

**ESTUDIO TEÓRICO DE LA ESTRUCTURA Y EVOLUCIÓN DEL  
POLVO PRODUCIDO EN EL CINTURÓN DE KÜIPER**

**KARLA PATRICIA REYES SANCHEZ**

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
PROGRAMA DE FÍSICA  
SAN JUAN DE PASTO  
2008**

**ESTUDIO TEÓRICO DE LA ESTRUCTURA Y EVOLUCIÓN DEL  
POLVO PRODUCIDO EN EL CINTURÓN DE KÜIPER**

**KARLA PATRICIA REYES SANCHEZ**

**TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR EL TÍTULO DE FÍSICO**

**DIRECTOR:  
MSc. ALBERTO QUIJANO VODNIZA**

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
PROGRAMA DE FÍSICA  
SAN JUAN DE PASTO  
2008**

## TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
1. INTRODUCCIÓN	17
2. OBJETIVOS	19
2.1 OBJETIVO GENERAL	19
2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	19
3. EL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS	20
3.1 ECUACIONES DE MOVIMIENTO	20
3.2 POSICIÓN ORBITAL Y VELOCIDAD	22
3.3 LA ÓRBITA EN EL ESPACIO	23
4. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE LOS TRES CUERPOS	28
4.1 ECUACIONES DE MOVIMIENTO	28
4.2 LA INTEGRAL DE JACOBI	30
4.3 LAS CURVAS DE VELOCIDAD CERO	30
4.4 PUNTOS LAGRANGIANOS DE EQUILIBRIO	31
4.4.1 Localización de los puntos de equilibrio	33
4.4.2 Estabilidad de los puntos de equilibrio	34
5. EL PROBLEMA FOTOGRAVITACIONAL RESTRINGIDO DE LOS TRES CUERPOS	35
5.1 EL EFECTO POYNTING - ROBERTSON	35
5.2 ECUACIONES DE MOVIMIENTO	36
6. SISTEMA SOL - PLANETA - PARTÍCULA DE POLVO	41
6.1 SOL - PARTÍCULA DE POLVO - JÚPITER	42
6.2 SOL - PARTÍCULA DE POLVO - SATURNO	46
6.3 SOL - PARTÍCULA DE POLVO - NEPTUNO	50
6.4 SOL - PARTÍCULA DE POLVO - TIERRA	55
7. TEORÍA DE PERTURBACIONES	60
7.1 ECUACIONES PLANETARIAS DE LAGRANGE	60
7.2 PERTURBACIÓN POR EFECTO POYNTING - ROBERTSON	76
8. CONCLUSIONES	79
BIBLIOGRAFIA	80
ANEXOS	81

## LISTA DE FIGURAS

	Pág.
1. Fuerzas en el problema de los dos cuerpos	20
2. Elementos orbitales	24
3. Localización de los vectores $l$ y $m$	26
4. Relación entre las coordenadas del sistema inercial con las del sistema rotante	28
5. Curvas de velocidad cero par $\mu = 0.001$ y diferentes valores de la constante de Jacobi $C_j$	31
6. Configuración de los puntos de equilibrio en el problema restringido de los tres cuerpos	33
7. Localización de los puntos lagrangianos para el problema fotogravitacional: Sol - Júpiter - Partícula	42
8. Variación de los puntos lagrangianos con el factor $q$ para el caso Sol - Júpiter - Partícula	43
9. Localización de los puntos lagrangianos para el problema fotogravitacional: Sol - Saturno - Partícula	46
10. Variación de los puntos lagrangianos con el factor $q$ para el caso Sol - Saturno - Partícula	47
11. Localización de los puntos lagrangianos para el problema fotogravitacional: Sol - Neptuno - Partícula	51
12. Variación de los puntos lagrangianos con el factor $q$ para el caso Sol - Neptuno - Partícula	52
13. Localización de los puntos lagrangianos para el problema fotogravitacional: Sol - Tierra - Partícula	56
14. Variación de los puntos lagrangianos con el factor $q$ para el caso Sol - Tierra - Partícula	57
15. Representación de los vectores unitarios $U_r$ , $U_T$ y $U_\theta$	63
16. Sistema de coordenadas $\xi$ y $\eta$	68
17. Relación del vector $\vec{r}$ con los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$	68
18. Vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ en términos de los elementos orbitales	69
19. El Telescopio Espacial SPITZER	81
20. Espectro Electromagnético	82
21. Imagen tomada por SPITZER	83

## LISTA DE CUADROS

	Pág.
1. Tipos de cónicas	22
2. Valores de $r_1$ y $r_2$ para el sistema Sol - Partícula - Júpiter	44
3. Distancias en UA de la partícula al Sol y a Júpiter	45
4. Valores de $r_1$ y $r_2$ para el sistema Sol - Partícula - Saturno	48
5. Distancias en UA de la partícula al Sol y a Saturno	48
6. Valores de $r_1$ y $r_2$ para el sistema Sol - Partícula - Neptuno	53
7. Distancias en UA de la partícula al Sol y a Neptuno	53
8. Valores de $r_1$ y $r_2$ para el sistema Sol - Partícula - Tierra	58
9. Distancias en UA de la partícula al Sol y a La tierra	58

## LISTA DE ANEXOS

	Pág.
A. EL TELESCOPIO ESPACIAL SPITZER	81
B. TEOREMA DE CORIOLLIS	84
C. DATOS PLANETARIOS	87
D. PROGRAMAS EMPLEADOS PARA OBTENER LAS GRÁFICAS	88

## GLOSARIO

**ANOMALÍA VERDADERA:** Ángulo que el radio vector forma con la línea de las ápsides.

**ANOMALÍA EXCÉNTRICA:** Es el ángulo medido desde el centro de la elipse, que forma la proyección del planeta sobre la circunferencia principal y el eje de la elipse. Se designa por  $E$ . La relación entre la anomalía media y la anomalía excéntrica es la llamada Ecuación de Kepler.

**INFRAROJO:** Región del espectro electromagnético cercana al espectro visible, cuya longitud de onda comprende el rango de los micrómetros.

**LINEA DE LAS APSIDES:** Línea que une el perihelio y el afelio, en el caso de la elipse coincide con el semieje mayor.

**LUMINOSIDAD:** Es la cantidad de potencia (energía por unidad de tiempo) emitida en todas direcciones por un cuerpo celeste. Está directamente relacionada con la magnitud absoluta del astro.

**PERICENTRO:** Punto de la órbita más cercano al sol.

**ECLÍPTICA:** plano definido por la órbita de la Tierra alrededor del Sol, el cual se proyecta como un círculo máximo sobre la esfera celeste inclinado en unos  $23,5^\circ$  con relación al ecuador celeste.

**ECUADOR CELESTE:** proyección del ecuador terrestre en la esfera celeste. Su plano es perpendicular al eje de rotación de la Tierra.

**EQUINOCCIO VERNAL:** Intersección de la eclíptica y el ecuador celeste, corresponde al punto de origen de la ascensión recta y la longitud celeste.

**ESFERA CELESTE:** Esfera imaginaria de radio infinito sobre la cual se suponen ubicados los cuerpos celestes y tiene como centro el observador, el centro de la Tierra u otra posición cualquiera dependiendo de las necesidades del observador.

**EXCENTRICIDAD ( $e$ ):** Parámetro que define la forma de la órbita de un cuerpo alrededor de otro. Hace parte de las propiedades de las secciones cónicas.

**UNIDAD ASTRONÓMICA (UA):** Unidad de longitud, usada para medir las distancias de los cuerpos estelares, equivale a 149.597.870 Km. Algunas veces es tomada como la distancia promedio de la Tierra al Sol.

Las ideas y conclusiones aportadas en este trabajo de grado, son responsabilidad exclusiva del autor

Artículo primero del acuerdo No. 324 de Octubre 11 de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de aceptación

---

---

---

---

---

---

Director

---

Jurado

---

Jurado

San Juan de Pasto, Junio de 2008

## AGRADECIMIENTOS

A Dios por ser el constructor de este universo complejo y maravilloso que ha despertado en mi las inquietudes más asombrosas. Por ser el gestor de la vida y por permitirme vivir en esta época en donde hemos llegado a la luna, impactado un cometa y escudriñado hasta los confines del sistema solar.

A todas aquellas personas que de una u otra manera contribuyeron al desarrollo de este trabajo:

A mi madre Elizabeth Sánchez por entregarnos su vida, por ser la mujer más trabajadora, honesta y cariñosa. Gracias por tanto sacrificio. A mis hermanitas, gracias por su apoyo, su comprensión, su amor y por ser tan ejemplares y responsables.

A James Perenguez López: Gracias por su apoyo, su colaboración, sus consejos y sus palabras de aliento en los momentos en que más necesité.

Al Profesor Alberto Quijano Vodniza, de quien he aprendido mucho más que ecuaciones y que se ha convertido en una gran inspiración para mi vida. Le agradezco de todo corazón por ofrecerme un espacio dentro de su grupo de investigación y por permitirme compartir ese amor por la astronomía.

A la Universidad de Nariño y al programa de física, por formarme como profesional. Siempre llevaré conmigo el recuerdo de los mejores años de mi vida.

A mis amigos: Espero seguir compartiendo con ellos todo el largo camino que nos falta por recorrer.

## DEDICATORIA

Este trabajo está dedicado a los cuatro grandes amores de mi vida: A mi Madre, mi inspiración y ejemplo. A mis hermanas Alexandra y Gina por ser las mejores mujeres del mundo y a mi sobrinito Angel Gabriel.

A mi Padre (Q.E.P.D)

A James, por ofrecerme su comprensión y por ser también un ejemplo e inspiración para mi vida.

A mis tios.

## ABSTRACT

On the following piece of work it was developed a study of the dynamics of dust at the solar system, studying the three bodies' photogravitational restricted problem and getting to locate the lagrangian equilibrium points for different systems: Sun-Planet- Particle. It was found that the location of the different points depends on the  $q$  reduction factor 's value and the fact that the location differs from the classic problem. On this work we also managed to determine the gaussian form of the Lagrange 's planetary equations, taking as disruptive acceleration the one originated by the Poynting- Robertson effect. It was found that the inclination and the orbit 's ascending node don't vary under this kind of disturbance.

## RESUMEN

En el siguiente trabajo se realizó un estudio de la dinámica del polvo en el sistema solar, estudiando el problema fotogravitacional restringido de los tres cuerpos y logrando ubicar los puntos lagrangianos de equilibrio para diferentes sistemas: Sol - Planeta - Partícula. Se encontró que la ubicación de los diferentes puntos depende del valor del factor de reducción  $q$  y que la ubicación difiere del problema clásico. En este trabajo también se logró determinar la forma gaussiana de las ecuaciones planetarias de Lagrange, tomando como aceleración perturbatriz la originada por el efecto Poynting - Robertson. Se encontró que la inclinación y el nodo ascendente de la órbita no varían bajo este tipo de perturbación.

## 1. INTRODUCCIÓN

Partículas de polvo interplanetario (IDPs) en nuestro sistema solar son creadas principalmente de colisiones entre asteroides, de la desintegración de cometas cerca al Sol y de las mutuas colisiones de los cuerpos del cinturón de *Küiper* (EKB). Mientras que los cuerpos que originan estas partículas permanecen en órbitas cuasi-estables, las partículas de tamaños milimétricos son altamente influenciadas por el viento solar y por efecto Poynting-Robertson. Estas fuerzas causan que las IDPs caigan en espiral hacia el Sol; cuando observamos a distancias astronómicas (muchos años luz), esto puede representar la característica más prominente en un sistema planetario, además de la estrella central. Discos de polvo se han observado alrededor de estrellas tales como:  $\beta$  Pictoris,  $\epsilon$  Eridani, HR 4796a, Vega y Fomalhaut.<sup>1</sup>

Desde el descubrimiento del disco de  $\beta$  Pic, se ha reconocido que los discos circum-estelares pueden usarse para reconocer planetas extrasolares <sup>2</sup>, si existen planetas las partículas interactuarán con ellos, estas interacciones incluyen captura de polvo en puntos lagrangianos de equilibrio y perturbaciones de los elementos orbitales.

En el siguiente trabajo se realiza un estudio teórico de cómo es la distribución del polvo producido en el cinturón de Küiper en los puntos lagrangianos de equilibrio en un sistema sol - partícula - planeta, mediante el análisis del problema fotogravitacional restringido de los tres cuerpos.

Para empezar, en los capítulos 3 y 4, se realiza una revisión teórica del problema de los dos cuerpos y de los tres cuerpos, mostrando la solución analítica al problema de los dos cuerpos y examinando una solución particular al problema restringido de los tres cuerpos. Se realiza una revisión bibliográfica de la ubicación de los puntos lagrangianos y su estabilidad. Estos primeros capítulos sustentan el fundamento teórico para empezar la investigación.

En los capítulos 5 y 6 se empieza a desarrollar el primer objetivo del trabajo, estudiando el problema fotogravitacional restringido de los tres cuerpos. En este problema se considera que uno de los cuerpos considerados es una fuente emisora de radiación. En esta parte se dará la ubicación de los nuevos puntos lagrangianos para cuatro sistemas diferentes, que serán: Sol - partícula - Júpiter, Sol - partícula - Saturno, Sol - partícula - Neptuno, Sol - partícula - Tierra.

En el capítulo 7 se estudia la teoría de perturbaciones y se encuentran las ecuaciones diferenciales que fundamentan la evolución de los elementos orbitales de un cuerpo dado. Estas serán las *ecuaciones planetarias de Lagrange*, para las cuales se consider-

---

<sup>1</sup>Smith and Terrile 1984; Holland et al. 1998

<sup>2</sup>Ferlet and Vidal - Madjar 1994

ará la respectiva aceleración perturbatriz, considerando el efecto Poynting Robertson y llegando a establecer la forma gaussiana de las ecuaciones de Lagrange.

## **2. OBJETIVOS**

### **2.1 OBJETIVO GENERAL**

Realizar un estudio teórico de la estructura y evolución del polvo producido en el cinturón de Küiper bajo efecto gravitacional del sol, un planeta gigante y por efecto Poynting - Robertson.

### **2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

Estudiar el problema fotogravitacional restringido de los tres cuerpos para el sistema sol - partícula - planeta gigante.

Estudiar la evolución de los elementos orbitales de partículas de polvo, mediante las ecuaciones planetarias de Lagrange.

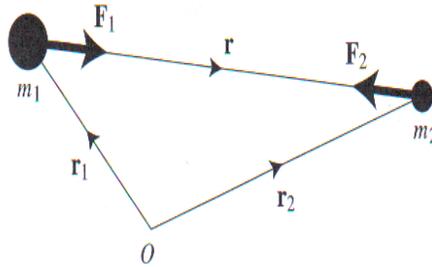
### 3. EL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS

El problema de los dos cuerpos es tal vez el problema integrable más simple en la dinámica del sistema solar. Este trata la interacción de dos masas puntuales moviéndose bajo su mutua atracción gravitacional descrita por la ley de Gravitación Universal de Newton.

#### 3.1 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Consideremos el movimiento de dos masas  $m_1$  y  $m_2$  con vectores posición  $r_1$  y  $r_2$  referidos a algún mismo origen  $O$  fijo en el espacio inercial.

Figura 1. Fuerzas en el problema de los dos cuerpos



El vector  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  denota la posición relativa de la masa  $m_2$  con respecto a  $m_1$ . La fuerza gravitacional y las aceleraciones experimentadas por las masas son (figura 1):

$$\vec{F}_1 = G * \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \quad (3.1)$$

$$\vec{F}_2 = -G * \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} = m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \quad (3.2)$$

Donde  $G = 6,67260 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ Kg}^{-2}$  es la constante de gravitación Universal.

Tenemos entonces:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0 \quad (3.3)$$

Esta ecuación puede integrarse dos veces para obtener:

$$m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \vec{a} \quad (3.4)$$

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = \vec{a}t + \vec{b} \quad (3.5)$$

Donde  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  son vectores constantes. Si:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

denota la posición del centro de masa, entonces las ecuaciones anteriores pueden ser escritas como:

$$\vec{R} = \frac{\vec{a}}{m_1 + m_2} \quad (3.6)$$

$$\vec{R} = \frac{\vec{a}t + \vec{b}}{m_1 + m_2} \quad (3.7)$$

Esto implica que el centro de masa es estacionario si  $\mathbf{a} = 0$  o éste está moviéndose en línea recta con una velocidad constante con respecto al origen O.

Ahora consideremos el movimiento de  $m_2$  con respecto a  $m_1$ . Escribimos entonces  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , entonces usando la ecuación (1-2), obtenemos:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \bar{\mu}\frac{\vec{r}}{r^3} = 0 \quad (3.8)$$

Donde:

$$\bar{\mu} = G(m_1 + m_2)$$

Tomando el producto vectorial de  $\vec{r}$  con la ecuación (3.8), llegamos a la siguiente condición:

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{h} \quad (3.9)$$

Donde  $\vec{h}$  es un vector constante perpendicular a  $\vec{r}$  y  $\dot{\vec{r}}$ . Esta ecuación es llamada la integral del momento angular. Se tiene que  $\vec{r}$  y  $\dot{\vec{r}}$  permanecen siempre en el mismo plano llamado el *plano de la órbita*. Utilizando coordenadas polares las ecuaciones de movimiento son:

$$\vec{r} = r\hat{r} \quad (3.10)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad (3.11)$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \right] \hat{\theta} \quad (3.12)$$

### 3.2 POSICIÓN ORBITAL Y VELOCIDAD

Para obtener una ecuación escalar para el movimiento relativo, sustituimos la expresión de (3.12) en la (3.8), y comparando componentes, tenemos:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\bar{\mu}}{r^2} \quad (3.13)$$

La solución de ésta ecuación diferencial luego de realizar algunos cambios de variable es:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \bar{\omega})} \quad (3.14)$$

La cual es la ecuación general de una cónica en coordenadas polares donde  $e$  es la excentricidad y  $p$  está dado por:

$$p = \frac{h^2}{\bar{\mu}}$$

Las cuatro posibles cónicas son (cuadro No. 1):

Cuadro 1. Tipos de cónicas

Cónica	Exentricidad	p
círculo	0	a
elipse	$0 < e < 1$	$a(1 - e^2)$
parábola	1	$2q^*$
hipérbola	$e > 1$	$a(e^2 - 1)$

\*. En el caso de la parábola  $a$  es reemplazado por el parámetro  $q$ .

