

Visualización dinámica tridimensional en actividades de lugares geométricos 3D en geometría dinámica

Edinsson Fernández-Mosquera¹ y Marisol Santacruz-Rodríguez²

¹Universidad del Valle – Universidad de Nariño, Cali, Colombia; edinfer@udenar.edu.co;
<https://orcid.org/0000-0002-8134-4678>

²Universidad del Valle, Cali, Colombia; marisol.santacruz@correounivalle.edu.co;
<https://orcid.org/0000-0001-8566-5439>

Presentamos avances de una investigación doctoral sobre las habilidades de visualización dinámica tridimensional que desarrollan estudiantes universitarios cuando resuelven problemas de lugares geométricos en el espacio usando geometría dinámica. Para ello, presentamos el diseño de dos actividades propuestas en el marco de una trayectoria hipotética de aprendizaje, fundamentadas en analogías entre objetos del plano y del espacio. Con estas actividades se buscó fomentar habilidades de visualización, tales como control teórico, predicción geométrica y cristalización. De manera preliminar, nuestros resultados muestran que los estudiantes presentan dificultades en imaginar lugares geométricos en el espacio; sin embargo, el uso de geometría dinámica durante las actividades promueve que los estudiantes desarrollen habilidades de visualización en geometría 3D, tales como la predicción y la construcción geométrica.

Palabras clave: Habilidades de visualización, Lugares geométricos 3D; Analogías del plano y espacio; geometría dinámica 3D.

Introducción

Investigaciones recientes en educación geométrica (Sinclair et al., 2016) señalan la atención creciente a la geometría tridimensional, promovida, en parte, por el estudio de los usos didácticos de la *geometría dinámica*¹ y otros artefactos digitales 3D en el ámbito escolar (Sinclair et al., 2016). En particular, resaltan el papel fundamental de las habilidades de visualización en el aprendizaje de la geometría 3D y la pertinencia de abordar el desarrollo de estas habilidades en todos los niveles escolares. Sin embargo, los resultados de investigación en visualización 3D a nivel universitario aún son pocos y parciales, y, por tanto, constituyen un foco de interés para la educación geométrica actual.

Al respecto, Sabena et al. (2020) ratificaron que la visualización —en todos los niveles de escolaridad— es un componente vital para la comprensión conceptual, el razonamiento y la resolución de problemas en matemáticas. Sin embargo, la investigación sigue evidenciando que los

¹ Aquí usamos el término *geometría dinámica* para referirnos a un Ambiente de Geometría Dinámica o AGD (o bien, DGE, por sus siglas en inglés) como un ambiente informático interactivo que permite a los estudiantes explorar y experimentar con conceptos geométricos a través de representaciones dinámicas y manipulables. Estos ambientes proporcionan herramientas para construir figuras geométricas, modificar parámetros, realizar mediciones, y observar cómo los cambios en las figuras afectan a otras propiedades geométricas (Villa-Ochoa & Suárez-Téllez, 2021). Además, la geometría dinámica permite a los estudiantes investigar, conjeturar, y justificar resultados, fomentando así el razonamiento geométrico y el pensamiento matemático. En esta investigación hemos usado Cabri 3D, que es ambiente de *geometría dinámica* 3D (GD-3D), el cual permite la visualización y manipulación interactiva de objetos geométricos en el espacio tridimensional.

profesores universitarios hacen poco uso de imágenes en sus clases de matemáticas, favoreciendo el desarrollo de pensamiento algorítmico por encima del pensamiento visual (Eisenberg & Dreyfus, 1991).

También se sabe que el pensamiento visual y el aprendizaje de la geometría 3D se ven altamente beneficiados por el uso de *geometría dinámica*, ya que proporciona una variedad de riqueza visual de imágenes espaciales que no se consigue en representaciones estáticas en el papel o, en algunos casos, en el espacio físico (Pittalis & Christou, 2010). Al respecto, la investigación recomienda fomentar actividades de aprendizaje que favorezcan las habilidades de visualización dinámica en la geometría tridimensional (Gutiérrez & Jaime, 2015; Sinclair et al., 2016).

Así pues, la revisión de literatura nos permitió encontrar que existe necesidad de investigaciones sobre cómo los estudiantes visualizan lugares geométricos en geometría tridimensional, sobre todo a nivel universitario. Por lo tanto, estamos interesados en investigar qué habilidades de visualización dinámica tridimensional desarrollan los estudiantes universitarios cuando usan *geometría dinámica 3D* (GD-3D) al resolver problemas de lugares geométricos que combinan analogías entre geometría 2D y 3D.

Fundamentación Teórica

Los aspectos teóricos que nos permitieron diseñar las actividades fueron: habilidades de visualización, la visualización dinámica tridimensional, los lugares geométricos y las analogías como heurísticas claves para el desarrollo de habilidades de visualización.

