

**SUPERCONDUCTIVIDAD SUPERFICIAL Y TRANSICIONES DE  
FASE EN ANILLOS SUPERCONDUCTORES MESOSCÓPICOS BAJO  
CONDICIONES DE FRONTERA DE DE GENNES**

**LUIS ALBERTO CHALACAN VELASQUEZ**

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE FÍSICA  
SAN JUAN DE PASTO  
2008**

**SUPERCONDUCTIVIDAD SUPERFICIAL Y TRANSICIONES DE  
FASE EN ANILLOS SUPERCONDUCTORES MESOSCÓPICOS BAJO  
CONDICIONES DE FRONTERA DE DE GENNES**

**LUIS ALBERTO CHALACAN VELASQUEZ**

**TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR EL TÍTULO DE FÍSICO**

**DIRECTOR:  
MSc. FRANCIS SEGOVIA**

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE FÍSICA  
SAN JUAN DE PASTO  
2008**

Las ideas y conclusiones aportadas en este trabajo de grado, son responsabilidad exclusiva del autor

Artículo primero del acuerdo No. 324 de Octubre 11 de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de aceptación

---

---

---

---

---

---

Director

---

Jurado

---

Jurado

## AGRADECIMIENTOS

Expreso mis agradecimientos a aquellas personas que a lo largo de estos seis años me han brindado su apoyo de alguna manera:

Desde el punto de vista profesional agradezco a mi asesor de tesis, Francis Segovia, por el tiempo dedicado, por su ayuda incondicional y por transmitirme sus conocimientos.

A los miembros del jurado, por haber aceptado leer el trabajo y por sus comentarios acerca del mismo.

A mis compañeros con quienes hemos intercambiado alguna que otra “discusión”, charla, o compartido algún “nony” o asado.

Quiero agradecerles de todo corazón a las personas que más quiero: a mis padres y hermanos por su apoyo incondicional.

## DEDICATORIA

Este trabajo está dedicado principalmente a mis padres con los que he compartido los mejores momentos de mi vida y por los que he llegado hasta aquí.

A mis hermanos, por ser una parte fundamental en mi vida.

A mis amigos quienes me apoyaron en esos momentos difíciles de la vida y me brindaron su ayuda incondicional.

## TABLA DE CONTENIDO

|   | Pág. |
|---|------|
| 1. INTRODUCCIÓN   | 15   |
| 2. OBJETIVOS  | 17   |
| 2.1 OBJETIVOS GENERALES   | 17   |
| 2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS   | 17   |
| 3. TEORÍA DE GINZBURG Y LANDAU  | 18   |
| 3.1 TERMODINÁMICA   | 18   |
| 3.2 TRANSICIONES DE FASE  | 19   |
| 3.3 TEORÍA DE GINZBURG Y LANDAU   | 20   |
| 3.4 CUANTIZACIÓN DEL FLUJO  | 26   |
| 3.5 TIPOS DE SUPERCONDUCTORES   | 27   |
| 4. SUPERCONDUCTIVIDAD SUPERFICIAL BAJO CONDICIONES DE FRONTERA DE DE GENNES | 31   |
| 4.1 APROXIMACIÓN LINEAL   | 31   |
| 4.1.1 Energías del sistema  | 39   |
| 5. TRANSICIONES DE FASE EN ANILLOS SUPERCONDUCTORES MESOSCÓPICOS            | 48   |
| 5.1 CALCULO DEL ESPESOR CRÍTICO   | 48   |
| 6. CONCLUSIONES   | 60   |
| RECOMENDACIONES   | 61   |
| BIBLIOGRAFÍA  | 62   |
| ANEXOS  | 63   |

## LISTA DE TABLAS

|   | Pág. |
|---|------|
| 1. Unidades para formar cantidades adimensionales | 32   |



## LISTA DE FIGURAS

|   | Pág. |
|---|------|
| 1. Energía de Landau en función del parámetro $\Psi$  | 22   |
| 2. Superconductores tipo II   | 28   |
| 3. Potencial doble parabólico   | 29   |
| 4. Anillo mesoscópico en un campo magnético constante   | 32   |
| 5. Menores funciones propias del operador $\hat{L}$ , para $R_H = 0,01$   | 36   |
| 6. Menores funciones propias del operador $\hat{L}$ , para $R_H = 0,5$  | 37   |
| 7. Influencia del parámetro de de Gennes en la distribución de la funciones propias del operador $\hat{L}$ en el anillo | 38   |
| 8. Comportamiento del campo crítico $H_{c3}$ , para $R_H = 0,5$   | 40   |
| 9. Aumento y disminución de la región superconductora, para $R_H = 0,5$   | 42   |
| 10. Comportamiento del campo crítico $H_{c3}$ , para $R_H = 0,01$   | 43   |
| 11. Comparación del campo crítico $H_{c3}$ , para diferentes valores de $R_H$   | 44   |
| 12. Regiones de efecto Meissner paramagnético   | 47   |
| 13. Representación del elemento de supercorriente   | 49   |
| 14. Espesor crítico como función del radio del anillo, para diferentes $R_H$  | 57   |
| 15. Espesor crítico para diferentes valores del parámetro de de Gennes.   | 58   |

## LISTA DE ANEXOS

|  | Pág. |
|--|------|
| Anexo A. Ecuación de Fredholm                    | 63   |
| Anexo B. Método de interacción: serie de Newmann | 65   |

## RESUMEN

En el marco de la teoría de Ginzburg-Landau y considerando únicamente la parte lineal, se estudia el comportamiento de un anillo superconductor mesoscópico de espesor despreciable, cuando se encuentra en presencia de un campo magnético aplicado perpendicularmente a su plano. En estas condiciones se calcula el campo crítico  $H_{c3}$ , cuando el anillo se encuentra en contacto interna y externamente con materiales de diferentes propiedades eléctricas y magnéticas. Mediante una expansión sobre las funciones propias de la primera ecuación de Ginzburg-Landau linealizada, se determina una aproximación analítica para el espesor crítico del anillo, que conlleva a predecir el orden de la transición de fase.

## ABSTRACT

In presence of a magnetic field perpendicularly applied to the ring plane, the behavior of a mesoscopic superconducting ring with negligible thickness is analyzed from linear approach of Ginzburg-Landau theory. At these conditions the critical field ( $H_{c3}$ ) is calculated when both the inner and outer edges come into contact with different materials. Using an expansion over the eigenfunctions of the first linearized Ginzburg-Landau equation is developed an analytical approach of critical thickness of the ring which predicts the order of phase transition.

## 1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años, el estudio del estado superconductor ha tomado gran interés debido a las modernas técnicas de nanofabricación, con las cuales los experimentadores son capaces de crear una gran diversidad de estructuras superconductoras mesoscópicas con diferentes propiedades eléctricas y magnéticas. El comportamiento de tales estructuras en un campo magnético externo es prácticamente influenciado por su geometría y por las condiciones de frontera, que pueden conducir a nuevos estados superconductores<sup>1</sup>. En un sistema circular el estado superconductor está caracterizado por un momento angular definido; que es justamente el número de cuantos de flujo atrapados por el anillo. Por otro lado, las transiciones entre los estados superconductores con diferentes valores de momento angular ocurren cuando el campo magnético y/o la temperatura son débilmente cambiadas; estas transiciones son acompañadas por saltos en la magnetización de la muestra y en el calor específico (transición de primer orden)<sup>2</sup>.

Una teoría que es muy utilizada para el estudio de muchas propiedades de muestras mesoscópicas superconductoras, es la teoría de Ginzburg y Landau. Se consideraba que esta teoría se limitaba a aquellas regiones cercanas al punto de transición de fase; sin embargo, estudios recientes han demostrado que esta teoría es válida para regiones más extensas; es decir, a un rango mayor de campos magnéticos y de temperaturas. Esta teoría permite predecir la existencia de dos tipos de superconductores: los superconductores tipo I ( $k < 1/\sqrt{2}$ ), para los cuales el estado superconductor existe para campos magnéticos por debajo de un valor crítico  $H_c$ , y los superconductores tipo II ( $k > 1/\sqrt{2}$ ), para los cuales el estado mixto se inicia a campos mayores que el campo crítico  $H_{c1}$  (por debajo del cual exhibe diamagnetismo perfecto), y culmina a campos magnéticos del orden del campo crítico superior ( $H_{c2}$ )<sup>3</sup>. Por encima de este campo, la nucleación de la superconductividad ocurre en una capa superficial, para un campo crítico  $H_{c3} > H_{c2}$ , el cual para campos magnéticos pequeños muestra una dependencia oscilatoria<sup>4</sup>.

Para valores menores que el valor crítico  $H_{c3}$ , uno de los efectos sobresalientes en una muestra superconductora mesoscópica es el efecto Meissner paramagnético (PME), donde la energía de la muestra decrece cuando existe un comportamiento paramagnético para ciertas regiones del diagrama de fase, alternándose con el comportamiento diamagnético convencional<sup>5</sup>.

El presente trabajo se presenta de la siguiente forma: en la sección tres se estudia la teoría que explica algunos de los fenómenos del estado superconductor, tipos y orden de las transiciones de fase así como los tipos de superconductores con sus respectivos campos críticos (Teoría de Ginzburg y Landau). En la sección cuatro, se analiza el comportamiento del anillo superconductor mesoscópico, en presencia de un campo

---

<sup>1</sup>V.A. Schweigert and F.M. Peeters, Phys.Rev.B 57,13817 (1998).

<sup>2</sup>Ibid., p.1

<sup>3</sup>Landau.L.D. Statistical Physics: Part 2, Theory of the Condensed State. Pergamon, p. 191.

<sup>4</sup>W.A. Little and R. D. Parks, Phys. Rev. Lett. 9,9 (1962); Phys. Rev. 133, A97(1964).

<sup>5</sup>C. Meyers, Phys. Rev. B 68, 104522 (2003).

magnético externo constante, y la influencia en el campo crítico  $H_{c3}$ , cuando el anillo se encuentra en contacto con materiales de diferentes propiedades eléctricas y magnéticas (condiciones de frontera de de Gennes). En la sección cinco mediante una expansión del parámetro de orden obtenido en la parte cuatro, se obtiene el espesor crítico, del cual depende el orden de la transición de fase.

## 2. OBJETIVOS

### 2.1 OBJETIVOS GENERALES

- Analizar el comportamiento de un anillo superconductor mesoscópico en presencia de un campo magnético aplicado perpendicularmente al plano del anillo, cuando éste se encuentra en contacto con medios de diferentes propiedades eléctricas y magnéticas.
- Analizar el efecto del confinamiento geométrico en la muestra mesoscópica sobre la superconductividad superficial.

### 2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Solucionar la ecuación de Ginzburg-Landau en el régimen lineal, para un anillo superconductor mesoscópico con diferentes parámetros de De Gennes.
- Encontrar las regiones donde persiste la superconductividad superficial para medios con parámetros de De Gennes finitos.
- Determinar el orden de la transición de fase en el anillo superconductor, mediante una expansión del parámetro de orden en el régimen lineal.

### 3. TEORÍA DE GINZBURG Y LANDAU

La teoría de Ginzburg y Landau es tal vez la herramienta más poderosa para el estudio de diferentes propiedades de los sistemas superconductores mesoscópicos, de las cuales se pueden obtener importantes conclusiones del comportamiento de estas muestras bajo diferentes condiciones. Estudiaremos el caso para el cual el anillo superconductor se encuentra en contacto con diferentes materiales.

#### 3.1 TERMODINÁMICA

Los sistemas macroscópicos se caracterizan por tener un gran número de grados de libertad y esto hace que sea necesario describirlos desde un punto de vista simplificado. La termodinámica permite hacer una descripción efectiva de los sistemas macroscópicos en términos de un número reducido de variables. Estas variables se acostumbra a clasificar en dos grupos: magnitudes intensivas (independientes del tamaño del sistema) y magnitudes extensivas (dependen del tamaño del sistema). Ejemplos típicos de magnitudes intensivas son la temperatura  $T$ , la presión  $p$  en sistemas hidrostáticos o la intensidad del campo magnético  $H$  en sistemas que involucran grados de libertad magnéticos. El volumen  $V$  y la magnetización  $M$  son ejemplos de variables extensivas en sistemas hidrostáticos y magnéticos, respectivamente<sup>6</sup>. En particular, consideramos que el estado superconductor puede describirse macroscópicamente por la temperatura, una variable intensiva  $\Phi$  (campo magnético  $H$ ) y una variable extensiva  $\Psi$  (parámetro de orden).

En un determinado experimento, se llaman variables de control a aquellas que permiten variar externamente el estado del sistema. En los sistemas que se estudian en este trabajo, la variable de control es la temperatura o bien otra magnitud intensiva  $\Phi$  (campo magnético externo). El cambio del estado del sistema al variar una de las variables de control se refleja macroscópicamente por una variación de la magnitud  $\Psi$ . Básicamente se distinguen los siguientes tipos de estados en sistemas aislados:

★ Estado de equilibrio: es un estado dinámicamente estable en que las variables termodinámicas son independientes del tiempo. En estos estados, las variables macroscópicas ( $T, \Psi, \Phi$ ) no son totalmente independientes entre sí, sino que están relacionadas por la ecuación de estado<sup>7</sup>.

★ Estado de no equilibrio: en sistemas aislados, los estados de no equilibrio son dinámicamente inestables y evolucionan espontáneamente hacia un estado de equilibrio mediante procesos irreversibles<sup>8</sup>. El tiempo de relajación hacia el equilibrio disminuye al aumentar la temperatura. Un caso particular de estados de no equilibrio son los estados metaestables. Estos estados son inestables frente a grandes fluctuaciones y se caracterizan por unos tiempos de relajación hacia el equilibrio generalmente grandes.

---

<sup>6</sup>Pérez Reche, Francisco Jose. <http://www.tesisenred.net/TDX-0603105-114114>.

<sup>7</sup>Ibid. <http://www.tesisenred.net/TDX-0603105-114114>.

<sup>8</sup>Ibid. <http://www.tesisenred.net/TDX-0603105-114114>.



En un proceso espontáneo hacia el equilibrio, la entropía  $S$  tiende a un máximo y los potenciales termodinámicos (energía interna, entalpía, energía libre de Helmholtz y energía libre de Gibbs) tienden a un mínimo<sup>9</sup>. Así pues, los estados de equilibrio corresponden a máximos de entropía y mínimos de los potenciales termodinámicos.

### 3.2 TRANSICIONES DE FASE

Una transición de fase se define de forma no rigurosa como el cambio brusco de las propiedades macroscópicas de un sistema termodinámico por efecto de la variación de algún parámetro de control externo<sup>10</sup>. Una fase se puede definir como un conjunto de estados de un sistema macroscópico que presenta una cierta uniformidad en su composición y en sus propiedades físicas (densidad, estructura cristalina, etc.). Una definición más rigurosa basada en la termodinámica es la siguiente: una fase de un sistema es la región en el espacio de parámetros de las variables termodinámicas en que la energía libre es analítica<sup>11</sup>. De acuerdo con esta definición, dos estados de un sistema pertenecen a la misma fase, si es posible pasar de uno a otro por un camino (en el espacio de las variables termodinámicas), tal que no existan discontinuidades en ninguna de sus propiedades termodinámicas (entropía, capacidad calorífica, magnetización, etc.) que, de hecho, se pueden expresar en función de la energía libre y de sus derivadas<sup>12</sup>. Las no analiticidades suelen ser una consecuencia de la interacción de un número muy grande de partículas del sistema y solo ocurren en sistemas muy grandes. Ejemplos típicos de transiciones de fase son: transiciones entre las fases sólida, líquida y gaseosa; transiciones con distinto orden magnético en materiales magnéticos.

El primer intento de clasificar las transiciones de fase se debe a Ehrenfest que las agrupó según el grado de no analiticidad de la energía libre en la transición. Según esta clasificación, una transición se dice que es de orden  $k$ -ésimo si las derivadas  $k$ -ésimas de la energía libre  $G$  con respecto a  $T$  y a  $\Phi$  (variable intensiva) son discontinuas (suponiendo un sistema descrito por las variables termodinámicas  $(T, \Phi, \Psi)$ ). En las transiciones de primer orden ( $k-1$ ) las discontinuidades en la derivadas primeras implican discontinuidades en la entropía y en  $\Psi$ .

A pesar de la importancia histórica de la clasificación de Ehrenfest, en algunos casos no es lo suficientemente precisa. Por ejemplo, en la transición magnética desde una fase paramagnética a una ferromagnética al disminuir la temperatura se observa una divergencia de la capacidad calorífica ( $C = T(\partial S/\partial T)$ )<sup>13</sup>. Esto implica una divergencia de la derivada de la entropía con respecto a  $T$  y, como consecuencia, podría deducirse una discontinuidad en la entropía. De acuerdo con esto, sería una transición de primer orden según la clasificación de Ehrenfest. Sin embargo, tanto la entropía como la magnetización cambian de forma continua en la transición. Para solventar inconsistencias de este tipo, se utiliza la siguiente clasificación:

---

<sup>9</sup>Pérez Reche, Francisco Jose. <http://www.tesisenred.net/TDX-0603105-114114>.

<sup>10</sup>Ibid. <http://www.tesisenred.net/TDX-0603105-114114>.

<sup>11</sup>Ibid. <http://www.tesisenred.net/TDX-0603105-114114>.

<sup>12</sup>Ibid. <http://www.tesisenred.net/TDX-0603105-114114>.

<sup>13</sup>Ibid. <http://www.tesisenred.net/TDX-0603105-114114>.

- Transiciones de fase de primer orden: son transiciones en las que el sistema absorbe o desprende una cierta cantidad de calor (calor latente) y en que hay coexistencia de fases <sup>14</sup>. Ejemplos típicos de estas transiciones son las transiciones solido/liquido/gas o la transición que tiene lugar en un material ferromagnético al aplicar un campo magnético externo.
- Transiciones de fase continuas o de segundo orden: son transiciones que no tiene un calor latente asociado <sup>15</sup>. Ejemplos típicos son la transición a un estado ferromagnético al disminuir la temperatura o la transición a un estado superconductor. Estas transiciones están asociadas a la presencia de un punto crítico.

Una transición de fase de segundo orden es continua en el sentido que el estado del cuerpo cambia continuamente, es decir, la simetría cambia continuamente en el punto de transición. Si el cambio en la simetría del cuerpo ocurre por un desplazamiento de átomos, el cambio en la simetría en una transición de fase de segundo orden puede resultar del cambio en el ordenamiento del cristal; ordenamiento refiriéndose a que si el número de puntos de red que pueden ser ocupados por átomos de una clase dada, excede el número de tales átomos<sup>16</sup>.

Una transición de fase de segundo orden puede también causar una transformación entre dos fases diferentes con alguna otra propiedad de simetría; como, por ejemplo, en los puntos Curie (puntos críticos) de sustancias ferromagnéticas (los punto en los que son paramagnéticas). En este caso hay un cambio en la simetría del arreglo de momentos magnéticos elementales en el cuerpo, o más precisamente una desaparición de la corriente  $\mathbf{J}$  en él <sup>17</sup>.

### 3.3 TEORÍA DE GINZBURG-LANDAU

La teoría de Landau de las transiciones de fase continuas es la primera aplicación de las ideas de la teoría de grupo a la termodinámica. Landau puso de manifiesto que las transiciones de fase entre fases con distintas simetrías (por ejemplo transiciones en sólidos cristalinos) son esencialmente distintas de aquéllas en que las fases involucradas tienen la misma simetría (por ejemplo la transición líquido  $\rightarrow$  gas). Si cada fase tiene una simetría distinta, en la transición debe aparecer o desaparecer elementos de simetría y tales elementos o bien están presentes o bien están ausentes<sup>18</sup>. No existen situaciones intermedias y, por tanto, se puede determinar la fase en la que se encuentra el sistema en cualquier situación por su simetría. La transición de fase se puede interpretar como una rotura de la simetría. En general, en las transiciones de fase de segundo orden de este tipo, la simetría de una de las fases es más alta que la de la otra fase. En la mayoría de transiciones de fase continuas, la fase más simétrica corresponde a la fase de alta temperatura (incluido el punto de transición) y la fase menos simétrica, es la que se obtiene al disminuir la temperatura del sistema.

