

Oscar Fernando Soto Agreda
Andrés Chaves Beltrán
Hilbert Blanco-Álvarez



Lugares geométricos elementales



Editorial
Universidad de Nariño



Editorial
Universidad de Nariño

LOCUS:
LUGARES GEOMÉTRICOS
ELEMENTALES

LOCUS: LUGARES GEOMÉTRICOS ELEMENTALES

Oscar Fernando Soto Agreda

Andrés Chaves Beltrán

Hilbert Blanco-Álvarez



Editorial
Universidad de Nariño

Soto Ágreda, Oscar Fernando

Locus : Lugares geométricos elementales / Oscar Fernando Soto Ágreda, Andrés Chaves Beltrán e Hilbert Blanco Álvarez. -- San Juan de Pasto : Editorial Universidad de Nariño, 2023
137 p. : il.

Incluye bibliografía p. 128 y datos de los autores p. 129

ISBN: 978-628-7509-88-7 Impreso

1. Geometría 2. Geometría--Enseñanza 3. Geometría plana 4. Geometría analítica 5. Educación matemática 6. Geometría--Problemas, Ejercicios, etc. 7. Cabri--Software de asistencia geométrica 8. Ca ri Géomètre II plus--Software de estudio I. Chaves Beltrán, Andrés II. Blanco Álvarez, Hilbert

516.22 S718 – SCDD-Ed. 22



Sección de Biblioteca
"Alberto Quijano Guerrero"

Locus: Lugares geométricos elementales

© Editorial Universidad de Nariño

© Oscar Fernando Soto Agreda

Andres Chaves Beltrán

Hilbert Blanco-Álvarez

ISBN Digital e impreso: 978-628-7509-88-7

Fecha de publicación: Año 2023

Diagramación y Diseño: Mateo Felipe Delgado Guerrero

Prohíbida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o con cualquier propósito sin la autorización de su Autor o de la Editorial Universidad de Nariño

PREFACIO	7
CAPÍTULO 1	9
1.1 Lineamientos del Libro	9
1.2 Ambientes dinámicos para el aprendizaje de la geometría	10
1.3 Un ejemplo formal desde la mecánica	12
1.4 El modelo sintético versus el analítico	15
1.5 Un ejemplo desde el modelo sintético	16
1.6 Algunas operaciones aritméticas con segmentos	18
1.7 La argumentación en los procedimientos	20
1.8 Otros caminos de solución	22
1.9 Exploración de lugares	25
1.10. Uso de otros recursos	29
1.11. Generalidades sobre Cabrí Géomètre, el cuaderno de notas interactivo de geometría	33
CAPÍTULO 2	36
2.1 Lugares Geométricos Clásicos	36
2.3 Lugares geométricos referidos a la recta	54
2.4 Lugares referidos a la circunferencia	66
2.5 Lugares referidos a la parábola	82
2.6 Lugares referidos a la elipse	89
2.7 Lugares referidos a la hipérbola	97
CAPÍTULO 3	105
3.1 Lugares referidos a las tangentes - curvas pedal o podarias	105
3.2 Construcción de las tangentes	109
3.3 Construcción de elementos dada la curva dibujada	114
Capítulo 4	117
Sobre el origen de la geometría analítica: Apolonio, Descartes y Fermat	117
Antecedentes de Las Cónicas de Apolonio	119
Bibliografía	128
Los autores	129
Lista de figuras	130

PREFACIO

La aparición del software de asistencia geométrica de modelo dinámico AGD ha dinamizado el interés por el aprendizaje de la geometría en varios sentidos; para verificar los resultados que compendian el conocimiento organizado de esta ciencia, para enfrentarse a nuevos retos y problemas y tener la posibilidad de plantearse situaciones similares y para explorar nuevos resultados desde las conjeturas individuales y desde las posibilidades mismas del aplicativo computacional.

En particular, el sentido dinámico que tiene este recurso ha abierto la posibilidad de explorar lo inherente a los lugares geométricos, tema que causa especial dificultad cuando se estudia desde lo estático de un diagrama o dibujo. El dinamismo se convierte en una extensión de las ideas, del pensamiento y de la razón. Un lugar geométrico es una función que relaciona un objeto geométrico inicial con otro final, sostenidos mediante una ligazón lógica de dependencia geométrica en una construcción intermedia.

Desde este punto de vista, el beneficio académico de la utilización de un AGD persiste solo si los conocimientos geométricos son vastos y la habilidad geométrica congruente con ellos. Es decir, el uso de un sistema de geometría dinámica es útil siempre que se pueda acudir al repositorio individual de los conocimientos.

Pero, el conocimiento se adquiere por razones limitadas, depende del medio y los recursos, a veces de los actores que lo impelen. Este texto se inspira en el tríptico mencionado; está dirigido a los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño, y se traduce en un medio escrito con alto contenido visual y suficientes ejemplos que revelan no solo, las grandes dificultades que sortearon los antecesores geómetras, quienes realizaron sus descubrimientos mediante la repetición de situaciones puntuales.

El texto también es un recurso didáctico que se mueve desde las inquietudes epistemológicas que establecen las nuevas preguntas de la forma como tiene ocurrencia el aprendizaje, y sin duda refleja el sentido humano y dignificante que se espera detecten los usuarios del mismo, pues el libro contiene la potencia de las habilidades individuales de sus autores, unido a que, el libro, se debe adoptar como un acto de ternura tal como todo proceso de enseñanza.

Así, este libro se debe tomar como un amigo maestro que se puede llevar debajo del brazo, buen maestro, pues es incompleto en el sentido que debe nutrirse con la inquietud individual de sus lectores.

El libro es una obra inconclusa. Su fin se establece que cada que uno de sus lectores resuelva uno de los problemas propuestos; otras conjeturas busquen hallar nuevos algoritmos o procedimientos, o bien aporte un nuevo resultado o redescubra alguno ya establecido. Es un libro con varios finales, con desenlaces individuales. Por ello se ha dividido en capítulos en los que resaltan los de corte epistemológico con inquietudes propias de la educación matemática, contiene secciones específicas para las secciones cónicas que incluyen la recta, la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola.

Un capítulo especial contiene un uso instrumental de las secciones cónicas para resolver los casos del problema de Apolonio y otro elemental en el que se resuelve un solo problema con infinitas vías de solución y única respuesta en el que de la nada, aparecen infinitas elipses e hipérbolas.

Los autores han creído necesario incluir la construcción de curvas en coordenadas polares, como un caso especial de lugares geométricos; así mismo, un capítulo en el que se muestra la forma en que ellos se convierten en mecanismos de solución de problemas especiales. Cada ejemplo, cada aparte, tiene un viso creativo importante y la explicación teórica de cada construcción no explica la razón geométrica o matemática que acerca a la solución; al contrario, debe ser el alumno, el lector, el que establezca la razón de cada paso. Esa particularidad del libro que no lo dice todo es una cualidad que adrede devela el respeto que los autores sienten por sus lectores. Además, cada situación se resuelve por vía doble, en el modelo euclidiano y en el modelo cartesiano o analítico, hecho que enriquece aún más, los propósitos académicos de texto.

Por último, el texto se ha enriquecido con un grupo significativo de situaciones problema; capítulo que además puede ser enriquecido por los lectores que nos envíen sus inquietudes o sus planteamientos a cualquiera de los correos de los autores, oportunidad que permitiría considerar la posibilidad de una segunda edición del texto, con lo cual establece que este libro no tiene la intención de ser una obra terminada.

Todos los ejemplos expuestos en el libro se realizaron con el asistente geométrico Cabrí Gèomètre y se pueden descargar de <https://sired.udenar.edu.co/11342/>

Cada construcción se identifica con el número que acompaña a la gráfica correspondiente y parte de la palabra clave que identifica al capítulo. Por ejemplo, para el capítulo problemas relativos a la circunferencia, su Gráfica 8, por ejemplo, se denomina Circun8.fig. Las mismas construcciones poseen el ingrediente didáctico de avanzar en la comprensión detallada del proceso de solución y para ello disponen de un grupo de botones que dan chance a intuir no solo cada paso, sino también la razón del mismo.



Capítulo 1

1.1 Lineamientos del Libro

Este capítulo establece elementos para aprovechar el libro y presenta criterios relevantes en torno a los lugares geométricos, los rudimentos empleados y lo que no está al alcance de los objetivos del mismo.

El libro se fundamenta en la conversión de un problema establecido en lenguaje retórico hacia su representación geométrica y no se detiene en el aspecto formal de una demostración de su solución ni en el modelo sintético ni en el analítico.

La tarea de traducir una situación con requisitos establecidos del lenguaje común en objetos geométricos y sus relaciones no es simple y debe procurarse con mayor entusiasmo en la escuela de manera consiente para atrapar a una cantidad mayor de aficionados al estudio de la geometría y de la matemática. La conversión es el paso inicial a la solución de un problema.

También propone ejemplos que escapan al objetivo del libro e invitan a seguir como modelo de enriquecimiento para el lector. Se toma uno de la mecánica, consistente en el deslizamiento de una escalera y se demuestra desde lo analítico que el lugar geométrico descrito por un punto particular es un arco de circunferencia; se estudian problemas de tangencia análogos al problema de Apolonio, y se prueba desde el álgebra elemental que las curvas descritas por centros de circunferencias son elipses o hipérbolas; se explica la forma en que un Asistente de Geometría Dinámica (AGD) se convierte en vehículo exploratorio y para ello se emplea el concepto de conjugado isogonal de un punto; se advierte que un problema, siguiendo el método heurístico, da pie a diversas soluciones y se hace una reflexión de la dinámica didáctica cambiante suscitada con la aparición de software específico para el estudio de la geometría; se presenta el uso de recursos que se consiguen dentro de las nuevas fuentes de información que dinamizan el interés, el espíritu creativo y el conocimiento y se presenta un caso relacionado con el origami que señala la relación entre las expresiones

culturales y el conocimiento geométrico. En particular, se presenta a Cabrí Géomètre, el cuaderno de notas interactivo de geometría, en el que se han desarrollado los ejemplos contenidos en el texto.

1.2 Ambientes dinámicos para el aprendizaje de la geometría

La aparición de diversos software de asistencia geométrica de modelo dinámico (AGD por sus siglas), ha intensificado el interés por el aprendizaje de la geometría en diversos sentidos; uno es la verificación de los resultados geométricos que compendian el conocimiento organizado de esa ciencia, otro, enfrentarse a retos y problemas y abrir la posibilidad de plantearse situaciones similares y preguntas, y el tercero, explorar resultados desde las conjeturas individuales con las posibilidades que tiene el aplicativo computacional.

Los AGD permiten la conversión de lo retórico en relaciones fundamentales entre los objetos geométricos y también hacia el álgebra elemental y su relación directa con el modelo de geometría analítica.

El sentido dinámico que tiene como mediador un AGD, posibilita explorar lo inherente a lugares geométricos, tema difícil si se estudia desde lo estático de un diagrama o dibujo plasmado en papel. El dinamismo de un programa computacional es una extensión de las ideas, del pensamiento y de la razón. Un lugar geométrico es una función que relaciona un objeto geométrico inicial con otro final, sostenidos mediante una ligazón lógica de dependencia geométrica en una construcción intermedia. Desde ese punto de vista, el beneficio académico de la utilización de un AGD persiste sólo si los conocimientos geométricos son vastos y la habilidad y creatividad congruente con ellos. Es decir, el uso de un sistema de geometría dinámica es útil siempre que se pueda acudir al acervo de conocimientos y de conceptos, puesto que ponen en acción los teoremas y resultados generales de la geometría.

El conocimiento se adquiere por razones, depende de los contextos, de los mediadores y los recursos, a veces de los actores que lo orientan, administran y organizan. Este texto se inspira en el tríptico mencionado. Está dirigido a estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y se traduce en un medio con alto contenido visual y con suficientes ejemplos que revelan no solo las dificultades que sortearon los antecesores geómetras, quienes realizaron sus descubrimientos mediante la repetición de situaciones puntuales.

El texto es un recurso didáctico que se mueve desde las inquietudes epistemológicas que establecen las nuevas preguntas de la forma en que tiene ocurrencia el aprendizaje y refleja el sentido humano y dignificante que se espera detecten los usuarios del mismo, pues el libro contiene la potencia de las

habilidades y el sentido creativo, unido a que es un acto de ternura tal como todo proceso de enseñanza. Así, este libro es un amigo maestro, maestro incompleto en el sentido que debe nutrirse desde la inquietud individual.

Cada uno de los problemas y ejemplos estudiados en el libro se acompaña de un archivo manipulable elaborado en Cabrí Géomètre Plus. El programa CABRI-GÉOMÈTRE II diseñado por Jean Marie Laborde y Franck Bellemain en la Universidad Joseph Fourier de Grenoble (Francia) es un software de asistencia geométrica de la línea de Geometría dinámica y validado en las aulas de la misma Universidad. Desde su aparición, en el último decenio del siglo pasado, el mundo escolar y académico asiste a una revolución cognitiva, movilizándolo la investigación educativa y modificando la didáctica de la geometría.

Cabré es una oportunidad para establecer conexión directa entre los mundos real e ideal puesto que en el mundo tangible no existen los objetos geométricos que se estudian en la escuela; no existen los cuadrados, ni los círculos, ni las rectas, ni los segmentos y menos, las relaciones entre ellos como la tangencia, o el paralelismo o la perpendicularidad y ni siquiera la exactitud en las medidas como la amplitud, el área o la longitud. Esos conceptos son fruto de la intervención de la mente en el proceso descriptivo o explicativo del mundo.

Cabré es un mediador entre el carácter abstracto de la geometría y el mundo real: la geometría está interesada en la forma como objeto de estudio parcialmente entendida por los griegos, quienes, con Euclides como adalid, crearon un sistema axiomático que permite a la razón intervenir en un mundo inexistente, un mundo en el que parecen suficientes la regla, el compás, el lápiz y el pensamiento. El mundo creado así no existe, porque sus elementos primitivos tampoco existen; Euclides definió “punto es lo que no tiene partes” y “línea es una longitud sin anchura”; así, toda marca que se hace en un papel, cada trazo deja de ser línea o punto pues la huella desde la capacidad microscópica de la observación, tiene parte y posee dimensiones, al igual que el trozo de papel donde se imprimen las representaciones está lejos de ser un plano en el sentido matemático de su existencia.

Igual pasa con cada AGD, que desde este vestigio epistemológico se convierte en una caricatura, en un modo de representación de las cosas, de las figuras. Si un punto no tiene parte, no tiene tamaño y, en consecuencia es imposible su percepción sensorial, igual ocurre con cada uno de los objetos; por ejemplo, una circunferencia que se define “como el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo”, tampoco existe porque no es posible ver a un punto; por tanto, tampoco se tiene la posibilidad de ver un conjunto de puntos, lo que garantiza que una circunferencia es un objeto invisible o lo que es lo mismo; que nadie tiene la capacidad de mirar una circunferencia, o un cuadrado o cualquier otra figura de la geometría elemental.

Lo que se tiene a disposición es un modo de representación de tales objetos y lo que hace un mediador como Cabrí, es el de extender un camino ideal que magnifica las relaciones entre los objetos y permite el descubrimiento de resultados, un mediador superior al lápiz y al papel pero inferior al pensamiento, a la razón. Así, se hace perceptible decir que todas las circunferencias son semejantes, al igual que todos los cuadrados, los triángulos equiláteros y las parábolas, pero dos elipses de focos fijos y diferentes no son semejantes y esto solo se explica desde unos pasos algebraicos derivados de la razón, del pensamiento puro.

CABRI-GÉOMÉTRE II simula los objetos geométricos, permite establecer para siempre las conexiones que se desea entre ellos, establece el concepto que los teóricos llaman construcciones robustas, en las que relaciones vinculantes de los objetos persisten a la prueba de arrastre de objetos iniciales. Al hacer tangible lo que se idea y razona establece una perfecta conjunción entre el mundo de las formas y las derivaciones lógicas de la mente.

Si bien, una manera de describir el mundo se hace a través de la forma, de la medida y de las relaciones entre los objetos, que es el motivo de abstracción de la geometría, la mente, la razón y la lógica intervienen en la ocurrencia de los eventos que se suscitan en ellos, o en partes constitutivas de los objetos.

La mente establece reglas, normas y finalmente leyes que son verdades para siempre. Por ejemplo, el hecho de que el punto medio de una escalera apoyada a una pared, describa al resbalarse por el piso un arco de circunferencia cuyo radio es la mitad de la longitud de la escalera, es algo innegable y concluyente que se establece como ley y que se puede evidenciar y registrar en CABRI desde una construcción dinámica que simule el evento. Este ejemplo tan simple se entrelaza con la temática que aborda este texto y que está referido al estudio de los lugares geométricos elementales: la recta, la parábola, la circunferencia, la elipse y la hipérbola, aparecen de manera recurrente en la resolución de problemas.

El libro no se detiene en encontrar con estrategias algebraicas las formas de conversión entre las ecuaciones, los objetos y lugares geométricos, sino que privilegia la simulación de cada situación estableciendo en el mediador de manera correcta y perfecta las condiciones iniciales, que son requisitos de cada problema y que relacionan los objetos geométricos subyacentes.

1.3 Un ejemplo formal desde la mecánica

El ejemplo de la escalera deslizante por el piso es prototipo de los problemas mecánicos, y su inmersión en un AGD se indica en la Figura 1-1. El mediador

CABRI permite hacer la simulación de modo que la escalera AB se apoya sobre una pared y se escoge su punto medio X , cuando B se desliza por la horizontal, el punto X describe como lugar geométrico un arco. Sin duda, aparenta ser un arco de circunferencia y la evidencia se fortalece si se ejecutan tareas de medición, por ejemplo, entre X y el punto en donde concurren las paredes (origen), para diferentes posiciones del punto B .

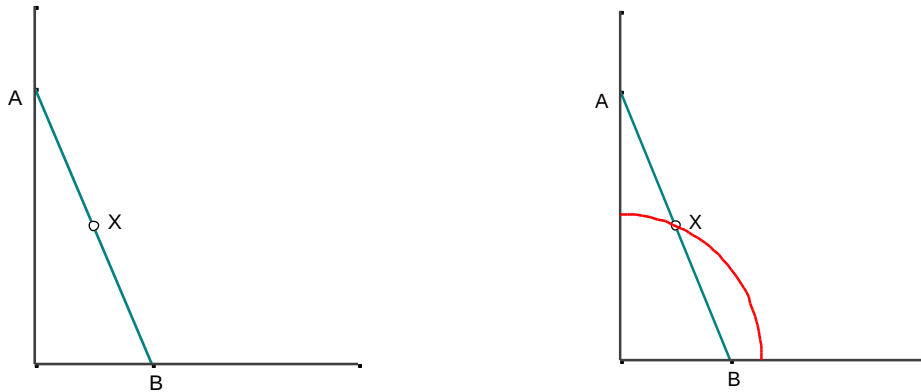


Figura ¡Error! No hay texto con el estilo especificado en el documento.-1. La escalera deslizando

Enlace 1 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Pero eso no es concluyente, no se puede creer en lo que se ve, lo que se mira no siempre es cierto porque la vista engaña. El hecho de que la percepción visual advierta que se trata de un arco de circunferencia no remplaza la conclusión razonable de una demostración. Para ello se tiene el arsenal de resultados establecidos en los diferentes modelos geométricos.

A continuación, se dispone una forma en que desde el mundo de las ideas se advierte que, en efecto, el punto X describe un arco de circunferencia. Los pasos del razonamiento entrelazan los modelos sintético y cartesiano.

Con $OA = v$, $OB = u$ y por la condición del problema $AB = r$ como longitud de la escalera y, en consecuencia, $AX = BX = \frac{r}{2}$, se advierte por el teorema de Pitágoras que $u^2 + v^2 = r^2$, como se ve en la Figura 1-2.

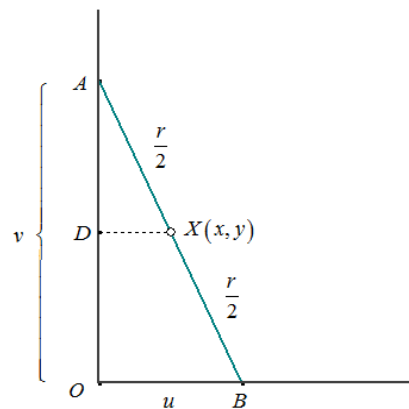


Figura -2. Longitud de la escalera

Figura 2 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Desde el ámbito cartesiano se observa que $DX = x$ y $OD = y$ como coordenadas del punto móvil X y a partir de que los triángulos rectángulos $\triangle ADX$ y $\triangle AOB$ son semejantes tienen todos sus elementos correspondientes proporcionales, se obtiene la proporción $\frac{x}{u} = \frac{v-y}{v} = \frac{1}{2}$. Con ello $x = \frac{u}{2}$, $y = \frac{v}{2}$, expresiones que definen la ecuación $x^2 + y^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2$ y que, a su vez, es la versión algebraica del objeto geométrico correspondiente a una circunferencia de centro en el origen de coordenadas O y radio $\frac{r}{2}$. De modo, que en efecto el punto medio X describe un arco de circunferencia con radio la mitad de la longitud de la escalera.

¿Y si en lugar del punto medio se toma otro punto de la escalera? Este tipo de inquietudes hacen apertura al simular la situación. Cualquier punto fijo de la escalera determina una nueva relación λ entre el segmento superior AX y la longitud total AB de la misma y desde el concepto de semejanza de triángulos empleado en este caso particular, se llega a que todos los demás puntos de la escalera describen al deslizarse el punto B por el piso, un arco de elipse. En efecto, si $\frac{AX}{AB} = \lambda$, por el mismo camino de argumentación se encuentra que el punto X describe la cuarta parte del arco de la elipse $\frac{x^2}{(\lambda r)^2} + \frac{y^2}{[(1-\lambda)r]^2} = 1$. De modo que si $r = 8$ y $\lambda = \frac{1}{4}$ definen la elipse $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$, como se aprecia en la Figura 1-3 y que se liga al plano cartesiano.

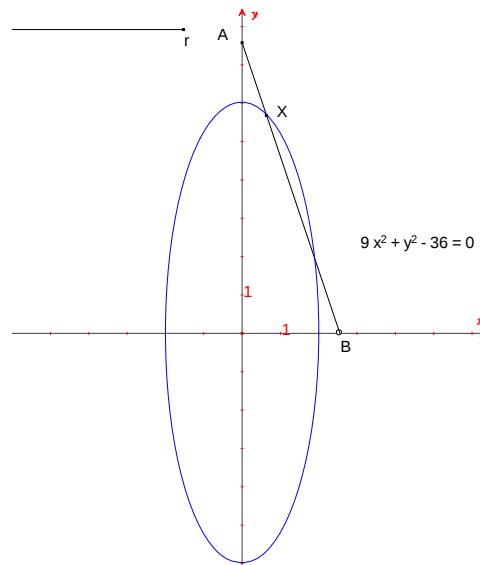


Figura 3 Otro punto de la escalera

Figura 3 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

1.4 El modelo sintético versus el analítico

En general, los requisitos que determinan los lugares geométricos están referidos a la distancia o a la ubicación proporcional de un objeto; por ello, resulta fácil traducir las condiciones iniciales a expresiones algebraicas. El texto se aleja de ese camino y más bien recurre a establecer en el mediador tales condiciones en cada una de las construcciones, mediante relaciones geométricas y medidas.

El párrafo anterior asegura de manera tácita que el modo de trabajo en los modelos sintético y cartesiano difiere. Mientras en el modelo sintético se requiere la intervención directa de las formas, en el modelo cartesiano, las relaciones determinadas en cada problema necesitan de su traducción al mundo algebraico. Póngase como ejemplo, el caso de encontrar el lugar geométrico de un punto del plano que se desplaza de modo que su distancia a una recta siempre es igual que su distancia a un punto fijo que está fuera de la recta. La línea y el punto están contenidos en el mismo plano.

En el modelo sintético se toma sobre la recta l un punto móvil M desde donde se levanta una perpendicular. La mediatriz entre los puntos M y P es el lugar de los puntos que equidistan de M y P y, por ello, el punto X de la perpendicular es uno de los puntos que satisface el requisito general del problema. La infinitud de puntos restantes se consiguen con solo desplazar el punto M por la recta l , evento que determina como lugar geométrico una parábola. (Ver Figura 1-4).

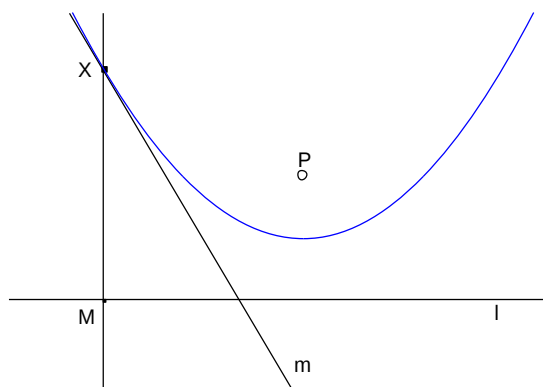


Figura -4 Parábola como lugar geométrico

Figura 4 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

En el modelo cartesiano y, sin perder generalidad, se toma como recta al eje x y como punto fijo uno arbitrario $F(p, q)$ y se piensa el problema resuelto; es decir, un punto del lugar geométrico $X(x, y)$ es tal que $|y| = \sqrt{(x - p)^2 + (y - q)^2}$ de donde aparece que el lugar es el compendio de puntos que satisfacen la ecuación $y = \frac{1}{2q}(x - p)^2 + \frac{q}{2}$ que se corresponde con una parábola.

Obsérvese que la solución del problema en el modelo analítico no requiere del empleo de los objetos, ni de las relaciones establecidas entre ellos, y ni siquiera de la representación gráfica de la situación.

La discusión entre cuál de los modelos es preferible adoptar se aleja de los propósitos del libro que se centra en el modelo sintético y relega lo cartesiano a un ejemplo de aplicación.

1.5 Un ejemplo desde el modelo sintético

Existen variados mecanismos como el del álgebra tradicional para explicar las razones inmersas, a través de relaciones geométricas en las construcciones. Los requisitos propuestos en cada problema se sumergen en relaciones geométricas de los objetos que ligan a cada construcción. Por ejemplo, un problema estudiado pide: “Trazar el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la semisuma de los cuadrados de las distancias del punto a dos vértices de un triángulo es igual al cuadrado de la distancia del punto al tercer vértice del mismo triángulo”. (Ver Figura 1-5).

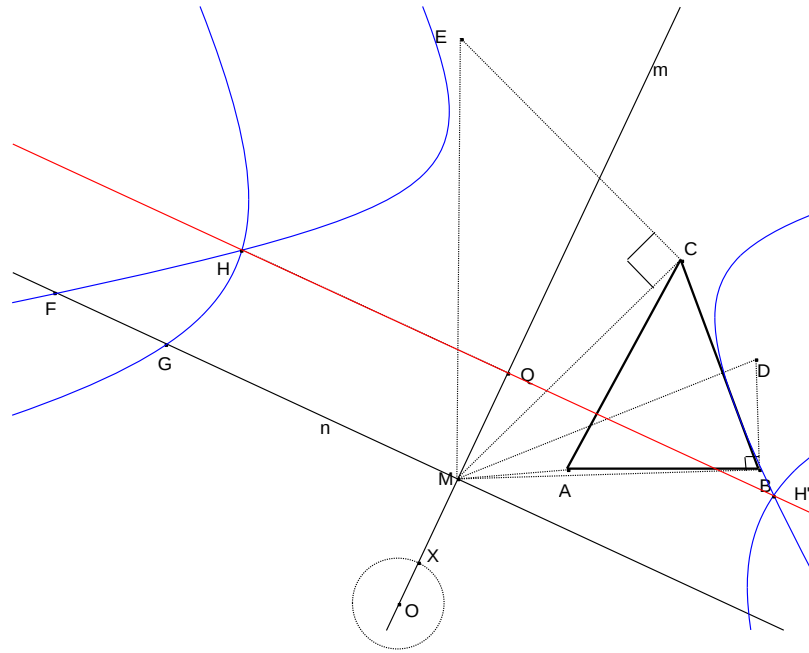


Figura - 5 Ejemplo de curva desde el modelo sintético

Figura 5 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

La solución es la siguiente. Sea el triángulo cualquiera $\triangle ABC$, m una recta arbitraria que modifica su inclinación de una circunferencia auxiliar de centro en O y radio OX , la inclinación cambia al modificar la posición del punto X en la circunferencia auxiliar. En la recta m se ubica un punto arbitrario M . Se consideran las distancias MA , MB y MC . Se construyen los triángulos rectángulos $\triangle MBD$ donde $BD = MA$ y $\triangle MCE$ con $CE = MC$.

En la recta n , perpendicular a m por el punto M , se ubican los puntos F y G tales que $MF = ME$ y $MG = MD$. En este punto es oportuno anotar que en concordancia con el teorema de Pitágoras se tiene que $MB^2 + BD^2 = MD^2$ y $MC^2 + CE^2 = ME^2$, pero como $CE = MC$ se concluye que $ME^2 = 2MC^2$.

Se trazan los lugares geométricos de los puntos F y G cuando se mueve M por la recta m y que son dos ramas de hipérbolas. En el punto de corte H de las ramas de hipérbola se tiene $MD = ME = HQ$, en el cual Q es el punto de intersección de la recta determinada por H y H' con la recta m , siendo H y H' los puntos de intersección de los dos pares de ramas de las hipérbolas. El punto Q también es el pie de perpendicular de H o H' de la recta m . Ese punto Q satisface los requisitos del problema y se convierte en uno de los puntos del lugar geométrico pedido. Así, cuando el punto M coincide con Q , se tiene coincidencia en las relaciones pitagóricas mencionadas, esto es $MB^2 + BD^2 = 2MC^2$ y como $BD = MA$ se obtiene en definitiva que $MA^2 + MB^2 = 2MC^2$ o lo que es lo mismo

$\frac{MA^2+MB^2}{2} = MC^2$, que determina la efectividad de los requisitos del problema, enmarcado en el álgebra tradicional.

Varios de los ejemplos del libro permiten esa tarea que se escapa del objetivo del libro, pero sugiere una tarea adicional para el lector acucioso.

Para obtener el lugar, se recomienda disponer traza al punto Q y animación al punto X de la circunferencia auxiliar en la construcción para modificar la inclinación de la recta m y conseguir otros puntos Q del lugar geométrico, que en todos los casos es una línea recta. Si el triángulo es equilátero se trata de una recta que pasa por el baricentro del mismo y paralela a uno de los lados. Para cualquier triángulo, el lugar geométrico es una recta determinada por cualquier punto Q determinado por el procedimiento aquí descrito y el baricentro G del triángulo original.

La explicación algebraica que hace de la solución un procedimiento correcto se apalanca en la proposición 47 del libro Elementos de Euclides, conocido como el teorema de Pitágoras. Es más, la misma construcción que resuelve el problema se fundamenta en ese mismo teorema, del que la humanidad ha acumulado más de cuatrocientas demostraciones.

1.6 Algunas operaciones aritméticas con segmentos

Varias construcciones de lugares geométricos estudiados en el libro recurren al cálculo de productos $a \times b$, de cocientes $\frac{a}{b}$ y de raíces cuadradas $\sqrt{a}$, los que se hacen a la usanza griega con el uso de segmentos, utilizando el teorema de Thales y la Proposición 13 del libro VI de los Elementos de Euclides que explica cómo hallar la media proporcional entre dos números a y b .

El llamado Teorema de Thales es la Proposición 2 del Libro VI de los Elementos de Euclides que asegura “Si se traza una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente los lados del triángulo. Y si se cortan proporcionalmente los lados de un triángulo, la recta que une los puntos de sección será paralela al lado restante del triángulo”.

La Figura 1-6 representa el cálculo del cociente $x = \frac{a}{b}$ ya que el Teorema de Thales asegura que los segmentos determinados por secantes a dos o más paralelas son proporcionales. Así, dados los segmentos a y b , se dispone de dos semirrectas de origen en un punto O y se ubican los puntos A, B, C y D , de tal modo que $OA = a, OB = b, BC = 1$ y el segmento CD sea paralelo a AB ; justo $AD = x = \frac{a}{b}$, valor al que se llega desde la proporción $\frac{a}{b} = \frac{x}{1}$.

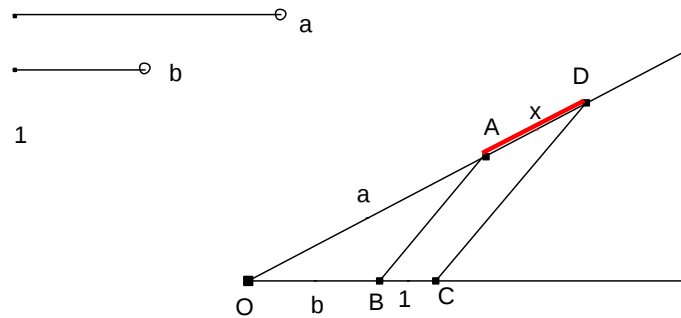


Figura - 6 Cálculo del cociente $x = \frac{a}{b}$

Figura 6 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

La Figura 1-7 representa el cálculo del producto $x = ab$, respecto de la construcción anterior se realiza una ligera permutación como se indica en la construcción. Para ello se toma $OC = 1$

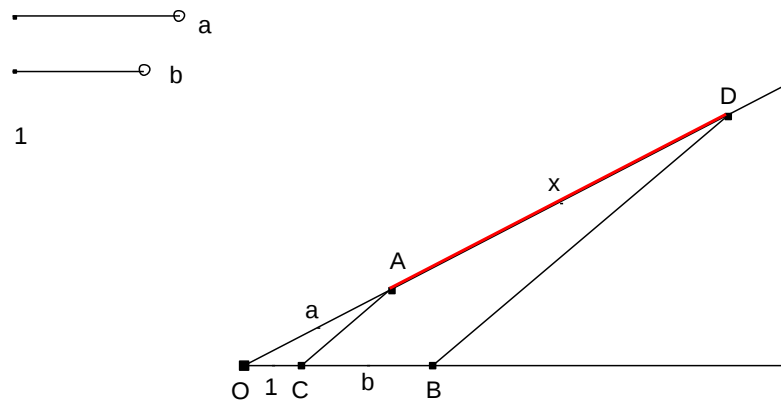


Figura -7 Cálculo del producto $x = ab$

Figura 7 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

$OA = a$, $CB = b$ y el segmento BD paralelo al segmento AC con lo que se consigue la proporción $\frac{x}{b} = \frac{a}{1}$, por ello AD es un segmento de longitud ab .

La Figura 1-8 representa el cálculo de $\sqrt{ab}$ que es la media proporcional entre dos segmentos de longitudes a y b .

Dados los segmentos de longitudes a y b , sobre una recta se ubican los puntos A y B de modo que O quede entre ellos y tales que $OA = a$ y $OB = b$. Se construye una circunferencia de centro en M , punto medio del segmento AB y por O se levanta una perpendicular que corta a la circunferencia en C . Por la semejanza entre los triángulos rectángulos $\triangle AOC$, $\triangle COB$ y $\triangle ACB$ se consigue la proporción $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ o sea $x = \sqrt{ab}$. De hecho, cuando $b = 1$, se ha construido $x = \sqrt{a}$.

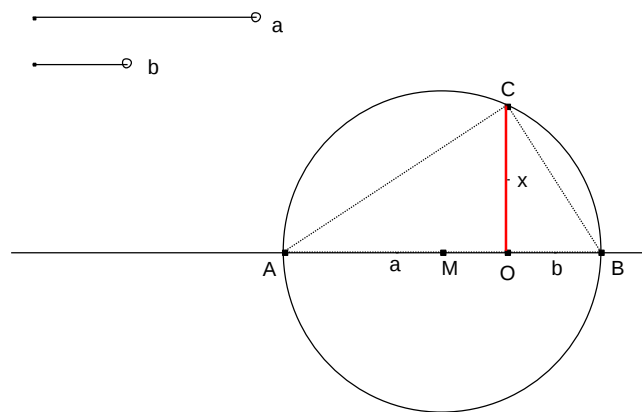


Figura - 8 Cálculo de $\sqrt{ab}$

Figura 8 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Con esto y la concatenación de segmentos, uno a continuación de otro para el efecto del cálculo de sumas y restas, se dispone de una colección de algoritmos para desarrollar la operatoria aritmética básica.

1.7 La argumentación en los procedimientos

El libro está atiborrado de figuras que se corresponden con archivos manipulables, las figuras se vinculan con una explicación tácita de cada paso en el proceso. La razón de cada paso, señala el mecanismo argumentativo que se ha evitado pero que de manera implícita debe abordarse como tarea. Por ejemplo, en el problema “Trazar el lugar geométrico descrito por el centro de una circunferencia de radio variable tangente al interior de una circunferencia fija en el plano que siempre pasa por un punto fijo al interior de la misma circunferencia”, este libro hilvana el siguiente proceso constructivo. (Ver Figura 1-9).

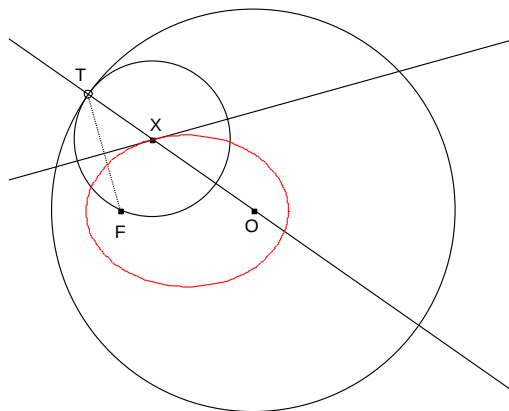


Figura – 9 Lugar geométrico descrito por el centro de una circunferencia [...]

Figura 9 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dadas la circunferencia de centro en O con radio fijo $OT = r$ y el punto fijo F , dentro de la misma se ubica un punto móvil T en la circunferencia y se trazan la recta diametral OT y la mediatriz entre los puntos T y F , rectas que se cortan en el punto X . La circunferencia de centro en X y radio $XT = XF$ es una de las infinitas tangentes interiormente a la dada que pasan por F . El punto X describe una elipse cuando T se desplaza por la circunferencia de radio r . Los puntos O y F se llaman focos de la elipse.

La tarea que se propone es la de argumentar el porqué de cada paso, que en el ejemplo se propone como sigue.

