



ESTUDIO TEÓRICO DE LAS MANIOBRAS ORBITALES NECESARIAS PARA  
REALIZAR UN VIAJE INTERPLANETARIO EN EL MARCO DEL PROBLEMA  
ELÍPTICO DE LOS TRES CUERPOS Y LA PERTURBACIÓN GENERADA POR LA  
NO ESFERICIDAD PLANETARIA

LUIS LEONARDO CHAVES VELASQUEZ

UNIVERSIDAD DE NARIÑO  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE FÍSICA  
SAN JUAN DE PASTO

2009

ESTUDIO TEÓRICO DE LAS MANIOBRAS ORBITALES NECESARIAS PARA  
REALIZAR UN VIAJE INTERPLANETARIO EN EL MARCO DEL PROBLEMA  
ELÍPTICO DE LOS TRES CUERPOS Y LA PERTURBACIÓN GENERADA POR LA  
NO ESFERICIDAD PLANETARIA

LUIS LEONARDO CHAVES VELASQUEZ

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR EL TÍTULO DE FÍSICO

DIRECTOR:  
MSc. ALBERTO QUIJANO VODNIZA

UNIVERSIDAD DE NARIÑO  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE FÍSICA  
SAN JUAN DE PASTO  
2009

Nota de aceptación

---

---

---

---

---

---

Director

---

Jurado

---

Jurado

San Juan de Pasto, Mayo de 2009

Las ideas y conclusiones aportadas en este trabajo de grado, son responsabilidad exclusiva del autor

Artículo primero del acuerdo No. 324 de Octubre 11 de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

## AGRADECIMIENTOS

A mis padres por haberme apoyado desde el principio en mi carrera universitaria.

Al profesor Alberto Quijano Vodniza por darme la oportunidad de pertenecer al grupo de investigación en Astrofísica de la Universidad de Nariño, por todas las correcciones y aportes del trabajo y por enfocarme a trabajar en temas de exploración espacial.

A la Universidad de Nariño por formarme como profesional.

A mi compañera Karla Reyes por todas las sugerencias durante el desarrollo del trabajo.

A Mario Ramos por la valiosa ayuda en la elaboración de las gráficas y en todo lo concerniente con la parte computacional.

A mis demás compañeros y amigos.

Un reconocimiento muy importante a mi maestro virtual Carl Sagan quien en gran medida es responsable de mi gusto por la ciencia.

## DEDICATORIA

Este trabajo está dedicado a mis padres Lucho y Myriam y a mi hermanita Gina Maria.

## TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
1. INTRODUCCIÓN	18
2. OBJETIVOS	20
2.1 OBJETIVO GENERAL	20
2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	20
3. EL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS	21
3.1 ECUACION DE MOVIMIENTO	21
3.2 LEYES DE KEPLER	22
3.2.1 Primera ley de Kepler	22
3.2.2 Segunda ley de Kepler	23
3.2.3 Tercera ley de Kepler	23
3.3 LA ÓRBITA EN EL ESPACIO	24
3.4 EXPANSIONES ELÍPTICAS	25
4. EL PROBLEMA ELÍPTICO RESTRINGIDO DE LOS TRES CUERPOS	27
4.1 ESFERA DE INFLUENCIA GRAVITACIONAL	28
5. MANIOBRAS ORBITALES	30
5.1 MANIOBRAS ORBITALES INSTANTÁNEAS	30
5.2 TRANSFERENCIA DE HOHMANN	31
6. TEORÍA DE PERTURBACIONES	34
7. SOLUCIÓN SECULAR DE LAS ECUACIONES PLANETARIAS DE LA-GRANGE	36



7.1 FUNCIONES PERTURBADORAS $R_1$ Y $R_2$	36
7.2 CÁLCULO DE LA FUNCIÓN PERTURBADORA PROMEDIO PARA EL CASO DE LA NO ESFERICIDAD PLANETARIA	38
7.3 CÁLCULO DE LA FUNCIÓN PERTURBADORA PROMEDIO PARA EL CASO DE LA PERTURBACIÓN SOLAR	40
7.4 EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LOS ELEMENTOS ORBITALES	54
8. VIAJE INTERPLANETARIO BAJO LA SOLUCIÓN SECULAR DE LAS ECUACIONES PLANETARIAS DE LAGRANGE	59
8.1 INYECCIÓN A LA ÓRBITA DE PARQUEO	59
8.2 ÓRBITA DE PARQUEO PERTURBADA	59
8.3 VIAJE INTERPLANETARIO	61
8.4 EVOLUCIÓN DE LA ÓRBITA DESPUÉS DE LA CAPTURA	67
CONCLUSIONES	72
RECOMENDACIONES	73
BIBLIOGRAFIA	74
ANEXOS	75

## LISTA DE CUADROS

	Pág.
1. Parámetros de las cónicas	23
2. Radios de Actividad	29
3. Datos planetarios	82

## LISTA DE FIGURAS

	Pág.
1. Problema de dos cuerpos	21
2. Órbita en el espacio	24
3. Diagrama en el problema elíptico de los tres cuerpos	27
4. Maniobra orbital de impulso instantáneo	31
5. Transferencia de Hohmann	32
6. Geometría del problema	36
7. Evolución secular de los elementos orbitales perturbados en la órbita de parqueo	60
8. Viaje interplanetario	61
9. Escape Terrestre	62
10. Captura Planetaria	65
11. Evolución secular de los elementos orbitales en torno a Mercurio	67
12. Evolución secular de los elementos orbitales en torno a Venus	67
13. Evolución secular de los elementos orbitales en torno a Marte	68
14. Evolución secular de los elementos orbitales en torno a Júpiter	68
15. Evolución secular de los elementos orbitales en torno a Saturno	69
16. Evolución secular de los elementos orbitales en torno a Urano	69
17. Evolución secular de los elementos orbitales en torno a Neptuno	70
18. Geometría de las secciones cónicas	75
19. Contribución de un pequeño elemento de masa al geopotencial	78
20. Sonda espacial Nozomi	80

## LISTA DE ANEXOS

	Pág.
Anexo A. Geometría de las secciones cónicas	74
Anexo B. El geopotencial	76
Anexo C. Series de Fourier	78
Anexo D. Sonda espacial NOZOMI	79
Anexo E. Datos planetarios	81

## GLOSARIO

**ANOMALÍA EXCÉNTRICA:** es el ángulo medido desde el centro de la elipse, que forma la proyección del planeta sobre la circunferencia principal y el eje de la elipse. Se designa por E. La relación entre la anomalía media y la anomalía excéntrica es la llamada Ecuación de Kepler.

**ANOMALÍA VERDADERA:** ángulo que el radio vector forma con la línea de las ápsides.

**AÑO SIDERAL:** es el tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos de la Tierra por un mismo punto de su órbita, tomando como referencia a las estrellas. Generalmente usado por los astrónomos, es la medida más exacta de un año. Su duración es de 366,256436918716 días siderales. Equivale a 365,256363 días solares medios (365 días 6 horas 9 minutos 9,7632 segundos)

**CINTURÓN DE KUIPER:** el cinturón de Kuiper es un conjunto de cuerpos de carácter cometa que orbitan el Sol a una distancia entre 30 y 50 ua. El cinturón de Kuiper recibe su nombre en honor a Gerard Kuiper, que predijo su existencia en los años 1960, 30 años antes de las primeras observaciones de estos cuerpos. Pertenecen al grupo de los llamados objetos transneptunianos .

**DÍA SIDERAL:** es el lapso entre dos tránsitos sucesivos del equinoccio medio o, de manera equivalente, es el lapso entre dos culminaciones sucesivas de una estrella en el meridiano local. Para un observador determinado el día sidéreo comienza cuando el punto Aries atraviesa su meridiano.

**ECLÍPTICA:** plano definido por la órbita de la Tierra alrededor del Sol, el cual se proyecta como un círculo máximo sobre la esfera celeste inclinado en unos 23,5 grados con relación al ecuador celeste.

**ECUADOR CELESTE:** proyección del ecuador terrestre en la esfera celeste. Su plano es perpendicular al eje de rotación de la Tierra.

**ESTRATOSFERA:** es la capa de la atmósfera que se sitúa entre la troposfera y la mesosfera, y se extiende desde unos 11 hasta unos 50 km de la superficie terrestre.

**EXCENTRICIDAD ( $e$ ):** parámetro que define la forma de la órbita de un cuerpo alrededor de otro. Hace parte de las propiedades de las secciones cónicas.

**JAXA:** agencia espacial Japonesa.

**LINEA DE LAS APSIDES:** línea que une el perihelio y el afelio, en el caso de la elipse coincide con el semieje mayor.

**LONGITUD MEDIA:** es la longitud a la que un cuerpo orbitando podría encontrarse si su órbita fuese circular y su inclinación fuese nula. La longitud media cambia uniformemente con el tiempo. Los únicos instantes en que es igual a la longitud verdadera son el periastro y el apoastro.

**PERICENTRO:** punto de la órbita más cercano al sol.

**SPACECRAFT:** viajero espacial.

## RESUMEN

En el siguiente trabajo se resolvieron secularmente las ecuaciones planetarias de Lagrange para así analizar las perturbaciones que ejercen el Sol y la no esfericidad planetaria terrestre en la órbita de parqueo de un vehículo espacial. Posteriormente se diseñó un modelo de viaje interplanetario el cual utiliza cinco maniobras orbitales y tiene en cuenta la excentricidad de las órbitas planetarias. Finalmente se estudió la evolución temporal de la órbita después de la captura planetaria.

## ABSTRACT

In the following work the Lagrange planetary equations were secularly solved, in order to analyze the perturbations the Sun and the terrestrial planetary non-sphericity exert over the parking orbit of a spaceship. Later on an interplanetary traveling model was designed, which uses five orbital maneuvers and takes into account the planetary orbits' eccentricity. Finally it was studied the orbit's temporal evolution after the planetary seizure.

## 1. INTRODUCCIÓN

La historia de los viajes interplanetarios empezó con las sondas espaciales Voyager1 y Voyager 2, lanzadas en 1977, las cuales han ampliado nuestro conocimiento sobre Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno. Actualmente estas sondas se están acercando a la orilla del campo magnético solar. El Voyager1, que va más rápido, se encuentra ahora a más de 15000 millones de kilómetros del Sol, y se calcula que aún le faltan 10 años para ingresar al espacio interestelar, y 6000 años para llegar al borde interno de la nube de Oort.

En las últimas décadas el interés se ha centrado en la búsqueda de agua en estado líquido en otro lugar que no sea la Tierra. Este interés a llevado a la NASA a enviar con éxito misiones robóticas al planeta Marte. El orbitador de reconocimiento marciano, junto con los dispositivos robóticos spirit y opportunity, y con la última misión phoenix, han confirmado la existencia de agua congelada bajo la superficie y en latitudes elevadas. El phoenix, descubrió que el suelo de Marte a esa latitud es alcalino.

La Agencia Espacial Europea (ESA) conjuntamente con la NASA y la Agencia Espacial Italiana, lanzaron el 15 de Octubre de 1997 con rumbo a Saturno y sus lunas, la sonda espacial Cassini-Huygens. Actualmente el aterrizador Cassini se encuentra en la superficie de Titán, y el orbitador Huygens está en la órbita de Saturno estudiando sus anillos y lunas.

De las últimas misiones de exploración podemos mencionar a Messenger de NASA, la cual orbita actualmente Mercurio trazando el mapa de la superficie y reuniendo información para establecer como se formó este planeta.

Tambien cabe resaltar a la sonda espacial Venus Express, la cual es la primera misión de la ESA al planeta Venus. La misión fue planificada y aprobada en un tiempo récord, habiendo sido propuesta en el año 2001 haciendo uso de la tecnología desarrollada para la misión Europea Mars Express. Venus Express reutiliza también parte de la instrumentación de la misión Rosetta y comparte una parte importante de sus equipos científicos de control de Tierra y análisis científico

Hayabusa de la Agencia Espacial Japonesa, la cual aterrizó en el asteroide Itokawa y recolectó muestras el 28 de Noviembre del 2005. Se espera que regrese a la Tierra en el 2010.

New Horizons de la NASA lanzada el 19 de Enero del 2006; se aproximará a Plutón el 14 de Julio del 2015 y sobrevolará algunos objetos del cinturón de Kuiper. New Horizons es la primera nave a Plutón y sus lunas: Caronte, Hidra y Nix. Estudiará la composición química y la temperatura de la superficie y luego continuará hacia el cinturón de Kuiper. New Horizons es la sonda más rápida de la Tierra hasta el momento alcanzando una velocidad de 16.21 km/s.



Rosetta de la ESA llegará al cometa Churyumov-Gerasimenco en el 2014. Rosetta será la primera nave espacial en entrar en órbita alrededor de un cometa, al cual monitorizará cuando se acerque al Sol. El orbitador lleva un dispositivo que tratará de aterrizar.

Respecto a Colombia, recientemente con el fin que nuestro país ingrese a la carrera espacial, se formó por decreto de la Vicepresidencia de la República la Comisión Colombiana del Espacio, la cual tiene como visión consolidar el acceso al conocimiento sobre el territorio nacional, la Tierra, y el espacio, mediante la aplicación de tecnologías satelitales, la consolidación de programas de investigación y desarrollo tecnológico y el desarrollo de la industria aeroespacial en Colombia, con el fin de atender necesidades actuales y futuras, de los sectores productivos, académico y privado.

El Observatorio Astronómico de la Universidad de Nariño fue visitado el pasado mes de abril de 2008 por la Comisión Colombiana del Espacio, allí se expusieron los trabajos de investigación que se llevan a cabo en el grupo de investigación de astrofísica y entre ellos se propuso diseñar un satélite tipo Starshine netamente Colombiano a bajo costo. Los trabajos y la idea del satélite atrajeron la atención de los delegados, tanto así que decidieron incluir al Observatorio Astronómico en la Comisión. Por lo tanto es de gran importancia realizar estudios tanto experimentales como teóricos que contribuyan al entendimiento y desarrollo de la ciencias planetarias y aeroespaciales en nuestro país.

En el trabajo se incluyen la perturbación generada por la perturbación solar y la perturbación generada por la no esfericidad planetaria sobre un vehículo espacial cuando este realiza un viaje interplanetario. Los capítulos 3, 4, 5, y 6 recolectan todo el fundamento teórico necesario para realizar el estudio tal como son: el problema de los dos cuerpos, el problema de los tres cuerpos, las maniobras orbitales, y la teoría de perturbaciones. El capítulo 7 se enfoca en la solución secular de las ecuaciones planetarias de Lagrange y la evolución temporal de los elementos orbitales. El capítulo 8 trata los viajes interplanetarios teniendo en cuenta la excentricidad planetaria y las soluciones seculares del capítulo 7.

Este trabajo es el primero en su tipo que se realiza en la Universidad de Nariño y tiene como fin poner un punto de partida para la realización de diversos proyectos del tema, no sólo en la carrera de física sino también en áreas como la Biología, Química y las Ingenierías, y así contribuir al desarrollo de la tecnología aeroespacial en Colombia.

## 2. OBJETIVOS

### 2.1 OBJETIVO GENERAL

Realizar un estudio teórico de las maniobras orbitales que debe realizar una nave espacial en un viaje interplanetario cuando se ve sometida a la perturbación gravitacional del Sol y el potencial generado por la no esfericidad planetaria.

### 2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Encontrar una solución secular de las ecuaciones planetarias de Lagrange.

Hacer el estudio del viaje interplanetario tomando en consideración la solución secular de las ecuaciones planetarias de Lagrange.

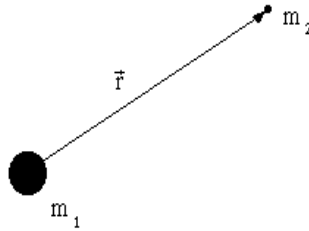
### 3. EL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS

En este capítulo se considera el problema dinámico de dos masas puntuales bajo interacción gravitacional mutua. Tal problema es llamado el problema de los dos cuerpos y tiene solución analítica.

#### 3.1 ECUACIÓN DE MOVIMIENTO<sup>1</sup>

La figura 1 indica la disposición geométrica del problema de dos cuerpos.

Figura 1. Problema de los dos cuerpos.



La ecuación de movimiento relativo de la masa  $m_2$  respecto a  $m_1$  cuando las dos están sometidas a interacción gravitacional mutua es:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (3.1)$$

donde  $\vec{r}$  es el radio vector que define la posición de  $m_2$  respecto a  $m_1$ ,  $\ddot{\vec{r}}$  es la aceleración inercial de  $m_2$  respecto a  $m_1$ , y  $\mu = G(m_1 + m_2)$  es el parámetro gravitacional del sistema en consideración con  $G = 6,6695 \times 10^{-11}$  la constante de gravitación universal cuyo valor está dado en el sistema internacional de medidas. A la masa  $m_1$  la llamamos masa central.

Como consecuencia de la ecuación (3,1) se deducen la conservación del momentum angular específico (momentum angular por unidad de masa)  $\vec{h}$ , y la conservación de la energía específica (energía por unidad de masa)  $\varepsilon$ . Estos teoremas de conservación se expresan de la siguiente manera:

$$\vec{h} = c\vec{e} \quad (3.2)$$

y

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2\varepsilon} \quad (3.3)$$

donde  $v$  es la velocidad de  $m_2$  respecto a  $m_1$ .

Como consecuencia de la conservación del momentum angular se dice que el movimiento

<sup>1</sup>WIE B. Space Vehicle Dynamics and Control. sec. 3.1

se lleva a cabo en un plano llamado plano de la órbita.

Una forma muy útil de expresar la conservación de la energía se conoce como ley de vis-viva la cual está dada por:

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}} \quad (3.4)$$

La velocidad orbital, denotada como  $v_c$  de una órbita circular simplemente es:

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad (3.5)$$

La velocidad de escape  $v_e$  desde la superficie de la Tierra es:

$$v_e = \sqrt{\frac{2\mu_{\oplus}}{R_{\oplus}}} = 11,18km/s \quad (3.6)$$

La ecuación de energía para una órbita hiperbólica cuando  $r \rightarrow \infty$  es:

$$\varepsilon = \frac{v_{\infty}^2}{2} = -\frac{\mu}{2a} \quad (3.7)$$

Estas velocidades se necesitarán posteriormente para el estudio de las maniobras orbitales.

El modulo del momentum angular específico se escribe en la forma:

$$h = r^2 \dot{f} \quad (3.8)$$

donde  $f$  se denomina anomalía verdadera.

## 3.2 LEYES DE KEPLER<sup>2</sup>

A partir de la integración de la ecuación de movimiento relativo se demuestran las tres leyes de movimiento planetario establecidas empíricamente por Johannes Kepler:

3.2.1 Primera ley de Kepler. Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos. Esta ley se generaliza a decir que la órbita de los cuerpos celestes es una cónica con el Sol en uno de sus focos. Matemáticamente se deduce a partir de la ecuación (3.1) que:

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos(f)} \quad (3.9)$$

esta es la ecuación de la órbita del problema de dos cuerpos, allí  $f$  es la anomalía verdadera y  $e$  la excentricidad de la órbita.

Si se define el parámetro:

$$p = h^2/\mu \quad (3.10)$$

---

<sup>2</sup>WIE B. Space Vehicle Dynamics and Control. pág. 213

se puede escribir la ecuación (3.9) de la siguiente forma:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(f)} \quad (3.11)$$

Las cuatro posibles cónicas se especifican de acuerdo a los parámetros geométricos  $p$  y  $e$  tal como se muestra en el cuadro 1:

Cuadro 1. Parámetros de las cónicas

Cónica	excentricidad	parámetro
Circunferencia	$e = 0$	$p = a$
Elipse	$0 < e < 1$	$p = a(1 - e^2)$
Parábola	$e = 1$	$p = 2q$
Hipérbola	$e > 1$	$p = a(e^2 - 1)$

Así  $h$  para una órbita elíptica se puede escribir en la forma:

$$h = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \quad (3.12)$$

3.2.2 Segunda ley de Kepler. Conocida como ley de las áreas establece que una línea que une un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2} = cte \quad (3.13)$$

donde  $A$  es el área orbital barrida por el radio vector  $\vec{r}$ .

3.2.3 Tercera ley de Kepler. El cuadrado del período orbital de un planeta alrededor del Sol es proporcional al cubo de su distancia media.

Matemáticamente se escribe como:

$$P^2 = \left( \frac{4\pi^2}{\mu} \right) a^3 \quad (3.14)$$

donde  $P$  es el período, y  $a$  es el semieje mayor de la órbita.

Se define el movimiento medio  $n$  como:

$$n = \frac{2\pi}{P} \quad (3.15)$$

por lo cual se tiene que:

$$\mu = n^2 a^3 \quad (3.16)$$

Estas relaciones se necesitarán en los capítulos 7 y 8 para expandir la función de perturbación planetaria y hacer el estudio del viaje interplanetario.

### 3.3 LA ÓRBITA EN EL ESPACIO<sup>3</sup>

Para describir la órbita en el espacio se emplean seis escalares, llamados elementos clásicos. De los seis elementos clásicos cinco son suficientes para describir el tamaño, achatamiento, y orientación de una órbita ya sea con respecto al plano ecuatorial geocéntrico, al plano de la eclíptica, o al plano ecuatorial planetario. El último parámetro es necesario para encontrar la ubicación en un tiempo dado.

Estos seis parámetros son:  $a$  es el semieje mayor de la órbita,  $e$  su excentricidad,  $\Omega$  la longitud del nodo ascendente,  $I$  la inclinación del plano de la órbita,  $\omega$  el argumento del perifoco, y  $M$  la anomalía media.

La anomalía media  $M$  se puede expresar en términos de una cantidad llamada longitud media en el pericentro  $\epsilon$ , y también en términos de la longitud media  $\lambda$ . Estas cantidades se relacionan por medio de la siguiente ecuación:

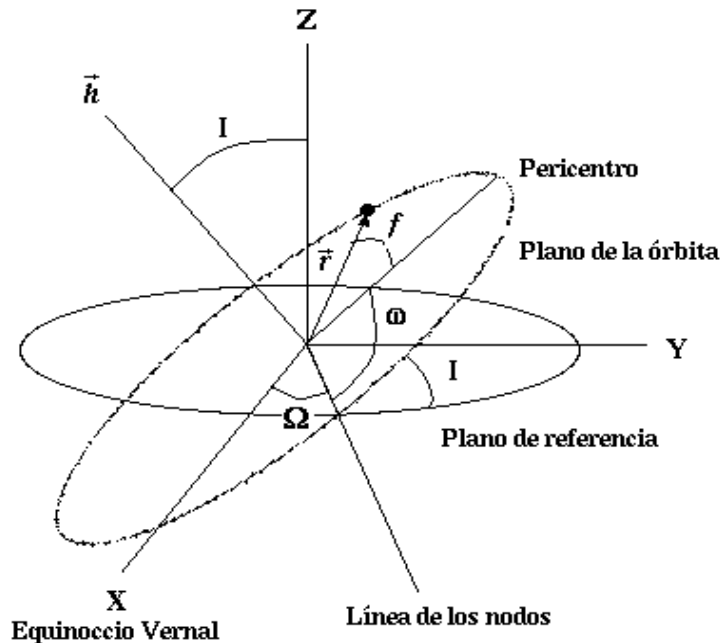
$$\lambda = M + \bar{\omega} = nt + \epsilon \quad (3.17)$$

donde  $\bar{\omega}$  es la longitud del pericentro, la cual resulta de hacer:

$$\bar{\omega} = \Omega + \omega \quad (3.18)$$

La geometría de la órbita en el espacio se encuentra en la figura 2.

