíbe la existencia de las componentes métricas g_{rt} debido a que los términos $dr dt$ en (64) cambian de signo cuando llevamos a cabo una inversión temporal. Así el intervalo espacio-tiempo puede escribirse como

$$ds^2 = g_{tt}(r) dt^2 + g_{rr}(r) dr^2 + f(r) d\Omega^2 . \tag{65}$$

Teniendo en cuenta que la variedad de Minkowski

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2 , \tag{66}$$

es el resultado de (65) en una región lejos de la distribución de masa, podemos obtener información acerca de g_{tt} , g_{rr} y $f(r)$ en el siguiente sentido⁴⁹.

La signatura de la métrica de Minkowski nos muestra que $g_{tt} > 0$, $g_{rr} < 0$ y $f(r) < 0$. Por consiguiente se puede re-escribir el tensor métrico en la siguiente forma.

⁴⁸Los índices repetidos en la ecuación (64) no aplican el convenio de suma de Einstein.

⁴⁹CARROLL, Op. cit., p. 168.

$$ds^2 = e^{2\alpha(r)} dt^2 - e^{2\beta(r)} dr^2 - R^2(r) d\Omega^2. \quad (67)$$

Donde $\alpha(r)$, $\beta(r)$ y $R(r)$ son las nuevas funciones a determinar bajo las condiciones asintóticas

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \beta(r) &= 0. \end{aligned} \quad (68)$$

El último término en la ecuación (66) motiva a introducir una nueva coordenada $r'(r)$ definida por

$$r'(r) = R(r). \quad (69)$$

Con esta elección de la coordenada radial y con las primas retiradas, la ecuación (67) se reduce a

$$ds^2 = e^{2\alpha(r)} dt^2 - e^{2\beta(r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (70)$$

A este nivel es conveniente tomar en cuenta que las letras dadas a estas coordenadas no tienen un significado intrínseco ya que hasta el momento no conocemos la forma como ellas miden distancias y tiempos. Su elección en el desarrollo de la ecuación (70), solo fue motivada por las características del problema.

El significado geométrico de estas coordenadas se debe obtener de la misma métrica así⁵⁰.

1. En cada superficie 2- dimensional de constantes r y t , la distancia entre dos puntos cercanos es dada de acuerdo a (70) por

$$d\tilde{s}^2 = r^2 d\Omega^2. \quad (71)$$

Este es el mismo resultado que se tiene sobre una esfera de radio r utilizando las coordenadas estándar θ y ϕ . Por esta razón se concluye que θ y ϕ son ángulos sobre una esfera y su medida depende únicamente de la habilidad de dividir en partes iguales una circunferencia concéntrica con el origen establecido.

2. El área de esta esfera es

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (r d\theta)(r \text{sen } \theta d\phi) = 4\pi r^2. \quad (72)$$

⁵⁰MISNER, Op. cit., p. 595 - 597.

Por consiguiente se puede medir el área de la esfera compuesta por todos los puntos rotacionalmente equivalentes a un punto P y así obtener

$$r(P) = \left[\frac{A(P)}{4\pi} \right]^{1/2}. \quad (73)$$

En estas condiciones r es una coordenada radial la cual permite medir áreas superficiales.

3. t es el parámetro temporal cuya medida del tiempo esta condicionada por las siguientes propiedades geométricas.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} &= 0, \\ g_{rt} &= g_{\theta t} = g_{\phi t} = 0, \\ g_{tt} &= 1 \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (74)$$

Así, las variables r y t no son únicamente las variables radial y temporal, sino variables que tienen ciertas propiedades geométricas que las distinguen de otras coordenadas. El conjunto t, r, θ, ϕ con estas propiedades se le da el nombre de coordenadas de curvatura o coordenadas de Schwarzschild como son popularmente conocidas.

El siguiente paso en la solución de nuestro problema es determinar la forma explícita de las funciones $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ a partir de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío. En el vacío y sin constante cosmológica estas ecuaciones son equivalentes a la anulación de las componentes del tensor de Ricci⁵¹

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R = 0 \Leftrightarrow R_{\mu\nu} = 0. \quad (75)$$

Utilizando la siguiente notación para nuestras coordenadas

$$\begin{aligned} \xi^0 &= t, \\ \xi^1 &= r, \\ \xi^2 &= \theta, \\ \xi^3 &= \phi, \end{aligned} \quad (76)$$

será suficiente con resolver $R_{\mu\nu} = 0$ para la métrica

⁵¹TEJEIRO, Op. cit., p. 64.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\alpha(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\beta(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix} \quad (77)$$

Pero antes se debe encontrar los 40 símbolos de Christoffel independientes, que aparecen implícitamente en las ecuaciones de campo.

De la ecuación (5) y teniendo en cuenta la simetría de $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ en sus índices μ y ν , se obtiene que los símbolos de Christoffel diferentes de cero están dados por:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \alpha' , \\ \Gamma_{00}^1 &= \alpha' e^{2(\alpha-\beta)} , \\ \Gamma_{11}^1 &= \beta' , \\ \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-2\beta} , \\ \\ \Gamma_{33}^1 &= -r e^{-2\beta} \text{sen}^2 \theta , \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} , \\ \Gamma_{33}^2 &= -\text{sen} \theta \cos \theta , \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} , \\ \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \theta , \end{aligned} \quad (78)$$

donde se ha denotado las derivadas respecto a la coordenada radial por medio de primas. Utilizando los símbolos de Christoffel en la ecuación (7) para el afinor de Riemann se encuentran las componentes independientes diferentes de cero

$$\begin{aligned} R_{101}^0 &= -\alpha'' + \beta' \alpha' - (\alpha')^2 , \\ R_{202}^0 &= -r \alpha' e^{-2\beta} , \\ R_{303}^0 &= -r \alpha' e^{-2\beta} \text{sen}^2 \theta , \\ R_{212}^1 &= r \beta' e^{-2\beta} , \\ R_{313}^1 &= r \beta' e^{-2\beta} \text{sen}^2 \theta , \\ R_{323}^2 &= (1 - e^{-2\beta}) \text{sen}^2 \theta . \end{aligned} \quad (79)$$

Contrayendo los índices α y ν en el afinor $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ se puede encontrar las componentes independientes del tensor de Ricci. Las componentes de Ricci diferentes de cero reducen las diez ecuaciones independientes $R_{\mu\nu} = 0$ a

$$R_{00} = e^{2(\alpha-\beta)} \left\{ -\alpha'' + \alpha' \beta' - (\alpha')^2 - \frac{2\alpha'}{r} \right\} = 0, \quad (80)$$

$$R_{11} = \alpha'' - \alpha' \beta' + (\alpha')^2 - \frac{2\beta'}{r} = 0, \quad (81)$$

$$R_{22} = e^{-2\beta} \left\{ 1 + r(\alpha' - \beta') \right\} - 1 = 0, \quad (82)$$

$$R_{33} = e^{-2\beta} \operatorname{sen}^2 \theta \left\{ 1 + r(\alpha' - \beta') \right\} - \operatorname{sen}^2 \theta = 0. \quad (83)$$

La ecuación (80) puede simplificarse aun más si se tiene en cuenta que el término $e^{2(\alpha-\beta)}$ no se anula, así

$$\alpha'' - \alpha' \beta' + (\alpha')^2 + \frac{2\alpha'}{r} = 0. \quad (84)$$

Si ahora se resta las ecuaciones (81) y (84) se obtiene

$$\alpha' + \beta' = 0, \quad (85)$$

lo cual implica

$$\alpha + \beta = \text{constante}. \quad (86)$$

Recurriendo a las condiciones asintóticas dadas por la ecuación (68), se encuentra que la constante toma el valor de cero. Por consiguiente la anterior ecuación se reduce en:

$$\alpha = -\beta, \quad (87)$$

con este resultado la ecuación (82) toma la forma

$$e^{2\alpha} \left\{ 1 + 2r\alpha' \right\} = 1, \quad (88)$$

lo cual es equivalente a

$$\frac{d}{dr} (r e^{2\alpha}) = 1, \quad (89)$$

integrando se obtiene

$$e^{2\alpha} = 1 + \frac{C}{r}, \quad (90)$$

donde C es una constante de integración. Con estos resultados el intervalo relativista puede expresarse en la forma

$$ds^2 = \left(1 + \frac{C}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{C}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (91)$$

El último paso en este desarrollo consiste en interpretar la constante C , en términos de cantidades físicas: para tal fin, se debe recordar que la ecuación (90) es la solución esféricamente simétrica a las ecuaciones de campo de Einstein, por consiguiente describe el espacio-tiempo alrededor de un objeto con simetría esférica tal como una estrella o un planeta en nuestro sistema solar, en donde la física de Newton es una muy buena aproximación a la realidad. Así en el límite de bajas velocidades y campos débiles la ecuación (91) debe ser consistente con los resultados de la teoría Newtoniana⁵².

