¿Pueden funciones-ζ solucionar ecuaciones Diofanticas?

Una introducion a la teoria de Iwasawa (no-conmutativa)

Otmar Venjakob

Mathematical Institute
University of Heidelberg

Pasto, 13 Agosto 2014

Leibniz (1673)

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

(antes ya conocido por GREGORY y MADHAVA)

Valores especiales de funciones-L

$N \geq 1$, $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ unidades del anillo $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

caracter de Dirichlet (modulo N) :

$$\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$$

se extiende a $\mathbb{N}$

$$\chi(n) := \begin{cases} \chi(n \bmod N), & (n, N) = 1; \\ 0, & \text{en el otro caso.} \end{cases}$$

funcion-L de Dirichlet con respecto a χ :

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad s \,\epsilon\, \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 1.$$

satisface:
- producto de Euler

$$L(s,\chi) = \prod_p \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}},$$

- continuacion meromorfica a $\mathbb{C}$,
- ecuacion funcional.

Ejemplos

$\chi \equiv 1$: funcion-ζ de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}},$$

Ejemplos

$\chi \equiv 1$: funcion-ζ de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

$$\chi_1 : (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times = \{\bar{1}, \bar{3}\} \to \mathbb{C}^\times, \quad \chi_1(\bar{1}) = 1, \quad \chi_1(\bar{3}) = -1$$

$$L(1, \chi_1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

Ecuaciones Diofanticas

Conjeturas de Catalan y Fermat

p, q numero primo

Catalan(1844), Teorema(MIHĂILESCU, 2002):

$$x^p - y^q = 1,$$

tiene como solucion unica

$$3^2 - 2^3 = 1$$

en $\mathbb{Z}$ con $x, y > 0$.

Conjeturas de Catalan y Fermat

p, q numero primo

Catalan(1844), Teorema(MIHĂILESCU, 2002):

$$x^p - y^q = 1,$$

tiene como solucion unica

$$3^2 - 2^3 = 1$$

en $\mathbb{Z}$ con $x, y > 0$.

Fermat(1665), Theorem(WILES et al., 1994):

$$x^p + y^p = z^p, \quad p > 2,$$

no tiene ninguna solucion en $\mathbb{Z}$ con $xyz \neq 0$.

Factorizacion sobre anillos enteros mas grandes

ζ_m raiz m-esima de unidad

$\mathbb{Z}[\zeta_m]$ anillo entero de $\mathbb{Q}(\zeta_m)$,

por ejemplo para $m = 4$ con $i^2 = -1$ tenemos en $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}\}$:

$$x^3 - y^2 = 1 \Leftrightarrow x^3 = (y + i)(y - i)$$

y para $m = p^n$ tenemos en $\mathbb{Z}[\zeta_{p^n}]$:

$$x^{p^n} + y^{p^n} = (x + y)(x + \zeta_{p^n} y)(x + \zeta_{p^n}^2 y) \cdot \ldots \cdot (x + \zeta_{p^n}^{p^n - 1} y) = z^{p^n}.$$

La estrategia

Expectativa: Utiliza *factorizacion unica en primos* para concluir una contradicion de la presuposicion que la ecuacion de Catalan o Fermat tiene una solucion non-trivial.

La estrategia

Expectativa: Utiliza *factorizacion unica en primos* para concluir una contradicion de la presuposicion que la ecuacion de Catalan o Fermat tiene una solucion non-trivial.

Problema: en general, $\mathbb{Z}[\zeta_m]$ *no* es un dominio con factorizacion unica (UFD), por ejemplo $\mathbb{Z}[\zeta_{23}]$!