Figura 2. Órbita en el espacio



<sup>3</sup>WIE B. Space Vehicle Dynamics and Control. pág 226

Si se conocen los elementos clásicos es posible determinar la posición en el espacio de acuerdo a las ecuaciones de transformación:

$$\frac{x}{r} = \cos(\Omega) \cos(\omega + f) - \sin(\Omega) \sin(\omega + f) \cos(I) \quad (3.19)$$

$$\frac{y}{r} = \sin(\Omega) \cos(\omega + f) + \cos(\Omega) \sin(\omega + f) \cos(I) \quad (3.20)$$

$$\frac{z}{r} = \sin(\omega + f) \sin(I) \quad (3.21)$$

donde  $x, y, z$  son las componentes cartesianas de un vector en el espacio.

### 3.4 EXPANSIONES ELÍPTICAS<sup>4</sup>

Los problemas en la dinámica del sistema solar que se pueden integrar son realmente pocos, frecuentemente es necesario hacer aproximaciones con el fin de obtener soluciones prácticas a un problema en particular. Por ejemplo la ecuación de Kepler puede ser resuelta por medio de una serie de potencias en la excentricidad. Para el problema a tratar posteriormente se necesita un conjunto de expansiones, las cuales se expresan en términos de las funciones de Bessel. En particular se necesita series para las cantidades  $r/a$ ,  $\cos(E)$ ,  $(a/r)^3$ ,  $\sin(f)$ ,  $\cos(f)$ , y  $(f - M)$ .

La serie para  $r/a$  de cuarto orden en la excentricidad es:

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} = 1 - e \cos(M) + \frac{e^2}{2} (1 - \cos(2M)) + \\ \frac{3e^3}{8} (\cos(M) - \cos(3M)) + \frac{e^4}{3} (\cos(2M) - \cos(4M)) \end{aligned} \quad (3.22)$$

esta serie se utilizará para expandir la función de perturbación planetaria.

Usando el hecho que  $E = (1 - r/a)$  se encuentra la siguiente expansión para el coseno de la anomalía excentrica  $E$ .

$$\begin{aligned} \cos(E) = \cos(M) + \frac{e}{2} (\cos(2M) - 1) \\ + \frac{3e^2}{8} (\cos(3M) - \cos(M)) + e^3 \left( \frac{1}{3} \cos(4M) - \frac{1}{3} \cos(2M) \right) \\ + e^4 \left( \frac{5}{192} \cos(M) - \frac{45}{128} \cos(3M) + \frac{125}{384} \cos(5M) \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Otra serie que se utilizará es:

$$\begin{aligned} \left( \frac{a}{r} \right)^3 = 1 + 3e \cos(M) + e^2 \left( \frac{3}{2} + \frac{9}{2} \cos(2M) \right) \\ + e^3 \left( \frac{27}{8} \cos(M) + \frac{53}{8} \cos(3M) \right) + e^4 \left( \frac{15}{8} + \frac{7}{2} \cos(2M) + \frac{77}{8} \cos(4M) \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

---

<sup>4</sup>MURRAY.C,y DERMOTT.S. Solar System Dynamics. sec 2.5

esta serie tambien es usada para la expansión de la función perturbadora.

Las series para  $\text{sen}(f)$  y  $\text{cos}(f)$  son:

$$\begin{aligned} \text{sen}(f) = & \text{sen}(M) + e \text{sen}(2M) \\ & + e^2 \left( \frac{9}{8} \text{sen}(3M) - \frac{7}{8} \text{sen}(M) \right) + e^3 \left( \frac{4}{3} \text{sen}(4M) - \frac{7}{6} \text{sen}(2M) \right) \\ & + e^4 \left( \frac{17}{192} \text{sen}(M) - \frac{207}{128} \text{sen}(3M) + \frac{625}{384} \text{sen}(5M) \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \text{cos}(f) = & \text{cos}(M) + e(\text{cos}(2M) - 1) + \\ & \frac{9e^2}{8} (\text{cos}(3M) - \text{cos}(M)) + \frac{4e^3}{3} (\text{cos}(4M) - \text{cos}(2M)) \\ & + e^4 \left( \frac{25}{192} \text{cos}(M) - \frac{225}{128} \text{cos}(3M) + \frac{625}{384} \text{cos}(5M) \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

La serie para  $(f - M)$  es:

$$\begin{aligned} f - M = & 2e \text{sen}(M) + \frac{5}{4} e^2 \text{sen}(2M) + e^3 \left( \frac{13}{12} \text{sen}(3M) - \frac{1}{4} \text{sen}(M) \right) \\ & + e^4 \left( \frac{103}{96} \text{sen}(4M) - \frac{11}{24} \text{sen}(2M) \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

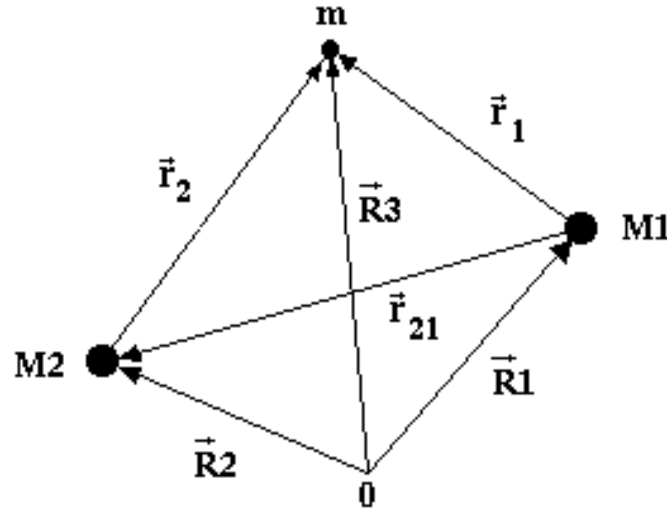
Este capítulo fue fundamental para realizar este trabajo, ya que en la sección 8.3 donde se hace la descripción matemática del viaje interplanetario, se considera que el vehículo espacial obedece en todo momento las ecuaciones del problema de los dos cuerpos, esto se debe a que las maniobras orbitales son instantáneas, mientras que las perturbaciones que se trabajaron son de largo período y afectan la órbita de parqueo y la órbita posterior a la captura planetaria.



#### 4. EL PROBLEMA ELÍPTICO RESTRINGIDO DE LOS TRES CUERPOS<sup>5</sup>

Se considera el sistema de tres cuerpos tal como se muestra en la figura 3. Las masas de los dos cuerpos primarios son denotadas por  $M_1$  y  $M_2$ , la masa del tercer cuerpo es denotada por  $m$  y se asume que no afecta gravitacionalmente a las otras masas. El punto 0 en la figura 3 es el origen de un sistema inercial de referencia.

Figura 3. Diagrama en el problema elíptico de los tres cuerpos.



En el problema a tratar posteriormente las dos masas primarias son la masa Solar y la masa planetaria, y la masa infinitesimal es la masa del vehículo espacial o spacecraft.

La aceleración del spacecraft respecto al sistema inercial es:

$$\ddot{\vec{R}}_3 = -\left(\frac{GM_1}{r_1^3}\right)\vec{r}_1 - \left(\frac{GM_2}{r_2^3}\right)\vec{r}_2 \quad (4.1)$$

Definiendo  $\vec{r}_{21}$  como el vector posición que va desde  $M_1$  hasta  $M_2$  notamos que:

$$\vec{r}_{21} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 \quad (4.2)$$

La aceleración de la masa  $M_1$  con respecto al origen del sistema inercial es:

$$\ddot{\vec{R}}_1 = \left(\frac{GM_2}{r_{21}^3}\right)\vec{r}_{21} + \left(\frac{Gm}{r_1^3}\right)\vec{r}_1 \quad (4.3)$$

La ecuación de movimiento relativo de  $m$  con respecto a  $M_1$  puede escribirse como:

$$\ddot{\vec{r}}_1 + G(M_1 + m)\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} = -GM_2\left(\frac{\vec{r}_2}{r_2^3} + \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}^3}\right) \quad (4.4)$$

<sup>5</sup>WIE B. Space Vehicle Dynamics and Control. sec 3.8

Similarmente la ecuación de movimiento relativo de  $m$  con respecto a  $M_2$  es:

$$\ddot{\vec{r}}_2 + G(M_2 + m)\frac{\vec{r}_2}{r_2^3} = -GM_1 \left( \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}^3} \right) \quad (4.5)$$

A continuación se define el concepto de esfera de influencia gravitacional, concepto básico a al hora de estudiar las maniobras orbitales en los viajes interplanetarios.

#### 4.1 ESFERA DE INFLUENCIA GRAVITACIONAL

El lado derecho de la ecuación (4,4) puede considerarse como una perturbación en el problema de los dos cuerpos entre  $M_1$  y  $m$  generada por la presencia de  $M_2$ . El lado derecho de la ecuación (4,5) puede considerarse como una perturbación en el problema de los dos cuerpos entre  $M_2$  y  $m$  generada por la presencia de  $M_1$ .

Ahora se considera al spacecraft en órbita entre dos cuerpos de atracción primarios de masas  $M_1$  y  $M_2$ , los cuales estan separados una distancia  $D$ . El radio de la esfera de influencia, llamado radio de actividad  $r$  de  $M_2$  relativo a  $M_1$  puede ser definido como:

$$\frac{r}{D} \approx \left[ \frac{M_2}{M_1} \right]^{\frac{2}{5}} \quad (4.6)$$

Así, cuando el vehículo espacial está fuera de la actividad de la esfera de  $M_2$ , su movimiento es unicamente influenciado por  $M_1$  y es descrito por:

$$\ddot{\vec{r}}_1 + G(M_1 + m)\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \approx 0 \quad (4.7)$$

De igual forma si un vehículo espacial está dentro de la esfera de influencia de  $M_2$ , su movimiento orbital es influenciado solamente por  $M_2$  y es descrito por:

$$\ddot{\vec{r}}_2 + G(M_2 + m)\frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \approx 0 \quad (4.8)$$

Así, en un modelo sencillo el comportamiento del spacecraft obedece en todo momento las ecuaciones de movimiento del problema de los dos cuerpos. Sin embargo, el problema es mas complejo, ya que no se pueden despreciar todas las perturbaciones que se generan sobre el vehículo, y mas aun teniendo en cuenta la precisión que se debe tener en una misión interplanetaria.

Posteriormente consideraremos que el lado derecho de la ecuación (4,7) no es nulo por lo cual se estaría considerando la perturbación por gravitacional solar y la perturbación generada por la no esfericidad planetaria.

En el cuadro 2 se indican los radios de actividad de los ocho planetas del sistema solar.

Cuadro 2. Radios de Actividad

Planeta	Radio de actividad (UA)
Mercurio	0.00075
Venus	0.00411
Tierra	0.00621
Marte	0.00385
Júpiter	0.32220
Saturno	0.36400
Urano	0.34600
Neptuno	0.58000

En el capítulo 8 se describe la evolución temporal de los elementos orbitales de un spacecraft cuando este se encuentra dentro de la esfera de influencia gravitacional planetaria y se ve sometido a la perturbación de un tercer cuerpo, en este caso el Sol, y la perturbación generada por la no esfericidad planetaria.

En este trabajo se hace una descripción puramente teórica de las maniobras orbitales, sin embargo en proyectos posteriores se pueden hacer simulaciones computacionales del tema por lo cual se necesitarán los datos compilados en el cuadro 2.

## 5. MANIOBRAS ORBITALES<sup>6</sup>

### 5.1 MANIOBRAS ORBITALES INSTANTÁNEAS

En dinámica orbital, el término  $\Delta v$  se refiere a una maniobra que es caracterizada por un cambio instantáneo en la velocidad de un vehículo espacial. Este cambio instantáneo es generado por el thrust  $T$  o empuje de la máquina. Hay que distinguir entre el thrust de un spacecraft y thrust de un cohete. El primero se realiza durante un corto período de tiempo, mientras que el thrust de un cohete es considerablemente largo y en astrodinámica se utiliza para enviar un spacecraft a órbita. El thrust está en unidades de fuerza y se escribe como:

$$T = -v_e \frac{dm}{dt} \quad (5.1)$$

donde  $v_e$  es la velocidad de expulsión de los gases. Esta velocidad se expresa como:

$$v_e = g_o I_{sp} \quad (5.2)$$

donde  $g_o$  es la aceleración gravitacional local,  $I_{sp}$  es el impulso específico. El impulso específico está en unidades de tiempo y es una medida de la cantidad de combustible quemado durante la maniobra.

Una maniobra orbital se rige por la ecuación de Tsiolkovski dada por:

$$\Delta v = -v_e \ln(m/m_0) \quad (5.3)$$

donde

$$\Delta v = v - v_0 \quad (5.4)$$

aquí  $v_0$  y  $m_0$  son la velocidad y masa del vehículo antes de la maniobra, y  $v$ ,  $m$  son la velocidad y masa después de la maniobra.

La relación (5.3) es el principio de movimiento del cohete y de cualquier viaje que incluya maniobras y se aplica al hecho de que un vehículo consiga aceleración o propulsión a expensas de la expulsión de parte de su masa a grandes velocidades a través de un orificio. La propulsión de las naves espaciales se usa para cambiar la velocidad de las mismas o para corregir órbitas de los satélites artificiales. Existen diferentes métodos de propulsión. Cada método tiene sus propias ventajas y desventajas. La mayoría de las naves se empujan mediante el calor de una reacción en cadena que se expelle por un orificio a muy alta velocidad. Este tipo de motor se denomina motor cohete.

La masa de combustible quemado durante la maniobra  $\Delta v$  se denota como  $\Delta m$  y se expresa en la forma:

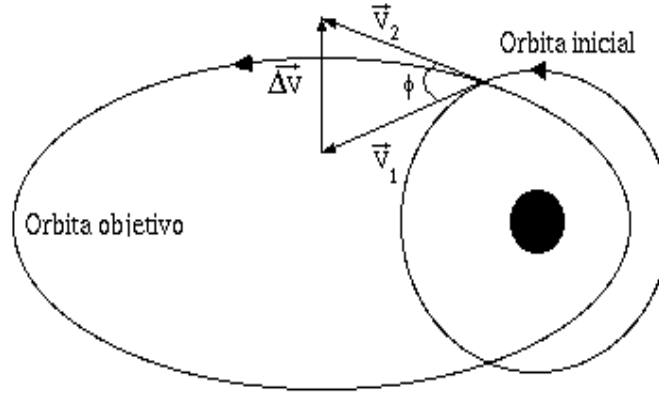
$$|\Delta m| = m_0 [1 - e^{(-\frac{\Delta v}{v_e})}] \quad (5.5)$$

---

<sup>6</sup>WIE B. Space Vehicle Dynamics and Control. pág(270-272)

El metodo para una maniobra entre órbitas coplanares intersectadas se ilustra en la figura 4.

Figura 4. Maniobra orbital de impulso instantáneo.



El cambio de velocidad necesario para transferir orbitas es:

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \quad (5.6)$$

donde  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  son los vectores velocidad de las órbitas inicial y final en el punto donde se realiza la maniobra, y  $\Delta \vec{v}$  es el cambio de velocidad requerida para ingresar a otra órbita.

Usando la ley de los cosenos, la magnitud del cambio de velocidad es:

$$\Delta v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos(\phi)} \quad (5.7)$$

donde  $\phi$  es el ángulo entre  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$ .

Similarmente, el cambio de velocidad requerido para un cambio de inclinación entre dos órbitas circulares de igual período es:

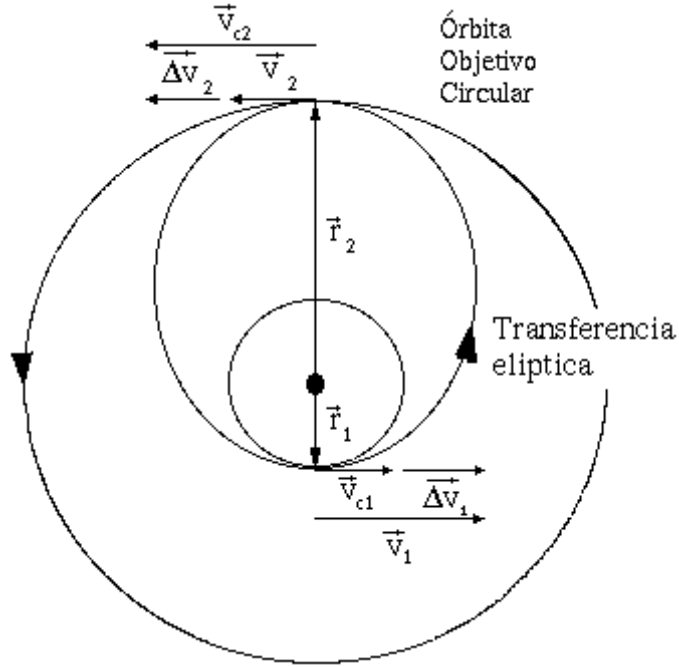
$$\Delta v = 2v_c \sin\left(\frac{\Delta i}{2}\right) \quad (5.8)$$

donde  $v_c$  es la velocidad circular de ambas órbitas y  $\Delta i$  es el ángulo de inclinación entre ellas. La maniobra se debe realizar ya sea en el nodo ascendente o en el nodo descendente ya que son puntos de referencia conocidos.

## 5.2 TRANSFERENCIA DE HOHMANN

Ahora trabajemos el problema concerniente a la transferencia entre órbitas coplanares circulares, tal como se muestra en la figura 5.

Figura 5. Transferencia de Hohmann



En la gráfica  $v_{c1}$  es la velocidad de un vehículo espacial a lo largo de una órbita circular de radio  $r_1$ . Esta velocidad está dada por:

$$v_{c1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \quad (5.9)$$

La velocidad requerida para abandonar la órbita circular y viajar a lo largo de una elipse de transferencia (elipse de Hohmann) y alcanzar una órbita objetivo circular de radio  $r_2$  es:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_1} - \frac{\mu}{a}} \quad (5.10)$$

donde  $a$  es el semieje mayor de la elipse de transferencia el cual se escribe como:

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad (5.11)$$

La excentricidad de la elipse de transferencia es:

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} \quad (5.12)$$

El cambio de velocidad requerido en el perigeo de la órbita de transferencia desde la órbita inicial circular es:

$$\Delta v_1 = v_1 - v_{c1} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_1} - \frac{\mu}{a}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \quad (5.13)$$

De igual forma, el cambio de velocidad requerido en el apogeo de la transferencia para entrar a la otra órbita de radio  $r_2$  esta dada por:

$$\Delta v_2 = v_{c2} - v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} - \sqrt{\frac{2\mu}{r_2} - \frac{\mu}{a}} \quad (5.14)$$

El cambio total de velocidad durante la transferencia es:

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 \quad (5.15)$$

El tiempo total de transferencia,  $P$ , es la mitad del período  $T$  de la órbita de transferencia elíptica, es decir:

$$P = \pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (5.16)$$

La descripción de la transferencia de Hohmann, y de las maniobras orbitales que se hacen en este capítulo, se utilizan en el capítulo 8 para estudiar el viaje interplanetario tomando en consideración la excentricidad de las órbitas planetarias.

## 6. TEORÍA DE PERTURBACIONES<sup>7</sup>

El problema de los dos cuerpos describe la interacción gravitacional entre dos masas puntuales que están aisladas del resto del universo. Por lo tanto este problema genera ecuaciones diferenciales que son completamente integrables, de esta forma todas estas ecuaciones tienen solución analítica. Sin embargo al estudiar la dinámica del sistema solar se encuentra que el problema de los dos cuerpos empieza a arrojar resultados que no están de acuerdo con la observación. Por ejemplo un satélite artificial alrededor de la Tierra presenta desviaciones respecto al modelo de dos cuerpos. La razón es clara: La luna y el Sol ejercen atracción gravitacional sobre el satélite; la Tierra no es una esfera perfecta, el rozamiento con la atmósfera genera el denominado efecto *dragging* que hace decaer la órbita del satélite.

Entonces si se quiere encontrar una explicación satisfactoria de la órbita del satélite nos vemos en la obligación de abordar ecuaciones diferenciales que ya no poseen solución analítica. Así la ecuación de movimiento relativo para un problema que incluya varias fuerzas es:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \vec{a}_p \quad (6.1)$$

donde  $\vec{a}_p$  es la aceleración perturbativa.

La teoría de perturbaciones tiene como referencia el problema de los dos cuerpos. La idea básica es describir el movimiento de un cuerpo que está sometido a diversas fuerzas por medio de la ecuación (6.1) y obligarlo a que en cada punto de su trayectoria (que no es una elipse) describa una elipse instantánea. Entonces en cada punto de la trayectoria la elipse está cambiando. Si de alguna manera se logra describir como están cambiando en el tiempo los parámetros que definen la geometría y la orientación de la órbita entonces el problema se resuelve hallando para cada tiempo, los valores de dichos parámetros. Habiendo hallado la dependencia temporal de cada elemento, se aplican los resultados del problema de los dos cuerpos para hallar el vector posición.

El matemático suizo Leonhard Euler, desarrolló junto con el matemático francés Joseph Louis Lagrange, el método de variación de parámetros. Este método consiste en encontrar a través de un conjunto de seis ecuaciones diferenciales de primer orden la variación temporal de los elementos orbitales.

Este conjunto de seis ecuaciones diferenciales resiven el nombre de ecuaciones planetarias de Lagrange y se escriben en la forma<sup>8</sup>:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \quad (6.2)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} (1 - \sqrt{1-e^2}) \frac{\partial R}{\partial \epsilon} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} \quad (6.3)$$

<sup>7</sup>PORTILLA J. Elementos de astronomía de posición. pág(303-304)

<sup>8</sup>Las ecuaciones planetarias de Lagrange fueron extraídas de Solar System Dynamics pág.(251-252)



$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2}(1-\sqrt{1-e^2})}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan \frac{I}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial I} \quad (6.4)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin(I)} \frac{\partial R}{\partial I} \quad (6.5)$$

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan \frac{I}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial I} \quad (6.6)$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\tan(\frac{I}{2})}{na^2\sqrt{1-e^2}} \left( \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} \right) - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin(I)} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \quad (6.7)$$

donde  $R$  se llama función perturbadora y se relaciona con la aceleración perturbativa en la siguiente forma:

$$\vec{a}_p = \nabla R \quad (6.8)$$

El lado derecho de las ecuaciones planetarias de Lagrange contienen derivadas parciales de la función  $R$  en términos de los elementos orbitales. Una forma de resolver el sistema es expandiendo dicha función en series de potencias de las excentricidades e inclinaciones. Este es el método que se utilizará en el capítulo 7 para resolver el problema de la perturbación gravitacional solar y la perturbación generada por la no esfericidad planetaria.