En este límite⁵³ la componente g_{00} del tensor métrico esta dada por

$$g_{00} = 1 + 2\phi, \quad (92)$$

donde

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r}, \quad (93)$$

es el potencial gravitacional en el exterior de una distribución esférica de masa M .

La comparación de (92) con la componente g_{00} de la ecuación (91) da la constante en términos de la masa y el radio⁵⁴ de la distribución de materia

$$C = -2GM. \quad (94)$$

Finalmente se encuentra

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (95)$$

Este resultado es comúnmente conocido como la métrica de Schwarzschild debido a que él fue el primero en encontrar este resultado para el caso especial de

⁵²Ibid., p. 73.

⁵³Ver anexo B.

⁵⁴Cuando se evalua (93) en la superficie de la distribución.

una masa estática con simetría esférica. La métrica dada por la ecuación (95), es en general una solución para la geometría del espacio-tiempo alrededor de una distribución de masa con simetría esférica independiente de si la distribución es estática o no.

La característica más significativa de esta solución tiene su origen en las singularidades que presentan las componentes métricas g_{00} y g_{11} .

La componente

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{r}, \quad (96)$$

tiende a infinito cuando la componente radial tiende a cero. Este hecho representa una singularidad verdadera del espacio-tiempo en el punto $r = 0$.

Por su parte la componente

$$g_{11} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}, \quad (97)$$

tiene una singularidad coordenada cuando la coordenada radial toma el valor del radio de Schwarzschild cuyo valor numérico es dado por

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \approx \frac{3M}{M_\odot} \text{ (km)}, \quad (98)$$

donde $M_\odot = 2 * 10^{30}$ kg representa la masa del sol. En la mayoría de los casos este valor corresponde a un radio en el interior del objeto en consideración, donde la solución de Schwarzschild no es aplicable.⁵⁵

3.4.1 Ecuación para la órbita de un rayo de luz en el campo de Schwarzschild. Como se mostró en la primera parte de este trabajo, los rayos de luz en presencia de un cuerpo masivo describen geodésicas nulas de la métrica. En particular, para una distribución de materia con simetría esférica las trayectorias de los rayos de luz serán las líneas mas rectas de la métrica de Schwarzschild.

Como punto de partida en la derivación de la ecuación de órbita, se considera la ecuación (17) en la forma

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha \frac{d\xi^\sigma}{d\lambda} \frac{d\xi^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (99)$$

La cual da lugar al siguiente conjunto de ecuaciones acopladas.

⁵⁵HASSANI, Sadri. Mathematical physics a modern introduction to its foundations. New York : Springer - Verlag, 1999. p.925.

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{2GM}{r(r-2GM)} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right) \left(\frac{dt}{d\lambda} \right) = 0, \quad (100)$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right) \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right) + 2 \cot \theta \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right) \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right) = 0, \quad (101)$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right) \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right) - \operatorname{sen} \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = 0, \quad (102)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\lambda^2} + (r-2GM) \frac{GM}{r^3} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \frac{GM}{r(r-2GM)} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 \\ - (r-2GM) \left\{ \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (103)$$

La ecuación de la órbita debe surgir al solucionar este conjunto de ecuaciones, lo cual se mira complicado y tedioso. Como paso alternativo⁵⁶ en la derivación de la ecuación de movimiento de un rayo de luz en la métrica de Schwarzschild, se considera la derivada covariante de la cantidad $g_{\mu\nu} \frac{d\xi^\mu}{d\lambda} \frac{d\xi^\nu}{d\lambda}$, a lo largo de la trayectoria del rayo de luz, esto es:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi^\mu}{d\lambda} \left(g_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha}{d\lambda} \frac{d\xi^\beta}{d\lambda} \right)_{;\mu} = \\ \frac{d\xi^\mu}{d\lambda} \left\{ g_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha}{d\lambda} \left[\left(\frac{d\xi^\beta}{d\lambda} \right)_{,\mu} + \Gamma_{\sigma\mu}^\beta \frac{d\xi^\sigma}{d\lambda} \right] + g_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\beta}{d\lambda} \left[\left(\frac{d\xi^\alpha}{d\lambda} \right)_{,\mu} \right. \right. \\ \left. \left. + \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \frac{d\xi^\sigma}{d\lambda} \right] + g_{\alpha\beta;\mu} \frac{d\xi^\alpha}{d\lambda} \frac{d\xi^\beta}{d\lambda} \right\}, \\ = g_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha}{d\lambda} \left[\frac{d^2 \xi^\beta}{d\lambda^2} + \Gamma_{\sigma\mu}^\beta \frac{d\xi^\sigma}{d\lambda} \frac{d\xi^\mu}{d\lambda} \right] + g_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\beta}{d\lambda} \left[\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \frac{d\xi^\sigma}{d\lambda} \frac{d\xi^\mu}{d\lambda} \right] = 0. \end{aligned} \quad (104)$$

Por consiguiente esta cantidad es una constante del movimiento. De hecho para señales luminosas es igual a cero

⁵⁶OHANIAN, Op. cit., p. 287.

$$g_{\mu\nu} \frac{d\xi^\mu}{d\lambda} \frac{d\xi^\nu}{d\lambda} = 0. \quad (105)$$

Adicionalmente, la simetría de la métrica conlleva a la conservación de la energía y el momento angular lo cual implica que una partícula relativista debe moverse en un plano.

Dado que el campo es isotrópico, se puede considerar la órbita del rayo de luz confinada en el plano ecuatorial

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad (106)$$

bajo esta consideración se integra las ecuaciones (100) y (101) para obtener

$$\frac{dt}{d\lambda} = C_1 \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}, \quad (107)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{C_2}{r^2}, \quad (108)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración. Para encontrar la órbita $r = r(\phi)$, del rayo de luz se expande la ecuación (105), así se obtiene:

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = 0. \quad (109)$$

Remplazando $dt/d\lambda$ y $d\phi/d\lambda$ de las ecuaciones (107) y (108) se tiene:

$$C_3 - \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \frac{C_4}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) = 0, \quad (110)$$

con $C_3 = C_1^2$ y $C_4 = C_2^2$.

Con el fin de simplificar la anterior ecuación y deshacerse de la dependencia explícita del parámetro λ es conveniente introducir el siguiente cambio de variable

$$u = \frac{1}{r}. \quad (111)$$

Este cambio implica

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\phi} \frac{d\phi}{d\lambda} = -C_2 \left(\frac{du}{d\phi}\right), \quad (112)$$

con ello la ecuación (110) se reduce a

$$C_3 - C_4 \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 - C_4 u^2 (1 - 2GMu) = 0, \quad (113)$$

derivando con respecto a ϕ , se llega finalmente a la ecuación de órbita para un rayo de luz en la métrica de Schwarzschild

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - 3GMu^2 = 0, \quad (114)$$

o en unidades cgs

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - \frac{3GMu^2}{c^2} = 0. \quad (115)$$

3.4.2 Deflexión de la luz por el sol. La ecuación (115) es una ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden que requiere de métodos numéricos para su solución, sin embargo es posible obtener una solución analítica aproximada teniendo en cuenta que para rayos de luz que pasan cerca al disco solar, el término

$$\frac{3GMu^2}{c^2} \approx 9,13 * 10^{-17} \text{ cm}^{-1} \text{ s}^2, \quad (116)$$

es pequeño y se puede considerar como una perturbación al camino rectilíneo que seguiría el rayo en ausencia del sol⁵⁷.

Por consiguiente la solución a la ecuación (115) se la puede escribir como

$$u = (\text{solución no perturbada}) + v(\phi), \quad (117)$$

donde v satisface la ecuación⁵⁸

$$\frac{d^2v}{d\phi^2} + v - \frac{3GM}{c^2} u_o^2 = 0. \quad (118)$$

En ausencia del sol la ecuación de órbita (115) se reduce a

$$\frac{d^2u_o}{d\phi^2} + u_o = 0, \quad (119)$$

cuya solución

$$u_o = b^{-1} \cos \phi, \quad (120)$$

⁵⁷TEJEIRO, Op. cit., p. 84.