Ideales

Kummer: Remplace numeros por ‘numeros ideales’:

Para ideales(=$\mathbb{Z}[\zeta_m]$-submodulos) $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq \mathbb{Z}[\zeta_m]$ tenemos factorizacion unica en ideales primos $\mathfrak{P}_i \neq 0$:

$$\mathfrak{a} = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{P}_i^{n_i}$$

Ideales principales: $(a) = \mathbb{Z}[\zeta_m]a$

Grupo de clases de ideales

$$\begin{aligned} Cl(\mathbb{Q}(\zeta_m)) : &= \{\text{ ideales de } \mathbb{Z}[\zeta_m]\}/\{\text{ ideales principales de } \mathbb{Z}[\zeta_m]\} \\ &\cong Pic(\mathbb{Z}[\zeta_m]) \end{aligned}$$

Grupo de clases de ideales

$$\begin{aligned} Cl(\mathbb{Q}(\zeta_m)) : &= \{ \text{ ideales de } \mathbb{Z}[\zeta_m]\}/\{ \text{ ideales principales de } \mathbb{Z}[\zeta_m]\} \\ &\cong Pic(\mathbb{Z}[\zeta_m]) \end{aligned}$$

Teorema Fundamental de la teoria algebraica de numeros:

$$\#Cl(\mathbb{Q}(\zeta_m)) < \infty$$

y

$$h_{\mathbb{Q}(\zeta_m)} := \#Cl(\mathbb{Q}(\zeta_m)) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{Z}[\zeta_m] \text{ admite factorizacion unica.}$$

Grupo de clases de ideales

$$\begin{aligned} Cl(\mathbb{Q}(\zeta_m)) : &= \{ \text{ ideales de } \mathbb{Z}[\zeta_m]\}/\{ \text{ ideales principales de } \mathbb{Z}[\zeta_m]\} \\ &\cong Pic(\mathbb{Z}[\zeta_m]) \end{aligned}$$

Teorema Fundamental de la teoria algebraica de numeros:

$$\#Cl(\mathbb{Q}(\zeta_m)) < \infty$$

y

$$h_{\mathbb{Q}(\zeta_m)} := \#Cl(\mathbb{Q}(\zeta_m)) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{Z}[\zeta_m] \text{ admite factorizacion unica.}$$

¡Sin embargo es dificil determinarlo $Cl(\mathbb{Q}(\zeta_m))$, demasiadas relaciones!

La funcion-L soluciona el problema

¿Como podemos calcular

$$h_{\mathbb{Q}(i)}?$$

La funcion-L soluciona el problema

¿Como podemos calcular

$$h_{\mathbb{Q}(i)}?$$

Es un misterio que

$$L(s, \chi_1)$$

conoce la respuesta!

El caracter ciclotomico

Gauß:

$$G(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q}) \xrightarrow[\cong]{\kappa_N} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$$

con $g(\zeta_N) = \zeta_N^{\kappa_N(g)}$ para todos los $g \in G(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$

El caracter ciclotomico

Gauß:

$$G(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q}) \xrightarrow[\cong]{\kappa_N} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$$

con $g(\zeta_N) = \zeta_N^{\kappa_N(g)}$ para todos los $g \in G(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$

$N = 4$:

$\Rightarrow \chi_1$ es un caracter del grupo de Galois $G(\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q})$

$\Rightarrow L(s, \chi_1)$ invariante (analitico) de $\mathbb{Q}(i)$.

Formula analitica de numeros de clases para campos de numeros cuadraticos imaginarios:

$$h_{\mathbb{Q}(i)} = \frac{\#\mu(\mathbb{Q}(i))\sqrt{N}}{2\pi} L(1, \chi_1)$$

Formula analitica de numeros de clases para campos de numeros cuadraticos imaginarios:

$$\begin{aligned} h_{\mathbb{Q}(i)} &= \frac{\#\mu(\mathbb{Q}(i))\sqrt{N}}{2\pi} L(1,\chi_1) \\ &= \frac{4 \cdot 2}{2\pi} L(1,\chi_1) \end{aligned}$$