El trazo de la recta diametral OT se hace porque las circunferencias inicial y final comparten un punto de tangencia y, en consecuencia, la recta tangente a las dos circunferencias en ese punto, de modo que el centro de una circunferencia pedida está alineado con los puntos T y O . Recuerde que la tangente T y la recta diametral OT son perpendiculares.

El trazo de la mediatriz entre los puntos T y F se hace porque toda mediatriz de cualquier cuerda de una circunferencia pasa por el centro de la misma y es claro que toda circunferencia se determina con su centro y su radio que, a su vez, se fija en un punto de la misma. Así, el centro de la circunferencia tangente que se busca es uno de los infinitos puntos de la mediatriz trazada.

Las dos rectas trazadas se intersecan en el punto X , centro de una de las circunferencias tangentes interiormente a la circunferencia original y de radio variable $XT = XF$ ya que todo punto de la mediatriz entre T y F equidista de esos puntos.

Con todo esto, se hacen las cuentas, encontrando $XF + XO = XT + XO = r$, así, la suma de las distancias desde X a los puntos O y F es la constante r que es el radio de la circunferencia inicial, lo que concuerda con la definición de elipse.

¿Qué ocurre si el punto F está en el exterior de la circunferencia y la circunferencia a construir es tangente con su centro también en el exterior de la misma? Este tipo de preguntas son reflexiones que consiguen una respuesta inmediata desde el AGD. De hecho, el problema se traslada a trazar el lugar geométrico descrito por el centro de una circunferencia tangente a una circunferencia fija en el plano que pasa a través de un punto fijo en el exterior de la circunferencia dada.

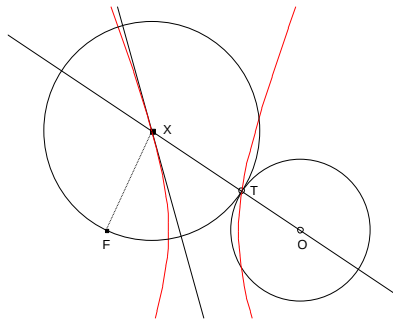


Figura - 10 Hipérbola como lugar geométrico

Figura 10 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

De nuevo, se sabe que los centros de dos circunferencias tangentes están alineados con el punto de tangencia y que la mediatriz es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de otros dos. De modo que dada la circunferencia de centro en O y radio $OT = r$ y el punto exterior a ella F , el punto de corte entre la recta diametral OT y la mediatriz entre F y T que se ha llamado X es el centro de una de las infinitas circunferencias tangentes a la circunferencia dada que pasan por F . El lugar geométrico que recorre X al desplazar T por la circunferencia es una hipérbola cuyos focos son F y O . (Ver Figura 1-10).

En efecto, se tiene que $OX - XF = OX - XT = OT = r$, así que la diferencia entre las distancia del centro X de una circunferencia variable tangente a una dada hasta su centro y la distancia a un punto fijo F en el exterior de la misma es la constante r , igual al radio de la circunferencia dada. Eso coincide con la definición de hipérbola.

Lo hecho es un ejemplo argumentativo que posiciona al pensamiento dentro del álgebra elemental y que se espera, sea aplicado a los problemas que se estudian en el libro.

1.8 Otros caminos de solución

Si el acervo de conocimientos es mayor, las alternativas de solución a cada problema aumentan. Esto es lo que los teóricos llaman heurística. La heurística se compagina con los procedimientos utilizados en la resolución de un problema o situación. Considere el caso de trazar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos rectas que se cruzan.

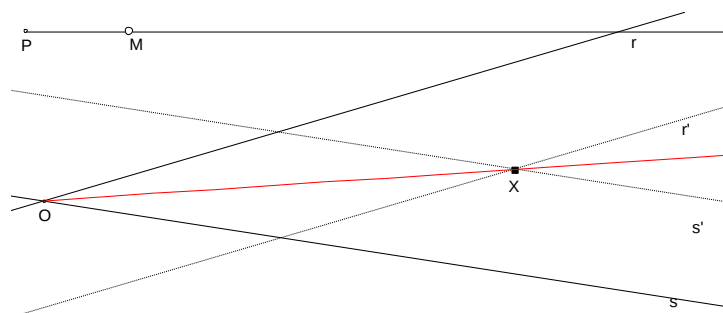


Figura - 11 Bisectriz

Figura 11 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Al considerar las rectas r y s que se intersecan en O , se dispone, como primera alternativa, un punto móvil M sobre una semirrecta de origen en un punto P y se construyen las paralelas r' y s' a una distancia PM de las rectas r y s de manera respectiva. Estas paralelas se cortan en el punto X . Por la definición de paralela, el punto X queda equidistante de las dos rectas dadas y su lugar geométrico queda descrito al desplazar M por la semirrecta. Este lugar geométrico es la bisectriz del ángulo formado por las rectas r y s , lo que está representado en la gráfica de la Figura 1-11.

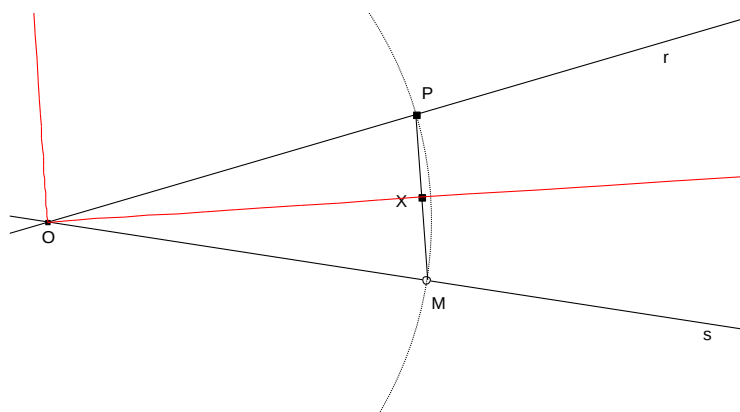


Figura - 12 Bisectriz con triángulo isósceles

Figura 12 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Otra alternativa se tiene al ubicar un punto móvil M sobre la recta s y con ayuda de una circunferencia de centro en O , punto común de las dos rectas r y s y radio OM , construir el triángulo isósceles $\triangle OMP$ como se ve en la Figura 1-12. El punto medio del lado desigual MP , equidista de los vértices M y P y también de los lados iguales del mismo triángulo. El lugar descrito por X al desplazar M por la recta s es bisectriz del ángulo formado por las rectas dadas.

La construcción consigue dos mediatrices que son perpendiculares entre sí, una de las cuales es mediatriz de los puntos M y P .

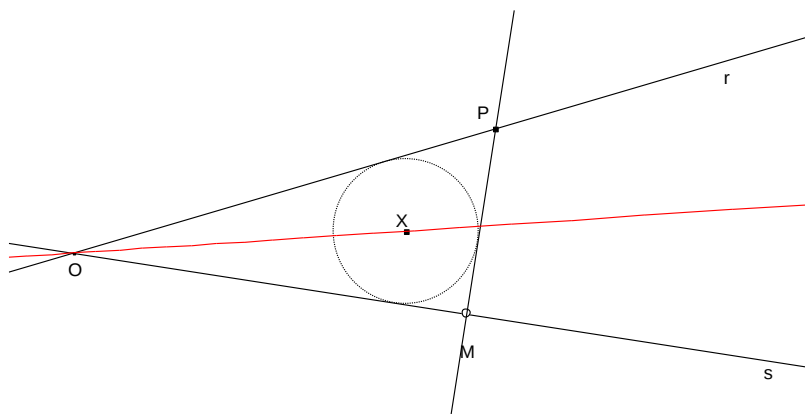


Figura - 13 Tercera bisectriz

Figura 13 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Una tercera alternativa, representada en la Figura 1-13, consiste en ubicar en la recta s un punto móvil M y desde allí levantar una perpendicular que corta a r en el punto P . Al considerar el triángulo $\triangle OMP$ se calcula su incentro X como corte de las bisectrices en los ángulos M y P . El lugar geométrico descrito por X al desplazar M por la recta s es la tercera bisectriz del triángulo. Recuerde que el incentro X de todo triángulo, equidista de sus lados.

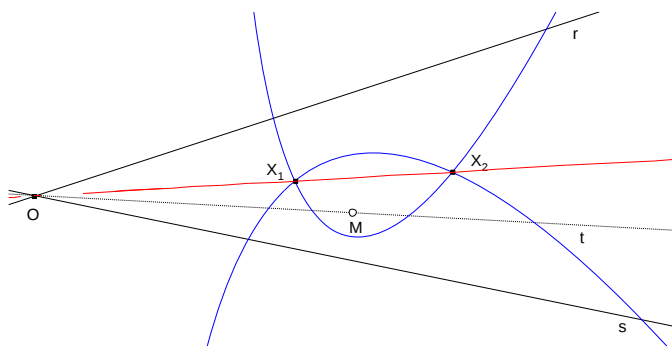


Figura -14 Bisectriz a través de parábolas

Figura 14 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Una cuarta alternativa depende de recordar que una parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta llamada directriz y un punto denominado foco. Por ello, dadas las rectas r y s que se intersectan en O , sobre una recta auxiliar t que pase por O , se ubica un punto móvil M y se construyen las parábolas que tienen como directriz a r y foco a M , la una, y como directriz a s y foco al mismo punto M . Estas dos parábolas se cortan en los puntos X_1 y X_2 . Cualquiera de estos dos puntos, describe como lugar geométrico la bisectriz de uno de los ángulos determinados por las rectas dadas, cuando el punto M se desplaza por t . Todo es claro desde que $d(X_1, r) = d(X_1, M)$ y

$d(X_1, s) = d(X_1, M)$ y por ello $d(X_1, r) = d(X_1, s)$, en la que d se interpreta como la distancia euclídea entre dos elementos.

Los puntos X_1 y X_2 , son centros de las circunferencias tangentes de manera simultánea a las dos rectas r y s . Todo esto se ha representado en la Figura 14.

Y es posible encontrar otras y mejores soluciones al mismo problema, este hecho lo enriquece y le da un sentido académico importante. Por ello, se invita al lector de este libro, no solo a repetir las soluciones que se presentan a cada uno de los problemas, sino a emplear su sentido creativo, buscando otra u otras soluciones.

1.9 Exploración de lugares

Especial atención merece el ámbito de las exploraciones que permite el uso de un AGD. Aplica en ese sentido el nivel creativo que da paso a la curiosidad y da pie para interrelacionar el acervo de conocimientos individuales. Se propone como ejemplo el de la transformación isogonal fundamentada en la construcción del conjugado isogonal de un punto respecto de un triángulo, en el que aparece como conexión directa el concepto de lugar geométrico al definir un punto como parte constitutiva de una curva; curva que se adopta como el dominio de una función y el lugar geométrico como su imagen.

Dado un triángulo $\triangle ABC$ y un punto P que no pertenece al triángulo, las rectas AP , BP y CP se reflejan axialmente por las bisectrices de los ángulos en A , B y C respectivamente. Las rectas imagen por reflexión axial coinciden en el punto P' al que se llama conjugado isogonal de P . La Figura 1-15 representa el procedimiento expreso para el cálculo del conjugado isogonal de un punto en particular.

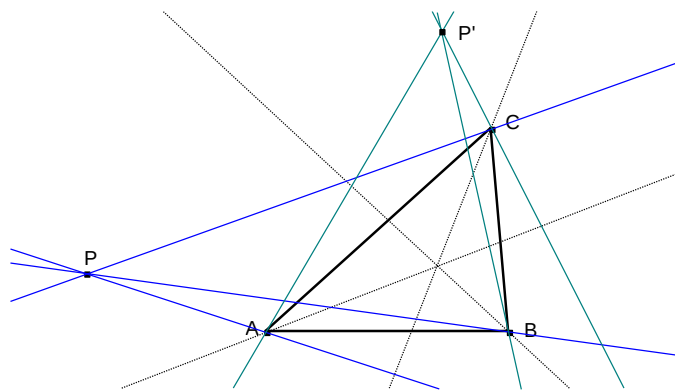


Figura - 15 Conjugado isogonal

Figura 15 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

En este momento aparece la percepción de que la imagen isogonal P' traza lugares geométricos cuando la preimagen P se ancla a una figura particular y sobre el lugar geométrico conseguido, estudiar particularidades que cumple la transformación empleada, al revisar si preserva distancia, colinealidad o perpendicularidad o semejanza e incluso, lo que ocurre cuando el triángulo base de la transformación tiene particularidades como la de ser equilátero, isósceles o rectángulo. Por analogía con la inversión, los puntos P y P' son inversos entre sí y ello significa que la si la imagen de una recta a través de una transformación isogonal es una hipérbola que se obtiene como lugar geométrico, la imagen de la hipérbola conseguida con la misma transformación es la recta inicial.

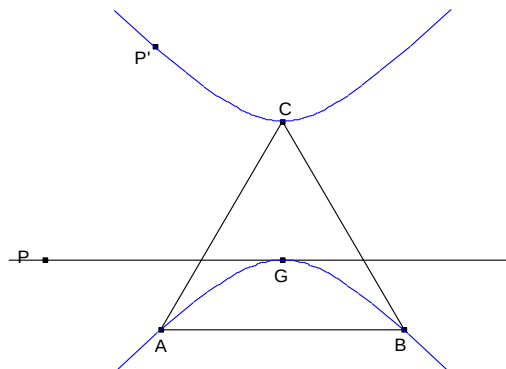


Figura - 16 Hipérbola a partir de triángulo equilátero

Figura 16 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

En la Figura 1-16, se presenta el caso que toma como base de la transformación un triángulo equilátero y la pre-imagen es un punto anclado a una recta que pasa por su centro de gravedad y paralela a la base.

La gráfica evidencia que el lugar geométrico es una hipérbola que pasa por los vértices del triángulo uno de los cuales es vértice de una rama de la misma y el baricentro del triángulo es el vértice de la otra rama.

La Figura 1-17 muestra el caso en que el punto P pasa por el centro de gravedad de un triángulo equilátero G y al cambiar la inclinación de la recta siempre se encuentra como lugar geométrico del transformado isogonal, una hipérbola que pasa por los vértices del triángulo. De ese modo, con una recta, se tiene un surtidor infinito de hipérbolas.

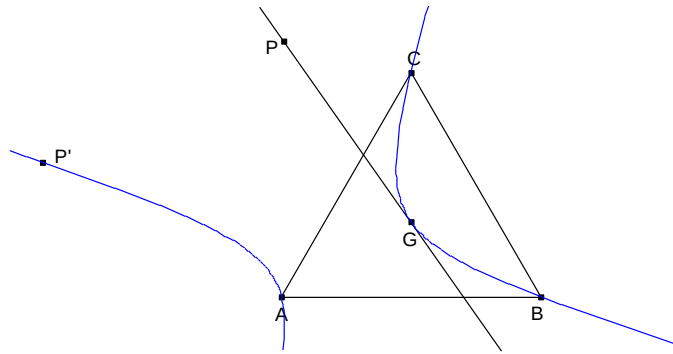


Figura -17 Hipérbola que pasa por los vértices del triángulo

Figura 17 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

En la Figura 1-18 se ha dispuesto al punto P en una recta cualquiera y es llamativo que tal recta se convierte en un surtidor de elipses e hipérbolas que pasan por los vértices del triángulo base, con solo cambiar la inclinación de la misma.

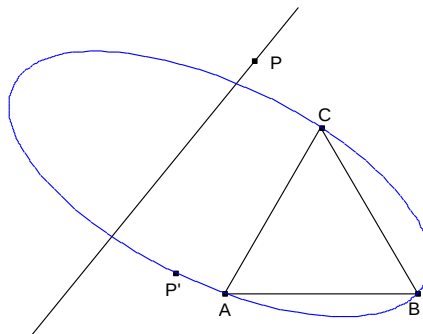


Figura -18 Recta surtidora de elipses e hipérbolas que pasan por los vértices de un triángulo

Figura 18 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

En la Figura 1-19 se ha dispuesto al punto P en una circunferencia con centro en el baricentro de un triángulo equilátero y el lugar geométrico que se encuentra con P' es, en cada ocasión, un lazo de extraordinaria apariencia y simetría que se consigue al modificar el radio de la circunferencia.

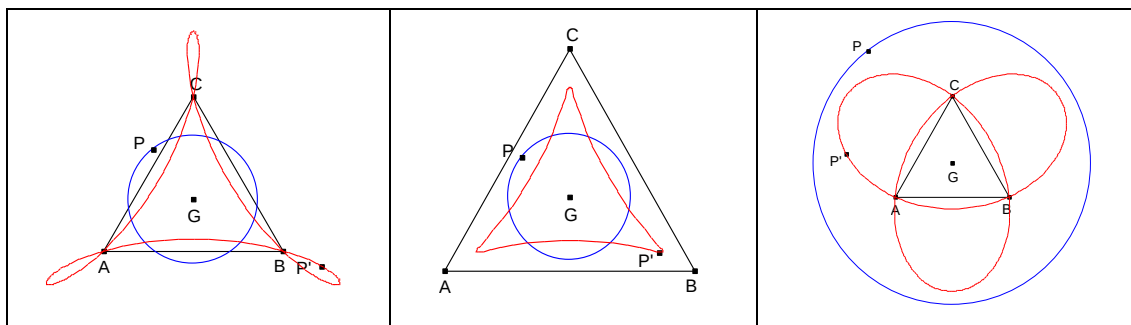


Figura - 19 Lazos simétricos

Figura 19 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Y se puede explorar aún más esta transformación, avivando la curiosidad y experimentando en situaciones particulares. Por ejemplo, el transformado isogonal de una recta que pasa por un vértice del triángulo base, es una recta, lugar geométrico que es la reflexión axial de la recta inicial respecto de la bisectriz en ese vértice; la imagen isogonal de la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo base, es un objeto en el infinito, las infinitas rectas paralelas a la base producen infinitas hipérbolas y elipses que pasan por los vértices del triángulo y una entre ellas, tiene como vértice al centro de gravedad y es la imagen de la paralela a la base por ese baricentro.

En varios casos se hallan regularidades especiales y, en otros, lugares geométricos caóticos que señalan la importancia del uso de un AGD, pues lo amorfo de las curvas demuestra la imposibilidad de su trazo con el simple uso del lápiz y el papel. Es factible determinar hechos establecidos en teoría, como que una recta se transforma a través del conjugado isogonal sobre cualquier triángulo, en una elipse, una parábola o una hipérbola, según la recta se ubica por fuera de la circunferencia del triángulo, o sea tangente a ella o la corte en dos puntos respectivamente y que los tres vértices del triángulo base de la transformación resultan partes constitutivas de esos lugares y ahondar en casos particulares, por ejemplo, si la recta pasa por el baricentro del triángulo, la hipérbola resulta equilátera.

Lo dicho en el anterior acápite da paso a la exploración, a la curiosidad, a afinar el conocimiento en el lugar significativo que le corresponde, todo, por la vía de la experimentación.

En el anexo 3 está el procedimiento para localizar los elementos de las cónicas y que logran demostrar de forma visual, que en efecto, esta transformación isogonal permite la construcción de infinitas elipses e hipérbolas.

1.10. Uso de otros recursos

1.10.1. La enciclopedia de los puntos notables de un triángulo

(Encyclopedia of Triangle Centers, ETC) es una lista en línea de miles de puntos asociados con la geometría del triángulo que mantiene el profesor Clark Kimberling, de la Universidad de Evansville. Hasta el 1 de septiembre de 2020 la lista contenía 39.474 centros, algunos de ellos con nombre propio asociado a su descubridor, pero ante la cantidad abrumadora de los mismos, la gran mayoría, carece de nombre y Kimberling los ha identificado como $X(n)$, donde n es parte de la sucesión natural: $x(1)$ es el incentro (Punto en que concurren las bisectrices), $X(2)$ es el centroide o baricentro (Punto de concurrencia de las medianas), $X(3)$ es el circuncentro (Punto en que concurren las mediatrices), $X(4)$ es el ortocentro (Punto en que concurren las alturas), $X(5)$ es el centro del círculo de los nueve puntos, también llamado punto de Feuerbach debido a que el alemán Karl Wilhelm Feuerbach demostró que los puntos medios de los lados del triángulo y los pies de las alturas pertenecían a tal circunferencia (Solo seis de los nueve puntos); y así para los miles y miles de puntos notables.

Esa cantidad de puntos ofrece un recurso generoso para el estudio de lugares geométricos referidos a los triángulos que tienen igual área. Trazar el lugar geométrico del punto $X(n)$ de todos los triángulos de igual área, es la tarea recurrente y, sobre ella, estudiar particularidades, es una acción didáctica atrayente. La gráfica de la Figura 1-20, representa los lugares correspondientes a los puntos $X(4)$ y $X(5)$ para el caso en que los vértices del triángulo son $A(-3,4)$, $B(7,4)$ y el punto móvil C yace en la recta $y = -2$.

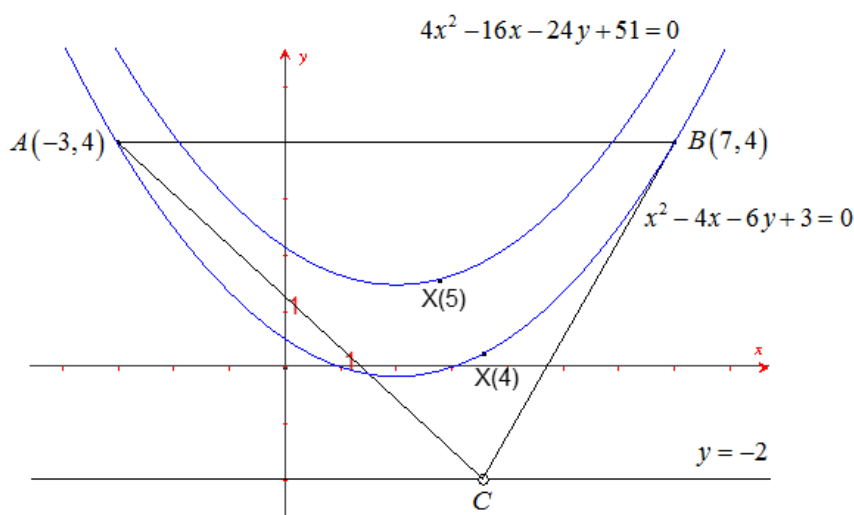


Figura - 20 Lugares correspondientes a $X(4)$ y $X(5)$

Figura 20 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

El ortocentro $X(4)$ describe al desplazar el vértice C por la recta $y = -2$ la parábola $x^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ y el centro del círculo de los nueve puntos $X(5)$ recorre la parábola $4x^2 - 16x - 24y + 51 = 0$. De modo que al ser los coeficientes de las variables en las dos ecuaciones proporcionales, se concluye que la una se consigue a partir de la otra, mediante una traslación en un vector cuya longitud es la distancia entre los vértices de las mismas.

En general, $X(4)$ y $X(5)$ describen la misma parábola, salvo por el efecto de la traslación y para $X(4)$ los vértices fijos son puntos de la curva.

El punto $X(6)$ en la lista de Kimberling es el punto simedianal, punto de Lemoine o punto de Grebe y es la intersección de las tres simedianas que, a su vez, son las líneas simétricas por la vía axial a las medianas con respecto a las bisectrices asociadas del triángulo. El francés Émile Lemoine le entrega su nombre a este punto porque en 1873 probó de su existencia mediante la concurrencia de las tres simedianas de un triángulo.

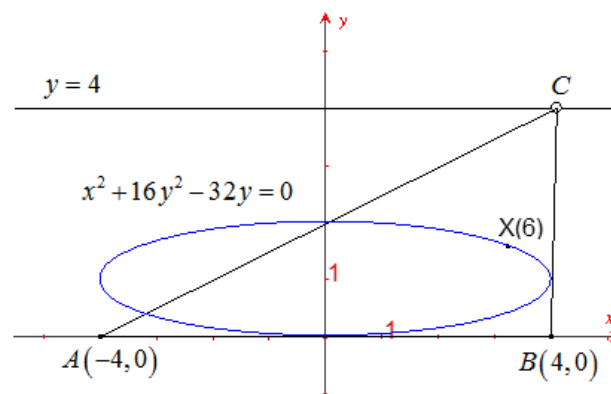


Figura - 21 Lugar geométrico generado por $X(6)$

Figura 21 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

La gráfica de la Figura 1-21 presenta el caso del triángulo de vértices $A(-4,0)$, $B(4,0)$ y C sobre la recta $y = 4$. El punto $X(6)$, también simbolizado como L , al desplazar C por la recta $y = 4$ describe como lugar geométrico, la elipse $\frac{x^2}{16} + (y - 1)^2 = 1$. En todos los casos, las elipses son tangentes a un lado del triángulo, y en la medida que la recta que contiene a C está más distante de la base, el área determinada por la elipse se hace menor.

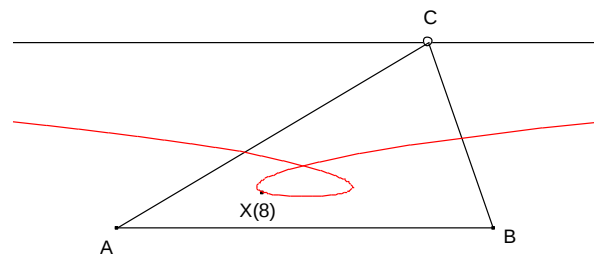


Figura - 22 Lazo con simetría

Figura 22 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

El punto de Nagel que en la nomenclatura de Kimberling es $X(8)$ y que también se representa como N_g , lleva el nombre del geómetra alemán Christian Heinrich von Nagel, (1803-1882) y es el punto dentro de un triángulo en que concurren las líneas lanzadas desde cada vértice a los puntos de tangencia del lado opuesto con su correspondiente excírculo.

La Figura 1-22 presenta un caso particular en que se observa que al desplazar C por la recta paralela a la base AB del triángulo, se consigue un lugar geométrico que es un lazo con simetría.

1.10.2. El entomólogo japonés Kazuo Haga

Revolucionó el mundo del origami, permitiéndose por rebeldía, el derecho de hacer el primer dobléz de un cuadrado por fuera de las normas del origami. En el origami tradicional japonés solo existen dos maneras de hacer el primer dobléz: uniendo dos vértices consecutivos del cuadrado, con lo que se consigue una línea por la mitad del papel por los puntos medios de dos lados opuestos, o construyendo una de las dos diagonales al unir dos vértices no consecutivos del cuadrado, que hace que correspondan los ángulos. Estas dos acciones terminan en lo que se conoce con el nombre de pliegues primarios.

En 1978, Haga decidió cambiar la regla y llevó una esquina al punto medio de un lado. Esa acción se convirtió en el Teorema de Haga; la dobléz descrita construye tres triángulos rectángulos semejantes y si se toma como medida del lado del cuadrado ocho unidades, uno de los triángulos adquiere las medidas 3, 4 y 5 que conforman la triada pitagórica básica más famosa en el mundo matemático.

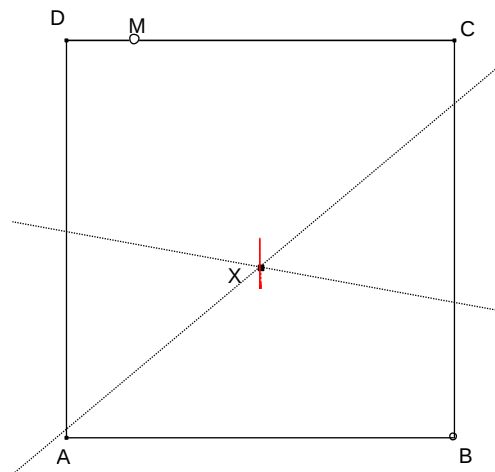


Figura - 23 Pliegues de Haga

Figura 23 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

En el teorema de Haga se pliega un vértice del cuadrado sobre el punto medio de uno de los lados. El mismo Haga se interrogó si encontraría algo llamativo al hacer que el vértice coincidiera con un punto aleatorio de un lado. Ello le permitió encontrar algo asombroso; al repetir los pliegues para los dos vértices opuestos de un lado sobre un punto aleatorio, lo que se construye es parte de dos líneas llamadas mediatrices entre los puntos que se unen. El punto de intersección de esas mediatrices cae en uno de los pliegues primarios siempre, cae en la línea central del cuadrado y su distancia al punto aleatorio es la misma que a cualquiera de los vértices del lado opuesto.

En la Figura 1-23 se representa lo hecho por Haga de manera dinámica. Dado el cuadrado $\square ABCD$ se toma en DC un punto arbitrario M y se trazan las mediatrices entre los pares de puntos M, A y M, B , estas mediatrices se cortan en el punto X . El lugar geométrico descrito por X cuando M se mueve a lo largo del lado CD es una porción pequeña de un pliegue primario, una parte de la línea central del papel que contiene infinitos puntos.

Es útil anotar que el equivalente del origami de obtener un pliegue en el papel al hacer coincidencia entre dos puntos es trazar la mediatriz entre dos puntos del plano con regla y compás dentro de la geometría sintética o euclídeana. Haga, con un poco de conocimiento de la geometría del triángulo no debió asombrarse; el punto X no es más que el circuncentro del triángulo $\triangle ABM$ y, por ello, pertenece a la mediatriz del lado AB que permanece constante en el triángulo, dado que X es el punto de concurrencia de las tres mediatrices y en consecuencia es un punto equidistante de los vértices del triángulo.

Ese ejemplo, sin embargo, demuestra que en las cosas simples están escondidos resultados a la espera de su descubrimiento, hechos que causan asombro y que hacen del mundo matemático un espacio ideal para ser intervenido desde la curiosidad y la creatividad y que se tiene en el concepto de los lugares geométricos un artefacto ideal para enriquecer el conocimiento.

Lo expuesto en la brevedad de los ejemplos, la amplia oportunidad de estudiar lugares geométricos desde el uso de otros recursos como el expuesto aquí, permiten entender que la matemática es inagotable y que existe una dinámica permanente de hallazgos y de búsquedas, de preguntas y respuestas que hacen del conocimiento geométrico un rico yacimiento de encuentros, de resultados, de inspiración y de inventiva.

1.11. Generalidades sobre Cabrí Géomètre, el cuaderno de notas interactivo de geometría

CABRI-GÉOMÈTRE II moviliza la formación, anima el espíritu a modelar y simular situaciones, a estudiar fenómenos en las formas, en los objetos geométricos, permite establecer conjeturas e incluso, ha gestionado el rigor matemático, al abrir como compuerta de interrogación, si los resultados o evidencias de las construcciones elaboradas en el AGD, rempazan las demostraciones formales.

La aparición de CABRI-GÉOMÈTRE II marcó un hito educativo, viene modificando el quehacer escolar y, a la vez, ha puesto al descubierto la brecha que en los sistemas escolares existen entre los centros matemáticos de punta y las periferias. En estos últimos, la introducción de asistentes educativos, de mediadores como el que cimenta la escritura de este texto ha sido lenta, pues no ha dependido de decisiones políticas de los administradores de la educación, sino más bien del apasionamiento de grupos de educadores que admiten en este recurso, grandes oportunidades educativas y posibilidades idóneas de progreso académico individual y colectivo.

CABRI-GÉOMÈTRE II Plus, para ambiente Windows, contiene los modelos sintético y analítico y también deambula un menú que ambienta las llamadas geometrías no euclídeas, centrado en experimentar resultados dentro del modelo de la geometría hiperbólica. Como consecuencia de tales posibilidades, este texto estudia los lugares geométricos en el modelo sintético a través de un problema o situación y a continuación propone un ejemplo enmarcado en el modelo cartesiano. El programa incluye las herramientas propias para el estudio de la geometría de transformaciones, en cuanto contiene los rudimentos esenciales de las transformaciones denominadas, movimientos rígidos y las de semejanza como homotecias e, incluso, la transformación de inversión en el plano.

El hecho de haber escogido Cabrí para desarrollar este libro, obedece a varias circunstancias, una de ellas, la generosidad de su creador Jean Marie Laborde,

al entregarle a la Universidad de Nariño una licencia perpetua de este software, pero la más importante es que el sistema permite calcular puntos de intersección entre objetos, con mayor eficiencia que otros aplicativos, y la eficacia en el cálculo de sus medidas lo convierte en un mediador de alta precisión en comparación con otros que existen en el mercado, incluso los que son de libre adquisición.

Las construcciones referidas a lugares geométricos requieren con frecuencia del cálculo de puntos de intersección y la conexión entre un objeto inicial y el final se establece de manera lógica. De allí, todo consiste en establecer dinamismo a la construcción. La conexión entre un objeto inicial y uno final es análoga a establecer una función que distingue y diferencia el dominio y el recorrido de la misma.

Todos los ejemplos estudiados en el texto se acompañan de su correspondiente construcción en Cabrí, que el lector puede disponer al abrir el hipervínculo contenido en el nombre de la Gráfica respectiva. Cada archivo se ha diseñado con botones de ocultamiento que indican los pasos mencionados en la parte teórica. El lector, puede al final, no solo reconstruir el problema o situación, sino también cambiar las posiciones de los objetos y, con ello, los requisitos originales establecidos en su formulación. Esa es la gracia del empleo de un software ASISTENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA (AGD) que da apertura a cambiar, modificar e, incluso, idear otros problemas de los que con seguridad se sale robustecido, y a encontrar, ocasionalmente, respuestas asombrosas. La alternativa de modificar, cambiar, sugerir, conjeturar, idear, es la compuerta para que cada lector adquiera la habilidad de organizar sus propias preguntas y, de hecho, establecer respuestas.

CABRI-GÉOMÈTRE II Plus es un programa para estudiar Geometría. Con él es posible construir objetos geométricos, visualizarlos en forma dinámica, manipularlos, transformarlos y tomar medidas en ellos. Hace fácil el estudio de la geometría, pues es amigable al uso de sus recursos. Muy pronto se convierte en un mediador transparente entre el docente y el objeto de aprendizaje que debe cargar el estudiante. Como se ha explicado, con Cabrí se estudia todo tipo de propiedades geométricas de los objetos y cede paso a calcular lugares geométricos de forma sencilla e intuitiva; tarea dispendiosa, difícil y complicada, incluso para las mentes más abiertas, si tan solo se acudiera al lápiz y al papel.

CABRI-GÉOMÈTRE II Plus es un programa gráfico que funciona a través de un menú de botones para acceder a las distintas funciones, pero también permite tener como recurso un amplio abanico de funciones, algunas de las cuales se incorporan en la calculadora contenida en su núcleo. La sintaxis de las funciones son las mismas que emplea el CAS DERIVE (Asistente de Cálculo Abstracto Simbólico). Cabrí también permite establecer herramientas propias y personales para el registro macro-construcciones con fuerte aroma a funciones, que distinguen los elementos que conforman las variables independientes de

aquellos que resultan de conexiones lógicas y son las variables dependientes. Las macros, agilizan el trabajo y robustecen el carácter creativo del usuario.

A continuación, se referencia el acervo de herramientas contenidas en el programa para dar al lector una idea de las oportunidades que ofrece y que causan la sensación de contener todas las posibilidades. Ya la mente y el espíritu creativo realizarán la tarea que abre como consecuencia, el uso correcto y profesional del programa. CABRI-GÉOMÉTRE II Plus es la mejor aventura para el aprendizaje de la geometría.

El paquete permite construir:

Puntos: aislados, sobre un objeto, como intersección de dos objetos.

Figuras rectilíneas: rectas, semirrectas, segmentos, vectores, triángulos, polígonos y polígonos regulares.

Figuras curvilíneas: circunferencias, arcos de circunferencia, cónicas por cinco puntos.

Construcciones y herramientas: punto medio, recta perpendicular, recta paralela, mediatriz, bisectriz, suma de dos vectores, construcciones con compás, transferir medidas, lugares geométricos.

Movimientos en el plano, rígidos y de semejanza: simetría central y axial, traslación, rotación, homotecia e inversión.

Determinación de posiciones relativas: pertenece un punto a un objeto, están alineados tres puntos, es equidistante, son paralelas dos rectas, son perpendiculares.

Medidas y modelo cartesiano: coordenada, distancia, longitud, área, ángulo, pendiente, ecuación, valores numéricos de expresiones algebraicas, crear tablas. Esto obedece al modelo cartesiano.

Módulo de permanencia de las construcciones: con el cual efectúa macro-construcciones que agiliza el estudio de diversidad de problemas con procedimientos iterativos.

Elementos de edición: texto sobre objetos, números, expresiones.

Marcas sobre objetos: ángulos, hacer trazas, animar objetos.

Elementos de diseño gráfico: color, espesor, llenado, ocultar, mostrar, aspecto, punteado, ejes, cuadrícula.



Capítulo 2

2.1 Lugares Geométricos Clásicos

Este capítulo aborda el estudio de los lugares geométricos generales estudiados en cursos de geometría elemental. Cada problema, se estudia desde el modelo sintético, y en la mayoría de los casos se propone como aplicación un caso particular inmerso en el modelo cartesiano.

Ejemplos Iniciales

La línea recta es uno de los objetos geométricos simples de mayor utilidad. Mediatrices y bisectrices son casos particulares de rectas que se utilizan con frecuencia como instrumentos en la resolución y planteamiento de problemas. Los conceptos de perpendicularidad y paralelismo son recursos a los que se asiste con regularidad y a los que se recurre en variados ejemplos de este capítulo. La circunferencia es otro objeto geométrico en el que confluye diversidad de conceptos como el de tangencia, secante y cuerda, en el cual se aplicarán transformaciones como la inversión.

Además de la recta y la circunferencia, se exponen ejemplos de las cónicas y otras curvas que se estudian de manera somera.

2.2.1. Problema 1.

Trazar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos fijos A y B . (Ver Figura 2-1).

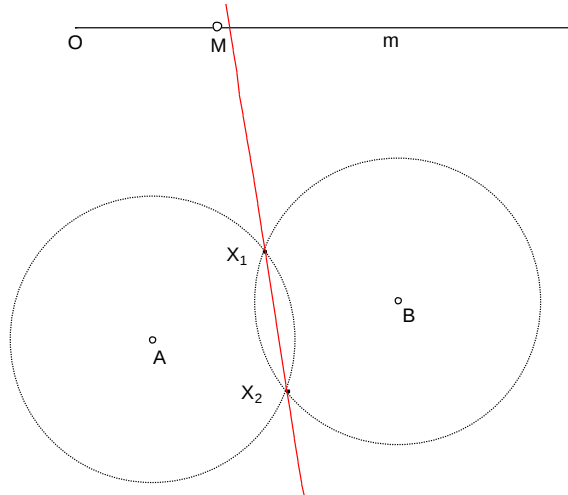


Figura -24 Recta que equidista de dos puntos

Gráfica 1 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Sobre una semirrecta m con origen en un punto O se ubica un punto arbitrario M a una distancia superior a la mitad de la distancia entre los puntos A y B . Con radio OM se ubican sendas circunferencias con centros A y B que se cortan en los puntos X_1 y X_2 . La recta determinada por estos dos puntos es el lugar geométrico buscado. Esa recta se denomina mediatriz de los puntos dados A y B . Los puntos X_1 y X_2 cambian de posición al mover M por la semirrecta a la que pertenece.