Donde  $a$  es el semieje mayor de la cónica. En el caso de la elipse las cantidades  $a$  y  $e$  están relacionadas de la siguiente manera:

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \quad (3.15)$$

Donde  $b$  es el semieje menor de la elipse. Tenemos:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(\theta - \bar{\omega})} \quad (3.16)$$

Donde  $\theta$  es la longitud verdadera. El ángulo  $\bar{\omega}$  es llamado la longitud del pericentro.

Se verifica que  $f = \theta - \bar{\omega}$ , donde  $f$  es llamada la anomalía verdadera. Llegando a:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (3.17)$$

El ángulo  $\theta$  cubre  $2\pi$  radianes en un periodo orbital, definimos el movimiento medio  $n$  por:

$$n = \frac{2\pi}{T} \quad (3.18)$$

Que en vista de la tercera ley de Kepler puede escribirse:  $\bar{\mu} = n^2 a^3$  y con ésta relación:

$$h = \sqrt{\bar{\mu} a (1 - e^2)}$$

Se puede derivar otra constante del movimiento (la primera es el momento angular) tomando el producto escalar de  $\vec{r}$  con (3.8), esto da:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\bar{\mu}}{r} = C \quad (3.19)$$

Esta ecuación es llamada la *integral de vis viva* y muestra que la energía orbital por unidad de masa se conserva. Se encuentra que la constante  $C$  tiene el siguiente valor:

$$C = -\frac{\bar{\mu}}{2a}$$

### 3.3 LA ÓRBITA EN EL ESPACIO

Hemos mostrado que los vectores posición y velocidad de la masa  $m_2$  con respecto a la masa  $m_1$  permanecen en un plano perpendicular al vector momento angular. Los valores de  $\vec{r}$  (x,y) y  $\dot{r}$  ( $\dot{x},\dot{y}$ ) en cualquier tiempo define una única órbita y una ubicación sobre la órbita por medio de tres constantes  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\omega$  y la variable  $\theta$ . Sin embargo el movimiento en el sistema solar no está confinado en un sólo plano por lo tanto consideraremos una representación tridimensional de la órbita en el espacio.

Consideremos un sistema coordenado cartesiano tridimensional con respecto al cual un punto arbitrario tiene vector posición  $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ . El eje  $x$  se toma a lo largo del eje mayor de la elipse en la dirección del pericentro, el eje  $y$  es perpendicular al eje  $x$  y permanece en el plano de la órbita, mientras el eje  $z$  es mutuamente perpendicular a los ejes  $x,y$ .

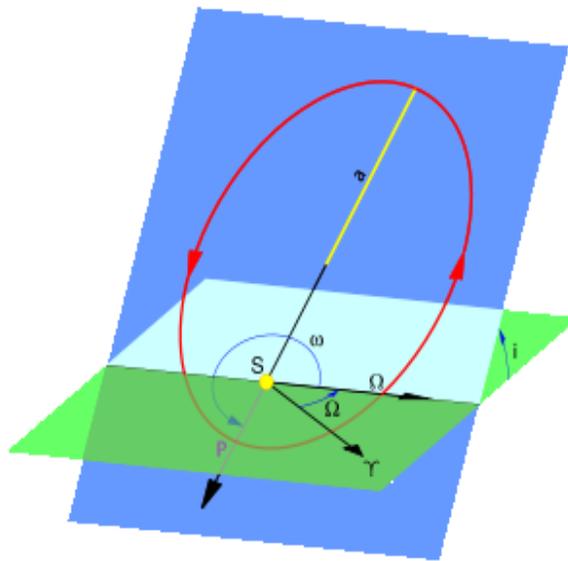
Referiremos este plano orbital a un sistema de referencia estandar. La dirección de la línea de referenecia corresponde al eje  $X$  de nuestro sistema estándar de coordenadas. Como caso particular consideraremos un sistema coordenado heliocéntrico donde el

plano de referencia es el plano de la órbita del planeta y la línea de referencia está en la dirección del equinoccio vernal, a lo largo de la línea de intersección del plano del ecuador del planeta y la eclíptica. En general el plano de la órbita estará inclinado con respecto al plano de referencia a un ángulo  $i$  llamado inclinación de la órbita (ver Figura 2). La línea de intersección entre el plano orbital y el sistema de referencia estándar es llamada la **línea de los nodos**.

El punto en ámbos planos donde la órbita cruza el plano de referencia moviéndose de abajo hacia arriba es llamado el nodo ascendente,  $\Omega$ . El ángulo entre este mismo radio vector y el pericentro de la órbita es llamado el argumento del pericentro,  $\omega$ .

La inclinación está siempre en el rango  $0 \leq i \leq 180$ . Si  $i < 90^\circ$  el movimiento se dice que es progrado, mientras que si  $i \geq 90$  el movimiento es retrogrado. En el límite cuando  $i \rightarrow 0$  el plano orbital coincide con el plano de referencia.

Figura 2. Elementos orbitales



Debemos encontrar un método para transformar la posición  $(X, Y, Z)$  y la velocidad  $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$ , de un objeto en una órbita elíptica en el plano de referencia estándar en un tiempo  $t$  a un grupo de seis elementos orbitales,  $a, e, i, \Omega, \omega$  y  $\theta$  y además el tiempo de paso por el pericentro.

Se tendrá entonces:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \quad (3.20)$$

$$V^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 \quad (3.21)$$

$$\vec{R} \cdot \vec{R} = X\dot{X} + Y\dot{Y} + Z\dot{Z} \quad (3.22)$$

$$\vec{h} = (Y\dot{Z} - Z\dot{Y}, Z\dot{X} - X\dot{Z}, X\dot{Y} - Y\dot{X}) \quad (3.23)$$

$$\dot{R} = \sqrt{V^2 - \frac{h^2}{R^2}} \quad (3.24)$$

Donde  $R = r$  denota la longitud del radio vector y  $\dot{R}$  es su velocidad. Tenemos:

$$h \cos i = hz \quad (3.25)$$

$$h \operatorname{sen} i \operatorname{sen} \Omega = \pm hx \quad (3.26)$$

$$h \operatorname{sen} i \cos \Omega = \mp hy \quad (3.27)$$

El procedimiento es como sigue:

- Calcular  $a$  usando la ley de vis viva:

$$a = \left( \frac{2}{R} - \frac{V^2}{G(m_1 + m_2)} \right)^{-1} \quad (3.28)$$

- Calcular  $e$  usando la relación:

$$e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{G(m_1 + m_2)a}} \quad (3.29)$$

- Calcular  $i$  usando

$$i = \cos^{-1} \left( \frac{hz}{h} \right) \quad (3.30)$$

- Calcular  $\Omega$  usando:

$$\operatorname{sen} \Omega = \pm \frac{hx}{h \operatorname{sen} i} \quad (3.31)$$

- Calcular  $(\omega + f)$  de la relación:

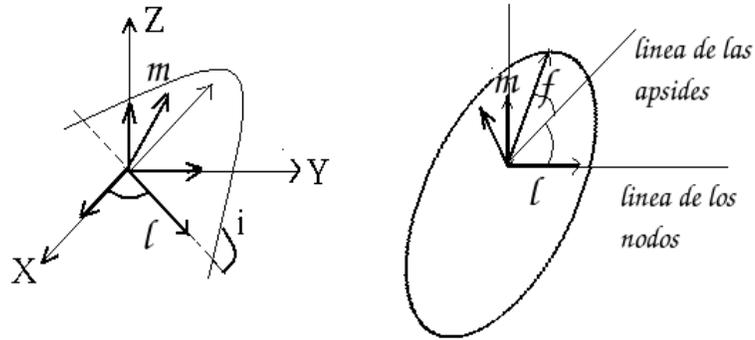
$$\text{sen}(\omega + f) = \frac{Z}{R\text{sen}i} \quad (3.32)$$

- Calcular el tiempo de paso por el perihelio  $\chi$  utilizando la ecuación de Kepler.

Ahora supongamos que para un instante  $t$ , los valores de  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{f}$  son conocidos al igual que los elementos orbitales, entonces debemos encontrar a partir de éstos las componentes del vector posición  $\vec{r}$  para dicho tiempo  $t$ .

Sean  $\hat{l}$  y  $\hat{m}$  dos vectores unitarios, el primero ubicado en el plano  $xy$  y dirigido en la dirección del nodo ascendente, el segundo ortogonal a  $\hat{l}$  pero definido en el plano de la órbita en que se mueve  $m_2$ .

Figura 3. Localización de los vectores  $\hat{l}$  y  $\hat{m}$



De la figura 3 observamos que:

$$\hat{l} = \cos\Omega\hat{i} + \text{sen}\Omega\hat{j} + 0\hat{k} \quad (3.33)$$

$$\hat{m} = -\text{sen}\Omega\cos i\hat{i} + \cos\Omega\cos i\hat{j} + \text{sen}i\hat{k} \quad (3.34)$$

Podemos escribir también:

$$\hat{U}_r = \hat{l}\cos(\omega + f) + \hat{m}\text{sen}(\omega + f) \quad (3.35)$$

y como  $\vec{r} = r\hat{U}_r$  se obtiene:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = r\cos(\omega + f)(\cos\Omega\hat{i} + \text{sen}\Omega\hat{j} + 0\hat{k}) + r\text{sen}(\omega + f)(-\text{sen}\Omega\cos i\hat{i} + \cos\Omega\cos i\hat{j} + \text{sen}i\hat{k}) \quad (3.36)$$

Factorizando los términos que acompañan los vectores unitarios a ámbos lados tenemos:

$$x = r[\cos(\omega + f)\cos\Omega - \text{sen}(\omega + f)\cos\text{sen}\Omega] \quad (3.37)$$

$$y = r[\cos(\omega + f)\text{sen}\Omega + \text{sen}(\omega + f)\cos\text{cos}\Omega] \quad (3.38)$$

$$z = r[\text{sen}(\omega + f)\text{sen}i] \quad (3.39)$$

A continuación determinamos las componentes  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  del vector velocidad, para ello recordamos:  $\vec{r} = \dot{r}\hat{U}_r + r\dot{f}\hat{U}_f$ . Necesitamos encontrar el valor de  $\hat{U}_f$ , para ello de la figura se analiza que:

$$\hat{U}_f = -\hat{l}\text{sen}(\omega + f) + \hat{m}\cos(\omega + f) \quad (3.40)$$

Debemos encontrar los valores de  $\dot{r}$  y de  $r\dot{f}$ , para ello diferenciando la ecuación 3.17 obtenemos:

$$\dot{r} = \frac{na}{\sqrt{(1-e^2)}}e\text{sen}f \quad (3.41)$$

Entonces:

$$\dot{r}\hat{U}_r = \frac{na}{\sqrt{(1-e^2)}}e\text{sen}f\frac{\vec{r}}{r} \quad (3.42)$$

Por otro lado:

$$r\dot{f} = \frac{na^2\sqrt{(1-e^2)}}{r} \quad (3.43)$$

Al reemplazar el valor de  $\hat{U}_f$ , teniendo en cuenta los valores de  $\hat{l}$  y  $\hat{m}$ :

$$\dot{x} = \frac{na\text{sen}f}{r\sqrt{(1-e^2)}}x + \frac{a^2n\sqrt{(1-e^2)}}{r} [-\text{sen}(\omega + f)\cos\Omega - \text{sen}\Omega\cos\text{cos}(\Omega + f)] \quad (3.44)$$

$$\dot{y} = \frac{na\text{sen}f}{r\sqrt{(1-e^2)}}x + \frac{a^2n\sqrt{(1-e^2)}}{r} [-\text{sen}\Omega\text{sen}(\omega + f) + \cos\Omega\cos\text{cos}(\Omega + f)] \quad (3.45)$$

$$\dot{z} = \frac{na\text{sen}f}{r\sqrt{(1-e^2)}}x + \frac{a^2n\sqrt{(1-e^2)}}{r} [\text{sen}\text{cos}(\omega + f)] \quad (3.46)$$

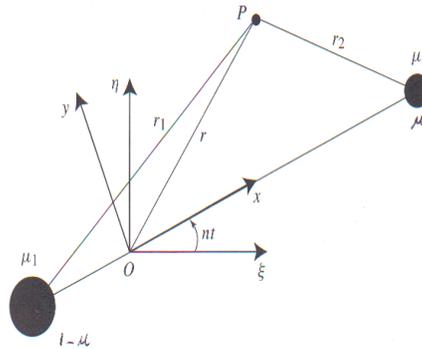
## 4. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE LOS TRES CUERPOS

El problema del movimiento de tres cuerpos (asumidos como masas puntuales), sujeto sólo a su mutua atracción gravitacional no ha sido resuelto, aunque muchas soluciones particulares han sido encontradas. Empezaremos con una discusión del problema restringido de los tres cuerpos; donde dos cuerpos de masa finita giran alrededor del otro en órbitas circulares, y un tercer cuerpo de masa infinitesimal se mueve en su campo. Esta situación se presenta en muchas instancias en el Sistema Solar.

### 4.1 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Consideremos el movimiento de una pequeña partícula de masa despreciable moviéndose bajo la influencia gravitacional de dos masas  $m_1$  y  $m_2$ . Asumimos que las dos masas tienen órbitas circulares alrededor de su centro de masa común y que ejercen una fuerza sobre la partícula aunque ésta no puede afectar ninguna de las dos masas.

Figura 4. Relación entre las coordenadas del sistema inercial con las del sistema rotante



Consideremos un grupo de ejes  $\xi, \eta, \zeta$  en el sistema inercial referido al centro de masa del sistema. Sea el eje  $\xi$  orientado a lo largo de la línea que une a  $m_1$  con  $m_2$  en  $t=0$  (Figura 4), sea el eje  $\eta$  perpendicular a  $\xi$  y ubicado en el plano orbital de las dos masas y el eje  $\zeta$  perpendicular al plano  $\xi$ - $\eta$ . Las coordenadas de las dos masas en este sistema son las siguientes:  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  y  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$  para las masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente. Las dos masas tienen una separación constante y la misma velocidad angular sobre cada una de ellas y su centro de masa. Se escoge la masa de tal manera que:

$$\bar{\mu} = G(m_1 + m_2) = 1$$

Si ahora asumimos que  $m_1 > m_2$  y definimos:

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Entonces en este sistema de unidades, las dos masas son:

$$\mu_1 = Gm_1 = 1 - \mu \quad (4.1)$$

$$\mu_2 = Gm_2 = \mu \quad (4.2)$$

La unidad de longitud se escoje de tal manera que la separación constante de las dos masas es la unidad. De esto se sigue que el movimiento medio,  $n$ , de las dos masas es también la unidad.

Sean  $(\xi, \eta, \zeta)$ , las coordenadas de la partícula en el sistema inercial o sideral, aplicando la forma vectorial de la ley de gravitación, las ecuaciones de movimiento de la partícula son:

$$\ddot{\xi} = \mu_1 * \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2 * \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3} \quad (4.3)$$

$$\ddot{\eta} = \mu_1 * \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu_2 * \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3} \quad (4.4)$$

$$\ddot{\zeta} = \mu_1 * \frac{\zeta_1 - \zeta}{r_1^3} + \mu_2 * \frac{\zeta_2 - \zeta}{r_2^3} \quad (4.5)$$

Consideremos un nuevo sistema coordenado rotante que tiene el mismo origen que el sistema  $\xi, \eta$  pero el cual rota con una velocidad angular constante en la dirección positiva. La dirección del eje x se escoje de tal manera que las dos masas permanezcan a lo largo de él, con coordenadas:

$$(x_1, y_1, z_1) = (-\mu, 0, 0)$$

$$(x_2, y_2, z_2) = (1 - \mu, 0, 0)$$

Tenemos que:

$$r_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2 + z^2 \quad (4.6)$$

$$r_2^2 = (x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2 \quad (4.7)$$

Utilizando el teorema de coriollis relacionamos las coordenadas del sistema rotante con el sistema inercial y realizando algunos procedimientos se llega a:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (4.8)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (4.9)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (4.10)$$

Donde U es una función escalar que está dada por:

$$U = \frac{n^2(x^2 + y^2)}{2} + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \quad (4.11)$$

## 4.2 LA INTEGRAL DE JACOBI

Multiplicando la ecuación (4.8) por  $\dot{x}$ , la ecuación (4.9) por  $\dot{y}$  y la ecuación (4.10) por  $\dot{z}$  sumando e integrando obtenemos:

$$C_j = n^2(x^2 + y^2) + 2\left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 \quad (4.12)$$

Se ha demostrado que la cantidad  $2U - v^2 = C_j$  es una constante del movimiento. Esta es la *Integral de Jacobi*, o constante de Jacobi, algunas veces llamada la Integral de la Energía Relativa. La integral de Jacobi es la única integral de movimiento en el problema restringido de los tres cuerpos. No podemos hacer uso de ésta para obtener una solución exácta del movimiento orbital pero podemos usarla para determinar regiones de donde la partícula puede ser excluida.