<sup>14</sup>[www.famaf.unc.edu.ar/~gcas/termo1/clases/node61.html](http://www.famaf.unc.edu.ar/~gcas/termo1/clases/node61.html).

<sup>15</sup>Ibid. [www.famaf.unc.edu.ar](http://www.famaf.unc.edu.ar).

<sup>16</sup>Landau.L.D. Statistical Physics: Part 1, Theory of the Condensed State. Pergamon, p. 397.

<sup>17</sup>Landau.L.D. Statistical Physics: Part 2, Theory of the Condensed State. Pergamon, p. 192.

<sup>18</sup>Landau. Parte 1, Op. cit., p. 396.

Un concepto central dentro de la teoría de Landau es el parámetro de orden que se denotará como  $\Psi$ . Este parámetro permite caracterizar cuantitativamente los cambios de simetría que tienen lugar en las transiciones de fase <sup>19</sup>, y se define de tal forma que es nulo en la fase más simétrica (temperaturas de fase altas  $T > T_c$ ) y difiere de cero en la fase menos simétrica (bajo la transición  $T < T_c$ ). De acuerdo a esto, la transición de fase se puede interpretar como una rotura de simetría inducida por la aparición del parámetro de orden.

En una transición de fase de segundo orden, el parámetro de orden cambia de forma continua en el punto de transición y, para valores pequeños tiene sentido expresar la energía libre del estado superconductor como una funcional de  $\Psi(\mathbf{r})$ . De acuerdo con las ideas originales de Landau, esto se consigue, expandiendo la densidad de energía libre, en potencias del pequeño (cerca al punto de transición) parámetro de orden  $\Psi$ <sup>20</sup>:

$$F = F_n + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i} \Psi^i$$

En analogía con la teoría de Landau, un punto de transición de segundo orden debe ser una singularidad de la energía libre, entonces la expansión puede ser discontinua para términos de orden alto, las mínimas condiciones necesarias sobre los coeficientes  $a_i$  para que tenga lugar una transición de segundo orden son<sup>21</sup>:

- $a_1 = 0$ , ya que se asume que los estados con  $\Psi = 0$  y  $\Psi \neq 0$  son de simetría diferente.
- $a_2$  es igual a cero en el punto de transición. Si en la fase simétrica el valor de  $\Psi = 0$  debe corresponder a un mínimo de  $F$  entonces  $a_2 > 0$ ; mientras que del otro lado del punto de la transición, en la fase no simétrica  $\Psi \neq 0$  debe corresponder al estado estable y es posible solo si  $a_2 < 0$ .

De acuerdo con este comportamiento, es habitual hacer la aproximación  $a_2 = a(T - T_c)$  cerca al punto de transición.

- $a_3 = 0$  debido a la simetría del cristal<sup>22</sup>. Las cantidades físicas deben ser invariantes bajo una transformación del parámetro de orden complejo  $\Psi \rightarrow \Psi e^{i\varphi}$ , esto excluye potencias impares de  $\Psi$  en la expansión de la energía libre.
- $a_4 > 0$ . Si el punto de transición es un estado estable; es decir, si  $F$  como una función de  $\Psi$  es un mínimo en  $\Psi = 0$ , es necesario que  $a_3 = 0$  y que  $a_4$  sea positivo<sup>23</sup>.

Con estas condiciones mínimas, la energía libre (energía de Landau) resultante es:

<sup>19</sup>Landau. Part 2, Op. cit., p. 191.

<sup>20</sup>Landau. Part 1, Op. cit., p. 398.

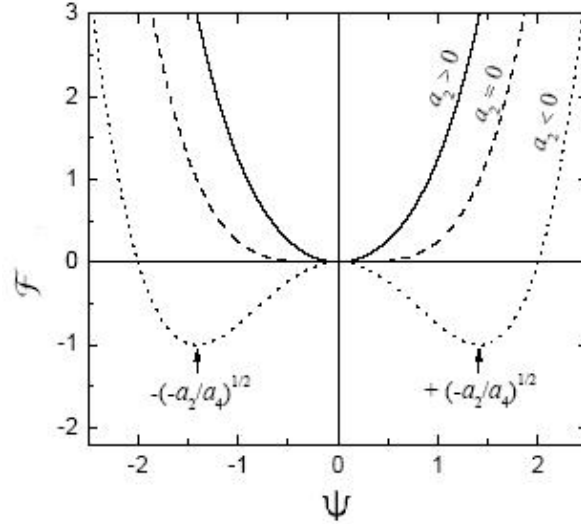
<sup>21</sup>Ibid., p. 397-399.

<sup>22</sup>Esta condición es necesaria pero no suficiente para que sea posible una transición de fase de segundo orden.

<sup>23</sup>Landau. Parte 1, Op. cit., p 398.

$$F = F_n + \frac{1}{2}a_2|\Psi|^2 + \frac{1}{4}a_4|\Psi|^4 = F_n + \alpha|\Psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\Psi|^4 \quad (3.1)$$

Figura 1. Energía de Landau (3.1) en función del parámetro  $\Psi$ .



Donde se ha considerado  $2\alpha = a_2$  y  $2\beta = a_4$ . En la figura 1 se ha graficado la energía libre de Landau, para tres valores diferentes de  $a_2$ , no se ha tomado el término de la energía libre en el estado normal. Ahora, para describir situaciones en las cuales la superconductividad no sea homogénea debemos generalizar la ecuación 3.1. Teniendo en cuenta que  $F$  se interpreta como una densidad de energía  $f(\mathbf{r})$  se puede escribir:

$$F = F_n + \int f(\mathbf{r})d^3r = F_n + \int d^3r \left[ \alpha|\Psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2}\beta|\Psi(\mathbf{r})|^4 \right] \quad (3.2)$$

Donde  $F$  es la energía total libre. Para computar efectos del incremento de la energía asociada con una distorsión espacial del parámetro de orden, es decir, el efecto asociado con una longitud de coherencia  $\xi$ ; Ginzburg y Landau sumaron un "gradiente de energía" de la forma<sup>24</sup>:

$$F_G = \int \frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla\Psi(\mathbf{r})|^2 d^3r \quad (3.3)$$

Con lo cual la ecuación 3.2 se convierte en:

$$F = F_n + \int d^3r \left[ \frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla\Psi|^2 + \alpha|\Psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2}\beta|\Psi(\mathbf{r})|^4 \right] \quad (3.4)$$

Donde  $F_n$  es la energía libre en el estado normal, es decir, para  $\Psi = 0$ ;  $\beta$  es un coeficiente positivo que depende solamente de la densidad de la sustancia (más no de la temperatura).

<sup>24</sup>Ketterson, J.B. Superconductivity. Cambridge, 1999. p. 31.

En un superconductor homogéneo, sin presencia de campo externo, el parámetro  $\Psi$  es independiente de las coordenadas. Entonces la expresión 3.4 se reduce a<sup>25</sup>:

$$F = F_n + \alpha V |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta V |\Psi|^4 \quad (3.5)$$

El valor de equilibrio de  $|\Psi|^2$  (para  $T < T_c$ ), se determina por la condición de  $F$  como una función de  $\Psi$  sea un mínimo:

$$|\Psi|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a(T_c - T)}{\beta} \quad (3.6)$$

La densidad de electrones de superconductividad, como una función de la temperatura, decrece linealmente a cero en el punto de transición. Sustituyendo 3.6 en 3.5, encontramos la diferencia en las energías libres de los estados superconductor y normal<sup>26</sup>:

$$F_s - F_n = -V(a^2/2\beta)(T_c - T)^2 \quad (3.7)$$

De esta expresión podemos encontrar la discontinuidad en el calor específico en el punto de transición, recordando que  $S = -(\partial F/\partial T)_v$  y  $C = T(\partial S/\partial T)$ , tenemos:

$$C_s - C_n = \frac{V a^2 T_c}{\beta}$$

Cerca al punto de transición, la diferencia 3.7 es una pequeña adición a la energía libre y se encuentra que tiene un valor de  $-V H_c^2/8\pi$ , donde  $H_c$  es el campo crítico al cual la superconductividad se destruye, así encontramos una expresión para el campo crítico en función de la temperatura<sup>27</sup>:

$$H_c = (4\pi a^2/\beta)^{1/2}(T_c - T)$$

Vemos que este campo crítico depende directamente de la diferencia de las temperaturas y es cero en el punto de transición. Cuando un campo magnético constante esta presente, la expresión 3.4 para la energía libre debe ser modificada por dos razones<sup>28</sup>:

- La densidad de energía del campo magnético  $\mathbf{B}^2/8\pi$  (donde  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  inducción magnética en el cuerpo) debe introducirse en la integral.
- El término gradiente debe ser modificado con el fin de que sea invariante bajo una transformación gauge (local), de la forma:

$$\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \quad \nabla \rightarrow \nabla - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A}$$

---

<sup>25</sup>Landau. Part 2, Op. cit., p. 192.

<sup>26</sup>Ibid., p. 189.

<sup>27</sup>Ibid., p. 189.

<sup>28</sup>Ibid., p. 190.

Las anteriores consideraciones, nos permiten expresar la energía libre (energía de Landau) en la forma:

$$F = F_{n0} + \int d^3r \left( \alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\Psi|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left| \left[ \nabla - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A} \right] \Psi \right|^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right) \quad (3.8)$$

Donde  $F_{n0}$  es la energía libre del cuerpo en el estado normal y con ausencia de un campo magnético. El doblamiento de la carga del electrón es debido al efecto Cooper.

Las ecuaciones diferenciales, las cuales determinan la distribución del parámetro de orden y el campo magnético en un superconductor, son determinadas minimizando la energía libre con respecto a las tres cantidades independientes  $\Psi$ ,  $\Psi^*$  y  $\mathbf{A}$ . Variando la expresión 3.8 con respecto a  $\Psi^*$  tenemos la siguiente ecuación<sup>29</sup>:

$$\begin{aligned} \delta F = \int d^3r \left( -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left[ \nabla - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right]^2 \Psi(\mathbf{r}) + \alpha \Psi(\mathbf{r}) + \beta |\Psi(\mathbf{r})|^2 \Psi(\mathbf{r}) \right) \delta \Psi^*(\mathbf{r}) \\ + \int d^2\mathbf{r} \frac{\hbar^2}{2m^*} \left[ \nabla \Psi(\mathbf{r}) - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) \right] \delta \Psi^*(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Al minimizar  $F$  escogemos que el integrando de la primera parte sea cero, con lo cual obtenemos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left[ \nabla - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right]^2 \Psi(\mathbf{r}) + \alpha \Psi(\mathbf{r}) + \beta |\Psi(\mathbf{r})|^2 \Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.10)$$

Y el término superficial puede ser utilizado para obtener ciertas condiciones de frontera.

Ahora si se varía la ecuación 3.8 con respecto al potencial  $\mathbf{A}$ , se obtiene:

$$\delta F = \int d^3r \left[ \frac{i\hbar e^*}{2m^*c} [\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*] + \frac{e^{*2}}{m^*c} |\Psi|^2 \mathbf{A} + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \right] \delta \mathbf{A}$$

Colocando  $\delta F = 0$ , obtenemos la siguiente condición para que la integral sea cero para un arbitrario  $\delta \mathbf{A}$ <sup>30</sup>:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left( \frac{4\pi}{c} \right) \mathbf{J} \quad (3.11)$$

En la cual:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -\frac{i\hbar e^*}{2m^*} [\Psi^*(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}) - \Psi(\mathbf{r}) \nabla \Psi^*(\mathbf{r})] - \frac{e^{*2}}{m^*c} |\Psi(\mathbf{r})|^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (3.12)$$

Esta ecuación consiste de una corriente paramagnética (primer termino), y una corriente diamagnética (segundo termino). Es posible verificar que la densidad de corriente satisface la ecuación  $j(\mathbf{r}) = c\delta F/\delta \mathbf{A}(\mathbf{r})$ ; es decir, es la variable conjugada para  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ <sup>31</sup>.

<sup>29</sup>Ketterson, Op. cit., p. 48.

<sup>30</sup>Ibid., p. 49.

<sup>31</sup>Ketterson, Op. cit., p. 48.

Las ecuaciones 3.10 - 3.12 forman el conjunto completo de las ecuaciones de Ginzburg-Landau.

En un campo magnético débil, podemos despreciar la influencia del campo sobre  $|\Psi|^2$ , y tomar su valor dado por  $|\Psi|^2 = -\alpha/\beta$  en todos los puntos del cuerpo, sustituyendo 3.12 en 3.11 y tomando el rotacional en ambos lados obtenemos la ecuación de London<sup>32</sup>:

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B} \quad \lambda^2 = \frac{mc^2}{8\pi e^2 |\Psi|^2} = \frac{mc^2 \beta}{8\pi e^2 a (T_c - T)} \quad (3.13)$$

Con esta ecuación podemos encontrar la distribución del campo cerca a la superficie (asumida plana) del superconductor. Si tomamos la superficie como el plano y-z, con el eje x dentro del cuerpo. Según estas condiciones, la distribución del campo depende solo de la coordenada x.

Como  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  entonces  $dB_x/dx = 0$  y de  $\nabla^2 \mathbf{B} = \mathbf{B}/\lambda^2$  necesariamente tenemos  $B_x = 0$  y la ecuación 3.13 se convierte en:

$$\frac{d^2 \mathbf{B}}{dx^2} = \frac{\mathbf{B}}{\lambda^2} \Rightarrow \mathbf{B}(x) = \mathbf{b} e^{-x/\lambda}$$

Aquí el vector unitario  $\mathbf{b}$  es paralelo a la superficie. Vemos que el campo magnético decrece exponencialmente dentro del superconductor<sup>33</sup> (efecto Meissner), penetrando solo una distancia  $\sim \lambda$  ( $\lambda \sim 10^{-6} - 10^{-5}$  cm)<sup>34</sup>.

La ecuación 3.10 contiene un segundo parámetro de longitud. En la ausencia de un campo externo ( $\mathbf{A} = 0$ ) y para pequeños parámetros de orden, ( $|\Psi|^2 \ll \alpha/\beta$ ), podemos obtener la siguiente expresión:

$$\nabla^2 \Psi - \frac{\Psi}{\xi^2} = 0 \quad \xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m^* |\alpha|} \quad (3.14)$$

Esta ecuación describe la modulación espacial del parámetro de orden  $\Psi$  cerca al punto de transición ( $T_c$ ). La longitud de coherencia  $\xi(T)$ , da la correlación de las fluctuaciones del parámetro de orden  $\Psi$  en ausencia del campo;  $\xi$  también es una medida de la distancia sobre la cual el parámetro de orden responde a la perturbación.

Las longitudes características 3.11 y 3.15, determinan el orden de magnitud de las distancias sobre las cuales hay cambios significativos en el parámetro de orden y el campo magnético. La longitud  $\lambda$  es una característica general del campo magnético, y  $\xi(T)$  de la distribución de  $\Psi$ <sup>35</sup>.

---

<sup>32</sup>Landau. Parte 2, Op. cit., p. 192.

<sup>33</sup>Ya que no permite una solución uniforme en el espacio. De modo que no puede existir un campo uniforme en un superconductor; es decir,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0$  no es una solución, a no ser que el campo sea cero.

<sup>34</sup>Esta distancia es macroscópica, pero pequeña comparada con las usuales dimensiones de las muestras.

<sup>35</sup>Landau. Parte 2, Op. cit., p. 192.

La razón entre la longitud de penetración de London y la longitud de coherencia es el llamado parámetro de Ginzburg-Landau, el cual es una constante (independiente de la temperatura), dado por:

$$k = \frac{\lambda(T)}{\xi(T)} = \frac{mc}{e\hbar} \left( \frac{\beta}{2\pi} \right)^{1/2} \quad (3.15)$$

De Gennes con el fin de generalizar las condiciones de frontera (que se obtienen del termino integral de área en 3.9), cuando la muestra superconductora se encuentra en contacto con materiales de diferentes características electromagnéticas, y en el cual la supercorriente no fluye paralela a la superficie, introdujo un parámetro complejo  $b$  llamado parámetro de de Gennes, que cumple la siguiente condición de frontera<sup>36</sup>:

$$\left[ -i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}\mathbf{A} \right] \cdot \mathbf{n}\Psi = -\frac{1}{b}\Psi \quad (3.16)$$

Donde  $b$  depende en el material externo. El caso de un superconductor aislado corresponde al caso limite en el cual  $b \rightarrow \infty$ . El caso en que  $b = 0$  corresponde a un ferromagnético y  $b \neq 0$  y finito para un metal normal.

### 3.4 CUANTIZACIÓN DEL FLUJO

El flujo magnético total que pasa a través de un anillo superconductor puede adquirir solo valores cuantizados, que son múltiplos enteros del cuanto de flujo. Si hay un flujo magnético enlazando un toro superconductor, este permanece constante prescindiendo de algún cambio en el estado del cuerpo (si este no destruye la superconductividad). Asumimos que el toro tiene un espesor y un diámetro mayor que la longitud de coherencia y longitud de penetración<sup>37</sup>.

Dentro del cuerpo (mas allá del rango de penetración del campo) la densidad de corriente  $\mathbf{J} = 0$ . Entonces, si remplazamos el parámetro de orden, que es una cantidad compleja  $\Psi = |\Psi|e^{i\Phi}$  en la ecuación de la densidad de corriente, tenemos:

$$\mathbf{J} = |\Psi|^2 \left( \nabla\Phi - \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A} \right) = |\Psi|^2 \mathbf{v}_s \quad (3.17)$$

Aquí  $J = j/(e\hbar/m)$  es la densidad de corriente normalizada,  $\mathbf{v}_s$  es la velocidad superfluida normalizada. Si integramos la densidad de corriente sobre un contorno cerrado, obtenemos la cuantización del flujo<sup>38</sup>:

$$\oint \frac{\mathbf{J}}{|\Psi|^2} \cdot d\mathbf{l} + 2\pi \frac{\phi}{\phi_0} = \oint \nabla\Phi \cdot d\mathbf{l} = \delta\Phi$$

Donde  $\delta\Phi$  es el cambio de fase de la función de onda pasando alrededor del contorno. Aquí se ha usado el teorema de Stokes:

<sup>36</sup>Ketterson. Op. cit., p. 53.

<sup>37</sup>Landau. Parte 2, p. 187.

<sup>38</sup>Ibid., p. 187.



$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (d\mathbf{s}) = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \phi$$

Si la función debe ser univaluada, el cambio de fase debe ser solamente un múltiplo entero de  $2\pi$ . Entonces  $\delta\Phi = L2\pi = 2\pi(\phi/\phi_0)$  o  $\phi = L\phi_0$ . Con  $\phi$  el flujo magnético a través del área dentro del contorno. El cuanto de flujo o fluxoide es:

$$\phi_0 = \frac{\pi\hbar c}{e} = 2 \times 10^{-7} G \cdot cm^2 \quad (3.18)$$

### 3.5 TIPOS DE SUPERCONDUCTORES

No existe ninguna diferencia en el mecanismo de la superconductividad en los superconductores tipo I ( $k < 1/\sqrt{2}$ ) y tipo II ( $k > 1/\sqrt{2}$ ). Ambos tienen propiedades térmicas semejantes en la transición superconductor-normal en campo magnético nulo. Pero el efecto Meissner es totalmente diferente<sup>39</sup>.

Para estudiar los diferentes campos magnéticos críticos, consideremos un cilindro superconductor sólido en un campo magnético longitudinal constante  $\mathbf{H}$ , entonces tenemos:

- Sí el superconductor es tipo I, sufre una transición de fase de primer orden, a medida que el campo decrece bajo un cierto valor crítico  $H_c$ . Existe según Landau una tensión superficial ( $\alpha_{ns}$ ) que impide la formación del primer núcleo de la nueva fase y así, hace posible una continuidad metaestable de la fase  $s$  a campos menores que  $H_c$ <sup>40, 41</sup>.
- Sí el superconductor es tipo II, la ocurrencia de las "inclusiones" de la fase  $n$  pueden ser termodinámicamente favorables para valores de campo menores que  $H_c$ . El incremento de energía del volumen es compensado con la energía superficial negativa de tal núcleo<sup>42</sup>.