La mediatriz es un instrumento geométrico con alta aparición en la solución de problemas geométricos; por ejemplo, se utiliza en la construcción técnica de parábolas, elipses, hipérbolas y circunferencias.

2.2.2. Ejemplo 1. La Figura 2-2 representa el lugar geométrico de los puntos que equidistan de $A(-3,2)$ y $B(3,6)$.

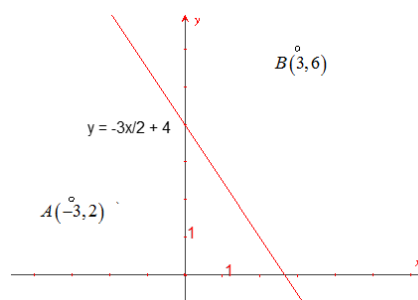


Figura - 25 Ejemplo de Recta que equidista de dos puntos

Gráfica 2 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Este caso subyace como un ejemplo particular del Problema 1 y como lo indica la misma gráfica, produce la recta $y = -\frac{3}{2}x + 4$.

2.2.3. Problema 2.

Un punto se mueve de tal manera que su distancia a una recta e igual que su distancia a un punto fijo en el plano, trazar el lugar geométrico por el cual se mueve este punto.

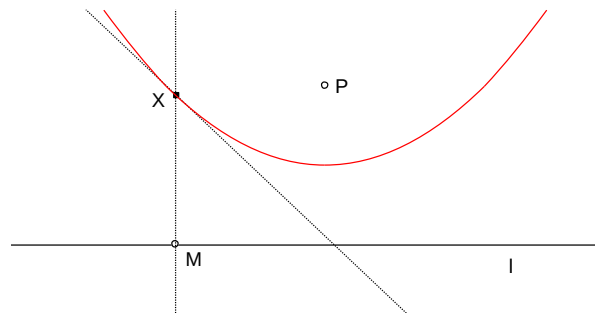


Figura - 26 Parábola generada por foco y directriz

Gráfica 3 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dada una recta l y el punto P , se escoge un punto arbitrario M en la recta y se levanta desde allí una perpendicular a l , la mediatriz entre los puntos M y P determina sobre la perpendicular el punto X que, a su vez, describe una parábola en su traza, cuando se mueve M por la recta l . P es el foco de la parábola, y la recta l su directriz. (Ver Figura 2-3).

2.2.4. Ejemplo 2.

La Gráfica de la figura 2-4 representa el lugar geométrico del punto que se mueve de tal manera que su distancia al eje x , es igual a su distancia al punto $P(3,4)$.

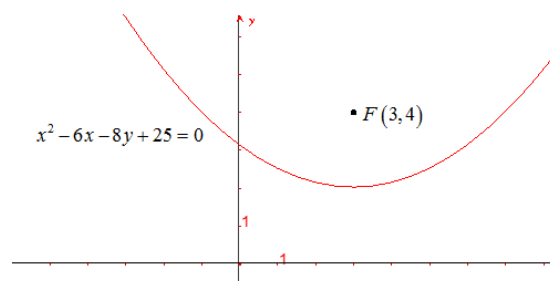


Figura - 27 Ejemplo de parábola generada por foco y eje x

Gráfica 4 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Este ejemplo es un caso particular del problema preliminar anterior y Cabrí determina la ecuación de la parábola $y = \frac{(x-3)^2}{8} + 2$.

2.2.5. Problema 3.

Un punto se mueve de tal manera que el cuadrado de su distancia a un punto fijo es igual a su distancia a una recta. Trazar el lugar geométrico que describe tal punto.

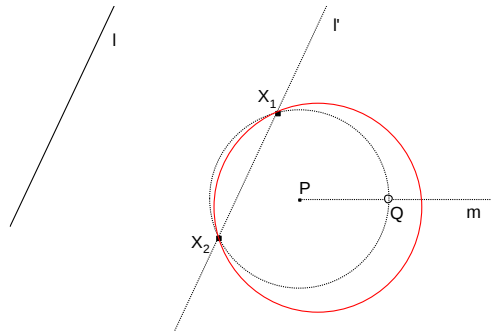


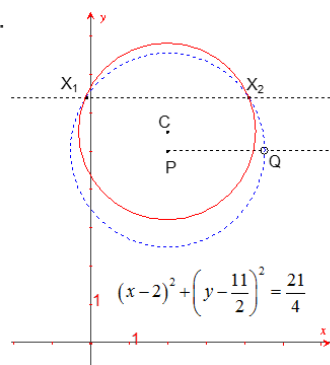
Figura - 28 Circunferencia

Gráfica 5 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dados la recta l y el punto P , se ubica en una semirrecta m , un punto arbitrario Q . La recta l' paralela a l se construye ayudándose del teorema de Tales, de manera tal que estén a una distancia igual al cuadrado de la distancia entre P y Q . Esta recta paralela se corta en los puntos X_1 y X_2 con la circunferencia de centro en P y radio PQ y al mover Q sobre m describen los arcos de semicircunferencia de centro en C y radio CX_1 . El lugar buscado es la circunferencia de centro en C y radio CX_1 .

2.2.6. Ejemplo 3.

La Gráfica 2-6 representa el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que el cuadrado de su distancia al punto $P(2,5)$ es igual a su distancia al eje x .



29 - Ejemplo de circunferencia

Gráfica 6 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Se siguen las indicaciones del ejercicio precedente para la semirrecta de punto de origen en $P(2,5)$ y el eje x como recta l y se llega a la ecuación de la circunferencia con centro en la recta $x = 2$, $(x - 2)^2 + \left(y - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{21}{4}$.

2.2.7. Problema 4.

Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos A y B es una constante k , trazar el lugar geométrico que describe ese punto.

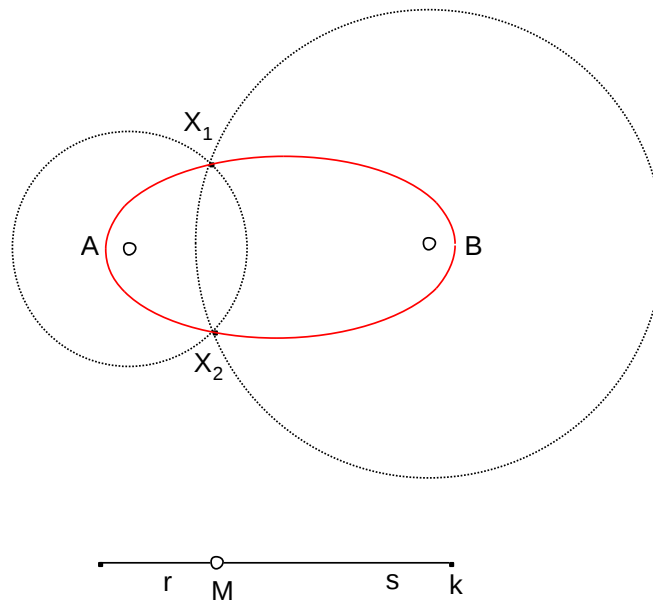


Figura 30 - Elipse

Gráfica 7 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

En el segmento que define la constante k se ubica un punto arbitrario M que lo divide en dos segmentos, uno de longitud r y el otro de longitud s . Así, con centro en A y radio r y centro en B y radio s se construyen circunferencias que se cortan en los puntos X_1 y X_2 , puntos que al mover M describen los arcos de una elipse.

Para que el problema tenga sentido, se tiene que la distancia entre los puntos A y B debe ser menor que la constante k . (Ver Figura 2-7).

2.2.8. Ejemplo 4.

¹ Nótese que en la ecuación de la gráfica, el valor 2.29^2 es una aproximación que Cabrí hace de $\frac{21}{4}$.

La Gráfica 8 representa el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos $A(3,4)$ y $B(7,2)$ es 8 .

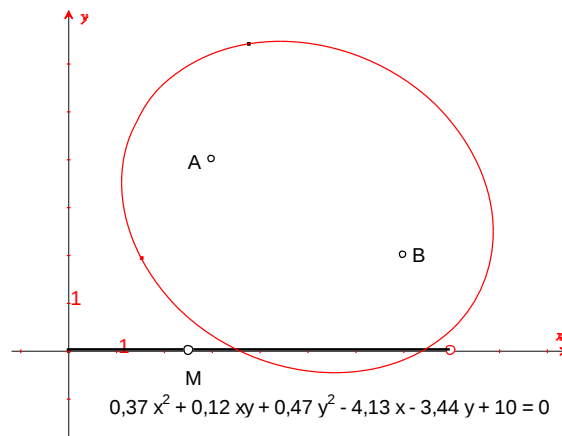


Figura - 31 Ejemplo de elipse rotada

Gráfica 8 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Al ser caso particular del problema anterior, y al estar ubicados los focos del lugar en una recta no paralela a ninguno de los ejes, la ecuación que corresponde a la misma posee término en la parte literal xy . Se observa en la construcción que se ha ubicado un segmento de longitud 8 sobre el eje x . (Ver Figura 2-8).

2.2.9. Problema 5.

Trazar el lugar geométrico de los puntos descritos por los centros de las circunferencias circunscritas a un triángulo que tiene dos vértices fijos y el tercer vértice se mueve libre en el plano.

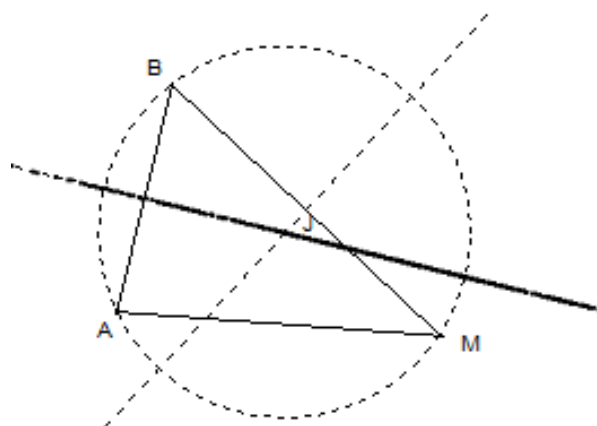


Figura - 32 Recta generada por centros de circunferencia concéntricas

Gráfica 9 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

El circuncentro de un triángulo es el punto de concurrencia de las mediatrices de los tres lados. De hecho, tal centro se encuentra como intersección de solo dos de ellas. Al fijar los puntos A y B y dejar en libertad de movimiento al tercer vértice M por el plano, el circuncentro J describe una de las tres mediatrices; para ver este efecto se dispone de la opción traza incorporada en Cabrí, sobre el punto J . (Ver Figura 2-9).

2.2.10. Ejemplo 5.

En la Gráfica 2-10 se representa el lugar geométrico descrito por el punto P , circuncentro del triángulo $VABC$, en el que se fijan los puntos $A(-1, -1)$ y $B(6, -2)$. El punto C , varía en el plano. La ecuación del lugar geométrico descrito por P es la recta $y = 7x - 19$.

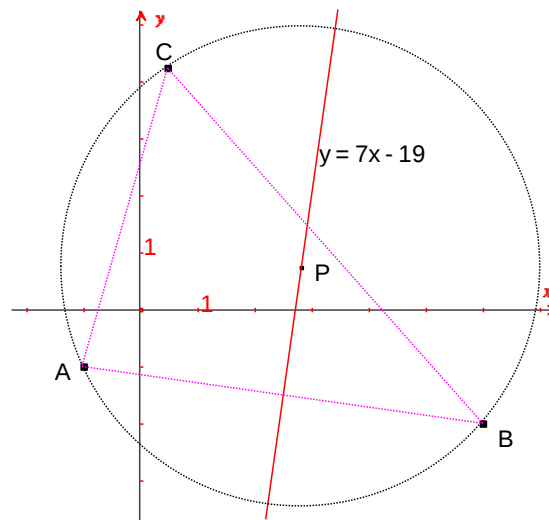


Figura -33 Ejemplo de recta generada por centros de circunferencia concéntricas

Gráfica 10 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

2.2.11. Problema 6.

Trazar el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos A y B en el plano, es una constante k .

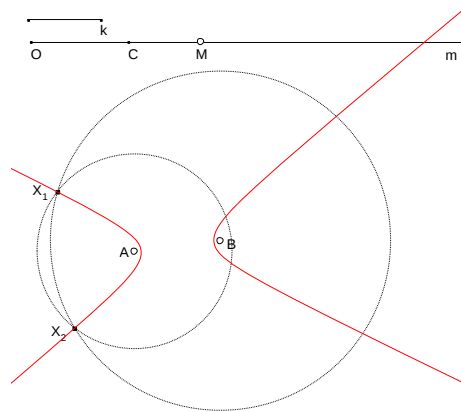


Figura - 34 Hipérbola

Gráfica 11 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Se ubica un punto arbitrario M sobre una semirrecta m de origen en el punto O y se ubica el punto C de manera que la distancia entre C y M sea igual a la constante k determinada por un segmento. Con centros en A y radio OC y con centro en B y radio OM se trazan circunferencias que cortan en los puntos X_1 y X_2 . Estos puntos determinan los arcos de una hipérbola cuando M recorre la semirrecta m . Esta hipérbola es el lugar geométrico buscado, para la cual los puntos A y B son los focos de la misma. (Ver Figura 2-11).

2.2.12. Ejemplo 6.

La Gráfica 12 representa el lugar geométrico de un punto que se mueve, de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos fijos $A(2,1)$ y $B(6,3)$ en el plano es la constante 2.

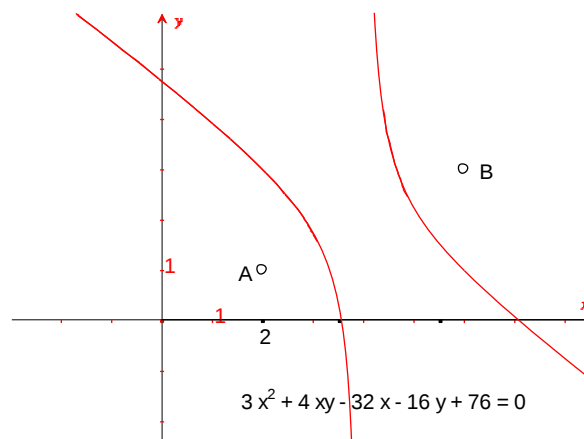


Figura - 35 Hipérbola rotada

Gráfica 12 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

El problema constituye un caso particular del problema 6 y dado que los puntos A y B se ubican en una recta no paralela a alguno de los ejes coordenados, la ecuación de la hipérbola contiene un término en xy que desaparece al ejecutar una transformación de coordenadas que es una composición de una traslación y una rotación.

En el archivo adjunto se presenta el lugar geométrico al ejecutar tal transformación de las coordenadas, de manera que la ecuación carezca de término xy y se presente en la forma canónica. (Ver Figura 2-12).

2.2.13. Problema 7.

Dos de los vértices de un triángulo son los puntos fijos A y B . Trazar el lugar geométrico del tercer vértice C que se mueve, de tal manera que la diferencia entre las longitudes de los lados AC y BC es igual a la mitad de la longitud de lado AB .

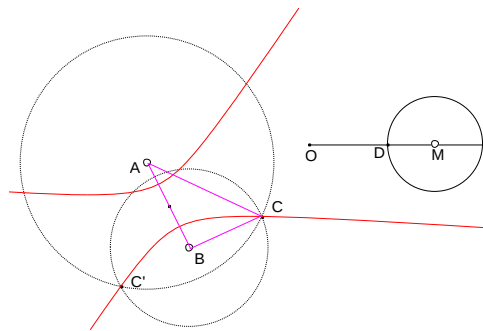


Figura - 36 Hipérbola a partir de triángulo

Gráfica 13 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Este es un caso particular del Problema 6 y se resuelve de igual manera, poniendo un punto libre M sobre una semirrecta y se ubica un punto D de modo que $DM = \frac{1}{2}AB$. Los puntos C describen las ramas de la hipérbola que determinan la infinitud de triángulos que resuelven el problema. (Ver Figura 2-13).

2.2.14. Ejemplo 7.

Dos de los vértices de un triángulo son los puntos $A(0,1)$ y $B(0,5)$. La Gráfica 14 muestra el lugar geométrico del tercer vértice C que se mueve, de tal manera que la diferencia entre las longitudes de los lados AC y BC es igual a la mitad de la longitud del lado AB .

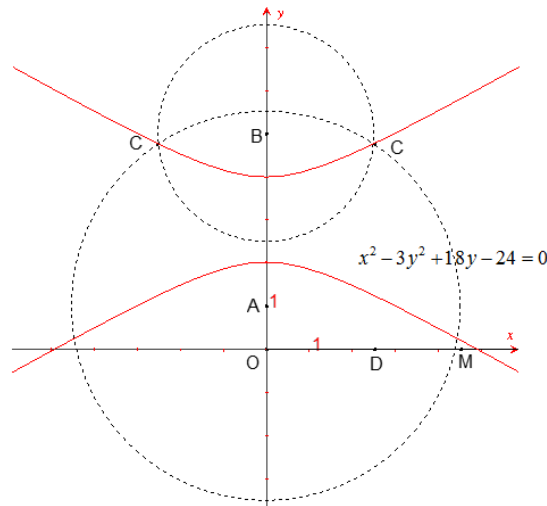


Figura 37 - Ejemplo de hipérbola a partir de triángulo

Gráfica 14 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Debido a que los focos de la hipérbola son vértices del triángulo sobre el eje y , la ecuación de la misma carece de término en xy . (Ver Figura 2-14).

2.2.15. Problema 8.

Los extremos de la base de un triángulo son los puntos A y B . Trazar el lugar geométrico del vértice opuesto C si se mueve, de tal manera que el ángulo $RCAB$ es igual al doble del ángulo $RCBA$.

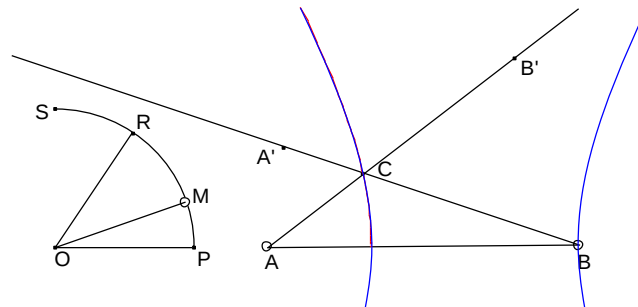


Figura - 38 Hipérbola a partir de triángulo

Gráfica 15 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Se dispone de un arco de circunferencia PRS centrado en O , sobre el que se ubica un punto móvil M que determina el ángulo ROM , y al tiempo se construye el ángulo RRM de medida igual al doble del anterior. El punto B' se obtiene al rotar B alrededor de A en el ángulo RRM y el punto A' es la rotación de A en el ángulo ROM ; esos puntos se utilizan para trazar las semirrectas AB' y BA' que se

intersecan en el punto C . El punto C describe una parte de rama de una hipérbola cuando se mueve el punto M por el arco PRS . (Ver Figura 2-15).

2.2.16. Ejemplo 8.

Los extremos de la base de un triángulo son los puntos $A(1,0)$ y $B(7,0)$. La Gráfica 2-16 representa el lugar geométrico del vértice opuesto C si se mueve, de tal manera que el ángulo $RCAB$ es igual al doble del ángulo $RCAB$.

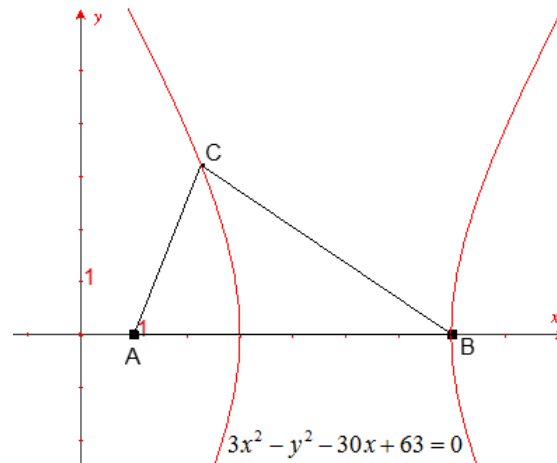


Figura -39 Ejemplo de hipérbola a partir de triángulo

Gráfica 16 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

El problema en cuestión es un caso particular del Problema 8 y obedece, en consecuencia, a la misma construcción. La solución efectiva del problema está constituida de manera exclusiva por la rama a la izquierda de la hipérbola $\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

2.2.17. Problema 9.

Una circunferencia de radio la tercera parte del radio de otra, rueda sin deslizarse dentro de ella, manteniéndose tangente a ella a todo instante. Trazar el lugar geométrico que describe un punto T' de la circunferencia interna.

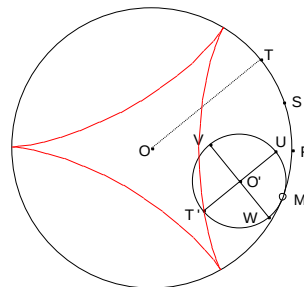


Figura - 40 Deltoide tricúspide de Steiner

Gráfica 17 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dada la circunferencia de centro en O , se ubica sobre ella el punto M y se dispone el punto adicional R , el punto T se ubica sobre la misma circunferencia, de tal forma que $RMOT = 3RMOR$ teniendo en cuenta de no sobrepasar en su medida, el valor 2π . Con centro en O' y dentro de la circunferencia de radio mayor se construye la circunferencia de radio $r = \frac{OM}{3}$ y se trazan los segmentos $T'U$ paralelo al segmento OT y el segmento VW , perpendicular al mismo. Esos segmentos se encargan de simular el rodamiento sin deslizamiento de la circunferencia dentro de la otra. El lugar geométrico generado por el punto T' cuando M se desplaza por la circunferencia es la deltoide tricúspide de Steiner. Esta curva fue descubierta por Leonard Euler hacia 1745, y después redescubierta por Jacob Steiner. (Ver Figura 2-17).

2.2.18. Ejemplo 9.

La Gráfica 18 representa la deltoide tricúspide de Steiner que se deja representar mediante la ecuación cartesiana cuya expresión general es:

$$(x^2 + y^2)^2 + 8ax(x^2 - 3y^2) + 18a^2(x^2 + y^2) - 27a^4 = 0$$

siendo a un parámetro real y cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = a(2\cos t + \cos 2t); y = a(2\sin t - \sin 2t).$$

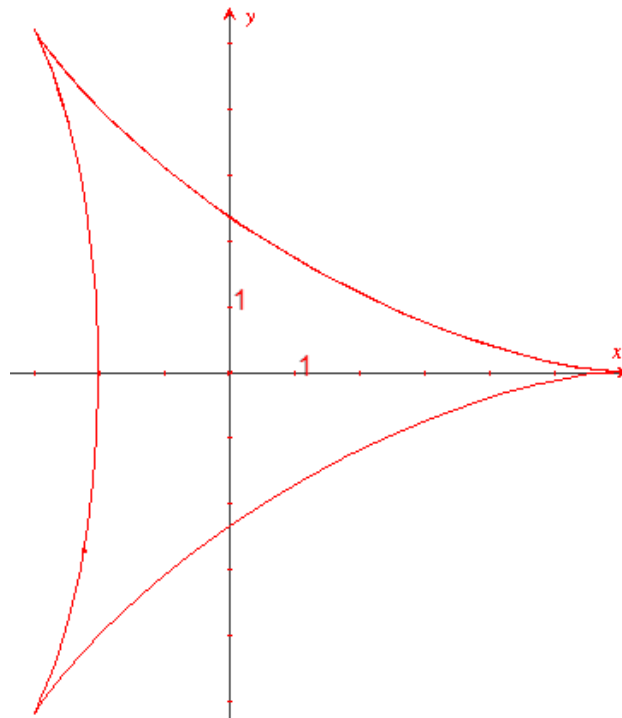


Figura - 41 Ejemplo de deltoide tricúspide de Steiner

Gráfica 18 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

La Gráfica 2-18 se ha construido para el caso en que $a = 2$, para la que se ha utilizado las ecuaciones paramétricas de la misma.

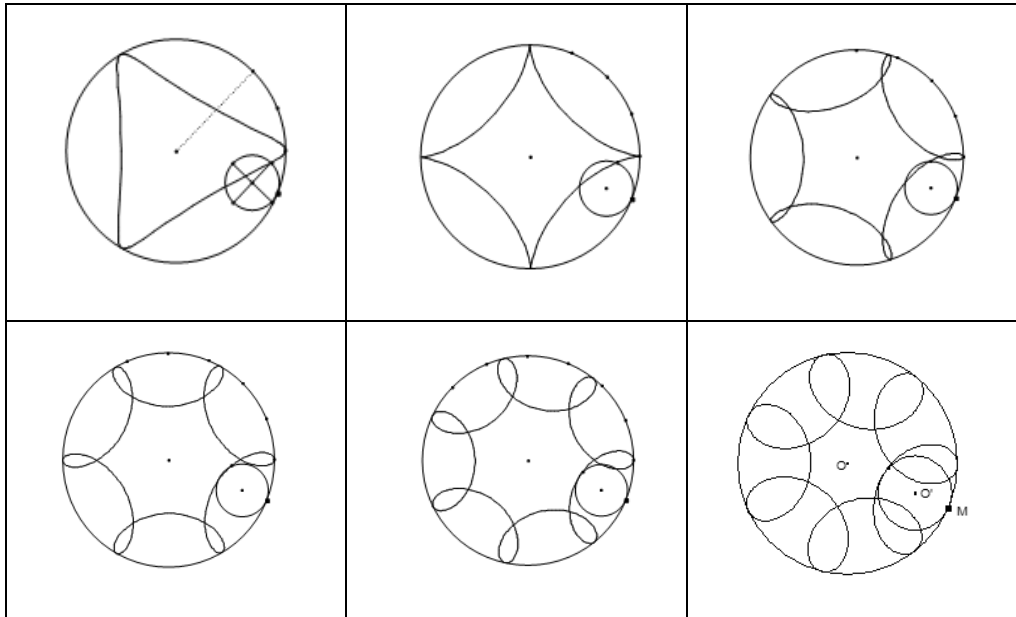


Figura - 42 Variantes del deltoide tricúspide

Gráfica 19 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

En dependencia de las veces que se replique el arco MR , como el problema 9 que pide que se replique tres veces para establecer el segmento que simula el desplazamiento de la circunferencia interna, tangente a la primera y también del radio de la misma, se tiene gran diversidad de lugares, de los cuales se muestran algunos en la Gráfica 2-19. Ello señala una riqueza de exploración, desde los cuales se decide que los lugares geométricos son útiles, por ejemplo, en la construcción de polígonos regulares, incluso, aquellos que no se pueden obtener con el uso de la regla y compás en la forma euclidiana, como el heptágono.

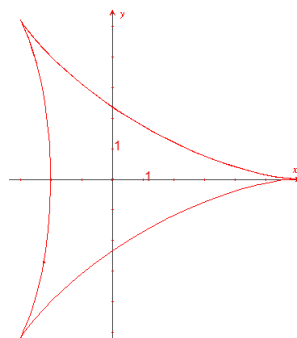


Figura - 43 Ejemplo de deltoide tricúspide de Steiner

Gráfica 20 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

La Gráfica 2-20 indica que la deltoide tricúspide de ecuaciones paramétricas $x = a(2\cos t + \cos 2t)$; $y = a(2\sin t - \sin 2t)$ no cambia al alterar el valor de t restando o sumando una constante, lo que obliga a modificar el intervalo de definición del parámetro. En este caso se ha representado la curva $x = a(2\cos(t - 3) + \cos 2(t - 3))$, $y = a(2\sin(t - 3) - \sin 2(t - 3))$ cuando $a = 2$.

2.2.19. Problema 10.

Se considera una circunferencia de radio arbitrario r . Trazar el lugar geométrico descrito por el punto P , pie de la perpendicular trazada desde un punto V exterior a la circunferencia, a la tangente por un punto M de dicha circunferencia.

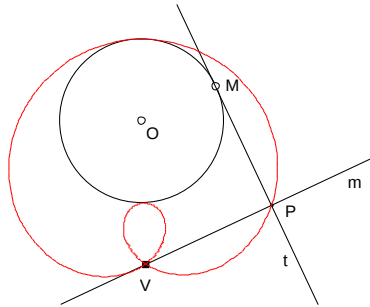


Figura - 44 Caracol de Pascal

Gráfica 21 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Sobre la circunferencia de centro en O se ubica un punto M y desde allí se traza la tangente t a la circunferencia. Desde un punto V exterior a la circunferencia se traza la perpendicular m que se corta en P con la tangente mencionada. El lugar geométrico descrito por P cuando se desplaza M por la circunferencia se denomina Limaçon o Caracol de Pascal, curva descubierta por Etienne Pascal, padre de Blaise Pascal y que además recibe el nombre genérico de curva pedal o podaria. (Ver Figura 2-21).

2.2.20 Ejemplo 10.

Dados la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y el punto $V(0,4)$, la Gráfica 2-22 representa la curva descrita por el punto P , pie de la perpendicular trazada desde V a la tangente por M de dicha circunferencia.

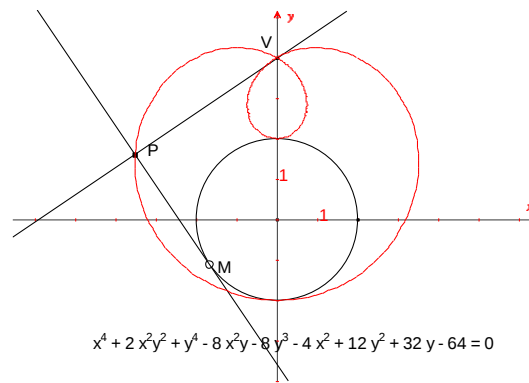


Figura - 45 Ejemplo de Caracol de Pascal

Gráfica 22 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Esta curva podaría o pedal, para el caso de una circunferencia, se consigue al seguir los pasos establecidos en el problema precedente y con operaciones algebraicas que implican cálculos especiales, se llega a la ecuación $4x^2 + 4y^2 = (x^2 + y^2 - 4y)^2$.

2.2.21. Problema 11.

Dada una circunferencia de diámetro AB , por el extremo B se levanta su recta tangente y se ubica un punto M en la circunferencia para determinar la recta AM que corta a la tangente en el punto C . Se ubica en AM un punto P de modo que $AP = MC$. Trazar el lugar geométrico que describe P cuando M se desplaza por la circunferencia.

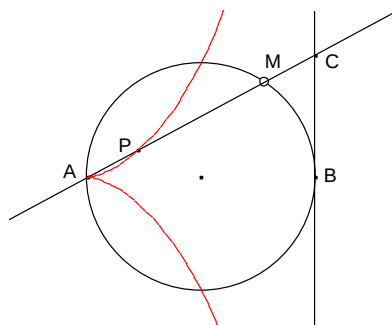


Figura - 46 Cisoide de Diocles

Gráfica 23 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

El problema confeccionado determina los pasos a seguir hasta encontrar el lugar geométrico que se denomina Cisoide de Diocles. (Ver Figura 2-23).

2.2.22. Ejemplo 11.

Dada la circunferencia $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ por el extremo $B(4,0)$ se levanta su recta tangente y se ubica un punto M en la circunferencia para determinar la recta OM , siendo O el origen de coordenadas, recta que corta a la tangente en el punto C . Se ubica en OM un punto P de modo que $AP = MC$. Trazar el lugar geométrico que describe P cuando M se desplaza por la circunferencia.

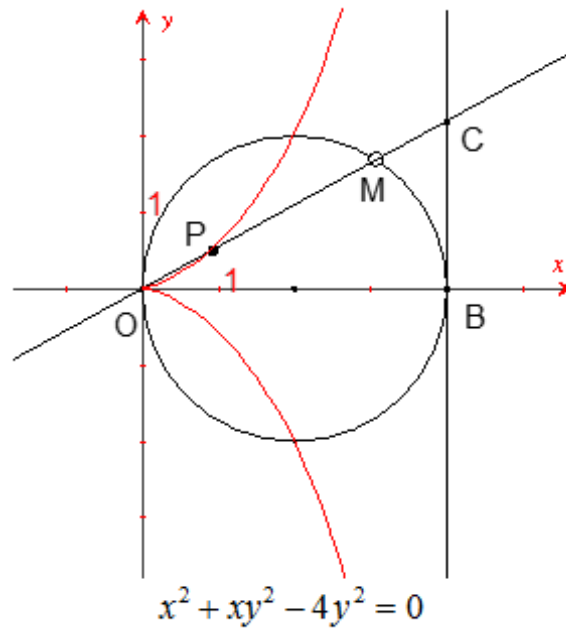


Figura - 47 Ejemplo de Cisoide de Diocles

Gráfica 24 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

La ecuación de la cisoide de Diocles, que se consigue en este caso particular, tiene como ecuación en coordenadas polares a $\rho = 4 \tan(\theta) \sen(\theta)$, que llevadas a coordenadas cartesianas produce la ecuación $x^3 + xy^2 - 4y^2 = 0$. (Ver Figura 2-24).

2.2.23. Problema 12.

Dada una circunferencia, sobre la recta diametral s se ubica un punto arbitrario A desde donde se levanta una perpendicular a s . Se señala el punto O intersección entre la recta diametral y la circunferencia y se ubica un punto arbitrario M en la circunferencia. Se traza la recta OM y se señala su punto de corte P con la perpendicular a s . Por P se traza una paralela a la recta s que corta a la circunferencia en los puntos Q y R cuando P queda en el interior del círculo. Desde Q y R se trazan perpendiculares a s que cortan a la recta OM en los puntos S y T . Trazar el lugar geométrico descrito por los puntos S y T al mover M a lo largo de la circunferencia.

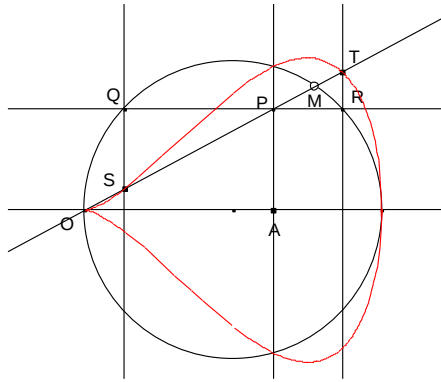


Figura - 48 Curva descrita por dos puntos

Gráfica 25 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

A diferencia de los otros problemas, esta curva está descrita por el movimiento de dos puntos cuya arquitectura depende de la ubicación del punto A , bien en el interior o exterior del círculo. (Ver Figura 2-25).

2.2.24. Ejemplo 12.

Se considera la circunferencia $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Se ubica un punto libre $A(b, 0)$ desde donde se levanta una perpendicular p al eje x , se ubica en la circunferencia un punto libre M y se traza la recta OM , siendo O el origen de coordenadas. Esa recta y la perpendicular por A se intersectan en P , por ese punto se traza una paralela al eje x que corta a la circunferencia en los puntos Q y R desde donde se trazan perpendiculares al eje x , perpendiculares que cortan a la recta OM en los puntos S y T . En la Gráfica 2-26 se representa los lugares geométricos descritos por los puntos S y T cuando M se desplaza por la circunferencia.

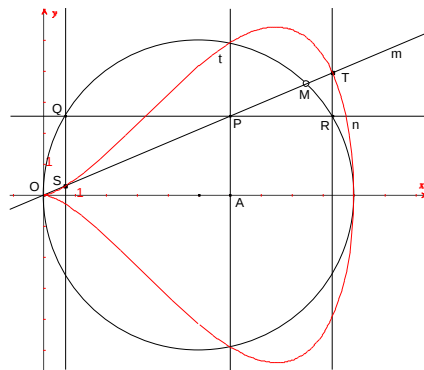


Figura - 49 Ejemplo de curva descrita por dos puntos

Gráfica 26 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

La misma elaboración del problema describe los pasos procedentes para hallar los lugares geométricos pedidos, que son dos curvas que en su conjunto reciben el nombre la Cuártica Piriforme que tiene como ecuación cartesiana $b^2y^2 = x^3(a - x)$ con $a > 0$ y $b > 0$. Para el caso representado en la Gráfica 26, se han tomado $a = 8$ y $b = 5$, y del archivo que se ha tomado es factible cambiar los parámetros establecidos y pedir la ecuación de la curva descrita.

2.2.25. Problema 13.

En una circunferencia de diámetro AB se ubica un punto móvil M , la tangente a la circunferencia por B se corta en R con la recta AM , secante a la circunferencia. La perpendicular levantada por R a la tangente y la paralela a dicha tangente trazada desde M , determinan un punto de intersección P . Trazar el lugar geométrico que describe el punto P cuando el punto móvil M recorre la circunferencia dada.

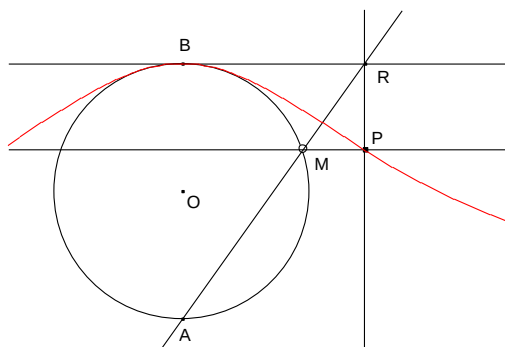


Figura - 50 La Bruja de Agnesi

Gráfica 27 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

El diseño del problema entrega los pasos que conducen a la confección del lugar geométrico llamado la Curva de Agnesi, más conocido como la Bruja de Agnesi, curva que fue descubierta y estudiada por Gaetana Agnesi. La paralela por A a la tangente de la circunferencia por B es asíntota de la Curva de Agnesi. (Ver Figura 2-27).

2.2.26. Ejemplo 13.

La Gráfica 2-28 representa la Curva de Agnesi que se consigue al tomar la circunferencia $x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, al adoptar al origen de coordenadas $O(0,0)$ como el punto A y al punto de coordenadas $(0,a)$ como B en correspondencia con el Problema 13.