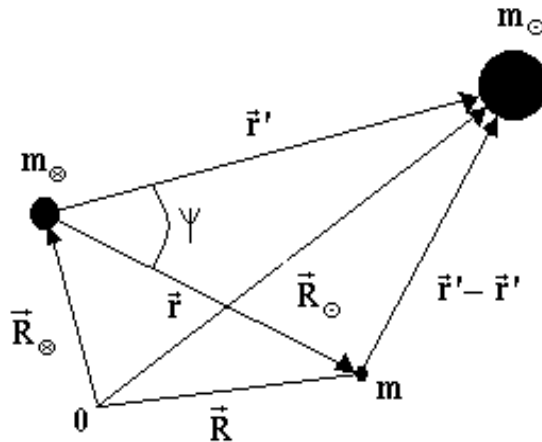
## 7. SOLUCIÓN SECULAR DE LAS ECUACIONES PLANETARIAS DE LAGRANGE<sup>9</sup>

El problema de los tres cuerpos es no integrable, y es más complicado incluyendo una perturbación más, como es el caso de la no esfericidad planetaria. Pero podemos hacer algunas aproximaciones analizando las aceleraciones experimentadas por los tres cuerpos. En nuestro caso el cuerpo central sobre el cual está orbitando el spacecraft dentro de la esfera de influencia gravitacional es un planeta, y la masa perturbadora en este caso es la masa solar. Como la masa del spacecraft es despreciable comparada con la masa de la Tierra y el Sol entonces estos cuerpos no se ven afectados. En este modelo el Sol tampoco se ve afectado por la presencia de la Tierra. Así el spacecraft va a ver perturbada su órbita alrededor de un planeta por motivo de la gravedad solar y la perturbación generada por la no esfericidad planetaria. Estas desviaciones de la órbita pueden ser calculadas analizando la denominada función perturbadora.

### 7.1 FUNCIONES PERTURBADORAS $R_1$ Y $R_2$

Para esta sección se usará como referencia Solar system dynamics, sin embargo este texto trabaja la perturbación únicamente de un tercer cuerpo. Por lo tanto el planteamiento del problema y las ecuaciones de esta sección, las cuales incluyen la perturbación por cuenta de la no esfericidad planetaria, son propias del trabajo de grado.

Figura 6. Geometría del problema.



La figura 6 muestra la disposición geométrica del problema. Allí  $M_{\otimes}$  es la masa planetaria, aquí se asume que el planeta no es una esfera perfecta y por lo tanto genera

<sup>9</sup>En este modelo físico se tiene en consideración el concepto de esfera de influencia gravitacional ya estudiado en capítulo 4. Este concepto se utiliza para incluir las perturbaciones que ejerce el Sol y la no esfericidad planetaria sobre la sonda espacial en las regiones que están dentro del radio de actividad de los planetas.

perturbación,  $M_{\odot}$  es la masa solar, y  $m$  es la masa del spacecraft. Los vectores posición de las tres masas respecto al sistema inercial de referencia 0 son:  $\vec{R}_{\odot}, \vec{R}_{\otimes}, \vec{R}$ .

Por otro lado  $\vec{r}$  es el vector posición del spacecraft respecto a la masa planetaria y  $\vec{r}'$  es el vector posición del Sol respecto al mismo planeta. Estos radiovectores estan dados por:

$$|\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad (7.1)$$

$$|\vec{r}'| = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2} \quad (7.2)$$

y

$$|\vec{r}' - \vec{r}| = [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{1/2} \quad (7.3)$$

Ahora teniendo en cuenta que la masa  $m$  no afecta gravitacionalmente a las masas  $M_{\otimes}$  y  $M_{\odot}$ , y que la fuerza gravitacional de la masa planetaria sobre el Sol es despreciable, las ecuaciones de movimiento del Sol, el Planeta, y el spacecraft respecto al sistema inercial 0 son:

$$\ddot{\vec{R}}_{\odot} = \vec{0} \quad (7.4)$$

$$\ddot{\vec{R}}_{\otimes} = GM_{\odot} \frac{\vec{r}'}{r'^3} \quad (7.5)$$

$$\ddot{\vec{R}} = -GM_{\otimes} \frac{\vec{r}}{r^3} + GM_{\odot} \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} + \nabla R_2 \quad (7.6)$$

donde  $R_2$  es la función perturbadora para el caso de la no esfericidad planetaria la cual se puede aproximar a la siguiente expresión<sup>10</sup>:

$$R_2 = \frac{GM_{\otimes} J_2}{r} \left( \frac{R_{\otimes}}{r} \right)^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2(\phi) \right) \quad (7.7)$$

aquí  $R_{\otimes}$  es el radio planetario,  $\phi$  es la latitud geocéntrica, y  $J_2$  es el segundo armónico zonal y es el que da cuenta del achatamiento planetario<sup>11</sup>.

Transformemos las ecuaciones respecto a un sistema de referencia centrado en la masa  $M_{\otimes}$ , esto se hace por medio de la ecuación:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} - \ddot{\vec{R}}_{\otimes} \quad (7.8)$$

Haciendo los cálculos respectivos la ecuación de movimiento del spacecraft respecto a la masa planetaria es:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu_{\otimes} \frac{\vec{r}}{r^3} + \mu_{\odot} \left[ \frac{(\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right] + \nabla R_2 \quad (7.9)$$

donde  $\mu_{\otimes} = GM_{\otimes}$  es el parámetro gravitacional planetario, y  $\mu_{\odot} = GM_{\odot}$  es el parámetro gravitacional solar.

<sup>10</sup>Esta expresión se obtiene haciendo  $n = 2$  y  $m = 0$  en la ecuación 10 del anexo B.

<sup>11</sup>El segundo armónico zonal para cualquier planeta se obtiene haciendo  $n = 2$  en la ecuación 13 del anexo B.

Comparando con la ecuación (6,1):

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{a}_p$$

La aceleración perturbativa tiene la forma:

$$\vec{a}_p = \mu_{\odot} \left( \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right) + \nabla R_2 \quad (7.10)$$

La ecuación de movimiento relativo del spacecraft respecto al planeta se escribe como:

$$\ddot{\vec{r}} = \nabla(U + R_1 + R_2) \quad (7.11)$$

donde  $U$  es el potencial gravitacional dado por:

$$U = \frac{\mu_{\otimes}}{r} \quad (7.12)$$

y  $R_1$  es la función perturbadora generada por la presencia de un tercer cuerpo, en este caso el Sol. Esta función tiene la forma:

$$R_1 = \frac{\mu_{\odot}}{|\vec{r}' - \vec{r}|} - \mu_{\odot} \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'^3} \quad (7.13)$$

Así la función perturbadora total  $R$  es:

$$R = R_1 + R_2 \quad (7.14)$$

la cual debe ser expandida en términos de los elementos clásicos para encontrar una aproximación analítica al problema.

## 7.2 CÁLCULO DE LA FUNCIÓN PERTURBADORA PROMEDIO PARA EL CASO DE LA NO ESFERICIDAD PLANETARIA<sup>12</sup>

La función perturbadora para el caso de la no esfericidad planetaria la podemos escribir en la forma:

$$R_2 = \frac{\mu_{\otimes} J_2}{r} \left( \frac{R_{\otimes}}{r} \right)^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \text{sen}^2(\phi) \right) \quad (7.15)$$

La latitud geocéntrica  $\phi$  se relaciona con los elementos clásicos de acuerdo con la siguiente relación:

$$\text{sen}(\phi) = \text{sen}(I) \text{sen}(\bar{\omega} - \Omega + f) \quad (7.16)$$

entonces

$$R_2 = \frac{\mu_{\otimes} J_2}{r} \left( \frac{R_{\otimes}}{r} \right)^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \text{sen}^2(I) \text{sen}^2(\bar{\omega} - \Omega + f) \right) \quad (7.17)$$

---

<sup>12</sup>PORTILLA J. Elementos de astronomía de posición. sec 15.1

utilizando la relación del ángulo doble y desarrollando las identidades trigonométricas respectivas se tiene que:

$$R_2 = \frac{\mu_{\otimes} J_2 R_{\otimes}^2}{r^3} \times \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \text{sen}^2(I) + \frac{3}{4} \text{sen}^2(I) \cos(2\bar{\omega} - 2\Omega) \cos(2f) - \frac{3}{4} \text{sen}^2(I) \text{sen}(2\bar{\omega} - 2\Omega) \text{sen}(2f) \right) \quad (7.18)$$

La función perturbadora está ahora en términos de  $r$  y  $f$  los cuales son funciones de los elementos orbitales.

El objetivo del trabajo es encontrar una aproximación secular, es decir que solo tenemos en cuenta aquellas perturbaciones que son significativas y que se hacen explícitas cuando se han acumulado lo suficiente para hacerse notar. Esto se logra calculando la función perturbadora promedio  $\langle R_2 \rangle$  a partir de la integral:

$$\langle R_2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_2 dM \quad (7.19)$$

Multiplicando y dividiendo por  $a^3$  (ecuación 7.18) y luego integrando se obtiene:

$$\langle R_2 \rangle = \frac{\mu_{\otimes} J_2 R_{\otimes}^2}{a^3} \times \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \text{sen}^2(I) \right) I_1 + \left( \frac{3}{4} \text{sen}^2(I) \cos(2\bar{\omega} - 2\Omega) \right) I_2 - \left( \frac{3}{4} \text{sen}^2(I) \text{sen}(2\bar{\omega} - 2\Omega) \right) I_3 \right] \quad (7.20)$$

donde:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{a}{r} \right)^3 dM \quad (7.21)$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2f) \left( \frac{a}{r} \right)^3 dM \quad (7.22)$$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen}(2f) \left( \frac{a}{r} \right)^3 dM \quad (7.23)$$

Para resolver estas integrales se necesita expresar  $M$  en términos de la anomalía verdadera  $f$ . Entonces con la ayuda de las ecuaciones (3,8) y (3,12) se llega a la expresión:

$$r^2 df = \sqrt{\mu a (1 - e^2)} dt \quad (7.24)$$

De  $\mu = n^2 a^3$  y  $M = n(t - t_0)$  se tiene que:

$$dt = a^{3/2} \mu^{-1/2} dM \quad (7.25)$$

reemplazando en (7.25) se llega a la ecuación:

$$r^2 df = a^2 (1 - e^2)^{1/2} dM \quad (7.26)$$

así con la ecuación

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos(f)}$$

las integrales tienen las siguientes soluciones:

$$I_1 = \frac{1}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad (7.27)$$

$$I_2 = I_3 = 0 \quad (7.28)$$

Entonces la función perturbadora promedio  $\langle R_2 \rangle$  es:

$$\langle R_2 \rangle = \frac{GM_{\otimes} R_{\otimes}^2 J_2}{a^3 (1 - e^2)^{3/2}} \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \text{sen}^2(I) \right) \quad (7.29)$$

la cual esta en términos de  $a, e, I$ .

### 7.3 CÁLCULO DE LA FUNCIÓN PERTURBADORA PROMEDIO PARA EL CASO DE LA PERTURBACIÓN SOLAR<sup>13</sup>

Para abordar el problema se empieza definiendo una cantidad adimensional  $\alpha$  tal que:

$$\alpha = \frac{a}{a'} < 1 \quad (7.30)$$

donde  $a$  es el semieje mayor de la órbita del spacecraft respecto a un planeta determinado, y  $a'$  es numericamente igual al semieje mayor de ese planeta respecto al Sol. En general todas las cantidades primadas se refieren a los elementos orbitales de un planeta determinado respecto al Sol.

Ahora sea  $\psi$  el ángulo que forman los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$ . Por lo tanto:

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' = rr' \cos(\psi) \quad (7.31)$$

entonces la función perturbadora  $R_1$  según la ecuación (7.13) se puede escribir como:

$$R_1 = \frac{\mu_{\odot}}{a'} R_D + \frac{\mu_{\odot}}{a'} \alpha R_E \quad (7.32)$$

donde

$$R_D = \frac{a'}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \quad (7.33)$$

$$R_E = -\frac{r}{a} (a'/r')^2 \cos(\psi) \quad (7.34)$$

En estas expresiones  $R_D$  se obtiene a partir de la parte directa de la función perturbadora, y  $R_E$  surge de la parte indirecta debido a una perturbación externa.

<sup>13</sup>MURRAY.C,y DERMOTT.S. Solar System Dynamics. sec 6.4

Se define una cantidad  $\Delta$  en la forma:

$$\Delta = |\vec{r}' - \vec{r}| \quad (7.35)$$

Entonces la ecuación (7.33) se puede escribir como:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{R_D}{a'} = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\psi)]^{-1/2} \quad (7.36)$$

Se define ahora una cantidad  $\Psi$  tal que:

$$\Psi = \cos(\psi) - \cos(\theta - \theta') \quad (7.37)$$

donde

$$\theta = \bar{\omega} + f$$

y

$$\theta' = \bar{\omega}' + f'$$

son las longitudes verdaderas del spacecraft y la Tierra respectivamente. Reemplazando la anterior ecuación en (7.36) se obtiene:

$$\Delta^{-1} = [r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos(\theta - \theta') + \Psi)]^{-1/2} \quad (7.38)$$

La tarea es encontrar la función perturbadora en términos de los elementos orbitales, para lograrlo se expande  $\Delta^{-1}$  en una serie de Taylor en  $\Psi$ :

$$\Delta^{-1} = \frac{1}{\Delta_0} + rr'\Psi \cdot \frac{1}{\Delta_0^3} + \frac{3}{2}(rr'\Psi)^2 \cdot \frac{1}{\Delta_0^5} + \dots \quad (7.39)$$

Esta expresión se puede escribir en términos de una serie de potencias como sigue:

$$\Delta^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \left( \frac{rr'\Psi}{2} \right)^i \frac{1}{\Delta_0^{2i+1}(r, r')} \quad (7.40)$$

donde

$$\frac{1}{\Delta_0} = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')]^{-1/2} \quad (7.41)$$

es la función  $\Delta_0^{-1}$  evaluada en  $\Psi = 0$ .

La función  $\Delta^{-1}$  según (7.40) contiene los términos

$$\left( \frac{rr'\Psi}{2} \right)^i$$

y

$$\Delta_0^{-(2i+1)}(r, r')$$

Para lograr el objetivo es necesario expresar estas cantidades en función de los elementos orbitales. Se empieza con el término  $\Delta_0^{2i+1}(r, r')$  para el cual se define:

$$\rho_0 = [a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(\theta - \theta')]^{1/2} \quad (7.42)$$

Una expansión en series de Taylor centrada en  $(a, a')$  para esta función es:

$$\Delta_0^{-(2i+1)}(r, r') = \Delta_0^{-(2i+1)}(a, a') + \frac{\partial}{\partial r} \Delta_0^{-(2i+1)}(a, a')(r-a) + \frac{\partial}{\partial r'} \Delta_0^{-(2i+1)}(a, a')(r'-a) + \dots \quad (7.43)$$

Es posible demostrar que se cumplen las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial^k}{\partial r^k} \Delta_0^{-(2i+1)}(a, a') = \frac{\partial^k}{\partial a^k} \rho_0^{-(2i+1)} \quad (7.44)$$

$$\frac{\partial^k}{\partial r'^k} \Delta_0^{-(2i+1)}(a, a') = \frac{\partial^k}{\partial a'^k} \rho_0^{-(2i+1)} \quad (7.45)$$

donde el super índice  $k$  indica la  $k$ -ésima derivada.

Entonces la ecuación (7,43) queda en la forma:

$$\begin{aligned} \Delta_0^{-(2i+1)} &= \rho_0^{-(2i+1)} + \frac{\partial}{\partial a} \left( \rho_0^{-(2i+1)} \right) (r-a) + \frac{\partial}{\partial a'} \left( \rho_0^{-(2i+1)} \right) (r'-a') \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \left( \rho_0^{-(2i+1)} \right) (r-a)^2 + \frac{\partial^2}{\partial a \partial a'} \left( \rho_0^{-(2i+1)} \right) (r-a)(r'-a') + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a'^2} \left( \rho_0^{-(2i+1)} \right) (r'-a')^2 + \dots \end{aligned} \quad (7.46)$$

Sea  $\hat{D}_{m,n}$  un operador diferencial definido por:

$$D_{m,n} = a^m a'^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial a^m \partial a'^n} \quad (7.47)$$

se definen también las cantidades

$$\varepsilon = \frac{r}{a} - 1 \quad (7.48)$$

y

$$\varepsilon' = \frac{r'}{a'} - 1 \quad (7.49)$$

estos últimos coeficientes son de orden cero en las excentricidades e inclinaciones ya que en la expansión se deben elevar a orden  $n$ . Entonces la función  $\Delta_0^{-(2i+1)}$  (ecuación (7.46)) con ayuda de (7.47), (7.48) y (7.49) queda en la forma:

$$\Delta_0^{-(2i+1)} = \hat{L} \rho_0^{-(2i+1)} \quad (7.50)$$

donde  $\hat{L}$  es un operador diferencial dado por:

$$\hat{L} = 1 + \varepsilon D_{1,0} + \varepsilon' D_{0,1} + \frac{1}{2!} (\varepsilon^2 D_{2,0} + 2\varepsilon\varepsilon' D_{1,1} + \varepsilon'^2 D_{0,2}) + \dots \quad (7.51)$$

Por otro lado se puede escribir:

$$\begin{aligned} \rho_0^{-(2i+1)} &= [a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(\theta - \theta')]^{-\left(i+\frac{1}{2}\right)} = \\ &= a'^{-(2i+1)} [1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\theta - \theta')]^{-\left(i+\frac{1}{2}\right)} \end{aligned} \quad (7.52)$$



Se analiza ahora la función:

$$F(\theta - \theta') = [1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\theta - \theta')]^{-(i+\frac{1}{2})} \quad (7.53)$$

Esta función es continua para todo  $\alpha < 1$ , y además es periódica; por lo tanto se puede representar por una serie de Fourier de la forma:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(jx) \quad (7.54)$$

aquí se ha cambiado  $\theta - \theta'$  por  $x$ , e  $(i + \frac{1}{2})$  por  $s$ , también se ha anulado la parte  $\sin(\theta - \theta')$  ya que la función es par. Ahora se necesita calcular los coeficientes  $a_j$  entre el intervalo 0 y  $2\pi$ . Para calcular  $a_0$  se multiplica la función  $F(x)$  por  $2\pi$  y luego se integra para obtener:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1 - 2\alpha \cos(x) + \alpha^2)^s} \quad (7.55)$$

Para calcular el resto de coeficientes se multiplica la ecuación (7.54) por  $\cos(kx)$  y luego se integra de 0 a  $2\pi$ . Así se obtiene:

$$\int_0^{2\pi} F(x) \cos(kx) dx = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(jx) dx \quad (7.56)$$

el lado derecho de la anterior igualdad cumple la relación:

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(jx) dx = \pi \delta_{jk} \quad (7.57)$$

donde  $\delta_{jk}$  es la función delta de Kronecker la cual se anula para  $j \neq k$  y se hace 1 para  $j = k$ . Por lo tanto los coeficientes  $a_j$  son:

$$a_j = b_s^{(j)}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(jx) dx}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(x))^s} \quad (7.58)$$

Los coeficientes  $b_s^{(j)}(\alpha)$  son los coeficientes de Laplace y son funciones de  $\alpha$ .

Se demuestra que los coeficientes de Laplace cumplen la siguiente relación:

$$b_s^{(j)}(\alpha) = b_s^{(-j)}(\alpha) \quad (7.59)$$

Por lo tanto:

$$\rho_0^{-(2i+1)} = a'^{-(2i+1)} \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \cos(j(\theta - \theta')) \quad (7.60)$$

Así el operador  $\hat{L}$  solo actúa sobre los coeficientes de Laplace.

Se define ahora un conjunto de funciones  $A_{i,j,m,n}$  de la siguiente manera:

$$A_{i,j,m,n} = \hat{D}_{m,n} \left( a'^{-(2i+1)} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \right) = a^m a'^m \frac{\partial^{m+n}}{\partial a^m \partial a'^m} \left( a'^{-(2i+1)} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \right) \quad (7.61)$$

algunas funciones a utilizar son:

$$A_{i,j,0,0} = a'^{-(2i+1)} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)} \quad (7.62)$$

$$A_{i,j,1,0} = a \frac{\partial}{\partial a} a'^{-(2i+1)} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)} \quad (7.63)$$

$$A_{i,j,0,1} = a' \frac{\partial}{\partial a'} a'^{-(2i+1)} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)} \quad (7.64)$$

De acuerdo a las ecuaciones (7,50) y (7,58) la función  $\Delta_0^{-(2i+1)}$  se escribe en la forma:

$$\Delta_0^{-(2i+1)} = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} [A_{i,j,0,0} + \varepsilon A_{i,j,1,0} + \varepsilon' A_{i,j,0,1} + \dots] \cos j(\theta - \theta') \quad (7.65)$$

Generalizando esta expresión se obtiene:

$$\Delta_0^{-(2i+1)} = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \left( \frac{l!}{k!(l-k)!} \right) \varepsilon^k \varepsilon'^{l-k} A_{i,j,k,l-k} \right] \cos j(\theta - \theta') \quad (7.66)$$

Sustituyendo esta última ecuación en la expresión (7,40) y luego en (7.36) se obtiene finalmente la siguiente relación para  $R_D$ :

$$R_D = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \left( \frac{1}{2} \frac{r}{a} \frac{r'}{a'} \Psi \right)^i \frac{a^i a'^{(i+1)}}{2} \times \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \left( \frac{l!}{k!(l-k)!} \right) \varepsilon^k \varepsilon'^{l-k} A_{i,j,k,l-k} \right] \cos j(\theta - \theta') \quad (7.67)$$

Ahora se necesita encontrar el término

$$\frac{1}{2} \frac{r}{a} \frac{r'}{a'} \Psi$$

en función de los elementos orbitales.

Para empezar se nota que  $\Psi$  está en función de  $\cos(\psi)$  (ecuación (7.37)) el cual se puede escribir como  $\vec{r} \cdot \vec{r}' = rr' \cos(\psi)$ , entonces se tiene la siguiente relación:

$$\cos(\psi) = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'} \quad (7.68)$$

En la sección (3.4) se escribe las ecuaciones de transformación para la órbita del spacecraft en el espacio:

$$\frac{x}{r} = \cos(\Omega) \cos(\omega + f) - \sin(\Omega) \sin(\omega + f) \cos(I)$$

$$\frac{y}{r} = \sin(\Omega) \cos(\omega + f) + \cos(\Omega) \sin(\omega + f) \cos(I)$$

$$\frac{z}{r} = \sin(\omega + f) \sin(I)$$

las expresiones para el sol son:

$$\frac{x'}{r'} = \cos(\Omega') \cos(\omega' + f') - \text{sen}(\Omega') \text{sen}(\omega' + f') \cos(I') \quad (7.69)$$

$$\frac{y'}{r'} = \text{sen}(\Omega') \cos(\omega' + f') + \cos(\Omega') \text{sen}(\omega' + f') \cos(I') \quad (7.70)$$

$$\frac{z'}{r'} = \text{sen}(\omega' + f') \text{sen}(I') \quad (7.71)$$

Las anteriores ecuaciones pueden ser expandidas en series de  $M$  y  $M'$  usando las series para  $\cos(f)$  y  $\text{sen}(f)$ , y por lo tanto se puede derivar una expresion en series para  $\cos(\psi)$ .