El límite menor de campos para los cuales esto es posible es usualmente denotado por  $H_{c1}$  (llamado campo crítico menor). Similarmente, empezando con un metal en el estado normal en un campo externo alto, alcanzamos un valor  $H_{c2} > H_c$  (campo crítico superior), bajo el cual la ocurrencia de "inclusiones" de fase  $s$  es termodinámicamente favorable. Así, en un cierto rango de campos,  $H_{c1} < H < H_{c2}$ , el superconductor está en un estado mixto o de vórtices<sup>43</sup>. Estas propiedades en este estado cambian gradualmente de superconductor puro, en  $H_{c1}$ , a puramente normal en  $H_{c2}$ ; al mismo tiempo que el campo magnético penetra gradualmente.<sup>44</sup> Los dos campos críticos dependen,

<sup>39</sup>Kittel, Charles. Introducción a la Física del Estado Sólido: Reverté, 1995. p. 187.

<sup>40</sup>El signo de la tensión superficial forma la base para la división de todos los superconductores en dos clases: tipo I, con  $\alpha_{ns} > 0$  y tipo II, para  $\alpha_{ns} < 0$ .

<sup>41</sup>Landau. Parte 2, p. 200.

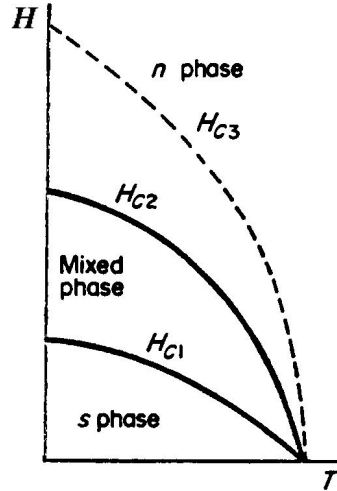
<sup>42</sup>Ibid., p. 200.

<sup>43</sup>No confundir con el estado intermedio de un superconductor tipo I, el cual resulta de ciertas configuraciones de la muestra en el campo magnético externo.

<sup>44</sup>Landau. Parte 2, p. 200.

por supuesto, de la temperatura y tienen un valor igual a cero en  $T = T_c$ . El diagrama de fase de estos campos críticos se muestran en la figura 2, para superconductores tipo II. El flujo empieza a penetrar en la muestra a un valor de campo  $H_{c1}$  inferior que el campo crítico termodinámico  $H_c$ . La muestra está en un estado de vórtices entre  $H_{c1}$  y  $H_{c2}$ . El campo  $H_{c3}$  corresponde a la superconductividad superficial.

Figura 2. Superconductores tipo II.



El campo crítico superior puede determinarse por la primera ecuación de Ginzburg y Landau. Primero vemos que a campos un poco más bajos que  $H_{c2}$  un núcleo de la fase **s** debe tener un pequeño valor del parámetro  $\Psi$ , entonces es evidente que  $\Psi \rightarrow 0$  cuando  $H \rightarrow H_{c2}$ . Entonces podemos suponer que el estado de este núcleo es descrito por la ecuación de G-L linealizada<sup>45</sup>.

$$\frac{1}{4m} \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \Psi = |\alpha|\Psi \quad (3.19)$$

Donde el potencial vectorial se toma del campo magnético externo uniforme en  $\Psi = 0$ , cuando el cuerpo está en el estado normal y el campo externo lo penetra completamente<sup>46</sup>. La ecuación 3.19 es idéntica a la ecuación de Schrödinger para una partícula de masa  $2m$  y carga  $2e$  en un campo magnético,  $|\alpha|$  como el nivel de energía.

Si se asume que el campo magnético aplicado es paralelo a la dirección  $z$ . La solución puede facilitarse si se escoge el gauge de Landau (el potencial vectorial se toma en la forma  $\mathbf{A} = \mathbf{j}xH_0$ ), con lo cual se puede escribir la ecuación G-L en la forma:

$$\left[ \frac{-\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m^*\omega_c^2(x - x_0)^2 \right] u_n(x) = E_n u_n(x) \quad (3.20)$$

Donde se ha definido el parámetro de orden como<sup>47</sup>:

<sup>45</sup>Landau. Parte 2, p. 201.

<sup>46</sup>La solución de la ecuación 3.19 con la condición de frontera  $\Psi = 0$  en el infinito, corresponde a la formación de un núcleo de fase **s** en el interior de la muestra, lejos de su superficie.

<sup>47</sup>Ketterson, Op. cit., p. 57.

$$\Psi_n = \exp(iK_y y + iK_z z) u_n(x)$$

Y la energías:  $E_n = -\alpha - \hbar^2 K_z^2 / (2m^*)$  y  $x_0 = \phi_0 K_y / (2\pi H_0)$ .

La ecuación 3.20 es idéntica a la ecuación de Schrödinger de un oscilador armónico con frecuencia  $\omega_c = e^* H / (m^* c)$  (frecuencia ciclotrónica de la partícula) con energías  $E_n = (n + 1/2) \hbar \omega_c$ . Solo el mínimo valor propio ( $n = 0$ ), y la solución  $K_z = 0$  correspondiente al campo mayor a el cual la superconductividad puede nuclear en el interior de una gran muestra<sup>48</sup>.

$$-\alpha = \frac{1}{2} \hbar \omega_c \quad \text{ó} \quad H_{c2} = -\frac{2m^* c \alpha}{\hbar e^*} = \frac{2m^* c}{\hbar e^*} a (T_c - T) = \frac{\phi_0}{2\pi \xi^2}$$

Este resultado puede expresarse como una función del campo crítico termodinámico definido por  $H_c = (4\pi \alpha^2 / \beta)^{1/2}$  y el parámetro de Ginzburg-Landau de la forma:

$$H_{c2} = \frac{\phi_0}{2\pi \xi^2} = \sqrt{2} k H_c \quad (3.21)$$

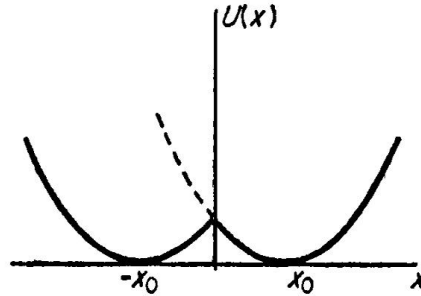
Esta ecuación nos expresa que en el campo crítico superior  $H_{c2}$ , la densidad de flujo en el material es igual a un cuanto de flujo por área  $2\pi \xi^2$ .

El anterior problema mencionado del movimiento de una partícula en un campo magnético, es equivalente al movimiento en un pozo de potencial parabólico unidimensional, con (como lo muestra la ecuación 3.20):

$$U = \frac{1}{2} m^* \omega_c^2 (x - x_0)^2 \quad (3.22)$$

Donde  $x_0$  es una constante correspondiente al "centro de la orbita"<sup>49</sup>.

Figura 3. Potencial doble parabólico



Ahora consideramos un pozo de potencial que consiste de dos potenciales parabólicos que son simétricos al plano  $x = 0$  (figura 3). El estado base de una partícula en tal campo corresponde a la función de onda  $\Psi(x)$  que es par en  $x$  y no tiene ceros, esta

<sup>48</sup>Ketterson, Op. cit., p. 58.

<sup>49</sup>Landau. Parte 2, p. 202.

función automáticamente satisface la condición  $\Psi' = 0$  en  $x = 0$ . El nivel base de una partícula en el pozo doble es, más bajo que en el pozo de un solo potencial<sup>50</sup>.

Cálculos numéricos del nivel en un pozo doble, da como resultado (como una función del parámetro  $x_0$ ), que el valor mínimo es  $0,59E_0$  donde  $E_0 = (1/2)\hbar\omega_c$ . Repitiendo el argumento anterior, se encuentra que el limite superior de campos a los cuales el núcleo superficial de la fase  $s$  ocurre es de  $H_{c3} = H_{c2}/0,59$ , es decir:

$$H_{c3} = 1,7H_{c2} = 2,4kH_c \quad (3.23)$$

Así en el rango de campo entre  $H_{c2}$  y  $H_{c3}$ , aparece el fenómeno de superconductividad superficial, la frontera de esta región se muestra por la línea punteada en la figura 2. El espesor de la capa superconductora en la superficie de la fase normal es del orden de  $\xi(T)$ <sup>51</sup>.

Las anteriores conclusiones se derivaron enteramente para superconductores tipo II, pero los campos críticos  $H_{c2}$  y  $H_{c3}$ , tienen un cierto significado físico para superconductores tipo I. Si  $k$  esta en el rango  $1/\sqrt{2} = 0,71 > k > 0,59/\sqrt{2} = 0,42$ , entonces  $H_{c2} < H_c$  pero  $H_{c3} > H_c$ . Aunque la fase mixta no ocurre en este caso, hay superconductividad superficial en el rango de campos entre  $H_c$  y  $H_{c3}$ .

Finalmente el valor de  $H_{c2}$  (3.21), determina (para algún  $k$ ), el limite superior de campos para los cuales la formación de un núcleo de fase  $s$  es posible. En un superconductor tipo I (donde  $H_{c2} < H_c$ ) en campos  $H < H_{c2}$ , la fase normal termodinámicamente desfavorable es absolutamente inestable; pero en el rango  $H_{c2} < H < H_c$  la fase normal puede existir como una fase metastable. En este rango, la transición de fase de primer orden de la fase- $n$  a la fase- $s$  puede solo ocurrir por la formación de un núcleo fase- $s$  con valores finitos de  $\Psi$ .

---

<sup>50</sup>Esto es porque la energía potencial en la mitad del espacio  $x < 0$ , es menor que la energía correspondiente para un solo pozo, mostrado por la curva punteada en la figura 3.

<sup>51</sup>Landau. Parte 2, p. 202.

#### 4. SUPERCONDUCTIVIDAD SUPERFICIAL BAJO CONDICIONES DE FRONTERA DE DE GENNES

El tipo de un superconductor es determinado por el valor del parámetro de Ginzburg-Landau  $k$ . Se trata de un superconductor tipo I, cuando el parámetro de G-L es menor que un cierto valor ( $1/\sqrt{2}$ ). Se ha encontrado experimentalmente que cuando  $k < 0,42$ , el estado superconductor con un efecto Meissner completo existe para campos magnéticos mas pequeños que el valor crítico  $H_c$ , mientras el estado normal es energéticamente favorable para  $H > H_c$ <sup>1</sup>. Para valores del parámetro entre  $0,42 < k < 1/\sqrt{2} \approx 0,7$ , existe una superconductividad superficial cuando el campo magnético esta entre  $H_c$  y  $H_{c3}$ . El campo magnético crítico  $H_{c3}$  es el campo superior al cual el núcleo de la fase-s se encuentra en una capa superficial, el espesor de esta capa es del orden de la longitud de coherencia  $\xi(T)$ <sup>2</sup>. Cuando se habla de superconductores tipo II ( $k > 1/\sqrt{2}$ ), la red de vórtices de Abrikosov es energéticamente favorable en el rango  $H_c < H < H_{c2}$ .

El trabajo pionero en superconductores mesoscópicos fue realizado en el año de 1962 por Little-Parks, quienes midieron el cambio de la temperatura crítica de un cilindro de película delgada de estaño ( $Sn$ ), en un campo magnético axial  $H$ . La fase frontera mostró un comportamiento periódico, con el periodo magnético correspondiente a la penetración de un cuanto de flujo. Las oscilaciones Little-Parks son una consecuencia directa de la cuantización del flujo magnético, el cual fue predicho teóricamente por London<sup>3</sup>.

##### 4.1 APROXIMACIÓN LINEAL

Se considera que una muestra superconductora es mesoscópica, cuando las longitudes de la muestra son comparables a la longitud de coherencia  $\xi^2(T) = \hbar^2/(2m^*|\alpha|)$ . Esta cantidad surge en la teoría de Ginzburg y Landau como una escala de longitud característica, de la variación espacial del módulo del parámetro de orden  $|\Psi(\mathbf{r})|$ <sup>4</sup>. Cuando  $k$  es muy grande se puede despreciar el efecto de apantallamiento de la muestra, y por lo tanto el termino de energía del campo magnético en la expresión de la energía libre de Landau dada por la ecuación 3.8.<sup>5</sup>

En este trabajo se considera un anillo superconductor mesoscópico con radio externo  $R$ , radio interno  $R_i$  y espesor  $d$ , y que se encuentra en presencia de un campo magnético uniforme  $\mathbf{H}$ , normal al plano de la muestra, como lo muestra la figura 4.

---

<sup>1</sup>Schweigert. V.A. and Peeters. F.M., Phys.Rev.B 57, 13 817 (1998).

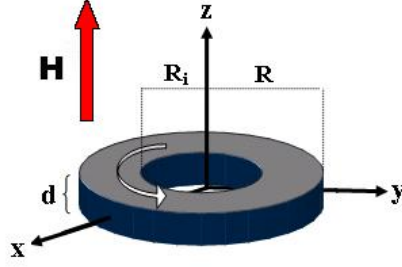
<sup>2</sup>Landau. Parte 2, Op. cit., p. 202.

<sup>3</sup>James and P. de Gennes, Phys.Lett 7, 306 (1963).

<sup>4</sup>Segovia F.A. y Granada J.C. Rev.Col.Fis. 39,1 (2007).

<sup>5</sup>Es decir, el efecto de apantallamiento es despreciable si la muestra, cumple con la condición  $k_{eff} = \lambda_{eff}/\xi = \lambda^2/\xi d \gg 1$ .

Figura 4. Anillo mesoscópico en un campo magnético constante.



Las ecuaciones de Ginzburg-Landau 3.10 - 3.12, teniendo en cuenta que en la teoría BCS<sup>6</sup>  $m^*$ , es la masa efectiva igual a  $2m$  y la carga efectiva  $e^*$  es igual a  $2e$ , se transforman en:

$$\frac{1}{4m} \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \Psi + \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi = 0 \quad (4.1)$$

$$\mathbf{J} = -\frac{ie\hbar}{2m}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{2e^2}{mc}|\Psi|^2\mathbf{A} \quad (4.2)$$

Donde la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  cumple con la ley de Ampere:  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = (4\pi/c)\mathbf{J}$ . La ecuación para la densidad de corriente superconductor, consiste de dos términos uno paramagnético y uno diamagnético, el término paramagnético (primer término) tiene una analogía con la densidad de corriente de probabilidad que se maneja en Mecánica Cuántica en dispersión de partículas.

| Cantidad            | Unidad                          |
|---------------------|---------------------------------|
| Longitud            | $\xi = \hbar/\sqrt{4m \alpha }$ |
| Parámetro de orden  | $\Psi_0 = \sqrt{-\alpha/\beta}$ |
| Potencial vectorial | $\hbar c/2e\xi$                 |
| Campo magnético     | $H_{c2} = k\sqrt{2}H_c$         |

Usando cantidades adimensionales según la tabla 1, y el gauge de London ( $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ), podemos reescribir las ecuaciones de Ginzburg y Landau en la siguiente forma<sup>7</sup>:

$$(-i\nabla - \mathbf{A})^2\Psi = \Psi(1 - |\Psi|^2) \quad (4.3)$$

$$-k^2\nabla^2\mathbf{A} = (\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*)/2i - |\Psi|^2\mathbf{A} \quad (4.4)$$

Aquí, la longitud se mide en unidades de la longitud de coherencia  $\xi$ , el parámetro de orden en unidades de  $\Psi_0$ , el potencial vectorial en  $\hbar c/2e\xi$ , y se mide el campo

<sup>6</sup>El modelo de un gas de Fermi con atracción débil entre las partículas es conocido como el modelo BCS (J.Bardeen, L.N.Cooper y J.R.Schrieffer).

<sup>7</sup>Schweigert. V.A. and Peeters. F.M., Phys.Rev.B 57, 13 817 (1998).

magnético en unidades de  $H_{c2}$ , donde el campo magnético crítico es  $H_c = \sqrt{-4\pi\alpha/\beta}$ .

Debido al pequeño tamaño de la muestra, podemos tomar para el potencial vectorial  $\mathbf{A}$ , del potencial vectorial del campo magnético uniforme externo aplicado  $\mathbf{H}$ , de la siguiente forma<sup>8</sup>:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} \times \mathbf{r}) \quad (4.5)$$

Es importante aclarar que  $\mathbf{H}$  es el campo magnético aplicado, así que los campos magnéticos inducidos por las supercorrientes, que producen un débil efecto de apantallamiento, no son tomadas en cuenta.

En la expresión 4.5, se ha considerado que se restringe el estudio a anillos delgados tales que  $d < \xi$ . Para anillos muy delgados, el campo magnético está uniformemente distribuido dentro del anillo en la dirección de su aplicación  $z$ . Cuando el espesor del anillo es comparable a la longitud de penetración  $\lambda$ , el campo es expelido del anillo debido al efecto Meissner. Como  $\lambda$  es la medida de la longitud de penetración del campo magnético aplicado dentro del anillo, la variación en la dirección  $z$  del potencial vectorial es grande para  $d > \lambda$ . Pero se ha encontrado experimentalmente que las variaciones longitudinales del parámetro de orden no son muy grandes para anillos que son mas delgados que la longitud de coherencia ( $d < \xi$ ), entonces podemos considerar el parámetro de orden independiente de esta coordenada<sup>9</sup>.

Debido a la simetría azimutal del sistema, se resuelven las ecuaciones G-L para un valor fijo del momento angular  $L$ , este número cuántico es el que da el número de cuantos de flujo que entran en la muestra, y conduce a que el parámetro de orden se lo pueda expresar en la forma<sup>10</sup>:

$$\Psi(\vec{\rho}) = f(\rho)e^{iL\varphi} \quad (4.6)$$

Si consideramos solamente la parte lineal de la primera ecuación G-L, resulta una analogía con la ecuación de Schrödinger para una partícula de masa  $m^* = 2m$ , carga  $e^* = 2e$  que se mueve en un campo magnético con un potencial vectorial asociado  $\mathbf{A}$  y con niveles de energía  $|\alpha|$ .

Considerando que el campo magnético está actuando perpendicular al plano del anillo; esto es,  $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ , e introduciendo (4.6), la ecuación (4.3) para la función  $f(\rho)$  es<sup>11</sup>:

$$\left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left\langle \left( \frac{L}{\rho} - A \right) \right\rangle^2 \right] f(\rho) = f(\rho) \quad (4.7)$$

---

<sup>8</sup>La aplicación de un campo magnético uniforme no altera la simetría translacional del sistema, por lo tanto se puede tomar el potencial vectorial del campo uniforme aplicado (Statistical Physics, part 2, L.D.Landau).

<sup>9</sup>Schweigert. V.A. and Peeters. F.M., Phys.Rev.B 57, 13 817 (1998).

<sup>10</sup>Segovia F.A. y Granada J.C. Rev.Col.Fis. 39,1 (20079).

<sup>11</sup>Schweigert. V.A. and Peeters. F.M., Phys.Rev.B 57, 13 817 (1998).

Ya que en la dirección  $z$  el potencial vectorial  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  sufre variaciones considerables (debido a las corrientes superconductoras creadas), se debe tener en cuenta su promedio sobre esta coordenada (espesor del anillo) definida por:

$$\langle f(r) \rangle = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} f(z, r) dz$$

Tomando el promedio de  $A$  como  $A_0$ , el potencial vectorial con campo magnético uniforme  $A_0 = \frac{1}{2}\rho H_0$ <sup>12</sup>. La ecuación 4.7 se la puede expresar como:

$$\hat{L}f(\rho) = 0 \quad (4.8)$$

Donde el operador  $\hat{L}$ , se define de la siguiente forma:

$$\hat{L} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left( \frac{L}{\rho} - A_0 \right)^2 - 1 \quad (4.9)$$

El estado superconductor empieza a desarrollarse cuando el mínimo valor propio del operador  $\hat{L}$  es mas negativo<sup>13</sup>.