Habilidades de visualización

Existe una diversidad de aproximaciones teóricas sobre habilidades de visualización. En particular, nos interesa la propuesta de Mariotti y Baccaglini-Frank (2018), quienes identificaron ocho habilidades de visualización que se desarrollan con el uso de geometría dinámica: identificación, reconstrucción, construcción, conciencia parcial-total, manipulación, control teórico, predicción geométrica, y cristalización. Vale recalcar que estas habilidades fueron diseñadas por estas investigadoras para la investigación en el campo de la geometría bidimensional y con el uso de geometría dinámica 2D, pero estas investigadoras dejaron abierta la oportunidad para que otros investigadores sigan evolucionando dicho enfoque, con *Geometría Espacial* y *GD-3D*.

Visualización dinámica tridimensional

Corresponden a habilidades que se requieren para razonar sobre estímulos en movimiento en el espacio. En ese sentido, la visualización dinámica, fomentada y relacionada con el uso de geometría dinámica, es una habilidad, un proceso y un producto para manipular mentalmente los objetos espaciales con el propósito de construir representaciones visuales que cambian con el tiempo y que destacan manipulaciones secuenciales, ilustrando conceptos relativamente abstractos en matemáticas, de formas tridimensionales (Pittalis & Christou, 2010), de representarlas y comunicar ideas del espacio.

Lugares geométricos

Los lugares geométricos constituyen una idea matemática fundamental que, aunque poco investigada en educación geométrica (Laborde et al., 2006; Nagy-Kondor, 2017), despierta interés por su mismo potencial de fomentar habilidades de visualización. Estos investigadores afirman que los lugares geométricos tienen un carácter educativo general, que se vuelve más atractivo cuando involucran el uso de geometría dinámica.

Analogías como heurísticas claves para el desarrollo de habilidades de visualización

Las analogías son “una especie de similitud entre objetos distintos. Objetos similares coinciden entre sí, en algunos aspectos, objetos análogos coinciden en relaciones claramente definibles de sus respectivas partes”(Mammanna et al., 2012, p. 820). Nagy-Kondor (2017) recomienda fomentar analogías de lugares geométricos de 2D a 3D para desarrollar habilidades de visualización dinámica tridimensional.

Aspectos Metodológicos

Consideramos apropiado adoptar la metodología de *Investigación Basada en el Diseño* (Bakker, 2018) a través de la estrategia investigativa *experimento de enseñanza* a nivel universitario, diseñando e implementando una *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje* (THA) (Simon, 2020) que actúa como un instrumento de diseño para analizar el desarrollo de habilidades de visualización.

El diseño de las Actividades de aprendizaje

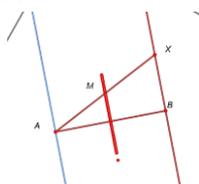
Detrás del diseño están las ideas de Nagy-Kondor (2017), quien propone fomentar analogías de lugares geométricos de 2D a 3D para desarrollar habilidades de visualización espacial.

Las dos actividades que se presentan aquí corresponden a problemas de construcción de lugares geométricos en 2D y luego en 3D. La hipótesis central de las dos actividades es que el estudiante requiere primero visualizar (ver en su mente) las figuras geométricas solicitadas, para luego generar una figura geométrica a partir del movimiento. Primero de un punto para generar una recta, luego generar una superficie a partir de una recta.

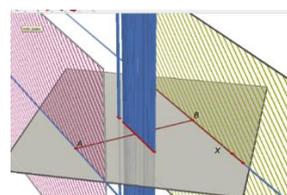
La primera actividad de aprendizaje integra GD-3D con la intención de construir lugares geométricos. En este caso, la *mediatriz* a partir de sus propiedades de equidistancia para finalmente resolver el problema construyendo un *plano mediador* usando el arrastre, por medio de un lugar geométrico análogo y construido en primera instancia en 2D para luego construirlo en 3D. Ver Figura 1.

Figura 1

Analogías de lugares geométricos en el plano y en el espacio. a. Lugar geométrico de todos los puntos medios \overline{AX} cuando X se mueve por una de las perpendiculares a \overline{AB} que pasa por B . b. Plano mediador como lugar geométrico.



a.



b.

La segunda actividad busca encontrar el lugar geométrico de los puntos que equidistan en dos planos dados que se cortan. Al igual que en la primera actividad, en esta, por analogía, se trata de tener en cuenta la generación de una bisectriz de un ángulo en el plano, y luego que los estudiantes universitarios puedan extender esta misma construcción de manera dinámica.

En ambas actividades se busca fomentar habilidades de visualización, tales como control teórico, predicción geométrica y cristalización (Mariotti & Baccaglini-Frank, 2018), con el propósito de promover la transferencia por analogía de hechos geométricos 2D al espacio tridimensional con el uso de la GD-3D, Cabri 3D.