Ahora se debe utilizar las expansiones para  $\text{sen}(f)$  y  $\cos(f)$  en función de la anomalía media  $M$ .<sup>14</sup> Estas expansiones a segundo orden son:

$$\text{sen}(f) = \text{sen}(M) + e \text{sen}(2M) + e^2 \left( \frac{9}{8} \text{sen}(3M) - \frac{7}{8} \text{sen}(M) \right) \quad (7.72)$$

$$\cos(f) = \cos(M) + e(\cos(2M) - 1) + e^2 \left( \frac{9}{8} \cos(3M) - \frac{9}{8} \cos(M) \right) \quad (7.73)$$

Para reemplazar estas series en la ecuación (7.68) se deben considerar los siguientes términos:

$$\begin{aligned} \cos(\omega + f) \approx & \cos(\omega + M) + e(\cos(\omega + 2M) - \cos(\omega)) + \\ & e^2 \left( -\cos(\omega + M) - \frac{1}{8} \cos(\omega - M) + \frac{9}{8} \cos(\omega + 3M) \right) \end{aligned} \quad (7.74)$$

$$\begin{aligned} \text{sen}(\omega + f) \approx & \text{sen}(\omega + M) + e(\text{sen}(\omega + 2M) - \text{sen}(\omega)) + \\ & e^2 \left( -\text{sen}(\omega + M) + \frac{1}{8} \text{sen}(\omega - M) + \frac{9}{8} \text{sen}(\omega + 3M) \right) \end{aligned} \quad (7.75)$$

También se necesitan las siguientes ecuaciones:

$$\cos(I) = 1 - 2 \text{sen}^2 \left( \frac{I}{2} \right) = 1 - 2s^2 \quad (7.76)$$

$$\text{sen}(I) = 2 \text{sen} \left( \frac{I}{2} \right) \left( 1 - \text{sen}^2 \left( \frac{I}{2} \right) \right)^{\frac{1}{2}} = 2s \quad (7.77)$$

donde

$$s = \text{sen} \left( \frac{I}{2} \right).$$

Por lo tanto la expansión para la función perturbadora tambien está en términos de  $\text{sen} \left( \frac{I}{2} \right)$  y  $\text{sen} \left( \frac{I'}{2} \right)$ . Sustituyendo las ecuaciones (7.72), (7.73), (7.76), y (7.77) en las expresiones

<sup>14</sup>En la sección 3.4 se escriben estas series a cuarto orden en la excentricidad.

para la órbita del spacecraft se obtienen las siguientes relaciones a segundo orden en  $e, e'$  y  $s, s'$ :

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} \approx & \cos(\omega + \Omega + M) + e(\cos(\omega + \Omega + 2M) - \cos(\omega + \Omega)) \\ & + e^2 \left( \frac{9}{8} \cos(\omega + \Omega + 3M) - \frac{1}{8} \cos(\omega + \Omega - M) - \cos(\omega + \Omega + M) \right) \\ & + s^2 (\cos(\omega - \Omega + M) - \cos(\omega + \Omega + M)) \end{aligned} \quad (7.78)$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{r} \approx & \sin(\omega + \Omega + M) + e(\sin(\omega + \Omega + 2M) - \sin(\omega + \Omega)) \\ & + e^2 \left( \frac{9}{8} \sin(\omega + \Omega + 3M) - \frac{1}{8} \sin(\omega + \Omega - M) - \sin(\omega + \Omega + M) \right) \\ & - s^2 (\sin(\omega - \Omega + M) + \sin(\omega + \Omega + M)) \end{aligned} \quad (7.79)$$

$$\frac{z}{r} \approx 2s \sin(\omega + M) + 2es(\sin(\omega + 2M) - \sin(\omega)) \quad (7.80)$$

Con un procedimiento similar las ecuaciones (6.9), (6.10), y (6.11) se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \frac{x'}{r'} \approx & \cos(\omega' + \Omega' + M') + e'(\cos(\omega' + \Omega' + 2M') - \cos(\omega' + \Omega')) \\ & + e'^2 \left( \frac{9}{8} \cos(\omega' + \Omega' + 3M') - \frac{1}{8} \cos(\omega' + \Omega' - M') - \cos(\omega' + \Omega' + M') \right) \\ & + s'^2 (\cos(\omega' - \Omega' + M') - \cos(\omega' + \Omega' + M')) \end{aligned} \quad (7.81)$$

$$\begin{aligned} \frac{y'}{r'} \approx & \sin(\omega' + \Omega' + M') + e'(\sin(\omega' + \Omega' + 2M') - \sin(\omega' + \Omega')) \\ & + e'^2 \left( \frac{9}{8} \sin(\omega' + \Omega' + 3M') - \frac{1}{8} \sin(\omega' + \Omega' - M') - \sin(\omega' + \Omega' + M') \right) \\ & - s'^2 (\sin(\omega' - \Omega' + M') + \sin(\omega' + \Omega' + M')) \end{aligned} \quad (7.82)$$

$$\frac{z'}{r'} \approx 2s' \sin(\omega' + M') + 2e's'(\sin(\omega' + 2M') - \sin(\omega')) \quad (7.83)$$

También se necesita usar las relaciones:

$$M = \lambda - \bar{\omega}$$

y

$$\omega = \bar{\omega} - \Omega$$

para así tener como resultado una expresión en términos de las longitudes. Reemplazando las igualdades desde (7.78) a (7.83) en (7.68) y factorizando términos se obtiene finalmente

la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
\cos(\psi) \approx & (1 - e^2 - e'^2 - s^2 - s'^2) \cos(\lambda - \lambda') + ee' \cos(2\lambda - 2\lambda' - \bar{\omega} + \bar{\omega}') \\
& + ee' \cos(\bar{\omega} - \bar{\omega}') + 2ss' \cos(\lambda - \lambda' - \Omega + \Omega') + e \cos(2\lambda - \lambda' - \bar{\omega}) \\
& - e \cos(\lambda' - \bar{\omega}) + e' \cos(\lambda' - 2\lambda' + \bar{\omega}') - e' \cos(\lambda - \bar{\omega}') \\
& + \frac{9}{8}e^2 \cos(3\lambda - \lambda' - 2\bar{\omega}) - \frac{1}{8}e^2 \cos(\lambda + \lambda' - 2\bar{\omega}) \\
& + \frac{9}{8}e'^2 \cos(\lambda - 3\lambda' + 2\bar{\omega}') - \frac{1}{8}e'^2 \cos(\lambda + \lambda' - 2\bar{\omega}') \\
& - ee' \cos(2\lambda - \bar{\omega} - \bar{\omega}') - ee' \cos(2\lambda' - \bar{\omega} - \bar{\omega}') \\
& + s^2 \cos(\lambda + \lambda' - 2\Omega) + s'^2 \cos(\lambda + \lambda' - 2\Omega') - 2ss' \cos(\lambda + \lambda' - \Omega - \Omega') \quad (7.84)
\end{aligned}$$

El paso por seguir es expresar  $\Psi$  en términos de los elementos orbitales. Para esto se tiene que trabajar la expresión en series para  $\cos(\theta - \theta')$ . Entonces con  $\theta = \omega + \Omega + f$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
\cos(\theta - \theta') = & (\cos(\Omega) \cos(\omega + f) - \text{sen}(\Omega) \text{sen}(\omega + f)) \times \\
& (\cos(\Omega') \cos(\omega' + f') - \text{sen}(\Omega') \text{sen}(\omega' + f')) \\
& + (\text{sen}(\Omega) \cos(\omega + f) + \cos(\Omega) \text{sen}(\omega + f)) \times \\
& (\text{sen}(\Omega') \cos(\omega' + f') + \cos(\Omega') \text{sen}(\omega' + f')) \quad (7.85)
\end{aligned}$$

Ahora se evalúa la ecuación (7,68) para  $\cos(\psi)$  en  $I = I' = 0$ :

$$\begin{aligned}
\cos(\psi) = & (\cos(\Omega) \cos(\omega + f) - \text{sen}(\Omega) \text{sen}(\omega + f)) \times \\
& (\cos(\Omega') \cos(\omega' + f') - \text{sen}(\Omega') \text{sen}(\omega' + f')) + \\
& (\text{sen}(\Omega) \cos(\omega + f) + \cos(\Omega) \text{sen}(\omega + f)) \times \\
& (\text{sen}(\Omega') \cos(\omega' + f') + \cos(\Omega') \text{sen}(\omega' + f')) \quad (7.86)
\end{aligned}$$

Por lo tanto al hacer  $\Psi = \cos(\psi) - \cos(\theta - \theta')$  solo permanecen los términos que contienen  $s$  y  $s'$ . Entonces se tiene la expresión:

$$\begin{aligned}
\Psi = & s^2(\cos(\lambda + \lambda' - 2\Omega) - \cos(\lambda - \lambda')) + 2ss'(\cos(\lambda - \lambda' - \Omega + \Omega') \\
& - \cos(\lambda + \lambda' - \Omega - \Omega')) + s'^2(\cos(\lambda + \lambda' - 2\Omega') - \cos(\lambda - \lambda')) \quad (7.87)
\end{aligned}$$

se nota que el factor  $\Psi$  es de segundo orden en las inclinaciones.

Se estudia ahora el factor  $\frac{r}{a} \frac{r'}{a'}$ . Según (7.67) solo puede tomar el valor:

$$\frac{r}{a} \frac{r'}{a'} = 1 \quad (7.88)$$

esto se debe a que la expansión está en segundo orden de  $e, e'$  e  $I, I'$ . Entonces de acuerdo a (7.87) y (7.88), el término

$$\frac{1}{2} \frac{r}{a} \frac{r'}{a'} \Psi$$

es:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2} \frac{r}{a} \frac{r'}{a'} \Psi \right) &= \frac{s^2}{2} (\cos(\lambda + \lambda' - 2\Omega) - \cos(\lambda - \lambda')) \\ &\quad + ss' (\cos(\lambda - \lambda' - \Omega + \Omega') - \cos(\lambda + \lambda' - \Omega - \Omega')) \\ &\quad + \frac{s'^2}{2} (\cos(\lambda + \lambda' - 2\Omega') - \cos(\lambda - \lambda')) \end{aligned} \quad (7.89)$$

para esta expresión se pueden ignorar potencias de segundo o mayor orden.

Ahora se necesita encontrar una expansión en series para  $\cos j(\theta - \theta')$ , para lo cual se escribe:

$$\cos j(\theta - \theta') = \cos j(\theta) \cos j(\theta') + \operatorname{sen} j(\theta) \operatorname{sen}(\theta') \quad (7.90)$$

Se calcula primero  $\cos j(\theta)$  y  $\cos j(\theta')$  utilizando las series para  $f$  y  $f'$  (ecuación (3.29)). Para este caso se dejan estas series en terminos de las longitudes haciendo las sustituciones

$$M = \lambda - \bar{\omega}$$

y

$$M' = \lambda' - \bar{\omega}'$$

Las series para  $f$  y  $f'$  quedan en la forma:

$$f = \lambda + \bar{\omega} + 2e \operatorname{sen}(\lambda - \bar{\omega}) + \frac{5}{4}e^2 \operatorname{sen}(2\lambda - 2\bar{\omega}) \quad (7.91)$$

$$f' = \lambda' + \bar{\omega}' + 2e \operatorname{sen}(\lambda' - \bar{\omega}') + \frac{5}{4}e^2 \operatorname{sen}(2\lambda' - 2\bar{\omega}') \quad (7.92)$$

Ahora con:

$$\theta = \omega + \Omega + f$$

y

$$\theta' = \omega' + \Omega' + f'$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \cos j(\theta) &= \cos j[\lambda] \cos j \left[ 2e \operatorname{sen}(\lambda - \bar{\omega}) + \frac{5}{4}e^2 \operatorname{sen} 2(\lambda - \bar{\omega}) \right] \\ &\quad - \operatorname{sen} j[\lambda] \operatorname{sen} j \left[ 2e \operatorname{sen}(\lambda - \bar{\omega}) + \frac{5}{4}e^2 \operatorname{sen} 2(\lambda - \bar{\omega}) \right] \end{aligned} \quad (7.93)$$

expandiendo en series de Taylor en  $e$  se tiene que:

$$\cos j \left[ 2e \operatorname{sen}(\lambda - \bar{\omega}) + \frac{5}{4}e^2 \operatorname{sen} 2(\lambda - \bar{\omega}) \right] \approx 1 - 2j^2 e^2 \operatorname{sen}^2(\lambda - \bar{\omega}) \quad (7.94)$$

y

$$\operatorname{sen} j \left[ 2e \operatorname{sen}(\lambda - \bar{\omega}) + \frac{5}{4}e^2 \operatorname{sen} 2(\lambda - \bar{\omega}) \right] \approx 2je \operatorname{sen}(\lambda - \bar{\omega}) + \frac{5}{4}je^2 \operatorname{sen}(2\lambda - 2\bar{\omega}) \quad (7.95)$$

Entonces la ecuación (7.93) tiene la forma:

$$\begin{aligned} \cos j(\theta) \approx \cos j[\lambda] [1 - j^2 e^2] + j^2 e^2 \cos j[\lambda] [\cos(2\lambda - 2\bar{\omega})] \\ - \frac{5}{4} j e^2 \sin j[\lambda] [\sin(2\lambda - 2\bar{\omega})] - 2j e \sin[\lambda - \bar{\omega}] \quad (7.96) \end{aligned}$$

Haciendo uso de algunos procesos algebraicos, esta ecuación se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \cos j(\theta) \approx (1 - j^2 e^2) \cos(j\lambda) \\ + \left( \frac{1}{2} j^2 e^2 - \frac{5}{8} j^2 e^2 \right) \times \cos((2 - j)\lambda - 2\bar{\omega}) \\ + \left( \frac{1}{2} j^2 e^2 + \frac{5}{8} j^2 e^2 \right) \times \cos((2 + j)\lambda - 2\bar{\omega}) \\ - j e \cos((1 - j)\lambda - \bar{\omega}) + j e \cos((1 + j)\lambda - \bar{\omega}) \quad (7.97) \end{aligned}$$

Con un procedimiento similar se puede demostrar que:

$$\begin{aligned} \sin j(\theta) \approx (1 - j^2 e^2) \sin(j\lambda) \\ + \left( \frac{5}{8} j e^2 - \frac{1}{2} j^2 e^2 \right) \times \sin((2 - j)\lambda - 2\bar{\omega}) \\ + \left( \frac{5}{8} j e^2 + \frac{1}{2} j^2 e^2 \right) \times \sin((2 + j)\lambda - 2\bar{\omega}) \\ + j e \sin((1 - j)\lambda - \bar{\omega}) + j e \sin((1 + j)\lambda - \bar{\omega}) \quad (7.98) \end{aligned}$$

Para los elementos primados se tiene:

$$\begin{aligned} \cos j(\theta') \approx (1 - j^2 e'^2) \cos(j\lambda') \\ + \left( \frac{1}{2} j^2 e'^2 - \frac{5}{8} j e'^2 \right) \times \cos((2 - j)\lambda' - 2\bar{\omega}') \\ + \left( \frac{1}{2} j^2 e'^2 + \frac{5}{8} j e'^2 \right) \times \cos((2 + j)\lambda' - 2\bar{\omega}') \\ - j e' \cos((1 - j)\lambda' - \bar{\omega}') + j e' \cos((1 + j)\lambda' - \bar{\omega}') \quad (7.99) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sin j(\theta') \approx (1 - j^2 e'^2) \sin(j\lambda') \\ + \left( \frac{5}{8} j e'^2 - \frac{1}{2} j^2 e'^2 \right) \times \sin((2 - j)\lambda' - 2\bar{\omega}') \\ + \left( \frac{5}{8} j e'^2 + \frac{1}{2} j^2 e'^2 \right) \times \sin((2 + j)\lambda' - 2\bar{\omega}') \\ + j e' \sin((1 - j)\lambda' - \bar{\omega}') + j e' \sin((1 + j)\lambda' - \bar{\omega}') \quad (7.100) \end{aligned}$$

reemplazando en (7.90) se tiene:

$$\begin{aligned}
\cos j(\theta - \theta') &\approx (1 - j^2 e^2 - j^2 e'^2) \times \cos(j(\lambda - \lambda')) \\
&\quad + \left( \frac{5}{8} j e^2 + \frac{1}{2} j^2 e^2 \right) \times \cos((2+j)\lambda - j\lambda' - 2\bar{\omega}) \\
&\quad + \left( \frac{1}{2} j^2 e^2 - \frac{5}{8} j e^2 \right) \times \cos((2-j)\lambda + j\lambda' - 2\bar{\omega}) \\
&\quad + j e \cos((1+j)\lambda - j\lambda' - \bar{\omega}) - j e \cos((1-j)\lambda + j\lambda' - \bar{\omega}) \\
&\quad + \left( \frac{1}{2} j^2 e'^2 - \frac{5}{8} j e'^2 \right) \times \cos(j\lambda + (2-j)\lambda' - 2\bar{\omega}') \\
&\quad + \left( \frac{5}{8} j e'^2 + \frac{1}{2} j^2 e'^2 \right) \times \cos(j\lambda - (2+j)\lambda' + 2\bar{\omega}') \\
&\quad \quad - j e' \cos(j\lambda + (1-j)\lambda' - \bar{\omega}') + j e' \cos(j\lambda - (1+j)\lambda' + \bar{\omega}') \\
&\quad - j^2 e e' \cos((1+j)\lambda + (1-j)\lambda' - \bar{\omega} - \bar{\omega}') \\
&\quad \quad - j^2 e e' \cos((1-j)\lambda + (1+j)\lambda' - \bar{\omega} - \bar{\omega}') \\
&\quad \quad + j^2 e e' \cos((1+j)\lambda - (1+j)\lambda' - \bar{\omega} + \bar{\omega}') \\
&\quad \quad + j^2 e e' \cos((1-j)\lambda - (1-j)\lambda' - \bar{\omega} + \bar{\omega}') \quad (7.101)
\end{aligned}$$

La expansión en series (7.67) para la parte directa de la función perturbadora requiere los valores  $\varepsilon^k$  y  $\varepsilon'^{l-k}$ , entonces a partir de las ecuaciones (7.90) y (7.92) se tiene que:

$$\varepsilon = \frac{r}{a} - 1 \approx -e \cos(\lambda - \bar{\omega}) + \frac{1}{2} e^2 (1 - \cos(2\lambda - 2\bar{\omega})) \quad (7.102)$$

$$\varepsilon' = \frac{r'}{a'} - 1 \approx -e' \cos(\lambda' - \bar{\omega}') + \frac{1}{2} e'^2 (1 - \cos(2\lambda' - 2\bar{\omega}')) \quad (7.103)$$

por lo tanto

$$\varepsilon^2 \approx \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} e^2 \cos(2\lambda - 2\bar{\omega}) \quad (7.104)$$

y

$$\varepsilon'^2 \approx \frac{1}{2} e'^2 + \frac{1}{2} e'^2 \cos(2\lambda' - 2\bar{\omega}') \quad (7.105)$$

No se necesitan potencias mas altas que las de segundo orden ya que la aproximación es a segundo orden en  $e$  y  $e'$ .

Ahora se está en capacidad de encontrar la forma deseada para la expansión (7.77):

$$\begin{aligned}
R_D = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \left( \frac{1}{2} \frac{r}{a} \frac{r'}{a'} \Psi \right)^i \frac{a^i a'^{(i+1)}}{2} \times \\
\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \left( \frac{l!}{k!(l-k)!} \right) \varepsilon^k \varepsilon'^{l-k} A_{i,j,k,l-k} \right] \cos j(\theta - \theta')
\end{aligned}$$



Se nota en principio que  $\frac{1}{2} \frac{r}{a} \frac{r'}{a'} \Psi$  según la ecuación (7.89) es de segundo orden en  $s$  y  $s'$  por lo tanto la sumatoria para  $i$  solo puede tomar los valores:

$$i = 0, 1$$

Ahora como  $\varepsilon$  y  $\varepsilon'$  son máximo de orden dos, los valores para  $k$  y  $l$  deben ser:

$$k = 0, 1, 2$$

y

$$l = 0, 1, 2$$

Con estos valores la expansión a segundo orden en  $e$ ,  $e'$  y  $s$ ,  $s'$  para  $R_D$  es:

$$\begin{aligned} R_D = \frac{\cos j(\theta - \theta')}{2} & (a' A_{0,j,0,0} + \varepsilon a' A_{0,j,1,0} + \varepsilon' a' A_{0,j,0,1} \\ & + \varepsilon \varepsilon' a' A_{0,j,1,1} + \frac{\varepsilon^2}{2} a' A_{0,j,2,0} + \frac{\varepsilon'^2}{2} a' A_{0,j,0,2}) \\ & + \cos j(\theta - \theta') \left( \frac{1}{2} \frac{r}{a} \frac{r'}{a'} \Psi \right) a a'^2 A_{1,j,0,0} \end{aligned} \quad (7.106)$$

Se calcula ahora las funciones  $A_{i,j,k,l-k}$  requeridas en (7.106) con ayuda de las siguientes propiedades para las derivadas de los coeficientes de Laplace:

$$b_s^{(-j)} = b_s^{(j)} \quad (7.107)$$

$$D b_s^{(j)} = s(b_{s+1}^{(j-1)} - 2\alpha b_{s+1}^{(j)} + b_{s+1}^{(j+1)}) \quad (7.108)$$

$$D^n b_s^{(j)} = s(D^{n-1} b_{s+1}^{(j-1)} - 2\alpha D^{n-1} b_{s+1}^{(j)} + D^{n-1} b_{s+1}^{(j+1)} - 2(n-1)D^{(n-2)} b_{s+1}^{(j)}) \quad (7.109)$$

Ahora se calculan las siguientes funciones:

$$a' A_{0,j,0,0} = b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \quad (7.110)$$

$$a' A_{0,j,1,0} = \alpha D b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \quad (7.111)$$

$$a' A_{0,j,0,1} = -\alpha D b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) - b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \quad (7.112)$$

$$a' A_{0,j,2,0} = \alpha^2 D^2 b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \quad (7.113)$$

$$a' A_{0,j,1,1} = -\alpha^2 D^2 b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) - 2\alpha D b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \quad (7.114)$$

$$a a'^2 A_{1,j,0,0} = \alpha b_{\frac{3}{2}}^{(j)}(\alpha) \quad (7.115)$$

$$a' A_{0,j,0,2} = 2b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) + \alpha D b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) + \alpha^2 D^2 b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \quad (7.116)$$