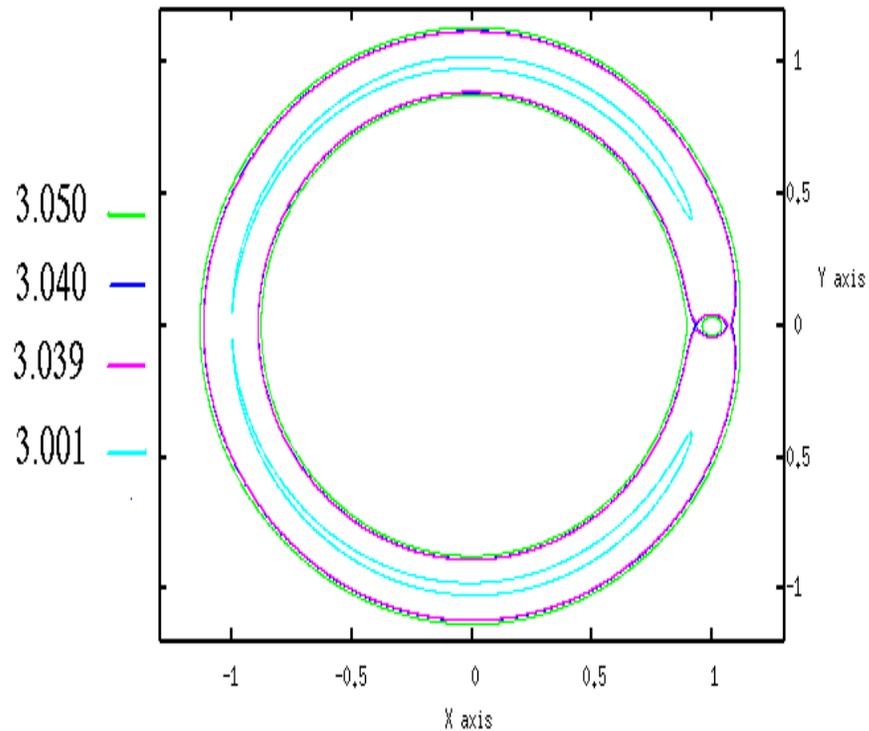
## 4.3 LAS CURVAS DE VELOCIDAD CERO

Si colocamos  $v=0$  en (4.12), tenemos la ecuación:

$$C_j = n^2(x^2 + y^2) + 2\left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) \quad (4.13)$$

La anterior ecuación define regiones donde el movimiento de la partícula no es posible. La figura 5 muestra las curvas de velocidad cero para el caso de  $\mu=0.001$  (júpiter) en el problema restringido de los tres cuerpos para diferentes valores de la constante de Jacobi.

Figura 5: Curvas de velocidad cero para  $\mu = 0.001$  y diferentes valores de la constante de Jacobi  $C_j$



Para un valor de  $C_j = 3.05$  la partícula puede moverse alrededor del sol o de júpiter pero no puede atravesar estas regiones, si  $C_j = 3.039$  la partícula puede moverse alrededor de las dos masas. Para  $C_j = 3.001$  la partícula puede estar ubicada en una de las regiones que se observan en la figura 5.

#### 4.4 PUNTOS LAGRANGIANOS DE EQUILIBRIO

Se sabe que en el caso donde las dos masas  $m_1$  y  $m_2$  se mueven en órbitas circulares alrededor de su centro de masa común, sus posiciones son estacionarias en un sistema rotante con una velocidad angular igual al movimiento medio  $n$  de cualquiera de las masas. En esta sección se van a estudiar la localización de puntos donde una partícula  $P$ , podría ser colocada con la velocidad apropiada en el sistema inercial, tal que ésta permanezca estacionaria en el sistema rotante.

En el caso de la fuerza gravitacional ejercida por  $m_1$  y  $m_2$ , el sistema tiene un punto de equilibrio en el vértice de un triángulo equilátero con la base formada por la línea que une las dos masas. Este resultado implica la existencia de otro punto de equilibrio

localizado bajo la misma línea, también en el vértice de un triángulo equilátero. Estos son los *puntos lagrangianos*  $L_4$  y  $L_5$  respectivamente. En el problema clásico hay tres puntos de equilibrio más  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$ , los cuales permanecen a lo largo de la línea que une las dos masas, como indica la Figura 6.

Para determinar dichos puntos, utilizamos la condición de equilibrio dinámico de la partícula y hacemos la velocidad y aceleración cero en las ecuaciones (4.8-4.10) y debemos resolver simultáneamente el siguiente sistema:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial x} = 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial y} = 0 \quad (4.15)$$

Inspeccionando un poco se llega a la solución trivial:

$$\frac{\partial U}{\partial r_1} = (1 - \mu) \left( -\frac{1}{r_1^2} + r_1 \right) = 0 \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r_2} = \mu \left( -\frac{1}{r_2^2} + r_2 \right) = 0 \quad (4.17)$$

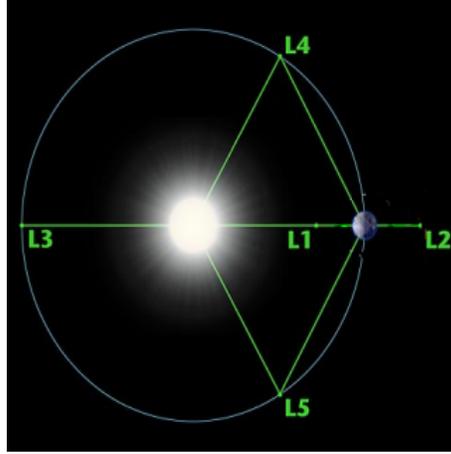
Lo cual lleva a:  $r_1=r_2=1$ , por tanto:

$$x = \frac{1}{2} - \mu \quad (4.18)$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4.19)$$

Cada uno de los dos puntos definidos por estas ecuaciones forman un triángulo equilátero con las masas  $\mu$  y  $(1 - \mu)$ . Estos son los puntos triangulares de equilibrio que, como dijimos, se denominan por convención  $L_4$  y  $L_5$ . Otra solución al sistema de ecuaciones se presenta cuando  $y = 0$ . De hecho se presentan tres soluciones para este caso que corresponderán a los puntos de equilibrio  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$ . El punto  $L_1$  permanece entre las masas  $\mu$  y  $(1 - \mu)$ , el punto  $L_2$  permanece a la derecha de la masa  $\mu$  y  $L_3$  permanece en el eje x negativo.

Figura 6: Configuración de los puntos de equilibrio en el problema restringido de los tres cuerpos



#### 4.4.1 Localización de los puntos de equilibrio

- **Punto  $L_1$ :**  $r_1 + r_2 = 1$ ,  $r_1 = x + \mu$ ,  $r_2 = -x + (1-\mu)$ .

Sustituyendo en las ecuaciones de movimiento realizando algunos cálculos se llega a:

$$r_2 = \alpha - \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{23}{81}\alpha^4 \quad (4.20)$$

Donde:  $\alpha = \left(\frac{\mu}{3(1-\mu)}\right)^{\frac{1}{3}}$

- **Punto  $L_2$ :**  $r_1 - r_2 = 1$ ,  $r_1 = x + \mu$ ,  $r_2 = x - (1-\mu)$ .

De lo cual obtenemos:

$$r_2 = \alpha + \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{31}{81}\alpha^4 \quad (4.21)$$

- **Punto  $L_3$ :**  $r_2 - r_1 = 1$ ,  $r_1 = -x - \mu$ ,  $r_2 = -x + (1-\mu)$ ,  $r_1 = 1 + \beta$

Donde:

$$\beta = -\frac{7}{12} \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right) + \frac{7}{12} \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^2 - \frac{13223}{20736} \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^3 \quad (4.22)$$

**4.4.2 Estabilidad de los puntos de equilibrio:** En la literatura puede encontrarse el procedimiento para determinar la estabilidad de los puntos lagrangianos,<sup>3</sup> donde se llega a la conclusión que los puntos lagrangianos colineales ( $L_1, L_2, L_3$ ) son inestables para todo valor de  $1 - \mu$  y que los puntos triangulares ( $L_4$  y  $L_5$ ) son estables para  $1 - \mu \leq 0,0385$ .

---

<sup>3</sup>Solar System Dynamics pág. 83

## 5. EL PROBLEMA FOTOGRAVITACIONAL RESTRINGIDO DE LOS TRES CUERPOS

El problema fotogravitacional restringido de los tres cuerpos parte del problema clásico tratado anteriormente cuando uno de los cuerpos interactuantes es una fuente emisora de radiación. Al analizarlo se encontrará que la presencia de la radiación solar resulta en un cambio en las posiciones de los puntos de libración (otro nombre dado a los puntos lagrangianos de equilibrio) y en la aparición de nuevos puntos en comparación con el problema clásico.

La fuerza total asociada a la presión de radiación experimentada por una partícula esférica, es dada, como lo demostró Robertson por:

$$\vec{F} = Fp\left[\frac{\vec{R}}{R} - \frac{\vec{V} \cdot \vec{R}\vec{R}}{cR^2} - \frac{\vec{V}}{c^2}\right] \quad (5.1)$$

Donde:

$$Fp = \frac{3Lm}{16\pi R^2 \rho s c}$$

denota la medida de la presión de radiación,  $\vec{R}$  denota el vector posición de la partícula con respecto a la fuente de radiación S,  $\vec{V}$  el correspondiente vector velocidad y  $c$  la velocidad de la luz. En la expresión para  $Fp$ ,  $L$  es la luminosidad del cuerpo radiante, mientras  $\rho$  y  $s$  son la masa y densidad de la partícula respectivamente.

El primer término en la ecuación (5.1) expresa la presión de radiación. El segundo término representa el corrimiento doppler de la radiación incidente y el tercer término es debido a la absorción y emisión de la radiación incidente. Estos últimos dos términos conforman el efecto Poynting - Robertson.

### 5.1 EL EFECTO POYNTING - ROBERTSON

El efecto Poynting-Robertson, es un proceso por el cual la radiación solar hace que las partículas de polvo del Sistema Solar se muevan hacia el Sol. El efecto se debe al movimiento orbital de los granos de polvo que contrarrestan el movimiento radial de la radiación solar y de esa manera la partícula es atraída por la gravedad hacia las proximidades del Sol. El efecto puede ser interpretado de dos maneras, dependiendo del punto de referencia.

Desde la perspectiva del grano de polvo, la radiación del Sol parece provenir de un ángulo levemente inclinado debido a que el plano de órbita de la partícula es perpendicular respecto al avance de la radiación solar. Este ángulo es muy pequeño dado que

la radiación solar se desplaza a la velocidad de la luz y el grano de polvo se desplaza a una velocidad muy inferior en comparación con la radiación, pero con el transcurso del tiempo, este efecto se va acumulando.

Desde una perspectiva general del sistema solar, el grano de polvo absorbe la totalidad de la luz solar en una dirección radial, pero el movimiento relativo del grano de polvo respecto del Sol trae como consecuencia la reemisión de energía de forma desigual lo que provoca un cambio en el momento angular.

El efecto Poynting-Robertson es más fuerte en las cercanías del Sol y por lo tanto produce la reducción de la excentricidad en las órbitas elípticas.

## 5.2 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Para tratar el problema fotogravitacional restringido de los tres cuerpos supongamos que  $m_1$ , sea la masa del cuerpo más masivo y a la vez el cuerpo radiante (sol),  $m_2$  sea la masa del cuerpo secundario (planeta) el cual consideraremos esférico. Para derivar las ecuaciones diferenciales de movimiento usaremos un sistema de unidades en el cual la suma de las masas sea la unidad, el semieje mayor de la órbita del planeta también igual a la unidad y el periodo de revolución del planeta dividido por  $2\pi$  también unitario. El movimiento de la partícula estará referido a un sistema coordenado cartesiano heliocéntrico Sxyz rotando a una velocidad angular unitaria sobre el eje Sz, el eje Sx dirigido a lo largo de la línea que une al sol con el planeta, el eje Sy dirigido hacia el apex del planeta y el eje Sz hacia el polo norte de la órbita del planeta. Sea  $\mu$  la masa relativa del sistema, entonces  $m_1=(1-\mu)$  y  $m_2=\mu$ . Sea la partícula localizada en el punto P(x,y,z),  $r_1$  la distancia entre  $1-\mu$  y P,  $r_2$  la distancia entre  $\mu$  y P, r la distancia entre las masas primarias.

Para un sistema inercial de referencia la aceleración total actuando sobre P es dada por el teorema de Coriolis (anexo 1):

$$\vec{a}' = \vec{a} + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (5.2)$$

Tenemos por otro lado:

$$Fp = Fg(1 - q) \quad (5.3)$$

Donde:

$$q = 1 - \frac{Fp}{Fg}$$

una constante para una partícula dada, es un factor de reducción expresado en términos del radio, la densidad de la partícula y el factor de eficiencia *chi*, está dada (en el sistema CGS) por:

$$q = 1 - \frac{5,6x10^{-5}}{s\rho}\chi \quad (5.4)$$

Entonces de (5.3)

$$\vec{a}_p = \frac{(1-\mu)}{r_1^3}\vec{r}_1(1-q) \quad (5.5)$$

Por tanto la aceleración  $a' = a_g + a^*$  donde:

$$\vec{a}^* = a_p\left[\left(\frac{\vec{r}_1}{r_1} - \frac{\vec{V}\cdot\vec{r}_1\vec{r}_1}{cr_1^2}\right) - \frac{\vec{V}}{c^2}\right] \quad (5.6)$$

y

$$\vec{a}_g = -\frac{1-\mu}{r_1^3}\vec{r}_1 - \frac{\mu}{r_2^3}\vec{r}_2 \quad (5.7)$$

Finalmente:

$$-\frac{1-\mu}{r_1^3}\vec{r}_1 - \frac{\mu}{r_2^3}\vec{r}_2 + \frac{(1-\mu)(1-q)}{r_1^2}\left[\left(\frac{\vec{r}_1}{r_1} - \frac{\vec{V}\cdot\vec{r}_1\vec{r}_1}{cr_1^2}\right) - \frac{\vec{V}}{c}\right] = \vec{a} + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (5.8)$$

Como:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} & \vec{r}_1 &= (x+\mu)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \\ \vec{r}_2 &= (x+\mu-1)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} & \vec{v} &= \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \\ \vec{\omega} &= \hat{k} & \vec{V} &= \vec{r}_1 + \vec{\omega} \times \vec{r}_1 \end{aligned}$$

Encontramos los productos vectoriales:

$$2\vec{\omega} \times \vec{V} = -2\dot{y}\hat{i} + 2\dot{x}\hat{j} + 0\hat{k} \quad (5.9)$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = -y\hat{i} + x\hat{j} + 0\hat{k} \quad (5.10)$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -x\hat{i} - y\hat{j} \quad (5.11)$$

$$\vec{r}_1 + \vec{\omega} \times \vec{r}_1 = (\dot{x}-y)\hat{i} + (\dot{y}+(x+\mu))\hat{j} + 0\hat{k} \quad (5.12)$$

Sustituyendo los resultados anteriores en (5.8) y separando componentes, obtenemos

las siguientes ecuaciones diferenciales de movimiento:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x - \frac{q(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x+\mu-1)}{r_2^3} - \frac{Q}{r_1^2} \left[ \frac{(x+\mu)}{r_1^2} [(x+\mu)\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}] + \dot{x} - y \right] \quad (5.13)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = y - \frac{q(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} - \frac{Q}{r_1^2} \left[ \frac{y}{r_1^2} [(x+\mu)\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}] + \dot{y} + (x+\mu) \right] \quad (5.14)$$

$$\ddot{z} = -\frac{q(1-\mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3} - \frac{Q}{r_1^2} \left[ \frac{z}{r_1^2} [(x+\mu)\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}] \right] \quad (5.15)$$

Donde:

$$Q = \frac{(1-\mu)(1-q)}{c} \quad (5.16)$$

En un sistema coordinado sin dimensiones, la velocidad de la luz “sin dimensiones”, dependerá de la distancia de separación de las masas primarias y de sus periodos de revolución.<sup>4</sup>

Podemos escribir las anteriores ecuaciones como:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} + Fx \quad (5.17)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} + Fy \quad (5.18)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} + Fz \quad (5.19)$$

Donde:

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{q(1-\mu)}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad (5.20)$$

$$Fx = -\frac{Q}{r_1^2} \left[ \frac{(x+\mu)}{r_1^2} [(x+\mu)\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}] + \dot{x} - y \right] \quad (5.21)$$

$$Fy = -\frac{Q}{r_1^2} \left[ \frac{y}{r_1^2} [(x+\mu)\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}] + \dot{y} + (x+\mu) \right] \quad (5.22)$$

$$Fz = -\frac{Q}{r_1^2} \left[ \frac{z}{r_1^2} [(x+\mu)\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}] \right] \quad (5.23)$$

Multiplicando (5.17) por  $2\dot{x}$  y (5.18) por  $2\dot{y}$  y sumando:

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = \dot{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial U}{\partial y} + (\dot{x}Fx + \dot{y}Fy) \quad (5.24)$$

---

<sup>4</sup>Chernikov-1970

Lo cual puede escribirse como:

$$\frac{dC}{dt} = -2(\dot{x}Fx + \dot{y}Fy) \quad (5.25)$$

Con  $C = 2U - \dot{x}^2 - \dot{y}^2$ . La cantidad  $C$  es la integral de Jacobi y  $C = 2U(x, y)$  son las curvas de velocidad cero.

Para encontrar una solución particular al sistema (5.13 - 5.15) usamos la condición de equilibrio dinámico de la partícula, así:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= 0 \\ \vec{V} &= 0 \end{aligned}$$

por lo cual:

$$x - \frac{q(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x+\mu-1)}{r_2^3} + \frac{Q}{r_1^2}y = 0 \quad (5.26)$$

$$y - \frac{q(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} - \frac{Q}{r_1^2}(x+\mu) = 0 \quad (5.27)$$

$$-\frac{q(1-\mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3} = 0 \quad (5.28)$$

La última ecuación se satisface bajo las condiciones:

$$z = 0 \quad (5.29)$$

$$\frac{q(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} = 0 \quad (5.30)$$

Estudiaremos el caso planar  $z=0$ :

En el problema restringido de los tres cuerpos este caso corresponde a dos grupos de puntos de libración: Los puntos colineales  $L_1, L_2, L_3$  y los puntos triangulares  $L_4$  y  $L_5$ . Las ecuaciones (5.26 - 5.28) difieren del problema clásico en contener términos adicionales de primer orden relativos a  $\frac{V}{c}$ , los cuales alteran los resultados clásicos. Los puntos  $L_1, L_2, L_3$  ya no permanecerán a lo largo del eje  $S_x$  dado que se observa que la condición  $y = 0$  no es una solución al sistema.

Igualmente la condición  $r_2 = r_1 = 1$  no se satisface para los puntos  $L_4$  y  $L_5$  y por tanto no conformarán un triángulo equilátero como el estudiado previamente.