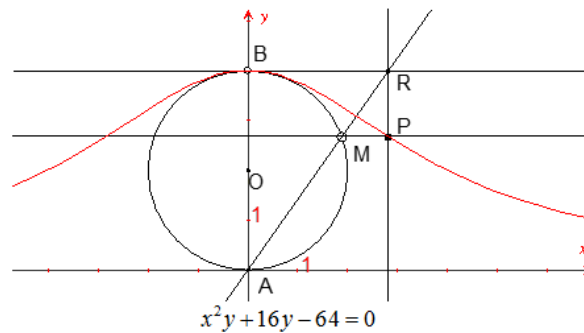


Figura - 51 Ejemplo de Bruja de Agnesi

Gráfica 28 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Llevar las condiciones que se imponen en el lugar geométrico, a expresiones algebraicas, conducen a que en general, la curva de Agnesi tiene como ecuaciones paramétricas a $x = \frac{a}{m}$ y $y = \frac{am^2}{1+m^2}$, siendo el parámetro m , la pendiente de la recta AM . Eliminando este parámetro se llega a la ecuación cartesiana de la curva $y = \frac{a^2}{a^2+x^2}$. Para el caso representado en la Gráfica 2-28, se ha tomado $a = 4$.

2.3 Lugares geométricos referidos a la recta

Las colecciones de problemas resueltos tienen alto valor pedagógico en el sentido en que con ello se aprende a enfrentar problemas que contienen los mismos requisitos o son similares. En matemáticas, y de hecho en geometría, una forma alterna y complementaria a la de estudiar los aspectos teóricos de aprendizaje es la de enfrentarse a problemas como los que se presentan en este capítulo. Los problemas son un mecanismo certero que acercan al dominio de los conceptos de una disciplina científica.

Los problemas en objetos geométricos que se estudian en este texto apuntan a tener un acceso directo a la solución del problema, cuidando de dar el paso correcto sin indicar la razón, para que el lector y usuario argumente su porqué. Incluso, en varios problemas se determina una acción que debe ser indagada por cuenta del estudiante; por ejemplo, el cálculo geométrico de la raíz cuadrada de un número, o la media proporcional de una cantidad dada como longitud de un segmento, o el producto o cociente de segmentos utilizando el teorema de Thales.

A continuación, se presenta una colección de problemas que finalizan en lugares geométricos específicos, denominados rectas. Han sido escogidos de diversos textos de geometría euclídea y analítica y esperan ser enriquecidos con el acervo personal del lector.

2.3.1. Problema 1.

Trazar el lugar geométrico de un punto que se mueve, de tal manera que su distancia a una recta l es el doble que su distancia a otra recta m .

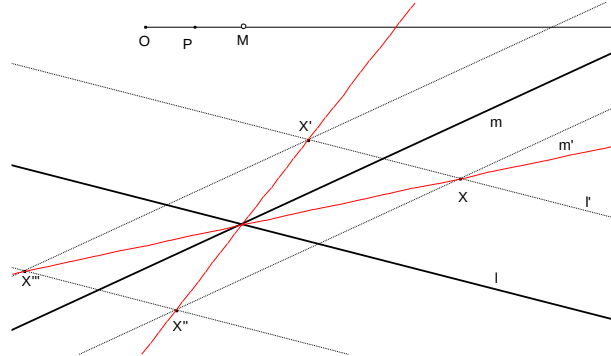


Figura -52 Recta 1

Gráfica 29 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dadas las rectas l y m , sobre una semirrecta de origen O se ubica un punto móvil y arbitrario M y también se calcula el punto medio del segmento OM que se denomina P . Se escoge una de las cuatro regiones determinada por las rectas y en tal región se ubican dos paralelas, la una a distancia OM de la recta l y la otra a una distancia OP de la recta m . Las dos rectas determinan en su intersección el punto X que a su vez construye parte del lugar geométrico pedido, cuando se desplaza M por la semirrecta. Las tres semirrectas restantes del lugar geométrico total se encuentran por la misma vía, ubicando paralelas que satisfagan la condición de distancia requerida y, para ello, es suficiente con recurrir a la simetría axial; los puntos X' , X'' y X''' son los que describen las partes del lugar geométrico total. Los cuatro puntos X , X' , X'' y X''' son vértices de un paralelogramo. (Ver Figura 2-29).

2.3.2. Ejemplo 1.

La Gráfica 2-30 representa el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $4x - 3y + 12 = 0$ es igual al doble de su distancia al eje x .

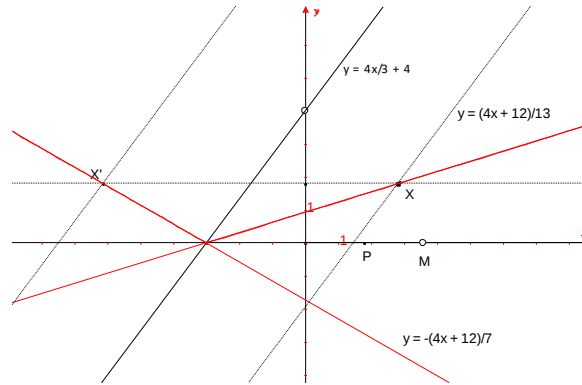


Figura - 53 Ejemplo recta 1.

Gráfica 30 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Este es un caso particular del problema. Obsérvese que el punto móvil M se ha ubicado sobre una semirrecta que subyace en el eje x .

2.3.3. Problema 2.

Un punto se mueve de manera tal que la suma de las distancias a dos rectas es constante. Trazar el lugar geométrico descrito por ese punto.

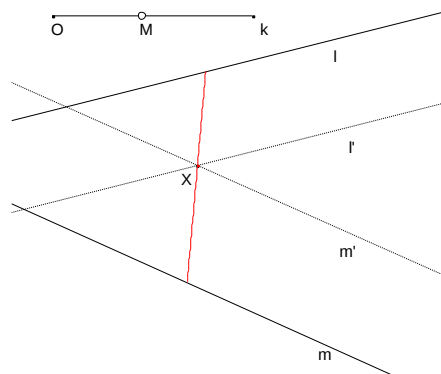


Figura - 54 Recta 2.

Gráfica 31 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dadas las rectas l y m , se establece sobre una semirrecta un segmento de origen en el punto O , extremo P y longitud k . En ese segmento se ubica un punto M . Se construyen paralelas l' a l de modo que guarden la distancia OM y la paralela m' a m a la distancia MP . Las rectas l y m se cortan en el punto X que a su vez genera como lugar un segmento de recta, al mover M sobre OP .

El segmento determinado como lugar geométrico subyace en una recta, y para que la suma de los puntos a las rectas se siga manteniendo constante se debe hacer la suma como segmentos dirigidos. (Ver Figura 2-31).

2.3.4. Ejemplo 2.

La Gráfica 2-32 representa el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a las rectas $y = 2x + 4$ y $y = \frac{2}{11}x + 2$, es 5.

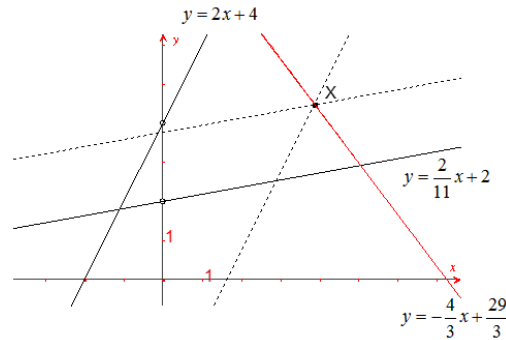


Figura - 55 Ejemplo recta 2

Gráfica 32 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Este es un caso particular del Problema 2 y siguiendo los pasos de la construcción se determina que la recta buscada tiene como ecuación $y = \frac{-4x+29}{3}$.

2.3.5. Problema 3.

Trazar el lugar geométrico de los puntos inversos de un punto que se mueve a lo largo de una circunferencia que pasa por el centro de la circunferencia de inversión c .

La inversión sobre una circunferencia es una transformación del plano referida a una circunferencia c de centro en un punto O y radio r de modo que los puntos A y B son el uno, inverso del otro siempre y cuando cumplan con la relación $AO \times BO = r^2$. Los puntos A, B y O están alineados.

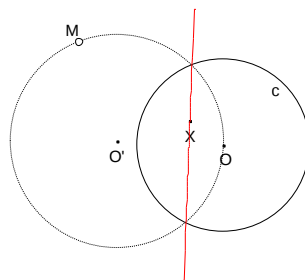


Figura - 56 Recta 3: Inversa de una circunferencia

Gráfica 33 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Cuando el punto M se mueve a través de una circunferencia que pasa por el centro O de la circunferencia base de la inversión, su imagen X describe una recta. (Ver Figura 2-33).

2.3.6. Ejemplo 3.

La Gráfica 2-34 representa la inversión de la circunferencia $(x + 5)^2 + y^2 = 5^2$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 3^2$.

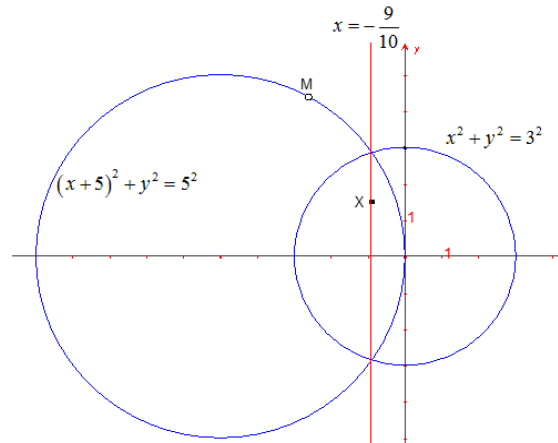


Figura - 57 Ejemplo recta 3: inversa de una circunferencia

Gráfica 34 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dado que la circunferencia dominio pasa por el centro de la que fundamenta la inversión, se convierte a través de esta transformación sobre la recta $x = -\frac{9}{10}$.

2.3.6.1. Ejemplo 3a.

El problema 3 y el ejemplo 3 evidencian la forma en que un movimiento circular se transforma en movimiento rectilíneo y viceversa, y fundamentan mecanismos que ayudaron con la tecnología de su momento; tal es el mecanismo de Peaucellier-Lipkin conformado por un conjunto de siete barras articuladas que transforma un movimiento circular en un movimiento rectilíneo, inventado en 1864 por el francés Charles-Nicolas Peaucellier (1832-1897) y el lituano Yom Tov Lipman Lipkin. El primero era un oficial del ejército y el segundo el hijo del rabino Israel Salanter. Además, ese mecanismo fue útil en el desarrollo de la máquina de vapor.

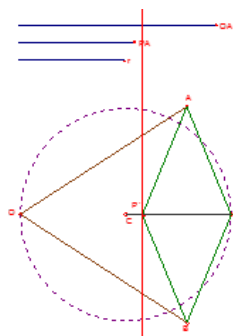


Figura - 58 Recta generada por el mecanismo de Peaucellier-Lipkin

Gráfica 34a (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

$APBP'$ es un rombo; OA y OB barras fijas, los puntos O y C permanecen fijos. Al desplazarse P por la circunferencia el punto P' describe una recta perpendicular con el segmento OC .

Los segmentos diseñados arriba OA , PA y r y que se corresponden con el archivo correspondiente a la gráfica permiten modificar la longitud de las barras.

El lugar geométrico de los puntos P' cuando el punto P recorre la circunferencia es la recta mencionada. (Ver Figura 2-35).

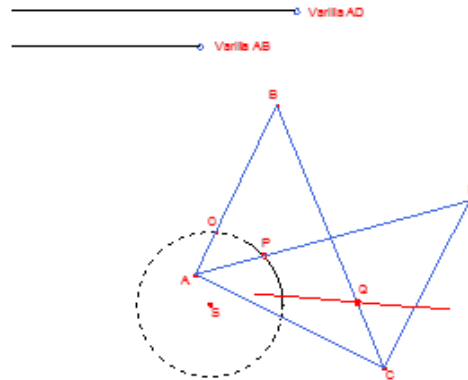


Figura - 59 Máquina inversora de Harry Hart

Gráfica 34b (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

La Gráfica 2-36 describe la máquina inversora de Harry Hart. El matemático Harry Hart en 1874 publicó su invención de la máquina inversora. Al mover P por el arco de la circunferencia, el punto Q describe un segmento de recta. (Referencia ¿Qué son las matemáticas de Courant y Robbins?, pág 190). El mecanismo de Hart tan solo posee cinco barras, en cambio el de Peaucellier posee siete.

2.3.7. Problema 4.

Trazar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de una parábola que son paralelas a una recta dada.

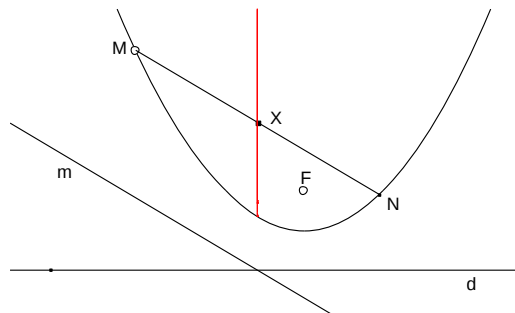


Figura - 60 Recta 4: puntos medios de las cuerdas de parábola

Gráfica 35 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

La Gráfica 2-37 presenta una parábola de foco F y directriz d , se ha dispuesto una recta m y un punto M móvil sobre la parábola desde el cual se ha trazado la cuerda MN y su punto medio X , punto que describe una recta perpendicular a la mediatriz de la parábola, cuando M se desplaza por la parábola. Al cambiar la dirección de la recta m , cambia la ubicación del lugar geométrico que, además, se denomina diámetro de la parábola.

2.3.8. Ejemplo 4.

La Gráfica 2-38 representa el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de la parábola $y = \frac{x^2}{2}$ que son paralelas a la recta $y = -x - 3$.

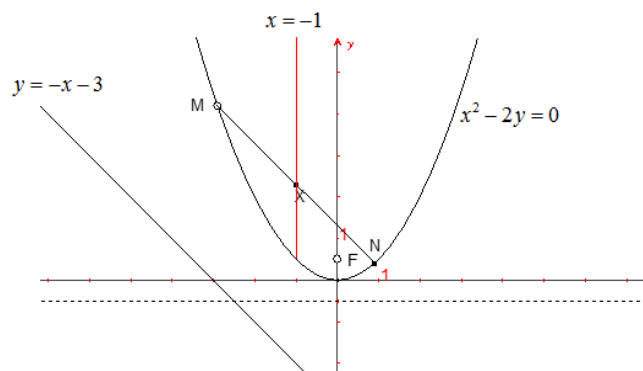


Figura - 61 Ejemplo recta 4: puntos medios de las cuerdas de parábola

Gráfica 36 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Se construye la parábola de directriz $y = -\frac{1}{2}$ y de foco en el punto $F(0, \frac{1}{2})$ y, con ello, se satisfacen los pasos expuestos en la solución del programa general, con lo que se encuentra como lugar geométrico la recta $x = -1$.

2.3.9. Problema 5.

Trazar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos rectas dadas.

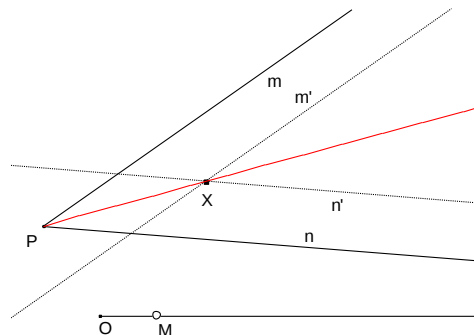


Figura - 62 Recta 5: puntos que equidistan de dos rectas dadas

Gráfica 37 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dadas las rectas m y n que se cruzan en el punto P , se establece sobre una semirrecta de origen en O , un punto arbitrario M y con la distancia OM se trazan las paralelas m' y n' , de manera correspondiente a las rectas dadas. Esas paralelas se cortan en el punto X que describe como lugar geométrico una recta, cuando M recorre la semirrecta. Esa recta se denomina la bisectriz de uno de los ángulos que conforman las rectas dadas. (Ver Figura 2-39).

2.3.10. Ejemplo 5.

Calcular la ecuación del lugar geométrico de los puntos que se mueven, de tal manera que siempre están a la misma distancia de las rectas $y = 2x - 3$ y $y = \frac{x+1}{3}$.

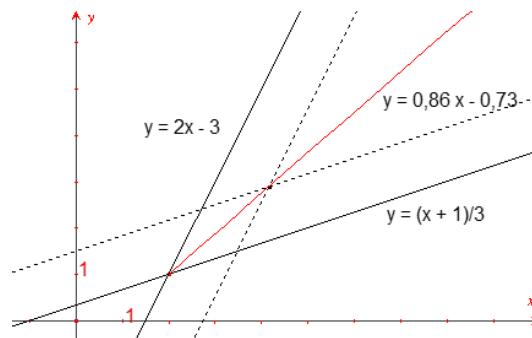


Figura - 63 Ejemplo de recta 5: puntos que equidistan de dos rectas dadas
Gráfica 38 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

La utilización de los pasos señalados en el problema anterior deriva, dentro del sistema, en la ecuación de la recta $y = 0,86x - 0,73$, que de hecho, es una igualdad, con valores aproximados. (Ver Figura 2-40).

2.3.11. Problema 6.

Trazar el lugar geométrico de los puntos del plano, tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos dados, es igual a la distancia entre tales puntos.

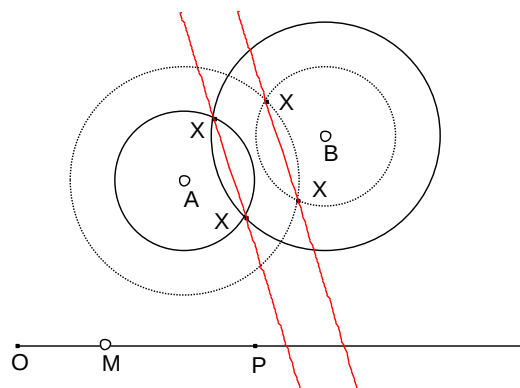


Figura - 64 Recta 6
Gráfica 39 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dados los puntos A y B , se ubica en una semirrecta de origen O un punto arbitrario y móvil M y otro punto P tal que $MP = AB$. Con centro en A y radio $\sqrt{OM}$ se construye una circunferencia y otra con centro en B y radio $\sqrt{OP}$, al mismo tiempo y con iguales radios se construye otro par de circunferencias intercambiando sus centros. Por pares, esas circunferencias se intersectan en los puntos X , los que describen como lugar geométrico semirrectas que difieren de la mediatriz del segmento determinado por los puntos dados, pero que resultan paralelas con ella. (Ver Figura 2-41).

2.3.12. Ejemplo 6.

La Gráfica 2-42 representa el lugar geométrico que describe el movimiento del punto $X(x,y)$ tal que la diferencia de los cuadrados de su distancia a cada uno de los puntos $A(2,3)$ y $B(5,7)$ es igual a 5 .

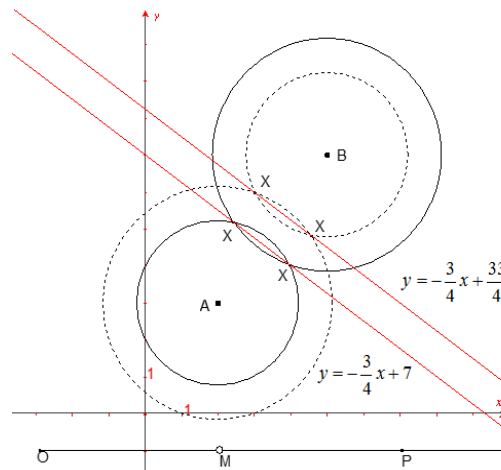


Figura - 65 Ejemplo recta 6

Gráfica 40 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Siguiendo los pasos estipulados en el problema precedente, se llega a las ecuaciones de las rectas $y = \frac{33-3x}{4}$ y $y = -\frac{3x}{4} + 7$.

De otro lado, es claro que el lugar geométrico que describen los puntos, distan de ser la mediatriz.

2.3.13. Problema 7.

Trazar el lugar geométrico de los puntos tales que la semisuma de los cuadrados de las distancias de cada punto a dos vértices fijos de un triángulo equilátero es igual al cuadrado de la distancia de cada punto al tercer vértice.

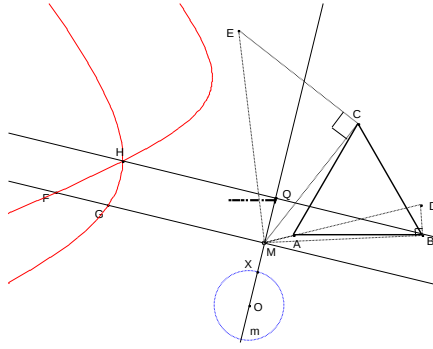


Figura - 66 Recta 7

Gráfica 41 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Sea el triángulo equilátero $\triangle ABC$, m una recta arbitraria que modifica su inclinación sobre una circunferencia auxiliar de centro en O y radio OX , la inclinación cambia al modificar la posición del punto X en la circunferencia auxiliar. Sobre la recta m se ubica un punto arbitrario M . Se consideran las distancias MA, MB y MC .

Se construyen los triángulos rectángulos $\triangle MBD$ donde $BD = MA$ y $\triangle MCE$ con $CE = MC$.

En la recta n , perpendicular a m por el punto M se ubican los puntos F y G tales que $MF = ME$ y $MG = MD$.

Se trazan los lugares geométricos de los puntos F y G cuando se mueve M por la recta m y que son dos ramas de diferentes hipérbolas. En el punto de corte H de las ramas de hipérbola se tiene $MD = ME = HQ$, donde Q es el pie de perpendicular de H sobre la recta m . Este punto Q satisface los requisitos del problema y se convierte en uno de los puntos del lugar geométrico pedido.

Para evidenciar el lugar, se recomienda disponer traza al punto Q y animación al punto X de la circunferencia auxiliar en la construcción.

El lugar geométrico es una recta paralela al lado AB que pasa por el baricentro del triángulo equilátero dado. Así, el lugar geométrico se define con el baricentro y el punto Q . (Ver Figura 2-43).

2.3.14. Ejemplo 7.

La Gráfica 2-44 representa el lugar geométrico de los puntos de un plano, en el cual la semisuma de los cuadrados de las distancias de cada punto del lugar a los vértices A y B de un triángulo equilátero $\triangle ABC$ es igual al cuadrado de la distancia del punto al tercer vértice C , siendo $A(-3,0)$, $B(3,0)$ y $C(0,3\sqrt{3})$.

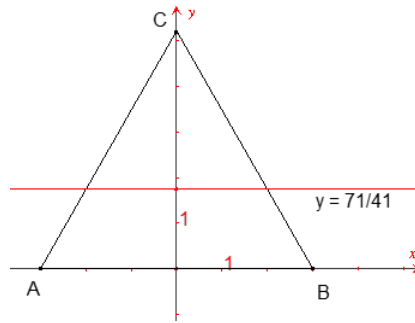


Figura - 67 Ejemplo recta 7

Gráfica 42 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Al proceder en concordancia con los pasos de resolución del problema anterior, sobre todo, con la conclusión de que el lugar geométrico es una paralela a uno de los lados del triángulo que pasa por el baricentro del mismo, es claro que el lugar geométrico para ese caso particular es la recta $y = \sqrt{3}$.

2.3.15. Problema 8.

Trazar el lugar geométrico de los puntos de un plano, tales que la semisuma de los cuadrados de las distancias del punto a dos vértices del lado desigual de un triángulo isósceles es igual al cuadrado de la distancia del punto al vértice común de los lados iguales.

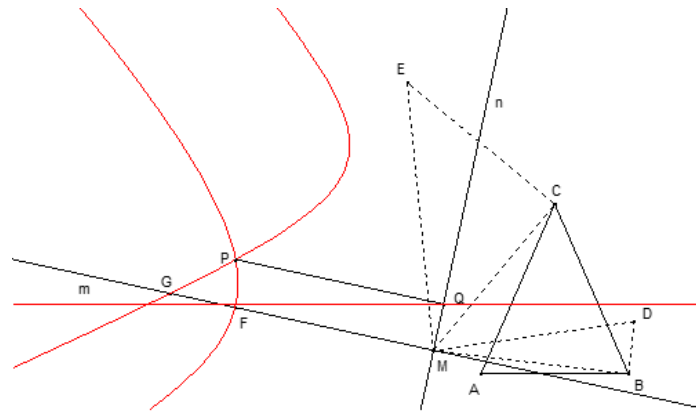


Figura - 68 Recta 8

Gráfica 43 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Este problema constituye una situación un poco más general del Problema 7 y se resuelve con el mismo procedimiento. Dado el triángulo isósceles $VABC$, se traza en el plano una recta libre n y sobre ella se ubica un punto arbitrario M . Enseguida se construyen los triángulos rectángulos $VMBD$ y $VMCE$ (el último es isósceles), de modo que $BD = MA$ y $CE = MC$. El procedimiento se dirige ahora a buscar una posición de M en la que $MD = ME$; para ello se ubican en la perpendicular m a n los puntos F y G , de manera que $MF = MD$ y $MG = ME$. Esos puntos tienen

como lugares geométricos ramas de hipérbola que se describen al desplazar el punto M por la recta n , y que se cortan en el punto P . Solo basta hallar el pie de perpendicular del último punto sobre n , al que se ha llamado Q . La traza de Q al cambiar de posición a la recta n es una paralela al lado no igual del triángulo original, dado que pasa por su baricentro. (Ver Figura 2-45).

2.3.16. Ejemplo 8.

La Gráfica 2-46 representa el lugar geométrico de los puntos de un plano, tales que la semisuma de los cuadrados de las distancias del punto a los vértices $A(-2,0)$ y $B(2,0)$ del lado desigual de un triángulo isósceles es igual al cuadrado de la distancia del punto al vértice común $C(0,8)$ de los lados iguales.

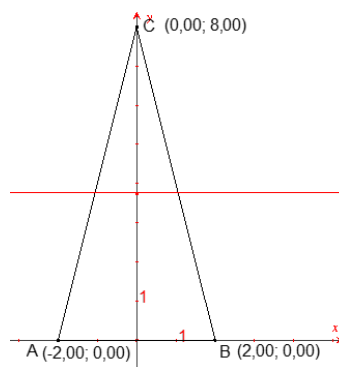


Figura - 69 Ejemplo recta 8

Gráfica 44 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Al tomar los puntos $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$ y $C(0, b)$ como vértices de un triángulo isósceles dentro del plano cartesiano, se llega a que la ecuación del lugar geométrico de los puntos que cumplen el requisito de distancias establecido es la recta $y = \frac{b^2 - a^2}{2b}$. En ese caso, la recta tiene como ecuación $y = \frac{15}{4}$.

2.3.17. Problema 9.

Trazar el lugar geométrico de los puntos de un plano, tales que la semisuma de los cuadrados de las distancias del punto a dos vértices de un triángulo es igual al cuadrado de la distancia del punto al tercer vértice.

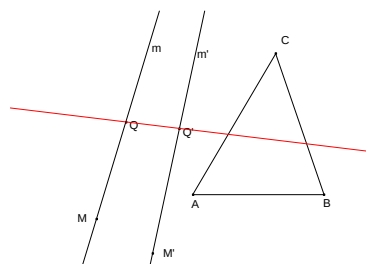


Figura - 70 Recta 9

Gráfica 45 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

La Gráfica 2-47 indica que se puede proceder a calcular dos puntos Q y Q' siguiendo los pasos señalados en los problemas 7 y 8. Esos puntos determinan (que o en) la recta que es el lugar geométrico buscado.

En ese caso, el lugar geométrico es la recta determinada por el punto Q y el baricentro del triángulo original.

2.3.18. Ejemplo 9.

Hallar el lugar geométrico de los puntos del plano, tales que la semisuma de los cuadrados de las distancias del punto a los vértices $A(0,0)$ y $B(6,0)$ de un triángulo es igual al cuadrado de la distancia del punto al tercer vértice $C(2,4)$.

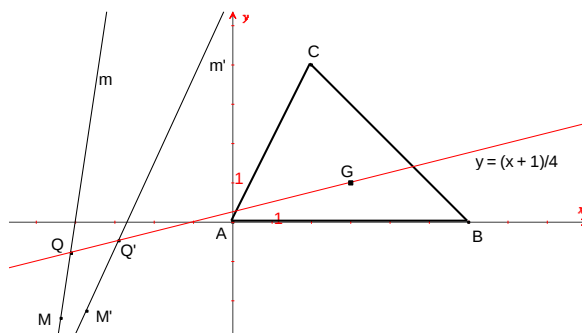


Figura - 71 Ejemplo recta 9

Gráfica 46 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Al seguir las indicaciones del Problema 9 se encuentra que la ecuación del lugar geométrico que satisface las condiciones expresadas es la recta $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$.

En términos generales, para un triángulo con vértices en los puntos $A(0,0)$, $B(a,0)$ y $C(b,c)$, el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo promedio de los cuadrados de las distancias a los vértices A y B es igual al cuadrado de la distancia al vértice C es la recta $y = \frac{a-2b}{2c}x + \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4c}$. (Ver Figura 2-48).

2.4 Lugares referidos a la circunferencia

Se escogen problemas que no solo resulten interesantes sino que el procedimiento de solución no se convierta en estorbo para alcanzar un dominio completo de los conceptos y significados que se aprende de los mismos. Se ha dicho que el tema de los lugares geométricos, por sí mismo, es complejo, pues se fundamenta en el movimiento. En su conjunto, los problemas expuestos requieren de un uso corriente de rectas y circunferencias y, con ello, se va aprendiendo de las relaciones importantes que tienen dichos objetos geométricos.

Se espera que al resolver uno tras otro, repitiendo el proceso expuesto, inventando otro, dejando la impronta de la creatividad en variantes de solución o

estableciendo y planteando nuevos problemas, aumente la motivación por el estudio de lugares geométricos, lo cual se ha facilitado con el uso de asistentes geométricos dinámicos, lo que no degrada el problema ni le quita la fuerte conexión que tiene con el asombro y la sorpresa.

A continuación se presentan algunos problemas, que alumbran la curiosidad y que pueden servir de guía para afianzar los conceptos geométricos sobre la circunferencia, sus relaciones con otros objetos y otros conceptos que explican la importancia de la geometría.

2.4.1. Problema 1.

Un punto se mueve, de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos A y B es una constante k . Trazar el lugar geométrico que determina tal punto.

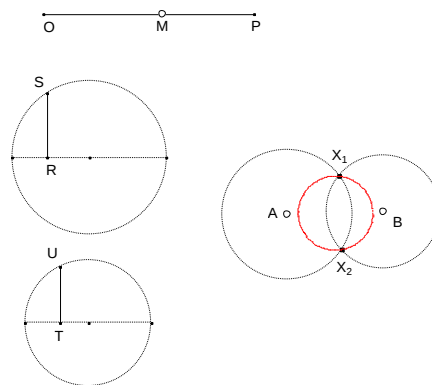


Figura - 72 Circunferencia 1

Gráfica 47 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Sobre una semirrecta de origen O se construye el segmento OP de longitud a k y sobre ese segmento se ubica un punto móvil M . Se construyen las distancias $RS = \sqrt{OM}$ y $TU = \sqrt{MP}$ que tomados como radios se emplean para trazar circunferencias de centros A y B respectivamente; circunferencias que se cortan en los puntos X_1 y X_2 , cuyos lugares geométricos al mover M , son los arcos de una circunferencia cuyo centro es el punto medio del segmento AB .

La distancia entre los puntos A y B debe ser menor que el valor de la constante k . (Ver Figura 2-49).

2.4.2. Ejemplo 1.

Un punto se mueve, de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $A(2,0)$ y $B(-1,0)$ es 5 . La Gráfica 2-50 representa el lugar geométrico de la curva descrita por el punto.

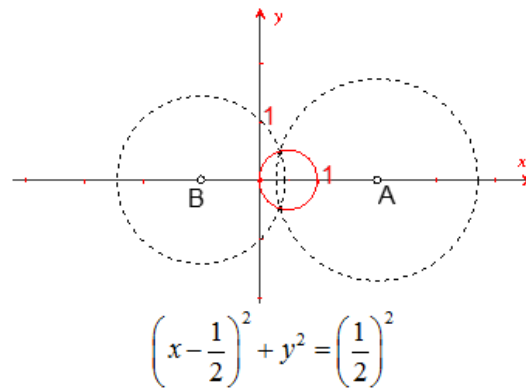


Figura - 73 Ejemplo Circunferencia 1

Gráfica 48 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

El ejemplo particular del Problema 1 se sustenta desde un segmento de longitud ⁵ y determina la ecuación de la circunferencia $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

2.4.3. Problema 2.

Un punto se mueve, de tal manera que su distancia a un punto A es igual al doble de su distancia respecto de otro punto B . Trazar el lugar geométrico que describe tal punto.

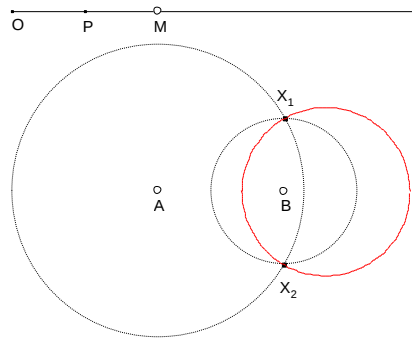


Figura - 74 Circunferencia 2

Gráfica 49 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Sobre una semirrecta de origen O se ubica un punto arbitrario M y se calcula el punto medio P del segmento OM ; se trazan dos circunferencias con centros en A y B de radios OM y OP respectivamente, circunferencias que se cortan en los puntos X_1 y X_2 , y describen arcos de circunferencias cuando se desplaza M por la semirrecta. (Ver Figura 2-51).

2.4.4. Ejemplo 2.

Un punto se mueve, de tal manera que su distancia del punto $A(4,2)$ es igual al doble de su distancia del punto $B(-1,3)$. La Gráfica 2-52 representa el lugar geométrico descrito por ese punto.

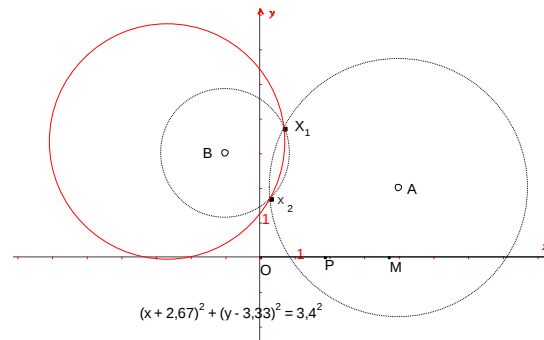


Figura - 75 Ejemplo circunferencia 2

Gráfica 50 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

El problema es un caso particular del establecido en el Problema 2 y se resuelve con las indicaciones dadas.

2.4.5. Problema 3.

Un punto se mueve, de tal manera que su distancia a un punto A es igual a un tercio de su distancia a un punto B . Trazar el lugar geométrico que describe ese punto.

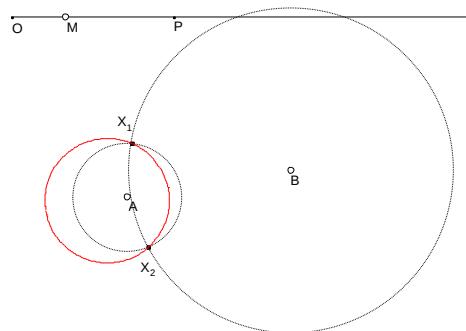


Figura - 76 Circunferencia 3

Gráfica 51 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Sobre una semirrecta de extremo en O se ubica un punto arbitrario M y se calcula P , de modo que $OP = 3OM$. Con centro en A y radio OM se traza una primera circunferencia y con centro en B y radio una segunda, que corta a la primera en los puntos X_1 y X_2 que describen los arcos de una circunferencia cuando M se desplaza por la semirrecta. (Ver Figura 2-53).

2.4.6. Ejemplo 3.

Un punto se mueve, de tal manera que su distancia al punto $A(2, -2)$ es igual a un tercio de su distancia al punto $B(4,1)$. La Gráfica 2-54 representa el lugar geométrico descrito por tal punto.

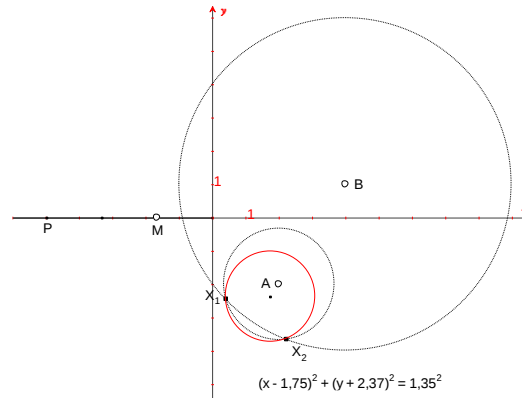


Figura - 77 Ejemplo circunferencia 3

Gráfica 52 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Al seguir las indicaciones presentadas en el Problema 3, se encuentra la ecuación contenida en la gráfica anterior. Resulta interesante observar que los puntos X_1 y X_2 describen como lugar geométrico semicircunferencias. El diámetro de cada semicircunferencia está contenido en la recta determinada por los centros A y B .

2.4.7. Problema 4.

Un punto se mueve, de manera que el cuadrado de su distancia a un punto A es el doble de su distancia a una recta. Trazar el lugar geométrico que describe tal punto.

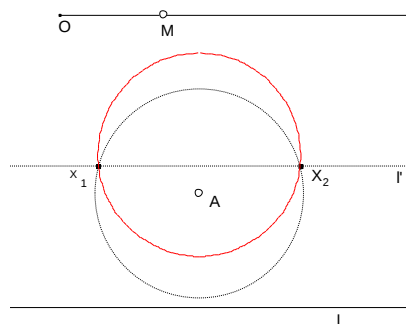


Figura - 78 Circunferencia 4

Gráfica 53 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Sobre una semirrecta de extremo O se ubica un punto arbitrario M , con OM como radio se traza una circunferencia de centro en A . Con ayuda del teorema de Tales se calcula la mitad del cuadrado del segmento OM y con ese valor se ubica la paralela l' a la recta original dada l . Esa paralela y la circunferencia se cortan en los puntos X_1 y X_2 que al mover M sobre la semirrecta, describen arcos de una circunferencia. (Ver Figura 2-55).

2.4.8. Ejemplo 4.

Un punto se mueve, de manera que su cuadrado de la distancia al punto $A(1,2)$ es el doble de su distancia a la recta $3x + 4y - 1 = 0$. La Gráfica 2-56 representa el lugar geométrico que describe tal punto.