Reemplazando el conjunto de ecuaciones desde (7.110) a (7.116) y la ecuación (7.89) en (7.106) se obtiene la parte directa  $R_D$  de la función perturbadora a segundo orden en  $e, e', s, s'$ :

$$\begin{aligned}
R_D \approx & \sum_{j=-\infty}^{\infty} \\
& \left[ \frac{1}{2} b_{\frac{1}{2}}^{(j)} + \frac{1}{8} (e^2 + e'^2) (-4j^2 + 2\alpha D + \alpha^2 D^2) b_{\frac{1}{2}}^{(j)} + \frac{1}{4} (s^2 + s'^2) \left( (-\alpha) b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} + (-\alpha) b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)} \right) \right] \\
& \times \cos(j\lambda' - j\lambda) + \left[ \frac{1}{4} e e' (2 + 6j + 4j^2 - 2\alpha D - \alpha^2 D^2) b_{\frac{1}{2}}^{(j+1)} \right] \cos(j\lambda' - j\lambda + \bar{\omega}' - \bar{\omega}) \\
& + \left[ s s' (\alpha) b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)} \right] \cos(j\lambda' - j\lambda + \Omega' - \Omega) + \left( \frac{1}{2} e (-2j - \alpha D) b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \\
& \times \cos(j\lambda' + (1-j)\lambda - \bar{\omega}) + \left[ \frac{1}{2} e' (-1 + 2j + \alpha D) b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)} \right] \cos(j\lambda' + (1-j)\lambda - \bar{\omega}') \\
& + \left[ \frac{1}{8} e^2 (-5j + 4j^2 - 2\alpha D + 4j\alpha D + \alpha^2 D^2) b_{\frac{1}{2}}^j \right] \cos(j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\bar{\omega}) \\
& + \left[ \frac{1}{4} e e' (-2 + 6j - 4j^2 + 2\alpha D - 4j\alpha D - \alpha^2 D^2) b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)} \right] \cos(j\lambda' + (2-j)\lambda - \bar{\omega}' - \bar{\omega}) \\
& + \left[ \frac{1}{8} e'^2 (2 - 7j + 4j^2 - 2\alpha D + 4j\alpha D + \alpha^2 D^2) b_{\frac{1}{2}}^{(j-2)} \right] \cos(j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\bar{\omega}') \\
& + \left[ \frac{1}{2} s^2 (\alpha) b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \right] \cos(j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\Omega) + \left[ s s' (-\alpha) b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \right] \cos(j\lambda' + (2-j)\lambda - \Omega' - \Omega) \\
& + \left[ \frac{1}{2} s'^2 (\alpha) b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \right] \cos(j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\Omega') \quad (7.117)
\end{aligned}$$

Se genera ahora la parte indirecta de la función perturbadora:

$$R_E = - \left( \frac{r}{a} \right) \left( \frac{a'}{r'} \right)^2 \cos(\psi)$$

La ecuación para  $\frac{a'}{r'}$  a segundo orden en la excentricidad es:

$$\frac{a'}{r'} = 1 + 2e' \cos(\lambda' - \bar{\omega}') + \frac{1}{2} e'^2 (1 + 5 \cos(2\lambda' - 2\bar{\omega}')) \quad (7.118)$$

Reemplazando (7.112), (3.24), (7.86) en la ecuación para  $R_E$ , factorizando y arreglando términos se obtiene:

$$\begin{aligned}
R_E \approx & \left( -1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} e'^2 + s^2 + s'^2 \right) \cos(\lambda' - \lambda) \\
& - e e' \cos(2\lambda' - 2\lambda - \bar{\omega}' + \bar{\omega}) - 2s s' \cos(\lambda' - \lambda - \Omega' + \Omega) \\
& - \frac{1}{2} e \cos(\lambda' - 2\lambda + \bar{\omega}) + \frac{3}{2} e \cos(\lambda' - \bar{\omega}) - 2e' \cos(2\lambda' - \lambda - \bar{\omega}')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{8}e^2 \cos(\lambda' - 3\lambda + 2\bar{\omega}) - \frac{1}{8}e^2 \cos(\lambda' + \lambda - 2\bar{\omega}) \\
& \quad + 3ee' \cos(2\lambda - \bar{\omega}' - \bar{\omega}) - \frac{1}{8}e'^2 \cos(\lambda' + \lambda - 2\bar{\omega}') \\
& \quad - \frac{27}{8}e'^2 \cos(3\lambda' - \lambda - 2\bar{\omega}') - s^2 \cos(\lambda' + \lambda - 2\Omega) \\
& \quad + 2ss' \cos(\lambda' + \lambda - \Omega' - \Omega) - s'^2 \cos(\lambda' + \lambda - 2\Omega') \quad (7.119)
\end{aligned}$$

Así entonces el objetivo de encontrar la función perturbadora  $R_1$  en función de los elementos orbitales ya se ha cumplido. Ahora lo que se necesita es cuantificar la variación de los elementos orbitales del spacecraft en las maniobras dentro de la esfera de influencia gravitacional.

Hasta ahora se ha expresado la función de perturbación como una serie infinita que involucra combinaciones de ángulos permitidos. Así que se deben escoger cuales de los términos son importantes y cuales nó. Cada argumento del coseno contiene una combinación de ángulos  $\lambda'$ ,  $\lambda$ ,  $\bar{\omega}'$ ,  $\bar{\omega}$ ,  $\Omega'$ , y  $\Omega$  de los cuales se sabe que en el problema no perturbado la longitud media  $\lambda$  se incrementa linealmente con el crecimiento de  $n$ , mientras que el resto de ángulos permanecen fijos. Así cualquier argumento que no involucre la longitud media varía en una cantidad pequeña. Los términos que cumplen está condición se denominan seculares o de largo período.

Para encontrar una solución secular al problema necesitamos eliminar de alguna forma todos los argumentos que contengan  $\lambda$  o  $\lambda'$ . Para el caso de la parte directa  $R_D$  de la función perturbadora hacemos  $j = 0$  en todos los coeficientes de  $\lambda$  y  $\lambda'$  y los términos que no anulen a estas cantidades no se consideran como solución secular y por lo tanto no se tienen en cuenta. Por inspección notamos que esto se hace haciendo  $j = 0$  en los argumentos que contienen  $j\lambda' - j\lambda$ . Notemos tambien que todos los argumentos de la parte  $R_E$  contienen  $\lambda$  y  $\lambda'$  por lo tanto esta cantidad no contribuye a la solución secular.

Entonces para obtener la función promedio  $\langle R_D \rangle$  hacemos  $j = 0$  en la relación:

$$j\lambda - j\lambda' = 0$$

Tambien se hace la aproximación

$$ss' = s'^2 \approx 0 \quad (7.120)$$

la cual está acorde con nuestra suposición para ángulos pequeños. Haciendo estas consideraciones en (7.117) se obtiene finalmente la forma secular para  $R_D$

$$\langle R_D \rangle = C_0 + C_1(e^2 + e'^2) + C_2s^2 + C_3ee' \cos(\bar{\omega}' - \bar{\omega}) \quad (7.121)$$

donde  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  son constantes relacionadas con los coeficientes de Laplace. Estas constantes se calculan de acuerdo a la ecuación (7.60)

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{(1 - 2\alpha \cos(\psi) + \alpha^2)^{1/2}} \quad (7.122)$$

$$\begin{aligned}
C_1 = & \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\psi)d\psi}{(1-2\alpha\cos(\psi)+\alpha^2)^{3/2}} - \frac{3\alpha^2}{8\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{(1-2\alpha\cos(\psi)+\alpha^2)^{3/2}} \\
& + \frac{3\alpha^2(1+2\alpha^2)}{16\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{(1-2\alpha+\alpha^2)^{5/2}} - \frac{9\alpha^3}{16\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\psi)d\psi}{(1-2\alpha\cos(\psi)+\alpha^2)^{5/2}} \\
& + \frac{3\alpha^2}{16\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\psi)d\psi}{(1-2\alpha\cos(\psi)+\alpha^2)^{5/2}} \quad (7.123)
\end{aligned}$$

$$C_2 = -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\psi)}{(1-2\alpha\cos(\psi)+\alpha^2)^{3/2}} \quad (7.124)$$

$$\begin{aligned}
C_3 = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{(1-2\alpha\cos(\psi)+\alpha^2)^{1/2}} - \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{(1-2\alpha\cos(\psi)+\alpha^2)^{3/2}} \\
& + \frac{3\alpha^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\psi)d\psi}{(1-2\alpha\cos(\psi)+\alpha^2)^{3/2}} - \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\psi)d\psi}{(1-2\alpha\cos(\psi)+\alpha^2)^{3/2}} \\
& - \frac{3\alpha^2(3+4\alpha^2)}{16\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\psi)d\psi}{(1-2\alpha\cos(\psi)+\alpha^2)^{5/2}} + \frac{3\alpha^3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{(1-2\alpha\cos(\psi)+\alpha^2)^{5/2}} \\
& + \frac{3\alpha^3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\psi)d\psi}{(1-2\alpha\cos(\psi)+\alpha^2)^{5/2}} - \frac{3\alpha^2}{16\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\psi)d\psi}{(1-2\alpha\cos(\psi)+\alpha^2)^{5/2}} \quad (7.125)
\end{aligned}$$

Ya se habia explicado que  $R_E$  no contribuye secularmente al problema por lo tanto:

$$\langle R_E \rangle = 0 \quad (7.126)$$

Así la función perturbadora en una aproximación secular a segundo orden en las excentricidades e inclinaciones es:

$$\langle R_1 \rangle = \frac{\mu_\odot}{a'} \langle R_D \rangle \quad (7.127)$$

Ahora se está en capacidad de estudiar como evolucionan temporalmente los elementos orbitales para el spacecraft.

#### 7.4 EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LOS ELEMENTOS ORBITALES<sup>15</sup>

Para el cálculo de la evolución temporal de los elementos orbitales se consideró como referencia bibliografica Solar System Dynamics, sin embargo este texto resuelve unicamente para el caso de la perturbación generada por gravitación, por lo tanto las ecuaciones de esta sección son propias del trabajo de grado.

En las secciones anteriores se encontró la forma secular de las funciones perturbadoras  $R_1$  y  $R_2$  generadas por la perturbación del Sol y la no esfericidad planetaria. Ahora se resuelven las ecuaciones planetarias de Lagrange para poder visualizar la evolución temporal de los elementos orbitales bajo estas perturbaciones.

<sup>15</sup>Para el cálculo de la evolución temporal de los elementos orbitales por perurbación gravitacional se consideró como referencia Solar System Dynamics sec 6.9.1.

La función perturbadora total promedio  $\langle R \rangle = \langle R_1 \rangle + \langle R_2 \rangle$  según los resultados (7.29) y (7.121) es:

$$\langle R \rangle = \frac{\mu_{\otimes} R_{\otimes}^2 J_2}{a^3(1-e^2)^{3/2}} \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \text{sen}^2(I) \right) + \frac{\mu_{\odot}}{a'} \left[ C_0 + C_1(e^2 + e'^2) + C_2 \text{sen}^2 \left( \frac{I}{2} \right) + C_3 e e' \cos(\bar{\omega}' - \bar{\omega}) \right] \quad (7.128)$$

Para resolver las ecuaciones planetarias de Lagrange se necesita considerar:  $\frac{\partial \langle R \rangle}{\partial \epsilon}$ ,  $\frac{\partial \langle R \rangle}{\partial \bar{\omega}}$ ,  $\frac{\partial \langle R \rangle}{\partial a}$ ,  $\frac{\partial \langle R \rangle}{\partial e}$ ,  $\frac{\partial \langle R \rangle}{\partial I}$ ,  $\frac{\partial \langle R \rangle}{\partial \Omega}$ . Estas derivadas según la ecuación (7.128) resultan ser:

$$\frac{\partial \langle R \rangle}{\partial \epsilon} = 0 \quad (7.129)$$

$$\frac{\partial \langle R \rangle}{\partial \bar{\omega}} = \frac{\mu_{\odot}}{a'} C_3 e e' \text{sen}(\bar{\omega}' - \bar{\omega}) \quad (7.130)$$

$$\frac{\partial \langle R \rangle}{\partial a} = -\frac{3\mu_{\otimes} R_{\otimes}^2 J_2}{a^4(1-e^2)^{3/2}} \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \text{sen}^2(I) \right) \quad (7.131)$$

$$\frac{\partial \langle R \rangle}{\partial e} = \frac{3\mu_{\otimes} R_{\otimes}^2 J_2 e}{a^3(1-e^2)^{5/2}} \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \text{sen}^2(I) \right) + 2\frac{\mu_{\odot} C_1 e}{a'} + \frac{\mu_{\odot} C_3 e'}{a'} \cos(\bar{\omega}' - \bar{\omega}) \quad (7.132)$$

$$\frac{\partial \langle R \rangle}{\partial I} = -\frac{3\mu_{\otimes} R_{\otimes}^2 J_2}{2a^3(1-e^2)^{3/2}} \text{sen}(I) \cos(I) + \frac{\mu_{\odot} C_2}{a'} \text{sen} \left( \frac{I}{2} \right) \cos \left( \frac{I}{2} \right) \quad (7.133)$$

$$\frac{\partial \langle R \rangle}{\partial \Omega} = 0 \quad (7.134)$$

Se hacen las siguientes aproximaciones para pequeñas excentricidades e inclinaciones:

$$\text{sen}(I) \approx 0$$

$$\cos(I) \approx 1$$

$$1 - e^2 \approx 1$$

y bajo las sustituciones

$$\mu_{\odot} = n^2 a^2 (M_{\odot} / M_{\otimes})$$

$$\mu_{\otimes} = n^2 a^3$$

las ecuaciones planetarias de Lagrange toman la forma secular (ecuaciones (6.2), (6.3), (6.4), (6.5), (6.6), (6.7)):

$$\frac{da}{dt} = 0 \quad (7.135)$$

$$\frac{de}{dt} = n\alpha \frac{M_{\odot}}{M_{\otimes}} e' C_3 \text{sen}(\bar{\omega} - \bar{\omega}') \quad (7.136)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{3nR_{\otimes}^2 J_2}{a^2} \quad (7.137)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3nR_{\otimes}^2 J_2}{2a^2} + n\alpha \frac{M_{\odot}}{2M_{\otimes}} C_2 \quad (7.138)$$

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{3nR_{\otimes}^2 J_2}{2a^2} + 2n\alpha \frac{M_{\odot}}{M_{\otimes}} C_1 + n\alpha \frac{M_{\odot}}{M_{\otimes}} \frac{e'}{e} C_3 \cos(\bar{\omega} - \bar{\omega}') \quad (7.139)$$

$$\frac{dI}{dt} = 0 \quad (7.140)$$

Si se asume que  $e \gg e'$  se puede encontrar una solución aproximada a estas ecuaciones<sup>16</sup>. Se empieza resolviendo para  $\bar{\omega}$ :

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \left( \frac{3nR_{\otimes}^2 J_2}{2a^2} + 2n\alpha \frac{M_{\odot}}{M_{\otimes}} C_1 \right) t \quad (7.141)$$

haciendo regla de la cadena para  $\frac{de}{dt}$  tenemos que:

$$\frac{de}{dt} = \frac{de}{d\bar{\omega}} \dot{\bar{\omega}} \quad (7.142)$$

entonces la solución para la excentricidad es:

$$e = e_0 - \left[ \frac{n\alpha \frac{M_{\odot}}{M_{\otimes}} C_3 e'}{\frac{3nR_{\otimes}^2 J_2}{2a^2} + 2n\alpha \frac{M_{\odot}}{M_{\otimes}} C_1} \right] \times \left[ \cos \left( \bar{\omega}_0 - \bar{\omega}' + \left( \frac{3nR_{\otimes}^2 J_2}{2a^2} + 2n\alpha \frac{M_{\odot}}{M_{\otimes}} C_1 \right) t \right) - \cos(\bar{\omega}_0 - \bar{\omega}') \right] \quad (7.143)$$

para las ecuaciones (7.135) y (7.140), (7.138) y (7.137) se tienen las siguientes soluciones:

$$a = a_0 \quad (7.144)$$

$$I = I_0 \quad (7.145)$$

$$\Omega = \Omega_0 + \left( n\alpha \frac{M_{\odot}}{2M_{\otimes}} C_2 - \frac{3nR_{\otimes}^2 J_2}{2a^2} \right) t \quad (7.146)$$

y

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{3nR_{\otimes}^2 J_2}{a^2} t \quad (7.147)$$

Ahora se necesita obtener las soluciones anteriores en función de los elementos orbitales originales  $(a, e, I, \omega, \Omega, M)$  para esto se deben utilizar las relaciones  $\bar{\omega} = \omega + \Omega$  y  $M + \bar{\omega} = nt + \epsilon$ . Así realizando las operaciones algebraicas correspondientes, el conjunto solución final es:

$$a = a_0$$

---

<sup>16</sup>En Solar System Dynamics pág. 255, hacen la misma consideración para evaluar la evolución temporal de los elementos orbitales de un asteroide perturbado gravitacionalmente por Júpiter. Sin embargo esto no quiere decir que el sistema de ecuaciones diferenciales no tenga solución analítica ya que se puede calcular un factor integrante y resolver por medio de la teoría de las ecuaciones diferenciales exactas, pero la solución produce una ecuación trascendental que ya no se puede resolver analíticamente y necesariamente se debe recurrir a métodos numéricos como el método de Newton-Raphson.

$$\begin{aligned}
e &= e_0 - \left[ \frac{n\alpha \frac{M_\odot}{M_\otimes} C_3 e'}{\frac{3nR_\otimes^2 J_2}{2a^2} + 2n\alpha \frac{M_\odot}{M_\otimes} C_1} \right] \\
&\quad \times \left[ \cos \left( \bar{\omega}_0 - \bar{\omega}' + \left( \frac{3nR_\otimes^2 J_2}{2a^2} + 2n\alpha \frac{M_\odot}{M_\otimes} C_1 \right) t \right) - \cos(\bar{\omega}_0 - \bar{\omega}') \right] \\
\Omega &= \Omega_0 + \left( n\alpha \frac{M_\odot}{2M_\otimes} C_2 - \frac{3nR_\otimes^2 J_2}{2a^2} \right) t \\
\omega &= \omega_0 + \left[ \frac{n\alpha}{2} \frac{M_\odot}{M_\otimes} (4C_1 - C_2) + 3n \frac{R_\otimes^2 J_2}{a^2} \right] t
\end{aligned} \tag{7.148}$$

$$I = I_0$$

$$M = n \left[ 1 + \frac{3R_\otimes^2 J_2}{2a^2} - 2\alpha \frac{M_\odot}{M_\otimes} C_1 \right] t \tag{7.149}$$

Aquí se hace la aproximación válida:

$$1 + \frac{3R_\otimes^2 J_2}{2a^2} - 2\alpha \frac{M_\odot}{M_\otimes} C_1 \approx 1 \tag{7.150}$$

Entonces la ecuación (7.149) se escribe como:

$$M = nt \tag{7.151}$$

por lo cual la anomalía media no contribuye secularmente al problema.

En el conjunto solución, las cantidades  $a_0$ ,  $e_0$ ,  $\Omega_0$ ,  $\omega_0$ ,  $I_0$  son los valores de los elementos orbitales en  $\tau_0 = 0$  el cual es el tiempo inicial de paso por el perifoco.

La variación de  $e$  (ecuación (7.143)) es senoidal con una amplitud:

$$A_e = \left| \frac{n\alpha \frac{M_\odot}{M_\otimes} C_3 e'}{\frac{3nR_\otimes^2 J_2}{2a^2} + 2n\alpha \frac{M_\odot}{M_\otimes} C_1} \right| \tag{7.152}$$

Si solo se considera la perturbación generada por la gravitación solar se hace  $J_2 = 0$  y se tiene que:

$$\begin{aligned}
a &= a_0 \\
e &= e_0 - \frac{C_3 e'}{2C_1} \left[ \cos(\bar{\omega}_0 - \bar{\omega}' + 2n\alpha \frac{M_\odot}{M_\otimes} t) - \cos(\bar{\omega}_0 - \bar{\omega}') \right] \\
\Omega &= \Omega_0 + \frac{n\alpha M_\odot}{2M_\otimes} C_2 t \\
\omega &= \omega_0 + \frac{n\alpha}{2} \frac{M_\odot}{M_\otimes} (4C_1 - C_2) t \\
I &= I_0 \\
M &= nt
\end{aligned} \tag{7.153}$$

Si solo se considera la perturbación generada por la no esfericidad planetaria se hace  $\alpha = 0$  y se tiene que:

$$\begin{aligned}
 a &= a_0 \\
 e &= e_0 \\
 \Omega &= \Omega_0 - \frac{3nR_{\oplus}^2 J_2}{2a^2} t \\
 \Omega &= \Omega_0 + \frac{3nR_{\oplus}^2 J_2}{a^2} t \\
 I &= I_0 \\
 M &= nt
 \end{aligned} \tag{7.154}$$

En el caso no perturbado se hace  $J_2 = 0$  y  $\alpha = 0$ , entonces la solución toma la forma:

$$\begin{aligned}
 a &= a_0 \\
 e &= e_0 \\
 \Omega &= \Omega_0 \\
 \omega &= \omega_0 \\
 I &= I_0 \\
 M &= nt
 \end{aligned} \tag{7.155}$$

esto es toman la forma del problema de dos cuerpos.

En el siguiente capítulo se utilizarán las soluciones obtenidas para estudiar la evolución temporal de los elementos orbitales de un spacecraft, cuando este se encuentra en la órbita de parqueo y cuando es capturado por un planeta objetivo.



## 8. VIAJE INTERPLANETARIO BAJO LA SOLUCIÓN SECULAR DE LAS ECUACIONES PLANETARIAS DE LAGRANGE

Cuando las agencias espaciales se disponen a enviar un vehículo espacial hacia otro planeta, tienen en cuenta la transferencia de Hohmann, esto se debe a que hay momentos específicos para lanzar la misión. De no poder ser enviado en el instante correcto, el vehículo espacial deberá esperar un largo período de tiempo para que los planetas se vuelvan a alinear correctamente y si el vehículo ya se encuentra en órbita durante este tiempo se verá sometido a diversas perturbaciones que modifican su órbita y que deben ser tenidas en cuenta a la hora de ejercer las maniobras. Las soluciones seculares obtenidas anteriormente son útiles para este tipo de casos. Un ejemplo de viaje interplanetario en el cual se utilizaron términos seculares para ejercer control de la nave, fue la sonda espacial NOZOMI de la JAXA.<sup>17</sup>

Para este capítulo se consideró como referencia bibliográfica Space Vehicle Dynamics and Control. Sin embargo este texto trabaja el caso de viaje interplanetario considerando que las órbitas planetarias son circulares lo cual hace más fácil los cálculos. Por lo tanto todo lo referente a este capítulo es trabajo exclusivo del trabajo de grado.

### 8.1 INYECCIÓN A LA ÓRBITA DE PARQUEO

El vehículo espacial entra en la órbita de parqueo con condiciones iniciales, llamadas condiciones de burnout, las cuales permiten determinar la órbita en un tiempo posterior. Estas condiciones iniciales son:

$$a = a_0$$

$$e = e_0$$

$$\Omega = \Omega_0$$

$$\omega = \omega_0$$

$$I = I_0$$

$$M = M_0 = n(t - \tau_0)$$

donde  $\tau_0$  es el tiempo inicial de paso por el perifoco.

### 8.2 ÓRBITA DE PARQUEO PERTURBADA

Para realizar un ejemplo numérico se toman los siguientes valores para las condiciones iniciales:

$$a_o = 16371000m$$

$$e_o = 0,1$$

$$\Omega_o = 130^\circ$$

---

<sup>17</sup><http://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/spacecraftDisplay.do?id=1998-041A>

$$\omega_o = 62,94^\circ$$

$$I_0 = 0^\circ = 0^\circ$$

$$M_o = 0^\circ = 0^\circ$$

Se escogió ese valor del semieje mayor  $a_0$  ya que corresponde al límite superior de la estratosfera donde se puede despreciar por completo el efecto dragging.