Indicaremos un método gráfico de solucionar el problema, para ello consideremos las ecuaciones (5.26 - 5.27), multiplicando la primera por (y) y la segunda por (x+  $\mu$ ) y restando obtenemos:

$$r_2 = \left(1 - \frac{Q}{\mu y}\right)^{-\frac{1}{3}} \quad (5.31)$$

Esta ecuación puede ser resuelta para x, obteniendo:

$$x = (1 - \mu) \pm \left[ \left(1 - \frac{Q}{\mu y}\right)^{-\frac{2}{3}} - y^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.32)$$

También combinando las ecuaciones (5.27 con 5.31) resulta:

$$r_1^3 [Q + y(1 - \mu)] - Qr_1x = q(1 - \mu)y \quad (5.33)$$

Si hacemos  $y \gg Q$  ,  $x \gg Q$ , entonces:

$$r_1 \approx q^{\frac{1}{3}} \quad (5.34)$$

Los puntos de libración pueden obtenerse al encontrar las intersecciones de la curva dada por la ecuación (5.32) y la dada por (5.34).

## 6. SISTEMA: SOL - PLANETA - PARTÍCULA DE POLVO

En este capítulo emplearemos los cálculos obtenidos previamente, para el caso especial de los planetas Júpiter, Saturno, Neptuno y la Tierra, y consideraremos diferentes valores de la constante  $q$  correspondiente a diferentes tamaños y densidades de las partículas de polvo que se originan en el cinturón de Küiper.

Las observaciones muestran que partículas de tamaños entre 3,6,11 y 23  $\mu\text{m}$  dominan el polvo en el sistema solar; si tomamos una densidad de  $1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ , estos tamaños, de acuerdo a la ecuación (5.4), corresponden a valores del factor de reducción ( $q$ ) de 0.6, 0.8, 0.9 y 0.95 respectivamente.

Usaremos estos valores para realizar la gráfica de las curvas antes mencionadas para cada valor del factor  $q$  y para cada uno de los planetas.

Para determinar el valor de la velocidad de la luz se tiene en cuenta lo siguiente:

$$d = dp * 150000000$$

$$\text{time} = 365.25 * 86400 * Tp / 6.2832$$

$$c = 300000 / (d / \text{time})$$

Donde **dp** es la distancia del planeta al sol en unidades astronómicas y **Tp** el periodo orbital del planeta en segundos.

## 6.1 SOL - PARTÍCULA DE POLVO - JÚPITER

Para este problema consideraremos los siguientes datos:

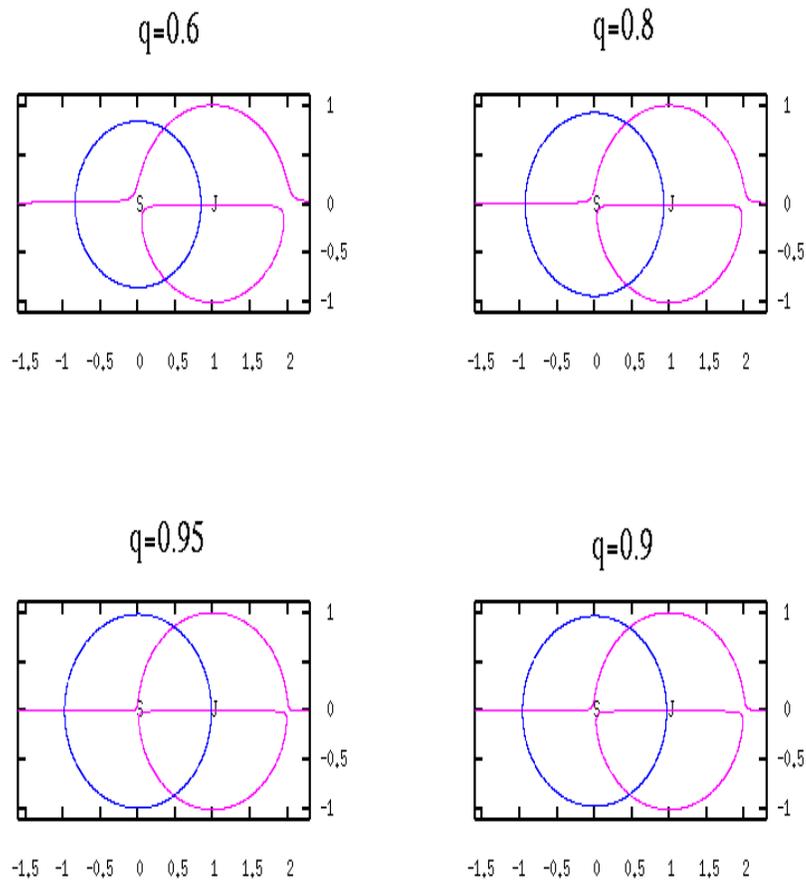
$$m_1 = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$$
$$m_2 = 1,9 \times 10^{27} \text{ kg}$$

Por tanto:

$$\mu = 0.001$$
$$1 - \mu = 0.999$$
$$c = 22902.6$$

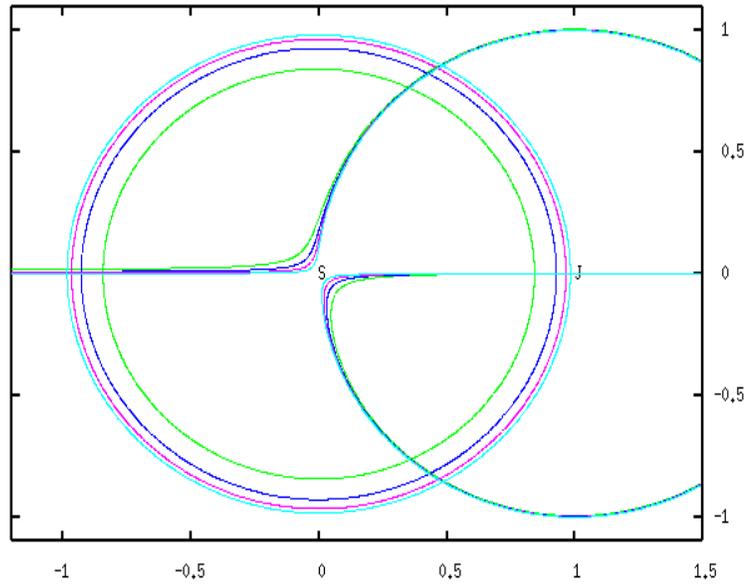
En la figura 7 se muestran las gráficas de las ecuaciones 5.32 (fucsia) y 5.34 (azul) correspondiente a los datos anteriores:

Figura 7: Localización puntos lagrangianos para el problema fotogravitacional: Sol - Júpiter - Partícula



Para obtener una visión más clara de como cambian los puntos lagrangianos cuando varía el factor  $q$ , en la figura siguiente se han superpuesto las cuatro gráficas anteriores.

Figura 8: Variación de los puntos lagrangianos con el factor  $q$  para el caso Sol - Júpiter - Partícula



En la gráfica la curva verde representa  $q=0.6$ , azul oscura  $q=0.8$ , fucsia  $q=0.9$  y azul clara  $q=0.95$ . El cuadro 2 muestra los valores de  $r_1$  y  $r_2$  para cada punto lagrangiano en el sistema anterior.

Cuadro 2. Valores de  $r_1$  y  $r_2$  para el sistema Sol - Partícula - Júpiter

$\mu$	$\mathbf{q}$	Punto L	$r_1$	$r_2$
0,001	0,6	1	0,8332	0,1668
0,001	0,8	1	0,9298	0,07334
0,001	0,9	1	0,9644	0,0362
0,001	0,95	1	0,9831	0,0182
0,001	0,6	3	0,8529	1,85297
0,001	0,8	3	0,9281	1,92817
0,001	0,9	3	0,9717	1,97170
0,001	0,95	3	0,9842	1,9841
0,001	0,6	4	0,8274	1,0024
0,001	0,8	4	0,9270	1,0023
0,001	0,9	4	0,9596	0,9956
0,001	0,95	4	0,9709	0,9923
0,001	0,6	5	0,8593	1,0043
0,001	0,8	5	0,9430	1,0019
0,001	0,9	5	0,9750	1,0010
0,001	0,95	5	0,9873	0,9914

El cuadro 3 muestra las distancias en unidades astronómicas entre el planeta y la partícula (P-J) y entre la partícula y el Sol (P-Sol).

Cuadro 3. Distancias en UA de la partícula al Sol y a Júpiter.

L	q	P-J (UA)	P-Sol(UA)
L1	0,6	4,34	0,87
	0,8	4,84	0,38
	0,9	5,02	0,19
	0,95	5,12	0,10
L3	0,6	4,44	9,64
	0,8	4,83	10,03
	0,9	5,06	10,26
	0,95	5,12	10,32
L4	0,6	4,31	5,22
	0,8	4,82	5,21
	0,9	4,99	5,18
	0,95	5,05	5,16
L5	0,6	4,47	5,23
	0,8	4,91	5,21
	0,9	5,07	5,21
	0,95	5,14	5,16

De los datos obtenidos en el cuadro 3 se destaca el hecho que a medida que el valor de  $q$  aumenta (aumenta también el tamaño de las partículas) el punto lagrangiano L1 se acerca al sol y se aleja del planeta.

El punto L3 se aleja del planeta y del sol a medida que  $q$  aumenta pero se aleja más rápidamente del sol.

Los puntos L4 y L5 se alejan del planeta y se acercan al sol igual que lo hace el punto L1.

## 6.2 SOL - PARTÍCULA DE POLVO - SATURNO

Para este problema consideraremos los siguientes datos:

$$m_1 = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$$
$$m_2 = 5,7 \times 10^{26} \text{ kg}$$

Por tanto:

$$\mu = 0.00028$$
$$1 - \mu = 0.99972000$$
$$c = 31021.5$$

Los puntos lagrangianos están ubicados de la siguiente forma:

Figura 9: Localización puntos lagrangianos para el problema fotogravitacional: Sol - Saturno - Partícula

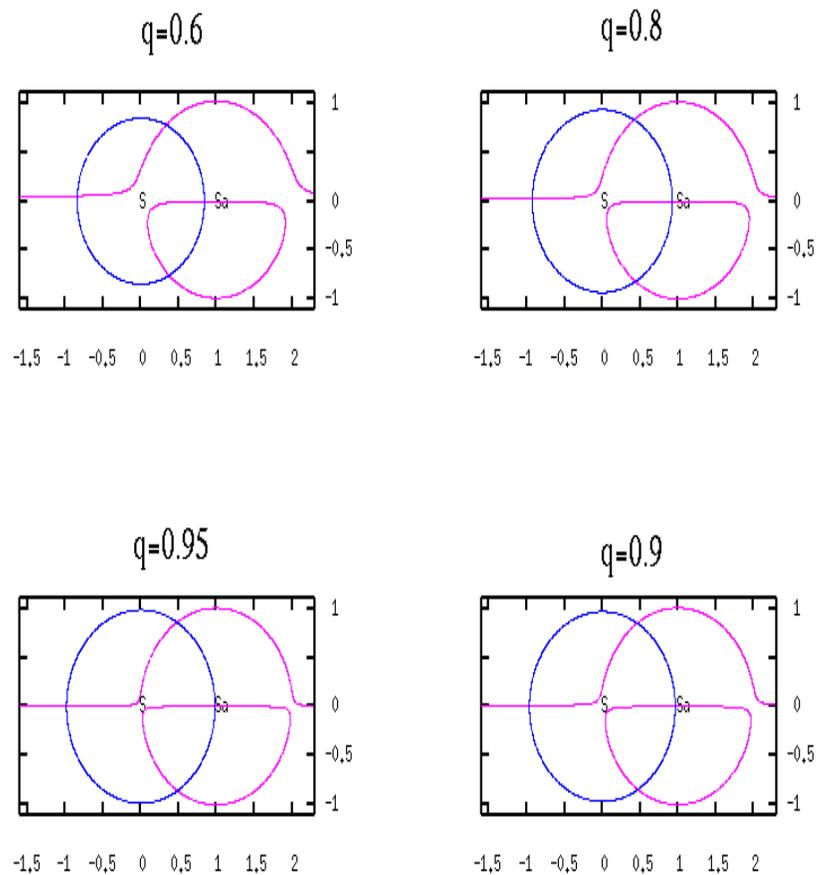
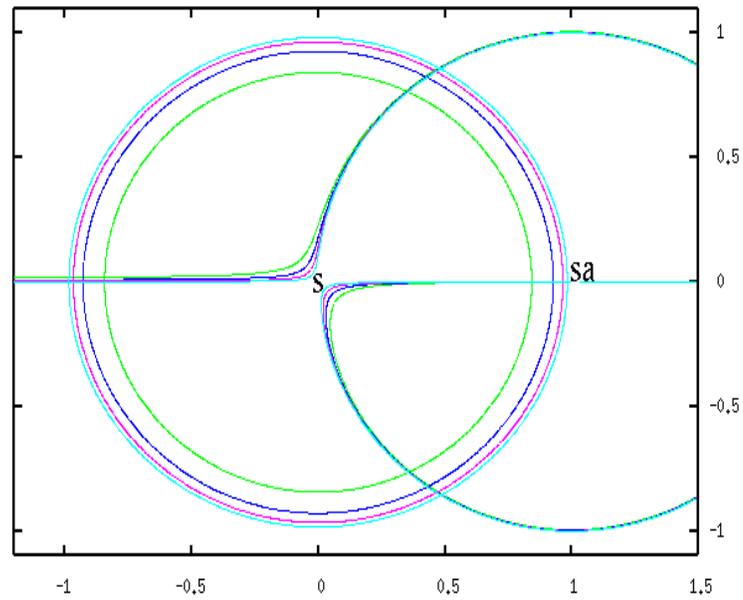


Figura 10: Variación de los puntos lagrangianos con el factor q para el caso Sol - Saturno - Partícula



Las cuatro curvas superpuestas se muestran a continuación:

En la gráfica la curva verde representa  $q=0.6$ , azul oscura  $q=0.8$ , fucsia  $q=0.9$  y azul clara  $q=0.95$ . El cuadro 4 muestra los valores de  $r_1$  y  $r_2$  para cada punto lagrangiano en el sistema anterior.

Cuadro 4. Valores de  $r_1$  y  $r_2$  para el sistema Sol - Partícula - Saturno

$\mu$	$q$	Punto L	$r_1$	$r_2$
0,00028	0,6	1	0,8452	0,1558
0,00028	0,8	1	0,9201	0,0817
0,00028	0,9	1	0,9574	0,0431
0,00028	0,95	1	0,9825	0,0241
0,00028	0,6	3	0,8421	1,8416
0,00028	0,8	3	0,9224	1,9223
0,00028	0,9	3	0,9723	1,9723
0,00028	0,95	3	0,9848	1,9848
0,00028	0,6	4	0,8283	1,0224
0,00028	0,8	4	0,9079	1,0043
0,00028	0,9	4	0,9510	0,9881
0,00028	0,95	4	0,97088	1,0003
0,00028	0,6	5	0,8532	0,9935
0,00028	0,8	5	0,9432	1,0057
0,00028	0,9	5	0,9808	0,9981
0,00028	0,95	5	0,9952	0,9999

Cuadro 5. Distancias en UA de la partícula al Sol y a Saturno

L	$q$	P-Sat (UA)	P - Sol (UA)
L1	0,6	8,09	1,49
	0,8	8,81	0,78
	0,9	9,17	0,41
	0,95	9,41	0,23
L3	0,6	8,07	17,64
	0,8	8,83	18,42
	0,9	9,31	18,9
	0,95	9,43	19,0
L4	0,6	7,93	9,79
	0,8	8,70	9,62
	0,9	9,11	9,46
	0,95	9,30	9,58
L5	0,6	8,17	9,52
	0,8	9,03	9,63
	0,9	9,39	9,56
	0,95	9,53	9,58

El cuadro 5 muestra las distancias en unidades astronómicas entre el planeta y la

partícula (P-Sat) y entre la partícula y el sol (P-Sol).

De lo anterior se puede observar que los puntos L1,L4 y L5 se alejan de saturno y se acercan rápidamente al sol cuando  $q$  aumenta, el punto L3 se aleja del sol y de saturno pero lo hace más rápido de éste último.

### 6.3 SOL - PARTÍCULA DE POLVO - NEPTUNO

Para este problema consideraremos los siguientes datos:

$$m_1 = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$m_2 = 1,03 \times 10^{26} \text{ kg}$$

Por tanto:

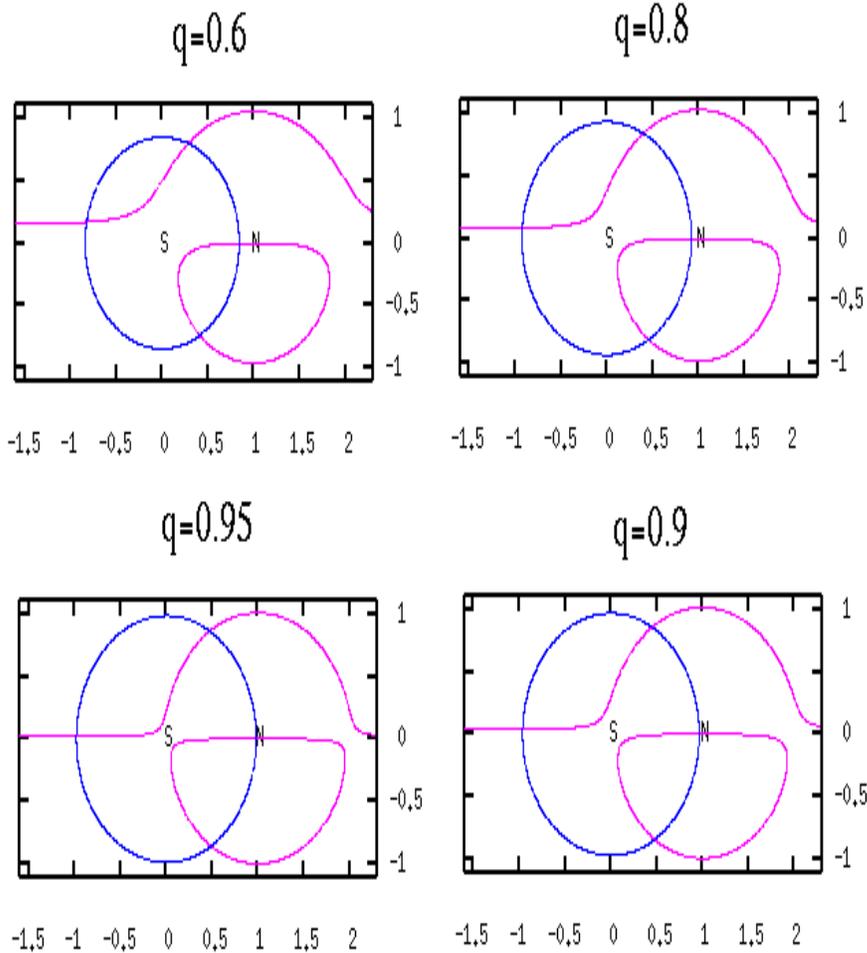
$$\mu = 0.0000511$$

$$1 - \mu = 0.99994900$$

$$c = 55065.4$$

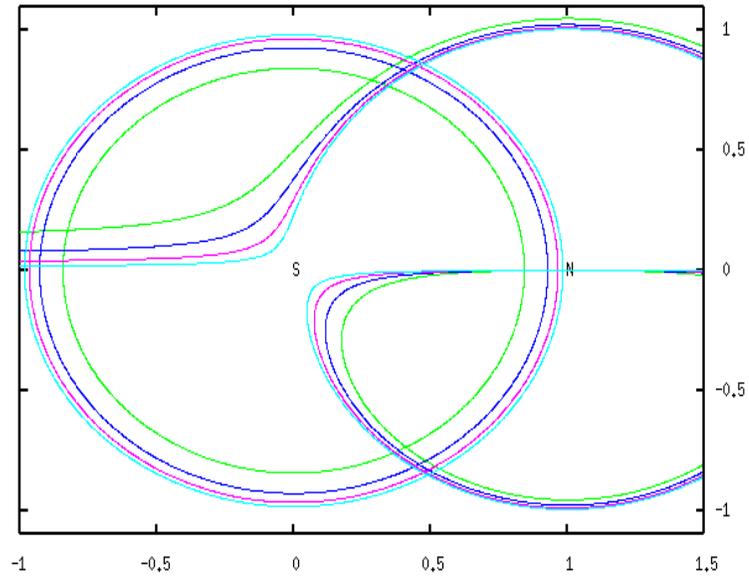
Los puntos lagrangianos están ubicados de la siguiente forma:

Figura 11: Localización puntos lagrangianos para el problema fotogravitacional: Sol - Neptuno - Partícula



y todos los puntos lagrangianos se muestran en la figura 12:

Figura 12: Variación de los puntos lagrangianos con el factor  $q$  para el caso Sol - Neptuno - Partícula



En la gráfica la curva verde representa  $q=0.6$ , azul oscura  $q=0.8$ , fucsia  $q=0.9$  y azul clara  $q=0.95$ .