Para resolver la ecuación 4.8, se hace el siguiente cambio de variable:

$$v = (H_0/2)\rho^2$$

Con la cual obtenemos la ecuación:

$$v \frac{d^2 f}{dv^2} + \frac{df}{dv} - \left( \frac{L^2}{4v} + \frac{v}{4} - \beta \right) f = 0$$

En la cual se ha introducido una nueva cantidad  $\beta = L/2 + 1/(2H_0)$ . Desarrollando un análisis asintótico para la función  $f$ , encontramos que se puede expresar como:  $f(v) = e^{-v/2} v^{L/2} \omega(v)$ <sup>14</sup>. Remplazando esta definición en la anterior ecuación, se obtiene la siguiente expresión para la función  $\omega(v)$ :

$$v \frac{d^2 \omega}{dv^2} + (L - v + 1) \frac{d\omega}{dv} - \left( \frac{L}{2} + \frac{1}{2} - \beta \right) \omega = 0$$

Esta es la ecuación diferencial hipergeométrica, la cual tiene una solución general que es una combinación lineal de las funciones hipergeométricas confluentes (funciones de Kummer)<sup>15</sup>. Con estos resultados, la función  $f(\rho)$  que llamaremos las menores funciones propias  $\psi_1$  del operador  $\hat{L}$ , son dadas por:

$$\psi_1(\rho) = \rho^L \exp\left(-H_0 \frac{\rho^2}{4}\right) \left[ a M \left( -n, L + 1; \frac{H_0}{2} \rho^2 \right) + a' U \left( -n, L + 1; \frac{H_0}{2} \rho^2 \right) \right] \quad (4.10)$$

<sup>12</sup>Schweigert. V.A. and Peeters. F.M., Phys.Rev.B 57, 13 817 (1998).

<sup>13</sup>Esto en analogía con la ecuación 4.1 linealizada, en la cual, el signo del coeficiente  $\alpha$  (energías del Hamiltoniano) determina el estado en el que se encuentra el sistema ( $\mathbf{s}$  o  $\mathbf{n}$ ).

<sup>14</sup>Arfken, George B. Mathematical Methods for Physicists: Harcourt, p. 850-855.

<sup>15</sup>Ibid., p. 850-855.



En la anterior expresión:  $n = 1/2 - 1/(2H_0)$ , la cual recordando que las cantidades son adimensionales, puede ser expresada como:  $n = 1/2 - R^2/(4\xi^2\Phi)^{16}$ . El número  $L$  determina los valores propios de energía. Cuando el radio interno  $R_i$  se aproxima a cero se toma la constante  $a' = 0$  para evitar la divergencia de  $U(a, c, y \rightarrow 0) = \infty$ .

Para determinar las constantes  $a$ ,  $a'$  y la cantidad  $n$ , se debe tener en cuenta las condiciones de frontera. Para ello se considera que el anillo superconductor contacta, en el borde interno con un material caracterizado por un parámetro de de Gennes  $b_1$  y exteriormente con un material caracterizado por un parámetro  $b_2$ . La condición de frontera según la ecuación 3.16, la cual toma en cuenta la penetración parcial de electrones superconductores dentro del metal normal<sup>17</sup>:

$$\left. \frac{\partial \psi_1}{\partial \rho} \right|_{\rho=R_i} = \frac{1}{b_1} \psi_1(R_i) \quad y \quad \left. \frac{\partial \psi_1}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = -\frac{1}{b_2} \psi_1(R) \quad (4.11)$$

Aquí los dos parámetros  $b_1$  y  $b_2$ , son números complejos y determinan las características eléctricas y magnéticas de los materiales de contacto. Estas características pueden cambiar la distribución del parámetro de orden y el comportamiento de las supercorrientes en el anillo. El caso especial en que el anillo se encuentra aislado, tomamos  $b_1 = b_2 = \infty$ .

Con las condiciones de frontera dadas por 4.11, se encuentra que la cantidad:  $n = (1/2) - (R^2/4\xi^2\Phi)$  se determina mediante la siguiente ecuación<sup>18</sup>:

$$\left( L - \frac{\Phi}{2} R_H^2 - \frac{R_i}{b_1} \right) \left[ M \left( -n, L + 1; \frac{\Phi}{2} R_H^2 \right) - \Lambda U \left( -n, L + 1; \frac{\Phi}{2} R_H^2 \right) \right] - n\Phi R_H^2 \left[ \frac{1}{L+1} M \left( -n+1, L+2; \frac{\Phi}{2} R_H^2 \right) + \Lambda U \left( -n+1, L+2; \frac{\Phi}{2} R_H^2 \right) \right] = 0$$

Donde se ha definido la cantidad  $\Lambda$  (que tiene una dependencia únicamente del parámetro  $b_2$ ) como:

$$\Lambda(L, \Phi, R, b_2) = \frac{\left( L - \frac{\Phi}{2} + \frac{R}{b_2} \right) M \left( -n, L + 1; \frac{\Phi}{2} \right) - \Phi \frac{n}{L+1} M \left( -n+1, L+2; \frac{\Phi}{2} \right)}{\left( L - \frac{\Phi}{2} + \frac{R}{b_2} \right) U \left( -n, L + 1; \frac{\Phi}{2} \right) + n\Phi U \left( -n+1, L+2; \frac{\Phi}{2} \right)}$$

Se ha considerado el flujo adimensional  $\Phi = \phi/\phi_0 = R^2 H_0$  y  $R_H = R_i/R$ .

Con estos resultados la solución exacta para el parámetro de orden en unidades de  $\Psi_0$ , considerando que se ha tomado por conveniencia la constante  $a = 1$ , es:

$$\Psi = \rho^L \exp \left( -H_0 \frac{\rho^2}{4} + iL\varphi \right) \left[ M \left( -n, L + 1; \frac{H_0}{2} \rho^2 \right) - \Lambda U \left( -n, L + 1; \frac{H_0}{2} \rho^2 \right) \right]$$

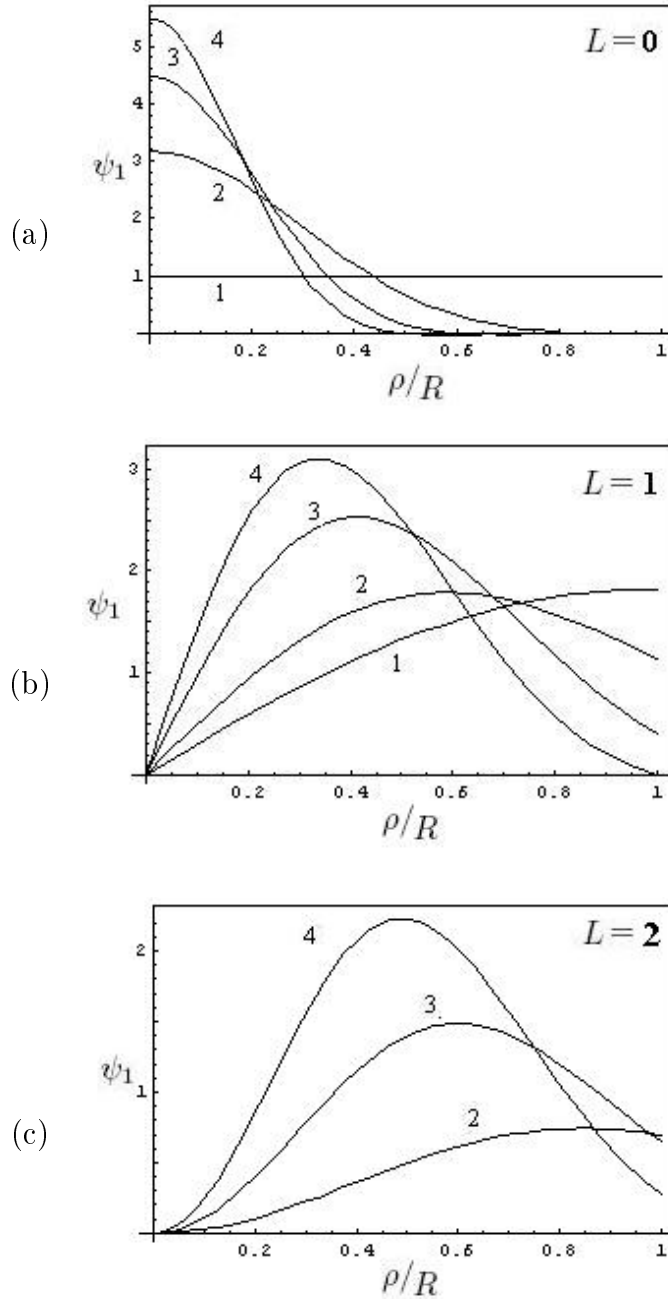
<sup>16</sup> Aquí  $\Phi = \phi/\phi_0$ ,  $\phi$  es el flujo del campo externo a través del plano del anillo y  $\phi_0$  es el cuanto de flujo o fluxoide. La cuantización de flujo es equivalente a la condición cuántica de Bohr-Sommerfeld para los pares de Cooper.

<sup>17</sup> Segovia F.A. y Granada J.C. Rev.Col.Fís. 39,1 (2007).

<sup>18</sup> Ibid, Rev.Col.Fís. 39,1 (2007).

Veamos la distribución de las funciones propias del operador  $\hat{L}$  (del parámetro de orden) en el anillo. Estas funciones se representan en la figura 5, para 4 valores del flujo magnético adimensional (1:  $\Phi = 0$ , 2:  $\Phi = 5$ , 3:  $\Phi = 10$ , 4:  $\Phi = 15$ ), y para tres valores del momento angular. En primer lugar, se considera el caso especial cuando el radio interno es prácticamente igual a cero (disco)<sup>19</sup>, y cuando  $b_1 = b_2 = \infty$ <sup>20</sup>.

Figura 5. Menores funciones propias del operador  $\hat{L}$ , para  $R_H = 0,01$ .



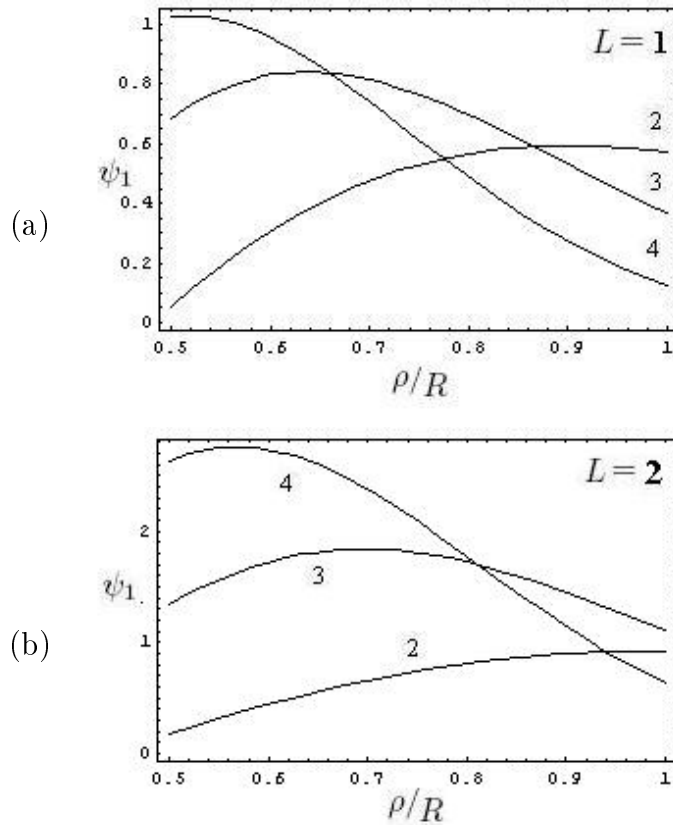
<sup>19</sup>En este caso, las funciones propias según su definición solo tienen un término, ya que debemos tomar la constante  $a' = 0$ , para deshacernos de la discontinuidad de la función  $U(a, b, z)$  en  $z=0$ .

<sup>20</sup>Scheigert V.A. and Peeters F.M., Phys.Rev. B 57, 13 817(1998).

Los diagramas muestran, que cuando el momento angular es igual a cero, el máximo de las funciones propias se concentra en la parte interna del anillo (disco). Éste máximo depende directamente del flujo magnético, cuando el flujo magnético es mayor, el parámetro de orden toma valores mayores. Un caso especial sucede cuando el flujo magnético es cero, en este caso las funciones están igualmente distribuidas en todo el disco. El lugar en el cual las funciones  $\psi_1$  tienen un valor máximo, se ve afectado con el aumento del valor del momento angular, este valor se va desplazando a la parte externa del anillo. Se esperaría que para valores del momento angular grandes, el parámetro de orden esté muy concentrado en la parte externa del anillo.

Para observar la influencia del tamaño del hueco en la variación de las funciones propias, en la figura 6 se grafican estas funciones para el caso cuando el radio interno es la mitad del radio externo ( $R_H = 0,5$ ), para diferentes valores del flujo, y con valores del parámetro de de Gennes  $b = \infty$ <sup>21</sup>.

Figura 6. Menores funciones propias del operador  $\hat{L}$ , para  $R_H = 0,5$ .

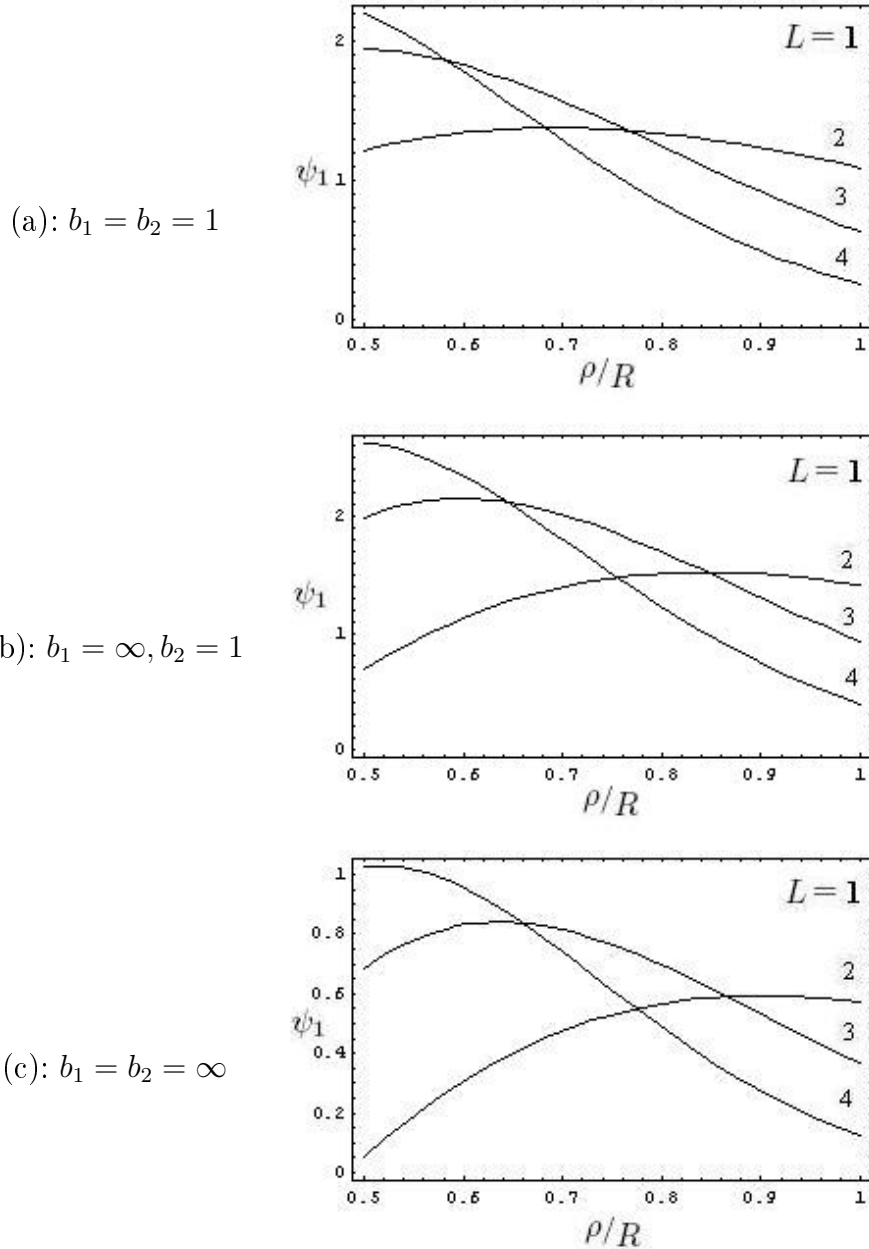


Vemos que la distribución del parámetro de orden se comporta de la misma forma que cuando el anillo es un disco, se concentra en la parte interna del anillo y su máximo depende directamente del flujo magnético.

<sup>21</sup>En este caso se debe tener en cuenta las dos funciones de Kummer, los valores del parámetro de de Gennes tienen una influencia en las cantidades  $n$  y  $\Lambda$ , esta última es el coeficiente que acompaña a la función  $U(a, b, z)$ .

Por último, en la figura 7 se presenta la influencia que tiene el valor del parámetro de de Gennes en la distribución de las funciones propias (para  $R_H = 0,5$ ), en este caso solo se ha tomado algunos valores del parámetro, simplemente para analizar en que influyen las características de los materiales con los cuales el anillo superconductor se encuentra en contacto.

Figura 7. Influencia del parámetro de de Gennes en la distribución de las funciones propias (parámetro de orden) en el anillo.



Estos diagramas muestran que las funciones propias varían su máximo valor (amplitud y posición), dependiendo de la variación de los parámetros de de Gennes. En la figura 6 (b), se ha graficado la misma situación ( $L = 1$ ), pero con valores  $b_1 = b_2 = \infty$ , se pueden comparar y concluir que a medida que los valores de  $b$  van disminuyendo, el

punto máximo de las funciones propias, va aumentando y corriéndose hacia el borde interno del anillo.

#### 4.1.1 Energías del sistema

Las energías del sistema que en general son funciones de la temperatura, están asociadas con el parámetro de orden mediante el Hamiltoniano según la ecuación 4.1. Estas energías, que son representadas por los coeficientes  $\alpha$  pueden expresarse de la siguiente forma:

$$|\alpha| = \frac{\hbar^2}{4m\xi^2(T)} \quad (4.12)$$

El Hamiltoniano representado por la ecuación linealizada 4.1 tiene una analogía en Mecánica Cuántica con el movimiento de una partícula en un pozo de potencial parabólico. Las energías pueden entonces expresarse en función de la frecuencia ciclotrónica de la partícula  $\omega_c = eH/mc$  y del número  $n$ , obtenido de las condiciones de frontera. El parámetro  $n$  depende del número cuántico  $L$  y no es necesariamente un número entero<sup>22</sup>.

$$|\alpha| = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (4.13)$$

Las energías dadas por 4.13 tienen la misma forma que las energías obtenidas para un oscilador armónico unidimensional<sup>23</sup>.

Para un flujo dado  $\Phi$ , la línea crítica  $T_c(\phi)$  se obtiene escogiendo el valor del momento angular que minimice  $R^2/\xi^2$ ; es decir, en el equilibrio el estado estable  $L$  es el que minimiza la energía libre. El mínimo de la razón  $R^2/\xi^2$  da la temperatura crítica  $T_c = T(H_{c3})$ <sup>24, 25</sup>:

$$\min \frac{R^2}{\xi^2} = \frac{R^2}{\xi^2} \left[ 1 - \frac{T_c}{T_{C0}} \right] \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{T_c}{T_{C0}} = \frac{\xi^2}{R^2} \min \left[ \frac{R^2}{\xi^2} \right] \quad (4.14)$$

La ecuación trascendental para el valor  $n$  se resuelve para obtener  $R^2/\xi^2$  como una función del flujo adimensional  $\Phi$ , para varios valores del parámetro de de Gennes  $b_1$  y  $b_2$ . De esta ecuación podemos expresar el campo crítico para el cual nuclea la superconductividad en una capa superficial de espesor aproximadamente igual a  $\xi(T)$  ( $H_{c3}$ ) de la forma:  $H_{c3} = H_{c2}/(2n + 1)$ . La ecuación 4.14 puede reescribirse como:

<sup>22</sup>Bruyndoncx V. Van Look L. Verschuere M. and Moshchalkov V.V., Phys.Rev. B 60, 10 468 (1999).