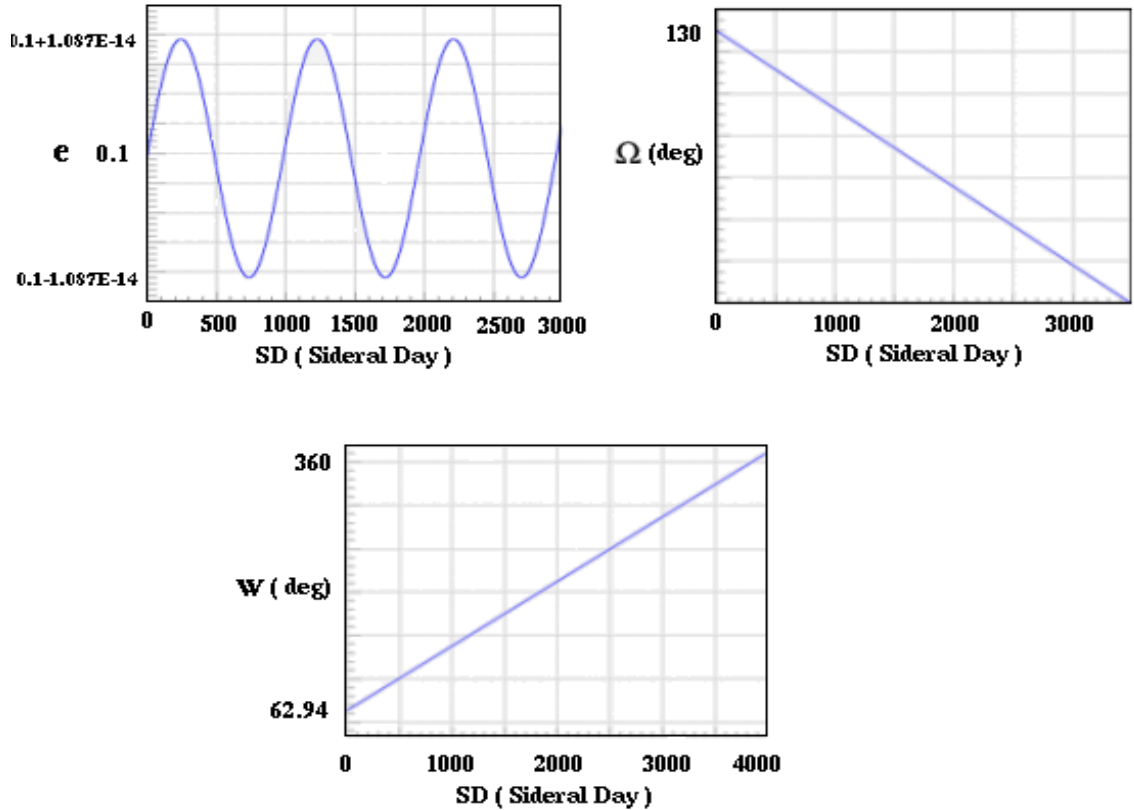
Los valores de  $a'$ ,  $e'$ ,  $\Omega'$ ,  $\bar{\omega}$ ,  $R_\oplus$ ,  $J_2$ , para la Tierra se encuentran en el anexo E.

Los coeficientes de Laplace  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  se determinan según el valor de  $\alpha = \frac{a}{a'} = 1,094 \times 10^{-4}$  y de acuerdo a las integrales (7.116) a (7.119).

Estos valores resultan ser:  $C_1 = 4,49087 \times 10^{-9}$ ,  $C_2 = -1,79635 \times 10^{-8}$ , y  $C_3 = 4,396909 \times 10^{-18}$ .

A continuación se muestran las gráficas de los elementos orbitales perturbados para la órbita de parqueo del spacecraft en torno a la Tierra.

Figura 7. Evolución secular de los elementos orbitales perturbados en la órbita de parqueo



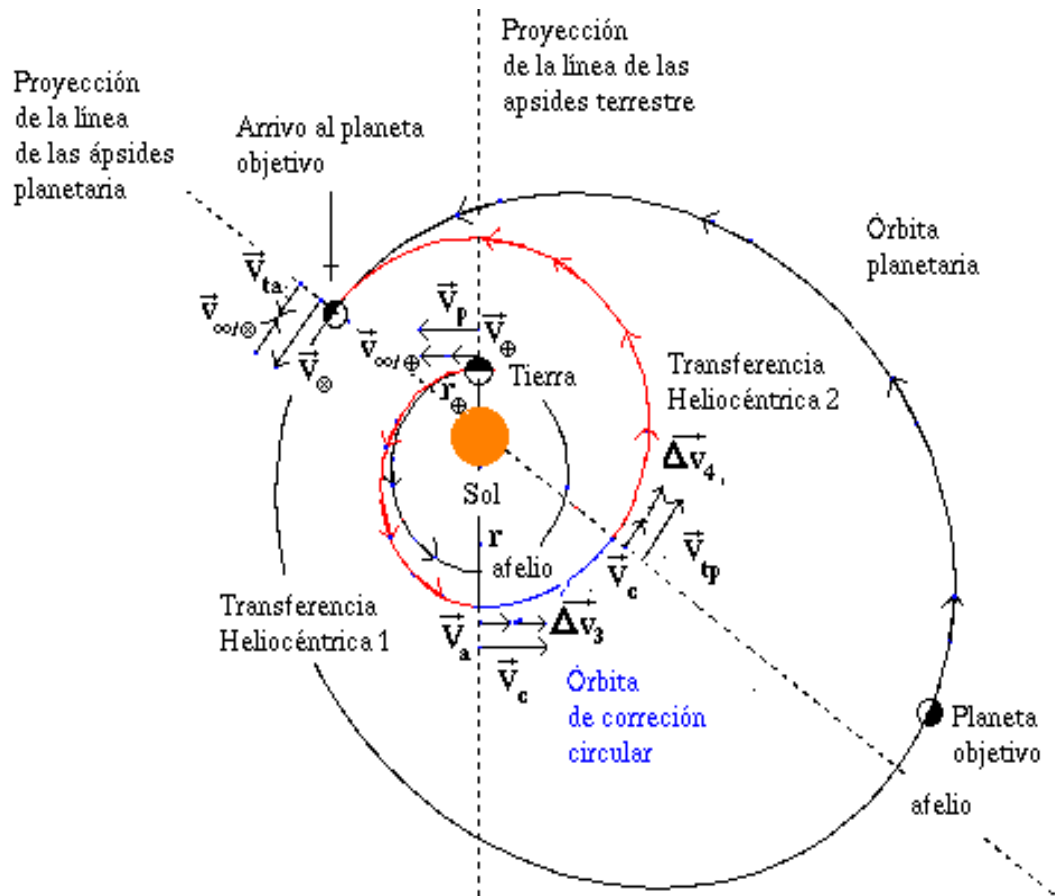
La figura 7 indica que la excentricidad oscila con un período de 982.3 días siderales con una amplitud de aproximadamente  $1,09 \times 10^{-14}$ .

La longitud del nodo ascendente mostró un período de 9654.96 días siderales, mientras que el argumento del perigeo indica un período de 4827.5 días siderales.

### 8.3 VIAJE INTERPLANETARIO<sup>18</sup>

En este trabajo se tienen en consideración las excentricidades planetarias lo cual complica considerablemente los cálculos ya que las maniobras por lo general se deben realizar en el perigeo (perihelio) o en el apogeo (afelio) de la órbita.

Figura 8. Viaje Interplanetario



Después que los planetas estén alineados correctamente es posible realizar el estudio del viaje interplanetario tomando en consideración las órbitas elípticas planetarias.

Según el modelo ilustrado en la figura 8 la velocidad que debe tener el spacecraft en el perihelio de la elipse de transferencia heliocéntrica 1 según la ley de vis-viva es:

$$V_p = \sqrt{\frac{2\mu_{\odot}}{r_{\oplus}} - \frac{2\mu_{\odot}}{r_{\oplus} + r}} \quad (8.1)$$

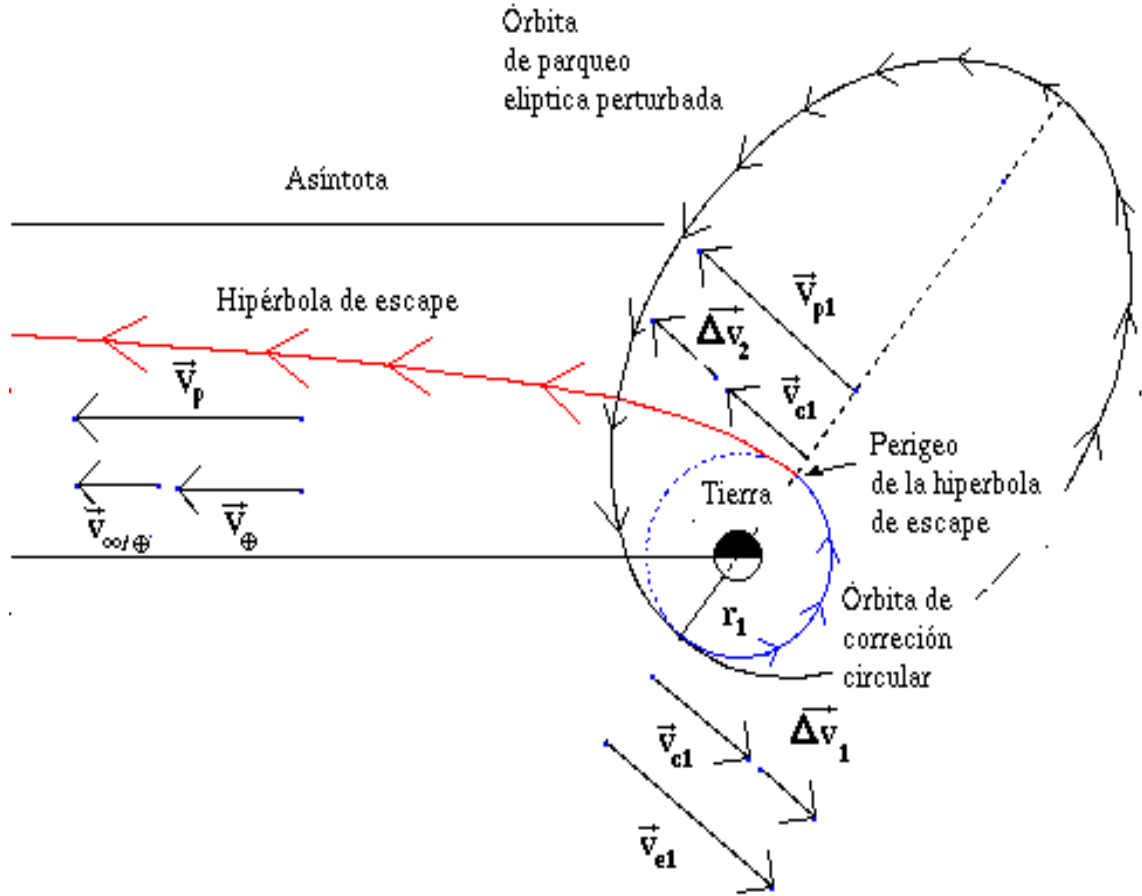
<sup>18</sup>Para esta sección se tomó como referencia Space Vehicle Dynamics and Control sec. 4.4. el cual trabaja el caso de órbitas planetarias circulares.

donde  $\mu_{\odot}$  es el parámetro gravitacional solar,  $r_{\oplus}$  es la distancia al perihelio de la órbita terrestre,  $r$  es la distancia al afelio de la primera elipse de transferencia. Esta distancia  $r$  debe cumplir la siguiente condición:

$$r_{\oplus} < r < r_{\otimes} \quad (8.2)$$

y se debe escoger de acuerdo al diseño de la trayectoria y al diseño de la nave.

Figura 9. Escape Terrestre



La actividad de la esfera de influencia gravitacional terrestre es pequeña comparada con la esfera de influencia gravitacional solar, entonces cuando el vehículo está en el infinito de una trayectoria hiperbólica de escape, la única interacción que influye sobre el es la gravitacional solar. Así según la figura 9 se cumple que:

$$v_{\infty/\oplus} = V_p - V_{\oplus} = \sqrt{\frac{2\mu_{\odot}}{r_{\oplus}} - \frac{2\mu_{\odot}}{r_{\oplus} + r}} - \sqrt{\frac{2\mu_{\odot}}{r_{\oplus}} - \frac{\mu_{\oplus}}{a_{\oplus}}} \quad (8.3)$$

donde  $v_{\infty/\oplus}$  es la velocidad de escape hiperbólica o también se puede decir que es la velocidad del spacecraft respecto a la Tierra en el infinito de la hipérbola de escape,  $V_{\oplus}$  es la velocidad de la Tierra en su perihelio,  $\mu_{\oplus}$  es el parámetro gravitacional terrestre, y  $a_{\oplus}$  es el semieje mayor de la órbita terrestre.

La maniobra  $\Delta v_1$  se realiza en el perigeo de la órbita de parqueo perturbada y se debe ejecutar para cambiar a una órbita circular de radio  $r_1$  (figura 9.). Para esta maniobra se necesita encender los retropropulsores. La maniobra  $\Delta v_1$  está dada por:

$$\Delta v_1 = v_{e1} - v_{c1} = \sqrt{\frac{2\mu_{\oplus}}{r_1} - \frac{\mu_{\oplus}}{a_0}} - \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r_1}} \quad (8.4)$$

donde  $v_{e1}$  es la velocidad del vehículo en el perigeo de la elipse perturbada,  $v_{c1}$  es la velocidad de la órbita circular,  $a_0$  es el semieje mayor de la órbita de parqueo perturbada y  $r_1$  la distancia al perigeo de la misma órbita la cual coincide con el radio de la órbita de corrección circular.

La maniobra  $\Delta v_2$  se ejecuta para impulsar al spacecraft hacia la transferencia heliocéntrica 1 por medio de una hipérbola de escape (figura 9.). Esta maniobra debe realizarse en la intersección de la línea de las ápsides de la órbita de parqueo perturbada y la órbita de corrección circular. La maniobra se escribe como:

$$\Delta v_2 = v_{p1} - v_{c1} \quad (8.5)$$

aquí  $v_{p1}$  es la velocidad en el perigeo de la hipérbola de escape.

Según la ecuación (3.7) podemos escribir:

$$\frac{v_{p1}^2}{2} - \frac{\mu_{\oplus}}{r_1} = \frac{v_{\infty/\oplus}^2}{2} \quad (8.6)$$

por lo tanto la velocidad  $v_{p1}$  es:

$$v_{p1} = \sqrt{v_{\infty/\oplus}^2 + \frac{2\mu_{\oplus}}{r_1}} \quad (8.7)$$

El valor de  $v_{\infty/\oplus}$  se conoce de acuerdo a la ecuación (8.3) por lo tanto también conocemos el valor de  $v_{p1}$ .

Entonces la segunda maniobra se puede escribir como:

$$\Delta v_2 = \sqrt{v_{\infty/\oplus}^2 + \frac{2\mu_{\oplus}}{r_1}} - \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r_1}} \quad (8.8)$$

De acuerdo a la anterior ecuación es posible conocer el valor de  $\Delta v_2$  para que el vehículo espacial se transfiera hacia una órbita heliocéntrica (figura 9).

El tiempo de transferencia es:

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu_{\odot}}} \quad (8.9)$$

donde  $a$  es el semieje mayor de la elipse de transferencia 1, el cual se escribe como:

$$a = \frac{r_{\oplus} + r}{2} \quad (8.10)$$

Cuando el spacecraft llega al afelio de la elipse de transferencia 1, es necesario realizar una maniobra  $\Delta v_3$  para ingresar a una órbita circular de radio  $r$  que sirve para corregir la trayectoria y así dirigirse hacia el planeta objetivo a través de una transferencia heliocéntrica 2 (figura 8.). Está maniobra es:

$$\Delta v_3 = V_c - V_a \quad (8.11)$$

donde  $V_a$  es la velocidad en el afelio de la órbita de transferencia 1 y  $V_c$  es la velocidad de la órbita de corrección circular. Estas velocidades estan dadas por:

$$V_a = \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{r} - \frac{2\mu_\oplus}{r+r_\oplus}} \quad (8.12)$$

$$V_c = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{r}} \quad (8.13)$$

Como se puede observar, estas dos velocidades son conocidas, y por lo tanto se conoce tambien el valor de  $\Delta v_3$  de acuerdo a la ecuación:

$$\Delta v_3 = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{r}} - \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{r} - \frac{2\mu_\oplus}{r+r_\oplus}} \quad (8.14)$$

El segmento de trayectoria que debe recorrer el spacecraft va desde la proyección de la línea de las ápsides terrestre, hasta la proyección de la línea de las ápsides planetaria (figura 8.). El ángulo que forman estas dos rectas es  $\beta$ . Entonces el tiempo de esta trayectoria es:

$$T_2 = \beta_{rad} \sqrt{\frac{r^3}{\mu_\odot}} \quad (8.15)$$

Ya realizada esta maniobra el spacecraft corrige su rumbo para realizar la transferencia interplanetaria.

La siguiente maniobra  $\Delta v_4$  es de propulsión y se ejecuta para impulsar al spacecraft hacia el planeta objetivo. Esta maniobra se debe realizar en la intersección de la proyección de la línea de las ápsides planetaria y la circunferencia de corrección (figura 9). Por lo tanto  $\Delta v_4$  está dada por:

$$\Delta v_4 = V_{tp} - V_c \quad (8.16)$$

donde  $V_{tp}$  es la velocidad del vehículo en el perihelio de la elipse de transferencia 2. La expresión para  $V_{tp}$  es:

$$V_{tp} = \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{r} - \frac{2\mu_\otimes}{r+r_\otimes}} \quad (8.17)$$

Entonces:

$$\Delta v_4 = \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{r} - \frac{2\mu_\otimes}{r+r_\otimes}} - \sqrt{\frac{\mu_\odot}{r}} \quad (8.18)$$

donde  $r_\otimes$  es la distancia al perihelio del planeta objetivo.

El tiempo de transferencia planetaria está dado por:

$$T_3 = \pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu_{\odot}}} \quad (8.19)$$

donde  $a$  es el semieje mayor de la elipse de transferencia 2 dado por:

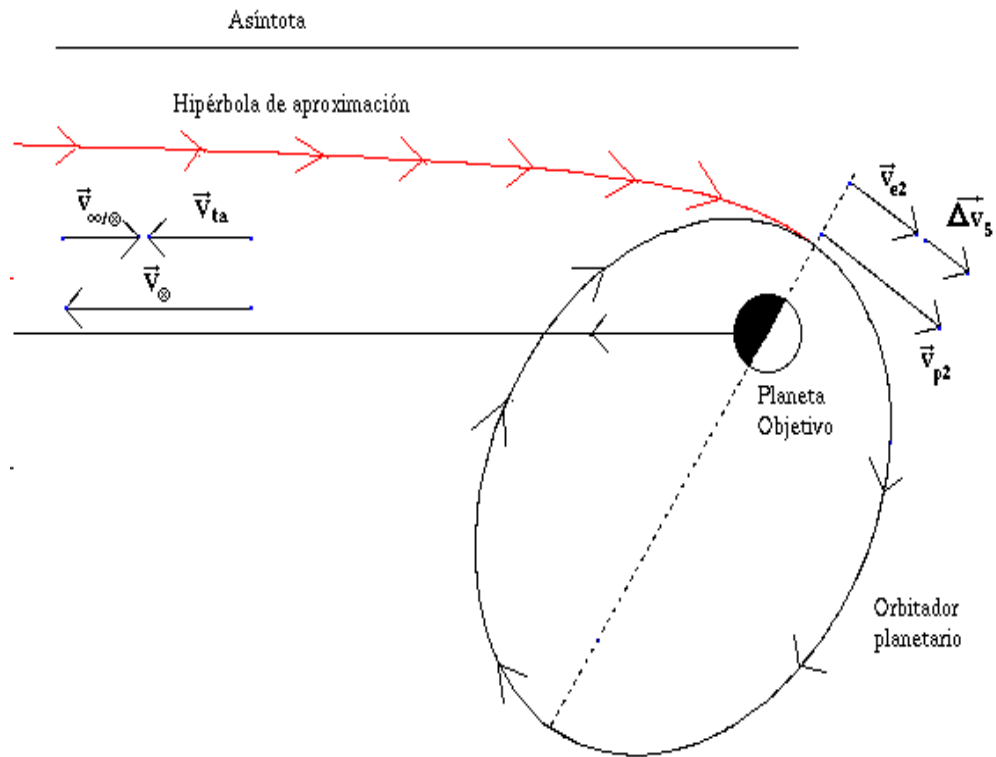
$$a = \frac{r + r_{\otimes}}{2} \quad (8.20)$$

El tiempo total del viaje interplanetario es:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \quad (8.21)$$

en consecuencia el planeta objetivo debe tardar un tiempo igual en llegar a su perihelio desde que el spacecraft escapa de la órbita terrestre.

Figura 10. Captura Planetaria



La figura 10. muestra el momento del encuentro planetario el cual se presenta en el perihelio de la órbita planetaria. La velocidad del vehículo en el afelio de la elipse de transferencia 2 es:

$$V_{ta} = \sqrt{\frac{2\mu_{\odot}}{r_{\otimes}} - \frac{2\mu_{\otimes}}{r + r_{\otimes}}} \quad (8.22)$$

La velocidad del planeta en su perihelio es:

$$V_{\otimes} = \sqrt{\frac{2\mu_{\odot}}{r_{\otimes}} - \frac{\mu_{\odot}}{a_{\otimes}}} \quad (8.23)$$

donde  $a_{\otimes}$  es el semieje mayor de la órbita planetaria.

El vehículo espacial se aproxima al planeta con la denominada velocidad de aproximación hiperbólica  $v_{\infty/\otimes}$  cuyo vector es opuesto a la velocidad del planeta (figura 10.), esto implica que el spacecraft se está aproximando respecto al planeta, por lo cual la velocidad del spacecraft con respecto al Sol es menor que la velocidad del planeta. Este conjunto de velocidades cumplen la relación:

$$|v_{\infty/\otimes}| = V_{\otimes} - V_{ta} = \sqrt{\frac{2\mu_{\odot}}{r_{\otimes}} - \frac{\mu_{\odot}}{a_{\otimes}}} - \sqrt{\frac{2\mu_{\odot}}{r_{\otimes}} - \frac{2\mu_{\otimes}}{r + r_{\otimes}}} \quad (8.24)$$

El valor de  $v_{\infty/\otimes}$  se conoce según la anterior ecuación, esto nos permite encontrar el valor de la siguiente maniobra  $\Delta v_5$  necesaria para colocar al spacecraft en órbita alrededor del planeta.