El cuadro 6 muestra los valores de  $r_1$  y  $r_2$  para cada punto lagrangiano en el sistema anterior.

Cuadro 6. Valores de  $r_1$  y  $r_2$  para el sistema Sol - Partícula - Neptuno

$\mu$	$q$	Punto L	$r_1$	$r_2$
0,0000511	0,6	1	0,8449	0,1560
0,0000511	0,8	1	0,9260	0,0743
0,0000511	0,9	1	0,9636	0,0401
0,0000511	0,95	1	0,9759	0,0241
0,0000511	0,6	3	0,8433	1,8355
0,0000511	0,8	3	0,9307	1,9297
0,0000511	0,9	3	0,9665	1,9664
0,0000511	0,95	3	0,9789	1,9788
0,0000511	0,6	4	0,8391	1,0729
0,0000511	0,8	4	0,9193	1,0271
0,0000511	0,9	4	0,9532	1,0029
0,0000511	0,95	4	0,9591	0,996
0,0000511	0,6	5	0,8384	0,9355
0,0000511	0,8	5	0,9385	0,9763
0,0000511	0,9	5	0,9813	0,9976
0,0000511	0,95	5	0,9920	1,0032

Cuadro 7. Distancias en UA de la partícula al Sol y a Neptuno

L	$q$	P-N(UA)	P-Sol(UA)
L1	0,6	25,39	4,69
	0,8	27,82	2,23
	0,9	28,95	1,21
	0,95	29,33	0,73
L3	0,6	25,34	55,15
	0,8	27,97	57,99
	0,9	29,04	59,09
	0,95	29,41	59,46
L4	0,6	25,21	32,24
	0,8	27,62	30,86
	0,9	28,64	30,14
	0,95	28,82	29,93
L5	0,6	25,196	28,11
	0,8	28,20	29,34
	0,9	29,49	29,98
	0,956	29,81	30,14

El cuadro 7 muestra las distancias en unidades astronómicas entre el planeta y la partícula (P-N) y entre la partícula y el sol (P-Sol).

Igual que en el caso anterior los puntos L1 y L4 se alejan del planeta y se acercan al sol, cuando las partículas aumentan de tamaño. Los punto L3 y L5 se alejan del sol y del planeta

## 6.4 SOL - PARTÍCULA DE POLVO - TIERRA

Para este problema consideraremos los siguientes datos:

$$m_1 = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$m_2 = 5,9 \times 10^{24} \text{ kg}$$

Por tanto:

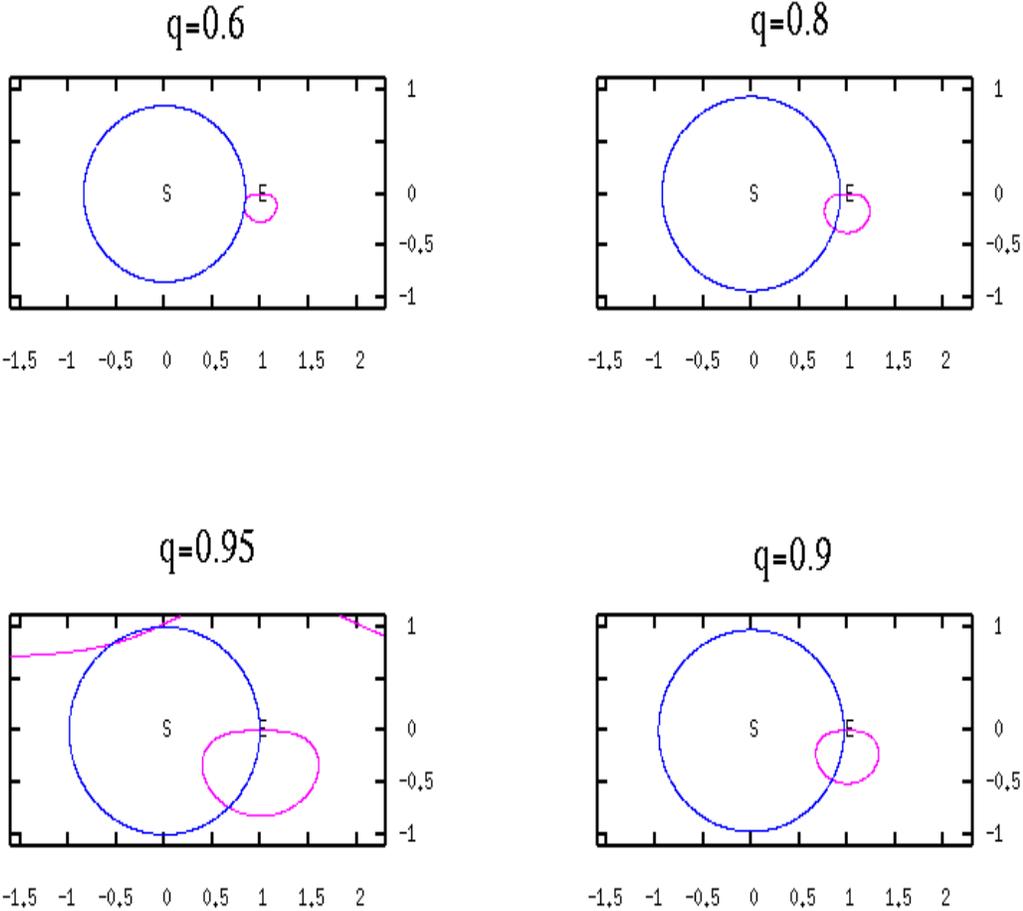
$$\mu = 0.00000294$$

$$1 - \mu = 0.9999971$$

$$c = 10045$$

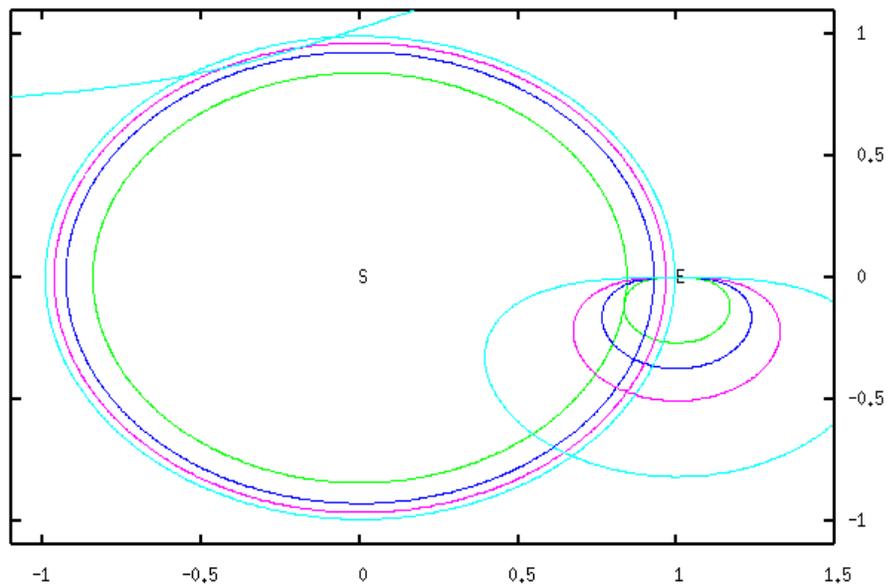
Los puntos lagrangianos están ubicados de la siguiente forma:

Figura 13: Localización puntos lagrangianos para el problema fotogravitacional: Sol - Partícula - Tierra



y todos los puntos se observan en la figura 14:

Figura 14: Variación de los puntos lagrangianos con el factor  $q$  para el caso Sol - Tierra - Partícula



En la gráfica la curva verde representa  $q=0.6$ , azul oscura  $q=0.8$ , fucsia  $q=0.9$  y azul clara  $q=0.95$ .

El cuadro 8 muestra los valores de  $r_1$  y  $r_2$  para cada punto lagrangiano en el sistema anterior.

Cuadro 8. Valores de  $r_1$  y  $r_2$  para el sistema Sol - Partícula - Tierra

$\mu$	$q$	Punto L	$r_1$	$r_2$
0,00000294	0,6	1	0,8363	0,1870
0,00000294	0,8	1	0,9260	0,0758
0,00000294	0,98	1	1,0008	0,0025
0,00000294	0,6	3		
0,00000294	0,8	3		
0,00000294	0,98	3	0,9825	1,7281
0,00000294	0,6	4		
0,00000294	0,8	4		
0,00000294	0,98	4	0,9769	1,4666
0,00000294	0,6	5	0,8362	0,2172
0,00000294	0,8	5	0,9221	0,3685
0,00000294	0,98	5	1,0053	0,8191

Cuadro 9. Distancias en UA de la partícula al Sol y a la Tierra

L	q	P-T(UA)	P-Sol(UA)
L1	0,6	0,83	0,18
	0,8	0,92	0,07
	0,98	1,00089	0,0025
L3	0,6		
	0,8		
	0,98	0,98	1,72
L4	0,6		
	0,8		
	0,98	0,97	1,46
L5	0,6	0,83	0,21
	0,8	0,92	0,36
	0,98	1,0053	0,81

El cuadro 9 muestra las distancias en unidades astronómicas entre el planeta y la partícula (P-T) y entre la partícula y el sol (P-Sol):

En este caso en particular es interesante observar como desaparecen los puntos lagrangianos, para  $q < 0.98$  el punto L4 no existe, pero se acercará al sol y se alejará del planeta cuando el valor de  $q$  disminuya de 0.9999 hasta 0.98. El punto L5 deja de existir para valores de  $q = 0.55$ , El punto L1 y L2 existen para todo valor de  $q$  en este rango. El punto L3 sólo se observa cuando  $q = 0.98$ .

El punto lagrangiano  $L_2$  es el menos desviado de su posición sobre el eje  $x$  con la presencia de la radiación, así que este puede ser calculado, considerando que en este punto  $y \rightarrow 0$  y utilizando la ecuación 4.21 tratada anteriormente.

## 7. TEORÍA DE PERTURBACIONES

### 7.1 ECUACIONES PLANETARIAS DE LAGRANGE

Conocidos en un instante dado los valores de los elementos orbitales se procede a utilizar la solución de los dos cuerpos para determinar la posición del cuerpo de nuestro interés. La elipse Kepleriana  $(\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{i}, \Omega, \omega, \chi)$  que corresponde a la posición  $\vec{r}$  y velocidad  $\dot{\vec{r}}$  de una partícula en un tiempo dado se conoce con el nombre de órbita instantánea u osculatriz. Si la función perturbadora no es nula, la elipse Kepleriana estará cambiando continuamente. El conjunto de seis ecuaciones diferenciales que dan cuenta de la variación de los elementos orbitales en el tiempo se encuentran de la siguiente manera:

El vector posición  $\vec{r}$  es función del tiempo  $t$  y de cada uno de los elementos orbitales  $(\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{i}, \Omega, \omega, \chi)$ . Entonces la derivada total con respecto al tiempo del vector posición es:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial i} \frac{di}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \Omega} \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \chi} \frac{d\chi}{dt} \quad (7.1)$$

Para mayor facilidad se representarán los elementos orbitales por  $C_k$ ;  $k=1, \dots, 6$ . Según esto, tenemos:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{k=6} \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_k} \frac{dc_k}{dt} \quad (7.2)$$

En cada punto de la trayectoria se exige que exista una elipse instantánea (osculadora) tal que:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial r}{\partial t} \quad (7.3)$$

Por lo tanto:

$$\sum_{k=1}^{k=6} \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_k} \frac{dc_k}{dt} = 0 \quad (7.4)$$

es la primera condición de osculación. Derivando la ecuación 7.3 y realizando algunos pasos algebraicos llegamos a la siguiente relación:

$$-\frac{\bar{\mu}}{r^3} \vec{r} + \nabla \mathbf{R} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \sum_{k=1}^{k=6} \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_k} \frac{dc_k}{dt} \quad (7.5)$$

Se debe cumplir para la órbita osculadora:

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \frac{\bar{\mu}}{r^3} \vec{r} = 0 \quad (7.6)$$

Llegando a la segunda condición de osculación:

$$\sum_{k=1}^{k=6} \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_k} \frac{dc_k}{dt} = \nabla \mathbf{R} \quad (7.7)$$

Multiplicando 7.4 por  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial c_j}$  y 7.7 por  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial c_j}$  se obtiene:

$$\sum_{k=1}^{k=6} \left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_k} - \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_j} \right] \frac{dc_k}{dt} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial c_j} \quad (7.8)$$

O de una manera más compacta se puede expresar lo anterior como:

$$\sum_{k=1}^{k=6} [c_j, c_k] \frac{dc_k}{dt} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial c_j} \quad (7.9)$$

$c_j=1, \dots, 6$ .

Los  $[c_j, c_k]$  representan los paréntesis de Lagrange, definidos por:

$$[c_j, c_k] = \left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_k} - \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_j} \right] = \frac{\partial x}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial \dot{x}}{\partial c_k} - \frac{\partial x}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \dot{x}}{\partial c_j} + \frac{\partial y}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial \dot{y}}{\partial c_k} - \frac{\partial y}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \dot{y}}{\partial c_j} + \frac{\partial z}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial \dot{z}}{\partial c_k} - \frac{\partial z}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \dot{z}}{\partial c_j} \quad (7.10)$$

Los paréntesis de Lagrange cumplen las siguientes propiedades:

- Se tiene que  $[c_i, c_i]=0$
- y  $[c_i, c_k] = - [c_k, c_i]$
- Un giro del sistema de referencia alrededor de uno cualquiera de los ejes transforma el paréntesis de Lagrange de la siguiente forma:

$$[c_j, c_k] = [c_j, c_k]_1 + \frac{\partial(\alpha, \vec{r}_1 \times \vec{r}_1)}{\partial(c_j, c_k)} \quad (7.11)$$

Donde  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_1$  son los vectores transformados con un giro siendo  $\alpha$  dicho ángulo y  $\frac{\partial(\alpha, \vec{r}_1 \times \vec{r}_1)}{\partial(c_j, c_k)}$  es el Jacobiano de la transformación.

Las ecuaciones de movimiento van a ser, teniendo en cuenta 7.9:

$$[c_1, c_1] \frac{dc_1}{dt} + [c_1, c_2] \frac{dc_2}{dt} + [c_1, c_3] \frac{dc_3}{dt} + \dots + [c_1, c_6] \frac{dc_6}{dt} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial c_1} \quad (7.12)$$

$$[c_2, c_1] \frac{dc_1}{dt} + [c_2, c_2] \frac{dc_2}{dt} + [c_2, c_3] \frac{dc_3}{dt} + \dots + [c_2, c_6] \frac{dc_6}{dt} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial c_2}$$

$$[c_6, c_1] \frac{dc_1}{dt} + [c_6, c_2] \frac{dc_2}{dt} + [c_6, c_3] \frac{dc_3}{dt} + \dots + [c_6, c_6] \frac{dc_6}{dt} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial c_6}$$

La evaluación de los paréntesis de Lagrange se realizan en puntos de la trayectoria como por ejemplo el pericentro (dado que son independientes del tiempo), en el cual la velocidad y posición toman los siguientes valores de acuerdo a la ley de vis viva:

$$r_p = a(1 - e) \quad (7.13)$$

$$v_p = na \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad (7.14)$$

Donde el subíndice p indica el pericentro,  $f = 0$ .