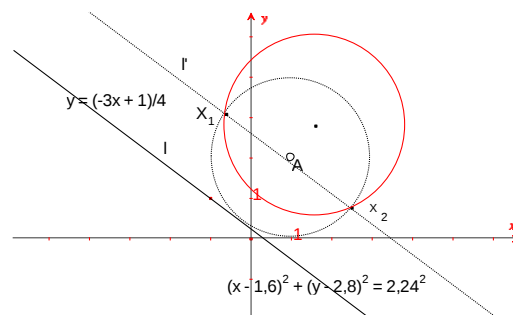


Figura - 79 Ejemplo circunferencia 4

Gráfica 54 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Al seguir las instrucciones generales del problema 4, para este caso particular, Cabrí arroja la ecuación $(x - 1.6)^2 + (y - 2.8)^2 = 2.24^2$, la cual trabaja con valores aproximados. La ecuación exacta obtenida con los recursos de la geometría analítica es la siguiente $5x^2 + 5y^2 - 16x - 28y + 27 = 0$.

2.4.9. Problema 5.

Desde un punto fijo A de una circunferencia se trazan cuerdas. Trazar el lugar geométrico de los puntos medios de tales cuerdas al mover el otro extremo por la circunferencia.

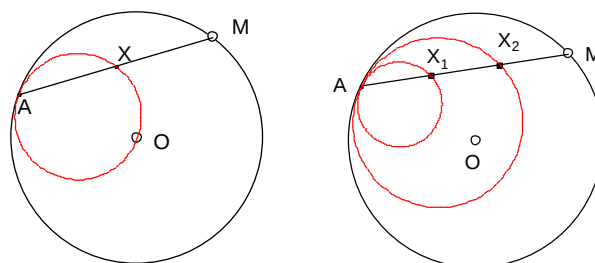


Figura - 80 Circunferencia 5

Gráfica 55 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dada la circunferencia de centro en O y radio arbitrario r , se ubica la cuerda AM y su punto medio X , como se presenta en la construcción a izquierda de la Gráfica 55. Al fijar A y recorrer la circunferencia con M , el punto medio describe otra circunferencia de diámetro AO , es decir, una circunferencia que reduce su radio a la mitad y por ello su área a la cuarta parte.

El problema se puede generalizar al ubicar puntos en determinada parte de la cuerda AM , por ejemplo, los puntos X_1 y X_2 dividen a la cuerda en tres partes iguales, como se muestra en la construcción a derecha de la Gráfica 2-57, y los lugares geométricos que describen son circunferencias cuyos diámetros son la tercera parte y las dos terceras partes, respectivamente, del diámetro de la circunferencia original. Es fácil reconocer, que los lugares geométricos dependen de la ubicación del punto fijo A .

2.4.10. Ejemplo 5.

Desde el origen de coordenadas se trazan cuerdas a la circunferencia $(x - 4)^2 + y^2 = 4^2$. La Gráfica 2-58 representa el lugar geométrico de los puntos medios de tales cuerdas al mover el otro extremo por la circunferencia.

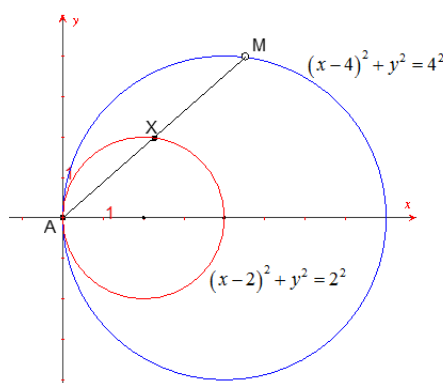


Figura - 81 Ejemplo circunferencia 5
Gráfica 56 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Siguiendo las indicaciones del problema 5, se encuentra que el lugar geométrico que corresponde con la circunferencia es $(x - 2)^2 + y^2 = 2^2$.

2.4.11. Problema 6.

Desde un punto fijo en el exterior de una circunferencia se trazan segmentos secantes a ella, cuyo otro extremo está en la circunferencia. Trazar el lugar geométrico de los puntos medios de tales secantes al mover el extremo que pertenece a la circunferencia.

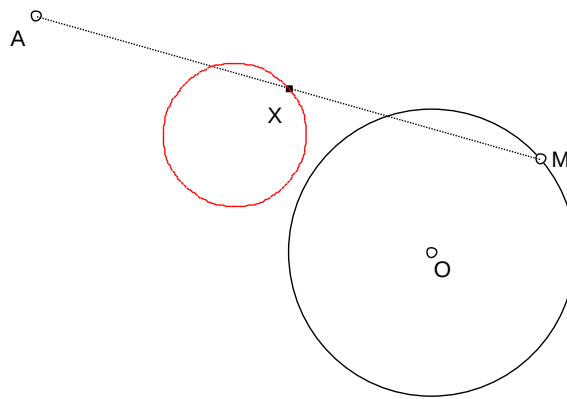


Figura - 82 Circunferencia 6

Gráfica 57 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Como en el Problema 5, dada la circunferencia de centro en O , se fija en ella un punto M y se ubica en el exterior de la misma un punto fijo A . Construido el segmento AM , se evidencia que el punto medio del segmento X determina una circunferencia cuya área es la cuarta parte de la original y, en consecuencia, su longitud es la mitad de la misma, situación independiente de la ubicación del punto exterior A . La situación no se altera cuando el punto fijo A se ubica dentro de la circunferencia. (Ver Figura 2-59).

2.4.12. Ejemplo 6.

Desde un punto fijo $A(6,6)$ en el exterior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 3^2$ se trazan segmentos secantes a ella, cuyo extremo está en el punto M de la circunferencia. La Gráfica 2-60 representa el lugar geométrico de los puntos medios de tales segmentos secantes al mover el extremo M que pertenece a la circunferencia.

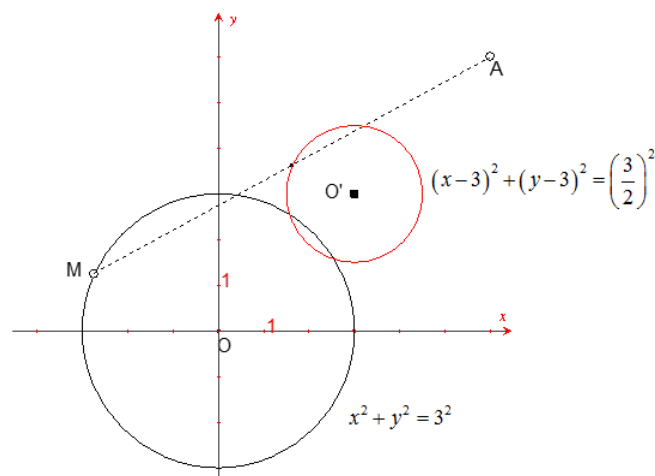


Figura - 83 Ejemplo circunferencia 6

Gráfica 58 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Al seguir los pasos del Problema 6, se encuentra que para este caso particular, el lugar geométrico corresponde con la circunferencia $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$. Al cambiar la ubicación del punto A se encuentra que se modifica el centro de la circunferencia del lugar pero no su radio.

2.4.13. Problema 7.

Dadas dos circunferencias concéntricas, cuyos radios están en razón 1: 2, se trazan segmentos secantes a la circunferencia mayor, en la cual un extremo A está fijo en el plano, y el otro extremo M se mueve por esa circunferencia. Trazar el lugar geométrico de los puntos medios de tales segmentos secantes al mover M .

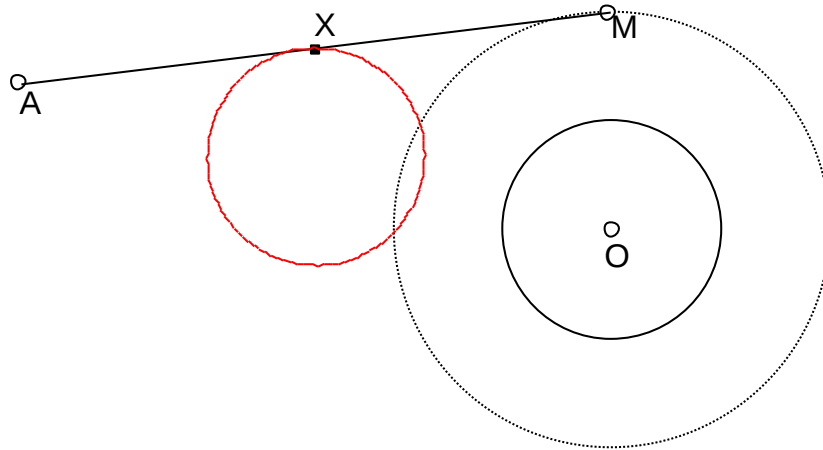


Figura - 84 Circunferencia 7

Gráfica 59 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dada la circunferencia centrada en O , se construye otra de radio el doble y concéntrica con ella, en la que se ubica un punto arbitrario M . Se ubica el segmento AM con extremo A en cualquier parte del plano. El punto medio X describe un lugar geométrico consistente en una circunferencia de igual radio que el de la original. (Ver Figura 2-61).

2.4.14. Ejemplo 7.

Dados, el punto fijo $A(-8,0)$ y las circunferencias $x^2 + y^2 = 2^2$ y $x^2 + y^2 = 4^2$ en el plano, se trazan segmentos secantes a la circunferencia de mayor radio que van desde A hasta el punto M que se mueve sobre la circunferencia mayor. La Gráfica 2-62 representa el lugar geométrico de los puntos medios de tales secantes.

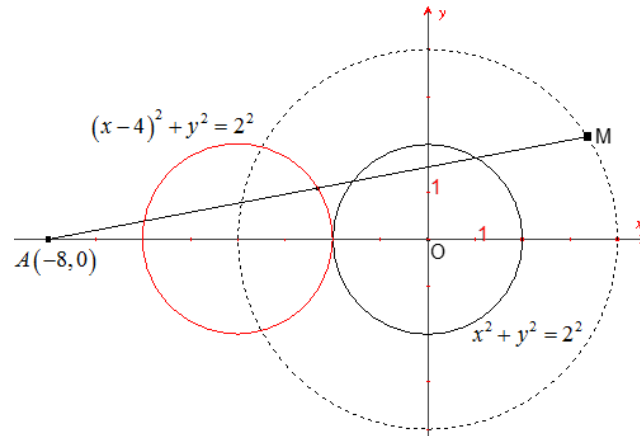


Figura - 85 Ejemplo circunferencia 7

Gráfica 60 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Al seguir los pasos señalados en el Problema 7, se encuentra la ecuación de la circunferencia $(x - 4)^2 + y^2 = 2^2$ como el lugar geométrico de los puntos medios de la secante AM . Este problema brinda el chance de indagar otras situaciones particulares como las de las ocurrencias del tipo de lugar que aparecen cuando el punto M pertenece a una circunferencia de radio el triple o el cuádruple del original, o es una fracción propia del mismo.

2.4.15. Problema 8.

Una rueda está dispuesta en la pared y en un punto de su arco se ha dispuesto un balancín vertical MB que mide k unidades y con extremo inferior B . Trazar el lugar geométrico que describe el extremo B cuando la rueda gira en la pared.

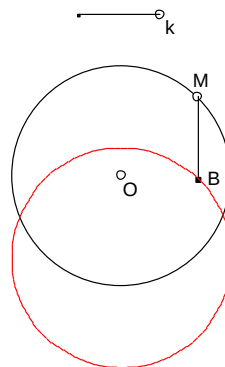


Figura - 86 Circunferencia 8

Gráfica 61 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Se realiza la construcción bajo la condición de que el balancín MB permanece en posición vertical y perpendicular al piso. La intuición asegura que el lugar geométrico corresponde con una circunferencia congruente con la primera, desplazada en sentido vertical k unidades. (Ver Figura 2-63).

2.4.16. Ejemplo 8.

En un punto móvil M de la circunferencia $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$ se dispone una varilla MB de longitud 1 que permanece vertical. La Gráfica 2-64 representa el lugar geométrico que describe el extremo B cuando el punto M se desplaza por la circunferencia.

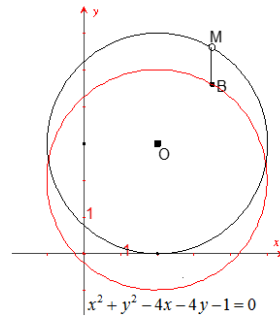


Figura - 87 Ejemplo circunferencia 8

Gráfica 62 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Al proceder con los pasos de la construcción cuidando el cumplimiento de los requisitos expuestos, se encuentra que el lugar geométrico es el de la circunferencia $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

2.4.17. Problema 9.

Un punto se mueve en el plano, de tal manera que la razón de sus distancias a dos puntos fijos del mismo plano es constante. Trazar el lugar geométrico que describe ese punto.

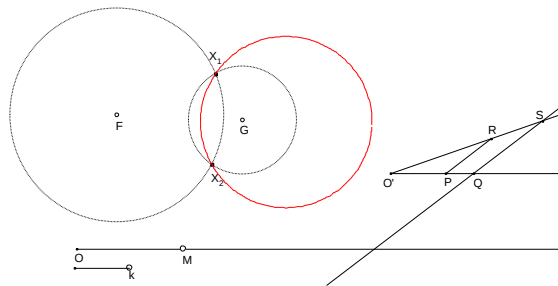


Figura - 88 Circunferencia 9

Gráfica 63 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

El lugar geométrico resultante se llama la circunferencia de Apolonio. Utilizando el teorema de Thales se elabora una construcción auxiliar en la que $O'R = OM$, $O'P = k$, el valor de la razón constante, y $PQ = 1$. De ese modo, sobre una semirrecta de origen O se ubica el punto móvil M , con centro en F se traza la circunferencia de radio OM y con centro en el otro punto G se traza otra

circunferencia de radio RS ; las dos circunferencias se intersectan en los puntos X_1 y X_2 cada uno de los cuales, al mover M por la semirrecta, describe media circunferencia. (Ver Figura 2-65).

2.4.18. Ejemplo 9.

Un punto se mueve en el plano, de tal manera que la razón de sus distancias a los puntos fijos $F(-3,0)$ y $G(3,0)$ del mismo plano es $\frac{3}{2}$. La Gráfica 2-66 representa el lugar geométrico que describe ese punto.

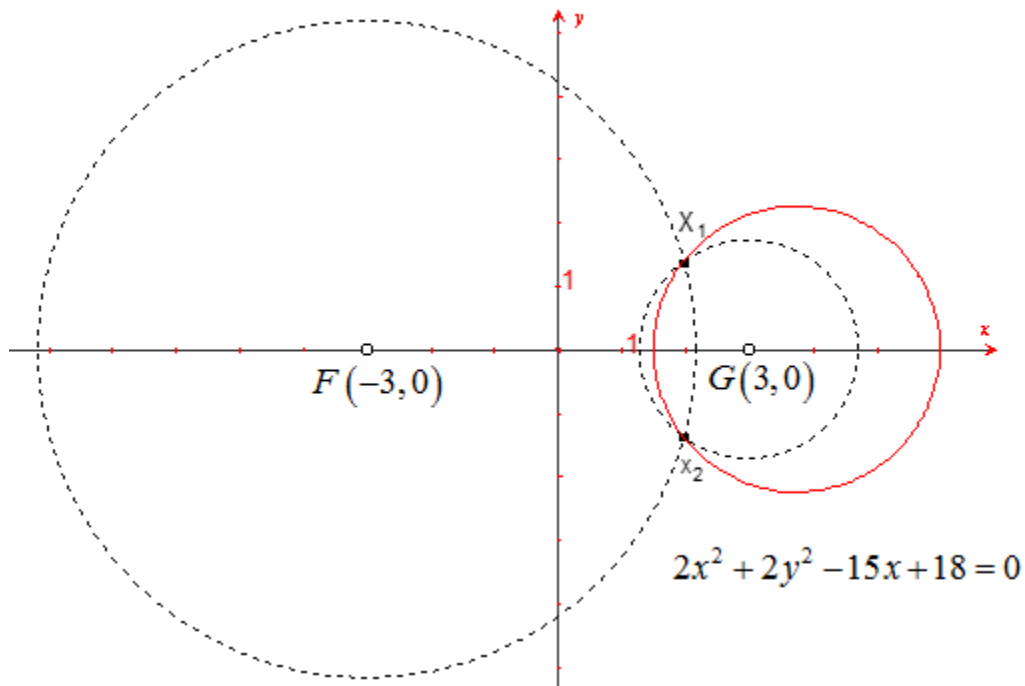


Figura - 89 Ejemplo circunferencia 9

Gráfica 64 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Al seguir los pasos expuestos en el Problema 9, relacionados con los puntos dados como requisitos, se llega a la ecuación de la circunferencia $\left(x - \frac{15}{4}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2$.

2.4.19. Problema 10.

Se indican dos sistemas de barras articuladas en la siguiente figura.

Sistema 1. $OA = OM = OX = a$

Sistema 2. $O'M = O'B = O'X = b$

A y B son puntos fijos y M se desliza a lo largo de AB . Trazar el lugar geométrico que describe X , al recorrer M por el segmento AB .

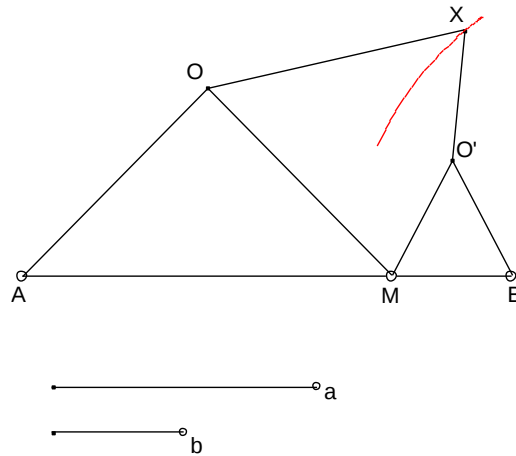


Figura - 90 Circunferencia 10

Gráfica 65 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

El punto X traza un pequeño arco de circunferencia. (Ver Figura 2-67).

2.4.20. Ejemplo 10.

La Gráfica 2-68 representa el lugar geométrico que describe el recorrido del punto M del problema anterior cuando $A(0,0)$, $B(7,0)$, $a = 4$ y $b = 3$.

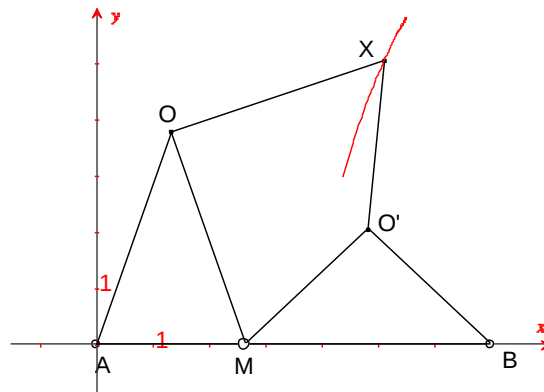


Figura - 91 Ejemplo de circunferencia 10

Gráfica 66 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Al disponer los elementos de acuerdo con los requisitos expuestos en el caso particular del Problema 10, se llega a que el lugar geométrico obtenido está contenido en la circunferencia $(x - 16)^2 + y^2 = 12^2$.

2.4.21. Problema 11.

Trazar el lugar geométrico de un punto móvil si las rectas que lo unen a dos puntos fijos del plano conforman un ángulo fijo α .

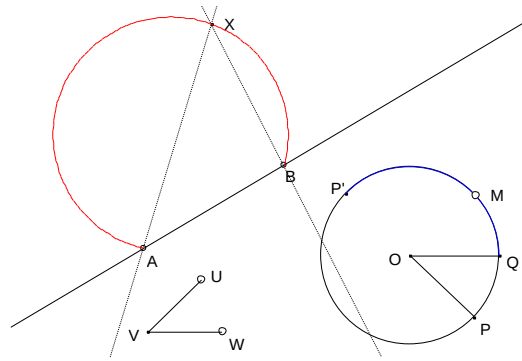


Figura - 92 Circunferencia 11

Gráfica 67 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dados los puntos A y B del plano, y el ángulo fijo $\angle UVW = \alpha$, sobre una circunferencia de radio arbitrario y de centro en O , se ubica el ángulo $\angle POQ$ de modo que $\angle POQ = \alpha$. Enseguida se ubica sobre la misma circunferencia un arco de extremos Q y P' , siendo este último punto el simétrico de P , respecto de O ; en ese arco se ubica el punto móvil M . Se traza la recta AB y se le aplica una rotación con centro en A y ángulo $\angle QOM$, a la misma recta y alrededor de B se le aplica una rotación en el ángulo $\angle P'OM$. Las dos rectas rotadas se cortan en el punto X . Al desplazar M por el arco al que pertenece, el punto X describe como lugar geométrico un arco de circunferencia. (Ver Figura 2-69).

2.4.22. Ejemplo 11.

Las Gráficas 2-70, 2-71 y 2-72 representan, respectivamente, los lugares geométricos que describe un punto móvil $M(x, y)$ si las rectas que lo unen a los puntos fijos $F_1(-3,0)$ y $F_2(3,0)$ forman un ángulo de 90° , 45° y 30° .

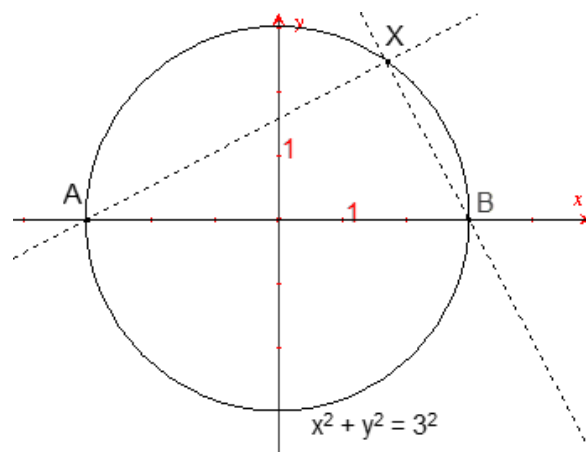


Figura - 93 Ejemplo de circunferencia 11

Gráfica 68 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Siguiendo las indicaciones dadas en el problema anterior, se llega a la ecuación del lugar geométrico de la circunferencia $x^2 + y^2 = 3^2$. En este caso y en general, si los puntos fijos son $F_1(-r, 0)$ y $F_2(r, 0)$ se llega a la ecuación general $x^2 + y^2 = r^2$, cuando el punto M forma un ángulo de visión de 90° con los puntos fijos.

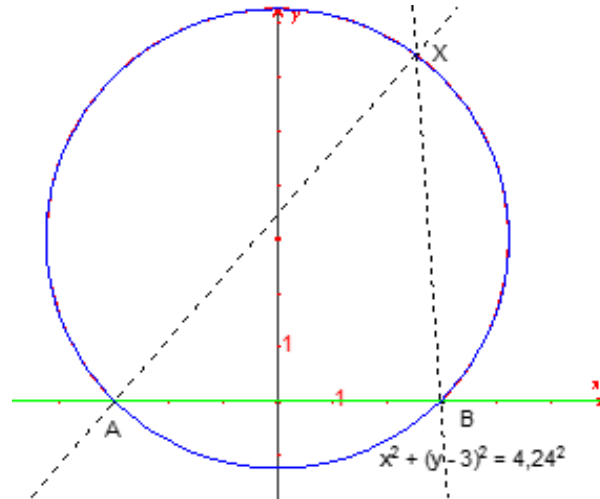


Figura - 94 Ejemplo de circunferencia 11a

Gráfica 68a (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Para el caso en que el ángulo de visión es de 45° se llega a la ecuación de la circunferencia $x^2 + (y - 3)^2 = 18$, como la ecuación del lugar geométrico que se configura en este caso.

En el caso general de que los puntos fijos sean $F_1(-r, 0)$ y $F_2(r, 0)$, el lugar geométrico que se encuentra es la circunferencia $x^2 + (y - r)^2 = 2r^2$.

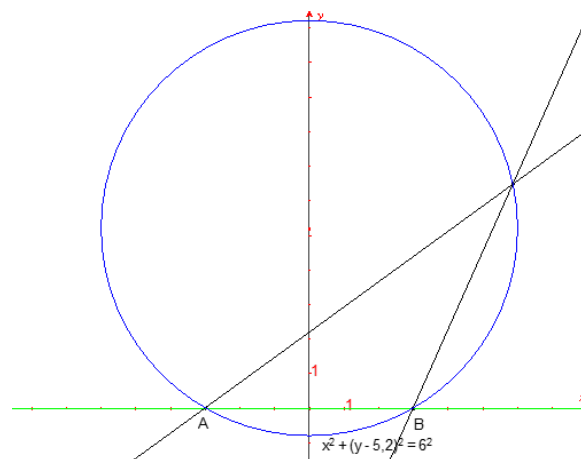


Figura - 95 Ejemplo de circunferencia 11b

Gráfica 68b (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Para el caso en que el ángulo de visión es de 30° , se llega a la ecuación aproximada $x^2 + (y - 5.2)^2 = 6^2$.

2.4.23. Problema 12.

Trazar el lugar geométrico de puntos del plano cuya distancia a un vértice de un triángulo equilátero es igual a la suma de las distancias a los otros dos vértices.

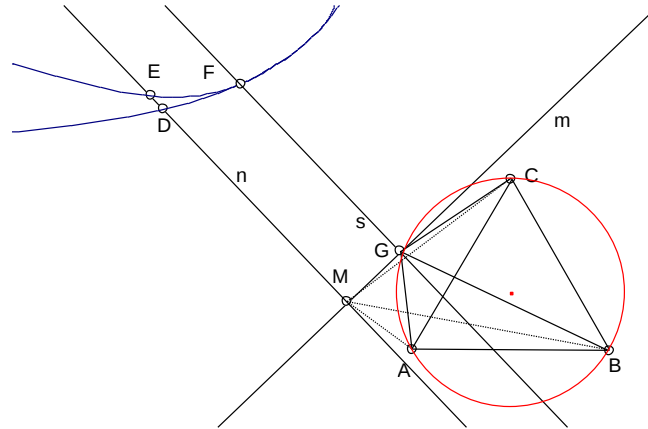


Figura - 96 Circunferencia 12

Gráfica 69 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Sea el $\triangle ABC$ equilátero, $M \in m$ un punto móvil sobre una recta suficientemente cercana al lado AC , se trazan los segmentos $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ y $\overline{MC}$ que indican las distancias a los lados. Por M se traza la recta n perpendicular a m y se toman los puntos D y E sobre n , tales que $MD = MB$ y $ME = MA + MC$. Sea F el punto de intersección de los lugares geométricos generados por D y E al moverse M por la recta m . Por F se traza la perpendicular s a la recta m y se obtiene el punto G como intersección de las rectas m y s .

Este punto G cumple con las condiciones del problema siempre y cuando $MB > MA$ y $MB > MC$.

Señalando traza al punto G e imprimiendo animación a la recta m se obtiene parcialmente el lugar geométrico deseado. Para obtener el lugar geométrico completo se realiza la misma construcción cerca de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$.

Este lugar geométrico es interesante, en el sentido en que de antemano se sabe que los vértices A , B y C pertenecen al lugar y que en total, el lugar es la circunferencia que pasa por los tres vértices y que tiene centro en el baricentro del triángulo equilátero dado. (Ver Figura 2-73).

2.4.24. Ejemplo 12.

La Gráfica 2-74 representa el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a uno de los vértices del triángulo equilátero de vértices $A(-3,0)$, $B(3,0)$ y $C(0,3\sqrt{3})$ y que corresponde con la circunferencia $x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 12$.

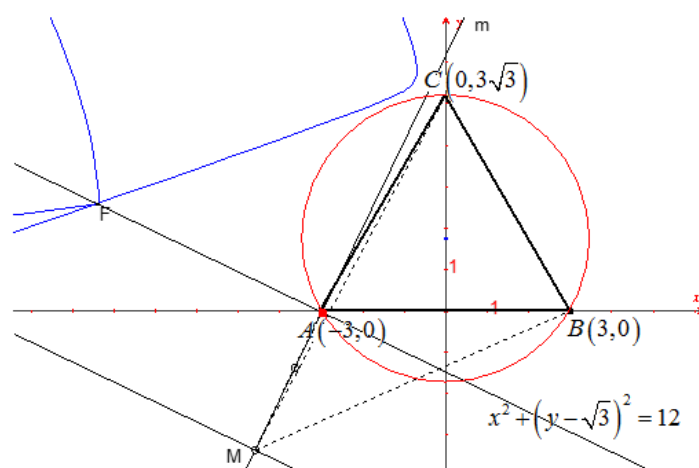


Figura - 97 Ejemplo de circunferencia 12

Gráfica 70 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

2.5 Lugares referidos a la parábola

A continuación, se presenta una serie de problemas que finalizan en lugares geométricos específicos, denominados parábolas. Se escogieron de diversos textos de geometría euclídea y analítica y esperan ser enriquecidos con el acervo personal del lector.

2.5.1. Problema 1.

Un punto se mueve de tal manera que la distancia a una recta es igual a su distancia a un punto fijo del plano.

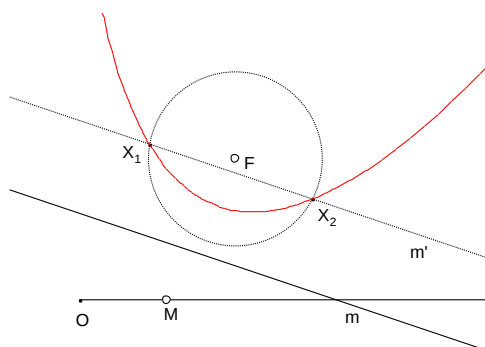


Figura - 98 Parábola 1

Gráfica 71a (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Sean la recta m y un punto F por fuera de ella. En una semirrecta de origen en O se ubica un punto móvil M , con radio OM se traza una circunferencia de centro en F y también se traza una paralela con m a la distancia OM que se rotula como m' del mismo lado de F . Los puntos X_1 y X_2 son los puntos de intersección de la recta m' y la circunferencia de centro en F . Cada uno de esos puntos describe

un arco de parábola como lugar geométrico cuando el punto M se desplaza por la semirrecta. (Ver Figura 2-75).

Una alternativa técnica consiste en adoptar a la mediatriz como instrumento de construcción, dado que la mediatriz entre dos puntos es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de tales puntos. En ese sentido es válido el siguiente esquema de solución al Problema 1.

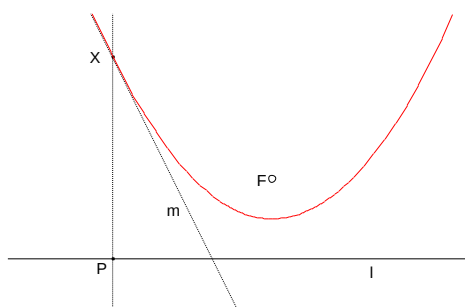


Figura - 99 Alternativa a parábola 1
Gráfica 71b (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dados la recta l y el punto F , se ubica de manera libre y arbitraria un punto P sobre el que se levanta una perpendicular a l . La mediatriz de los puntos F y P determina con la perpendicular a l el punto X , punto que describe como lugar geométrico la parábola al desplazar P por l . Se debe recordar que el punto F se llama foco de la parábola y la recta l es su directriz. (Ver Figura 2-76).

2.5.2. Ejemplo 1.

Un punto se mueve, de tal manera que la distancia a la recta $y = -\frac{3}{5}x + 3$ es igual a su distancia al punto fijo $F(5,2)$ del plano. La Gráfica 2-77 representa el lugar geométrico que describe tal punto.

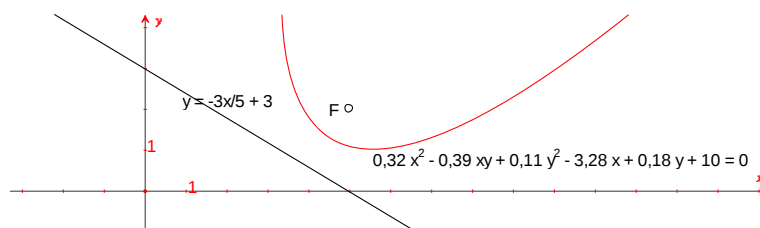


Figura - 100 Ejemplo parábola 1

Gráfica 72 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Al seguir las instrucciones propuestas en el Problema 1, se encuentra la parábola con coeficientes aproximados $0.32x^2 - 0.39xy + 0.11y^2 - 3.28x + 0.18y + 10 = 0$, ecuación que puede reducirse al establecer un nuevo sistema coordenado, a la ecuación de la parábola $43x^2 - 34y = 0$.

2.5.3. Problema 2.

Trazar el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia a una recta l es k unidades más que su distancia a un punto F .

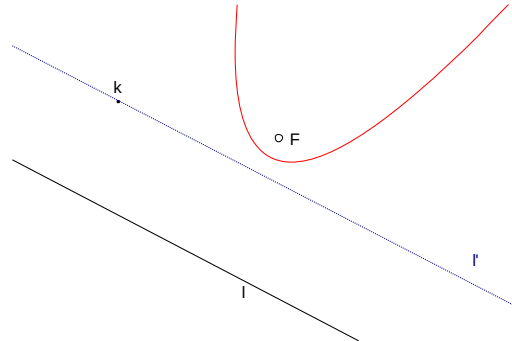


Figura - 101 Parábola 2

Gráfica 73 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dada la recta l , del lado del punto F se traza una recta l' , paralela a ella, a una distancia de k unidades. De ahí en adelante todo consiste en construir la parábola de directriz l' y de foco F , lugar geométrico que satisface los requisitos expuestos en el Problema 1. (Ver Figura 2-78).

2.5.4. Ejemplo 2.

La Gráfica 2-79 representa el lugar geométrico de un punto que se mueve, de tal manera que su distancia a la recta $x + 3 = 0$ es 2 unidades más que su distancia al punto $F(1,1)$.

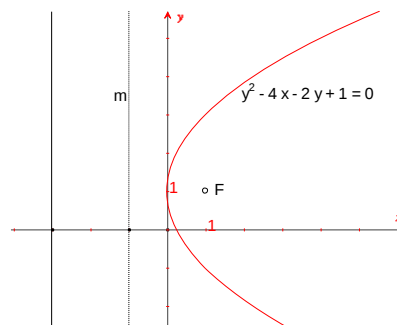


Figura - 102 Ejemplo parábola 2

Gráfica 74 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Se traza la recta $x + 1 = 0$ que dista dos unidades de la recta $x + 3 = 0$ y se adopta la primera como directriz de la parábola que tiene como foco al punto $A(1,1)$. Así queda determinado el lugar geométrico cuya ecuación es $y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.

2.5.5. Problema 3.

Trazar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que son tangentes a una recta y a una circunferencia.

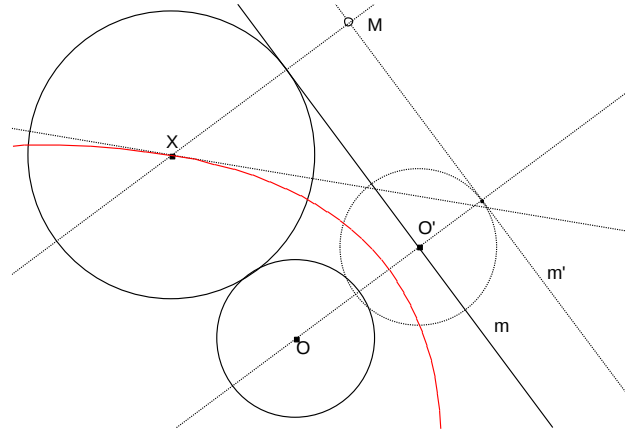


Figura - 103 Parábola 3

Gráfica 75 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dadas la circunferencia de centro en O y la recta m , se traza una recta m' paralela con m del otro lado del centro de dicha circunferencia, y a una distancia igual al radio de ella. El lugar geométrico buscado es la parábola que tiene como directriz a m' y como foco al centro O de la circunferencia inicial dada, es decir, cualquier punto de la parábola es centro de una circunferencia que es tangente a los dos objetos iniciales dados. (Ver Figura 2-80).

2.5.6. Ejemplo 3.

Trazar el lugar geométrico del centro de las circunferencias que son tangentes a la recta $y - 1 = 0$ y a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

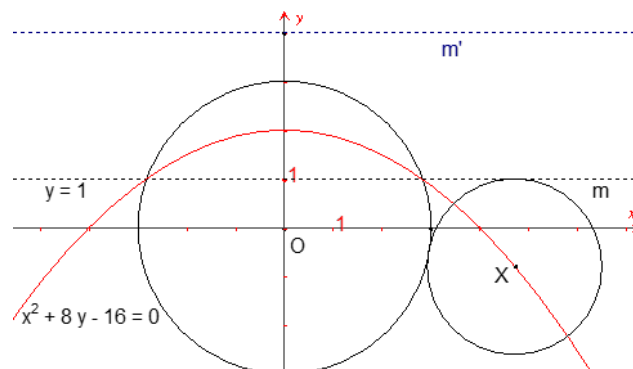


Figura - 104 Ejemplo parábola 3

Gráfica 76 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Como se explica en el Problema 3, dadas la circunferencia de centro en O y de radio 3 y la recta $y = 1$, se traza la paralela m' a una distancia de tres unidades de m . La parábola de directriz $y = 4$ y de foco el origen de coordenadas $O(0,0)$ es el lugar de los centros de las circunferencias tangentes, al mismo tiempo a la recta y a la circunferencia dadas en los requisitos del problema (Ver Figura 2-81).

2.5.7. Problema 4.

Dada una recta m y un punto P , trazar el lugar geométrico de todos los centros de las circunferencias que siendo tangentes a la recta, pasan por el punto P .

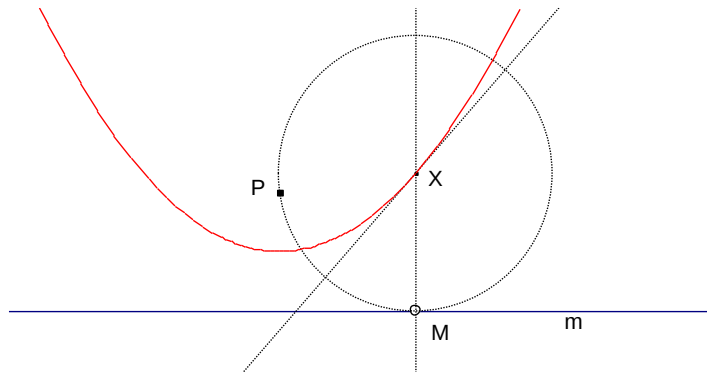


Figura - 105 Parábola 4

Gráfica 77 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

En caso de que el centro de cualquier circunferencia tangente a la recta m debe equidistar de P , lo único que debe hacerse es trazar la parábola cuya directriz es m y con foco el punto P . (Ver Figura 2-82).