<sup>23</sup>El mínimo valor que toma es diferente de cero, y se conoce en Mecánica Cuántica como energía de punto cero, que es una característica de todos los potenciales ligantes (aquellos que confinan las partículas).

<sup>24</sup>Las oscilaciones en  $T_c(H)$  son debidas al factor que, a diferentes valores del flujo, este mínimo corresponde a diferentes valores del momento angular  $L$ .

<sup>25</sup>Bruyndoncx V. Van Look L. Verschuere M. and Moshchalkov V.V., Phys.Rev. B 60, 10 468 (1999).

$$\frac{R^2}{\xi^2(T_c)} = \frac{R^2}{\xi^2(0)} \left( 1 - \frac{T_c(H)}{T_{c0}} \right) = 2(2n+1)\Phi \quad (4.15)$$

Vemos que el mínimo de la razón  $R^2/\xi^2(T_c)$ , depende directamente del valor  $n$  y del flujo adimensional  $\Phi$ , y en consecuencia, del valor del momento angular  $L$ .

Según los anteriores resultados y recordando que el operador  $L$ , se define de tal forma que al ser aplicado a las funciones de onda (propias) da como resultado cero. En consecuencia, podemos expresar los menores valores propios del operador  $\hat{L}$  de la siguiente forma<sup>26</sup>:

$$\lambda_1 = \frac{\nu_L}{R^2} - 1, \quad \nu_L = 2\Phi(2n+1) \quad (4.16)$$

Uno de las consecuencias de que los valores propios del operador  $L$ , se encuentren dados de la forma anterior es que para cada valor del parámetro de de Gennes, la dependencia de estos valores propios con el flujo magnético varía en forma exagerada, dependiendo de la clase de materiales que estén en contacto con el anillo superconductor.

De aquí se puede obtener el valor del campo crítico  $H_{c3}$  correspondiente a la transición del estado normal al estado superconductor, pero solamente en una capa superficial, el resto del volumen del anillo permanece en un estado normal<sup>27</sup>. Esto da la región de existencia de los estados superconductores para diferente momento angular. Los niveles de Landau pueden encontrarse cuando se sustituye  $n = 0, 1, 2, ..$  en la ecuación 4.15. El mínimo nivel  $n = 0$  corresponde al campo crítico superior  $H_{c2}(T) = \phi_0/[2\pi\xi^2(T)]$ .

A continuación se presentan las dependencias de  $\nu_L(T)$  con el flujo magnético<sup>28</sup>, cuando los parámetros de De Gennes toman diferentes valores según las propiedades del material con el cual se encuentra en contacto el anillo<sup>29</sup>, y cuando el radio interno del anillo toma tres diferentes valores.

En este, y en los casos que siguen, solo se tomarán los diagramas de fase en los cuales se encuentren grandes diferencias de la distribución de los valores propios con el flujo magnético. Esto debido a que, en algunos casos los diagramas de fase con diferentes combinaciones del parámetro de de Gennes, no producen alguna diferencia significativa con los mostrados actualmente.

1. Como primer caso, el radio interno es la mitad del radio externo, y veamos como cambia el diagrama de fase cuando se cambia el valor del parámetro de de Gennes.

<sup>26</sup>Schweigert V.A. and Peeters F.M., Phys.Rev. B 57, 13 817 (1998).

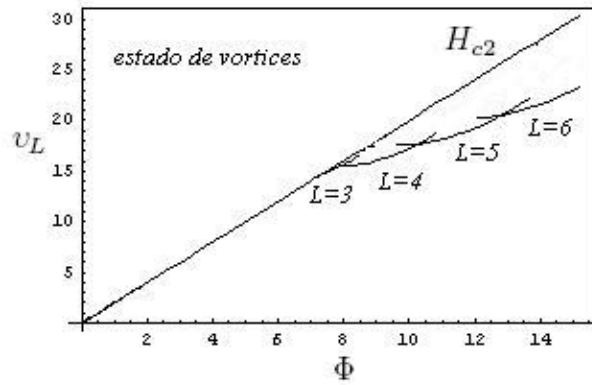
<sup>27</sup>Este campo crítico  $H_{c3}$ , solo existe para superconductores tipo II, pero si el parámetro de G-L ( $k$ ) está en el rango  $0.71 > k > 0.42$ , los superconductores de tipo I muestran una superconductividad superficial en el rango de campos entre  $H_c$  y  $H_{c3}$ , aunque la fase mixta no existe (Landau. Parte 2., p. 201).

<sup>28</sup>Y en consecuencia según la ecuación 4.16 la dependencia también de los valores propios del operador  $\hat{L}$  (y también las energías del sistema).

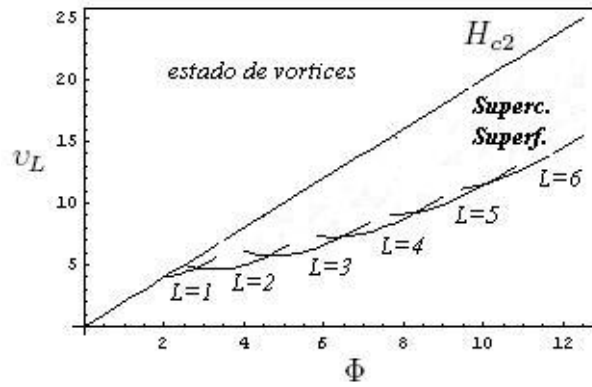
<sup>29</sup>Segovia F.A. y Granada J.C. Rev.Col.Fís. 39,1 (2007).

Figura 8. Comportamiento del campo crítico  $H_{c3}$ , para  $R_H = 0,5$ .

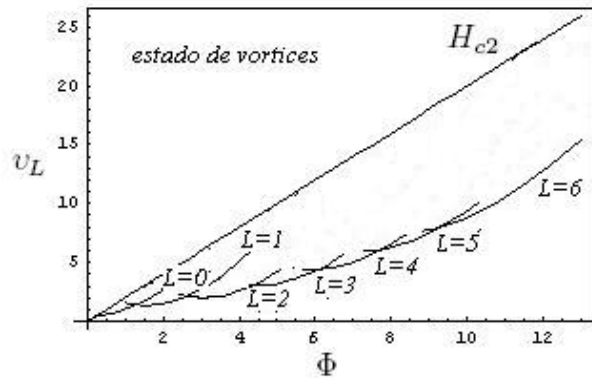
(a)  $b_1 = 1, b_2 = 0$



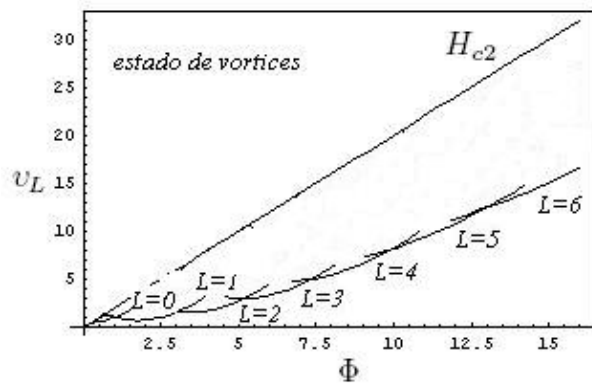
(b)  $b_1 = 1, b_2 = 1$



(c)  $b_1 = 1, b_2 = \infty$



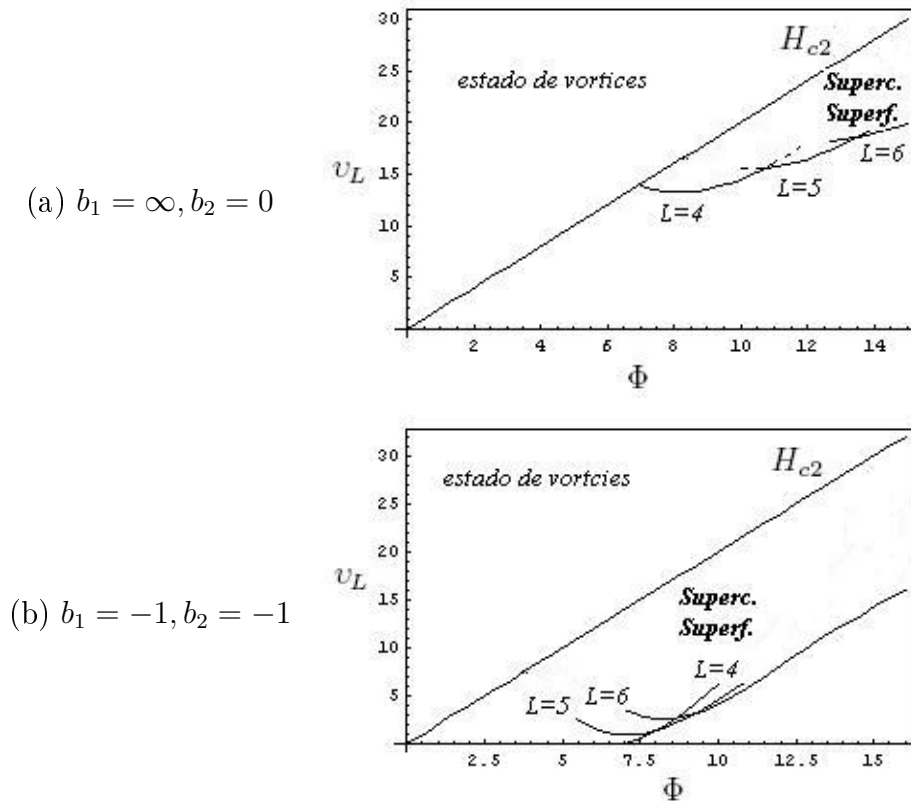
(d)  $b_1 = 1, b_2 = -1$



De los primeros diagramas vemos que cuando solo cambiamos el material externo, y mantenemos el material interno, el comportamiento del campo crítico  $H_{c3}$  varía drásticamente, concluimos que a medida que el parámetro  $b_2$  va disminuyendo el campo crítico  $H_{c3}$  se va desplazando sobre la línea  $H_{c2}$ , aumentando o disminuyendo la región de superconductividad superficial. Los estados de valores de momento angular menor van desapareciendo; es decir, en estos estados la superconductividad superficial no existe. La muestra, debido al aumento del flujo magnético, cambia directamente de un estado de vórtices a un estado normal para la misma temperatura<sup>30</sup>. La región bajo la curva, representa el anillo en estado normal.

Para esta geometría ( $R_i = 0,5R$ ), la máxima región de superconductividad superficial se obtiene cuando  $b_1 = \infty$  y  $b_2 = -1$ , la cual es idénticamente igual a la obtenida para  $b_1 = b_2 = -1$  (figura 9 (b)). La menor región de superconductividad superficial se obtiene cuando  $b_1 = \infty$  y  $b_2 = 0$ , en este caso los estados con momento angular menor a 4 no presentan una superconductividad superficial, simplemente sufren un cambio directo de una superconductividad de vórtices a un estado normal.

Figura 9. Aumento y disminución de la región superconductor para  $R_H = 0,5$ .



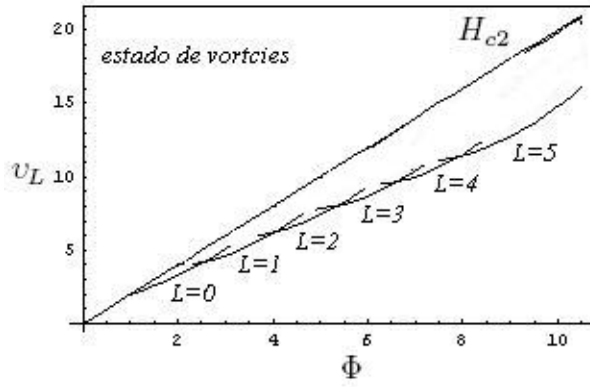
2. Para observar como se comporta el campo crítico cuando el radio interno cambia, en la figura 10 se grafican las anteriores situaciones, pero ahora con un radio interno  $R_i = 0,01R$  (disco).

<sup>30</sup>Debido a la definición,  $v_L$  tiene una dependencia de la temperatura; es decir, los diagramas de fase son T-H.

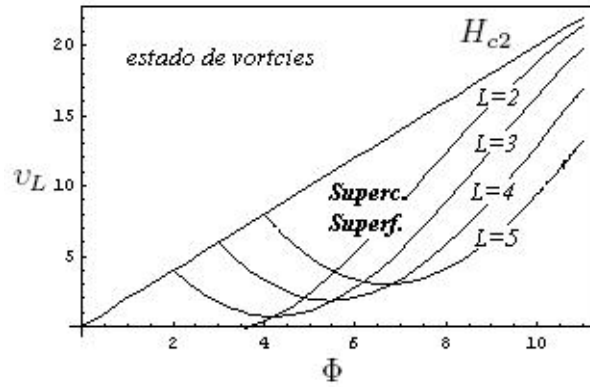


Figura 10. Comportamiento del campo crítico  $H_{c3}$ , para  $R_H = 0,01$ .

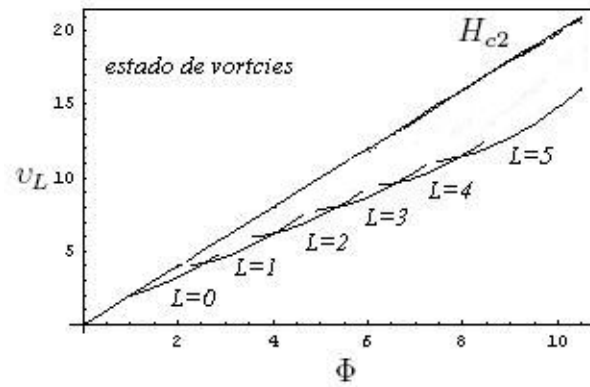
(a)  $b_1 = 1, b_2 = 1$



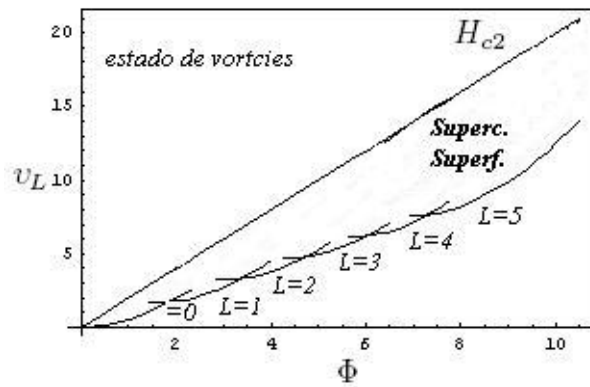
(b)  $b_1 = -1, b_2 = -1$



(c)  $b_1 = \infty, b_2 = 1$



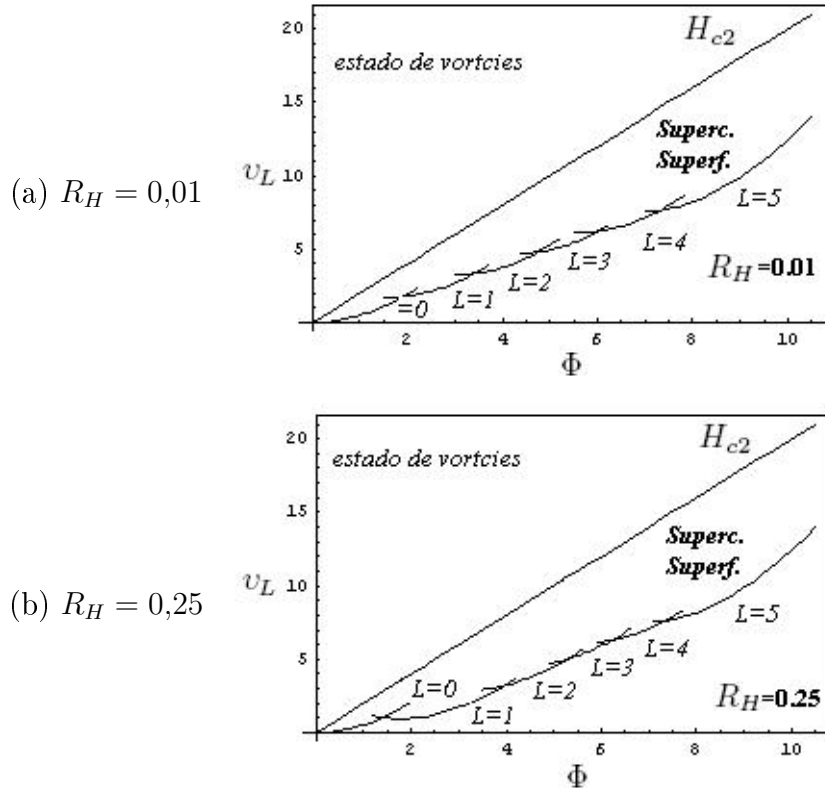
(d)  $b_1 = 1, b_2 = \infty$



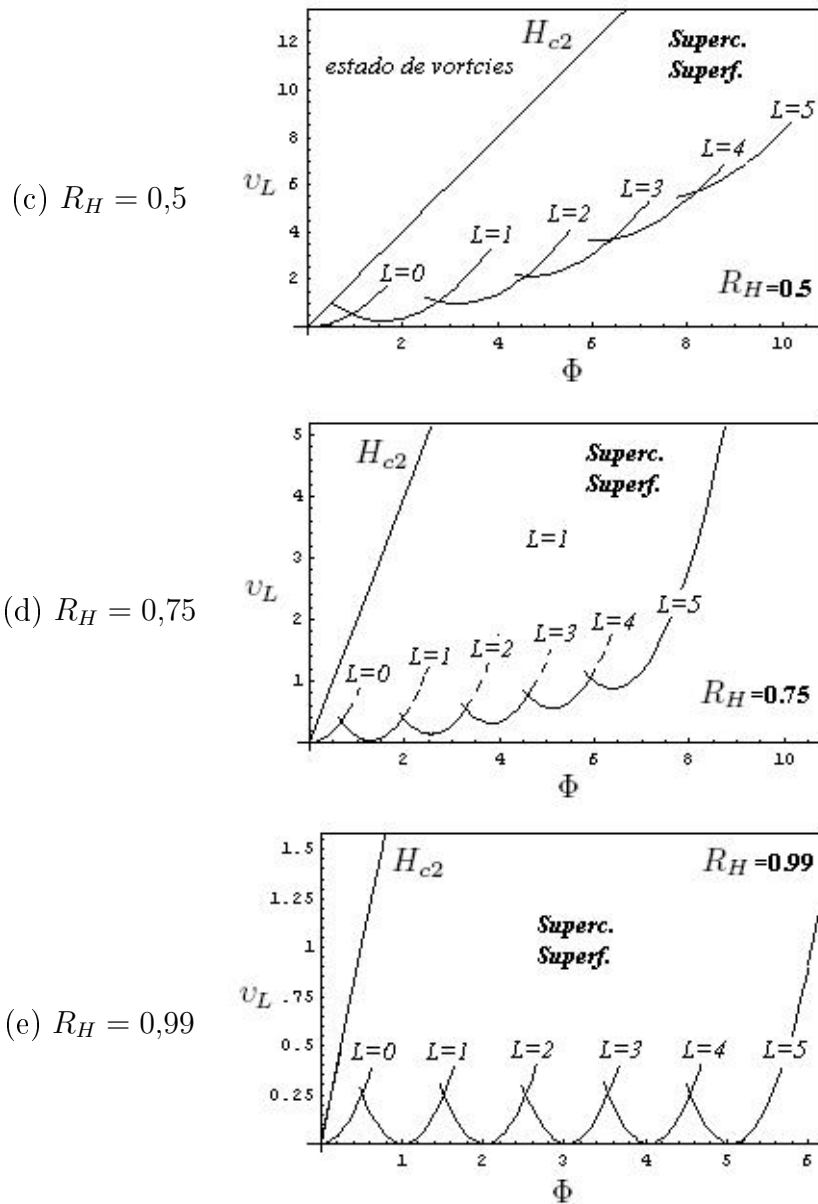
Si se compara estos diagramas con los obtenidos anteriormente (cuando el valor de  $R_H = 0,5$ ), se observa en todos los casos, que la región de superconductividad superficial aumenta (hay un *enhanced* de sc.); además si comparamos la figura 10 (a) con 10 (c), las regiones de superconductividad son similares, es decir, no hay ninguna diferencia si cambiamos un metal ( $b = 1$ ), con un material no conductor ( $b_1 \rightarrow \infty$ ), siempre y cuando el material externo siga siendo el mismo. Por otra parte, ya que el radio del hueco es muy pequeño, las corrientes superconductoras paramagnéticas que contribuyen positivamente al momento magnético total son muy pequeñas, por lo tanto su contribución en la magnetización global es despreciable, esto se ve en los diagramas de fase, las cuales presentan solo regiones de diamagnetismo convencional<sup>31</sup>. Todos los estados presentan una gran respuesta diamagnética localizada en la periferia del disco.