Los valores de la posición y velocidad  $x, \dot{x}$ ,  $y$ , etc.. vienen dados por las ecuaciones (3.37-3.39) y (3.44-3.46), por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial c_l} &= r_p \frac{\partial [\cos(\omega + f)\cos\Omega - \text{sen}(\omega + f)\cos\text{isen}\Omega]}{\partial c_l} \\ \frac{\partial x}{\partial c_m} &= r_p \frac{\partial [\cos(\omega + f)\cos\Omega - \text{sen}(\omega + f)\cos\text{isen}\Omega]}{\partial c_m} \\ \frac{\partial y}{\partial c_l} &= r_p \frac{\partial [\cos(\omega + f)\text{sen}\Omega + \text{sen}(\omega + f)\cos\text{icos}\Omega]}{\partial c_l} \\ \frac{\partial y}{\partial c_m} &= r_p \frac{\partial [\cos(\omega + f)\text{sen}\Omega + \text{sen}(\omega + f)\cos\text{icos}\Omega]}{\partial c_m} \\ \frac{\partial z}{\partial c_m} &= r_p \frac{\partial [\text{sen}(\omega + f)\text{sen}i]}{\partial c_m} \\ \frac{\partial z}{\partial c_m} &= r_p \frac{\partial [\text{sen}(\omega + f)\text{sen}i]}{\partial c_m} \end{aligned} \quad (7.15)$$

y para las velocidades:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_m} &= v_p \frac{\partial[-\text{sen}(\omega + f)\cos\Omega - \text{sen}\Omega\text{cosicos}(\Omega + f)]}{\partial c_m} \\
\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_l} &= v_p \frac{\partial[-\text{sen}(\omega + f)\cos\Omega - \text{sen}\Omega\text{cosicos}(\Omega + f)]}{\partial c_l} \\
\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_m} &= v_p \frac{\partial[-\text{sen}\Omega\text{sen}(\omega + f) + \cos\Omega\text{cosicos}(\Omega + f)]}{\partial c_m} \\
\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_l} &= v_p \frac{\partial[-\text{sen}\Omega\text{sen}(\omega + f) + \cos\Omega\text{cosicos}(\Omega + f)]}{\partial c_l} \\
\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_m} &= v_p \frac{\partial[\text{senicos}(\omega + f)]}{\partial c_m} \\
\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_l} &= v_p \frac{\partial[\text{senicos}(\omega + f)]}{\partial c_l}
\end{aligned} \tag{7.16}$$

A continuación realizamos el cálculo de los paréntesis de Lagrange; dado que los procedimientos algebraicos son bastante largos, vamos a desarrollar con detalle uno de ellos. Calculemos el paréntesis  $[\Omega, \mathbf{i}]$ , donde  $c_l$  es  $\Omega$  y  $c_m$  es  $\mathbf{i}$ , teniendo en cuenta que:

$$r_p v_p = na^2 \sqrt{1 - e^2} \tag{7.17}$$

Realizando el cálculo se verifica que:

$$\begin{aligned}
[\Omega, \mathbf{i}] &= r_p v_p \frac{\partial[\cos(\omega + f)\cos\Omega - \text{sen}(\omega + f)\text{cosisen}\Omega]}{\partial \Omega} \\
&\quad \frac{\partial[-\text{sen}(\omega + f)\cos\Omega - \text{sen}\Omega\text{cosicos}(\Omega + f)]}{\partial \mathbf{i}} \\
&\quad - \frac{\partial[\cos(\omega + f)\cos\Omega - \text{sen}(\omega + f)\text{cosisen}\Omega]}{\partial \mathbf{i}} \frac{\partial[-\text{sen}(\omega + f)\cos\Omega - \text{sen}\Omega\text{cosicos}(\Omega + f)]}{\partial \Omega} \\
&\quad + \frac{\partial[\cos(\omega + f)\text{sen}\Omega + \text{sen}(\omega + f)\text{cosicos}\Omega]}{\partial \Omega} \frac{\partial[-\text{sen}\Omega\text{sen}(\omega + f) + \cos\Omega\text{cosicos}(\Omega + f)]}{\partial \mathbf{i}} \\
&\quad - \frac{\partial[\cos(\omega + f)\text{sen}\Omega + \text{sen}(\omega + f)\text{cosicos}\Omega]}{\partial \mathbf{i}} \frac{\partial[-\text{sen}\Omega\text{sen}(\omega + f) + \cos\Omega\text{cosicos}(\Omega + f)]}{\partial \Omega} \\
&\quad + \frac{\partial[\text{sen}(\omega + f)\text{sen}\mathbf{i}]}{\partial \Omega} \frac{\partial[\text{senicos}(\omega + f)]}{\partial \mathbf{i}} - \frac{\partial[\text{sen}(\omega + f)\text{sen}\mathbf{i}]}{\partial \mathbf{i}} \frac{\partial[\text{senicos}(\omega + f)]}{\partial \Omega}
\end{aligned} \tag{7.18}$$

Realizando el procedimiento anterior para los demás, encontramos que los únicos paréntesis de Lagrange diferentes de cero son los siguientes:

$$[\Omega, i] = -na^2\sqrt{1-e^2}\text{sen } i \quad (7.19)$$

$$[\Omega, a] = \frac{na}{2}\sqrt{1-e^2}\text{cos } i \quad (7.20)$$

$$[\Omega, e] = -\frac{na^2e}{\sqrt{1-e^2}}\text{cos } i \quad (7.21)$$

$$[\omega, a] = \frac{na}{2}\sqrt{1-e^2} \quad (7.22)$$

$$[\omega, e] = -\frac{na^2e}{\sqrt{1-e^2}} \quad (7.23)$$

$$[a, \chi] = -\frac{na}{2} \quad (7.24)$$

y los que resultan de permutar las variables entre sí, que en virtud de la propiedad (7.11) tienen signos contrarios.

Al reemplazar estos resultados en las ecuaciones de movimiento (7.12), llamando a  $(a, e, i, \Omega, \omega, \chi)$  los elementos 1,2..6 respectivamente, obtenemos:

$$-\frac{na}{2}\sqrt{1-e^2}\text{cos } i \frac{d\Omega}{dt} - \frac{na}{2}\sqrt{1-e^2} \frac{d\omega}{dt} - \frac{na}{2} \frac{d\chi}{dt} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial a} \quad (7.25)$$

$$\frac{na^2e}{\sqrt{1-e^2}}\text{cos } i \frac{d\Omega}{dt} + \frac{na^2e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial e} \quad (7.26)$$

$$na^2\sqrt{1-e^2}\text{sen } i \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial i} \quad (7.27)$$

$$\frac{na}{2}\sqrt{1-e^2}\text{cos } i \frac{da}{dt} - \frac{na^2e}{\sqrt{1-e^2}}\text{cos } i \frac{de}{dt} - na^2\sqrt{1-e^2}\text{sen } i \frac{di}{dt} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Omega} \quad (7.28)$$

$$\frac{na}{2}\sqrt{1-e^2} \frac{da}{dt} - \frac{na^2}{\sqrt{1-e^2}} \frac{de}{dt} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \quad (7.29)$$

$$\frac{na}{2} \frac{da}{dt} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \chi} \quad (7.30)$$

De las ecuaciones (7.25) - (7.30) podemos despejar las derivadas de los elementos orbitales, de este modo se llega a las siguientes relaciones:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \chi} \quad (7.31)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\text{sen } i} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial i} \quad (7.32)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \left[ \sqrt{1-e^2} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \chi} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right] \quad (7.33)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial e} - \frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial i} \quad (7.34)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \left[ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Omega} - \cos i \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right] \quad (7.35)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial a} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial e} \quad (7.36)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial e} \quad (7.37)$$

El anterior es el sistema de ecuaciones diferenciales fundamental en el estudio del movimiento, que nos da las variaciones de los elementos orbitales de un determinado cuerpo, a partir de un cierto instante en el que conocemos su órbita osculatriz y son llamadas las *ecuaciones de Lagrange de la mecánica celeste*.

Las ecuaciones (7.31-7.37) contienen las derivadas parciales de una función  $R$  con respecto a los elementos orbitales. Esto es útil para algunos casos perturbativos. Sin embargo, es conveniente expresar los cambios temporales de los elementos en función directa de las aceleraciones perturbadoras. El conjunto de ecuaciones que describen el cambio temporal de los elementos orbitales que contienen las componentes de las aceleraciones perturbadoras se conoce con el nombre de formas gaussianas de las ecuaciones de Lagrange o sencillamente ecuaciones de Gauss.

Las ecuaciones de Gauss se obtienen a partir de las ecuaciones de Lagrange de la mecánica celeste. Esto se logra a través de los siguientes pasos:

Sea la aceleración perturbadora  $\vec{a}_p$  descrita en términos de tres componentes: Radial ( $R$ ), transversal ( $S$ ) y normal ( $W$ ).

De manera más específica, una fuerza perturbadora (por unidad de masa) tiene por componentes:

$$\vec{a}_p = \vec{R} + \vec{S} + \vec{W} = R\hat{U}_r + S\hat{U}_\theta + W\hat{U}_T \quad (7.38)$$

donde ( $\hat{U}_r$ ,  $\hat{U}_\theta$  y  $\hat{U}_T$ ) constituyen una triada vectorial unitaria y  $R$  representa la magnitud de la aceleración perturbadora en la dirección radial,  $S$  es la magnitud de la aceleración perturbadora en la dirección transversal al radio vector en el plano de la órbita (positiva en la dirección del movimiento de la partícula) y  $W$  es la magnitud de la aceleración perturbadora normal al plano de la órbita en la dirección  $\vec{R} \times \vec{S}$ .

Si la aceleración perturbadora puede escribirse en términos de un gradiente de la función perturbadora, entonces:

$$\vec{a}_p = \nabla R \quad (7.39)$$

entonces las derivadas  $\frac{\partial R}{\partial c_j}$  pueden escribirse de la forma:

$$\frac{\partial R}{\partial c_j} = \nabla R \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_j} \quad (7.40)$$

que a partir de (7.38):

$$\frac{\partial R}{\partial c_j} = (R\hat{U}_r + S\hat{U}_\theta + W\hat{U}_T) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_j} \quad (7.41)$$

El procedimiento siguiente es expresar el vector posición  $\vec{r}$  en términos de los elementos orbitales para encontrar cada una de las  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial c_j}$ , para ello el método es el que se menciona a continuación:

Definamos tres vectores unitarios ortogonales por:  $\hat{U}_r, \hat{U}_\theta, \hat{U}_T$ , dispuestos de la siguiente manera:

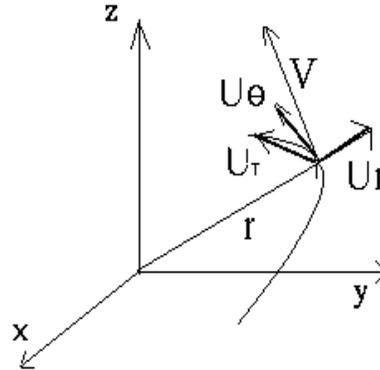
$\hat{U}_r$ : dirigido a lo largo del vector  $\vec{r}$

$\hat{U}_\theta$ : perpendicular a  $\vec{r}$  en el plano orbital

$\hat{U}_T$ : perpendicular al plano orbital en el sentido de  $\hat{U}_r \times \hat{U}_\theta$ .

Los anteriores vectores se muestran representados en la figura 15

Figura 15. Representación de los vectores unitarios  $U_r, U_T$  y  $U_\theta$



De la ecuación para los tres cuerpos:

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\bar{\mu}\vec{r}}{r^3} = \nabla R \quad (7.42)$$

Donde:

$$R = Gm' \left( \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'^3} \right) \quad (7.43)$$

y  $\nabla \mathbf{R}$  tiene la definición usual de gradiente y se considera que sus componentes son las componentes de la aceleración cuando se considera la fuerza de perturbación  $\mathbf{R}$ .

Dado que se tiene:

$$\nabla \mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z} \hat{k} \quad (7.44)$$

Al multiplicar:

$$\nabla \mathbf{R} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_j} \quad (7.45)$$

Con  $j=1..6$ , los elementos orbitales, obtenemos:

$$\nabla \mathbf{R} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_j} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c_j} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial c_j} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial c_j} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial c_j} \quad (7.46)$$

Entonces:

$$\nabla \mathbf{R} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_j} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial c_j} \quad (7.47)$$

Por lo tanto y como:

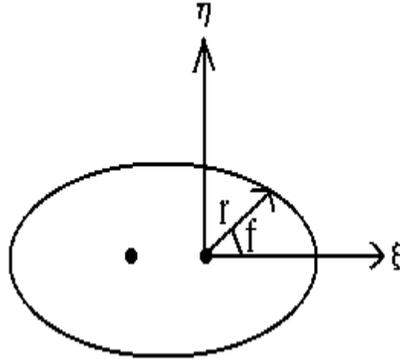
$$\nabla \mathbf{R} = \vec{F} \quad (7.48)$$

llegamos a:

$$\vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_j} = \frac{\partial R}{\partial c_j} \quad (7.49)$$

Lo que necesitamos a continuación es expresar el radio vector en términos de los elementos orbitales, esto se hace de la siguiente manera:

Figura 16. Sistema de coordenadas  $\xi$  y  $\eta$



De la figura 16 vemos que:

$$\xi = r \cos f \quad (7.50)$$

$$\eta = r \sin f \quad (7.51)$$

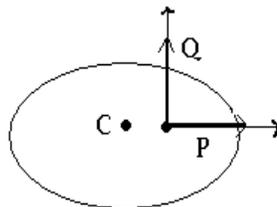
En términos de la anomalía excéntrica:

$$\xi = a(\cos E - e) \quad (7.52)$$

$$\eta = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \quad (7.53)$$

De la figura 17:

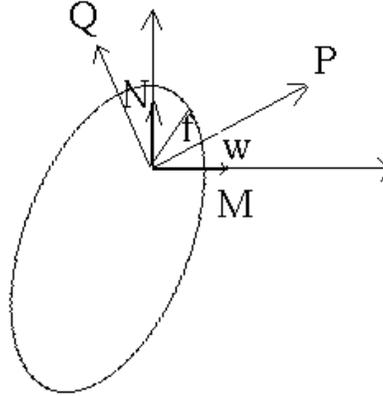
Figura 17. Relación del vector  $\vec{r}$  con los vectores  $\vec{P}$  y  $\vec{Q}$



$$\vec{r} = \xi \vec{P} + \eta \vec{Q} \quad (7.54)$$

Se debe expresar los vectores  $\vec{P}$  y  $\vec{Q}$  en términos de los elementos orbitales:

Figura 18. Vectores  $\vec{P}$  y  $\vec{Q}$  en términos de los elementos orbitales



$$\vec{P} = \vec{M} \cos \omega + \vec{N} \sin \omega \quad (7.55)$$

$$\vec{Q} = -\vec{M} \sin \omega + \vec{N} \cos \omega \quad (7.56)$$

$\vec{M}$  y  $\vec{N}$  ( $\hat{i}, \hat{m}$ ) están dados por:

$$\vec{M} = \cos \Omega \hat{i} + \sin \Omega \hat{j} \quad (7.57)$$

$$\vec{N} = -\sin \Omega \cos i \hat{i} + \cos \Omega \cos i \hat{j} + \sin i \hat{k} \quad (7.58)$$

Reemplazando en los vectores  $\vec{P}$  y  $\vec{Q}$ , los valores de  $M$  y  $N$ , se tiene:

$$\vec{P} = (\cos \Omega \cos \omega) \hat{i} + (\sin \Omega \cos \omega) \hat{j} - (\sin \Omega \cos i \sin \omega) \hat{i} + (\cos \Omega \cos i \sin \omega) \hat{j} + (\sin i \sin \omega) \hat{k} \quad (7.59)$$

$$\vec{Q} = (-\cos \Omega \hat{i} - \sin \Omega \hat{j}) \sin \omega + (-\sin \Omega \cos i \hat{i} + \cos \Omega \cos i \hat{j} + \sin i \hat{k}) \cos \omega \quad (7.60)$$

Estos valores reemplazados en la ecuación (7.54) nos da el radio vector en términos de los elementos orbitales.