⁵⁸El subíndice "o" indica que u_o es la solución no perturbada.

indica que un rayo de luz que inicialmente se mueve a lo largo del eje y ($r \rightarrow \infty$, $\phi = \pi/2$), continua moviéndose a lo largo de este eje ($r \rightarrow -\infty$, $\phi = -\pi/2$). Así, fijando el origen de nuestro sistema de coordenadas en el centro del sol, la ecuación (118) para un rayo de luz que pasa cerca al sol con un parámetro de impacto b , tiene como solución

$$v(\phi) = \frac{2GM}{c^2 b^2} - \frac{GM}{c^2 b^2} \cos^2 \phi. \quad (121)$$

De esta manera la solución aproximada de la ecuación (115) toma la forma

$$u = b^{-1} \cos \phi + \frac{2GM}{c^2 b^2} - \frac{GM}{c^2 b^2} \cos^2 \phi. \quad (122)$$

Lo cual implica que en presencia de masas (sol) la trayectoria de un rayo de luz es deflectada. Esta situación se presenta en la siguiente figura donde hemos elegido nuestro sistema coordinado en tal forma que el punto de máximo acercamiento este dado para $\phi = 0$.

$$\begin{aligned} r_{min} &= \frac{b}{1 + \frac{GM}{c^2 b}}, \\ &\approx b - \frac{r_s}{2}. \end{aligned} \quad (123)$$

El cambio total en ϕ cuando r decrece desde infinito a r_{min} y entonces incrementa otra vez a infinito, es el doble del cambio desde infinito a r_{min} , esto es⁶⁰

$$2|\phi_\infty - \phi(r_{min})| = 2|\phi_\infty|. \quad (124)$$

Para el caso de una línea recta este valor corresponde a π , por consiguiente el ángulo de deflexión de la órbita desde una línea recta es

$$\alpha_d = 2|\phi_\infty| - \pi. \quad (125)$$

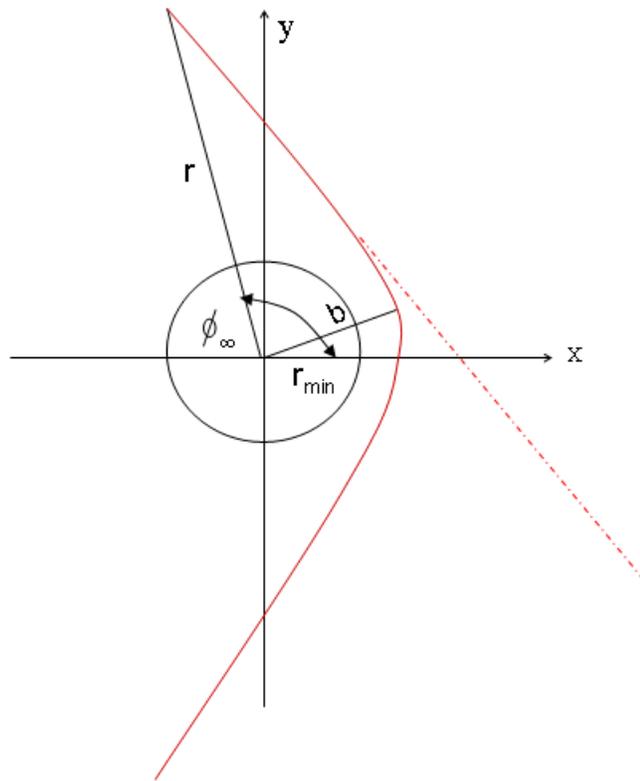
Para calcular ϕ_∞ se hace que $u \rightarrow 0$ en la ecuación (122)⁶¹

$$b^{-1} \cos \phi_\infty + \frac{2GM}{c^2 b^2} - \frac{GM}{c^2 b^2} \cos^2 \phi_\infty = 0. \quad (126)$$

⁶⁰WEINBERG, Op. cit., p. 189.

⁶¹PADMANABHAN, T. Theoretical Astrophysics : Astrophysical Processes. New York : Cambridge University Press, 2002. p. 549.

Figura 4. Deflexión de la luz por el sol⁵⁹.



De acuerdo con (117) se ignora el termino con $\cos^2 \phi_\infty$ y así se obtiene:

$$\cos \phi_\infty = -\frac{2GM}{c^2 b}, \quad (127)$$

llamando

$$q = \frac{2GM}{c^2 b}, \quad (128)$$

se intuye a partir de la identidad para la suma de ángulos

$$\cos (A + B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B, \quad (129)$$

que la solución de la ecuación (127) al orden de precisión establecido por (117) es

⁵⁹La deflexión de la luz por el sol se ha exagerado con el propósito de visualización.

$$\phi_{\infty} = \pm \left(\frac{\pi}{2} + q \right). \quad (130)$$

Usando este resultado en la ecuación (125) se encuentra el ángulo de deflexión de un rayo de luz que pasa cerca al sol

$$\alpha_d = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 b}, \quad (131)$$

o

$$\alpha_d = \frac{1,75''}{\left(\frac{b}{R_{\odot}} \right)}. \quad (132)$$

4. TEORIA BASICA DE LAS LENTES GRAVITACIONALES

La deflexión de la luz por un campo gravitacional sugiere que las imágenes de fuentes distantes son afectadas por la presencia de campos gravitacionales.

La deflexión de la luz puede producir múltiples imágenes. Dichas imágenes pueden presentarse amplificadas como consecuencia de la distorsión de los haces de luz debido a la naturaleza curva del espacio-tiempo donde tiene lugar el movimiento. Estos y otros aspectos de las lentes gravitacionales son recopilados en una teoría en la cual un conjunto de aproximaciones hacen fácil la utilización de LG como una herramienta astrofísica.

4.1 APROXIMACIONES⁶²

4.1.1 Aproximación de campo débil. Se asume que el campo gravitacional puede ser descrito por una métrica linealizada:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) dl^2, \quad (133)$$

donde ϕ es el potencial Newtoniano.

4.1.2 Aproximación de la óptica geométrica. Esta aproximación considera que las ondas electromagnéticas las cuales se propagan en una región libre de fuentes son localmente planas y monocromáticas, esto es, la escala sobre la cual cambia el campo gravitacional es mucho más grande que la longitud de onda de los rayos de luz deflectados.

Como consecuencias de estas restricciones se obtiene las leyes fundamentales de la óptica geométrica⁶³

- 1) Los rayos de luz son geodésicas nulas.
- 2) El vector de polarización es perpendicular a los rayos y es paralelamente transportado.
- 3) El número de fotones se conserva.

4.1.3 Aproximación de ángulo pequeño. El ángulo de deflexión total es pequeño, por consiguiente se puede describir la lente en la aproximación paraxial. Esta aproximación se justifica por las observaciones astrofísicas, las cuales dan ángulos de deflexión menores a un segundo de arco ($1''$).

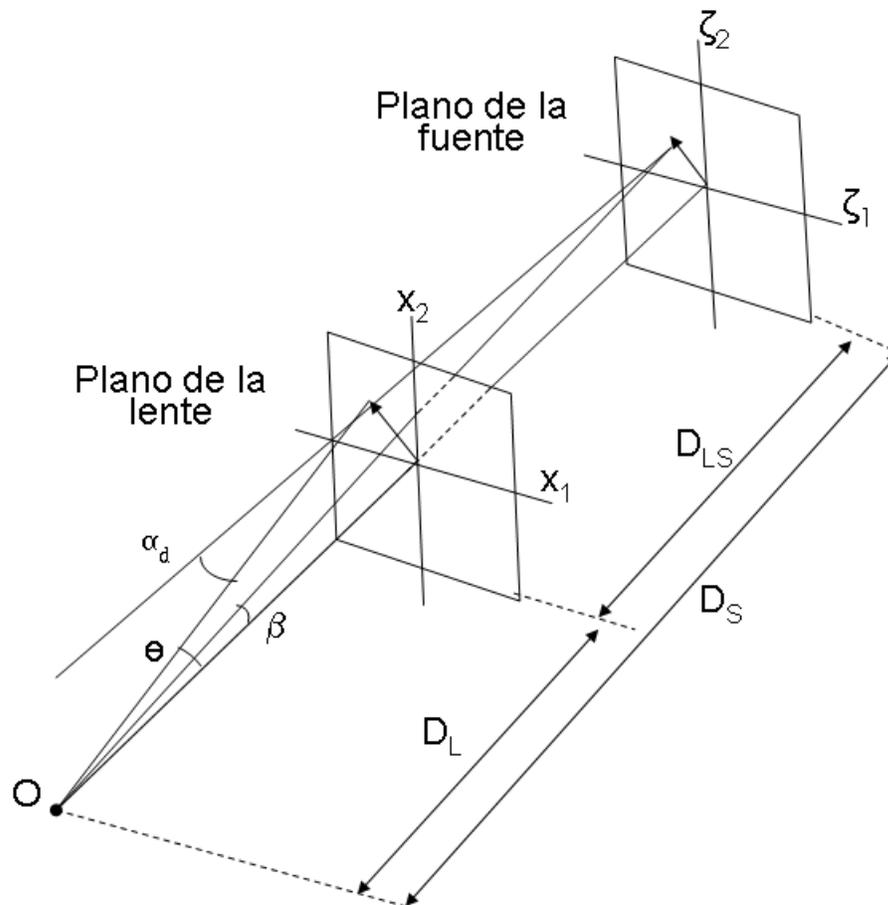
⁶²BERTSCHINGER, Edmund. Phys. 8.962, 1999. p. 1 - 9.