3. Ya hemos visto que las características eléctricas y magnéticas de los materiales de contacto, influyen considerablemente en el comportamiento del campo crítico  $H_{c3}$ ; pero la región de superconductividad superficial (el campo crítico  $H_{c3}$ ) también se ve afectada con el radio del hueco del anillo, y como veremos en la próxima sección con el espesor del anillo. Para analizar esta influencia, en la figura 11 se comparan los diagramas de fase obtenidos para diferentes  $R_H$ , cuando el anillo se encuentra en un medio no conductor.

Figura 11. Comparación del campo crítico  $H_{c3}$ , para diferentes  $R_H$ .



<sup>31</sup>Esto se debe a que el signo de la supercorriente (como lo veremos más adelante) cambia de signo en una parte determinada del anillo, la cual depende del valor que tome la coordenada  $\rho$ .



Se observa que a medida que el radio interno se acerca al externo la región de superconductividad es mucho mayor. En el último caso (Figura 11 (e)), se presenta el caso de especial Little-Parcks, en el que se muestra una secuencia alternativa de respuestas diamagnéticas y paramagnéticas, a medida que el campo magnético aplicado aumenta. Esta forma puede soportar campos magnéticos aplicados muy altos para una misma temperatura dada, correspondiente a la transición del estado normal al estado superconductor.

Estas graficas también permiten encontrar las regiones de paramagnetismo (PME), las cuales van desapareciendo a medida que el radio del hueco decrece: mientras que para un anillo de ancho muy pequeño resulta una competitividad igual entre las corrientes paramagnéticas y diamagnéticas, para un anillo de ancho aproximadamente igual al radio, las corrientes diamagnéticas superan por mucho las corrientes

paramagnéticas, resultado así una respuesta simplemente diamagnética.

Para explicar este tipo de situaciones, hagamos un breve estudio de la supercorriente. Como lo explica Landau, los dos tipos de movimiento en un superfluido eléctricamente neutro (helio líquido) corresponden en un metal superconductor, a dos tipos de corriente eléctrica que pueden fluir simultáneamente en el metal. La densidad de corriente total puede expresarse como una suma de la corriente normal asociada con la evolución de calor Joule, y la corriente superconductor dada por la ecuación 2.1.2 ( $\mathbf{J} = \mathbf{J}_n + \mathbf{J}_s$ ); sin embargo la corriente superconductor no transfiere calor y no involucra disipación de energía, esta corriente puede existir solamente en sistemas en equilibrio termodinámico, por lo que solo se considera la corriente  $\mathbf{J}_s$ <sup>32</sup>.

Las componentes de la corriente superconductor adimensional según la ecuación (4.3) están dadas por:

$$J_\varphi = \frac{f^2(\rho)}{\rho} \left( L - \frac{H}{2} \rho^2 \right) \quad y \quad J_\rho = 0 \quad (4.17)$$

Para un momento angular  $L$ , un flujo  $\Phi$  y un parámetro de de Gennes dados, de acuerdo al signo de la supercorriente  $J_\varphi$ , pueden suceder tres situaciones<sup>33</sup>:

- La densidad de supercorriente radial es negativa en toda región del anillo para el cual la variable  $\rho$  toma el valor  $R_i$ , es decir,  $H > 2L/(R_i^2)$  (borde interno). Lo cual da una uniforme respuesta diamagnética.
- La densidad de supercorriente radial es positiva para toda región del anillo donde se cumple la condición  $R^2 H < 2L$ , o lo que es lo mismo  $\Phi < L$ , es decir, en el borde externo hay una respuesta paramagnética.
- En un punto para el cual  $\rho_0 = \sqrt{\frac{2L}{H}}$  la corriente fluye cambiando de signo.

Así se pueden distinguir dos regiones en el anillo: la parte interna, la cual contribuye positivamente al momento magnético total, y la parte externa, que da una contribución diamagnética, con corrientes en las dos regiones fluyendo en dirección opuesta.

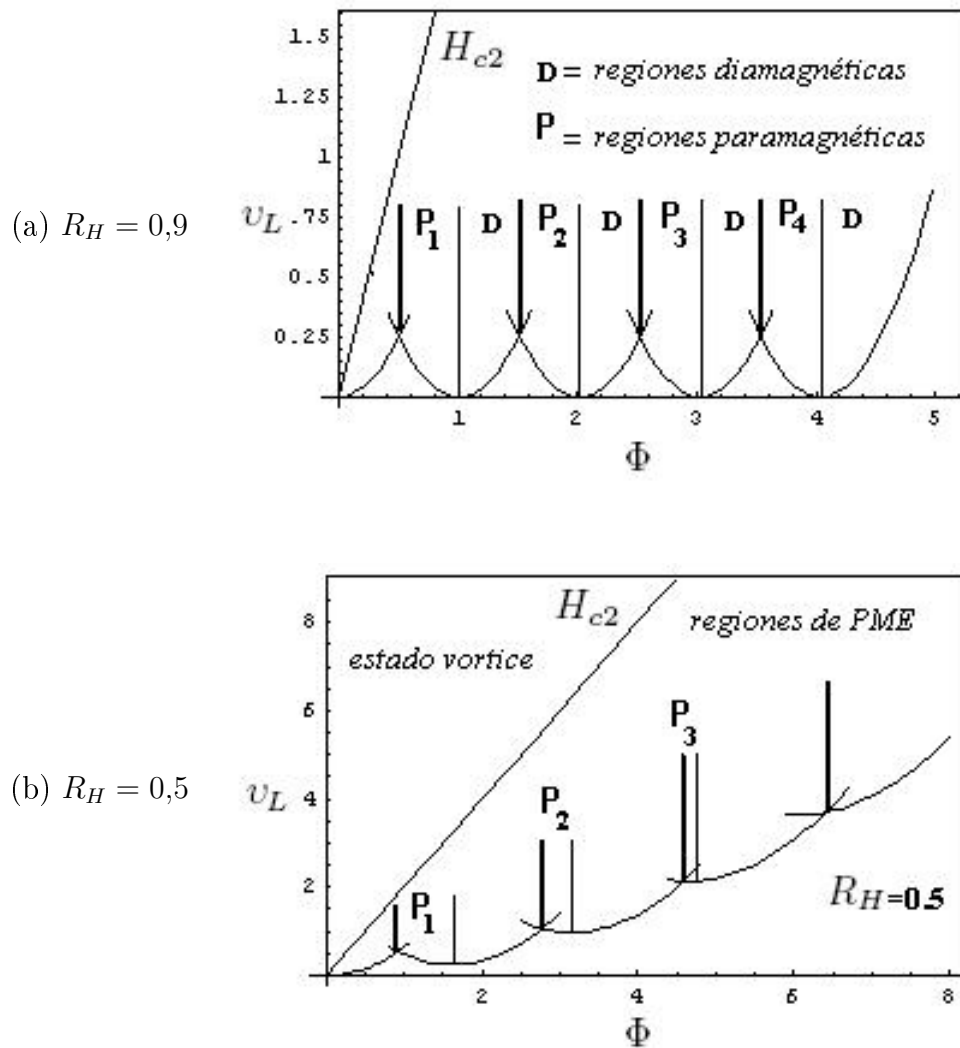
El efecto que producen globalmente este tipo de corrientes en el anillo, cuando se encuentra en un medio no conductor ( $b_1, b_2 \rightarrow \infty$ ) se presenta en la fig. 12:(a) cuando  $R_i/R \approx 1$  (anillo ideal Little-Parks) muestra una serie de respuestas uniformes:  $L = 0$  corresponde a una respuesta puramente diamagnética, mientras que la parte reentrante de  $L = 0$  es paramagnética. (b) cuando  $R_i/R = 0,5$  muestra que en el estado  $L = 0$  la supercorriente solo tiene una componente diamagnética, pero en el estado  $L = 1$  da una respuesta paramagnética para campos  $\Phi < 2$ . La magnetización de los otros estados resulta de la competición entre la corriente interna y externa<sup>34</sup>.

<sup>32</sup>Landau. Parte 2, Op. cit., p. 183.

<sup>33</sup>Meyers C. arXiv:cond-mat/0212474 v1 (2002).

<sup>34</sup>Ibid. arXiv:cond-mat/0212474 v1 (2002).

Figura 12. Regiones de efecto Meissner paramagnético<sup>35</sup>.



<sup>35</sup>Meyers C.Phys. arXiv:cond-mat/0212474 v1 (2002).

## 5. TRANSICIONES DE FASE EN ANILLOS SUPERCONDUCTORES MESOSCÓPICOS

El valor del campo magnético de nucleación  $H_{c3}$  ( $H_{nuc}$ ) correspondiente a la transición del estado normal al estado superconductor fue encontrado en la sección anterior, el cual dió la región de existencia de los estados superconductores para momentos angulares diferentes. Para un momento angular y para un valor del parámetro de de Gennes dados, el campo de nucleación es completamente determinado por el radio del anillo. Cuando la longitud de penetración excede el tamaño del anillo, el campo magnético penetra sin obstrucción dentro de él y es prácticamente uniforme. En este caso, la transición del estado superconductor al estado normal debido al incremento del campo magnético, debe ocurrir sin saltos en la magnetización y en la primera derivada de la energía libre y consecuentemente no es una transición de primer orden<sup>1</sup>. Entonces, el campo magnético crítico correspondiente a la transición del estado superconductor al estado normal, coincide con el campo de nucleación en la transición de fase de segundo orden.

En esta sección se considera superconductores tipo I, para los cuales el parámetro de G-L es menor que  $1/\sqrt{2}$ , y en particular, se considera el caso para el cual el parámetro G-L toma un valor fijo de  $k = 0,28 < 0,42$ . En este caso el estado superconductor con un efecto Meissner completo aparece para campos magnéticos más pequeños que el valor crítico  $H_c$ <sup>2</sup>.

### 5.1 CALCULO DEL ESPESOR CRÍTICO

Aquí se estudiará la influencia del espesor del anillo en su comportamiento, cuando se encuentra en presencia de un campo magnético perpendicular a su plano, y en contacto con materiales de diferentes propiedades eléctricas y magnéticas. En particular, se estudia, el orden de las transiciones de fase que tienen lugar cuando el espesor del anillo toma diferentes valores, en una región cercana a su valor crítico.

Comencemos por tener en cuenta el término no lineal en la ecuación 4.3 (primera ecuación de G-L)<sup>3</sup>, la cual se transforma en:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) f + \left\langle \left( \frac{L}{\rho} - A \right) \right\rangle^2 f = f(1 - f^2) \quad (5.1)$$

Debemos tomar el promedio sobre el espesor del disco. En la sección anterior se resolvió la parte lineal, expresando la ecuación como un operador  $\hat{L}$ , de tal forma que  $\hat{L}f = 0$ . Se vió que para un estado de momento angular cero, el estado normal

<sup>1</sup>Schweigert V.A. and Peeters F.M., Phys.Rev. B 57, 13 817 (1998).

<sup>2</sup>Recordamos que para este tipo de superconductores, si el parámetro de G-L esta entre  $0,42 < k < 1/\sqrt{2}$ , la superconductividad puede nuclear en una delgada capa superficial para campos entre  $H_c$  y  $H_{c3}$ , lo que llamamos en el anterior capítulo superconductividad superficial.

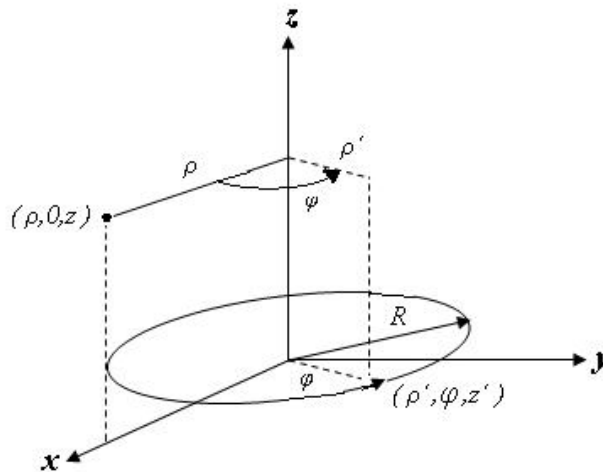
<sup>3</sup>Recordando que se ha usado coordenadas polares e introducido la función:  $\Psi(\vec{\rho}) = f(\rho)exp(iL\varphi)$ , es decir, el potencial vectorial y la corriente superconductoras están dirigidas en la dirección  $\hat{e}_\varphi$ .

se transforma a un estado superconductor con decrecimiento del campo magnético bajo el campo de nucleación. Para un momento angular diferente de cero, el estado superconductor aparece cuando cruzamos el campo de nucleación crítico superior o inferior que depende del radio del anillo<sup>4</sup>.

Cuando el espesor del anillo es comparable con la longitud de penetración, éste exhibe propiedades características de un superconductor tipo I (saltos en la magnetización y un comportamiento de histéresis)<sup>5</sup>. El campo penetra solo una distancia  $\lambda$  dentro del anillo. Como consecuencia de esto, la variación longitudinal del potencial vectorial es algo fuerte para  $d > \lambda$ , sin embargo, como se dijo en la sección anterior, esto no conduce a variaciones longitudinales importantes en el parámetro de orden, en anillos que son más delgados que la longitud de coherencia. Pero se debe tener en cuenta cualquier variación del potencial vectorial en la dirección del campo aplicado.

Para realizar cálculos analíticos, transformamos la segunda ecuación G-L (ecuación 4.4) . Primero consideramos que el anillo de espesor  $d$  se encuentra centrado en el origen del sistema y por el cual circula una supercorriente  $\mathbf{J} = \mathbf{e}_\varphi j$ ; determinamos el potencial vectorial  $\mathbf{A}$  en un punto  $P$  de coordenadas  $(\rho, 0, z)$  externo al anillo y debido a un elemento de corriente en las coordenadas  $(\rho', \varphi, z')$ . Esta geometría se muestra en la figura 13.

Figura 13. Representación del elemento de supercorriente.



Como el potencial vectorial cumple en todo el espacio con la ecuación  $k^2 \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{J}$ , que es la segunda ecuación G-L, y donde  $\mathbf{J}$  es la supercorriente adimensional; su solución, la cual se anula en el infinito es de la forma<sup>6</sup>:

$$d\mathbf{A} = \frac{\mathbf{J}}{4\pi k^2} \frac{dV}{R'} \quad (5.2)$$

<sup>4</sup>Schweigert V.A. and Peeters F.M., Phys.Rev. B 57, 13 817 (1998)

<sup>5</sup>Ibid. Phys.Rev. B 57, 13 817 (1998)

<sup>6</sup>Arfken, George.B. Mathematical methods for physicists: Harcourt, p. 798

Donde  $dV$  es el elemento de volumen del anillo y  $R'$  (se utiliza  $R'$  para no confundir la posición relativa con el radio del anillo) es la posición relativa entre los dos puntos, dado por:

$$R' = [(z - z')^2 + \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi]^{1/2}$$

$$dA = \frac{j}{4\pi k^2} \frac{\rho' d\varphi d\rho' dz' \cos \varphi}{R'} \quad (5.3)$$

Integrando la ecuación anterior, suponiendo que cuando no hay corriente en el anillo, el potencial vectorial es  $A_0$ , que es el potencial vectorial externo en la ausencia del superconductor (es decir, con campo magnético uniforme), obtenemos:

$$\int_{A_0}^A dA = \frac{1}{k^2} \int_{-d/2}^{d/2} dz' \int_{\Delta}^R j \rho' d\rho' G_0(z, z' | \rho, \rho') \quad (5.4)$$

La integración sobre la coordenada  $\rho$  se hace desde el radio interno  $R_i$  hasta el externo  $R$ . Se ha utilizado el límite inferior  $\Delta$ , porque esta toma diferentes valores, según el caso en el que estemos trabajando<sup>7</sup>.

$$G_0(z, z' | \rho, \rho') = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{[(z - z')^2 + \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi]^{1/2}} \quad (5.5)$$

Ahora de la segunda ecuación de Ginzburg-Landau, se obtiene una expresión para la corriente superconductor, equivalente a la obtenida en el capítulo anterior (ecuación 4.17), la cual nos permitió encontrar las regiones donde la supercorriente es positiva o negativa:

$$j = \left(\frac{L}{\rho} - A\right) f^2 \quad (5.6)$$

Introduciendo este resultado en la ecuación 5.4, da como resultado<sup>8</sup>:

$$A = A_0 + \gamma \hat{G}_0(L/\rho - A) f^2 \quad (5.7)$$

En la cual se ha definido  $\gamma = d/k^2$  y el operador  $\hat{G}_0$  de la siguiente forma:

$$\hat{G}_0 F = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} dz' \int_{\Delta}^R d\rho' G_0(\rho, \rho', z, z') \rho' (L/\rho - A) f^2 \quad (5.8)$$

Con  $F = (L/\rho - A) f^2$ . La ecuación (5.7) es una ecuación integral de Fredholm de segunda clase (ver apéndice), cuya solución se puede aproximar utilizando el método de Neumann. Primero se plantea una solución de la forma  $A \approx A_0$  y se obtiene  $A_1$ . Del mismo modo para  $A_2$  se tiene  $A \approx A_1$ , y para  $A_3$  se tiene  $A \approx A_2$ , los cuales están definidos como:

<sup>7</sup>En los casos límites:  $\Delta = 0$  para el caso de un disco, y  $\Delta \approx R$  para el caso de una espira muy fina.

<sup>8</sup>Schweigert V.A and Peeters F.M., Phys.rev. B 57, 13 817 (1998).



$$\begin{aligned}
A_1 &= A_0 + \gamma \hat{G}_0 (L/\rho - A_0) f^2 \\
A_2 &= A_0 + \gamma \hat{G}_0 (L/\rho - A_1) f^2 \\
A_3 &= A_0 + \gamma \hat{G}_0 (L/\rho - A_2) f^2
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Remplazando  $A_1$  en  $A_2$  y  $A_2$  en  $A_3$  se tiene que el potencial vectorial es aproximadamente dado por:

$$A = A_0 + \gamma \hat{G}_0 \eta f^2 - \gamma^2 \hat{G}_0 f^2 \hat{G}_0 \eta f^2 + \gamma^3 \hat{G}_0 f^2 \hat{G}_0 f^2 \hat{G}_0 \eta f^2$$

Si solo tenemos en cuenta términos hasta segundo orden en  $\gamma = d/k^2$ , ya que el espesor es muy pequeño en comparación con el valor de  $k$  que estamos considerando ( $k = 0,28$ ). Entonces, el término de  $\gamma^3$  es despreciable, así se puede considerar que el potencial vectorial es de la forma<sup>9</sup>:

$$A = A_0 + \gamma \hat{G}_0 \eta f^2 - \gamma^2 \hat{G}_0 f^2 \hat{G}_0 \eta f^2 \tag{5.10}$$

En donde se ha definido una nueva cantidad  $\eta(\rho) = (L/\rho - A_0)$ . Con el fin de reducir el sistema de las dos ecuaciones de G-L (que están acopladas), a una sola ecuación integrodiferencial, remplazamos la ecuación (5.10), en la primera ecuación de Ginzburg-Landau (ecuación 5.1) y obtenemos:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) f + \left\langle \left( \frac{L}{\rho} - A_0 - \gamma \hat{G}_0 \eta f^2 + \gamma^2 \hat{G}_0 f^2 \hat{G}_0 \eta f^2 \right) \right\rangle^2 f = f(1 - f^2) \tag{5.11}$$

Desarrollando el cuadrado del promedio se obtiene:

$$\begin{aligned}
f(1 - f^2) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) f + \langle \eta^2 \rangle f + \langle (-\gamma \hat{G}_0 \eta f^2)^2 \rangle \\
&\quad - 2 \langle \eta \gamma \hat{G}_0 \eta f^2 \rangle + 2 \langle \eta \gamma^2 \hat{G}_0 f^2 \hat{G}_0 \eta f^2 \rangle + f \\
&\quad + \langle (\gamma^2 \hat{G}_0 f^2 \hat{G}_0 \eta f^2)^2 \rangle + f - 2 \langle \gamma \hat{G}_0 \eta f^2 \gamma^2 \hat{G}_0 f^2 \hat{G}_0 \eta f^2 \rangle + f
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Como antes consideramos que los términos de orden superior a dos en  $\gamma$  son muy pequeños y por lo tanto despreciables, entonces, los dos últimos términos del lado izquierdo de la ecuación desaparecen.