2.5.8. Ejemplo 4.

Dada la recta $y = -4$ y el punto $P(3,2)$, la Gráfica 78 representa el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que siendo tangentes a la recta, pasan por el punto P .

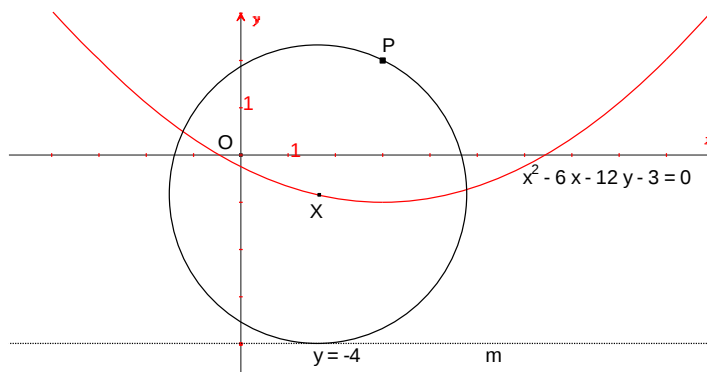


Figura -106 Ejemplo de parábola 4

Gráfica 78 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Al seguir las indicaciones dadas en el Problema 4, se encuentra que la ecuación del lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a la recta $y + 4 = 0$ y que pasan por el punto $P(3,2)$ corresponde con la parábola $y = \frac{x^2 - 6x - 3}{12}$. (Ver Figura 2-83).

2.5.9. Problema 5.

Un punto en un plano se mueve, de tal manera que su distancia a una circunferencia fija en el mismo plano es igual a su distancia a la recta que contiene un diámetro fijo de la misma circunferencia. Trazar el lugar geométrico de la trayectoria descrita por ese punto.

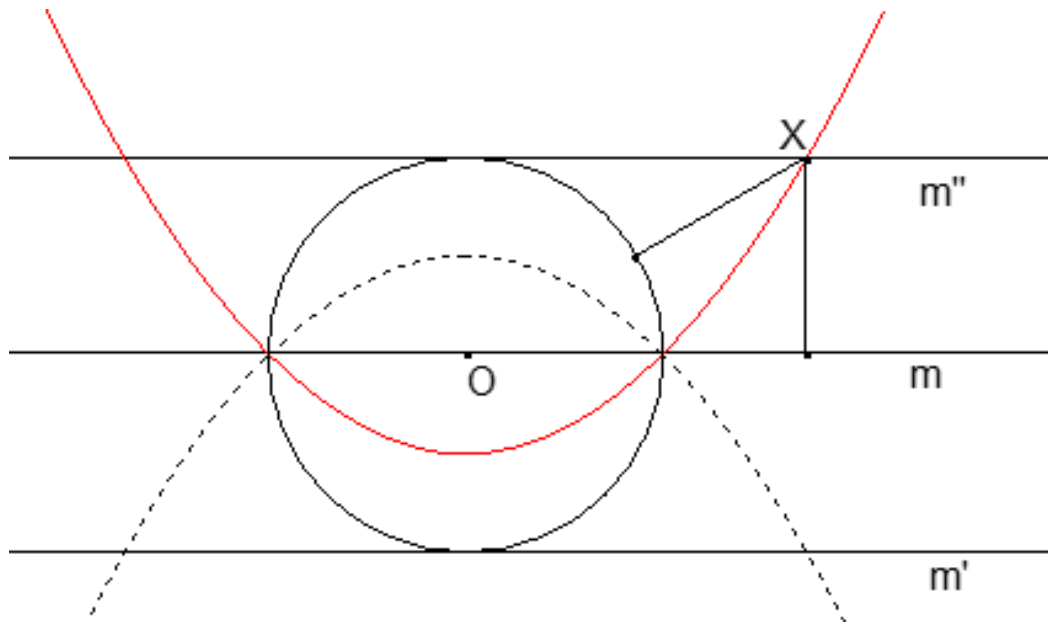


Figura - 107 Parábola 5

Gráfica 79 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dada la circunferencia de centro en O y el diámetro m , se construyen las paralelas m' y m'' a una distancia r igual al radio de la circunferencia centrada en O . Las parábolas de directrices m' y m'' y foco O que aparecen en la Gráfica 2-84, la una continua y la otra punteada, son los lugares de los puntos que equidistan de la circunferencia y de la recta diametral.

2.5.10. Ejemplo 5.

Un punto en un plano se mueve, de tal manera que su distancia a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ fija en el mismo plano es igual a su distancia al eje x . La Gráfica 2-85 representa el lugar geométrico de la trayectoria descrita por ese punto.

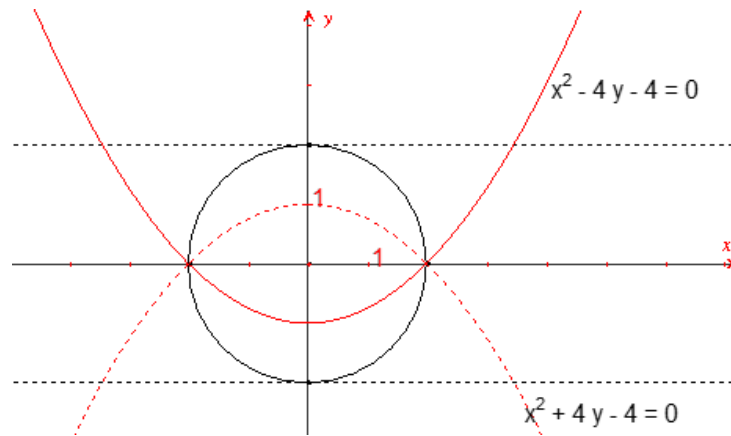


Figura - 108 Ejemplo de parábola 5

Gráfica 80 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Al seguir las pautas descritas en el Problema 5 se encuentran las dos ecuaciones de las parábolas $y = \frac{x^2-4}{4}$ y $y = \frac{4-x^2}{4}$, que son los lugares geométricos que satisfacen los requisitos expuestos en el caso particular.

2.5.11. Problema 6.

Trazar el lugar geométrico del punto medio del haz de cuerdas que pasan por el foco de una parábola.

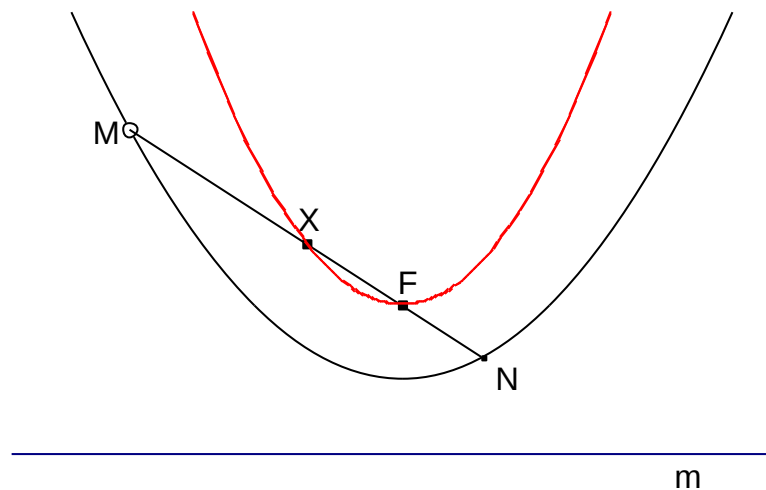


Figura - 109 Parábola 6

Gráfica 81 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dada la parábola de foco F y directriz m , se ubica en ella un punto móvil M y se construye la cuerda MN que contiene al foco F como uno de sus puntos. Siendo X el punto medio de esa cuerda, la traza que hace en el plano ese punto, al mover M por la parábola inicial, es una nueva parábola que tiene como vértice el foco de la parábola original.

Si X es un punto ubicado en la cuerda MN que no es el punto medio ni ninguno de los extremos de la cuerda, manteniendo una razón constante entre las distancias a sus extremos, determina como lugar geométrico dos curvas que pasan por el foco de la parábola original. (Ver Figura 2-86).

2.5.12. Ejemplo 6.

La Gráfica 2-87 representa el lugar geométrico del punto medio del haz de cuerdas que pasa por el foco de la parábola $y = \frac{x^2}{8}$.

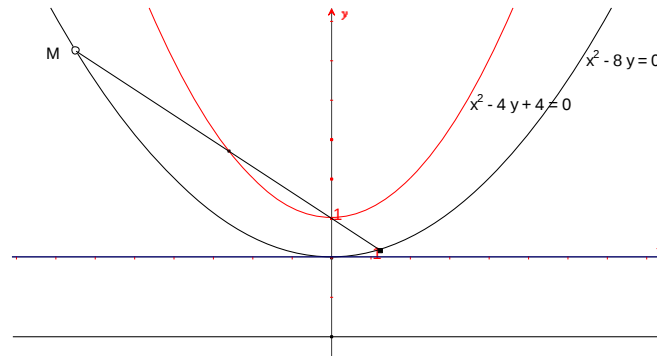


Figura - 110 Ejemplo parábola 6

Gráfica 82 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Se establece la directriz $y = -2$ y el foco $F(0,2)$ de la parábola $y = \frac{x^2}{8}$ y se construye el haz de cuerdas del que el punto X se convierte en el que determina como lugar geométrico, la parábola $y = \frac{x^2+4}{4}$ que tiene como directriz a la recta $y = 0$ y como foco al punto $F'(0,2)$.

2.6 Lugares referidos a la elipse

Se estudian problemas referidos a la elipse, en consecuencia, se invita al estudio teórico de esa cónica, a su revisión histórica, a la forma de encontrar sus objetos particulares, como su centro, sus ejes, su lado recto, la forma de calcular sus tangentes, entre otros; detalles que se escapan de los objetivos que persigue este texto.

2.6.1. Problema 1.

Un punto se mueve en un plano, de tal manera que la suma de las distancias a dos puntos fijos de ese plano es igual a una constante mayor que la distancia entre los puntos dados. Trazar el lugar geométrico que describen tales puntos.

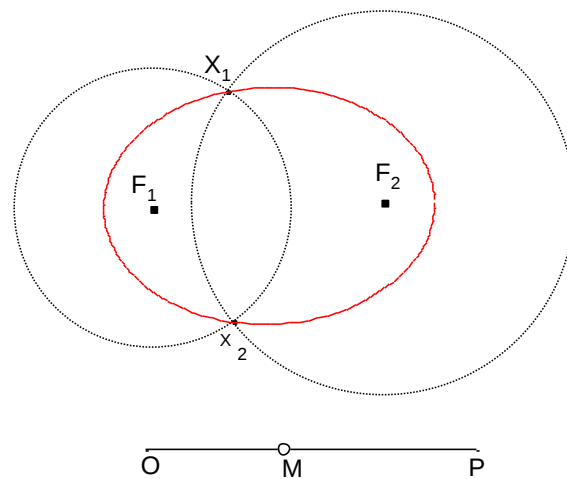


Figura - 111 Elipse 1

Gráfica 83 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Sobre un segmento $OP = k$, valor constante, se ubica un punto M y con centro en el punto F_1 y radio OM se traza una circunferencia, de forma similar, con centro en el punto F_2 y radio MP se traza otra circunferencia que determina con la primera los puntos de intersección X_1 y X_2 , cada uno de los cuales reproduce como lugar geométrico, un arco de elipse cuando se desplaza el punto M por el segmento OP . (Ver Figura 2-88).

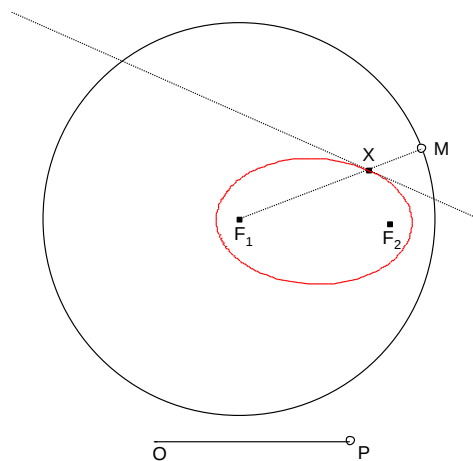


Figura - 112 Alternativa elipse 1

Gráfica 83 a (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Una alternativa de solución es la siguiente. Con centro en F_1 y radio OP se traza una circunferencia sobre la que se ubica un punto móvil M . El segmento F_1M y la mediatriz entre F_2 y M determinan como punto de intersección a X . Siendo $XM = XF_2$, es claro que $XF_1 + XF_2 = OP$, que es el valor constante. (Ver Figura 2-89).

2.6.2 Ejemplo 1.

Un punto se mueve en un plano, de tal manera que la suma de las distancias a los puntos $F_1(-4,0)$ y $F_2(0,0)$ es igual a 6 unidades. La Gráfica 84 representa el lugar geométrico que describe tal punto y que corresponde con la elipse cuya ecuación es $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. (Ver Figura 2-90).

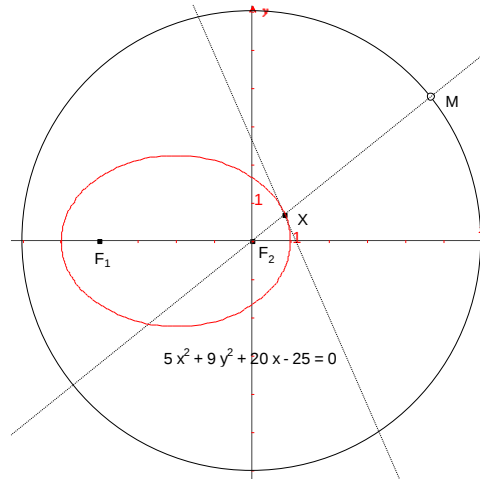


Figura - 113 Ejemplo elipse 1

Gráfica 84 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

2.6.3. Problema 2.

Trazar el lugar geométrico descrito por un punto que se mueve, de tal manera que su distancia de una recta es igual al doble de su distancia de un punto.

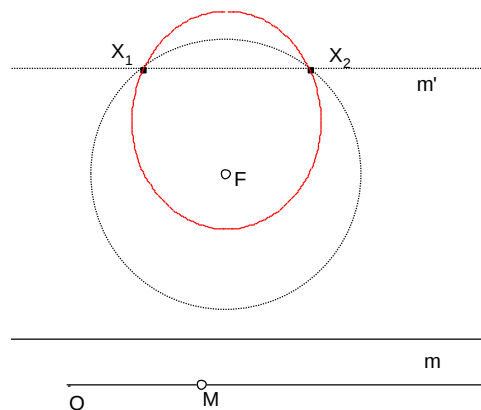


Figura - 114 Elipse 2

Gráfica 85 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dadas la recta m y el punto F sobre la semirrecta de origen en O se ubica un punto arbitrario M y se traza una paralela m' con m a una distancia $2OM$, al mismo

tiempo se traza una circunferencia de centro en F y radio OM . La recta m' y esta circunferencia determinan los puntos X_1 y X_2 que satisfacen los requisitos del problema y que establecen al desplazarse M por la semirrecta arcos de elipse. (Ver Figura 2-91).

2.6.4. Ejemplo 2.

La Gráfica 2-92 representa el lugar geométrico de los puntos que se mueven, de tal manera que su distancia a la recta $y = -8$ es igual al doble de su distancia al punto $F(0, -2)$.

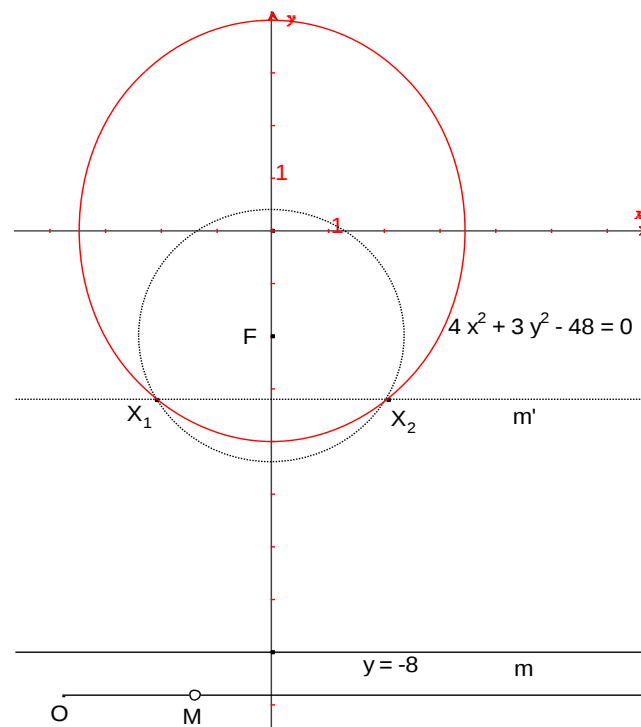


Figura - 115 Ejemplo elipse 2

Gráfica 86 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Al seguir las indicaciones propuestas en el problema 2, se encuentra que el lugar descrito por los puntos que satisfacen los requisitos, determina la elipse cuya ecuación es $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$.

2.6.5. Problema 3.

Desde cada punto de una circunferencia se trazan perpendiculares a un diámetro fijo de la misma. Trazar el lugar geométrico de los puntos medios determinados entre el punto sobre la circunferencia y el pie de las perpendiculares.

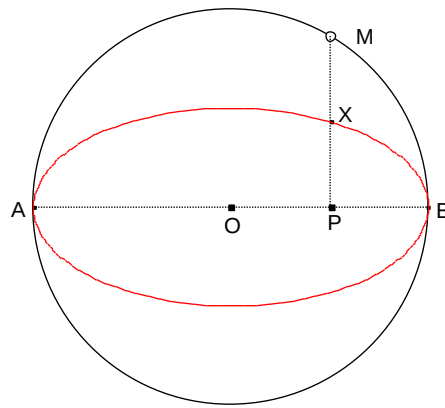


Figura - 116 Elipse 3

Gráfica 87 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dada una circunferencia de diámetro AB se ubica un punto móvil M en ella, y desde allí se ubica un segmento perpendicular al diámetro MP . Se calcula el punto medio X de MP , punto que describe como lugar geométrico una elipse, cuando M se desplaza por el arco de la circunferencia. (Ver Figura 2-93).

2.6.6. Ejemplo 3.

Desde cada punto de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$ se trazan perpendiculares al diámetro paralelo al eje x . La Gráfica 2-94 representa el lugar geométrico de los puntos medios de estas perpendiculares.

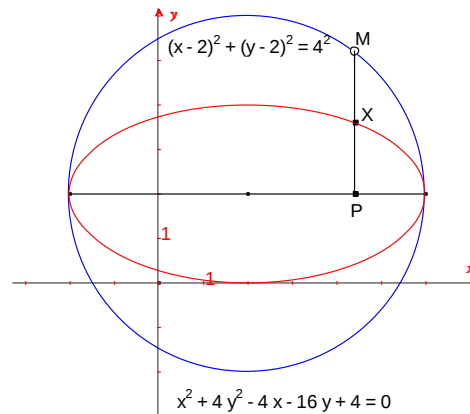


Figura - 117 Ejemplo elipse 3

Gráfica 88 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Al tener la circunferencia $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$, los puntos medios X del segmento perpendicular MP al diámetro de la circunferencia, determinan como lugar geométrico la elipse cuya ecuación es $\frac{(x-2)^2}{4^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1$.

Una alternativa de solución al problema consiste en que dadas las circunferencias de centros en los puntos O y O' , se construye una circunferencia concéntrica a la primera a una distancia r' igual al radio de la segunda. Esa circunferencia tiene, entonces, radio $r + r'$, suma de los radios de las dos circunferencias originales. En ella se ubica un punto móvil M . El segmento OM y la mediatriz entre M y O' se cortan en el punto X que determina el lugar de los centros de las circunferencias que tangencian a las dos circunferencias dadas cuando M se desplaza por la circunferencia. (Ver Figura 2-96).

2.6.8. Ejemplo 4.

La Gráfica 2-97 representa el lugar geométrico de los centros de circunferencias que se mantiene tangentes a las circunferencias $x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$ y $x^2 + y^2 = 1$.

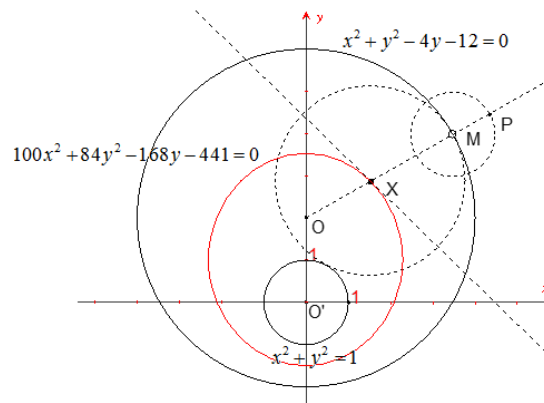


Figura - 120 Ejemplo elipse 4

Gráfica 90 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Al seguir los pasos del primer método del Problema 4, se encuentra como lugar geométrico la elipse $100x^2 + 84y^2 - 168y - 441 = 0$.

La Gráfica 2-98a representa el lugar geométrico del centro de una circunferencia que se mantiene tangente a las circunferencias $(x - 3)^2 + y^2 = 3^2$ y $x^2 + y^2 = 1$. Para trazar el lugar geométrico se utiliza la segunda alternativa de solución.

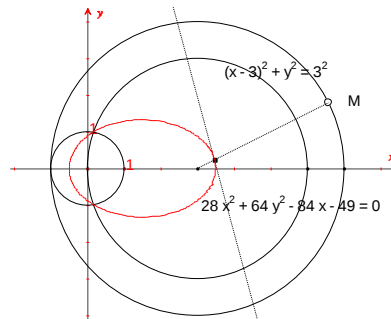


Figura -121 Ejemplo alternativa elipse 4

Gráfica 90 a (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Al seguir es esquema de solución alterna propuesta en el Problema 4, se encuentra como lugar geométrico la elipse $28x^2 + 64y^2 - 84x - 49 = 0$.

2.6.9. Problema 5.

Trazar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que son tangentes a una circunferencia fija y que pasan por un punto dado en el interior de la misma.

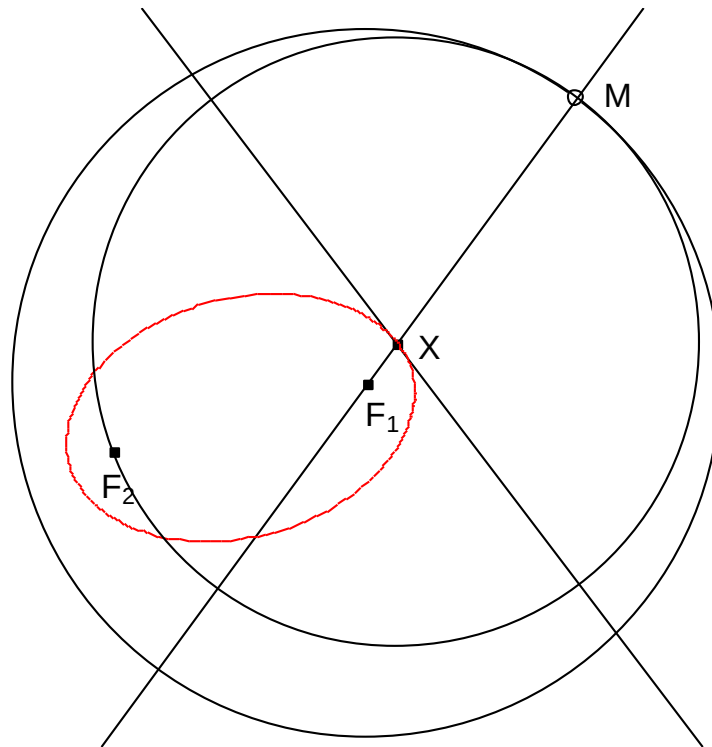


Figura -122 Parábola 5

Gráfica 91 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dada la circunferencia de radio arbitrario r con centro en el punto F_1 y el punto F_2 dentro de ella, se ubica un punto móvil M en la circunferencia y se trazan la recta diametral MF_1 y la mediatriz entre los puntos M y F_2 que se intersecan en el punto X . Ese punto X describe el lugar geométrico correspondiente a una elipse, cuando M recorre la circunferencia y que tiene como focos los puntos F_1 y F_2 . (Ver Figura 2-99).

2.6.10. Ejemplo 5.

La Gráfica 2-100 representa el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que son tangentes a $x^2 + y^2 = 6^2$ y que pasan por el punto $F_2(-3,0)$.

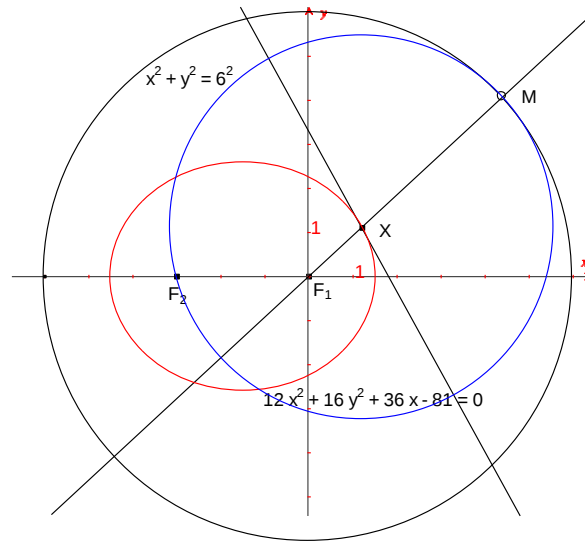


Figura - 123 Ejemplo parábola 5

Grafica 92 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

2.7 Lugares referidos a la hipérbola

Se ha intentado no hacer omisión de problemas tipo, sin embargo, se reconoce que el texto no goza del carácter de completitud, pues en ese sentido harían falta varios volúmenes, para contener todos los casos, en los que, de forma definitiva, los lugares geométricos finales resultan ser un objeto en particular, en este caso, una hipérbola.

2.7.1. Problema 1.

Un punto se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es igual a una constante menor que la distancia entre los puntos dados. Trazar el lugar geométrico que describen tales puntos.

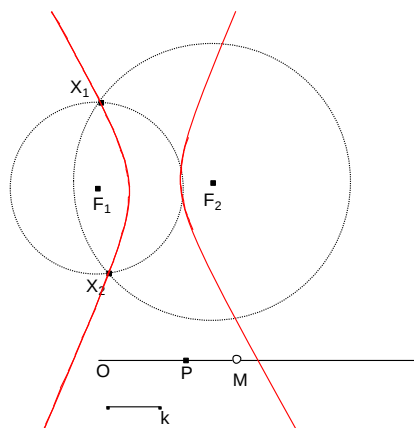


Figura - 124 Hipérbola 1

Gráfica 93 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Siendo F_1, F_2 y la constante k con los requisitos expuestos, sobre una semirrecta de origen en el punto O se ubica un punto móvil M y a su izquierda otro punto P a una distancia de k unidades respecto de M . Con centro en F_1 y radio OP se traza una circunferencia y se hace lo propio con centro en F_2 y radio OM ; esas dos circunferencias se intersecan en los puntos X_1 y X_2 que esbozan como lugar geométrico arcos de hipérbola. (Ver Figura 2-101).

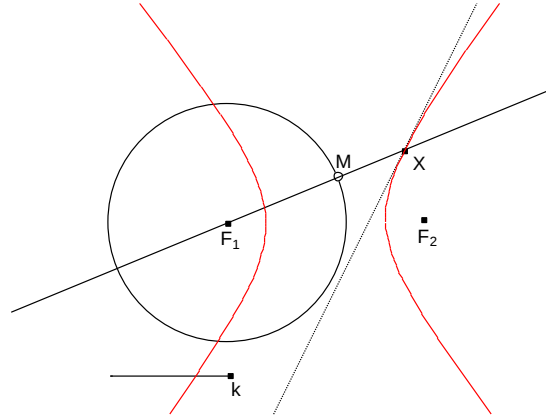


Figura - 125 Alternativa hipérbola 1

Gráfica 93 a (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Una alternativa de solución es la siguiente: con centro en F_1 y radio k se traza una circunferencia en la que se escoge un punto arbitrario M , se traza la recta F_1M y la mediatriz entre M y F_2 ; la recta y la mediatriz se cortan en el punto X que al desplazar M por la circunferencia describe como lugar geométrico una hipérbola con focos en F_1 y F_2 . (Ver Figura 2-102).

2.7.2. Ejemplo 1.

Un punto se mueve en un plano, de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a los puntos $F_1(-4,0)$ y $F_2(4,0)$ es igual a 4 .

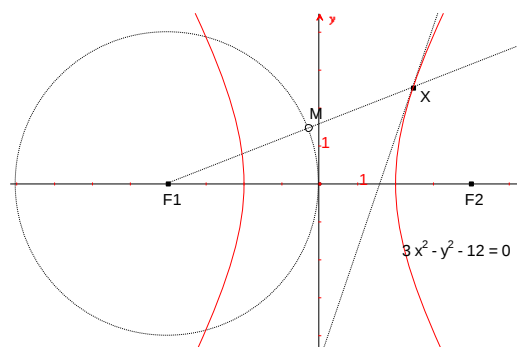


Figura - 126 Ejemplo hipérbola 1

Gráfica 94 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

La Gráfica 2-103 representa mediante la segunda alternativa de solución al Problema 1 y termina considerando que el lugar geométrico es la hipérbola $3x^2 - y^2 - 12 = 0$.

2.7.3. Problema 2.

Un punto del plano se mueve, de tal manera que su distancia a un punto es el doble que su distancia a una recta ubicados en el mismo plano. Trazar el lugar geométrico que recorre tal punto.

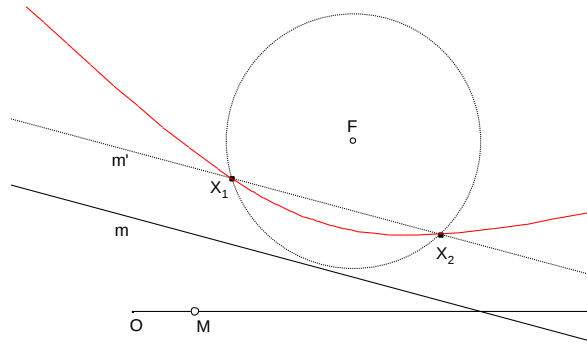


Figura - 127 Hipérbola 2

Gráfica 95 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dadas la recta m y el punto F , se ubica en una semirrecta de origen O un punto arbitrario M . Se construye una paralela m' a m del lado del semiplano donde se encuentra F a una distancia OM , al tiempo se traza la circunferencia de centro en F y radio $2OM$, elementos que definen en su intersección los puntos X_1 y X_2 que originan como lugar geométrico una parte de la rama de una hipérbola cuando M se desplaza por la semirrecta. (Ver Figura 2-104).

2.7.4. Ejemplo 2.

Un punto del plano se mueve, de tal manera que su distancia al punto $F(7,0)$ es el doble que su distancia a la recta $x - 3 = 0$. La Gráfica 96 representa el lugar geométrico descrito por tal punto.

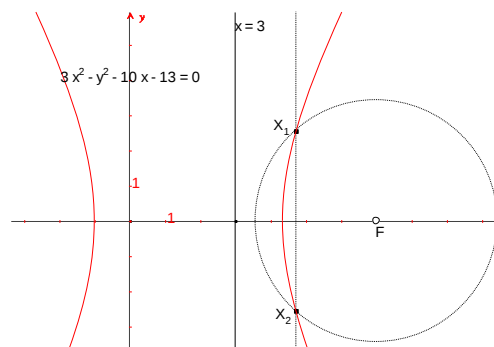


Figura -128 Ejemplo hipérbola 2

Gráfica 96 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Es suficiente seguir los pasos indicados en el Problema 5 hasta llegar a la ecuación de la hipérbola $3x^2 - y^2 - 10x - 13 = 0$. (Ver Figura 2-105).

La Gráfica 2-106 representa el lugar geométrico de los puntos del plano, tales que su distancia al punto $F(2, -1)$ es el doble de su distancia a la recta $x + 2 = 0$.

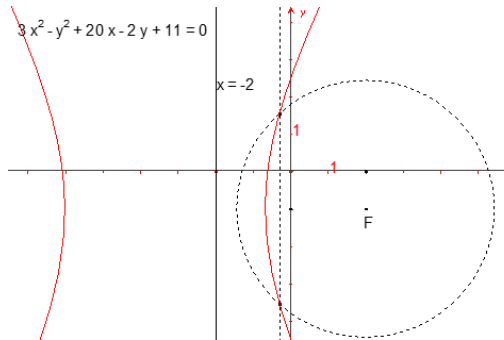


Figura - 129 Otro ejemplo hipérbola 2

Gráfica 96 a (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Al seguir los pasos estipulados en el Problema 2, se obtiene el lugar geométrico que se corresponde con la ecuación de la hipérbola $3x^2 - y^2 + 20x - 2y + 11 = 0$.

2.7.5. Problema 3.

Trazar el lugar geométrico de los puntos del plano, tales que su distancia a un punto fijo es k veces su distancia a una recta fija dada.

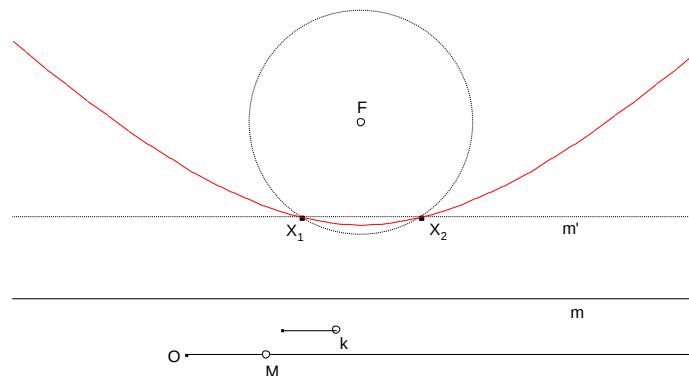


Figura - 130 Hipérbola 3

Gráfica 97 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dados la recta m y el punto F fuera de la recta, se traza una semirrecta con origen en un punto O en la que se ubica un punto móvil M y se traza una paralela m' con m a una distancia OM de la misma, en el mismo semiplano en el que está F y con centro en este punto y radio kOM (construido por el teorema de Thales habiendo fijado el segmento k), se traza una circunferencia que se corta con la

paralela m' en los puntos X_1 y X_2 , los cuales, al moverse M forman como lugar geométrico una parte de la rama de la hipérbola. (Ver Figura 2-107).

2.7.6. Ejemplo 3.

La Gráfica 2-108 representa el lugar geométrico de los puntos del plano, tales que su distancia al punto $F(3,2)$ es el triplo de su distancia a la recta $y + 1 = 0$.

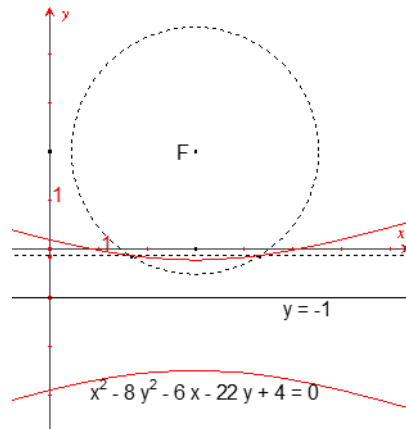


Figura - 131 Ejemplo hipérbola 3

Gráfica 98 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Al establecer los elementos fijos en el plano cartesiano y seguir las indicaciones que resuelven el problema anterior se encuentra la ecuación de la hipérbola $x^2 - 8y^2 - 6x - 22y + 4 = 0$.

2.7.7. Problema 4.

Un triángulo tiene dos vértices fijos que determinan su base. Trazar el lugar geométrico que recorre el tercer vértice si uno de los ángulos a la base es igual al doble del otro.

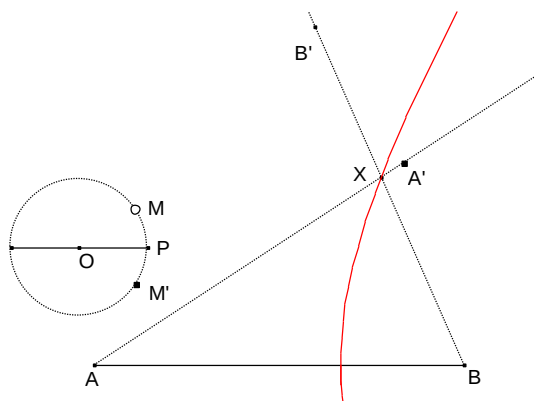


Figura - 132 Hipérbola 4

Gráfica 99 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Siendo los puntos fijos A y B , extremos de la base de un triángulo, se establece una circunferencia auxiliar de centro O y cualquier radio r sobre la que se ubica un punto móvil M . El rayo AA' se consigue al rotar el segmento AB con un giro de centro en A y un ángulo $\angle MOP$, el rayo BB' se consigue con un giro del segmento AB con centro en B y en un ángulo $\angle MOM'$, que es dos veces el ángulo $\angle MOP$. Esos dos rayos se encuentran en el punto X que al desplazar M por la circunferencia describe una rama de hipérbola. (Ver Figura 2-109).

2.7.8. Ejemplo 4.

Un triángulo tiene vértices fijos en $A(0,0)$ y $B(4,0)$. La Gráfica 2-110 representa el lugar geométrico del tercer vértice opuesto a la base formada por A y B si uno de los ángulos a la base es igual al doble del otro.

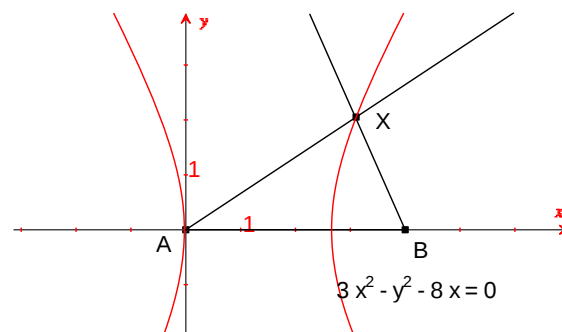


Figura - 133 Ejemplo hipérbola 4

Gráfica 100 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Al establecer los elementos que son requisito del problema se llega a la ecuación de la hipérbola $3x^2 - y^2 - 8x = 0$.