⁶³MISNER, Op. cit., p. 571.

4.1.4 Aproximación de la lente delgada. Aunque la dispersión toma lugar continuamente a la largo de la trayectoria del fotón, la deflexión apreciable ocurre a una distancia, del deflector, del orden del parámetro de impacto.

4.2 GEOMETRIA DE LG

Figura 5. Geometría de LG.



En la descripción general de la teoría del lensamiento gravitacional, es conveniente definir dos planos hipotéticos transversos a la línea de vista del observador, estos planos descritos por coordenadas cartesianas pasan a través de la fuente y la masa deflectora. Por esta razón reciben los nombres de plano de la fuente y plano de la lente. Las coordenadas de la fuente respecto al origen son (ζ_1, ζ_2) y aquellas de la imagen son (x_1, x_2) . Dado que las componentes de las posiciones de la fuente y la imagen son muy pequeñas comparadas con las distancias a los planos de la lente

y la fuente, se puede escribir las coordenadas en términos de los ángulos observados, así las coordenadas de la fuente y la imagen son (β_1, β_2) y (θ_1, θ_2) respectivamente.

4.3 ÁNGULO DE DEFLEXIÓN

Para calcular el ángulo de deflexión producido por una distribución de masa, se usa la ecuación de los rayos ⁶⁴ la cual describe el camino de un rayo de luz a través de un índice de refracción $n(\xi)$ que varía espacialmente.

Para derivar la ecuación de los rayos, se parte del principio de Fermat el cual establece que el tiempo que tarda la luz en viajar desde la fuente hasta el observador es un extremal⁶⁵

$$\delta \int_{t_s}^{t_o} dt = 0. \quad (134)$$

Donde los subíndices “s” y “o” representan a la fuente y al observador. De la ecuación (133), con $ds = 0$, para las geodésicas nulas, se obtiene la velocidad efectiva de la luz a primer orden en ϕ .

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) dl^2 &= 0, \\ \frac{dl}{dt} &= c \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right)^{-1/2}, \\ \frac{dl}{dt} &\approx c \left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right) \left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right), \\ \frac{dl}{dt} &\approx c \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right), \end{aligned}$$

$$V_{eff} = \frac{dl}{dt} \approx c \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right). \quad (135)$$

EL potencial gravitacional para un objeto masivo es una cantidad negativa, por consiguiente la velocidad aparente de la luz se ve disminuida en la presencia de un campo gravitacional. De esta manera se puede pensar que las geodésicas se comportan de tal forma que la partícula (fotón)⁶⁶ parecería viajar a través de un medio con índice de refracción⁶⁷

$$n(\xi) = \frac{c}{V_{eff}} = 1 - \frac{2\phi(\xi)}{c^2}, \quad (136)$$

⁶⁴También se le da el nombre de ecuación de la lente.

⁶⁵BERTSCHINGER, Op. cit., p. 4.

⁶⁶La teoría de la relatividad muestra a la materia como una manifestación de la energía; por tanto, los paquetes de energía(fotones) pueden comportarse como partículas materiales.

⁶⁷Ibid., p. 4.

en donde c es la velocidad de la luz en el vacío medida por un marco inercial local.

Parametrizando los caminos de luz por λ se llega a la siguiente relación

$$\frac{d\vec{\xi}}{dt} = \frac{d\vec{\xi}}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dt}, \quad (137)$$

sustituyendo este resultado en (134) se encuentra

$$\delta \int_{s_e}^{s_o} n(\xi) \left[\frac{d\xi_i}{d\lambda} \frac{d\xi^i}{d\lambda} \right]^{1/2} d\lambda = 0, \quad (138)$$

donde los subíndices “ e ” y “ o ” denotan emisión y observación respectivamente.

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange y eligiendo el parámetro λ como la longitud del camino l se obtiene

$$\frac{d}{dl} [n(\vec{\xi}) \hat{e}] = \nabla n, \quad (139)$$

donde $\hat{e} = d\vec{\xi}/dl$ es el vector unitario a lo largo del camino del rayo $\xi(l)$.

En la teoría de las lentes gravitacionales, los ángulos de deflexión son pequeños y por consiguiente podemos integrar la ecuación (139) a lo largo del camino no perturbado del rayo, (γ) , para obtener

$$\vec{\alpha}_d = (\hat{e}_{\text{inicial}} - \hat{e}_{\text{final}})_{\perp} = - \int_{\gamma} \nabla_{\perp} n dl. \quad (140)$$

Donde $\nabla_{\perp} n$ denota la proyección de ∇n sobre el plano ortogonal a la dirección \hat{e} del rayo sin deflección⁶⁸.

Con esta fórmula se evalúa el ángulo de deflexión debido a una masa puntual. Para tal fin consideremos un rayo de luz que pasa muy cerca a la lente con un parámetro de impacto b , además escogemos un sistema cartesiano en el cual la lente y el observador estén a lo largo del eje z y cuyo origen es la posición de la lente⁶⁹.

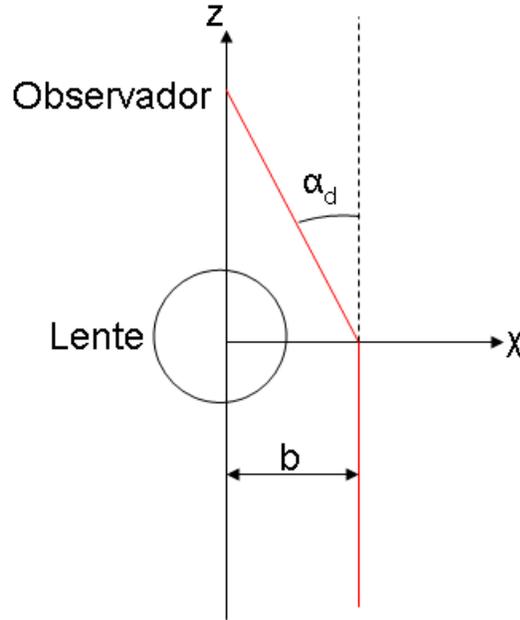
Remplazando (136) en (140) se obtiene

$$\alpha_d = \frac{2}{c^2} \int_{\gamma} \nabla_{\perp} \phi dl. \quad (141)$$

⁶⁸SCHNEIDER, Op. cit., p.123 - 124.

⁶⁹Utilizamos la misma consideración empleada en el capítulo 3 de Ohanian, para la determinación de α_d en la aproximación lineal.

Figura 6. Deflexión de la luz en el plano $z - x$.