En el límite  $d \ll \xi$  el potencial vectorial cambia muy poco dentro del anillo en la escala del espesor. Se asume entonces que se puede intercambiar las operaciones de promedio e integración. Promediando la función  $f$  y el operador  $\hat{G}_0$  sobre la coordenada longitudinal de la forma:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} f dz \tag{5.13}$$

---

<sup>9</sup>Schweigert V.A and Peeters F.M., Phys.rev. B 57, 13 817 (1998).

$$\langle \hat{G}_0 \rangle = \int_{\Delta}^R \rho' G(\rho, \rho') d\rho' = \hat{G} \quad (5.14)$$

Donde  $f$  es independiente de  $z$ , y  $G(\rho, \rho')$  se define por:

$$G(\rho, \rho') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{d^2} \int_{-d/2}^{d/2} dz \int_{d/2}^{d/2} dz' \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{[(z - z')^2 + \rho^2 + \rho'^2 - \rho\rho' \cos \varphi]^{1/2}} \quad (5.15)$$

Se puede asumir que  $\langle \hat{G}_0 f^2 \eta f^2 \rangle = \hat{G} f^2 \hat{G} \eta f^2$  y  $\langle (\hat{G}_0 \eta f^2)^2 \rangle = (\hat{G} \eta f^2)^2$ , ya que la cantidad que interviene en el promedio es el operador  $\hat{G}$ , y las demás cantidades no dependen de  $z$ <sup>10</sup>. Estas suposiciones no cambian el espesor crítico del anillo y solo afectan la amplitud de los saltos en el parámetro de orden en la transición de fase de primer orden. Con estos resultados y recordando la definición del operador  $\hat{L}$ , se tiene la ecuación integrodiferencial, que une las dos ecuaciones de Ginzburg-Landau<sup>11</sup>:

$$\hat{L}f = -f^3 + 2\gamma\eta f \hat{G} \eta f^2 - \gamma^2 [2\eta f \hat{G} f^2 + f(\hat{G} \eta f^2)^2] \quad (5.16)$$

Para anillos muy delgados tal que  $\gamma \ll 1$ , el primer término de la ecuación anterior es más dominante que los otros términos, debido a esto se puede esperar que la transición del estado normal al estado superconductor sea de segundo orden. Si por el contrario el espesor del anillo es relativamente grande, el segundo término es mucho mayor que el primero, resultando en la aparición de superconductividad finita para pequeños valores del primer valor propio del operador  $\hat{L}$ .

En el caso limite cuando  $d \rightarrow 0$ , lo cual sucede a menudo debido a que la muestra es mesoscópica y sus dimensiones son muy pequeñas (del orden de  $\mu m$ ). El operador  $\hat{G}$  puede expresarse en términos de las integrales elípticas completas, en la siguiente forma: en la ecuación (5.15) para  $G(\rho, \rho')$  se hace la siguiente aproximación:

$$z - z' \approx 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{d^2} \int_{-d/2}^{d/2} dz \int_{-d/2}^{d/2} dz' = 1 \quad (5.17)$$

Esto permite expresarla en la forma<sup>12</sup>:

$$G(\rho, \rho') = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \varphi}{(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi)^{1/2}} d\varphi \quad (5.18)$$

Utilizando el cambio de variables  $\varphi = \pi - 2\theta$ , con  $\epsilon^2 = 4\rho\rho'/(\rho + \rho')^2$ , y teniendo en cuenta las definiciones de las integrales elípticas completas:

$$K(\epsilon^2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \theta}} \quad y \quad E(\epsilon^2) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

<sup>10</sup>Schweigert V.A and Peeters F.M., Phys.rev. B 57, 13 817 (1998).

<sup>11</sup>Ibid., Phys.rev. B 57, 13 817 (1998)

<sup>12</sup>Ibid., Phys.rev. B 57, 13 817 (1998).

Estos resultados permiten expresar la ecuación (5.15) de la forma<sup>13</sup>:

$$G(\rho, \rho') = \frac{1}{\pi(\rho + \rho')} \epsilon^{-2} [(2 - \epsilon^2)K(\epsilon^2) - 2E(\epsilon^2)] = \frac{1}{\pi(\rho + \rho')} g(\epsilon^2) \quad (5.19)$$

Para resolver la ecuación 5.16 y para encontrar el espesor crítico del anillo correspondiente a la transición entre los diferentes tipos de comportamiento, expandimos el parámetro de orden sobre las funciones propias  $\psi_k$  del operador  $\hat{L}$ , el cual presenta una base completa. Se considera que las funciones propias  $\psi_k$  son ortogonales y que cada una de ellas cumple con las condiciones de frontera dadas por la ecuación 3.11<sup>14</sup>.

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \psi_k \quad (5.20)$$

En la vecindad del punto de transición (punto crítico o punto Curie) entre el estado superconductor y el estado normal, el menor valor propio  $\lambda_1$  es mucho menor que los otros valores propios  $\lambda_{k \neq 1}$ . Así, los coeficientes  $C_{k>1}$  son controlados por la amplitud  $C_1$ <sup>15</sup>; si solo tenemos en cuenta términos de tercer orden en  $C_1$ , se puede definir los coeficientes  $C_{k>1}$  de la forma  $C_{k>1} = \alpha_k C_1^3$ . Entonces, la ecuación 5.20, podemos expresarla de la siguiente forma:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \psi_k = C_1 \psi_1 + C_1^3 \sum_{k>1}^{\infty} \alpha_k \psi_k \quad (5.21)$$

Cuando aplicamos el operador  $\hat{L}$  a la expansión anterior obtenemos:

$$\hat{L}f = C_1 \lambda_1 \psi_1 + C_1^3 \sum_{k>1}^{\infty} \alpha_k \lambda_k \psi_k$$

Aquí  $\lambda_k$  son los valores propios que se obtienen al aplicar el operador  $\hat{L}$  a las funciones propias  $\psi_k$ ; es decir, los coeficientes  $C_k$  determinan las probabilidades de observar los valores propios  $\lambda_k$ . Reemplazando este resultado y la expansión para el parámetro de orden  $f$  en la ecuación 5.16, obtenemos:

$$\begin{aligned} & C_1^3 (-\psi^3 + 2\gamma\eta\psi_1 \hat{G}\eta\psi_1^2) - \lambda_1 C_1 \psi_1 - C_1^3 \lambda_k \alpha_k \psi_k \\ & + C_1^5 (-3\alpha_k \psi_1^2 \psi_k + 6\gamma\eta\alpha_k \psi_1 \hat{G}\eta\psi_1 \psi_k - 3\gamma^2 \psi_1 (\hat{G}\eta\psi_1^2)^2) = 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Debido a que el campo magnético difiere muy poco del campo de nucleación, el parámetro de orden es pequeño; así, en la ecuación anterior solo se ha tenido en cuenta términos de quinto orden en  $C_1$ . Si multiplicamos por  $\psi_1$  a lado izquierdo e integrando sobre  $\rho$ , usando la definición usual para los elementos matriciales y como la base es ortonormal:

<sup>13</sup>Para  $\epsilon^2 \ll 1$ , es decir, para  $r \gg R$  (radio del anillo),  $g(\epsilon^2)$  tiene un valor aproximado de:  $g(\epsilon^2) \approx \pi\epsilon^2/16$  (Arfken, George b. Mathematical Methods for Physicist, p. 820).

<sup>14</sup>Schweigert V.A and Peeters F.M., Phys.rev. B 57, 13 817 (1998).

<sup>15</sup>Ibid., Phys.rev. B 57, 13 817 (1998).

$$\langle f_1|f_2 \rangle = \int f_1(\rho)f_2(\rho)\rho d\rho \quad y \quad \langle \psi_i|\psi_k \rangle = \delta_{ik}$$

Se obtiene finalmente una expresión para los coeficientes  $C_1$  desconocidos:

$$\begin{aligned} & -\lambda_1 + C_1^2(-\langle \psi_1|\psi_1^3 \rangle + 2\gamma \langle \eta\psi_1^2|\hat{G}\eta\psi_1^2 \rangle) - 3C_1^4[\alpha_k(\langle \psi_1^3|\psi_k \rangle \\ & - 2\gamma \langle \eta\psi_1\psi_k|\hat{G}\eta\psi_1^2 \rangle) + \gamma^2 \langle \psi_1^2|(\hat{G}\eta\psi_1^2)^2 \rangle] = 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

Por conveniencia, para obtener una expresión mas compacta de lo anterior, definimos las siguientes cantidades<sup>16</sup>:

$$\begin{aligned} A &= 3 \left[ \gamma^2 \langle \psi_1^2|(\hat{G}\eta\psi_1^2)^2 \rangle - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (2\gamma \langle \eta\psi_k|\hat{G}\eta\psi_1^2 \rangle - \langle \psi_1^3|\psi_k \rangle)^2 \right] \\ B &= 2\gamma \langle \eta\psi_1^2|\hat{G}\eta\psi_1^2 \rangle - \langle \psi_1|\psi_1^3 \rangle \\ \alpha_k &= \frac{1}{\lambda_k} [2\gamma \langle \eta\psi_1\psi_k|\hat{G}\eta\psi_1^2 \rangle - \langle \psi_1^3|\psi_k \rangle] \end{aligned} \quad (5.24)$$

Con estas definiciones, la ecuación (5.23) puede expresarse de la forma:

$$-\lambda_1 + C_1^2 B - C_1^4 A = 0 \quad (5.25)$$

La cantidad con la cual se relaciona la Mecánica Cuántica, es la función de onda de una partícula. Aunque esta función de onda no tiene una interpretación física, el cuadrado de su valor absoluto calculado para un punto en un instante determinado es igual a la probabilidad de encontrar experimentalmente la partícula ahí y en ese instante. Entonces, en analogía con la Mecánica Cuántica podemos decir, que ya que todas las características de los sistemas medidos son determinados por el cuadrado del parámetro de orden (la probabilidad), es conveniente tratar la ecuación 5.25 con  $C = C_1^2$  que obedece la ecuación<sup>17</sup>:

$$CS(C) = 0 \quad -\lambda_1 + BC - AC^2 = S(C) \quad (5.26)$$

Si el operador  $\hat{G}$  se define positivo, el primer y segundo términos en las expresiones para  $A$  y  $B$  son positivas, el signo del coeficiente  $B$  controla el tipo de transición de fase que es determinado por la competición entre dos efectos no lineales<sup>18</sup>:

- El primer término cúbico en la ecuación (5.16) suprime el comportamiento creciente del parámetro de orden y da contribuciones negativas a  $A$  y  $B$ .
- La expulsión del campo magnético del anillo promueve el crecimiento del parámetro de orden y da contribuciones positivas a  $A$  y  $B$ .

<sup>16</sup>Schweigert V.A and Peeters F.M., Phys.rev. B 57, 13 817 (1998).

<sup>17</sup>Ibid., Phys.rev. B 57, 13 817 (1998).

<sup>18</sup>Ibid., Phys.rev. B 57, 13 817 (1998).

Según la definición de la ecuación 5.26, vemos que tiene tres soluciones, analicemos que representan en sí cada una de las tres soluciones:

\* Si  $C$  toma el valor de cero, esto corresponde al estado normal, ya que de acuerdo a la teoría de Landau el parámetro de orden (cantidad termodinámica) es cero en la fase más simétrica (temperaturas de fase altas  $T > T_c$ ), pero es continuamente diferente de cero en la fase menos simétrica (bajo la transición  $T < T_c$ ).

\*\* Ahora tratemos el caso para el cual  $S(C) = 0$ , pueden suceder dos casos que son:  $C = (B \pm \sqrt{B^2 - 4A\lambda_1})/2A$ , que describen el estado superconductor.

Por otra parte, la solución para el estado estable debe ser estable frente a pequeñas perturbaciones, las cuales se da por el siguiente criterio<sup>19</sup>:

$$S(C) + C \frac{dS(C)}{dC} = -\lambda_1 + 2BC - 3AC^2 < 0 \quad (5.27)$$

En el estado normal  $C = 0$ , es decir,  $-\lambda_1 < 0$ , entonces el estado es estable para  $\lambda_1 > 0$ . Este estado es estable para  $\lambda_1 > 0$ , porque  $\lambda_1 > 0$  es equivalente a los coeficientes  $\alpha$  (energías del sistema), los cuales toman un valor negativo para el estado superconductor.

Ahora si reemplazamos el valor de  $C^2$  en la ecuación 5.27, obtenemos que la condición de estabilidad para el estado superconductor requiere que:

$$C = (B + \sqrt{B^2 - 4A\lambda_1})/2A$$

Se considera la transición del estado normal al estado superconductor, cuando el valor propio  $\lambda_1$  cambia de signo de más a menos y permanece pequeño  $|\lambda_1| \ll 1$ . El tipo de transición varía con el signo del coeficiente  $B$ . Para  $B < 0$  se trata de una transición de segundo orden y el cuadrado del parámetro de orden asciende linealmente en la vecindad del campo de nucleación  $C = -\lambda_1/B$ . Ahora si el coeficiente  $B > 0$ , es una transición de primer orden con un salto en el parámetro de orden.

Si el coeficiente  $A > 0$ , el parámetro de orden justo después de la transición al estado superconductor<sup>20</sup>, está dado por la relación  $C = B/A$ . Para  $A < 0$  y  $B > 0$  se puede predecir solo la existencia de transiciones de fase de primer orden.

Según el análisis de las características de las constantes  $A$  y  $B$ , se puede decir, que el tipo de transiciones de fase cambia con el signo del coeficiente  $B$ . Entonces en el punto exacto en donde el coeficiente  $B$  toma un valor igual a cero hay una transición de fase. Como en esta expresión se ve involucrada la cantidad  $\gamma = d/k^2$ , se puede encontrar el espesor crítico de la expresión para el coeficiente  $B$  (ecuación 5.24).

$$0 = - \langle \psi_1 | \psi_1^3 \rangle + 2\gamma \langle \eta \psi^2 | \hat{G} \eta \psi_1^2 \rangle$$

<sup>19</sup>Schweigert V.A and Peeters F.M., Phys.rev. B 57, 13 817 (1998)

<sup>20</sup>En este punto podemos tomar el mínimo valor propio  $\lambda_1 = 0$ .

Sustituyendo  $\gamma = d/k^2$ , la expresión para el espesor crítico se convierte en<sup>21</sup>:

$$d_{crit} = \frac{k^2}{2} \frac{\langle \psi_1^2 | \psi_1^2 \rangle}{\langle \eta \psi_1^2 | \hat{G} \eta \psi_1^2 \rangle} \quad (5.28)$$

Donde se ha tomado  $\langle \psi_1 | \psi_1^3 \rangle = \langle \psi_1^2 | \psi_1^2 \rangle$ . Recordando lo anterior mencionado, se puede concluir que:

- Sí  $d > d_{crit}$  la transición del estado normal al estado superconductor sucede con saltos en la magnetización y en la energía libre, podríamos decir que hay una transición de fase de primer orden.
- Sí  $d < d_{crit}$  la transición del estado normal al estado superconductor es continua, y podríamos decir que toma lugar una transición de segundo orden.

La ecuación 5.28 representa una ecuación para el espesor crítico  $d_{crit}$  y puede resolverse numéricamente. Para tal fin, la transformamos a la siguiente expresión:

$$d_{crit} = \frac{k^2}{2} \frac{\int_{\Delta}^R d\rho \psi_1^4(\rho) \rho}{\int_{\Delta}^R \eta(\rho) \psi_1^2(\rho) \rho d\rho \int_{\Delta}^R G(\rho, \rho') \eta(\rho') \psi_1^2(\rho') \rho' d\rho'} \quad (5.29)$$

En esta expresión  $\Delta$  es equivalente a  $R_i$ , y  $\Delta$  toma diferentes valores según el caso que se está tratando, como es el caso especial de discos en el cual  $\Delta \rightarrow 0$ , y para el caso especial de Little-Parks  $\Delta \rightarrow R$ . Las menores funciones propias  $\psi_1$  (equivalentes al parámetro de orden) que intervienen, se encontraron en la sección anterior:

$$\psi_1(\rho) = \rho^L \exp(-H_0 \frac{\rho^2}{4}) \left[ M \left( -n, L + 1; \frac{H_0}{2} \rho^2 \right) - \Lambda U \left( -n, L + 1; \frac{H_0}{2} \rho^2 \right) \right]$$

En la sección anterior vimos, que la distribución de estas funciones propias a través del anillo dependen de muchos factores como son: el valor del momento angular, el valor del flujo magnético, el valor del radio interno y, como lo mostró la figura 7, el valor del parámetro de de Gennes influencia muy poco en la distribución de estas funciones.

Ahora veamos en que influyen estas variaciones en el espesor crítico. Recordando las definiciones de las diferentes cantidades que aparecen en la ecuación 5.29, podemos finalmente obtener la siguiente expresión para el espesor crítico.

$$d_{crit} = \frac{k^2}{2} \frac{\int_{\Delta}^R \psi_1^4(\rho) \rho d\rho}{\int_{\Delta}^R (L - \rho^2 H) \psi_1^2(\rho) d\rho \int_{\Delta}^R \frac{(2 - \epsilon^2)K - 2E}{\pi(\rho + \rho') \epsilon^2} (L - \rho'^2 H) \psi_1^2(\rho') d\rho'} \quad (5.30)$$

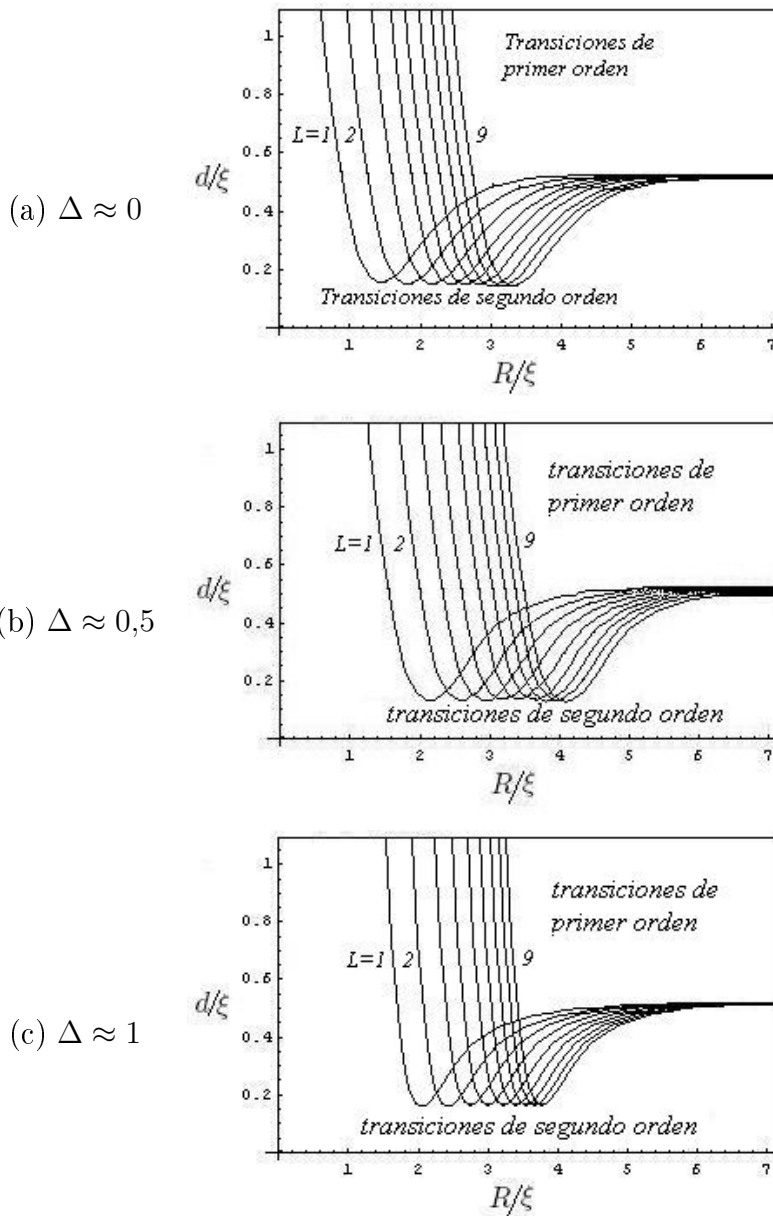
Con esta expresión se puede obtener numéricamente los valores del espesor crítico en función del radio del anillo, para los cuales existen transiciones de fase de primer o segundo orden. En esta expresión, ya que se considera que estamos tratando con

<sup>21</sup>Schweigert V.A and Peeters F.M., Phys.rev. B 57, 13 817 (1998).

superconductores tipo I, el parámetro G-L toma un valor de  $k < 1/\sqrt{2} = 0,28$ . En particular el campo  $H$  definido como  $H_0/2$  medido en unidades del campo crítico  $H_{c2}$  toma un valor que varia entre 2.33 para  $L = 1$ , y de 1.88 para un valor de  $L = 9$ .