2.7.9. Problema 5.

Trazar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que son tangentes simultáneas a dos circunferencias exteriores entre sí.

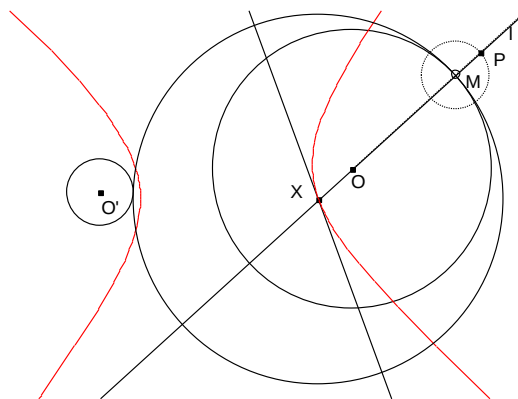


Figura - 134 Hipérbola 5

Gráfica 101 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Sean la circunferencia de centro en O' de radio r' en el exterior de la circunferencia de radio r y de centro en O , en la que se ubica el punto móvil M , se traza la recta $OM = l$ y con centro en M y radio r' se ubica otra circunferencia, que determina con la recta l y en el exterior de la circunferencia con centro en O , el punto de intersección P . La mediatriz m entre los puntos P y O' determina con l el punto X que, a su vez, en su traza corresponde con el lugar geométrico descrito por los centros de las circunferencias tangentes, de manera interna a una de las circunferencias y de manera externa a la otra. Puede determinarse que el lugar geométrico es una hipérbola con focos en los centros de las dos circunferencias originales. (Ver Figura 2-111).

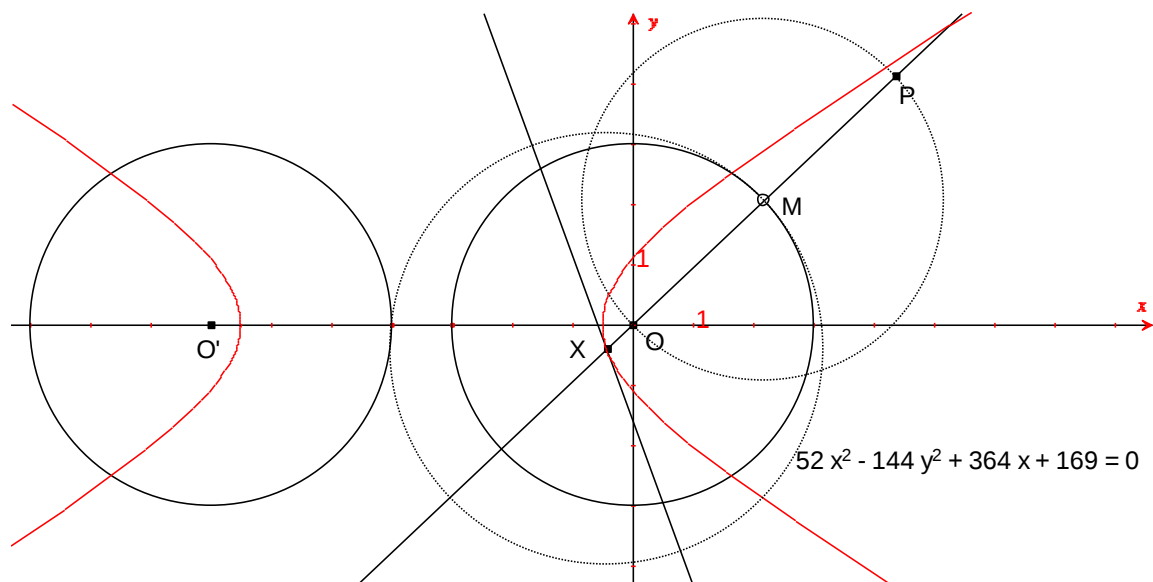


Figura - 135 Ejemplo hipérbola 5

Grafica 102 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

La Gráfica 2-112 representa el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que son tangentes a las circunferencias $(x + 7)^2 + y^2 = 3^2$ y $x^2 + y^2 = 3^2$ y que se corresponde con la hipérbola $52x^2 - 144y^2 + 364x + 169 = 0$.

2.7.10. Problema 6.

Trazar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que son tangentes a una circunferencia fija y que pasan por un punto dado en el exterior de la misma.

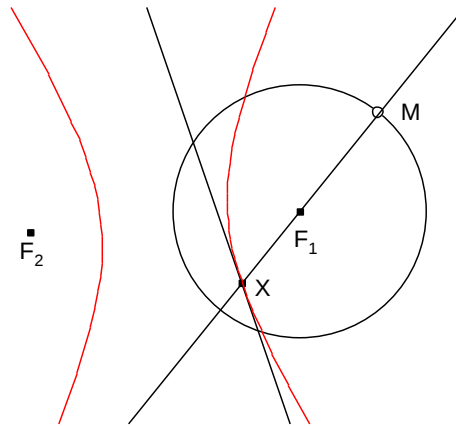


Figura - 136 Hipérbola 6

Gráfica 103 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dada la circunferencia de radio arbitrario r con centro en el punto F_1 , y el punto F_2 en el exterior de ella, se ubica un punto móvil M en la circunferencia y se trazan la recta diametral MF_1 y la mediatriz entre los puntos M y F_2 que se intersectan en el punto X . El punto X describe el lugar geométrico correspondiente a una hipérbola, cuando M recorre la circunferencia y que tiene como focos los puntos F_1 y F_2 . (Ver Figura 2-113).

2.7.11. Ejemplo 6.

La Gráfica 2-114 representa el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a $x^2 + y^2 = 2^2$ y que pasan por el punto $F_2(-6,0)$.

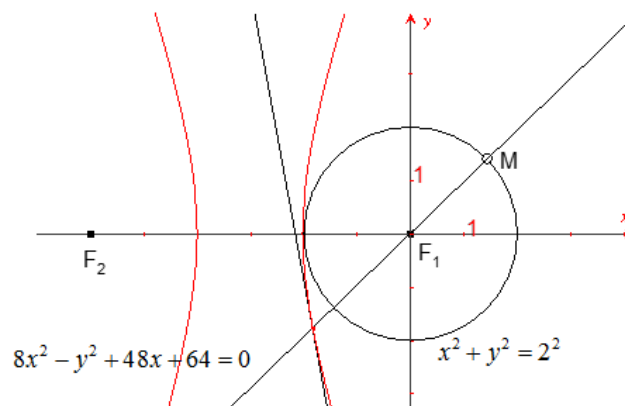


Figura - 137 Ejemplo hipérbola 6

Gráfica 104 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

El lugar geométrico es la hipérbola $8x^2 - y^2 + 48x + 64 = 0$ que tiene como focos a los puntos F_1 y F_2 .



Capítulo 3

3.1 Lugares referidos a las tangentes - curvas pedal o podarias

En este anexo se dimensiona la importancia del uso de un software de asistencia geométrica dinámico, puesto que se evidencia en su uso que el cambio del punto de mira produce un cambio inmediato en la curva podaría. Así, con una misma construcción se obtiene una infinitud de lugares geométricos. Ese hecho anima a la curiosidad, a la inspección, a la acción y de hecho, al asombro.

Una curva pedal o podaría dada una curva C , con respecto a un punto de mira V , fijo, llamado también punto de pedal, es el lugar geométrico del punto X , intersección de la perpendicular trazadas desde V a una tangente de la curva C cuando esa tangente cambia su posición al recorrer C .

Desde esa perspectiva, se hace necesario revisar la forma de construcción de las rectas tangentes a una curva en un punto; esta temática es de fácil asimilación y en la misma juegan papel importante los focos y centros de las curvas. Por ejemplo, para el caso de la circunferencia, toda tangente a la curva en un punto de ella es perpendicular al radio que tiene como extremo a tal punto.

La construcción de las rectas tangentes a la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola se presentan en el Anexo 2.

3.1.1. Para la Circunferencia

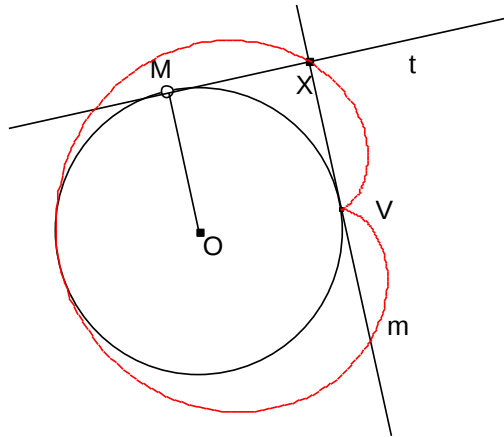


Figura 3-6 Podaria circunferencia

Gráfica 105 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

En la Gráfica 3-1 se ha dispuesto la circunferencia de centro en O y el punto de mira V en la circunferencia. Al ubicar el punto móvil M en la circunferencia, se tiene que la recta tangente t a la misma por M es perpendicular al radio OM . Se traza la perpendicular m a t que se intersectan en el punto X , punto que traza el lugar geométrico denominado caracol de Pascal también llamado cardioide, caso en el cual M se desplaza por la circunferencia.

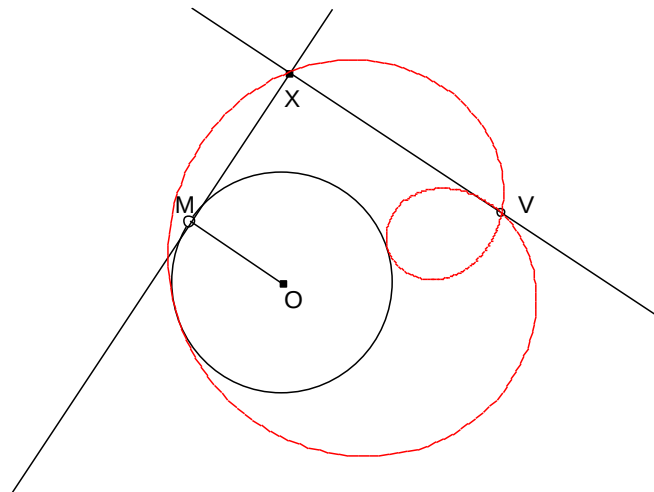


Figura 3-7 Podaria circunferencia punto exterior

Gráfica 106 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Cuando el punto de mira V está por fuera de la circunferencia, el lugar geométrico descrito es el caracol de Pascal con hendidura, como se ve en la Gráfica 3-2. Si el punto de mira coincide con el centro de la circunferencia, el lugar geométrico se transforma en la misma circunferencia.

3.1.2. Para la Parábola

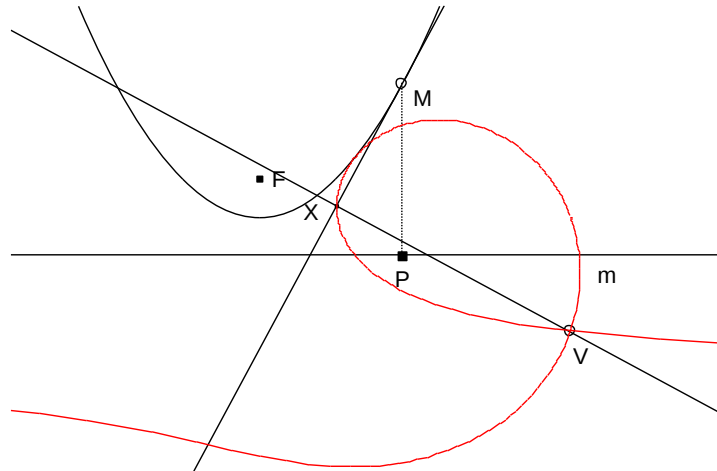


Figura 3-8 Para la parábola

Gráfica 107 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

La parábola que exhibe la Gráfica 3-3 tiene directriz m y foco F . P es el pie de perpendicular trazada desde el punto móvil M ubicado en la parábola. La recta tangente t es la bisectriz del ángulo $\angle FMP$. Desde el punto de mira V se lanza la perpendicular a t para ubicar el punto X , el cual traza como lugar geométrico el lazo que muestra la gráfica.

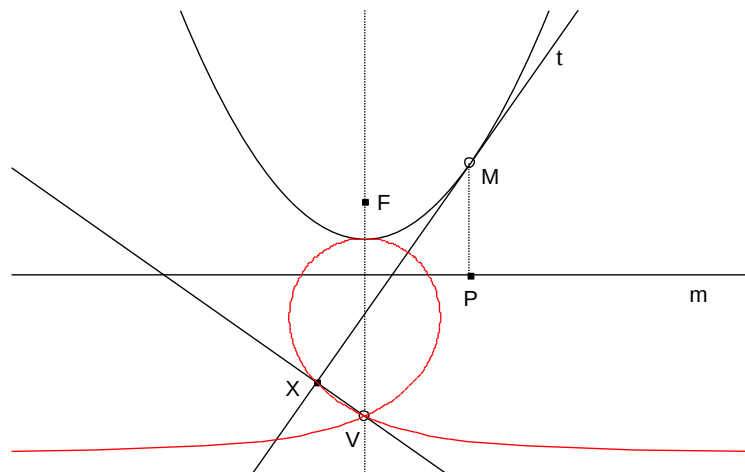


Figura 3-9 Podaria parábola

Gráfica 108 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Cuando el punto de mira V pertenece al eje de la parábola, como en la Gráfica 3-4, el lazo es regular y si coincide con el foco de la parábola F , el lazo se deforma en la tangente a la parábola por el vértice de la misma.

3.1.3. Para la Elipse

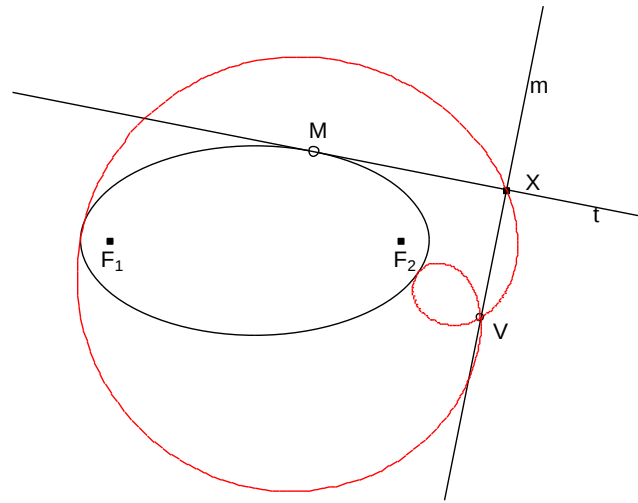


Figura 3-10 Podaria elipse

Gráfica 109 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

La recta tangente a una elipse desde un punto M de ella es perpendicular al ángulo formado por los radios focales $\angle F_1 M F_2$, desde V , exterior a la elipse, se traza la perpendicular a t que se encuentra con la tangente en el punto X , que al moverse describe como lugar geométrico un caracol de Pascal deformado con hendidura, como se ve en la Gráfica 3-5. El caracol es regular cuando el punto de mira pertenece a uno de los ejes de la elipse, cuando M se desplaza por la elipse.

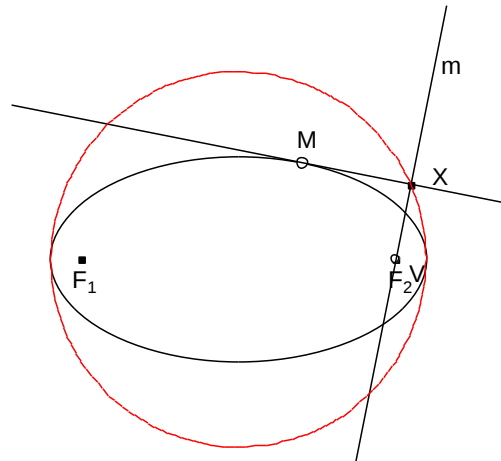


Figura 3-11 Podaria elipse foco

Gráfica 110 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Cuando el punto de mira coincide con uno de los focos, como en la Gráfica 3-6, el lugar geométrico se convierte en una circunferencia que tiene el mismo centro de la elipse y su radio es la longitud del semieje mayor de la misma.

3.1.4. Para la Hipérbola

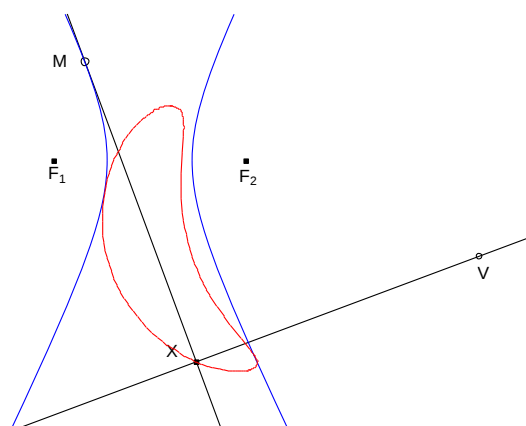


Figura 3-12 Podaria hipérbola

Gráfica 111 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

La recta tangente por un punto M móvil de la hipérbola es la bisectriz a las cuerdas focales desde el mismo punto. Desde un punto V se traza la perpendicular m a la tangente que la corta en el punto X que, a su vez, traza la curva cerrada cuando M se desplaza por la hipérbola, como se ve en la Gráfica 3-7.

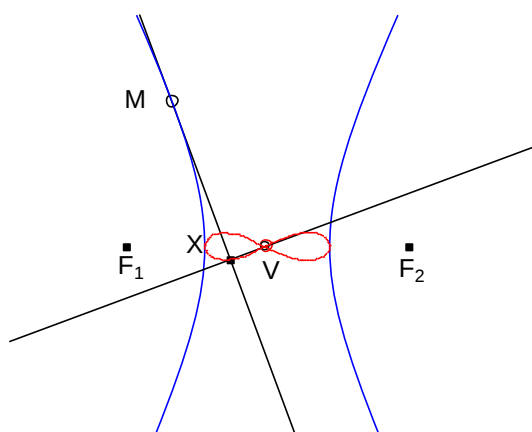


Figura 3-13 Podaria hipérbola centro

Gráfica 112 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Cuando el punto de mira o punto pedal V coincide con el centro de la hipérbola, el lugar geométrico descrito por el punto X es una Lemniscata de Bernoulli, como se ve en la Gráfica 3-8.

3.2 Construcción de las tangentes

En el presente anexo se explica de manera sucinta la forma de trazar las rectas tangentes a las curvas elementales que se han estudiado en el libro desde puntos de la curva y desde puntos que están por fuera de la misma.

3.2.1 Tangente a una circunferencia por un punto de ella

Dada una circunferencia de centro en O y radio r y un punto T de ella, se traza el radio OT y por el extremo T una perpendicular al segmento. Esa recta es la tangente buscada. (Ver Figura 3-9).

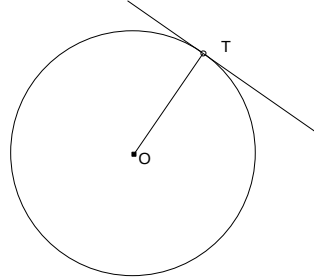


Figura 3-14 Tangente a circunferencia

Gráfica 113 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

3.2.2 Tangente a una circunferencia por un punto fuera de ella

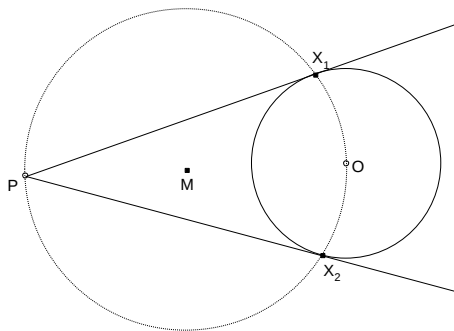


Figura 3-15 Tangente a circunferencia punto exterior

Gráfica 114 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dados la circunferencia de centro en O y radio r y el punto P por fuera de ella, se construye el punto medio M entre P y O . Con centro en M y radio PM se traza una circunferencia auxiliar que corta a la original en los puntos X_1 y X_2 que son los puntos de tangencia. Las rectas PX_1 y PX_2 son las tangentes buscadas. (Ver Figura 3-10).

3.2.3 Tangente a una parábola por un punto de ella

En la parábola de foco F y directriz m se ubica un punto arbitrario T y se construye su pie de perpendicular P sobre m . La bisectriz del ángulo $\angle PTF$ es la tangente buscada. (Ver Figura 3-11).

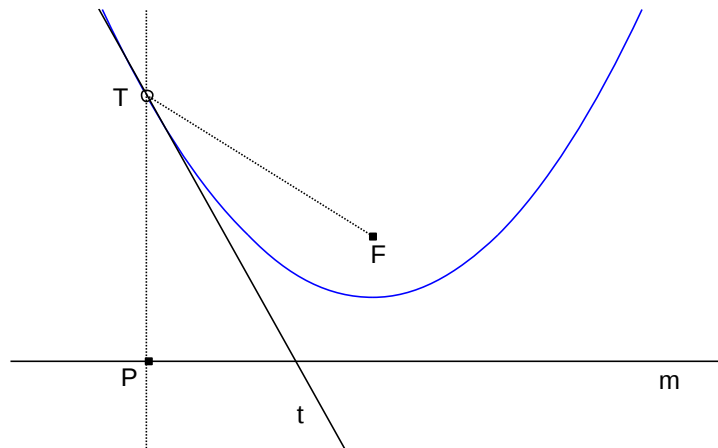


Figura 3-16 Tangente a parábola

Gráfica 115 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

3.2.4 Tangente a una parábola por un punto exterior a ella

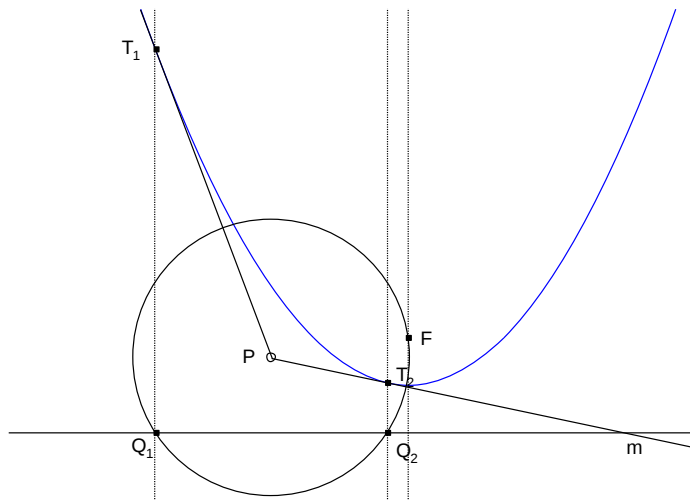


Figura 3-17 Tangente a parábola punto exterior

Gráfica 116 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Siendo la parábola de foco F y directriz m y el punto P por fuera de ella, se traza la circunferencia de centro en P y radio PF que corta a la directriz en los puntos Q_1 y Q_2 , desde donde se trazan paralelas al eje de la parábola. Cada una de esas paralelas corta a la parábola en los puntos T_1 y T_2 . Las rectas PT_1 y PT_2 son las tangentes buscadas. (Ver Figura 3-12).

3.2.5 Tangente a una elipse por un punto de ella

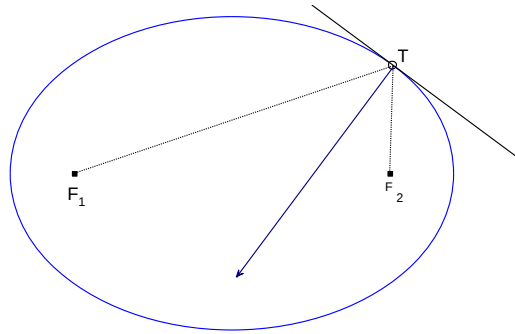


Figura 3-18 Tangente a elipse

Gráfica 117 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dada la elipse de focos F_1 y F_2 , se ubica en ella un punto arbitrario T y se construye la bisectriz del ángulo focal $\angle F_1TF_2$. La perpendicular por T a esa bisectriz es la recta tangente buscada. (Ver Figura 3-13).

3.2.6 Tangente a una elipse por un punto fuera de ella

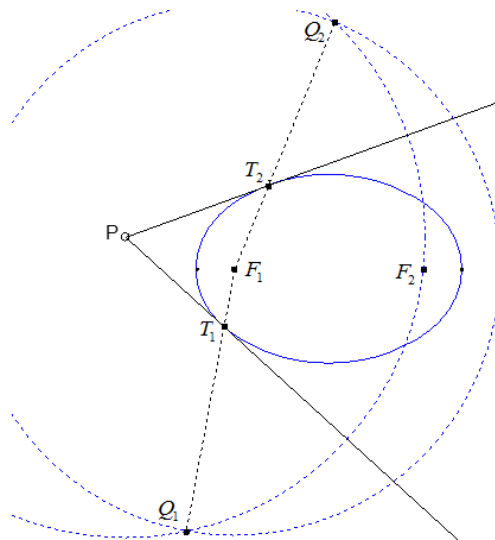


Figura 3-19 Tangente a elipse punto exterior

Gráfica 118 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dada la elipse de focos F_1 y F_2 y el punto P por fuera de ella, se calcula el eje mayor de la elipse $r = 2a$ y con centro en F_1 y radio $2a$ se traza su círculo director respecto de F_1 . La circunferencia de centro en P y radio PF_2 corta al círculo director en los puntos Q_1 y Q_2 y, a su vez, los segmentos F_1Q_1 y F_1Q_2 cortan a la elipse en los puntos T_1 y T_2 que son los puntos de tangencia buscados. Las tangentes desde P son PT_1 y PT_2 . (Ver Figura 3-14).

3.2.7 Tangente a una hipérbola por un punto de ella

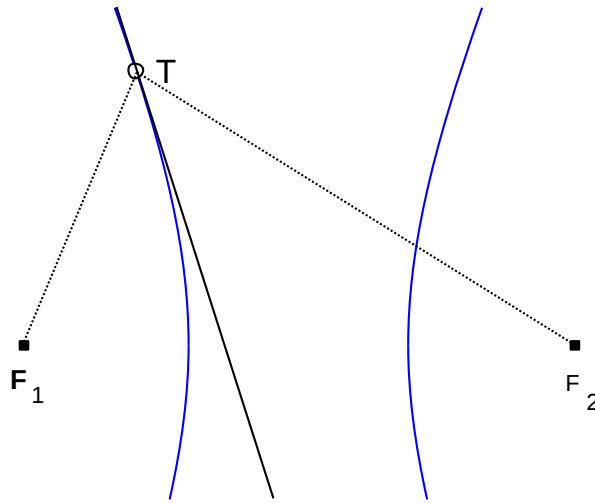


Figura 3-20 Tangente a hipérbola

Gráfica 119 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dada la hipérbola de focos F_1 y F_2 y un punto arbitrario T en la curva, la bisectriz del ángulo focal $\angle F_1TF_2$ es la tangente buscada. (Ver Figura 3-15).

3.2.8 Tangente a una hipérbola por un punto fuera de ella

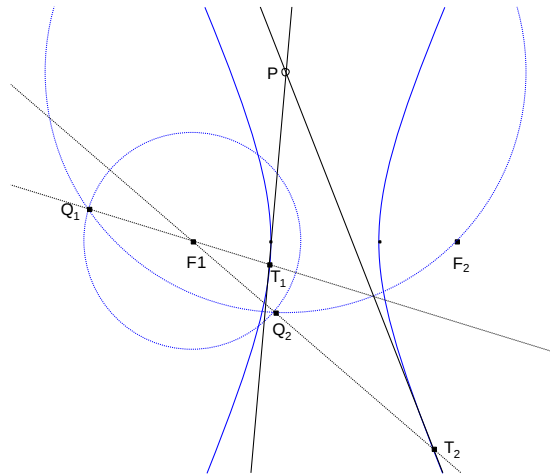


Figura 3-21 Tangente a hipérbola punto exterior

Gráfica 120 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dada la hipérbola de focos F_1 y F_2 y un punto arbitrario P entre las dos ramas de la curva, siendo $r = 2a$ la distancia entre los vértices de las dos ramas se traza la circunferencia directriz de radio $2a$ y centro en F_1 , la cual se corta con la circunferencia de centro en P y radio PF_2 en los puntos Q_1 y Q_2 . Las rectas F_1Q_1 y F_1Q_2 cortan a la hipérbola en los puntos T_1 y T_2 y, a su vez, las rectas PT_1 y PT_2 son las tangentes buscadas. (Ver Figura 3-16).

3.3 Construcción de elementos dada la curva dibujada

En este anexo se brinda la alternativa de calcular algunos elementos de las cónicas, como sus ejes, sus focos, su centro, cuando la curva se presenta dibujada.

3.3.1 Dado el arco de una circunferencia, calcular su centro

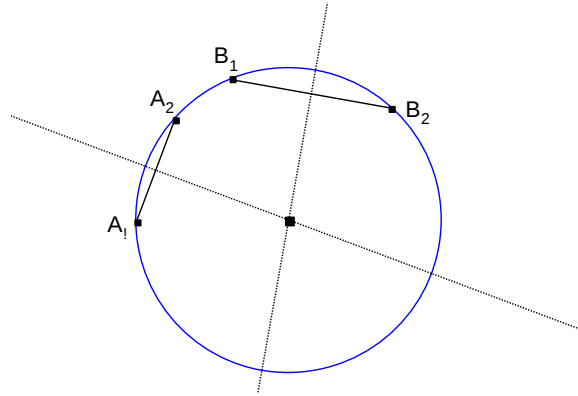


Figura 3-22 Centro de circunferencia

Gráfica 121 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dada una circunferencia o un arco de la misma, se establecen de manera indistinta dos cuerdas A_1A_2 y B_1B_2 diferentes. La mediatrices de esas cuerdas se interseca en el centro de la circunferencia. (Ver Figura 3-17).

3.3.2 Dado el arco de una parábola, calcular su foco y directriz

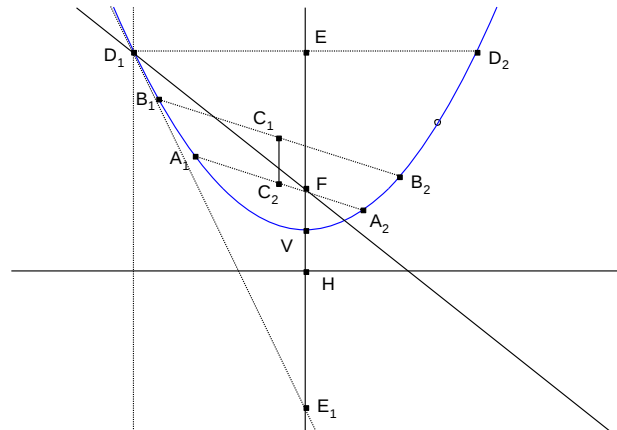


Figura 3-23 Foco y directriz de parábola

Gráfica 122 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dado un arco de parábola, los punto medios C_1 y C_2 de dos cuerda paralelas A_1A_2 y B_1B_2 determinan un segmento de diámetro paralelo al eje de la parábola, por ello se traza la cuerda D_1D_2 perpendicular al segmento C_1C_2 y su mediatriz por E es el eje de la parábola, eje que determina en V el vértice de la misma.

El simétrico de E respecto del vértice V , denominado E_1 determina con D_1 una tangente por este último punto a la curva y, en consecuencia, la recta que se consigue por reflexión axial de la perpendicular por D_1 a la cuerda D_1D_2 respecto de la tangente D_1E_1 , corta al eje de la parábola en su foco F . La directriz de la parábola es la perpendicular a su eje por el punto H que es simétrico del foco F respecto del vértice V de la curva. (Ver Figura 3-18).

3.3.3 Dado el arco total de una elipse, calcular sus elementos

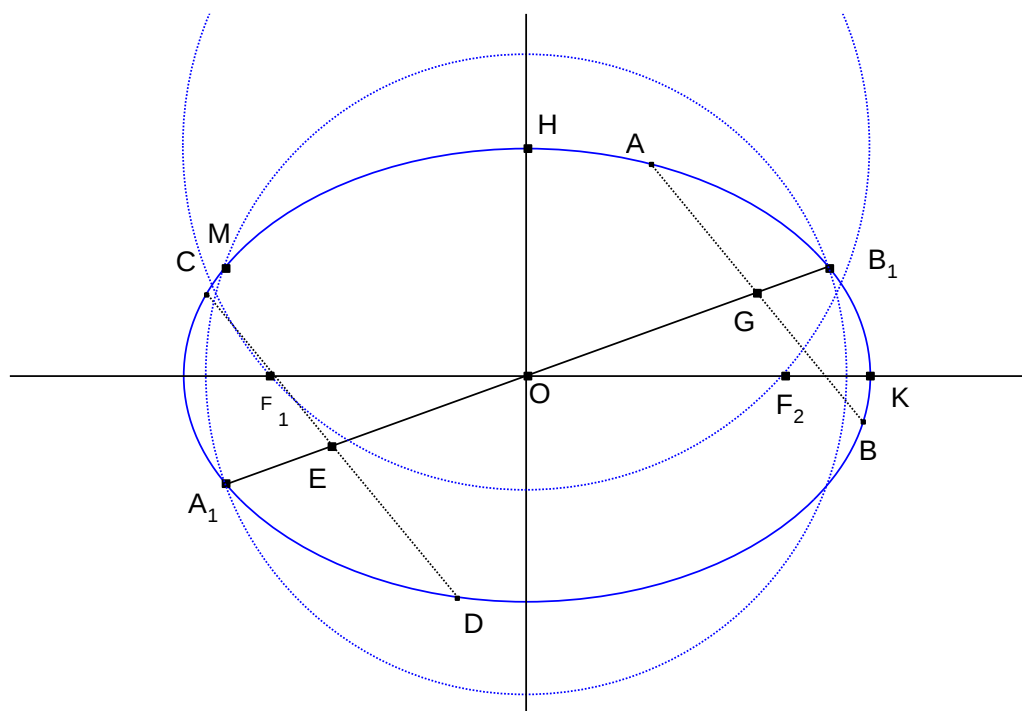


Figura 3-24 Elemento de elipse

Gráfica 123 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Dada la elipse sin sus elementos, se trazan las cuerdas paralelas AB y CD cuyos puntos medios E y G determinan una recta que se intersecta con los puntos A_1 y B_1 de la curva, el punto medio de este calibre A_1B_1 es el centro de la elipse O .

Con centro en O y radio OA_1 se consigue el punto de intersección con la curva M y la bisectriz del ángulo $\angle MOA_1$ es el eje mayor de la elipse; el eje menor es la perpendicular por O al eje mayor.

Se marcan los punto de intersección K y H sobre el eje mayor y el eje menor en la curva respectivamente y con centro en H y radio OK se traza una circunferencia que permite localizar sobre el eje mayor los focos de la elipse F_1 y F_2 . (Ver Figura 3-19).

3.3.4 Dadas las ramas de una hipérbola calcular sus elementos

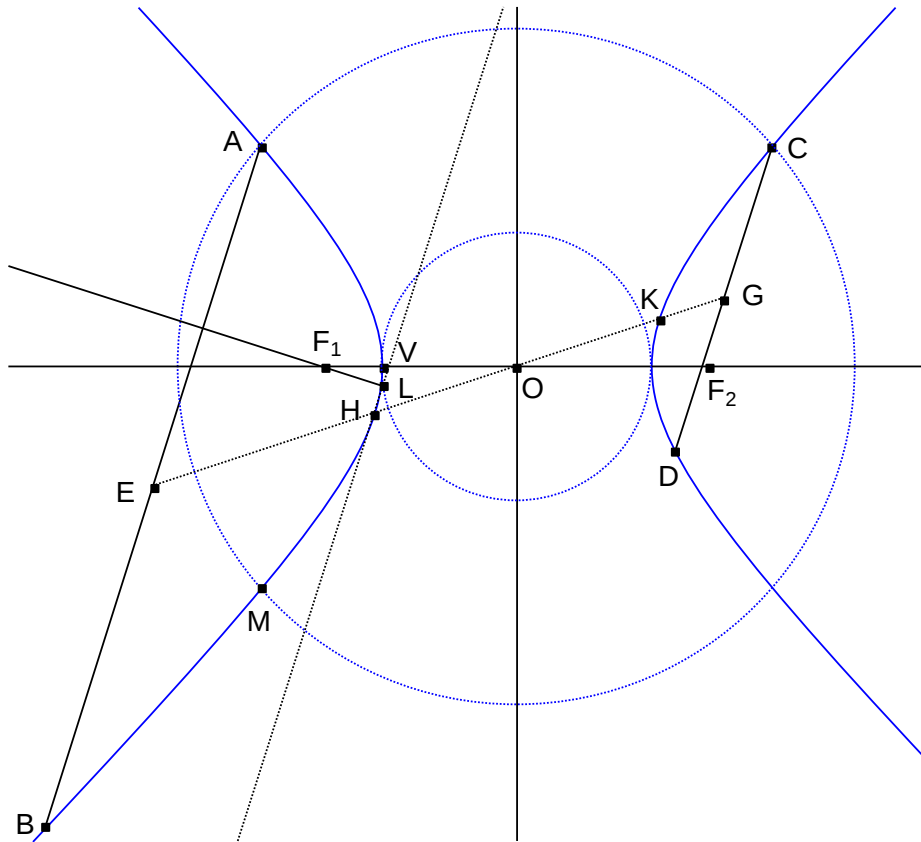


Figura 3-25 Elementos de hipérbola

Gráfica 124 (<https://sired.udenar.edu.co/11342/>)

Los puntos medios E y G de dos cuerdas paralelas, cada una en diferente rama de la hipérbola, determinan en ellas los puntos H y K que se constituyen en el calibre de la hipérbola, y por ello el punto medio O entre H y K es su centro.

Con centro en O y radio OA se traza una circunferencia para determinar el punto M en una rama de la hipérbola. La bisectriz del ángulo $\angle AOM$ es el eje principal de la cónica y la perpendicular por O es el eje imaginario.

La tangente a la hipérbola paralela a la cuerda AB en su rama a izquierda corta a la circunferencia de centro en O y radio OV en el punto L , desde donde se levanta una perpendicular a la tangente. Esa perpendicular corta al eje principal de la hipérbola en el foco F_1 . El foco F_2 es el simétrico de F_1 respecto del centro O . (Ver Figura 3-20).