Para el caso de una masa puntual el potencial toma la forma

$$\phi(b, z) = -\frac{GM}{(b^2 + z^2)^{1/2}}, \quad (142)$$

así

$$\nabla_{\perp} \phi(b, z) = \frac{\partial \phi}{\partial b} = \frac{GMb}{(b^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (143)$$

Como la contribución principal⁷⁰ a la integral esta en el rango $-b < z < b$ tenemos que colocar los límites de la integral de menos infinito a más infinito

$$\begin{aligned} \alpha_d &= \frac{2GMb}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(b^2 + z^2)^{3/2}}, \\ &= \frac{2GMb}{c^2} \left\{ \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^c \frac{dz}{(b^2 + z^2)^{3/2}} + \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_c^{\beta} \frac{dz}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \right\}. \end{aligned} \quad (144)$$

La integral

⁷⁰Aproximación de la lente delgada.

$$I = \int \frac{dz}{(b^2 + z^2)^{3/2}},$$

bajo la sustitución $z = b \tan \theta$ da como resultado

$$I = \frac{z}{b^2 \sqrt{b^2 + z^2}}. \quad (145)$$

La ecuación (145), lleva consigo una constante de integración la cual no se tiene en cuenta dado que (144) es una integral definida. Colocando (145) en (144) se obtiene:

$$\begin{aligned} \alpha_d &= \frac{2GMb}{c^2} \left\{ \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{z}{b^2 \sqrt{b^2 + z^2}} \right]_{-a}^c + \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[\frac{z}{b^2 \sqrt{b^2 + z^2}} \right]_c^\beta \right\}, \\ &= \frac{2GM}{c^2 b} \left\{ \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + b^2/a^2}} + \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + b^2/\beta^2}} \right\}, \end{aligned}$$

$$\alpha_d = \frac{4GM}{c^2 b}. \quad (146)$$

El cual es el ángulo de deflexión de un rayo de luz que pasa cerca a una masa compacta M a una distancia b . Cabe notar que este resultado es el mismo que se obtuvo en el capítulo 3, para el caso de una masa con simetría esférica.

4.4 ECUACIÓN DE LA LENTE

Es posible encontrar una relación entre la posición angular de una fuente no “lensada” y la posición de sus imágenes si los rayos de luz emitidos desde la fuente son perturbados por un campo gravitacional.

Definiendo el eje óptico como la línea recta que se extiende desde el plano de la fuente a través de la masa deflectora al observador y eligiendo marcos de referencia en los planos de la fuente y la lente, tal que sus orígenes estén en el punto de intersección del eje óptico con el plano correspondiente, se obtiene una relación en la forma

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \frac{D_{LS}}{D_S} \vec{\alpha}_d(\vec{\chi}), \quad (147)$$

donde $\vec{\beta}$ es la posición de la fuente, $\vec{\theta}$ es la posición de la imagen, D_S y D_{LS} son las distancias diametral angular del observador a la fuente y de la lente a la fuente respectivamente, $\vec{\chi}$ es el vector en el plano transversal del deflector que da la posición del rayo de luz relativa al origen en este plano, $\vec{\alpha}$ es el ángulo vectorial el cual muestra el cambio en la dirección del rayo desde la fuente después de ser

deflectado⁷¹.

Para una distribución de materia en particular, la ecuación de la lente puede tener más de una solución de acuerdo con la posición de la fuente, esto significa que la misma fuente puede ser vista en varias posiciones en el cielo. La ecuación de la lente (147) describe una aplicación $\vec{\theta} \rightarrow \vec{\beta}$ desde el plano de la lente al plano de la fuente.

La aplicación más simple de esta ecuación en la teoría de LG, lo constituye la lente de Schwarzschild⁷². Esta configuración es descrita en la siguiente figura, de donde se obtiene la siguiente relación geométrica⁷³

$$\theta D_S = \beta D_S + \alpha_d D_{LS} , \quad (148)$$

o

$$\beta = \theta - \frac{D_{LS}}{D_S} \alpha_d . \quad (149)$$

Donde las cantidades que intervienen en (149) son escalares ya que el problema se reduce a una dimensión debido a la simetría axial.

Insertando en (149) el ángulo de deflexión (146) la ecuación de la lente toma la forma

$$\beta = \theta - \frac{D_{LS}}{D_S} \frac{4GM}{c^2 b} , \quad (150)$$

pero $b = \theta D_L$

$$\beta = \theta - \frac{4GM D_{LS}}{c^2 D_L D_S \theta} . \quad (151)$$

En el caso especial en el que la fuente, la lente y el observador están perfectamente alineados, tenemos $\beta = 0$, así no existe un plano de preferencia para la propagación de la luz.⁷⁴ Una fuente exactamente detrás de la lente aparecerá como un anillo alrededor de la lente⁷⁵.

Las imágenes con forma de anillo de fuentes puntuales pueden ocurrir únicamente bajo condiciones de alta simetría axial, estas imágenes son popularmente conocidas como anillos de Einstein y la cantidad

⁷¹Ibid., p. 157.

⁷²En GL el termino masa puntual es más utilizado cuando hacemos referencia a un objeto esférico distante.

⁷³PEACOCK, Op. cit., p. 102.

⁷⁴La configuración es rotacionalmente simétrica al rededor de la línea de vista del observador.

⁷⁵BERTSCHINGER, Op. cit., p. 9.

$$\theta_E^2 = \frac{4GM D_{LS}}{c^2 D_L D_S}, \quad (152)$$

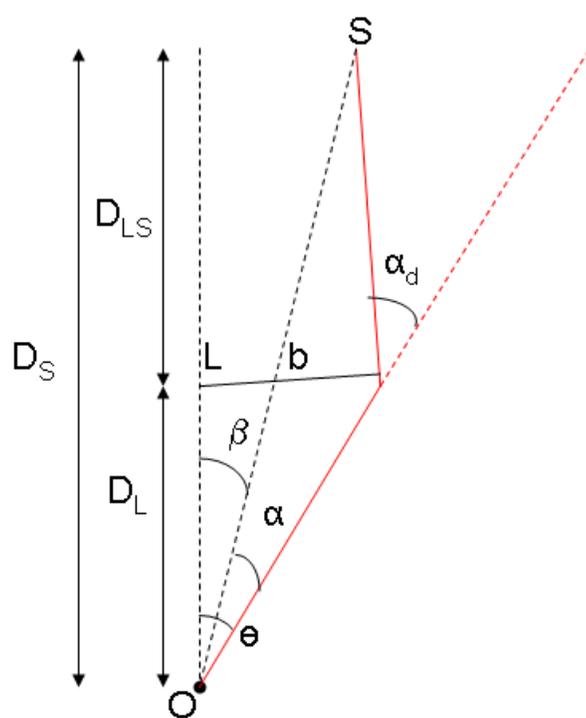
es el ángulo de Einstein que define el anillo y provee una escala angular natural para describir la geometría del lensamiento. En el plano de la lente el radio de Einstein correspondiente a este ángulo es⁷⁶

$$R_E = \theta_E D_L = \sqrt{\frac{4GM D_{LS} D_L}{c^2 D_S}}. \quad (153)$$

Con la definición de la ecuación (152), la ecuación (151) puede expresarse como

$$\theta^2 - \beta\theta - \theta_E^2 = 0. \quad (154)$$

Figura 7. Esquema de LG para una masa puntual.



4.5 FORMACIÓN DE IMÁGENES

⁷⁶SCHNEIDER, Op. cit., p. 27.

La ecuación (154) es una ecuación cuadrática en θ la cual tiene dos raíces reales

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{1}{2} \left(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right), \\ \theta_2 &= \frac{1}{2} \left(\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right).\end{aligned}\tag{155}$$

Las cuales corresponden a dos imágenes físicas de la fuente que se encuentran localizadas en lados opuestos de la fuente tal como lo indican los signos de la raíces de (154).

La separación angular entre las imágenes es

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 = [\beta^2 + 4\theta_E^2]^{1/2} \geq 2\theta_E.\tag{156}$$

La separación angular entre la fuente y la lente se relaciona a las posiciones de las imágenes mediante la ecuación

$$\theta_1 + \theta_2 = \beta.\tag{157}$$

4.6 AMPLIFICACIÓN⁷⁷

La deflexión de la luz en un campo gravitacional no solo afecta la dirección del rayo de luz, sino también a la sección transversal de un haz de rayos. Si se asume que durante la deflexión no hay emisión o absorción de energía, la intensidad específica es constante a lo largo del rayo

$$I_v = \frac{\text{Energía radiada}}{\text{área} * \text{tiempo} * \text{ángulo sólido} * \text{rango de frecuencia}}.\tag{158}$$

Además, como la deflexión gravitacional no introduce corrimientos espectrales adicionales, el lensamiento gravitacional preserva el brillo I de la fuente. El flujo de una fuente infinitesimal es el producto del brillo de la superficie de la fuente y el ángulo sólido $\Delta\Omega$ subtendido por ésta sobre el cielo.

$$S = I\Delta\Omega.\tag{159}$$

La razón del flujo de una imagen lo suficientemente pequeña al flujo de su fuente en ausencia de lensamiento gravitacional es dado por

$$\mu = \frac{S_i}{S_s} = \frac{\Delta\Omega_i}{\Delta\Omega_s}.\tag{160}$$

⁷⁷Ibid., p. 33 - 35.