Formula analitica de numeros de clases para campos de numeros cuadraticos imaginarios:

$$\begin{aligned} h_{\mathbb{Q}(i)} &= \frac{\#\mu(\mathbb{Q}(i))\sqrt{N}}{2\pi} L(1,\chi_1) \\ &= \frac{4 \cdot 2}{2\pi} L(1,\chi_1) \\ &= \frac{4}{\pi} L(1,\chi_1) = 1 \quad \text{(por la formula de Leibniz)} \end{aligned}$$

Formula analitica de numeros de clases para campos de numeros cuadraticos imaginarios:

$$\begin{aligned} h_{\mathbb{Q}(i)} &= \frac{\#\mu(\mathbb{Q}(i))\sqrt{N}}{2\pi} L(1,\chi_1) \\ &= \frac{4\cdot 2}{2\pi} L(1,\chi_1) \\ &= \frac{4}{\pi} L(1,\chi_1) = 1 \quad \text{(por la formula de Leibniz)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{Z}[i]$ admite factorizacion unica.

Un caso especial de la ecuacion de Catalan

Como '$L(s, \chi_1)$ sabe la aritmetica' de $\mathbb{Q}(i)$, es capaz de solucionar nuestro problema:

Claim: $x^3 - y^2 = 1$ no tiene solucion en $\mathbb{Z}$.

En la decomposicion $x^3 = (y + i)(y - i)$ los factores $(y + i)$ y $(y - i)$ son coprimos (facil!)

$\Rightarrow y + i = (a + bi)^3$ para algunos $a, b \in \mathbb{Z}$

Considerando $\mathrm{Re}(-)$ y $\mathrm{Im}(-)$ resulta en: $y = 0$, una contradiccion!

Primos regulares

Similarmente $\zeta(s)$ 'sabe' para cuales p

$$Cl(\mathbb{Q}(\zeta_p))(p) = 1$$

es valido! En este caso la ecuacion de Fermat no tiene ninguna solucion non-trivial. Pero $37 | h_{Cl(\mathbb{Q}(\zeta_{37}))}$!

Iwasawa:

$$Cl(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}))(p) =? \quad \text{para} \quad n \geq 1.$$

El caso de campos de funciones

Campos de numeros versus campos defunciones

$$\mathbb{Q} \longleftrightarrow \mathbb{F}_l(X) = K(\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_l})$$

$K/\mathbb{Q}$ campo de numeros $\longleftrightarrow$ $K(C)/\mathbb{F}_l(X)$ campo de funciones

$C \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_l}$	curva liza, projectiva, i.e.
$K(C)/\mathbb{F}_l(X)$	una extension finita

Contando puntos en C

$N_r := \#C(\mathbb{F}_{l^r})$ cardinalidad de puntos $\mathbb{F}_{l^r}$-racionales

$$\begin{aligned} \phi : C &\to C \\ x_i &\mapsto x_i^l \end{aligned}$$ Frobenius-automorfismo

Lefschetz-Trace-Formula

$$\begin{aligned} N_r &= \#\{\text{Puntos fijos de } C(\overline{\mathbb{F}_l}) \text{ bajo } \phi^r\} \\ &= \sum_{n=0}^{2} (-1)^n \mathrm{Tr}\left(\phi^r | \mathbb{H}^n(C)\right) \end{aligned}$$

Funcion-ζ de C, Weil (1948)

$$
\begin{aligned}
\zeta_C(s) :&= \prod_{x \,\epsilon\, |C|} \frac{1}{1-(\#k(x))^{-s}}, \qquad s \,\epsilon\, \mathbb{C},\ \ \Re(s) > 1,\\
&= \exp\Big(\sum_{r=1}^{\infty} N_r \frac{t^r}{r}\Big), \qquad\qquad t = l^{-s}\\
&= \prod_{n=0}^{2} \det(1-\phi t|\mathbb{H}^n(C))^{(-1)^{n+1}}\\
&= \frac{\det(1-\phi t|\text{“}Pic^0(\overline{C})\text{”})}{(1-t)(1-lt)} \quad \epsilon\, \mathbb{Q}(t)
\end{aligned}
$$

Hipotesis de Riemann para C

ζ_C es a funcion racional en t y tiene

polos en: $s = 0, \ s = 1$

ceros en especificos $s = \alpha$ satisfaciendo $\Re(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Hipotesis de Riemann para C

ζ_C es a funcion racional en t y tiene

polos en: $s = 0, \ s = 1$

ceros en especificos $s = \alpha$ satisfaciendo $\Re(\alpha) = \frac{1}{2}$.