Capítulo 4

Sobre el origen de la geometría analítica: Apolonio, Descartes y Fermat

Este libro, centrado en problemas relacionados con lugares geométricos, se enmarca en la geometría pura y en la analítica, lo cual motiva a desarrollar este anexo que trata episodios de los inicios de la geometría analítica, en especial del aporte de Apolonio de Perge, y las ideas de este que posteriormente desarrollaron Descartes y Fermat.

En el transcurrir histórico que hay entre la geometría clásica y la geometría actual surge la geometría analítica, la cual se ha identificado históricamente con dos personajes del siglo XVII: René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665).

La geometría analítica es una rama de las matemáticas caracterizada por los recursos mediante los que se abordan fundamentalmente los siguientes dos problemas:²

- Dada una ecuación, hallar el lugar geométrico que representa.
- Dado un lugar geométrico definido por determinadas condiciones, hallar su ecuación matemática.

Los enfoques de esos dos personajes en cuanto a la geometría analítica se consideran complementarios, pues cada uno establece la unión del álgebra y geometría en sentidos opuestos; en esencia, Fermat estudia curvas definidas por ecuaciones, mientras que Descartes estudia ecuaciones por medio de curvas.

La geometría desarrollada por Fermat y Descartes estudia dos tópicos esenciales: la obtención de las ecuaciones de los lugares geométricos y las propiedades de las curvas (especialmente las que se obtienen por ecuaciones

² Hernández, V. (2002). La geometría analítica de Descartes y Fermat: ¿Y Apolonio? Apuntes de historia de las matemáticas. 1, (1), 32- 44.

lineales o cuadráticas). Descartes se centró en el primero de esos tópicos considerando por pocos el segundo, mientras que Fermat profundizó en el segundo, prestando menor atención al primero.

En 1637 Descartes publica su Discurso del método, el cual servía como prefacio a tres tratados científicos: Geometría, Dióptrica y Meteoros. La Geometría fue su única obra de matemáticas, la cual, a su vez, se dividía en tres libros:

El libro I se titula Problemas que pueden construirse con círculos y rectas solamente; allí Descartes plantea una ruptura con la tradición griega de asociar potencias como a^2 con un área, y a^3 con un volumen, tratándolas como longitudes de segmentos de línea.

El libro II se titula Sobre la naturaleza de las líneas curvas, en el que describe las curvas geométricas y las mecánicas; las primeras corresponden a las que actualmente se representan con ecuaciones algebraicas de dos variables; sin embargo, en ese libro fueron descritas cinemáticamente. Cabe decir que no concebía que las denominadas curvas mecánicas, como la espiral o la cuadratriz, se estudiaran desde las matemáticas. También en el libro propuso un método algebraico para encontrar la perpendicular a un punto de una curva, si se conoce la ecuación de esta, con ello se podía hallar las tangentes a dichas curvas.

El libro III se titula Sobre la construcción de Problemas de Sólidos y Supersólidos, el cual a pesar del título es más de corte algebraico que geométrico, en el que trata la forma de resolver ecuaciones. Entre otras cosas plantea que para resolverlas, todos los términos de una ecuación se sitúen en un lado de la ecuación y al otro lado de esta se sitúe el cero.

El mismo año de la publicación de la obra de Descartes, Fermat envía a algunos colegas sus investigaciones que databan de 1629, las cuales surgieron a partir del estudio que hizo con base en las referencias que, a su vez, Pappus había hecho de la obra perdida Los Lugares Planos de Apolonio.

Los estudios de Fermat están en la memoria Introducción a los Lugares Planos y Sólidos (Ad Locos Planos et Solidos Isagoge), publicada en 1679 hasta que su hijo Samuel edita las Varia Opera Mathematica.

Fermat parte de su profundo conocimiento de la matemática griega y, por tanto, de la debilidad misma de los métodos griegos que eran básicamente métodos de demostración no de descubrimiento. No eran métodos generales ni heurísticos, precisaban conocer previamente la solución del problema, aplicándose entonces a obtener una demostración rigurosa. Era, por tanto, necesario obtener otros métodos que además de ser más generales, garantizaran no sólo la rigurosa corrección de las soluciones, sino el descubrimiento de las propias soluciones. Motivado por los intentos de

reconstrucción de ciertas obras perdidas de Apolonio, por parte de Vieta, Fermat reconstruye los dos libros de Los Lugares Planos de Apolonio, en el estilo clásico griego sin referencia al Arte Analítica de Vieta.

Cuando aplica el Análisis de Vieta a los problemas de lugares geométricos construye los fundamentos de su geometría analítica. Al vincular los trabajos matemáticos de Vieta y Apolonio establece un efectivo puente entre la geometría y el álgebra, que permite asociar curvas y ecuaciones, a base de aplicar el análisis algebraico de Vieta a los problemas de lugares geométricos de Apolonio y Pappus, definidos en un sistema de coordenadas, por una ecuación indeterminada en dos incógnitas. Fermat establece un hecho fundamental de la geometría analítica afirmando que la naturaleza y la construcción de las curvas planas están determinadas por la ecuación canónica asociada, en el siguiente principio: “Siempre que en una ecuación final se encuentran dos cantidades incógnitas, se tiene un lugar geométrico, describiendo el extremo de una de ellas una línea recta o curva. La línea recta es simple y única en su género; las especies de curvas son en número infinito, círculo, parábola, elipse, Etc”.

Estas palabras permiten sintetizar el importante principio de la historia de la matemática que introduce no sólo la geometría analítica sino la idea fundamental de variable algebraica, básica para el desarrollo del Cálculo Infinitesimal: “Con la Geometría Analítica de Fermat alcanzaba el máximo grado de consumación en la aplicación a los problemas geométricos del antiguo método de Análisis –de ahí procede el adjetivo Analítica que acompaña al sustantivo Geometría–, siendo el Álgebra por su carácter algorítmico el principal instrumento (GONZÁLEZ URBANEJA, Pedro Miguel. Orígenes y evolución histórica de la geometría analítica. Pág. 56 en <http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf>).

A Fermat le interesa obtener métodos que permitan resolver de forma directa y operativa los problemas y escribirlos de manera que se siguiera una línea geométrica; es decir, métodos que al describir el proceso inventivo enseñen a descubrir y rompan la dualidad griega invención–demostración, así, Fermat privilegia la heurística buscando fusionar el descubrimiento y de la demostración. En ese panorama juega un papel programático esencial la intervención del Álgebra como instrumento inherente a la Geometría Analítica que convierte a esta en una poderosa herramienta de investigación y exploración científica, en el más útil instrumento para resolver con elegancia, rapidez y plenitud heurística las cuestiones geométricas”.

Antecedentes de Las Cónicas de Apolonio

El estudio de la geometría griega apunta a varios nombres: A Euclides se le reconoce como el sistematizador, Arquímedes como el investigador y a Apolonio por su virtuosismo geométrico. Incluso, Apolonio llegó a ser reconocido por los

historiadores de la geometría por sus investigaciones en cónicas, que detallan sus descubrimientos, con lo cual justifica su apelativo de “gran geómetra”.

La obra más reconocida de Apolonio es Las Cónicas, la cual supera lo escrito con anterioridad de este tema por parte de Menecmo, Euclides.

La mayoría de datos conocidos de Apolonio tienen como origen lo que el propio autor reseña en las introducciones de algunos de los libros obra denominada Las Cónicas. Se sabe que Apolonio nació hacia el año 262 a.C., en Perga, (la actual Antalya, Turquía); además estudió en el Museo de Alejandría con algunos discípulos de Euclides; y vivió, entre otras ciudades, en Pérgamo, la cual contaba con una prestigiosa biblioteca y una tradición académica similares a la de Alejandría, ciudad donde murió cerca al año de 190 a.C.

Menecmo, quien vivió en el siglo IV antes de Cristo, es reconocido por ser quien introdujo estudio de las secciones cónicas, es decir, de las curvas que actualmente reconocemos con los nombres de parábola, elipse e hipérbola.

Los estudios de Mecnemo se dieron en el marco del famoso problema de la duplicación del cubo³; en esencia, detectó que para solucionar ese problema había una familia de curvas apropiadas y que eran obtenidas a partir de la sección por un plano perpendicular a la generatriz de conos rectos de tres tipos, según que el ángulo en el vértice fuera agudo, recto u obtuso.⁴

Mecnemo descubrió que un cono circular recto de una sola hoja, con ángulo recto (agudo - obtuso) en el vértice, al ser intersecado por un plano perpendicular a una de sus generatrices, se obtiene una curva que actualmente denominamos parábola (elipse-hipérbola). Usando herramientas representativas del álgebra, asociadas a la posterior geometría analítica, se puede describir la ecuación de esa curva, de la forma $y^2 = lx$, $(y^2 = lx - (\frac{b^2}{a^2})x^2)$, si el ángulo del cono es agudo $-y^2 = lx + (\frac{b^2}{a^2})x^2$, si el ángulo del cono es obtuso⁵ donde l es una constante dependiente de la distancia entre el vértice del cono y el plano nombrado.

Los desarrollos de Menecmo contienen apartes que pueden asociarse con ecuaciones y con el uso de coordenadas, “lo que induce a los historiadores a afirmar que este geómetra ya conocía ciertos aspectos de la Geometría Analítica. De hecho ignorando el lenguaje de esta se hace difícil explicar el hallazgo de Menecmo”.⁶

³ Consiste en construir, utilizando únicamente regla y compás, un cubo que tenga el doble de volumen que un cubo dado. Es uno de los tres problemas clásicos de la matemática antigua, y que apenas hasta el siglo XIX, se demostró que no se puede resolver.

⁴ <https://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/Apolonio-1.asp.htm>

⁵ Para los dos últimos casos, a y b son constantes.

⁶ idem

A pesar de ser Mecnemo como el personaje que introdujo el estudio de las cónicas, unos años antes, Hipócrates de Quíos, quien vivió alrededor del año 400 a.C., estudió apartes de las cónicas en relación con uno de los problemas clásicos de la geometría griega, como lo es la duplicación del cubo mediante la interpolación de dos medias proporcionales.

A grandes rasgos, Hipócrates abordó el problema de la duplicación del cubo de la siguiente manera:

Dado un cubo cuyo lado mide a unidades, al interpolar dos medias proporcionales entre este lado y su doble, se tiene la proporción continua:

$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$. Manipulando apropiadamente estas igualdades se obtienen las ecuaciones de dos parábolas: $x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$, y de una hipérbola $xy = 2a^2$. Ahora, al intersecar las dos parábolas y al intersecar intersección de una de las parábolas con la hipérbola se llega a la ecuación $x^3 = 2a^3$, que se interpreta como la longitud del lado de un cubo del doble de volumen del inicial.

Menecmo obtendría esto mediante la construcción de puntos de intersección de las cónicas obtenidas, desplazando apropiadamente el plano de corte con el cono para hallar cónicas con los *latus rectum*⁷.

Entre otros de los posibles precursores del uso de las secciones cónicas está Arquitas de Tarento (vivió alrededor del año 400 a.C.), quien estudió el problema de la duplicación del cubo, obteniendo las dos medias proporcionales a través de las intersecciones de un cono, un cilindro y un toro.

Otro de los posibles orígenes de las cónicas es a través de curvas cinemáticas como la Cuadratriz de Hippias o la Espiral de Arquímedes, sin embargo, el nombre de Problemas sólidos a los que dependían de las cónicas para su resolución, parece indicar que es más fuerte la idea de que su origen es estereométrico⁸.

Algunos historiadores de las matemáticas ubican el origen de la geometría analítica en la Antigua Grecia, específicamente ubican en Mecnemo como el personaje que merece el reconocimiento como padre de esta rama, al establecer que su esencia es el estudio de lugares geométricos a través de las ecuaciones.

Con las herramientas actuales, se puede definir las cónicas como lugares geométricos de los puntos en un plano en los que las distancias a una recta, denominada directriz, y a un punto, denominado foco, se encuentran a una determinada razón constante, denominada excentricidad.

⁷ La ***latus rectum*** de una sección cónica es la cuerda que pasa a través del foco, es perpendicular al eje mayor y tienen ambos puntos extremos sobre la curva.

⁸ La estereometría se refiere a una parte de la geometría que trata de las medidas de los sólidos.

Desde un punto de vista actual esta definición se puede traducir sin mayor problema al lenguaje algebraico de las ecuaciones, además, a través de rotación de ejes, sin mayor dificultad se puede pasar de la ecuación de una hipérbola referida a sus ejes a la referida a sus asíntotas. Así, el mérito de Mecnemo es el de descubrir esas curvas sin las herramientas algebraicas con las que contamos actualmente, además de haber mostrado propiedades de esas secciones cónicas, las cuales fueron presentadas posteriormente en Las Cónicas de Apolonio.

Las Cónicas es una de las obras de Apolonio que consta de ocho libros, de los cuales el último, que se presume era un apéndice, está perdido. A continuación, una descripción de cada uno de esos libros:

El Libro I empieza mostrando cómo se generan las cónicas. Una vez que se obtienen las relaciones básicas entre lo que ahora denominamos como coordenadas de un punto de la curva en el plano, expresadas por las ecuaciones descritas a través de consideraciones estereométricas, se presentan las propiedades básicas de las cónicas, en las que incluyen tangentes y diámetros conjugados, partiendo de tales ecuaciones y sin hacer referencia al cono generador.

El Libro II presenta nuevas propiedades, haciendo un estudio completo de las rectas asíntotas, para finalizar con el problema del trazado de una tangente que forme un cierto ángulo con el segmento diametral que pasa por el punto de tangencia.

En el Libro III presenta, inicialmente, algunas propiedades de triángulos y cuadriláteros determinados por tangentes y diámetros conjugados, además de algunas propiedades de las tangentes a las curvas. Posteriormente aborda algunas propiedades que permiten el trazado de las cónicas, usando movimientos continuos y que sirven para definir las como lugares geométricos:

“En una hipérbola la diferencia de distancias de cada punto a los focos es constante e igual al eje transversal”.

“En una elipse la suma de distancias de cada punto a los focos es constante e igual al eje mayor”.

En el Libro IV desarrolla los puntos de intersección de las cónicas; para ello destaca un método de trazar dos tangentes a una cónica desde un punto.

El Libro V se dedica a los segmentos máximos y mínimos que denotan, respectivamente, la distancia máxima y mínima de un punto a los de una cónica.

En este Libro está el origen de la teoría de evolutas⁹ y evolventes¹⁰ que aparece en la obra del holandés Christiaan Huygens llamada *Horologium Oscilatorium* de 1673. En ese libro, Apolonio aborda la noción de curvatura, lo cual corresponde a la geometría diferencial. También, a partir de métodos puramente sintéticos, obtiene la evoluta de las cónicas como lugar de los centros de curvatura, mediante la determinación del número de normales distintas desde cada punto. También se destaca la construcción de la normal a una cónica desde un punto exterior a través de la intersección de la cónica con una hipérbola equilátera, lo que se ha llamado Hipérbola de Apolonio asociada al punto.

El Libro VI trata la igualdad y la semejanza de las cónicas, y en él destaca la solución del siguiente problema: dados una cónica y un cono circular recto hallar una sección del cono que sea igual a la cónica dada.

En el Libro VII se relaciona propiedades de los diámetros conjugados¹¹ entre las que se destacan que la suma de estos es constante para la elipse y la resta de los cuadrados de estos es constante para la hipérbola.

Al inicio, las nuevas curvas introducidas por Menecmo su denominación respondía a la forma como se descubrieron: sección (perpendicular a una recta generatriz) de cono acutángulo, rectángulo y obtusángulo para la elipse, parábola e hipérbola, respectivamente.

En Las Cónicas de Apolonio se demostró que de un único cono único se obtienen los tres tipos de secciones, para ello se debe variar la inclinación del plano que corta al cono, lo que permitía ver a estas como una familia de curvas. También planteó que el cono no tiene que ser recto y que este debe constar de dos hojas, lo que permite identificar las dos ramas de la hipérbola.

La figura 4-1 ilustra la manera como Apolonio obtiene las tres secciones cónicas, las cuales dependen de la inclinación del plano que corta al cono:

⁹ Se llama **evoluta** de una curva, al lugar geométrico de los centros de curvatura de ésta.

¹⁰ La **evolvente del círculo**, a veces llamada *involuta*, es una curva cuyas normales son tangentes de la circunferencia. No confundirla con envolvente.

¹¹ Dos diámetros de una sección cónica son **conjugados** si cada cuerda paralela a un diámetro es dividida en dos por el otro diámetro.

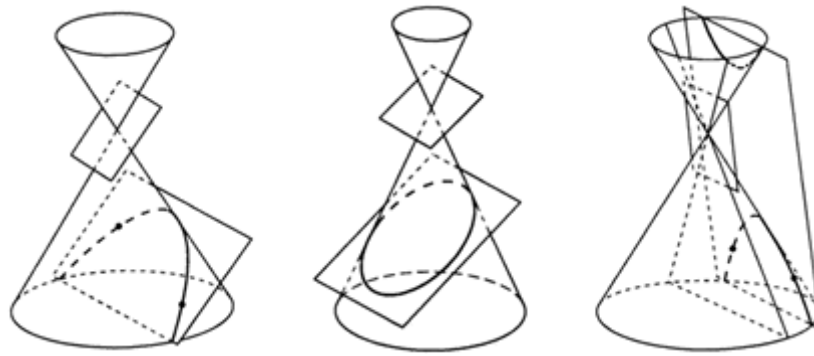


Figura 4-26 Tres secciones cónicas de Apolonio

La figura de la izquierda ilustra una parábola, para la cual el plano de corte es paralelo a una sola generatriz, la figura del medio ilustra una elipse, para la cual el plano de corte no es paralelo a ninguna generatriz, mientras que la de la derecha ilustra una hipérbola, en la que el plano de corte es paralelo a dos de sus generatrices.

A Apolonio se debe los nombres con los que actualmente se conocen estas tres secciones cónicas: elipse, parábola e hipérbola. Cabe decir que estos términos eran usados por los pitagóricos en la solución de ecuaciones cuadráticas a través de un método denominado Aplicación de las Áreas. En tal método, Elipse significa deficiencia, Hipérbola significa exceso y Parábola significa equiparación.

El nuevo nombre de esas curvas obedecía a una nueva forma de concebirlas, ya que Apolonio no las describiría de manera constructiva sino recurriendo a relaciones de sus longitudes y de las áreas que encierran, relaciones que describían la propiedad característica de definición de las curvas y expresaban sus propiedades; así, la ecuación de la parábola con vértice en el origen es de la forma $y^2 = lx$, en la que l es el latus rectum o parámetro doble que se representa por $2p$. Esa ecuación de la parábola es una forma de expresar el siguiente enunciado:

“La parábola tiene la propiedad característica de que, para todo punto tomado sobre la curva, el cuadrado construido sobre su ordenada y es exactamente igual al rectángulo construido sobre la abscisa x y el latus rectum l ”.

De manera similar presenta enunciados para las otras dos curvas, como lo son la hipérbola y la elipse, respectivamente:

“En la sección cónica considerada [hipérbola], el cuadrado de la ordenada equivale a un área rectangular aplicada siguiendo el latus rectum; es decir, teniendo el latus rectum como altura, y teniendo la abscisa como base, aumentada de otra área semejante a la que tenga el eje transversal o diámetro como base, y la mitad del latus rectum como altura”, y

“En la sección cónica considerada [elipse], el cuadrado de la ordenada equivale a un área rectangular aplicada siguiendo el latus rectum, es decir, teniendo el latus rectum como altura, y teniendo la abscisa como base, disminuida de otra área semejante a la que tenga el eje transversal o diámetro como base, y la mitad del latus rectum como altura”.

Los anteriores enunciados se traducen en las siguientes ecuaciones:

$$y^2 = lx + \left(\frac{b^2}{a^2}\right)x^2, \text{ o bien } \frac{(x-a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ para la hipérbola, y}$$

$$y^2 = lx - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)x^2, \text{ o bien } \frac{(x+a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ para la elipse,}$$

en las que para la hipérbola se designa por a al eje transversal o diámetro y por b el eje no transversal, mientras que para la elipse a y b representan los ejes, mientras que para ambas la ordenada se identifica con x y la abscisa con y , siendo l el latus rectum.

Para esas ecuaciones uno de sus vértices está en el origen de las coordenadas, donde concurren un diámetro y la tangente a la cónica como ejes de coordenadas, y donde, además, el latus rectum o parámetro es: $l = \frac{2b^2}{a}$.

Obsérvese como llegar a la ecuación de la elipse:

Hay una relación que es constante entre ciertas áreas, el cuadrado que tiene como lado la cuerda PQ (ver figura 4-2) y el rectángulo determinado por los segmentos OQ y QR del diámetro.

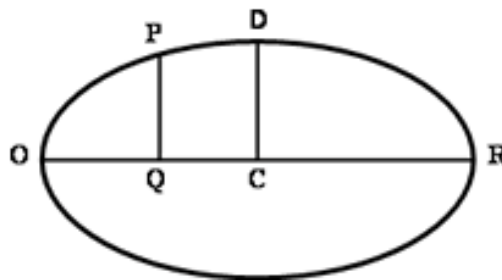


Figura 4-27 Elipse

Así, se puede verificar que $\frac{PQ^2}{CD^2} = \frac{OQQR}{OCCR}$. Tomando ahora, las coordenadas con origen en O , y llamando x, y, a, b y l , como ya se describió, se tiene que: $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x(2a-x)}{a^2}$; por tanto, $y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2$, así que $y^2 = lx - \frac{b^2}{a^2}x^2$, donde $l = \frac{2b^2}{a}$ es el latus rectum, como se quería probar.

Las relaciones de áreas, que expresan propiedades intrínsecas de la curva, permiten traducirse en el lenguaje del álgebra simbólica de ecuaciones, lo cual permite la asociación de curvas y ecuaciones, que es uno de los propósitos de la geometría analítica.

A la vista de las expresiones obtenidas para las cónicas se puede observar que, en el caso de la elipse se cumple que $y^2 < lx$, mientras que para la hipérbola, se tiene que $y^2 > lx$. A partir de esas desigualdades surgieron los nombres de las cónicas.

Para finalizar, se presentan dos citas que resumen el mérito de Apolonio, como personaje fundamental, para que posteriormente la geometría analítica se posicionara como una rama relevante de las matemáticas:

Al analizar la posición histórica de Apolonio en el camino hacia la Geometría Analítica, a pesar de los conceptos y elementos geométricos introducidos, que parecen emular la presencia de sistemas de referencia con coordenadas – abscisas y ordenadas – que permiten expresar las ecuaciones de las cónicas, esos sistemas de coordenadas aparecían siempre superpuestos a posteriori a las curvas para estudiar sus propiedades.

En la Geometría griega, las coordenadas, variables y ecuaciones no eran elementos de partida, sino conceptos subsidiarios derivados de situaciones geométricas concretas de curvas que determinan las ecuaciones sin que se dé la situación inversa, es decir, que las ecuaciones determinen las curvas, ya que estas siempre se producían mediante una construcción estereométrica como secciones de un sólido o de forma cinemática como composición de movimientos –tal es el caso de la Espiral de Arquímedes o la Cuadratriz de Dinostrato–, de forma que el conjunto de curvas manejadas por los griegos fue necesariamente muy limitado. Como manifiesta Boyer (1986, p. 208).

El hecho de que Apolonio, uno de los más grandes geómetras de la antigüedad, no consiguiese desarrollar de una manera efectiva la Geometría Analítica, se debe probablemente más a una pobreza en el número de curvas que de pensamiento; los métodos generales no son ni muy necesarios ni muy útiles cuando los problemas se refieren siempre a un número limitado de casos particulares. Por otra parte, es bien cierto que los primeros inventores de la Geometría Analítica tenían a su disposición toda el álgebra renacentista [el Álgebra de los cosistas italianos y el Álgebra simbólica de Vieta], mientras que Apolonio tuvo que trabajar con las herramientas del Álgebra Geométrica, mucho más rigurosa pero a la vez mucho más incómoda de manejar. (<https://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/Apolonio-1.asp.htm>).

Finalmente, respecto de las obras de Fermat y la Descartes, se puede plantear que las geometrías analíticas de dichos autores tienen su anclaje en la

preocupación por la metodología de la geometría griega, en cuanto ambos plantean como tarea esencial encontrar nuevos métodos más simples, operativos y que abarcaran más soluciones, además de dejar más clara la heurística. A manera de conclusión, la conexión de Apolonio con los dos pensadores del siglo del siglo XVII se plantea en la siguiente cita:

“Mientras que Fermat creía en una continuidad con la tradición griega y pensaba que su propio trabajo era una simple reformulación de la obra de Apolonio, Descartes proponía una ruptura. Aun si es posible caracterizar el tratamiento de las ecuaciones de Fermat como mucho más claro y moderno que el de Descartes, es la mentalidad cartesiana la que entendía mejor el nuevo sentido del álgebra. Descartes era consciente de que se trataba de un método universal que debía sustituir aquellos métodos de los antiguos” (Ruiz, 2002, p. 263).

Bibliografía

Bell, E. T. (1949). Historia de las matemáticas. Fondo de Cultura Económica.

Collette, J. P. (1986). Historia de las Matemáticas. Editorial Siglo Veintiuno.

Del Río Sánchez, J. (1994). Lugares geométricos. Cónicas. Editorial Síntesis.

Kline, M. (1990). Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford University Press.

Lehmann, Ch. (2016). Geometría Analítica. Limusa.

Mosquera, S. (2021). Construcciones geométricas con Geogebra. Editorial Universidad de Nariño.

Newman, J. (1994). La geometría por René Descartes. Enciclopedia Sigma, Vol I. Editorial Grijalbo.

Ruiz, A. (2002). Historia y Filosofía de las matemáticas. Editorial Universidad Estatal a Distancia

Oakley, C. O. (1979). Geometría Analítica. Compañía Editorial Continental.

Ribnikov, K. (1987). Historia de las Matemáticas. Editorial Mir, Moscú.

Wexler, Ch. (1968). Geometría Analítica, un enfoque vectorial. Montaner y Simon S.A.

Wussing, H. (1998). Lecciones de Historia de las Matemáticas. Siglo XXI.

Los autores

OSCAR FERNANDO SOTO AGREDA

Profesor titular de tiempo completo de la Universidad de Nariño, adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística. Maestro de escuela titulado de la Normal Nacional de Varones de Pasto, Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad de Nariño, Especialista en Computación dirigida a la docencia, de la Universidad Mariana y Magister en Modelos de Enseñanza Problemática de la Universidad Incca de Colombia. Su trabajo está dirigido de manera especial al Álgebra Abstracta y a la Geometría. Fanático de Cabrí, software de asistencia geométrica elaborado al mando del profesor Jean Marie Laborde, de la Universidad de Grenoble en Francia.

ANDRÉS CHAVES BELTRÁN

Profesor de tiempo completo de la Universidad de Nariño, adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística. Matemático y Magister en Matemáticas de la Universidad del Valle, en Colombia, Máster en Historia de la Ciencia: Ciencia, historia y Sociedad y Doctor en Historia de la Ciencia en la Universidad Autónoma de Barcelona, en España. Su trabajo académico se ha centrado en la historia y epistemología de las matemáticas, en particular en las geometrías no euclidianas, teoría de conjuntos, el surgimiento de la escuela polaca de matemáticas del periodo Entreguerras y los últimos años, ha explorado la historia de las matemáticas en Colombia.

HILBERT BLANCO-ÁLVAREZ

Estudió Licenciatura en Matemática y Física y un Magister en Educación Matemática en el Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, Colombia, un Máster en Investigación en Didáctica de las Matemáticas en la Universidad Autónoma de Barcelona, España, y realizó su Doctorado en Ciencias de la Educación en la Universidad de Granada, España. Actualmente es profesor tiempo completo de la Universidad de Nariño (Pasto, Colombia) donde se desempeña como profesor del área de Educación Matemática, Coordinador de la Oficina de TIC para la Educación, Director de la Editorial Universidad de Nariño y Director-Fundador de la Red Internacional de Etnomatemática- RedINET. Sus intereses investigativos se centran en la Etnomatemática, la Formación de maestros de matemáticas, la Evaluación de actividades diseñadas desde la Etnomatemática, la Etnoeducación y el Estudio de clase o Lesson Study.

Lista de figuras

Figura 1-1. La escalera deslizante	13
Figura 1-2. Longitud de la escalera	14
Figura 1-3 Otro punto de la escalera	15
Figura 1-4 Parábola como lugar geométrico Figura 4	16
Figura 1-5 Ejemplo de curva desde el modelo sintético	17
Figura 1-6 Cálculo del cociente $x = ab$	19
Figura 1-7 Cálculo del producto $x = ab$	19
Figura 1-8 Cálculo de ab	20
Figura 1-9 Lugar geométrico descrito por el centro de una circunferencia [...]	21
Figura 1-10 Hipérbola como lugar geométrico	22
Figura 1-11 Bisectriz	23
Figura 1-12 Bisectriz con triángulo isósceles	23
Figura 1-13 Tercera bisectriz	24
Figura 1-14 Bisectriz a través de parábolas	24
Figura 1-15 Conjugado isogonal	25
Figura 1-16 Hipérbola a partir de triángulo equilátero	26
Figura 1-17 Hipérbola que pasa por los vértices del triángulo	27
Figura 1-18 Recta surtidora de elipses e hipérbolas que pasan por los vértices de un triángulo	27
Figura 1-19 Lazos simétricos	28
Figura 1-20 Lugares correspondientes a $X(4)$ y $X(5)$	29
Figura 1-21 Lugar geométrico generado por $X(6)$	30
Figura 1-22 Lazo con simetría	31
Figura 1-23 Pliegues de Haga	32
Figura 2-1 Recta que equidista de dos puntos	37
Figura 2-2 Ejemplo de Recta que equidista de dos puntos	37
Figura 2-3 Parábola generada por foco y directriz	38
Figura 2-4 Ejemplo de parábola generada por foco y eje x	38
Figura 2-5 Circunferencia	39
Figura 2-6 Ejemplo de circunferencia	39

Figura 2-8 Ejemplo de elipse rotada	41
Figura 2-9 Recta generada por centros de circunferencia concéntricas	41
Figura 2-10 Ejemplo de recta generada por centros de circunferencia concéntricas	42
Figura 2-11 Hipérbola	43
Figura 2-12 Hipérbola rotada	43
Figura 2-13 Hipérbola a partir de triángulo	44
Figura 2-14 Ejemplo de hipérbola a partir de triángulo	45
Figura 2-15 Hipérbola a partir de triángulo	45
Figura 2-16 Ejemplo de hipérbola a partir de triángulo	46
Figura 2-17 Deltoide tricúspide de Steiner	46
Figura 2-18 Ejemplo de deltoide tricúspide de Steiner	47
Figura 2-19 Variantes del deltoide tricúspide	48
Figura 2-20 Ejemplo de deltoide tricúspide de Steiner	48
Figura 2-21 Caracol de Pascal	49
Figura 2-22 Ejemplo de Caracol de Pascal	50
Figura 2-23 Cisoide de Diocles	50
Figura 2-24 Ejemplo de Cisoide de Diocles	51
Figura 2-25 Curva descrita por dos puntos	52
Figura 2-26 Ejemplo de curva descrita por dos puntos	52
Figura 2-27 La Bruja de Agnesi	53
Figura 2-28 Ejemplo de Bruja de Agnesi	54
Figura 2-29 Recta 1	55
Figura 2-30 Ejemplo recta 1.	56
Figura 2-31 Recta 2.	56
Figura 2-32 Ejemplo recta 2	57
Figura 2-33 Recta 3: Inversa de una circunferencia	57
Figura 2-34 Ejemplo recta 3: inversa de una circunferencia	58
Figura 2-35 Recta generada por el mecanismo de Peaucellier-Lipkin	58
Figura 2-36 Máquina inversora de Harry Hart	59
Figura 2-37 Recta 4: puntos medios de las cuerdas de parábola	59

Figura 2-38 Ejemplo recta 4: puntos medios de las cuerdas de parábola	60
Figura 2-39 Recta 5: puntos que equidistan de dos rectas dadas	60
Figura 2-40 Ejemplo de recta 5: puntos que equidistan de dos rectas dadas	61
Figura 2-41 Recta 6	61
Figura 2-42 Ejemplo recta 6	62
Figura 2-43 Recta 7	63
Figura 2-44 Ejemplo recta 7	64
Figura 2-45 Recta 8	64
Figura 2-46 Ejemplo recta 8	65
Figura 2-47 Recta 9	65
Figura 2-48 Ejemplo recta 9	66
Figura 2-49 Circunferencia 1	67
Figura 2-50 Ejemplo Circunferencia 1	68
Figura 2-51 Circunferencia 2	68
Figura 2-52 Ejemplo circunferencia 2	69
Figura 2-53 Circunferencia 3	69
Figura 2-54 Ejemplo circunferencia 3	70
Figura 2-55 Circunferencia 4	70
Figura 2-56 Ejemplo circunferencia 4	71
Figura 2-57 Circunferencia 5	71
Figura 2-58 Ejemplo circunferencia 5	72
Figura 2-59 Circunferencia 6	73
Figura 2-60 Ejemplo circunferencia 6	73
Figura 2-61 Circunferencia 7	74
Figura 2-62 Ejemplo circunferencia 7	75
Figura 2-63 Circunferencia 8	75
Figura 2-64 Ejemplo circunferencia 8	76
Figura 2-65 Circunferencia 9	76
Figura 2-66 Ejemplo circunferencia 9	77
Figura 2-67 Circunferencia 10	78
Figura 2-68 Ejemplo de circunferencia 10	78

Figura 2-69 Circunferencia 11	79
Figura 2-70 Ejemplo de circunferencia 11	79
Figura 2-71 Ejemplo de circunferencia 11a	80
Figura 2-72 Ejemplo de circunferencia 11b	80
Figura 2-73 Circunferencia 12	81
Figura 2-74 Ejemplo de circunferencia 12	82
Figura 2-75 Parábola 1	82
Figura 2-76 Alternativa a parábola 1	83
Figura 2-77 Ejemplo parábola 1	83
Figura 2-78 Parábola 2	84
Figura 2-79 Ejemplo parábola 2	84
Figura 2-80 Parábola 3	85
Figura 2-81 Ejemplo parábola 3	85
Figura 2-82 Parábola 4	86
Figura 2-83 Ejemplo de parábola 4	86
Figura 2-84 Parábola 5	87
Figura 2-85 Ejemplo de parábola 5	88
Figura 2-86 Parábola 6	88
Figura 2-87 Ejemplo parábola 6	89
Figura 2-88 Elipse 1	90
Figura 2-89 Alternativa elipse 1	90
Figura 2-90 Ejemplo elipse 1	91
Figura 2-91 Elipse 2	91
Figura 2-92 Ejemplo elipse 2	92
Figura 2-93 Elipse 3	93
Figura 2-94 Ejemplo elipse 3	93
Figura 2-95 Elipse 4	94
Figura 2-96 Alternativa elipse 4	94
Figura 2-97 Ejemplo elipse 4	95
Figura 2-98 Ejemplo alternativa elipse 4	95
Figura 2-99 Parábola 5	96

Figura 2-100 Ejemplo parábola 5	97
Figura 2-101 Hipérbola 1	97
Figura 2-102 Alternativa hipérbola 1	98
Figura 2-103 Ejemplo hipérbola 1	98
Figura 2-104 Hipérbola 2	99
Figura 2-105 Ejemplo hipérbola 2	99
Figura 2-107 Hipérbola 3	100
Figura 2-108 Ejemplo hipérbola 3	101
Figura 2-109 Hipérbola 4	101
Figura 2-110 Ejemplo hipérbola 4	102
Figura 2-111 Hipérbola 5	102
Figura 2-112 Ejemplo hipérbola 5	103
Figura 2-113 Hipérbola 6	104
Figura 2-114 Ejemplo hipérbola 6	104
Figura 3-1 Podaria circunferencia	106
Figura 3-2 Podaria circunferencia punto exterior	106
Figura 3-3 Para la parábola	107
Figura 3-4 Podaria parábola	107
Figura 3-5 Podaria elipse	108
Figura 3-6 Podaria elipse foco	108
Figura 3-7 Podaria hipérbola	109
Figura 3-8 Podaria hipérbola centro	109
Figura 3-9 Tangente a circunferencia	110
Figura 3-10 Tangente a circunferencia punto exterior	110
Figura 3-11 Tangente a parábola	111
Figura 3-12 Tangente a parábola punto exterior	111
Figura 3-13 Tangente a elipse	112
Figura 3-14 Tangente a elipse punto exterior	112
Figura 3-15 Tangente a hipérbola	113
Figura 3-16 Tangente a hipérbola punto exterior	113
Figura 3-17 Centro de circunferencia	114

Figura 3-18 Foco y directriz de parábola	114
Figura 3-19 Elemento de elipse	115
Figura 3-20 Elementos de hipérbola	116
Figura 4-2 Elipse	125



Editorial
Universidad de Nariño

Este libro es un compendio de problemas enfocados a los LUGARES GEOMÉTRICOS; para cada problema estudiado se explica en detalle conciso el alcance de su solución que viene vinculada con el archivo correspondiente elaborado en CABRI, software de asistencia geométrica, y de una notoria popularidad en el ambiente académico. Los problemas se han ubicado en capítulos relacionados de manera especial con las CÓNICAS, curvas que tienen una aplicación recurrente en el mundo de la tecnología.

El texto está dirigido de manera especial a estudiantes de las carreras de matemáticas y de licenciatura en matemáticas. En concordancia con ello, cada ítem estudiado se presenta de manera sugestiva y atrayente. Desde este ángulo, se ha hecho un esfuerzo para que las soluciones expuestas tengan un carácter didáctico y casi que se expliquen por sí mismas.

Los problemas estudiados, se han tomado de los textos corrientes de geometría analítica y varios de ellos son sesudos estudios que los autores han empleado en su ejercicio profesional docente. Sin duda, este acopio de problemas resueltos y propuestos, hacen de manera global, un buen aporte pues anima al estudio de la geometría y en especial al de los lugares geométricos que requieren de la competencia imaginativa, creativa y de visualización, bajo el entendido de que los lugares geométricos requieren del movimiento.

Pensamos que este es un gran aporte a nuestros estudiantes y a los estudiantes de instituciones pares dado que la temática abordada es frecuente y sin embargo la bibliografía existente no es abundante y no se ha realizado con el enfoque que se ha utilizado en esta obra. Un buen conjunto de problemas resueltos, estudiados con sentido metodológico, permiten diseñar otros caminos de solución y lo que es más importante, organizar sus propios problemas.



**Editorial
Universidad de Nariño**