Este cociente representa la amplificación⁷⁸ del flujo, debido al “lensamiento”.

Considerando una fuente infinitesimal en $\vec{\beta}$ la cual subtende un ángulo sólido $\Delta\Omega_s$ sobre la esfera de visión del observador y cuya imagen en la posición $\vec{\theta}$ subtende un ángulo sólido $\Delta\Omega_i$, la relación de estos ángulos sólidos es determinada por la distorsión en el área, bajo la aplicación $\vec{\theta} \rightarrow \vec{\beta}$, determinada por la ecuación de la lente.

$$\frac{\Delta\Omega_i}{\Delta\Omega_s} = \frac{A_s}{A_L} \left(\frac{D_L}{D_S} \right)^2, \quad (161)$$

$$\mu^{-1} = \frac{A_s}{A_L} \left(\frac{D_L}{D_S} \right)^2. \quad (162)$$

El factor de amplificación μ es una función de $\vec{\theta}$ y por consiguiente en el plano de la lente este puede tener signo positivo o negativo, las imágenes de la fuente para las cuales μ toma el signo positivo se dicen que poseen paridad positiva mientras que aquellas para las cuales μ es negativo poseen paridad negativa. En el caso especial en el cual $\mu \rightarrow \infty$, se dice que estas curvas críticas tienen paridad cero.

La siguiente figura visualiza la distorsión del ángulo sólido subtendido por una fuente.

La paridad de una imagen es un concepto muy importante, ya que ella determina la circulación⁷⁹ de la imagen.

Las regiones en el plano de la lente donde μ tiene signos opuestos están separadas por curvas sobre las cuales $\mu \rightarrow \infty$, a estas curvas se las conoce como curvas críticas. Sin embargo la divergencia de μ no implica que la imagen de una fuente tenga brillo⁸⁰ infinito.

Por otra parte, las imágenes de las curvas críticas bajo la aplicación $\vec{\theta} \rightarrow \vec{\beta}$ son llamadas cáusticas.⁸¹ Para una lente de Schwarzschild la ecuación (162) se reduce a

$$\mu^{-1} = \frac{\beta}{\theta} \frac{d\beta}{d\theta} \left(\frac{D_S}{D_L} \right)^2 \left(\frac{D_L}{D_S} \right)^2, \quad (163)$$

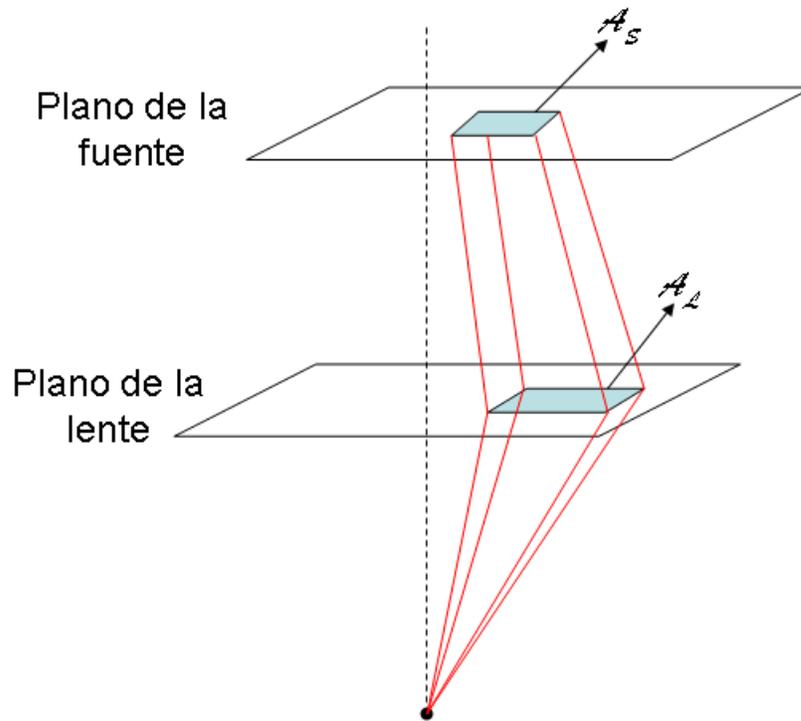
⁷⁸La cantidad μ también se le conoce como magnificación.

⁷⁹Orientación relativa a la fuente no perturbada.

⁸⁰aquí hacemos referencia al brillo aparente.

⁸¹Son imágenes de las curvas críticas en el plano de la fuente.

Figura 8. Distorsión del ángulo sólido subtendido por una fuente.



$$\mu^{-1} = \frac{\beta}{\theta} \frac{d\beta}{d\theta}. \quad (164)$$

De la ecuación de la lente se encuentra

$$\frac{\beta}{\theta} = \frac{\theta^2 - \theta_E^2}{\theta^2}, \quad (165)$$

$$\frac{d\beta}{d\theta} = \frac{\theta^2 + \theta_E^2}{\theta^2}, \quad (166)$$

por lo tanto

$$\mu^{-1} = 1 - \left(\frac{\theta_E}{\theta} \right)^4. \quad (167)$$

La ecuación (155) indica que existen dos soluciones θ_1 y θ_2 que satisfacen la ecuación de la lente, por lo tanto (167) dará lugar a dos ecuaciones para el factor de

magnificación. Usando la posición angular escalada para una fuente, $u = \beta/\theta_E$, se obtiene:

$$\mu_1 = \frac{u^2 + 2}{2u\sqrt{u^2 + 4}} + \frac{1}{2}, \quad (168)$$

$$\mu_2 = \frac{u^2 + 2}{2u\sqrt{u^2 + 4}} - \frac{1}{2}. \quad (169)$$

Los signos de (168) y (169) indican la paridad de las imágenes. Para $\mu = 0$ el factor de amplificación diverge, así un anillo de radio R_E es la curva crítica de la lente de Schwarzschild y la cáustica en el plano de la fuente degenera al punto $\beta = 0$.

5. CONCLUSIONES

El movimiento de la luz en una variedad curva es un acontecimiento común y sin trascendencias cuando la geometría que lo describe coincide con aquella intrínseca a la variedad en consideración.

Al ser la gravitación un fenómeno que depende de la elección del sistema de referencia, se puede pensar que en todo punto del espacio-tiempo la geometría es localmente plana. Este hecho crea en nosotros, cierta familiaridad con la geometría de Minkowski y a nivel más popular con la geometría euclidiana, de tal manera que la creamos válida en extenso, llevándonos así a influir en la percepción de nuestras observaciones. La luz sigue el camino más corto del espacio-tiempo donde tiene lugar su movimiento, resultando en una trayectoria que la vemos curva en el espacio.

Conocemos que la especificación del intervalo relativista, definido entre los eventos pertenecientes a una vecindad lo suficientemente pequeña alrededor de un evento seleccionado en su centro, constituye una representación completa del espacio-tiempo, así para el caso de una distribución de masa esféricamente simétrica, la geometría del espacio-tiempo a su alrededor es descrita por la métrica de Schwarzschild.

La métrica de Schwarzschild representa una solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein, sin embargo, a pesar de su alto grado de precisión, esta solución se constituye en una herramienta demasiado sofisticada para la descripción del efecto lente gravitacional. Los rasgos más importantes de LG son resultado de una teoría linealizada, la cual da la precisión suficiente para que las lentes gravitacionales se conviertan en una herramienta de singular importancia en astrofísica.

RECOMENDACIONES

Para los físicos que estén interesados en trabajar en este tema, sería provechoso describir el lensamiento gravitacional centrandolo el estudio en la distorsión gravitacional de la sección transversal de un conjunto de rayos de luz cuya separación es infinitesimal. Esto llevará a resultados en términos de cantidades directamente observables.