¿Puede la funcion-ζ de Riemann ser expresada como funcion racional?

Teoria de Iwasawa clasica

Torres de campos de numeros

Estudiando la formula de clases de numeros en una torre entera de campos de numeros al mismo tiempo:

$$\mathbb{Q} \subseteq F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_n \subseteq F_{n+1} \subseteq \ldots \subseteq F_\infty := \bigcup_{n\geq 0} F_n.$$

con $F_n := \mathbb{Q}(\zeta_{p^n}),\ 1 \leq n \leq \infty,$

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \ \subseteq\ \mathbb{Q}_p := \mathrm{Quot}(\mathbb{Z}_p),$$

$$\kappa : G := G(F_\infty/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_p^\times,$$

$$g(\zeta_{p^n}) = \zeta_{p^n}^{\kappa(g)} \text{ para todos los } g \in G, n \geq 0$$

$$\begin{tikzcd}
F_\infty \arrow[d, no head] \arrow[dd, no head, bend left, "G"] \\
F_n \arrow[d, no head] \\
\mathbb{Q}
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{Z}_p^\times \cong \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$, i.e. $\quad G = \Delta \times \Gamma$ con

$\Delta = G(F_1/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ y

$\Gamma = G(F_\infty/F_1) = \overline{<\gamma>} \cong \mathbb{Z}_p$.

Algebra de Iwasawa

$$\Lambda(G) := \varprojlim_{G' \trianglelefteq G \text{ abierta}} \mathbb{Z}_p[G/G'] \cong \mathbb{Z}_p[\Delta][[T]]$$

con $T := \gamma - 1$.

Funciones p-adicas

Anillo maximo de cuocientes de $\Lambda(G)$: $\quad Q(G) \cong \prod_{i=1}^{p-1} Q(\mathbb{Z}_p[[T]])$.

$Z = (Z_1(T), \ldots, Z_{p-1}(T)) \in Q(G)$ son funciones en $\mathbb{Z}_p$: para $n \in \mathbb{N}$

$$Z(n) := Z_{i(n)}(\kappa(\gamma)^n - 1) \in \mathbb{Q}_p \cup \{\infty\}, \quad i(n) \equiv n \bmod (p-1)$$

Funcion-ζ p-adica *analitica*

KUBOTA, LEOPOLDT y IWASAWA:

$\zeta_p \in Q(G)$ tal que para $k < 0$

$$\zeta_p(k) = (1 - p^{-k})\zeta(k),$$

i.e. ζ_p interpola - bajo el factor de Euler en p - la funcion-ζ de Riemann p-adicamente.

Grupo de clases de ideales sobre F_∞

IWASAWA: $\#Cl(F_n)(p) = p^{n \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}_p}(X) + \mathrm{const}}$ donde

$$X := X(F_\infty) = \varprojlim_n Cl(F_n)(p) \quad \text{con actuacion de } G,$$

Grupo de clases de ideales sobre F_∞

IWASAWA: $\#Cl(F_n)(p) = p^{n\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}_p}(X)+\mathrm{const}}$ donde

$$X := X(F_\infty) = \varprojlim_n Cl(F_n)(p) \quad \text{con actuacion de } G,$$

$$\mathbb{Z}_p(1) := \varprojlim_n \mu_{p^n} \quad \text{con actuacion de } G,$$

$$X^- \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p, \qquad \mathbb{Q}_p(1) := \mathbb{Z}_p(1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}_p$ de dimension finita con operacion por γ.