Empezemos los cálculos con:

•  $c_j=a$ : Entoces de la ecuación (7.49) se tiene:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial a} = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial a} \quad (7.61)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial a} = \vec{F} \cdot \left( \vec{P} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial a} + \vec{Q} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial a} \right) \quad (7.62)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial a} = \vec{F} \cdot \vec{P} (\cos E - e) + \vec{F} \cdot \vec{Q} \sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} E \quad (7.63)$$

Necesitamos conocer los productos escalares  $\vec{F} \cdot \vec{P}$  y  $\vec{F} \cdot \vec{Q}$

Para ello recordamos que  $\vec{P}$  tiene dirección en la línea de las ápsides y que  $\vec{Q}$  es ortogonal a  $\vec{P}$ . Los vectores unitarios  $U_{\hat{r}}$  y  $U_{\hat{\theta}}$  están dados por:

$$U_{\hat{r}} = \vec{P} \cos f + \vec{Q} \operatorname{sen} f \quad (7.64)$$

$$U_{\hat{\theta}} = -\vec{P} \operatorname{sen} f + \vec{Q} \cos f \quad (7.65)$$

Entonces:

$$\vec{F} \cdot \vec{P} = R \cos f - S \operatorname{sen} f \quad (7.66)$$

$$\vec{F} \cdot \vec{Q} = R \operatorname{sen} f + S \cos f \quad (7.67)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial a} = (R \cos f - S \operatorname{sen} f) (\cos E - e) + (R \operatorname{sen} f + S \cos f) \sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} E \quad (7.68)$$

Como:

$$\cos f = \frac{\xi}{r} \quad (7.69)$$

$$\operatorname{sen} f = \frac{\eta}{r} \quad (7.70)$$

$$\cos E - e = \frac{\xi}{a} \quad (7.71)$$

$$\sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} E = \frac{\eta}{a} \quad (7.72)$$

Reemplazando:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial a} = \frac{R}{ra} (\xi^2 + \eta^2) \quad (7.73)$$

y finalmente:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial a} = R \frac{r}{a} \quad (7.74)$$

•  $c_j=e$ : Entoces se tiene:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial e} = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial e} = \vec{F} \cdot \vec{P} \frac{\partial \xi}{\partial e} + \vec{F} \cdot \vec{Q} \frac{\partial \eta}{\partial e} \quad (7.75)$$

Necesitamos calcular las derivadas parciales  $\frac{\partial \xi}{\partial e}$  y  $\frac{\partial \eta}{\partial e}$  de 7.52 - 7.53

$$\frac{\partial \xi}{\partial e} = \frac{\partial [a(\cos E - e)]}{\partial e} = a \frac{\partial (\cos E)}{\partial e} - a \quad (7.76)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial e} = \frac{\partial [a\sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} E]}{\partial e} = -\frac{ae}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{sen} E + a\sqrt{1-e^2} \frac{\partial (\operatorname{sen} E)}{\partial e} \quad (7.77)$$

Las derivadas  $\frac{\partial (\operatorname{sen} E)}{\partial e}$  y  $\frac{\partial (\cos E)}{\partial e}$  se determinan así:

$$\frac{\partial (\cos E)}{\partial e} = -\operatorname{sen} E \frac{\partial E}{\partial e} \quad (7.78)$$

$$\frac{\partial (\operatorname{sen} E)}{\partial e} = \cos E \frac{\partial E}{\partial e} \quad (7.79)$$

$$(7.80)$$

y la derivada  $\frac{\partial E}{\partial e}$  se calcula por medio de la Ecuación de Kepler:

$$E = M + e \operatorname{Sen} E \quad (7.81)$$

De donde:

$$\frac{\partial (\cos E)}{\partial e} = -\frac{a}{r} \operatorname{sen}^2 E \quad (7.82)$$

$$\frac{\partial (\operatorname{sen} E)}{\partial e} = \frac{a}{r} \operatorname{sen} E \cos E \quad (7.83)$$

lo que conduce a:

$$\frac{\partial \xi}{\partial e} = -\frac{a^2}{r} \operatorname{sen}^2 E - a \quad (7.84)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial e} = -\frac{ae}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{sen} E + \frac{a^2}{r} \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} E \cos E \quad (7.85)$$

De la ecuación 7.52-7.53 eliminamos la anomalía excéntrica, reemplazamos por la anomalía verdadera y sustituimos en la ecuación 7.75 con ayuda de 7.66-7.67:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial e} = - \left( \frac{r \operatorname{sen}^2 f}{1 - e^2} - a \right) (R \cos f - S \sin f) \left( -\frac{r e \operatorname{sen} f}{1 - e^2} + r \operatorname{sen} f \cos f + a e \operatorname{sen} f \right) (R \sin f + S \cos f) \quad (7.86)$$

Al realizar una serie de pasos algebraicos llegamos a la expresión:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial e} = -R \cos f + S \operatorname{sen} f \left[ 1 + \frac{r}{a(1 - e^2)} \right] \quad (7.87)$$

•  $c_j = \chi$ : Donde  $\chi = -nt_o$  y  $t_o$  es el paso por el perihelio. Como en los casos anteriores se tiene:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \chi} = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \chi} = \vec{F} \cdot \vec{P} \frac{\partial \xi}{\partial \chi} + \vec{F} \cdot \vec{Q} \frac{\partial \eta}{\partial \chi} \quad (7.88)$$

Necesitamos calcular las derivadas parciales  $\frac{\partial \xi}{\partial \chi}$  y  $\frac{\partial \eta}{\partial \chi}$ .

De la Ecuación de Kepler:

$$E - e \operatorname{sen} E = M = n(t - t_o) = n + \chi \quad (7.89)$$

Es claro que:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \chi} = \frac{\partial [a(\cos E - e)]}{\partial \chi} = -a \operatorname{sen} E \frac{\partial E}{\partial \chi} \quad (7.90)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \chi} = \frac{[a\sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} E]}{\partial \chi} = a\sqrt{1 - e^2} \cos E \frac{\partial E}{\partial \chi} \quad (7.91)$$

Entonces como:  $E = e \operatorname{sen} E + n \chi$

$$\frac{\partial E}{\partial \chi} = e \cos E \frac{\partial E}{\partial \chi} + 1 \quad (7.92)$$

Factorizando:

$$\frac{\partial E}{\partial \chi} = \frac{a}{r} \quad (7.93)$$

reemplazando:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \chi} = -a \operatorname{sen} E \frac{a}{r} = -\frac{a^2}{r} \operatorname{sen} E \quad (7.94)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \chi} = a \sqrt{1 - e^2} \cos E \frac{a}{r} = \frac{a^2 \sqrt{1 - e^2} \cos E}{r} \quad (7.95)$$

y finalmente después de reemplazar en 7.85 y con ayuda de 7.66 y 7.67 tenemos:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \chi} = -(R \cos f - S \sin f) \frac{a^2}{r} \operatorname{sen} E + (R \sin f + S \cos f) \frac{a^2 \sqrt{1 - e^2} \cos E}{r} \quad (7.96)$$

Que igualmente, luego de laboriosos pasos algebraicos se llega a:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \chi} = \frac{R a \operatorname{sen} f}{\sqrt{1 - e^2}} + \frac{S a^2 \sqrt{1 - e^2}}{r} \quad (7.97)$$

•  $c_j = \omega$ : Igualmente:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \omega} = \vec{F} \cdot \xi \frac{\partial \vec{P}}{\partial \omega} + \vec{F} \cdot \eta \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \omega} \quad (7.98)$$

Al encontrar las derivadas  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial \omega}$  y  $\frac{\partial \vec{Q}}{\partial \omega}$  llegamos a:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} = \vec{F} \cdot \xi \vec{Q} - \vec{F} \cdot \eta \vec{P} \quad (7.99)$$

Que con los valores respectivos da:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} = r S \quad (7.100)$$

•  $c_j = i$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial i} = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial i} = \vec{F} \cdot \frac{\partial (\xi \vec{P} + \eta \vec{Q})}{\partial i} = \xi \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial i} + \eta \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{Q}}{\partial i} \quad (7.101)$$

Con los valores de  $\vec{P}$  y  $\vec{Q}$  llegamos a:

$$\xi \vec{F} \cdot \left[ \frac{\partial \vec{N}}{\partial i} \operatorname{sen} \omega \right] + \eta \vec{F} \cdot \left[ \frac{\partial \vec{N}}{\partial i} \cos \omega \right] \quad (7.102)$$

Ya que  $\vec{M}$  no es función de  $i$  y  $\vec{N}$  está dado por:

$$\vec{N} = -\operatorname{sen} \Omega \cos i \hat{i} + \cos \Omega \cos i \hat{j} + \operatorname{sen} i \hat{k} \quad (7.103)$$

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial i} = \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} i \hat{i} - \cos \Omega \operatorname{sen} i \hat{j} + \cos i \hat{k} = \hat{U}_T \quad (7.104)$$

Reemplazando este valor arriba y realizando el producto escalar, teniendo en cuenta las ecuaciones para  $\xi$  y  $\eta$ , y la relación  $\text{sen}(a+b)$ :

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial i} = Wr \text{sen}(\omega + f) \quad (7.105)$$

•  $c_j = \Omega$ :

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Omega} = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \Omega} = \vec{F} \cdot \xi \frac{\partial \vec{P}}{\partial \Omega} + \vec{F} \cdot \eta \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \Omega} \quad (7.106)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Omega} = \xi \vec{F} \cdot \left[ \frac{\partial \vec{M}}{\partial \Omega} \cos \omega + \frac{\partial \vec{N}}{\partial \Omega} \text{sen} \omega \right] + \eta \vec{F} \cdot \left[ -\frac{\partial \vec{M}}{\partial \Omega} \text{sen} \omega + \frac{\partial \vec{N}}{\partial \Omega} \cos \omega \right] \quad (7.107)$$

Siguiendo con los cálculos:

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \Omega} = -\text{sen} \Omega \hat{i} + \cos \Omega \hat{j} \quad (7.108)$$

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial \Omega} = -\cos i (\cos \Omega \hat{i} + \text{sen} \Omega \hat{j}) = -\cos i \vec{M} \quad (7.109)$$

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \Omega} = \frac{\vec{N} - \text{sen} i \hat{k}}{\cos i} \quad (7.110)$$

Vamos a obtener una expresión para  $\hat{k}$

$$\hat{U}_T = \text{sen} \Omega \text{sen} i \hat{i} - \cos \Omega \text{sen} i \hat{j} + \cos i \hat{k} \quad (7.111)$$

$$\hat{U}_T = -\frac{\vec{N} - \text{sen} i \hat{k}}{\cos i} \text{sen} i + \cos i \hat{k} \quad (7.112)$$

$$\hat{k} = \vec{N} \text{sen} i + \hat{U}_T \cos i \quad (7.113)$$

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \Omega} = \cos i \vec{N} - \hat{U}_T \text{sen} i \quad (7.114)$$

Por lo que llegamos a:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Omega} = Sr \cos i - Wr \text{sen} i \cos(f + \omega) \quad (7.115)$$

En resumen hemos encontrado las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{r}{a} R \quad (7.116)$$

$$\frac{\partial R}{\partial e} = -R \cos f + S \operatorname{sen} \theta \left[ 1 + \frac{r}{a(1-e^2)} \right] \quad (7.117)$$

$$\frac{\partial R}{\partial i} = W r \operatorname{sen}(\omega + f) \quad (7.118)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \omega} = r S \quad (7.119)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = S r \cos i - W r \operatorname{sen} i \cos(\omega + f) \quad (7.120)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \chi} = \frac{R a \operatorname{sen} f}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{S a^2 \sqrt{1-e^2}}{r} \quad (7.121)$$

Al reemplazar estos valores en (7.31-7.37) tenemos las ecuaciones de Gauss correspondientes:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^{3/2}}{\sqrt{\bar{\mu}(1-e^2)}} [R \operatorname{sen} f + S(1 + e \cos f)] \quad (7.122)$$

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\bar{\mu}}} [R \operatorname{sen} f + S(\cos f + \cos E)] \quad (7.123)$$

$$\frac{di}{dt} = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\bar{\mu}}} \left[ \frac{W \cos(\omega + f)}{1 + e \cos f} \right] \quad (7.124)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\bar{\mu}}} \left[ \frac{W \operatorname{sen}(\omega + f)}{\operatorname{sen} i (1 + e \cos f)} \right] \quad (7.125)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\bar{\mu}}} \left[ -\frac{R \cos f}{e} + \frac{S \operatorname{sen} f}{e} \left( \frac{2 + e \cos f}{1 + e \cos f} \right) - \frac{W \operatorname{sen}(\omega + f) \cot i}{1 + e \cos f} \right] \quad (7.126)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = \sqrt{\frac{a}{\bar{\mu}}} (1-e^2) \left[ R \left( \frac{\cos f}{e} - \frac{2}{1 + e \cos f} \right) - S \frac{\operatorname{sen} f}{e} \left( \frac{2 + e \cos f}{1 + e \cos f} \right) \right] \quad (7.127)$$

## 7.2 PERTURBACIÓN POR EFECTO POYNTING ROBERTSON

La ecuación de movimiento (5.8) puede ser expresada como:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{(1-\mu)}{r_1^3}qr_1 - \frac{\mu}{r_2^3}r_2 - \frac{(1-\mu)}{r_1^2}\beta \left[ \frac{\vec{v}.r_1.r_1}{cr_1^2} + \frac{\vec{v}}{c} \right] \quad (7.128)$$

Donde  $\beta = 1-q$ .

De lo anterior se puede distinguir que las aceleraciones perturbativas son, las debidas a la gravedad del planeta y la debida al término de radiación:

$$\vec{F}_G = \frac{\mu}{r_2^3}r_2 \quad (7.129)$$

$$\vec{F}_{PR} = -\frac{1-\mu}{r_1^2}\beta \left[ \frac{\vec{v}.r_1.r_1}{cr_1^2} + \frac{\vec{v}}{c} \right] \quad (7.130)$$

En este trabajo hallaremos las ecuaciones diferenciales tratando con la perturbación debida al efecto Poynting - Robertson. Escribiendo ésta de la siguiente forma encontramos las componentes radial, tangencial y normal:

$$F_{PR} = -\beta \frac{(1-\mu)}{r^2} \left[ \frac{(V_R\hat{e}_R + V_T\hat{e}_\theta)}{c} \cdot \hat{e}_R\hat{e}_R + \frac{V_R\hat{e}_R + V_T\hat{e}_\theta}{c} \right] \quad (7.131)$$

Por lo tanto tenemos:

$$F_R = -2\frac{\beta(1-\mu)}{r^2c}V_R \quad (7.132)$$

$$F_T = -\frac{\beta(1-\mu)}{r^2c}V_T \quad (7.133)$$

Necesitamos encontrar las componentes radial y tangencial de la velocidad, para ello partimos de la ecuación (3.11):

$$V_R = \dot{r} \quad (7.134)$$

$$V_T = r\dot{f} \quad (7.135)$$

Entonces diferenciando la ecuación 3.17 obtenemos:

$$\dot{r} = \frac{ref\dot{s}enf}{1+ecosf} \quad (7.136)$$

y con ayuda de la relación:  $r^2\dot{f} = na^2\sqrt{(1-e^2)}$ , llegamos al siguiente resultado:

$$\dot{r} = \frac{na}{\sqrt{(1-e^2)}}esenf \quad (7.137)$$

Por lo tanto:

$$V_R = \frac{na}{\sqrt{(1-e^2)}} e \operatorname{sen} f \quad (7.138)$$

Por lo cual la componente radial de la aceleración perturbatriz está representada de la siguiente manera:

$$F_R = -2 \frac{\beta(1-\mu)}{r^2 c} \frac{na}{\sqrt{(1-e^2)}} e \operatorname{sen} f = R \quad (7.139)$$

Por otro lado la componente tangencial de la velocidad se encuentra también partir de:

$$r \dot{f} = \frac{na^2 \sqrt{(1-e^2)}}{r}$$

que da como resultado:

$$V_T = \frac{na}{\sqrt{(1-e^2)}} (1 + e \operatorname{cos} f) \quad (7.140)$$

Y la componente tangencial T, de la aceleración perturbatriz viene dada entonces por:

$$F_T = - \frac{\beta(1-\mu)}{r^2 c} \frac{na}{\sqrt{(1-e^2)}} (1 + e \operatorname{cos} f) = S \quad (7.141)$$

También de la aceleración perturbatriz se ve que  $W = 0$ . Por lo tanto reemplazando en las ecuaciones de Gauss para la variación de los elementos orbitales tenemos:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n^2 a^3 (1-e^2)}} \left[ \frac{2\beta(1-\mu)r^2 c \frac{nae^2 \operatorname{sen}^2 f}{\sqrt{(1-e^2)}}}{\sqrt{(1-e^2)}} - \frac{\beta(1-\mu) na(1+e \operatorname{cos} f)^2}{r^2 c \sqrt{(1-e^2)}} \right] \quad (7.142)$$

Factorizando llegamos a la expresión final:

$$\frac{da}{dt} = - \frac{2\beta(1-\mu)a}{r^2 c} \left[ \frac{e^2 \operatorname{sen}^2 f + 1 + e^2 + 2e \operatorname{cos} f}{1 - e^2} \right] \quad (7.143)$$

Reemplazando R y S en la ecuación 7.123

$$\frac{de}{dt} = \frac{a(1-e^2)}{n^2 a^3} \left[ - \frac{2\beta(1-\mu)}{r^2 c} \frac{na}{\sqrt{(1-e^2)}} e \operatorname{sen}^2 f - \frac{\beta(1-\mu)}{r^2 c} \frac{na}{\sqrt{(1-e^2)}} (1 + e \operatorname{cos} f) \left( \operatorname{cos} f + \frac{e + \operatorname{cos} f}{1 + e \operatorname{cos} f} \right) \right] \quad (7.144)$$

Factorizando y organizando, tenemos:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\beta(1-\mu)}{r^2c} [2e + esen^2f + 2cosf] \quad (7.145)$$

De las ecuaciones 7.124 y 7.125 tenemos:

$$\frac{di}{dt} = 0 \quad (7.146)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0 \quad (7.147)$$

Por lo tanto  $i = i_0$  y  $\Omega = \Omega_0$

Reemplazando R y S en la ecuación 7.126 obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{a(1-e^2)}}{a^3n^2} & \left[ \frac{2\beta(1-\mu)}{r^2c} \frac{na}{\sqrt{(1-e^2)}} cosf senf + \right. \\ & \left. \left( \frac{-\beta(1-\mu)}{r^2c} \frac{na}{\sqrt{(1-e^2)}} (1+ecosf) \right) \frac{senf}{e} \frac{2+ecosf}{1+ecosf} \right] \quad (7.148) \end{aligned}$$

Que finalmente después de factorizar y ordenar los términos tenemos:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\beta(1-\mu)}{r^2c} \frac{1}{e} [(2-ecosf)senf] \quad (7.149)$$

De la ecuación 7.127, para la variación del tiempo de paso por el pericentro tenemos:

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{\beta(1-\mu)\sqrt{(1-e^2)}}{r^2c} \left[ \frac{2esenf}{1+ecosf} + \frac{2senf}{e} \right] \quad (7.150)$$

En resumen obtenemos:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2\beta(1-\mu)a}{r^2c} \left[ \frac{e^2sen^2f + 1 + e^2 + 2ecosf}{1-e^2} \right] \quad (7.151)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\beta(1-\mu)}{r^2c} [2e + esen^2f + 2cosf] \quad (7.152)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\beta(1-\mu)}{r^2c} \frac{1}{e} [(2-ecosf)senf] \quad (7.153)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{\beta(1-\mu)\sqrt{(1-e^2)}}{r^2c} \left[ \frac{2esenf}{1+ecosf} + \frac{2senf}{e} \right] \quad (7.154)$$

Hemos entonces encontrado las ecuaciones diferenciales que rigen la evolución orbital de las partículas de polvo bajo el efecto Poynting - Robertson como lo habíamos propuesto.