BIBLIOGRAFÍA

- BALIN, David. LOVE, Alexander. *Cosmology in gauge field theory and string theory*. Bristol : Institute of Physics Publishing, 2004. 313 p.
- BERTSCHINGER, Edmund. *Phys.* 8.962, 1999. 9 p.
- CARROLL, Sean M. *gr-qc/9712019*, 1997. 231 p.
- CHENG, David. *Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería*. México : Addison Wesley, 1998. 492 p.
- DAVIES, Paul. *La frontera del infinito*. Barcelona : Salvat, 1985. 212 p.
- D'INVERNO, Ray. *Introducing Einstein's relativity*. New York : Oxford University Press, 1992. 383 p.
- GAARDER, Jostein. *El Mundo de Sofía*. México : Patria, 1995. 638 p.
- GARDNER, Martin. *La explosión de la relatividad*. Barcelona : Salvat, 1986. 206 p.
- GEORGI, Howard. *Lie algebras in particle physics*. s.l. : The Benjamin/ Cummings Publishing Company, 1982. 320 p.
- HASSANI, Sadri. *Mathematical physics a modern introduction to its foundations*. New York : Springer - Verlag, 1999. 1025 p.
- HEINBOCKEL, J. H. *Introduction to tensor calculus and continuum mechanics*. s.l. : Old Dominion University, 1996. 367 p.
- HORVATH, Juan. *Introducción a la topología general; departamento de asuntos científicos y tecnológicos de la secretaría general de la organización de los estados americanos*, 1969. 149 p.
- KADEMOVA, Krasimira. *Matemática avanzada para físicos e ingenieros*. Bucaramanga : Universidad Industrial de Santander, 1980. 650 p.
- LEWIS, Antony. CHALLINOR, Anthony. *astro-ph/ 0601594 V4*, 2006. 92 p.
- LOW, Francis E. *Classical field theory : electromagnetism and gravitation*. New York : John Wiley & Sons, 1997. 427 p.
- MARTINS, Alexandre Augusto. *Álgebra linear e geometria Euclidiana*. Washington : Departamento de asuntos científicos y tecnológicos de la secretaría

- general de la organización de los estados americanos, 1969. 58 p.
- MISNER, C. W. THORNE, K. S. WHEELER, J. A. Gravitation. New York : W. H. Freeman and Company, 1973. 1279 p.
- OHANIAN, Hans C. Gravitation and spacetime. New York : W. W. Norton & Company, 1979. 461 p.
- PADMANABHAN, T. Theoretical astrophysics : astrophysical processes. New York : Cambridge University Press, 2002. 601 p.
- PADMANABHAN, T. Theoretical Astrophysics : galaxies and cosmology. New York : Cambridge University Press. 2002. 619 p.
- PARS, L. A. An introduction to the calculus of variations. Belfast : Heinemann Educational Books, 1965. 350 p.
- PEACOCK, J. A. Cosmological physics. New York : Cambridge University Press, 1999. 682 p.
- RYDEN, Barbara. Introduction to cosmology. San Francisco : Pearson Education, 2003. 244 p.
- SAUER, Tilman. Arch. Hist. Exact. Sci. doi 10. 1007/ 500 407 - 007 - 0008 - 4, 2008. 22 p.
- SCHNEIDER, P. EHLERS, J. FALCO, E. E. Gravitational lenses. New York : Springer - Verlag, 1992. 560 p.
- SCHOUTEN, J. A. Tensor analysis for physicists. New York : General Publishing Company, 1989. 277 p.
- SEPULVEDA, Alonso. Los conceptos de la física : evolución histórica. 2 ed. Medellín : Universidad de Antioquia, 2003. 365 p.
- TEJEIRO, Juan Manuel. Gravitación y cosmología. Bogotá : Universidad Nacional, 2000. 141 p.
- WEINBERG, Steven. Gravitation and cosmology : principles and applications of the general theory of relativity. New York : John Wiley & Sons, 1972. 657 p.
- LAVALLE, Carlos. El hombre y el tiempo : de la conciencia al concepto. México : Limusa, 2006. 230 p.

ANEXOS

Anexo A. S^2

La 2- esfera S^2 es una variedad diferencial 2- dimensional constituida por el conjunto de todos los puntos que se encuentran a una distancia fija del origen en \mathbb{R}^3 .

Con el propósito de obtener los vectores de Killing que generan sus isometrías, se considera una esfera unidad S^2 descrita por la siguiente métrica.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A1})$$

con $\xi^1 = 0$ y $\xi^2 = \phi$.

Los símbolos de Christoffel diferentes de cero para esta métrica son

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= -\text{sen} \theta \cos \theta , \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \cot \theta . \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

Con esta información las ecuaciones de Killing $\eta_{(\mu;\nu)} = 0$ toman la forma

$$\begin{aligned} \eta_{(1;1)} &= \eta_{1,1} = 0, \\ \eta_{(2;2)} &= \eta_{2,2} + \text{sen} \theta \cos \theta \eta_1 = 0, \\ \eta_{(1;2)} &= \eta_{1,2} + \eta_{2,1} - 2\cot \theta \eta_2 = 0 . \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

La primera de estas ecuaciones implica que η_1 es independiente de θ , así $\eta_1 = f(\phi)$. Sustituyendo este resultado en la segunda ecuación se tiene

$$\eta_2 = -\frac{1}{2}h(\phi) \text{sen} 2\theta + g(\theta) , \quad (\text{A4})$$

donde

$$f(\phi) = \frac{dh}{d\phi} , \quad (\text{A5})$$

reemplazando (A4) y (A5) en la tercera ecuación de (A3) se obtiene:

$$\frac{dg}{d\theta} - 2\cot\theta g(\theta) = -\left[\frac{df}{d\phi} + h(\phi)\right]. \quad (\text{A6})$$

Para que esta ecuación sea válida para todo θ y ϕ se debe requerir

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\theta} - 2\cot\theta g(\theta) &= 0, \\ \frac{df}{d\phi} + h(\phi) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

Integrando se tiene

$$\begin{aligned} g(\theta) &= C \operatorname{sen}^2 \theta, \\ h(\phi) &= C_1 \cos \phi + B \cos \phi. \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{dh}{d\phi} = A \operatorname{sen} \phi + B \cos \phi, \\ \eta_2 &= (A \cos \phi - B \operatorname{sen} \phi) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \operatorname{sen}^2 \theta. \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

Así el campo general de Killing será

$$\begin{aligned} \vec{\eta} &= \eta^\alpha \hat{e}_\alpha, \\ &= \eta^1 \partial_1 + \eta^2 \partial_2, \\ &= AL_y - BL_x + CL_z, \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

donde

$$\begin{aligned} L_x &= -\cos \phi \partial_\theta - \operatorname{sen} \phi \cot \theta \partial_\phi, \\ L_y &= \operatorname{sen} \phi \partial_\theta + \cos \phi \cot \theta \partial_\phi, \\ L_z &= \partial_\phi, \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

son tres vectores de Killing linealmente independientes que muestran que S^2 es una variedad diferencial maximalmente simétrica.

Anexo B. Límite Newtoniano.⁸²

La teoría de la relatividad de Einstein es una herramienta fundamental en el desarrollo de la física, la cual extiende las capacidades de la teoría Newtoniana para describir la realidad. En nuestro sistema solar y bajo ciertos límites la teoría de Newton emerge de la teoría relativista y constituye un modelo excelente para describir nuestro entorno. Las condiciones en que la física de Newton es válida son las siguientes.

1. Las partículas se mueven con velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz ($c = 1$).
2. El campo gravitacional es débil.
3. El campo es estático.

Así, para establecer la relación entre la teoría de Einstein y la de Newton se considera la ecuación geodésica de una partícula de prueba que se mueve lentamente ($v \ll 1$) en un campo gravitacional débil y estático.

La primera condición significa que

$$\frac{d\xi^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau}, \quad (\text{B1})$$

donde τ es el tiempo propio. Bajo esta consideración la ecuación geodésica toma la forma

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (\text{B2})$$

La tercera condición implica que el campo gravitacional es independiente del tiempo e invariante bajo transformaciones $t \rightarrow -t$. Así los símbolos de Christoffel Γ_{00}^μ se reducen a

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^\mu &= \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \{2g_{0\alpha,0} - g_{00,\alpha}\}, \\ \Gamma_{00}^\mu &= -\frac{1}{2} g^{\mu i} g_{00,i} \quad \text{con } i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

Finalmente la segunda condición establece que la métrica puede escribirse como la métrica de Minkowski más una pequeña perturbación:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{con } |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (\text{B4})$$

⁸²CARROLL, Op. cit., p. 104 - 106.

De la definición de la métrica inversa $g^{\mu\alpha}g_{\mu\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha}$ a primer orden en h se encuentra:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} . \quad (\text{B5})$$

Donde $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} h_{\alpha\beta}$.