La maniobra  $\Delta v_5$  se debe realizar en el pericentro de la hipérbola de aproximación (figura 10). Esta maniobra está dada por:

$$\Delta v_5 = v_{p2} - v_{e2} \quad (8.25)$$

aquí  $v_{e2}$  es la velocidad de la órbita elíptica que alcanza finalmente el spacecraft la cual se escribe como:

$$v_{e2} = \sqrt{\frac{2\mu_{\otimes}}{r_{p2}} - \frac{\mu_{\otimes}}{a_f}} \quad (8.26)$$

donde  $\mu_{\otimes}$  es el parámetro gravitacional planetario,  $r_{p2}$  es la distancia perifocal del orbitador y  $a_f$  es el semieje mayor de la órbita entorno al planeta.

La maniobra  $\Delta v_5$  requiere retropropulsión, ya que se debe disminuir la velocidad para pasar de una órbita abierta a una órbita cerrada.

De la conservación de la energía para una órbita hiperbólica tenemos que:

$$\frac{v_{p2}^2}{2} - \frac{\mu_{\otimes}}{r_{p2}} = \frac{v_{\infty/\otimes}^2}{2} \quad (8.27)$$

donde  $r_{p2}$  es la distancia al pericentro de la hipérbola de aproximación.

La velocidad del spacecraft en el pericentro es:

$$v_{p2} = \sqrt{v_{\infty/\otimes}^2 + \frac{2\mu_{\otimes}}{r_{p2}}} \quad (8.28)$$

por lo tanto conocemos  $v_{p2}$ .

Entonces la maniobra final debe ser:

$$\Delta v_5 = \sqrt{v_{\infty/\otimes}^2 + \frac{2\mu_{\otimes}}{r_{p2}}} - \sqrt{\frac{2\mu_{\otimes}}{r_{p2}} - \frac{\mu_{\otimes}}{a_f}} \quad (8.29)$$



De esta manera el vehículo espacial se convierte ahora en un orbitador en torno a un planeta objetivo.

#### 8.4 EVOLUCIÓN DE LA ÓRBITA DESPUES DE LA CAPTURA

A continuación se indica la evolución de la órbita posterior a la captura planetaria.

Figura 11. Evolución secular de los elementos orbitales en torno a Mercurio

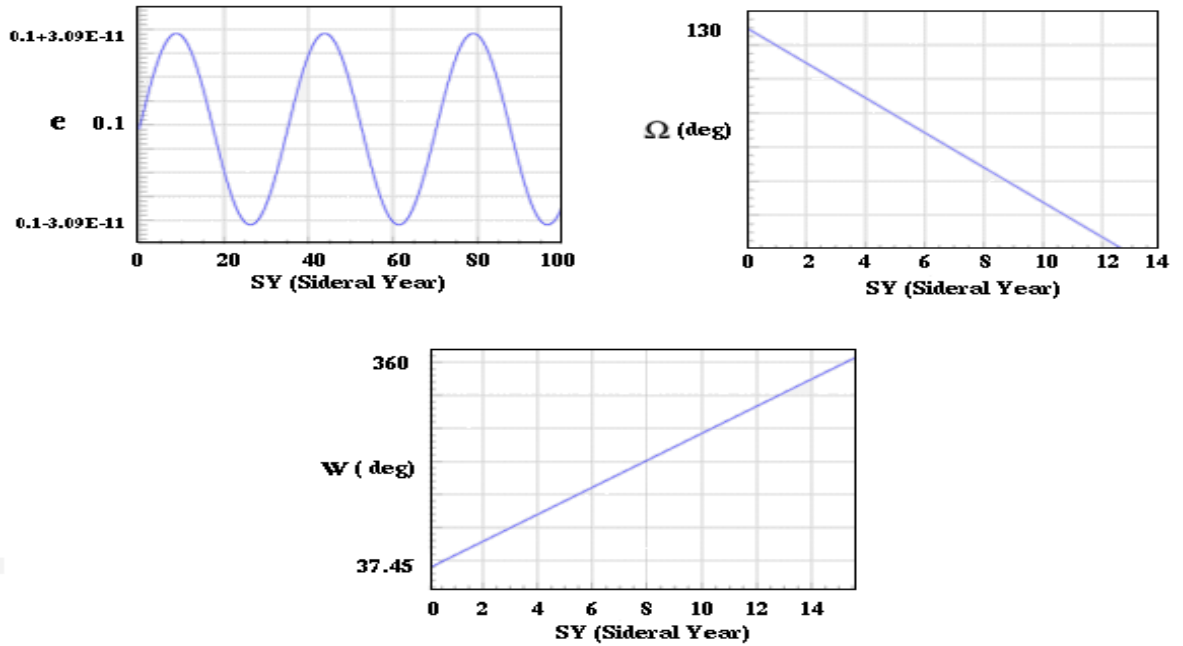


Figura 12. Evolución secular de los elementos orbitales en torno a Venus

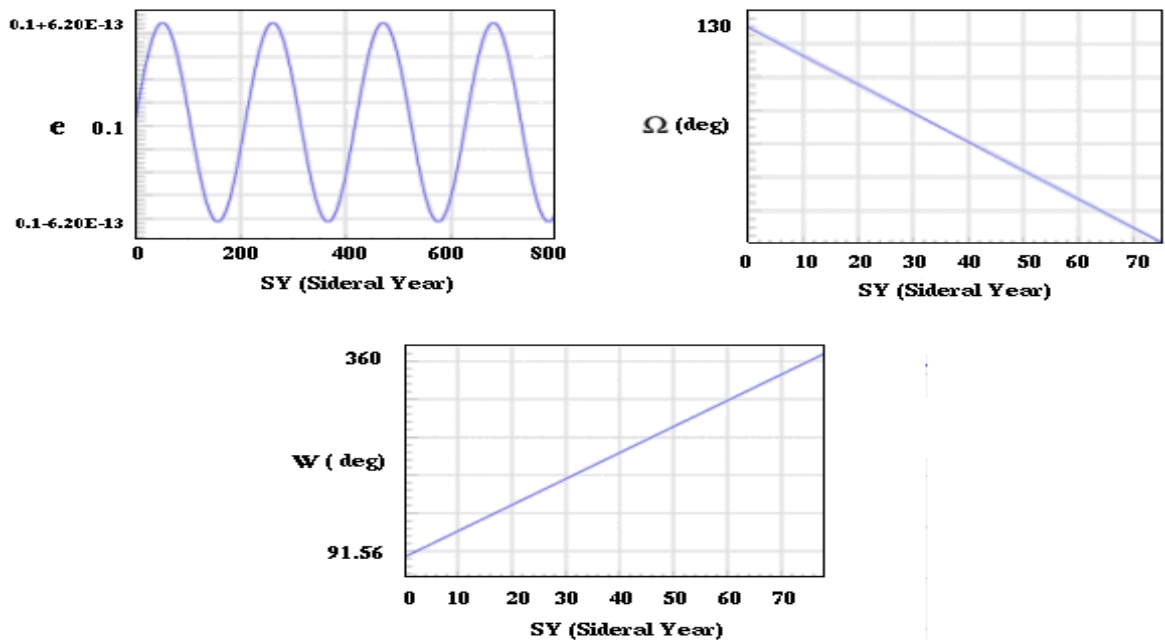


Figura 13. Evolución secular de los elementos orbitales en torno a Marte

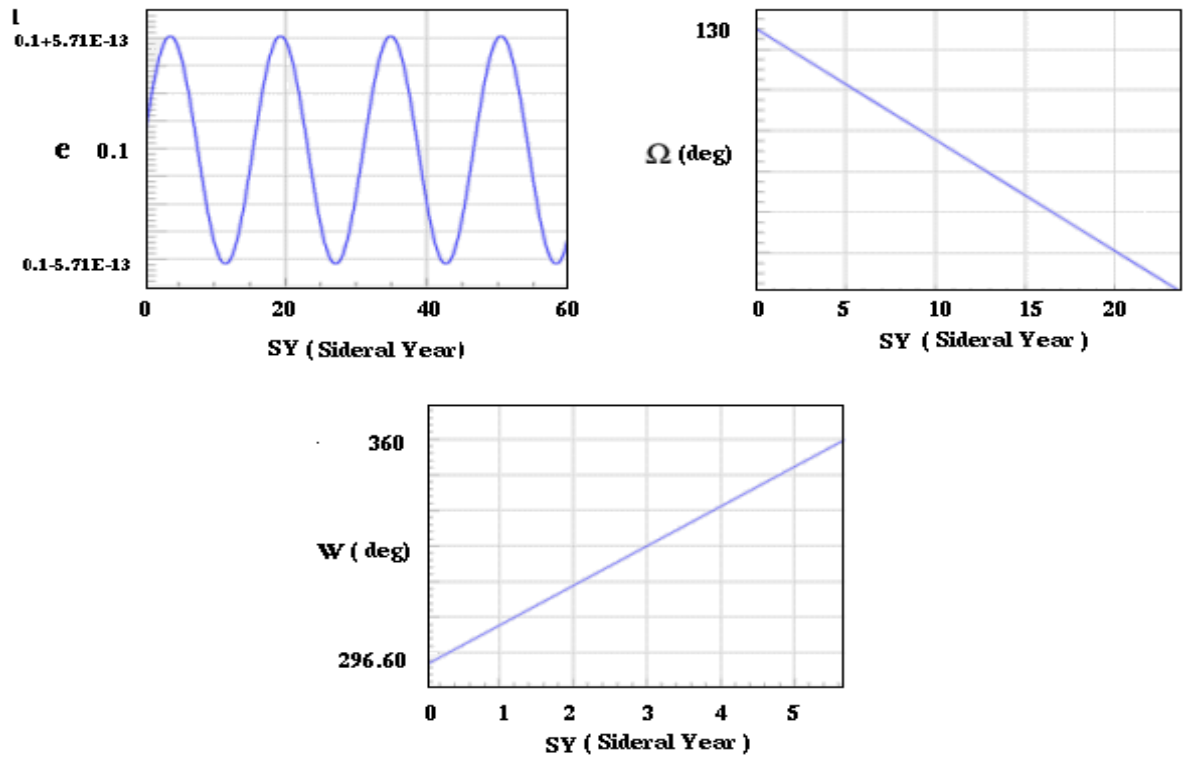


Figura 14. Evolución secular de los elementos orbitales en torno a Júpiter

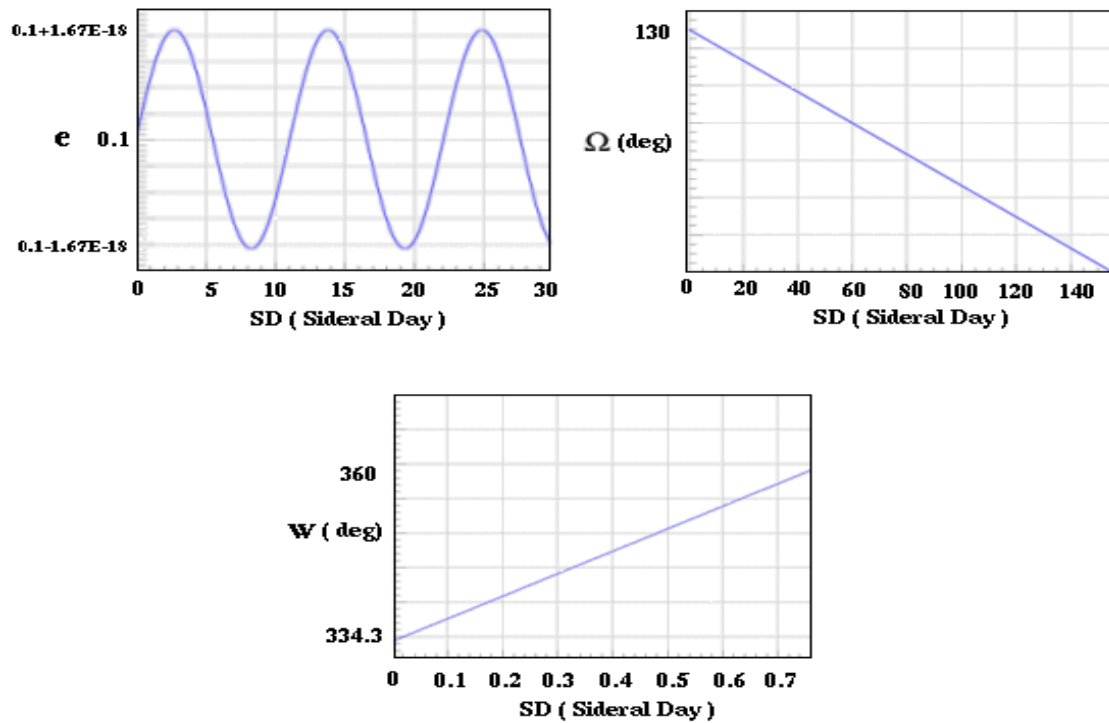


Figura 15. Evolución secular de los elementos orbitales en torno a Saturno

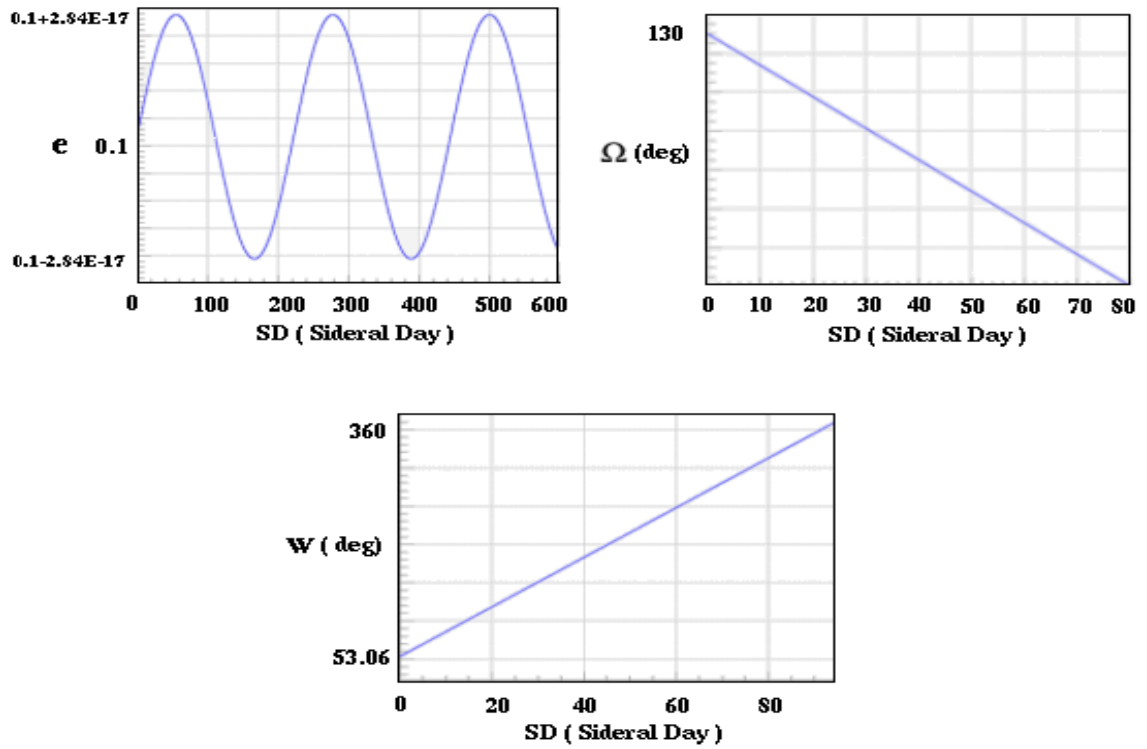


Figura 16. Evolución secular de los elementos orbitales en torno a Urano

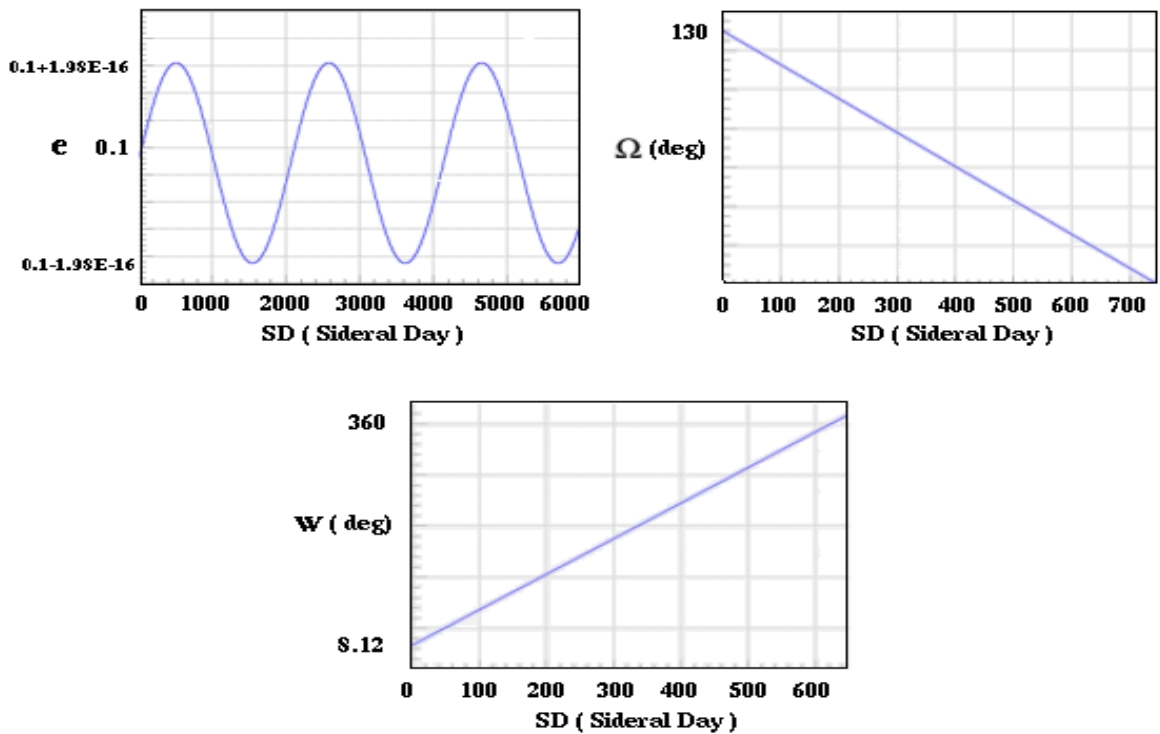
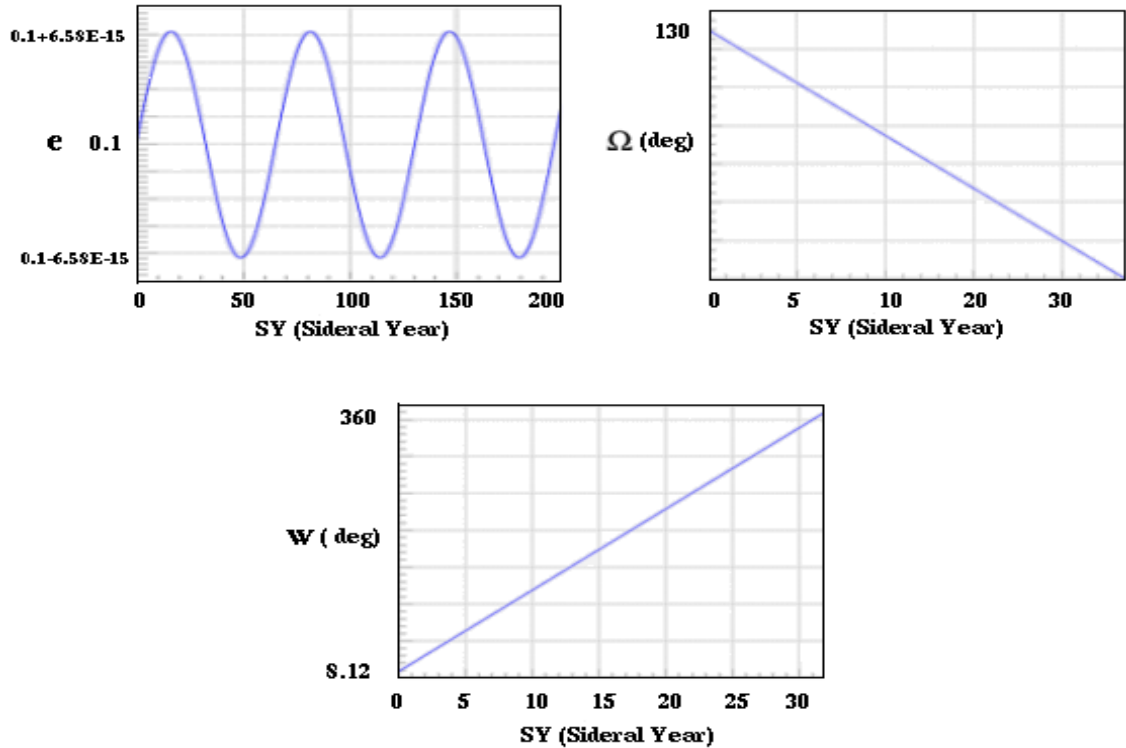


Figura 17. Evolución secular de los elementos orbitales en torno a Neptuno



Para Mercurio, la excentricidad mostró una amplitud del orden de  $10^{-11}$  con un período de 28 años siderales. La longitud del nodo ascendente alcanza los 0 grados a partir de un valor inicial de 130 grados en un tiempo 12.3 años siderales. El argumento del pericentro alcanza los 360 grados a partir de su valor inicial de 37.45 grados en 14.6 años siderales.

Para Venus, la excentricidad mostró una amplitud del orden de  $10^{-13}$  con un período de 200 años siderales. La longitud del nodo ascendente alcanza los 0 grados a partir de un valor inicial de 130 grados en un tiempo de 70 años siderales. El argumento del pericentro alcanza los 360 grados a partir de su valor inicial de 91.56 grados en 76 años siderales.

Para Marte, la excentricidad mostró una amplitud del orden de  $10^{-13}$  con un período de 17 años siderales. La longitud del nodo ascendente alcanza los 0 grados a partir de un valor inicial de 130 grados en 26 años siderales. El argumento del pericentro alcanza los 360 grados a partir de su valor inicial de 296.6 grados en 5.6 años siderales.

Para Júpiter, la excentricidad mostró una amplitud del orden de  $10^{-18}$  con un período de 10.2 días siderales. La longitud del nodo ascendente alcanza los 0 grados a partir de su valor inicial de 130 grados en un tiempo de 140.6 días siderales. El argumento del pericentro alcanza los 360 grados a partir de su valor inicial de 334.3 grados en 0.6 días siderales.

Para Saturno, la excentricidad mostró una amplitud del orden de  $10^{-17}$  con un período de 200.3 días siderales. La longitud del nodo ascendente alcanza los 0 grados a partir de

su valor inicial de 130 grados en un tiempo 80 días siderales. El argumento del pericentro alcanza los 360 grados a partir de su valor inicial de 53.06 grados en 86.5 días siderales.

Para Urano, la excentricidad mostró una amplitud del orden de  $10^{-16}$  con un período de 2000 días siderales. La longitud del nodo ascendente alcanza los 0 grados partiendo desde un valor inicial de 130 grados en un tiempo de 700.4 días siderales. El argumento del pericentro alcanza los 360 grados a partir de su valor inicial de 8.12 grados en 600.4 días siderales.

Para Neptuno, la excentricidad mostró una amplitud del orden de  $10^{-15}$  con un período de 50.3 años siderales. La longitud del nodo ascendente alcanza los 0 grados partiendo de su valor inicial de 130 grados en 30.7 años siderales. El argumento del pericentro alcanza los 360 grados a partir de su valor inicial de 8.12 grados en 3.4 años siderales.