Algunas reflexiones finales

En la fase piloto del estudio, se examinó a siete parejas de estudiantes universitarios en formación como futuros profesores de matemáticas, quienes, a pesar de carecer de experiencia en geometría tridimensional y geometría dinámica 3D, mostraron una actitud receptiva hacia los temas propuestos, respaldada por sólidos conocimientos en los primeros cursos universitarios de geometría y tecnologías digitales.

Las habilidades en geometría 3D se evidenciaron en la predicción y construcción geométrica al abordar problemas de lugares geométricos conocidos en geometría 2D. Algunos estudiantes que realizaron analogías emplearon heurísticas de geometría 2D para encontrar lugares geométricos en 3D, aunque en ocasiones omitieron considerar la no extensión de todas las propiedades geométricas.

En cinco de las siete parejas, se identificaron habilidades destacadas de visualización, reconstrucción, manipulación y construcción, según Mariotti y Baccaglini-Frank (2018). Estos estudiantes exploraron diversas vistas tridimensionales del lugar geométrico requerido, revelando variabilidad en las habilidades de visualización dinámica tridimensional.

Este análisis resalta la importancia de la transferencia de conocimientos y estrategias de geometría 2D a la resolución de problemas en geometría 3D. Subraya la necesidad de abordar las limitaciones y desafíos al aplicar analogías entre los dos contextos geométricos, proporcionando una base valiosa para la reflexión y mejora continua de las estrategias de enseñanza en el contexto universitario.

Nuestros resultados muestran que existen dificultades y obstáculos para visualizar figuras espaciales en la educación geométrica a nivel universitario. Para los estudiantes resulta particularmente difícil imaginar objetos, procesos y conceptos de temas de geometría analítica del espacio como los lugares geométricos 3D (Nagy-Kondor, 2017). Nuestro estudio contribuye significativamente al entendimiento de la visualización tridimensional en estudiantes universitarios dado que la GD-3D ayuda a desarrollar imágenes mentales en configuraciones en movimiento. Las representaciones dinámicas que ofrece la GD-3D motiva a los estudiantes a pensar en imágenes mentales de rotación porque si se hicieran las trazas a lápiz y papel exigirían gran cantidad de manipulaciones que harían este proceso demasiado tedioso. Con esto se reafirma las hipótesis de que la tecnología digital juega un papel importante en el desarrollo del pensamiento geométrico y catapulta ideas que surgen de lo 2D a lo 3D.

Referencias

- Bakker, A. (2018). What is design research in education? In *Design Research in Education. A practical guide for early career researchers* (1st ed., pp. 3–23). Routledge Taylor & Francis Group. <https://doi.org/10.4324/9780203701010>
- Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 25–37). MAA.
- Gutiérrez, Á., & Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA*, 9(2), 53–83. <https://doi.org/10.30827/pna.v9i2.6106>
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). Teaching and Learning Geometry with Technology. En Á. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, present and future* (Vol. 1, pp. 275–304). Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087901127_011
- Mammana, M. F., Micale, B., & Pennisi, M. (2012). Analogy and dynamic geometry system used to introduce three-dimensional geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43(6), 818–830. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2012.662286>
- Mariotti, M. A., & Baccaglioni-Frank, A. (2018). Developing the Mathematical Eye Through Problem-Solving in a Dynamic Geometry Environment. En N. Amado, S. Carreira, & K. Jones (Eds.), *Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving. A Focus on Technology, Creativity and Affect. Research in Mathematics Education Series* (pp. 153–176). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99861-9_7
- Nagy-Kondor, R. (2017). Spatial Ability: Measurement and Development. En M. S. Khine (Ed.), *Visual-spatial Ability in STEM Education: Transforming Research into Practice* (pp. 35–58), Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-44385-0>
- Pittalis, M., & Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 191–212. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9251-8>
- Sabena, C., Schäfer, M., Fetzner, M., Hsu, H., & Yuan, Z. (2020). Visualization in the teaching and learning of mathematics. En (Ed.) *Proceedings of TSG 23 in International Congress on Mathematical Education, ICME-14*. <https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/Conferences/ICME/ICME%2014/Proceedings/Topic%20Study%20Groups/TSG%20%2323.pdf>
- Simon, M. A. (2020). Hypothetical Learning Trajectories in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 354–357). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_72
- Sinclair, N., Bartolini-Bussi, M., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM*, 48(5), 691–719. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6>

Villa-Ochoa, J. A., & Suárez-Télez, L. (2021). Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry for Mathematical Thinking. En M. Danesi (Ed.), *Handbook of Cognitive Mathematics* (pp. 1–27). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-44982-7_36-1