## 8. CONCLUSIONES

- Al estudiar la dinámica del polvo en el sistema solar, analizamos que la ubicación de éste depende del tamaño y más exáctamente del factor de reducción  $q$ . Estas partículas de polvo se ubicarán en los puntos lagrangianos de equilibrio que son soluciones particulares al problema fotogravitacional restringido de los tres cuerpos. Al calcular la ubicación de los puntos lagrangianos se encuentra, para el caso de Júpiter, Saturno y Neptuno, que los puntos lagrangianos L1, L4 y L5 se alejarán del planeta y se acercarán al sol cuando el tamaño del polvo aumenta. El punto L3 se alejará del planeta y del sol a medida que  $q$  aumenta.
- Al tratar de analizar el comportamiento del polvo es necesario incluir el efecto Poynting - Robertson, dado que la ubicación de los puntos lagrangianos difieren de gran manera del problema clásico. Esto se ve claramente de los valores obtenidos para la ubicación de los puntos lagrangianos al compararlos con el caso  $q = 1$  correspondiente al problema restringido de los tres cuerpos. Además de las ecuaciones diferenciales se observa que la condición de colinealidad de los puntos L1, L2 y L3 no se satisface; tampoco los puntos L4 y L5 formarán un triángulo equilátero con las masas  $\mu$  y  $(1 - \mu)$ , por tanto las partículas de los tamaños considerados son altamente influenciadas por esta perturbación.
- Según el análisis anterior se establece que la estructura del polvo producido en el cinturón de Kúiper, puede ser establecida por la ubicación de éste en puntos lagrangianos de equilibrio, en los diferentes sistemas como los tratados en este trabajo.
- Respecto a la evolución orbital del polvo, se ha encontrado la forma gaussiana de las ecuaciones planetarias de Lagrange, que nos dan la variación temporal de los elementos orbitales. Al obtener estas ecuaciones, se consideró la perturbación debida al efecto Poynting - Robertson obteniendo un nuevo sistema de ecuaciones correspondiente a las 7.151-7.154.
- Al considerar como aceleración perturbatriz la expresada por la ecuación 7.131, se encontró que ésta no altera la inclinación ni la longitud del nodo ascendente, al ser la componente normal de ésta nula. Por tanto, estos elementos orbitales permanecerán constantes en el tiempo.
- Al analizar las ecuaciones diferenciales que determinan la evolución del polvo, se nota que éstas dependen en general de la anomalía verdadera  $f$ , lo cual permite que su solución a primera aproximación, puede encontrarse utilizando la expansión en series del  $\cos f$  y  $\sin f$  en términos de la anomalía media, que involucra al tiempo y de ésta manera poder desarrollar la integración.

## BIBLIOGRAFÍA

BROWER AND CLEMENCE. Introduction to Celestial Mechanics.

DANBY J. Fundamentals of Celestial Mechanics. Willmann Bell, Inc. 1988.

FERRAZ, Mello, BEAUGE, C. ICARUS 110, 239-260 (1994). Capture in Exterior Mean-Motion Resonances Due to Poynting-Robertson Drag. Instituto Astronómico y Geofísico. Universidad de Sao Paulo-Brazil.

JER, Chyi and HERBERT, Zook. The Astronomical Journal, 118:580-590, Julio de 1999. Signatures of the giant planets imprinted on the edgeworth-kuiper belt dust disk. NASA Johnson Space Center.

KLACKA, J and PASTOR, P. Astronomy and Astrophysics 5.10.2007. Poynting-Robertson effect and capture of grains in exterior resonances with planets. Department of Astronomy, Comenius University. arXiv:astro-ph/0411691v1.

MURRAY, C.D and DERMOT, S.F. Solar System Dynamics. Cambridge University Press. 1999.

TAFF, Laurence G. Celestial Mechanics: A computational guide for the practitioner.

## ANEXOS

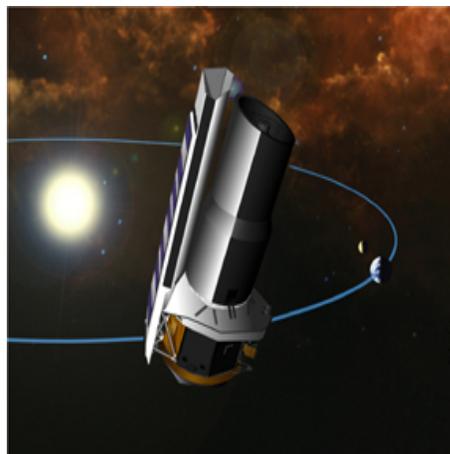
### ANEXO A. EL TELESCOPIO ESPACIAL SPITZER

El Telescopio Espacial Spitzer (SST por sus siglas en inglés) (conocido inicialmente como Instalación de Telescopio Infrarrojo Espacial o SIRTf de sus siglas en inglés), es un observatorio espacial infrarrojo, el cuarto y último de las Grandes Observatorios de la NASA. Otros telescopios espaciales en el infrarrojo que han precedido al Spitzer fueron los telescopios IRAS e ISO.

Fue lanzado el 25 de agosto de 2003 desde el Centro Espacial Kennedy usando como vehículo un Delta 7920H ELV. Mantiene una órbita heliocéntrica y va equipado con un telescopio de 85 cm de diámetro. La duración de la misión del Spitzer es de un mínimo de 2,5 años, con una posible extensión hasta 5 años. El costo total de la misión se ha estimado en 670 millones de dólares.

Manteniendo la tradición de la NASA, el telescopio fue renombrado después de su demostración de operación exitosa, el 18 de diciembre de 2003. A diferencia de la mayoría de los telescopios, que son nombrados por un panel de científicos, el nombre de éste fue obtenido de un concurso abierto sólo a niños. El nombre final proviene del Dr. Lyman Spitzer, Jr., considerado uno de los científicos más influyentes del siglo XX y uno de los primeros impulsores de la idea de telescopios espaciales proponiendo esta posibilidad en los años 40.

Figura 19. El Telescopio Espacial SPITZER



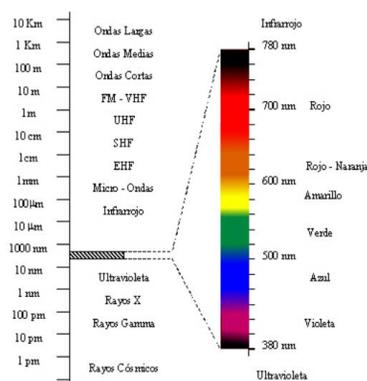
Con el Spitzer se quiere estudiar objetos fríos que van desde el Sistema Solar exterior hasta los confines del universo. Este telescopio constituye el último elemento del programa de Grandes Observatorios de la NASA, y uno de los principales elementos del Programa de Búsqueda Astronómica de los Orígenes (Astronomical Search for Origins Program).

El telescopio contiene tres instrumentos capaces de obtener imágenes, realizar fotometría en el rango de 3 a 180 micras y obtener espectros de gran resolución en el rango de 5 a 100 micras.

El Telescopio Espacial Spitzer es una maravilla tecnológica que incluye muchas innovaciones nunca antes usadas en una misión espacial. El Observatorio está formado por dos componentes principales: El Montaje Criogénico del Telescopio (que contiene el telescopio y los tres instrumentos principales de Spitzer) y la Nave Espacial. Como el telescopio tiene que ser enfriado a pocos grados arriba del cero absoluto para funcionar apropiadamente, y la nave espacial necesita operar a la temperatura ambiental, algunas veces estos dos componentes principales son referidos como las porciones "fría" y "tibia" del Observatorio.

El potencial científico de Spitzer está anclado en cuatro principios físicos básicos que definen la importancia del infrarrojo en la investigación de fenómenos astrofísicos. La región infrarroja es parte del espectro electromagnético, y se extiende de 1 micra (cerca infrarrojo) a 200 micras (lejano infrarrojo). Los ojos humanos sólo son sensibles a la luz entre 0.4 y 0.7 micras.

Figura 20. Espectro Electromagnético



Los objetos sólidos en el espacio, desde el tamaño de un grano de polvo interestelar (de menos de una micra) hasta los planetas gigantes, tienen temperaturas que van de 3 a 1500 grados Kelvin (K). La mayoría de la energía irradiada por objetos en este rango de temperaturas se encuentra en el infrarrojo. Las observaciones infrarrojas son por lo tanto de particular importancia en el estudio de medios a baja temperatura, como

son las nubes interestelares con mucho polvo, donde las estrellas se están formando, así como las superficies heladas de los satélites planetarios y los asteroides.

Los granos de polvo cósmico oscurecen partes del Universo, bloqueando la luz que llega de regiones críticas. Este polvo se vuelve transparente en el cercano infrarrojo, donde los observadores pueden estudiar regiones ópticamente invisibles como el centro de nuestra Galaxia (y de otras galaxias) y densas nubes donde las estrellas y los planetas están naciendo. Para muchos objetos, incluyendo las estrellas en regiones con mucho polvo, los núcleos galácticos activos e incluso galaxias enteras, la radiación visible absorbida por el polvo y re-emitida en el infrarrojo constituye la mayor parte de su luminosidad.

Figura 21. Imagen tomada por Spitzer



## ANEXO B. TEOREMA DE CORIOLLIS

Consideremos dos observadores  $O$  y  $O^*$  que están rotando uno con respecto a otro. Supongamos que  $O$  y  $O^*$  se encuentran en la misma región del espacio y que cada uno de ellos usa un sistema de referencia fijo a si mismo pero con un origen común.

El observador  $O$ , que utiliza el sistema  $XYZ$  nota que  $O^*$  fijo al sistema  $X^*Y^*Z^*$  rota con velocidad angular  $\omega$ . Por su lado  $O^*$  notarà que  $O$  rota con velocidad angular  $-\omega$ .

El vector posición de la partícula  $P$  referido a  $XYZ$  es:

$$\vec{r} = x\hat{U}_x + y\hat{U}_y + z\hat{U}_z \quad (7.155)$$

y por lo tanto:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{U}_x \frac{dx}{dt} + \hat{U}_y \frac{dy}{dt} + \hat{U}_z \frac{dz}{dt} \quad (7.156)$$

El vector posición de  $P$  con respecto a  $X^*Y^*Z^*$  es:

$$\vec{r}^* = x^*\hat{U}_x^* + y^*\hat{U}_y^* + z^*\hat{U}_z^* \quad (7.157)$$

y por tanto:

$$\vec{v}^* = \frac{d\vec{r}^*}{dt} = \hat{U}_x^* \frac{dx^*}{dt} + \hat{U}_y^* \frac{dy^*}{dt} + \hat{U}_z^* \frac{dz^*}{dt} \quad (7.158)$$

Al derivar la ecuación (D) el observador  $O^*$  ha supuesto que el sistema  $X^*Y^*Z^*$  no está rotando, y por lo tanto ha considerado los vectores unitarios como constantes en dirección. Sin embargo, el observador  $O$  tiene el derecho de decir que, para él, el sistema  $X^*Y^*Z^*$  está rotando y que, por consiguiente, los vectores unitarios  $\hat{U}_x^*$ ,  $\hat{U}_y^*$ ,  $\hat{U}_z^*$ , no tienen dirección constante de modo que al calcular la derivada con respecto al tiempo debe escribirse:

$$\frac{d\vec{r}^*}{dt} = \hat{U}_x^* \frac{dx^*}{dt} + \hat{U}_y^* \frac{dy^*}{dt} + \hat{U}_z^* \frac{dz^*}{dt} + \frac{d\hat{U}_x^*}{dt} x^* + \frac{d\hat{U}_y^*}{dt} y^* + \frac{d\hat{U}_z^*}{dt} z^* \quad (7.159)$$

Los extremos de los vectores  $\hat{U}_x^*$ ,  $\hat{U}_y^*$ ,  $\hat{U}_z^*$  están en movimiento de rotación uniforme relativo a  $O$ , con velocidad angular  $\omega$ . En otras palabras  $\frac{d\hat{U}_x^*}{dt}$  es la velocidad de un punto situado a una distancia unitaria de  $O$  y que se mueve con movimiento circular uniforme con velocidad angular  $\omega$ . Por consiguiente, tenemos:

$$\frac{d\hat{U}x^*}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{U}x^* \quad (7.160)$$

$$\frac{d\hat{U}y^*}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{U}y^* \quad (7.161)$$

$$\frac{d\hat{U}z^*}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{U}z^* \quad (7.162)$$

Reemplazando éstos valores en la ecuación (E) obtenemos:

$$\frac{d\hat{U}x^*}{dt}x^* + \frac{d\hat{U}y^*}{dt}y^* + \frac{d\hat{U}z^*}{dt}z^* = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (7.163)$$

Es decir,

$$\vec{V} = \vec{V}^* + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (7.164)$$

Esta expresión da la relación entre las velocidades  $\vec{V}$  y  $\vec{V}^*$  de P, medidas por dos observadores O y  $O^*$  en movimiento relativo de rotación uniforme.

Debemos obtener la relación entre las aceleraciones, para ello realizamos lo siguiente:

La aceleración de P, medida por O con respecto a XYZ es:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \hat{U}_x \frac{dV_x}{dt} + \hat{U}_y \frac{dV_y}{dt} + \hat{U}_z \frac{dV_z}{dt} \quad (7.165)$$

La aceleración de P, medida por  $O^*$  con respecto a  $X^*Y^*Z^*$ , cuándo el ignora la rotación es:

$$\vec{a}^* = \hat{U}_x^* \frac{dV_x^*}{dt} + \hat{U}_y^* \frac{dV_y^*}{dt} + \hat{U}_z^* \frac{dV_z^*}{dt} \quad (7.166)$$

Derivando la ecuación (J) obtenemos:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}^*}{dt} + \omega \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (7.167)$$

y por derivación:

$$\frac{d\vec{V}^*}{dt} = \hat{U}_x^* \frac{dV_x^*}{dt} + \hat{U}_y^* \frac{dV_y^*}{dt} + \hat{U}_z^* \frac{dV_z^*}{dt} + \frac{d\hat{U}_x^*}{dt}V_x^* + \frac{d\hat{U}_y^*}{dt}V_y^* + \frac{d\hat{U}_z^*}{dt}V_z^* \quad (7.168)$$

Los tres primeros términos corresponden a  $\vec{a}^*$  y los tres últimos, de manera similar a

lo anterior, son  $\vec{\omega} \times \vec{V}^*$ . Por ello:

$$\frac{d\vec{V}^*}{dt} = \vec{a}^* + \vec{\omega} \times \vec{V}^* \quad (7.169)$$

Tenemos también que:

$$\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times (\vec{V}^* + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{V}^* + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (7.170)$$

Sustituyendo éstos últimos resultados en (M), llegamos finalmente a:

$$\vec{a} = \vec{a}^* + 2\vec{\omega} \times \vec{V}^* + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (7.171)$$

## ANEXO C. DATOS PLANETARIOS

Planeta	masa (kg)	Periodo orbital	Periodo de rotación	Distancia al sol (UA)
Mercurio	$3,30 \times 10^{23}$	0.23	58.6días	0.3871
Venus	$4,87 \times 10^{24}$	0.6156	243días	0.7233
Tierra	$5,9 \times 10^{24}$	1	23h56m4s	1
Marte	$6,42 \times 10^{23}$	1.88	24h37m23s	1.5235
Júpiter	$1,90 \times 10^{27}$	11.87	9h55m30s	5.2028
Saturno	$5,69 \times 10^{26}$	29.43	10h30m	9.5825
Urano	$8,70 \times 10^{25}$	84.41	17h14m	19.20
Neptuno	$1,03 \times 10^{26}$	165.5	16h7m	30.047

## ANEXO D. PROGRAMAS EMPLEADOS PARA OBTENER LAS GRÁFICAS

El graficador empleado fue el programa GNUPLOT bajo LINUX, el Scrip para obtener las gráficas puede ser modificado para cualquier valor de  $\mu$  y para diferentes valores de  $q$ .

```
mu=0.001
q1=0.6
q2=0.8
q3=0.9
q4=0.95
cd=22902.6
set view 0,0
set samples 400, 400
set isosamples 1000, 1000
set contour
unset surface
set cntrparam levels discrete 0
set xrange [-1.60 : 2.30] noreverse nowriteback
set yrange [-1.10 : 1.10 ] noreverse nowriteback
set style line 2 lt 2
set style line 3 lt 3
set size 0.5,0.5
set multiplot
set origin 0.1,0.5
set title q=0.6
set label 1 S at 0.001,0
set label 2 J at 1.001,0
splot cd*mu*y*1/(((x-1+mu)**2+y**2)**(1,5))-mu*y*cd+(1-mu)*(1-q1)ls3,
(x+mu)**2+y**2-(q1**2*(0,67)) ls 2
set origin 0.5,0.5
set title q=0.8
set label 1 S at 0.001,0
set label 2 J at 1.001,0
splot cd*mu*y*1/(((x-1+mu)**2+y**2)**(1,5))-mu*y*cd+(1-mu)*(1-q2)ls3,
(x+mu)**2+y**2-(q2**2*(0,67)) ls 2
set origin 0.5,0.1
set title q=0.9
set label 1 S at 0.001,0
set label 2 J at 1.001,0
splot cd*mu*y*1/(((x-1+mu)**2+y**2)**(1,5))-mu*y*cd+(1-mu)*(1-q3)
ls 3,
(x+mu)**2+y**2-(q3**2*(0,67)) ls 2
set origin 0.1,0.1
```

```

set title q=0.95
set label 1 S at 0.001,0
set label 2 J at 1.001,0
splot cd*mu*y*1/(((x-1+mu)**2+y**2)**(1,5))-mu*y*cd+(1-mu)*(1-q4)
ls 3,
(x+mu)**2+y**2-(q4**(0,67)) ls 2

mu=0.00000294
q1=0.6
q2=0.8
q3=0.9
q4=0.98
cd=10045
set view 0,0
set samples 200, 200
set isosamples 500, 500
set style line 1 lt 1
set style line 2 lt 2
set style line 3 lt 3
set style line 4 lt 4
set label 1 S at 0.001,0
set label 2 E at 1.001,0
set contour
unset surface
set cntrparam levels discrete 0
set xrange [-1.1 : 1.5] noreverse nowriteback
set yrange [-1.1 : 1.1] noreverse nowriteback
splot cd*mu*y*1/(((x-1+mu)**2+y**2)**(1,5))-mu*y*cd+(1-mu)*(1-q1)
ls 1,
(x+mu)**2+y**2-(q1**(0,67)) ls 1,
cd*mu*y*1/(((x-1+mu)**2+y**2)**(1,5))-mu*y*cd+(1-mu)*(1-q2)
ls 2,
(x+mu)**2+y**2-(q2**(0,67)) ls 2,
cd*mu*y*1/(((x-1+mu)**2+y**2)**(1,5))-mu*y*cd+(1-mu)*(1-q3)
ls 3,
(x+mu)**2+y**2-(q3**(0,67)) ls 3
cd*mu*y*1/(((x-1+mu)**2+y**2)**(1,5))-mu*y*cd+(1-mu)*(1-q4)
ls 4,
(x+mu)**2+y**2-(q4**(0,67)) ls 4

```