Conjetura Principal de Iwasawa

MAZUR y WILES (1986):

$$\zeta_p \equiv \frac{\det(1-\gamma T|X^- \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)}{\det(1-\gamma T|\mathbb{Q}_p(1))} \mod \Lambda(G)^\times$$

$$\equiv \prod_i \det(1-\gamma T|\mathbb{H}^i)^{(-1)^{i+1}} \mod \Lambda(G)^\times$$

funcion-ζ p-adic *analitica* *algebraica*

'formula de trace'

La analogia

campo de funciones	campo de numeros
$\overline{\mathbb{F}_l} = \mathbb{F}_l(\mu)$	$F_\infty = \mathbb{Q}(\mu(p))$
ϕ	γ
C	$\mathbb{G}_m$
ζ_C	ζ_p
$Pic^0(\overline{C})$	X‘$=$’ $Pic(F_\infty)$

Teoria de Iwasawa

no-conmutativa

De $\mathbb{G}_m$ a representaciones arbitrarias

hasta ahora:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \text{coeficientes en cohomologia: } \mathbb{Z}_p(1) \\
\mathbb{G}_m,\ \mu(p) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \text{torre de campos de numeros: } F_\infty = \mathbb{Q}(\mu(p))
\end{tikzcd}
$$

Generalizaciones

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}(V)$$

representacion (continua) con $V \cong \mathbb{Q}_p^n$
y recteo Galois-estable $T \cong \mathbb{Z}_p^n$.

ρ → coeficientes en cohomologia: T

ρ → torre de campos de numeros: $K_\infty = \overline{\mathbb{Q}}^{\ker(\rho)}$

Ejemplo: E curva elliptica sobre $\mathbb{Q}$,
$T = T_p E = \varprojlim_n E[p^n] \cong \mathbb{Z}_p^2, \quad V := T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$.

Extensiones de Lie p-adicas

$F_\infty \subseteq K_\infty$ tal que

$\mathcal{G} := G(K_\infty/\mathbb{Q}) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$

es un grupo de Lie p-adico

con subgrupo H tal que

$$\Gamma := \mathcal{G}/H \cong \mathbb{Z}_p$$

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & K_\infty \arrow[dl, "H"'] \arrow[ddl, bend left, "\mathcal{G}"] \\
F_\infty \arrow[d, "\Gamma"'] & \\
\mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

Philosofia

Adhiera a (ρ, V)

- funcion-L p-adica *analitica* $\mathcal{L}(V, K_\infty)$ con propiedad de interpolacion
$$\mathcal{L}(V, K_\infty) \sim L(1, V \otimes \chi)$$
para $\chi : \mathcal{G} \to GL_n(\mathbb{Z}_p)$ con imagen finito.
- funcion-L p-adica *algebraica* $F(V, K_\infty)$.

Philosofia

Adhiera a (ρ, V)

- funcion-L p-adica *analitica* $\mathcal{L}(V, K_\infty)$ con propiedad de interpolacion
$$\mathcal{L}(V, K_\infty) \sim L(1, V \otimes \chi)$$
para $\chi : \mathcal{G} \to GL_n(\mathbb{Z}_p)$ con imagen finito.
- funcion-L p-adica *algebraica* $F(V, K_\infty)$.

Problema: $\Lambda(\mathcal{G})$ en general no es conmutativa! Determinantes non-conmutativas?

Conjetura Principal de Iwasawa no-conmutativa

COATES, FUKAYA, KATO, SUJATHA, V.:

Existe una localisacion canonica $\Lambda(\mathcal{G})_S$ de $\Lambda(\mathcal{G})$, tal que $F(V, K_\infty)$ existe en

$$K_1(\Lambda(\mathcal{G})_S).$$

Tambien $\mathcal{L}(V, K_\infty)$ deberia vivir en este grupo de K.