Para obtener todas las gráficas se utilizó el mismo valor del parámetro  $\alpha$ . En todos los casos la amplitud de la excentricidad fue despreciable, mientras que las variaciones de longitud del nodo ascendente y el argumento del pericentro fueron considerables. Sin embargo estos resultados al ser obtenidos con un solo valor de  $\alpha$  no arrojan resultados contundentes que permitan hacer conclusiones de la influencia de estas perturbaciones para cada uno de los planetas del sistema solar y por lo tanto los cálculos desarrollados son el principio de un nuevo trabajo de investigación.

## CONCLUSIONES

- Las soluciones seculares de las ecuaciones planetarias de Lagrange mostraron variación senoidal de la excentricidad, y variación lineal de la longitud del nodo ascendente y el argumento del pericentro. El resto de parámetros conservan su forma del problema de los dos cuerpos.
- En el caso de la órbita de parqueo con  $\alpha = 1,094 \times 10^{-4}$  se estudió la evolución de  $e$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$ , los resultados indicaron que las perturbaciones estudiadas no afectan la excentricidad, pero si afectan considerablemente  $\Omega$  y  $\omega$ . Este mismo efecto se noto para la evolución de la órbita en cada uno de los planetas del sistema solar.
- Se diseñó un modelo de viaje interplanetario teniendo en cuenta la excentricidad de las órbitas planetarias. Este modelo incluye cinco maniobras orbitales, tres de ellas de propulsión, y dos de retropropulsión. Para estas maniobras no se tuvo en cuenta las soluciones de las ecuaciones planetarias de Lagrange ya que estas son de naturaleza secular, mientras que las maniobras orbitales son impulsivas.

## RECOMENDACIONES

- Los estudios de satélites artificiales han confirmado que la perturbación por efecto dragging con la atmosfera terrestre influyen de manera significativa a la perturbación de la órbita y mas aun en los ciclos de maxima actividad solar, tal como lo reseña el profesor Alberto Quijano Vodniza en su artículo sobre starshine, por lo tanto sería interesante estudiar esta perturbación.
- Hacer un analisis más a fondo de las perturbaciones por gravedad solar y achatamiento planetario y así obtener con mas detalle un estudio de las propiedades de cada uno de los planetas del sistema solar.
- Desarrollar métodos computacionales para hacer simulaciones de maniobras orbitales y viajes interplanetarios.

## BIBLIOGRAFÍA

- BOULET D. Methods of Orbit Determination For the Micro Computer. Willmann Bell, Inc. Virginia 1991.
- DANBY J. Fundamentals of Celestial Mechanics. Willmann Bell, Inc. Virginia 1988.
- SIMMONS G, y KRANTZ S. Ecuaciones diferenciales. Mc Graw Hill. India 2007.
- GOLDSTEIN H. Mecánica Clásica. Addison-wesley.
- HASSANI SADRI. Mathematical Physics. Springer. New York 2001.
- LEHMANN C. Geometría Analítica. Limusa 2007.
- MONTENBRUCK O,y GILL E. Satellite Orbits. Springer, webling 2000.
- MURRAY.C,y DERMOTT.S. Solar System Dynamics. Cambridge University Press. Cambridge 1999.
- PADMANABHAN T. Theoretical Astrophysics. Cambridge University Press. Cambridge 2000.
- PATER,I, y LISAAUER,J. Planetary Sciences. Cambridge University Press, Cambridge 2007.
- PORTILLA J. Elementos de astronomía de posición. Observatorio Astronómico Nacional. Bogotá.
- WIE B. Space Vehicle Dynamics and Control. Arizona state University. AIAA. Tempe Arizona 1998.



## ANEXOS

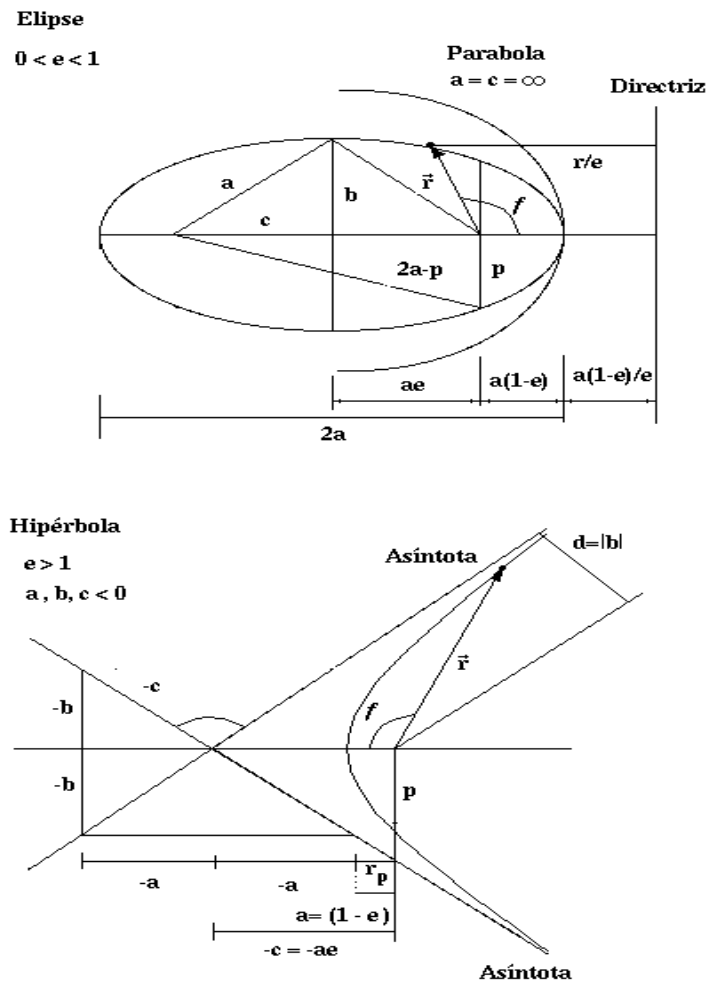
### Anexo A. Geometría de las secciones cónicas<sup>19</sup>

La ecuación general de una sección cónica en términos de coordenadas polares es:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(f)} \quad (\text{A.1})$$

donde  $p$  es el parámetro y  $e$  la excentricidad. El tamaño de la cónica es determinado por  $p$  y el achatamiento por la excentricidad  $e$ . Notemos que  $p$  es la distancia radial  $r$  de un punto en una cónica cuando  $f = \pm 90^\circ$ .

Figura 18. Geometría de las secciones cónicas



<sup>19</sup>WIE B. Space Vehicle Dynamics and Control. pág 216

A.1 Elipse. Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los puntos. Los dos puntos fijos se llaman focos de la elipse.<sup>20</sup>

la excentricidad  $e$  de la elipse es definida como:

$$e = \frac{c}{a} \quad (\text{A.2})$$

donde  $a$  es el semieje mayor dy  $c$  es la distancia desde el centro de la elipse a uno u otro foco, como se muestra en la figura 18. La elipse es una cónica con  $0 \leq e < 1$ . La circunferencia se considera como una caso especial de elipse con  $e = 0$ .

El semieje mayor  $b$  de la elipse se expresa en términos de  $a$  y  $e$  como sigue:

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \quad (\text{A.3})$$

ya que  $a$ ,  $b$  y  $c$  se expresa como:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (\text{A.4})$$

Si una línea es dibujada perpendicular al semieje mayor en el foco verdadero, esta intersecará cualquier sección cónica en dos puntos. La distancia entre estos dos puntos, donotada por  $2p$ , es llamada latus rectum, y  $p$  es llamado semiltus rectum o parámetro. El parámetro  $p$  de la elipse puede ser expresado en términos de  $a$  y  $e$  como sigue:

$$p = a(1 - e^2) \quad (\text{A.5})$$

ya que, para cualquier punto de una elipse, la suma de las distancias a los dos focos es definida como una constante  $2a$ .

Finalmente, la ecuacuación de la elipse puede ser expresada como:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(f)} \quad (\text{A.6})$$

la cual está en términos de las constantes geométricas  $a$  y  $e$ .

La distancia al periapsis  $r_p$  y al apoapsis  $r_a$  de la elipse pueden ser encontradas como:

$$r_p = a(1 - e) \quad (\text{A.7})$$

$$r_a = a(1 + e) \quad (\text{A.8})$$

las cuales combinadas dan:

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} \quad (\text{A.9})$$

y

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \quad (\text{A.10})$$

---

<sup>20</sup>LEHMANN C. Geometría Analítica.

A.2 Parábola. La parábola es el lugar de un punto cuya distancia desde un foco es igual a la distancia desde la directriz. La parábola es una sección cónica con  $a = c = \infty$  y  $e = 1$ .

El parámetro  $p$  de una parábola es:

$$p = 2r_p \quad (\text{A.11})$$

A.3 Hipérbola. Una hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.<sup>21</sup>

Como en el caso de la elipse, la excentricidad  $e$  de la hipérbola puede ser expresada en términos del semieje mayor  $a$  y la excentricidad  $e$  como  $e = \frac{c}{a}$  y la hipérbola es una cónica con  $e > 1$ .

El semieje menor  $b$  de la hipérbola puede ser expresado en términos del semieje mayor  $a$  y la excentricidad  $e$  como:

$$b = a\sqrt{e^2 - 1} \quad (\text{A.12})$$

Las constantes  $a$ ,  $b$ , y  $c$  de la hipérbola se relacionan como:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (\text{A.13})$$

La distancia a la asíntota, denotada como  $d$  en la figura 18, es idéntica al valor absoluto del semieje menor  $b$  de la hipérbola.

El parámetro  $p$  y la distancia al periapsis pueden ser expresados como:

$$p = (1 - e^2) \quad (\text{A.14})$$

$$r_p = a(1 - e) \quad (\text{A.15})$$

En consecuencia la ecuación de una hipérbola puede escribirse como:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(f)} \quad (\text{A.16})$$

donde  $a < 0$ ,  $e > 1$ , y  $p > 0$ .

## Anexo B. El Geopotencial<sup>22</sup>

Para la discusión de un modelo realista del geopotencial gravitacional, es conveniente usar una representación equivalente que involucra el gradiente del correspondiente potencial gravitacional  $U$

$$\ddot{\vec{r}} = \nabla U \quad (\text{B.1})$$

<sup>21</sup>LEHMANN C. Geometría Analítica.

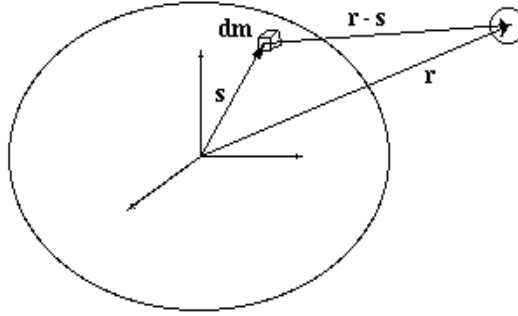
<sup>22</sup>MONTENBRUCK O,y GILL E. Satellite Orbits. pág (56-57)

donde  $U = \frac{GM_{\oplus}}{r}$ . Esta expresión se generaliza a una distribución de masa arbitraria haciendo la suma de todas las contribuciones creadas por elementos de masa individuales  $dm = \rho(s)d^3s$  acorde a:

$$U = G \int \frac{\rho(s)d^3s}{|\vec{r} - \vec{s}|} \quad (\text{B.2})$$

Donde  $\rho(s)$  es la densidad media en algún punto  $\vec{s}$  dentro de la tierra, y  $|\vec{r} - \vec{s}|$  es la distancia a un satélite desde ese lugar (Figura 19).

Figura 19. Contribución de un pequeño elemento de masa al geopotencial



En orden de evaluar la integral en la anterior ecuación, el inverso de la distancia debe ser expandido en una serie de polinomios de Legendre. Para  $r > s$  se tiene que:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^n P_n \cos(\gamma) \quad (\text{B.3})$$

con  $\cos(\gamma) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{rs}$  y

$$P_n(u) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{du^n} (u^2 - 1)^n \quad (\text{B.4})$$

los polinomios asociados de Legendre de grado  $n$ , y  $\gamma$  es el ángulo entre  $\vec{r}$  y  $\vec{s}$ .

Introduciendo la longitud geográfica  $\lambda$  y la latitud geocéntrica  $\phi$  del punto  $\vec{r}$  acorde a

$$x = r \cos(\phi) \cos(\lambda) \quad (\text{B.5})$$

$$y = r \cos(\phi) \sin(\lambda) \quad (\text{B.6})$$

$$z = r \sin(\phi) \quad (\text{B.7})$$

Haciendo uso del teorema de adición de los polinomios de Legendre, tenemos que:

$$P_n(\cos(\gamma)) = \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{0m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\sin(\phi)) P_{nm}(\sin(\phi')) \cos(m(\lambda - \lambda')) \quad (\text{B.8})$$

donde  $P_{nm}$  son los polinomios asociados de Legendre de grado  $n$  y orden  $m$ , los cuales se definen como:

$$P_{nm}(u) = (1 - u^2)^{m/2} \frac{d^m}{du^m} P_n(u) \quad (\text{B.9})$$

El potencial gravitacional de la Tierra se escribe en la forma:

$$U = \frac{GM_{\oplus}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{R_{\oplus}^n}{r^n} P_{nm}(\text{sen}(\phi))(C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \text{sen}(m\lambda)) \quad (\text{B.10})$$

con coeficientes:

$$C_{nm} = \frac{2 - \delta_{0m}}{M_{\oplus}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int \frac{s^n}{R_{\oplus}^n} P_{nm}(\text{sen}(\phi') \cos(m\lambda')) \rho(\vec{s}) d^3(s) \quad (\text{B.11})$$

$$S_{nm} = \frac{2 - \delta_{0m}}{M_{\oplus}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int \frac{s^n}{R_{\oplus}^n} P_{nm}(\text{sen}(\phi') \text{sen}(m\lambda')) \rho(\vec{s}) d^3(s) \quad (\text{B.12})$$

los cuales describen la dependencia de la distribución de masa interna. Coeficientes geopotenciales con  $m = 0$  son llamados zonales, ya que ellos describen la parte del potencial que no dependen de la longitud. Estos coeficientes se denotan de la siguiente manera:

$$J_n = -C_{n0} \quad (\text{B.13})$$

la cual es comunmente usada para referirse a los términos zonales.

Anexo C. Series de Fourier.<sup>23</sup>

Teorema. (generalización del teorema de Stone-Weierstrass) Supongamos que

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\text{C.1})$$

es una función continua en el dominio  $[a_i \leq x_i \leq b_i]_{i=1}^n$ . Entonces esta función se puede expandir en términos de  $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ , donde los  $k_i$  son enteros no negativos.

Ahora consideremos funciones que son periódicas e investiguemos su expansión en términos de funciones periódicas elementales. Usamos el teorema generalizado de Stone-Weierstrass con dos variables,  $x$  y  $y$  las cuales pueden ser consideradas como coordenadas del plano  $xy$ . Estas coordenadas se pueden escribir en términos de coordenadas polares  $r$  y  $\theta$ . En este caso, obtenemos:

$$f(r, \theta) = g(r \cos(\theta), r \text{sen}(\theta)) = \sum_{k,m=0}^{\infty} a_{km} r^{k+m} \cos^k(\theta) \text{sen}^m(\theta) \quad (\text{C.2})$$

En particular, si hacemos  $r = 1$ , obtenemos una función de  $\theta$  solamente, la cual bajo la sustitución de exponenciales complejos para  $\text{sen}(\theta)$  y  $\cos(\theta)$  es:

$$f(\theta) = \sum_{k,m=0}^{\infty} a_{km} \frac{1}{2^k} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^k \frac{1}{(2i)^m} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\theta} \quad (\text{C.3})$$

donde  $b_n$  son constantes que dependen de  $a_{km}$ . La anterior expansión es apta para funciones que satisfacen las condiciones de periodicidad:

$$f(\theta - \pi) = f(\theta + \pi)$$

---

<sup>23</sup>HASSANI S. Mathematical Physics. pág(196-197)

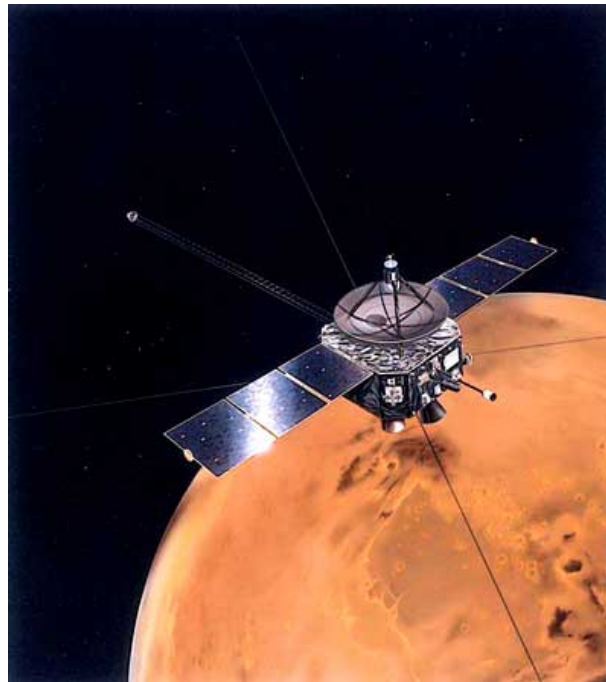
La ecuación (C.3) la podemos escribir como:

$$\begin{aligned}
 f(\theta) &= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n e^{in\theta} + b_{-n} e^{-in\theta}) \\
 &= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(b_n + b_{-n}) \cos(n\theta) + i(b_n - b_{-n}) \sin(n\theta)] \\
 &= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)] \quad (C.4)
 \end{aligned}$$

Si  $f(\theta)$  es real, entonces  $b_0$ ,  $A_n$ , y  $B_n$  son también reales. Las ecuaciones (C.3) y (C.4) son llamadas las series de Fourier para  $f(\theta)$ .

Anexo D. Sonda Espacial NOZOMI<sup>24</sup>

Figura 20. Sonda espacial NOZOMI.



El empeño de colocar la sonda espacial Nozomi dentro de una órbita marciana tuvo que ser abandonado. Una tentativa de incendio en los propulsores que orientaban el vehículo ocurrió el 9 de Diciembre de 1998. Los pequeños propulsores fueron suseptibles al fuego y Nozomi pasó a una distancia de 1000 km de Marte el 14 de diciembre y entró a una órbita heliocéntrica con un período de 2 años.

Nozomi cuyas siglas en ingles significan (Japanese for Hope and known before launch as

<sup>24</sup><http://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/spacecraftDisplay.do?id=1998-041A>

Planet-B) fue planeada para orbitar Marte, estudiar su baja atmósfera y su interacción con el viento solar y el desarrollo de tecnologías para ser usadas en futuras misiones planetarias. Específicamente la instrumentación del vehículo fue desarrollada para medir la estructura, composición y dinámica de la ionosfera, los efectos del viento solar, los constituyentes de la atmósfera, el campo magnético, la estructura de la magnetósfera, y el polvo en la baja atmósfera y en la órbita alrededor de Marte. La misión también debía enviar imágenes de la superficie marciana.

Después de ser lanzado en un cohete M-V-3 el Nozomi entró en una órbita de parqueo con un perigeo de 340 km y un apogeo de 400000 km. El vehículo espacial usó dos propulsiones gravitacionales con la luna, la primera el 24 de septiembre y otra el 18 de diciembre de 1998, para incrementar el apogeo de su órbita. El Nozomi también utilizó

la propulsión terrestre el 20 de diciembre de 1998 en un perigeo de aproximadamente 1000 km. El asistente gravitacional hizo posible una maniobra para impulsar al Nozomi fuera de la órbita Terrestre y lanzarlo con rumbo a Marte después de quemar un bipropelente, se planeó que el vehículo arribaría el 11 de octubre de 1999 a la 7:45:14 UT, pero una falla en una válvula durante el impulso Terrestre resultó en una pérdida de combustible y el Nozomi no tuvo la suficiente aceleración para alcanzar la trayectoria planetaria. Dos maniobras de corrección fueron llevadas a cabo el 21 de diciembre usando más propelente que el planeado, dejando al spacecraft corto de combustible.

El nuevo plan para Nozomi consistía en hacerlo orbitar en una trayectoria heliocéntrica por un tiempo adicional de cuatro años, incluyendo dos pasos por la Tierra en diciembre de 2002 y junio de 2003, y encontrarse con Marte a una baja velocidad relativa en diciembre de 2003. En abril 21 de 2002 Nozomi se aproximó a la esfera de influencia gravitacional terrestre para realizar una maniobra de asistencia, potentes tormentas solares dañaron los sistemas de comunicaciones del vehículo. Un corto circuito se produjo en una celda utilizada para control de altitud y calor, esta celda también permitía descongelar el combustible. El combustible no pudo ser descongelado cuando el vehículo se acercó a la Tierra se realizaron las maniobras para colocar el spacecraft en una trayectoria correcta pero estas fallaron.

Otra maniobra fue realizada el 19 de junio de 2003 a 11000 km de. El combustible no pudo ser descongelado y los esfuerzos para salvar la misión fueron abandonados. Los propulsores se encendieron en diciembre de 2009 para dirigir el vehículo hacia una órbita cerrada de 100 km. El spacecraft voló por Marte en diciembre de 2003 y entró a una órbita heliocéntrica de aproximadamente 2 años.

Anexo E. Datos Planetarios <sup>25</sup>

Cuadro 3. Datos planetarios

---

<sup>25</sup>PATER,I, y LISAAUER,J. Planetary Sciences. pág(6 y 221)

Planeta	$a$ (UA)	$e$	$I$ (deg)	$\Omega$ (deg)	$\bar{\omega}$ (deg)
Mercurio	0,38709880	0,20563175	7,00499	48,3309	77,4561
Venus	0,72333201	0,00677177	3,39447	76,6799	131,5637
Tierra	1,00000083	0,016708617	0,0	0,0	102,9374
Marte	1,52368946	0,09340062	1,849736	49,5581	336,6023
Júpiter	5,2027584	0,048495	1,3033	100,464	14,331
Saturno	9,5428244	0,055509	2,4889	113,666	93,057
Urano	19,19206	0,04630	0,773	74,01	173,01
Neptuno	30,06893	0,00899	1,770	131,78	48,12

Planeta	$R_{\otimes}$ (km)	Masa ( $\times 10^{23} kg$ )	$J_2 \times 10^{-6}$
Mercurio	$2440 \pm 1$	3,302	$60 \pm 20$
Venus	$6051,8(4 \pm 1)$	48,685	$4,46 \pm 0,03$
Tierra	$6371,0(1 \pm 2)$	59,736	1082,627
Marte	$3389,9(2 \pm 4)$	6,4185	$1960,5 \pm 0,2$
Júpiter	$66911 \pm 6$	1898,6	$14736 \pm 1$
Saturno	$58232 \pm 6$	568,46	$16298 \pm 10$
Urano	$25362 \pm 12$	86,832	$3343,4 \pm 0,3$
Neptuno	$24624 \pm 21$	102,43	$3411 \pm 10$