Para analizar la influencia que tienen las diferentes cantidades involucradas en la expresión para el espesor crítico, primero realizemos los diagramas de fase cuando el anillo se encuentra en contacto con un material no conductor<sup>22</sup> y para diferentes valores del radio interno del anillo, como son:  $R_i \approx 0R$  que es el caso de un disco,  $R_i = 0,5R$  y por último  $R_i \approx R$  una espira muy delgada.

Figura 14. Espesor crítico como función del radio del anillo, para diferentes  $R_H$ .

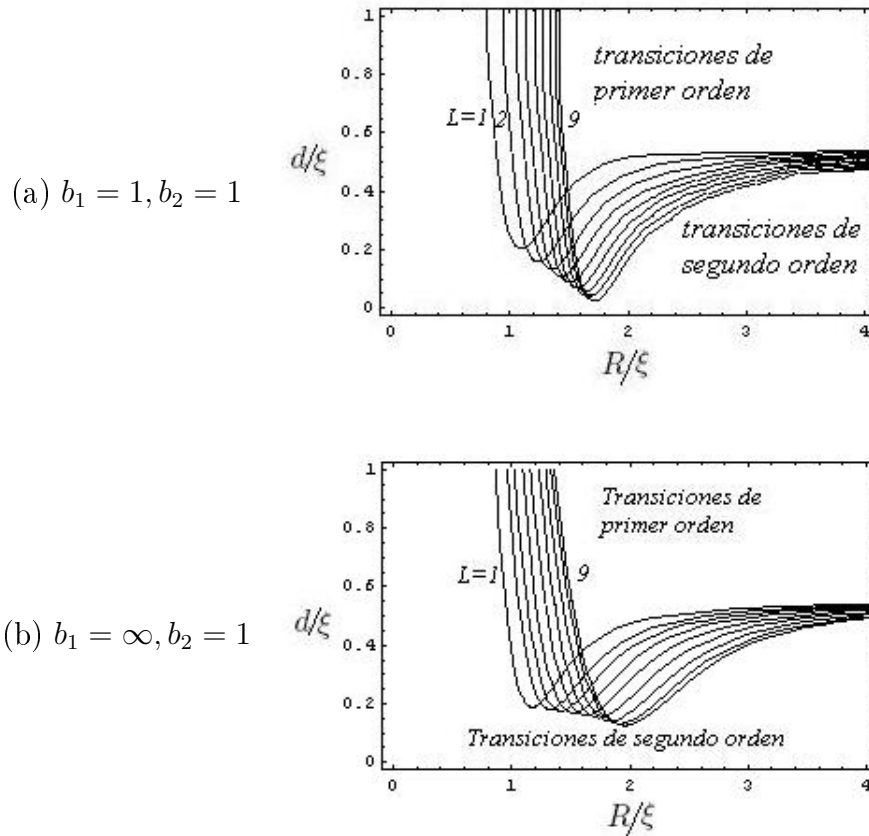


<sup>22</sup>Recordemos que para este caso el parámetro de de Gennes toma un valor infinito.

En la figura 14, se representa el espesor crítico como una función del radio del anillo para el parámetro de Ginzburg-Landau  $k = 0,28$  y diferentes valores del momento angular  $L = 1, 2, \dots, 9$ . Se ha tomado diferentes valores del radio interno: (a)  $\Delta \approx 0$  (un disco), (b)  $\Delta \approx 0,5$  y (c)  $\Delta \approx 1$ , que es el caso ideal de Little-Parks. Vemos de las tres figuras que el espesor crítico se comporta de la misma forma, pero hay una pequeña diferencia, a medida que el radio interno del anillo aumenta, el radio externo en unidades de  $\xi$  debe aumentar para que la transición sea de segundo orden. Cuando el valor del momento angular aumenta, para que la transición al estado superconductor sea de segundo orden, es necesario que el radio del anillo sea mayor. El valor del espesor crítico toma una valor constante ( $\approx 0,5\xi$ ) para valores del radio externo superiores a  $5\xi$ . Para que la transición sea continua (sin saltos en la magnetización y la energía), el espesor crítico (en unidades de  $\xi$ ) debe tomar un valor muy grande cuando el radio externo es aproximadamente igual a la longitud de coherencia; en este caso existe una discontinuidad en el espesor crítico del anillo.

Ahora, analicemos la influencia que el parámetro de de Gennes tiene en los valores críticos del espesor del anillo, para los cuales hay un orden diferente de transiciones de fase. Par ello, estudiemos el caso concreto cuando el radio interno es la mitad del radio externo, y el parámetro de de Gennes toma diferentes valores según el material con el cual se encuentra en contacto.

Figura 15. Espesor crítico para diferentes valores del parámetro de de Gennes





En la figura 15 se ha graficado los dos casos, para los cuales las funciones propias presentan una mayor variación al recorrer el anillo transversalmente<sup>23</sup>. En la parte (a) con los dos parámetros de de Gennes iguales  $b_1 = b_2 = 1$  (cuando se encuentra en un medio con características de un metal), y en la parte (b) con los valores  $b_1 = \infty$  y  $b_2 = 1$ . Estas condiciones son las que mejor representan las variaciones que sufre el espesor crítico cuando el anillo contacta interna y externamente con diferentes materiales. En los demás casos, el comportamiento es el mismo, pero no tan pronunciado. Vemos que las condiciones de frontera influyen en el mínimo valor del espesor que debe tener el anillo para que la transición sea de segundo orden, este mínimo depende de la clase de materiales y del valor del momento angular.

---

<sup>23</sup>En la sección anterior se presenta en la figura 7, los casos  $b_1 = b_2 = 1$  y  $b_1 = \infty, b_2 = 1$ , para los cuales las funciones propias presentan una mayor variación en comparación con otros valores del parámetro de de Gennes (en la posición y valor del máximo).

## 6. CONCLUSIONES

- Se ha presentado la influencia de las dimensiones del anillo y las condiciones de frontera en los diagramas de fase, que representan el comportamiento del campo crítico  $H_{c3}$ , para el cual la superconductividad nuclea en una capa superficial. Mostraron que al variar el valor del parámetro de de Gennes de la parte interna o externa, la línea envolvente  $H_{c3}$  se va desplazando a lo largo de la recta  $H_{c2}$ , reduciendo o aumentando la región de superconductividad superficial. El diagrama de fase también mostró que, cuando el radio del hueco del anillo se disminuye, las corrientes paramagnéticas son mas pequeñas; es decir, el efecto Meissner paramagnético va desapareciendo junto con la región de superconductividad superficial.
- Se obtuvo una aproximación analítica que permitió obtener el espesor crítico, el cual corresponde al cambio entre las transiciones de primer y segundo orden del anillo superconductor mesoscópico, este espesor es comparable a las longitudes de penetración y de coherencia. Se consideró la muestra hecha de material superconductor tipo I. Cuando el tamaño del disco es relativamente pequeño y la expulsión del campo magnético dentro del anillo no es esencial, el sistema exhibe un comportamiento inherente para superconductores tipo II. En este caso, la transición de fase S-N es reversible y no hay saltos en la energía libre y la magnetización. Se trata de transiciones de segundo orden en anillos delgados. Cuando el espesor del anillo excede algún valor crítico, el sistema exhibe rasgos como comportamiento de histéresis y saltos en la energía libre y la magnetización, las cuales son características de transiciones de fase de primer orden.
- El mínimo valor del espesor crítico para que la transición sea de segundo orden, es también influenciado por las condiciones de frontera. Los materiales de diferentes propiedades hacen que este mínimo sea mas pequeño con aumento del valor del momento angular, y a su vez con la disminución del parámetro de de Gennes.

## RECOMENDACIONES

El estado superconductor es, en los últimos años uno de los más estudiados debido a las múltiples aplicaciones que tiene los superconductores. Una de los máximos retos que tiene los físicos experimentadores hoy en día, es crear un compuesto que necesite temperaturas críticas altas para que la muestra se encuentre en un estado superconductor. En este trabajo se ha estudiado el campo crítico  $H_{c3}$ , para el cual existe una superconductividad superficial, y un espesor crítico para el cual el anillo presenta bien sea transiciones de primer orden, o bien transiciones de segundo orden al pasar de un estado normal a un estado superconductor bajo condiciones de frontera de de Gennes. Se invita al estudiante interesado a realizar cálculos sobre diversas geometrías que puede tener una muestra superconductora mesoscópica, como son: discos, láminas delgadas, anillos, etc.; bajo las cuales, se pueden encontrar espesor, radio, etc., críticos que pueden conducir a que los campos críticos puedan presentar un nuevo comportamiento en el diagrama  $T - H$  observado.

## BIBLIOGRAFÍA

- LANDAU, L.D. Statistical Physics: Parte 1. Pergamon, 1998.
- LANDAU, L.D. Statistical Physics: Parte 2, Theory of condensed State. Pergamon, 1998.
- ARFKEN, George B. Mathematical methods for physicists. Harcourt, 2001.
- COURANT, Hilbert. Methods of mathematical Physic. New York: Interscience Publishers, 1963.
- KITTEL, Charles. Introduction to Solid State Physics. J. Wiley y Sons, 1976.
- KETTERSON, J.B. and Song, S. Superconductivity. Cambridge, 1999.
- C. MEYERS. Surface superconducting states and paramagnetism in mesoscopic superconductors, arXiv:cond-mat/0212474 v1 2002.
- SCHWEIGERT, V.A. and PETERS, F.M. Phase transitions in thin mesoscopic superconducting disks. Phys.Rev. B 57, 13 817 (1998).
- SEGOVIA, F.A. y GRANADA, J.C. Superconductividad de borde en anillos superconductores mesoscópicos bajo diferentes condiciones de frontera. Rev.Col.Fís. 39,1 (2007).
- BERZRYADIN, A., BUZDIN, A. and PANNETIER, B. Phase diagram of multiply connected superconductors: A thin-wire loop and a thin film with a circular hole. Phys.Rev. B 51, 3718 (1995).
- BRUYNDONCX, V., VAN LOOK, L., VERSCHUERE, M. and MOSHCHALOV, V.V. Dimensional crossover in a mesoscopic superconducting loop of finite width. Phys.Rev. B PRB 60, 10 468 (1999).
- OMAGUERA, A. Efectts of boundaries in mesoscopic superconductors, arXiv:con-mat/0611370v1 14 Nov.2006.
- BERDIYOROV, G.R. Superconducting films with antidot arrays-novel behavior of the critical current, arXiv:con-mat/0603122v1 6 Mar.2006.

## ANEXOS

### Anexo A. Ecuación de Fredholm<sup>24</sup>

Empecemos considerando la ecuación de Fredholm de segunda especie:

$$u(x) = \phi(x) + \lambda \int_a^b k(x, y)u(y)dy \quad (8.1)$$

Aquí,  $\phi(x)$  es una función dada, la función  $k(x, y)$  también es dada y se conoce como el núcleo de la ecuación integral. Aquí supondremos que  $k(x, y)$  es una función continua en  $(a, b) \times (a, b)$ . Queremos resolver la ecuación (8.1) para  $u(x)$ . Consideramos primero el caso en que  $k$  es un producto de la forma:

$$k(x, y) = s(x)s(y) \quad (8.2)$$

Si  $k$  es de la anterior forma se dice que es un núcleo simple reemplazando 8.1, en la ecuación 8.2 tenemos:

$$u(x) = \phi(x) + \lambda s(x) \int_a^b s(y)u(y)dy \quad (8.3)$$

Si llamamos a  $\int_a^b s(y)u(y)dy = A$  que es simplemente un número que depende de la función  $u$ , la ecuación anterior puede expresarse como:

$$u(x) = \phi(x) + \lambda A s(x) \quad (8.4)$$

De modo que  $u$  es una combinación lineal de  $\phi$  y  $s$ , entonces todo el problema se reduce a encontrar el valor de  $A$ , para ello reemplazamos la ecuación anterior en la expresión para  $A$ , obteniéndose:

$$A \left( 1 - \lambda \int_a^b s(x)^2 dx \right) = \int_a^b s(x)\phi(x)dx$$

Entonces si:  $\lambda \neq \int_a^b s(x)^2 dx$ , la constante  $A$  es dada por:

$$A = \frac{\int_a^b s(x)\phi(x)dx}{1 - \lambda \int_a^b s(x)^2 dx} \quad (8.5)$$

Y la solución de la ecuación de Fredholm esta dada por la ecuación (8.4).

Ahora consideremos, para el mismo caso (núcleo simple), la ecuación de Fredholm de primera especie:

$$u(x) = \lambda \int_a^b k(x, y)u(y)dy \quad (8.6)$$

---

<sup>24</sup>Courant, Hilbert. Methods of mathematical Physic. New York: Interscience Publishers, 1963. p. 112-142.

Si llamamos  $T$  al operador integral de núcleo  $k$ , la ecuación anterior es de la forma:  $T(u(x)) = \lambda^{-1}u(x)$ , que es una ecuación de valores propios para el operador  $T$ , reemplazando (8.2) en (8.6), vemos que  $u$  es solución de (8.6) si es de la forma:

$$u(x) = Bs(x) \quad (8.7)$$

En que  $B = \lambda \int_a^b s(y)u(y)dy$ , vemos que 8.6 tiene solución no trivial para  $u$  si y solo si:

$$\lambda = \frac{1}{\int_a^b s(x)^2 dx} \quad (8.8)$$

En otras palabras, cuando el núcleo es de la forma  $k(x, y) = s(x)s(y)$  el operador integral tiene un solo valor propio dado por la ecuación 8.8 y su correspondiente función propia  $s(x)$ .

Anexo B. Método de interacción: serie de Newmann<sup>25</sup>

Consideremos la ecuación integral:

$$u(x) = 1 + \lambda \int_0^x u(y)dy \quad (8.9)$$

Este es un ejemplo de ecuación de Volterra de segunda especie, es muy sencilla de resolver si se reduce a una ecuación diferencial ordinaria, de hecho si derivamos la ecuación 8.1 con respecto a  $x$ , vemos que  $u$  satisface la ecuación  $du/dx = \lambda u$ , por otra parte vemos de 8.1 que  $u(0) = 1$ . La solución de la ecuación diferencial con esta condición inicial es:

$$u(x) = e^{\lambda x} \quad (8.10)$$

Este resultado se puede obtener usando otro método, que se conoce como método de interacción o de las series de Neumann. Escribamos la solución deseada en series de potencias del parámetro  $\lambda$ , es decir:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n(x) \quad (8.11)$$

Remplazando en 8.9 obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \int_0^x u_n(y)dy = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_0^x u_{n-1}(y)dy \quad (8.12)$$

Igualando coeficiente de iguales potencias en  $\lambda$ , en la ecuación anterior tenemos:

$$u_0(x) = 1 \quad y \quad u_n(x) = \int_0^x u_{n-1}(y)dy \quad (8.13)$$

---

<sup>25</sup>Courant, Hilbert. Methods of mathematical Physic. New York: Interscience Publishers, 1963. p. 112-142.

Para  $n = 1, 2, 3, \dots$  Resolviendo iterativamente la ecuación anterior tenemos:  $u_n(x) = x^n/n!$ , y finalmente reemplazando en 8.10, obtenemos:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{x^n}{n!} = e^{\lambda x}$$

Ahora resolvamos la ecuación de Fredholm de segunda especie (ecuación 8.1), procediendo de igual forma que en el caso anterior, llegamos a la siguiente secuencia de ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \phi(x) \\ u_n(x) &= \int_a^b k(x, y)u_{n-1}(y)dy \end{aligned} \quad (8.14)$$

Resolviendo las anteriores ecuaciones encontramos:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \phi(x) \\ u_1(x) &= \int_a^b k(x, y)\phi(y)dy \\ &\vdots \\ u_n(x) &= \int_a^b k^{(n)}(x, y_n)\phi(y_n)dy_n \end{aligned}$$

En que el núcleo  $k^{(n)}(x, z)$  que se conoce como núcleo iterado, esta dado por:

$$k^{(n)}(x, z) = \int_a^b \dots \int_a^b k(x, y_1)k(y_1, y_2)\dots k(y_{n-1}, z)dy_1dy_2\dots dy_{n-1} \quad (8.15)$$

Llamemos  $S_n(x) = \sum_{m=0}^n \lambda^m u_m(x)$  a la suma parcial, que converge a la solución de la ecuación integral de Fredholm. Ahora vamos a estimar la norma de  $S_n$ , usando la desigualdad triangular:

$$\|S_n\| \leq \|\phi\| + \sum_{m=1}^n |\lambda^m| \|u_m\| \quad (8.16)$$

Para estimar la norma de  $u_m$  podemos usar la relación de recurrencia 8.15 y la desigualdad de Schwarz.

$$\left[ \int_a^b k(x, y)u_{m-1}(y)dy \right]^2 \leq \left( \int_a^b k(x, y)^2 dy \right) (u^2(m-1)(y)dy) \quad (8.17)$$

Integrando esta ecuación y usando la relación de recurrencia 8.11, encontramos:

$$\|u_m\| \leq \left[ \int_a^b \int_a^b k^2(x, y)dx dy \right] \|u_m\|^2 \quad (8.18)$$

Conviene ahora definir:

$$K = \sqrt{\int_a^b \int_a^b k^2(x, y) dx dy}$$

En términos de  $K$ , a partir de 8.18, se obtiene la siguiente relación de recurrencia para las normas de las iteraciones sucesivas  $u_n$ :

$$\begin{aligned} \|0\| &= \|\phi\| \\ \|u_m\| &\leq K \|u_{m-1}\| \quad m \geq 1 \end{aligned} \quad (8.19)$$

Iterando la ecuación anterior obtenemos:

$$\|u_m\| \leq K^m \|\phi\| \quad (8.20)$$

Remplazando esta última estimación en la ecuación 8.16, obtenemos finalmente:

$$\|S_n\| \leq \left( \sum_{m=0}^n |\lambda|^m K^m \right) \|\phi\| \leq \frac{1}{1 - |\lambda|K} \|\phi\| \quad (8.21)$$

Para valores de  $\lambda$  tales que  $|\lambda|K < 1$ . Así pues las sumas parciales  $S_n$  convergen para valores suficientemente pequeños de  $\lambda$ ; es decir, para valores de  $\lambda$  tales que:

$$|\lambda| < \frac{1}{K} \quad (8.22)$$

La constante  $K$  se conoce como la norma de Hilbert-Schmidth del operador integral  $T$  del núcleo  $k$ .