Conjetura Principal de Iwasawa no-conmutativa

COATES, FUKAYA, KATO, SUJATHA, V.:

Existe una localisacion canonica $\Lambda(\mathcal{G})_S$ de $\Lambda(\mathcal{G})$, tal que $F(V, K_\infty)$ existe en

$$K_1(\Lambda(\mathcal{G})_S).$$

Tambien $\mathcal{L}(V, K_\infty)$ deberia vivir en este grupo de K.

Conjetura Principal:

$$\mathcal{L}(V, K_\infty) \equiv F(V, K_\infty) \mod K_1(\Lambda(\mathcal{G})).$$

Polinomiales caracteristicas non-conmutativos

M $\Lambda(\mathcal{G})$-modulo, finitamente generado sobre $\Lambda(H)$-module

BURNS, SCHNEIDER, V.:

$$\Lambda(\mathcal{G})_S \otimes_{\Lambda(H)} M \xrightarrow[\cong]{\text{“}1-\gamma\text{”}} \Lambda(\mathcal{G})_S \otimes_{\Lambda(H)} M$$

induce “$\det(1-\gamma T|M)$” $\in K_1(\Lambda(\mathcal{G})_S)$.

Polinomiales caracteristicas non-conmutativos

M $\Lambda(\mathcal{G})$-modulo, finitamente generado sobre $\Lambda(H)$-module

Burns, Schneider, V.:

$$\Lambda(\mathcal{G})_S \otimes_{\Lambda(H)} M \xrightarrow[\cong]{\text{“}1-\gamma\text{”}} \Lambda(\mathcal{G})_S \otimes_{\Lambda(H)} M$$

induce “$\det(1-\gamma T|M)$” ϵ $K_1(\Lambda(\mathcal{G})_S)$.

Conjetura Principal sobre K_∞ :

“formula de trace" en $K_1(\Lambda(\mathcal{G})_S)$ mod $K_1(\Lambda(\mathcal{G}))$:

$$\mathcal{L}(K_\infty, \mathbb{Z}_p(1)) \equiv \det(1-\gamma T|\mathbb{H}^\bullet(K_\infty, \mathbb{Z}_p(1)))$$

Congruencias nuevas

Para coeficientes $\mathbb{Z}_p(1)$:

KATO, BURNS, KAKDE:

$$\begin{tikzcd} K_1(\Lambda(\mathcal{G})) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \prod_i \mathcal{O}[[U_i^{ab}]]^\times \arrow[d] \\ K_1(\Lambda(\mathcal{G})_S) \arrow[r] & \prod_i \mathrm{Quot}(\mathcal{O}[[U_i^{ab}]])^\times \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{L}(K_\infty/\mathbb{Q}) \longmapsto (L_p(F_{i,\infty}))_i$$

Congruencias nuevas

Para coeficientes $\mathbb{Z}_p(1)$:

KATO, BURNS, KAKDE:
$$\begin{tikzcd} K_1(\Lambda(\mathcal{G})) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \prod_i \mathcal{O}[[U_i^{ab}]]^\times \arrow[d] \\ K_1(\Lambda(\mathcal{G})_S) \arrow[r] & \prod_i \mathrm{Quot}(\mathcal{O}[[U_i^{ab}]])^\times \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{L}(K_\infty/\mathbb{Q}) \longmapsto (L_p(F_{i,\infty}))_i$$

Existencia de $\mathcal{L}(K_\infty/\mathbb{Q})$ $\iff$ congruencias entre $L_p(\chi_i, F_\infty)$
Main Conjecture $/K_\infty$ $\iff$ Conjetura Principal $/F_\infty$ para todos lo

Resultados parecidos por RITTER, WEISS para H finito.

La Conjetura Prinicipal para campos totalmente reales

F totalmente real, $F_{cyc} \subseteq K_\infty$ totalmente real,

Teorema (2010, Ritter-Weiss (dimension 1), Kakde (dimension arbitraria))

Si $\mu = 0$ para F_∞/F, entonces la Conjetura Principal no-conmutativa para el motivo de Tate (i.e. para $\mathbb{G}_m$) vale sobre K_∞/F.

Muchas gracias por su atencion!