Con estos resultados se obtiene que la parte espacial de la ecuación (B2) toma la forma

$$\frac{d^2\xi^i}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{\partial h_{00}}{\partial \xi^i} . \quad (\text{B6})$$

Dividiendo ambos lados por $(dt/d\tau)^2$ se obtiene

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial \xi^i} , \quad (\text{B7})$$

que al compararla con la ecuación de Newton

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi^i} , \quad (\text{B8})$$

da como resultado

$$h_{00} = 2\phi , \quad (\text{B9})$$

Lo cual implica

$$g_{00} = 1 + 2\phi . \quad (\text{B10})$$

Anexo C. Medida de distancia en cosmología.⁸³

En astronomía la definición operacional de distancia nos es única, sino dependiente del método utilizado en su determinación, el porque reside en el hecho de que el universo es descrito por una variedad curva que se expande con el tiempo.

Como punto de partida optamos por un espacio tiempo Friedmann- Robertson-Walker

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \right] . \quad (\text{C1})$$

⁸³TEJEIRO, Op. cit. p. 130 - 133.

Donde las coordenadas t, r, θ, ϕ son las coordenadas de un observador en caída libre en el campo gravitacional del universo, $a(t)$ es el factor de escala (también conocido como radio del universo). Este es una función adimensional del tiempo que describe como las distancias se expanden o contraen en un universo homogéneo e isotrópico. La constante κ es un número adimensional que puede tomar los valores de $\kappa = 0$ para un universo espacialmente plano, $\kappa = -1$ si el universo tiene curvatura espacial negativa y $\kappa = 1$ si el universo tiene curvatura espacial positiva.

* Distancia propia. En un universo en expansión la distancia entre puntos esta incrementándose con el tiempo. Así, si deseamos asignar una distancia espacial entre dos objetos debemos especificar el tiempo en el cual la distancia es correcta.

La distancia propia $d_p(t)$ entre dos puntos se define como la longitud de la geodésica espacial entre ellos cuando el valor del factor de escala se fija en $a(t)$. De esta manera la distancia propia entre el origen de coordenadas y un punto de coordenada radial r es dada por la relación

$$d_p(t) = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \kappa r^2}}. \quad (\text{C2})$$

Cuando se observa un objeto distante se puede medir el corrimiento al rojo de la luz que nos llega desde él. Aunque este no da directamente la distancia del objeto podemos obtener información acerca del factor de escala en el tiempo de emisión de la señal luminosa.

Para ver la relación entre el factor de escala $a(t)$ y el corrimiento al rojo z , se considera un rayo de luz que viaja a lo largo de una geodésica radial desde una galaxia distante en $r = r_1$ a un observador en $r = 0$ en el tiempo presente $t = t_o$. supongamos que en los tiempos $t = t_1$ y $t = t_1 + \Delta t_1$ la fuente emite dos crestas de onda consecutivas las cuales son recibidas en $t = t_o$ y $t = t_o + \Delta t_o$ en el observador.

Para un rayo de luz $ds^2 = 0$, entonces la ecuación (C1) da

$$\int_{t_1}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - \kappa r^2}}, \quad (\text{C3})$$

para la primera cresta y

$$\int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_o + \Delta t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - \kappa r^2}}, \quad (\text{C4})$$

para la segunda cresta. Sustrayendo estas ecuaciones se obtiene:

$$\int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_o + \Delta t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (\text{C5})$$

Esto es la integral $dt/a(t)$ entre el tiempo de emisión y el tiempo de observación es la misma para cada cresta de onda. La ecuación anterior puede reescribirse como

$$\int_{t_o}^{t_o+\Delta t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_1+\Delta t_1} \frac{dt}{a(t)}. \quad (\text{C6})$$

La cual nos dice que la integral de $dt/a(t)$ entre la emisión de crestas sucesivas es igual a la integral de $dt/a(t)$ entre la observación de crestas de onda sucesivas. La ecuación (C6) puede simplificarse si tenemos en cuenta que durante el tiempo que transcurre entre la emisión y observación de dos crestas consecutivas el universo no tiene una expansión apreciable. Así $a(t)$ es prácticamente constante en las integrales de la ecuación (C6)

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(t_o)} \int_{t_o}^{t_o+\Delta t_o} dt &= \frac{1}{a(t_1)} \int_{t_1}^{t_1+\Delta t_1} dt, \\ \frac{\Delta t_o}{a(t_o)} &= \frac{\Delta t_1}{a(t_1)}. \end{aligned} \quad (\text{C7})$$

Δt_o y Δt_1 son los tiempos entre crestas consecutivas, por consiguiente corresponden a los períodos de las ondas. De esta manera se tiene:

$$\begin{aligned} \lambda_o &= \Delta t_o, \\ \lambda_1 &= \Delta t_1. \end{aligned} \quad (\text{C8})$$

Donde λ_o y λ_1 son las longitudes de onda correspondientes. Utilizando la definición de corrimiento al rojo

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_1}{\lambda_1}, \quad (\text{C9})$$

se tiene

$$1 + z = \frac{a(t_o)}{a(t_1)}. \quad (\text{C10})$$

Esta ecuación nos dice que un fotón emitido en el tiempo t_1 sufre un corrimiento al rojo en su longitud de onda conforme el universo se expande, tal que su longitud de onda en el tiempo t_o se incrementa por un factor $a(t_o)/a(t_1)$. Dado que la energía del fotón es inversamente proporcional a su longitud de onda, la energía del fotón se reduce por un factor $a(t_1)/a(t_o)$ como resultado de la expansión del

universo.

* Distancia de luminosidad. La distancia de luminosidad d_L de una fuente desde un observador se define mediante la expresión

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi l}}. \quad (\text{C11})$$

Donde L es la luminosidad intrínseca de la fuente y l su luminosidad aparente. Para determinar l consideremos un telescopio de espejo circular de área A , con el origen de coordenadas en el centro del espejo el cual es normal a la línea de observación de la fuente en $r = r_1$.

La potencia total P , recibida en el espejo es dada por

$$P = L \left(\frac{a(t_1)}{a(t_0)} \right)^2 w. \quad (\text{C12})$$

Donde el factor $(a(t_1)/a(t_0))^2$ surge debido a que la expansión del universo reduce la energía de los fotones por un factor $(1+z)^{-1}$ e incrementa por un factor $(1+z)$ el intervalo de tiempo entre fotones emitidos por la fuente. La cantidad w corresponde al cociente entre el área del espejo y el área de la esfera que rodea a la fuente y que tiene al observador como uno de sus puntos

$$w = \frac{A}{4\pi a(t_0)^2 r_1^2}. \quad (\text{C13})$$

Así la luminosidad aparente esta dada por

$$\begin{aligned} l &= \frac{P}{A}, \\ &= \frac{La(t_1)^2}{4\pi a(t_0)^4 r_1^2}. \end{aligned} \quad (\text{C14})$$

Por lo tanto

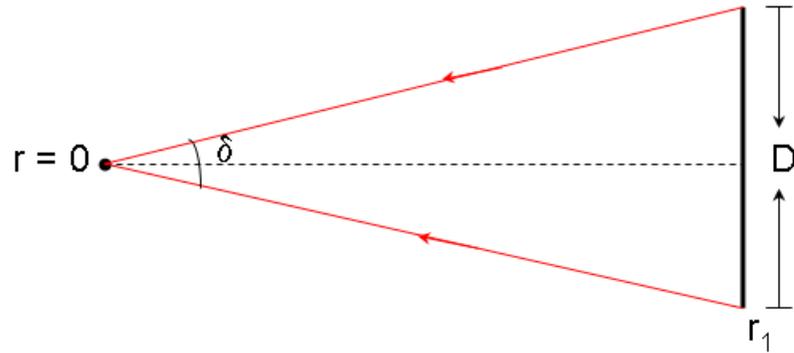
$$d_L(z) = a(t_0) r_1 (1+z). \quad (\text{C15})$$

* Distancia diametral angular. La distancia diametral angular se define como el cociente entre el diámetro propio D del objeto y el diámetro angular δ observado.

Consideremos una fuente en $r = r_1$ cuyo centro esta en $\theta = 0$. En el instante $t = t_1$, desde los bordes opuestos de la fuente salen rayos de luz que llegan al

observador en el instante $t = t_o$, formando un ángulo δ

FIGURA 9. Esquema para la distancia diametral angular.



Entonces para valores pequeños de δ la métrica (C1) con r y ϕ constantes nos da el diámetro propio de la fuente

$$D = a(t_1) r_1 \delta . \quad (\text{C16})$$

Por lo tanto la distancia diametral angular para la fuente esta dada por

$$d_A = a(t_1) r_1 . \quad (\text{C17})$$

Su relación con la distancia de luminosidad la podemos obtener de las ecuaciones (C14) y (C16)

$$d_L = (1 + z)^2 d_A . \quad (\text{C18})$$