

**Universidad de Nariño**  
**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**  
**Departamento de Física**



**SIMULACIÓN DE UN VIAJE ESPACIAL DESDE LA TIERRA  
HACIA VENUS UTILIZANDO UN PROBLEMA SIMPLIFICADO DE  
CUATRO CUERPOS**

**TRABAJO DE GRADO**

Para optar al título profesional de:

**Físico**

**Daniel Santiago Álvarez Córdoba**

San Juan de Pasto, Colombia

Agosto 2023

**Universidad de Nariño**  
**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**  
**Departamento de Física**

**SIMULACIÓN DE UN VIAJE ESPACIAL DESDE LA TIERRA  
HACIA VENUS UTILIZANDO UN PROBLEMA SIMPLIFICADO DE  
CUATRO CUERPOS**

**Daniel Santiago Álvarez Córdoba**

**TRABAJO DE GRADO**

Director:

**ALBERTO QUIJANO VODNIZA**  
**MSc en Física**

San Juan de Pasto, Colombia

Agosto 2023



©2023 - Daniel Santiago Álvarez Córdoba

“Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva del autor”

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Todos los derechos reservados.

San Juan de Pasto, Agosto 2023

Nota de Aceptación

---

---

---

---

---

---

---

Director: Alberto Quijano Vodniza

---

Jurado: Karla Patricia Reyes Sánchez

---

Jurado: Sandra Esperanza Sánchez Sierra

San Juan de Pasto, 13 de Octubre de 2023

**ACUERDO N°233 de 2023  
(Octubre 30)**

Por la cual se otorga la distinción de **LAUREADA** al trabajo de Grado presentado por el estudiante del programa de Física **DANIEL SANTIAGO ÁLVAREZ CÓRDOBA**.

**EL CONSEJO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES DE LA UNIVERSIDAD DE NARIÑO**, en uso de sus atribuciones reglamentarias y estatutarias y,

**CONSIDERANDO:**

Que mediante Proposición No.033 de 26 de octubre de 2023, el Comité Curricular y de Investigaciones del Departamento de Física, solicitó otorgar la distinción de tesis **LAUREADA**, al trabajo de grado titulado **“SIMULACIÓN DE UN VIAJE ESPACIAL DESDE LA TIERRA HACIA VENUS UTILIZANDO UN PROBLEMA SIMPLIFICADO DE CUATRO CUERPOS”**, presentado por el estudiante del programa de Física **DANIEL SANTIAGO ÁLVAREZ CÓRDOBA**, como requisito parcial para optar al título de Físico;

Que el director del mencionado trabajo es el docente **ALBERTO QUIJANO VODNIZA**;

Que mediante Acuerdo 108 de 12 de octubre de 2023, se fijó como fecha de sustentación el **día 13 de octubre de 2023**, a las 10:00 a.m. en el Auditorio de la FACEA Bloque 2, de la Universidad de Nariño, del Trabajo de Grado **“SIMULACIÓN DE UN VIAJE ESPACIAL DESDE LA TIERRA HACIA VENUS UTILIZANDO UN PROBLEMA SIMPLIFICADO DE CUATRO CUERPOS”** realizado por el estudiante del Programa del programa de Física **DANIEL SANTIAGO ÁLVAREZ CÓRDOBA**;

Que en el Artículo 3° del Acuerdo 077 de diciembre 10 de 2019, Se establece las modalidades de Trabajo de Grado a) Modalidad Investigación: corresponde al proceso formal de sistematización, creación, aprobación y difusión de conocimiento, que incluye proyectos de investigación-creación, desarrollo de software, monografías, artículos en revistas, capítulos de libro, ensayos, producciones literarias y formulación de propuestas pedagógicas;

Que el artículo 16° de Acuerdo 077 de diciembre 10 de 2019 “El reconocimiento de distinciones aplica para las modalidades de investigación e interacción social según la siguiente escala – Trabajo de grado Meritorio: de 90 a 99 puntos. – Trabajo de grado Laureado: 100 puntos”;

Que según Acuerdo N° 091B de septiembre 15 del 2023 el Comité Curricular designó como jurados evaluadores a las docentes **SANDRA SÁNCHEZ SIERRA y KARLA REYES SÁNCHEZ**;

Que el día trece (13) de octubre del 2023 el estudiante **DANIEL SANTIAGO ÁLVAREZ CÓRDOBA** sustento y aprobó el trabajo de grado titulado **“SIMULACIÓN DE UN VIAJE ESPACIAL DESDE LA TIERRA HACIA VENUS UTILIZANDO UN PROBLEMA SIMPLIFICADO DE CUATRO CUERPOS”**;

Que, en la mencionada sesión, los integrantes del Jurado Evaluador otorgaron una calificación conjunta de **100/100 puntos al estudiante**, hecho consignado en el **Acta de Sustentación No. 004 de 13 de octubre de 2023**;

Que, según comunicaciones emitidas por los integrantes del Jurado Evaluador, se sustenta las razones por las cuales el trabajo antes citado es acreedor a la distinción de **LAUREADO**, de la siguiente manera:

*“Nos complace informar que, tras un riguroso proceso de revisión y evaluación, consideramos que el trabajo del estudiante Santiago Álvarez cumplió con creces los objetivos planteados y merece ser calificado con la máxima puntuación de 100 puntos, otorgándole la mención de trabajo Laureado. Tanto el trabajo escrito como la socialización obtuvieron la máxima puntuación en todos los criterios dispuestos por el Programa de Física en las respectivas rúbricas de evaluación establecidas para tal fin en el Acuerdo 017 de febrero 28 de 2023.*

*Nuestra recomendación se basa en una evaluación exhaustiva de los siguientes logros alcanzados por el estudiante:*

1. **Deducción de las ecuaciones diferenciales del movimiento de cuatro cuerpos:** el estudiante demostró una comprensión excepcional de las ecuaciones que gobiernan el movimiento de sistemas de cuatro cuerpos celestes. Su capacidad para derivar estas ecuaciones es un testimonio de su profundo conocimiento en el campo y de haber adquirido este conocimiento en sus cursos de pregrado en física.
2. **Comparación con las ecuaciones para el problema de tres cuerpos:** el trabajo de grado incluyó una comparación detallada y precisa de las ecuaciones del problema de cuatro cuerpos con el de tres cuerpos, lo que destacó las contribuciones significativas del estudiante a este campo.
3. **Diseño de código en Python:** el estudiante desarrolló códigos en Python eficientes y efectivos para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales relacionado con el problema de cuatro cuerpos. Estos códigos demostraron ser una herramienta valiosa para simular trayectorias espaciales y explorar una variedad de condiciones iniciales.
4. **Visualización de las trayectorias de la nave:** la implementación de un código para visualizar las trayectorias de la nave bajo diferentes condiciones iniciales permitió una comprensión más profunda y una presentación clara de los resultados.
- 5.

*La destacada calidad y el impacto de este trabajo de grado son evidentes, y consideramos que merece el reconocimiento más alto. La mención de laureado no solo reflejaría el arduo trabajo y el compromiso del estudiante, sino que también sería un testimonio de la excelencia académica que el Programa de Física valora y promueve”.*

Que el Comité Curricular y de Investigaciones del Departamento de Física, una vez evaluado los conceptos de los asesores, considera que la distinción de **LAUREADA** se ajusta a las normas,

Que teniendo en cuenta lo anterior, este organismo considero viable la petición y;

**ACUERDA:**

**PRIMERO:** Otorgar la distinción de **LAUREADA 100/100** puntos al estudiante **DANIEL SANTIAGO ÁLVAREZ CÓRDOBA**, con el Trabajo de Grado denominado **“SIMULACIÓN DE UN VIAJE ESPACIAL DESDE LA TIERRA HACIA VENUS UTILIZANDO UN PROBLEMA SIMPLIFICADO DE CUATRO CUERPOS”**, presentado como requisito parcial para optar al título de físico, bajo la Asesoría del docente **ALBERTO QUIJANO VODNIZA**, y las docentes **SANDRA SÁNCHEZ SIERRA** y **KARLA REYES SÁNCHEZ**, como integrantes del Jurado Evaluador

**SEGUNDO:** **COMUNÍQUESE** esta determinación compulsando las respectivas copias del presente Acuerdo al Departamento de Física, la oficina de Registro Académico y la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

San Juan de Pasto, 30 de octubre de 2023



**HERNÁN ESCOBAR JIMÉNEZ**  
Presidente



**DUVI MARCELA CASTILLO**  
Secretaria

*Elaboró: Paola S.*

## **Agradecimientos**

Agradezco a mi madre Gloria y a mi hermana Isabel por todo el apoyo brindado a lo largo de mi carrera y de mi vida.



# **SIMULACIÓN DE UN VIAJE ESPACIAL DESDE LA TIERRA HACIA VENUS UTILIZANDO UN PROBLEMA SIMPLIFICADO DE CUATRO CUERPOS**

## **Resumen**

*En este trabajo se realizó una simulación de un viaje espacial hacia Venus utilizando un problema simplificado de cuatro cuerpos en un modelo bidimensional. Se considera el campo gravitacional de la Tierra, Venus y la Luna sobre una nave espacial inicialmente en órbita de parqueo circular alrededor de la Tierra. Para obtener una solución numérica aproximada, se emplearon ciertas simplificaciones, como considerar los cuerpos celestes como masas puntuales y las órbitas como circulares. El objetivo principal consistió en obtener diferentes trayectorias de la nave espacial bajo una variedad de condiciones iniciales, tales como el radio de la órbita de parqueo circular, la velocidad inicial, el ángulo de despegue y la posición relativa de la Luna y Venus al momento del inicio del viaje. Para lograr esto, se desarrolló un código de programación en Python que resuelve numéricamente las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento, utilizando el método Runge-Kutta de cuarto orden. Entre los resultados, se determinaron las condiciones iniciales para diversas trayectorias, incluyendo el análisis del aprovechamiento de la asistencia gravitatoria de la Luna para impulsar la nave hacia Venus, así como también el campo gravitacional de Venus para lograr el retorno a la Tierra. Además, se exploraron trayectorias de viaje de ida y retorno a la Luna. Aunque el estudio se basó en un enfoque simplificado en dos dimensiones, este proporciona una base sólida para futuros proyectos más detallados y realistas en el campo de la mecánica celeste y la exploración espacial. La comprensión de los conceptos básicos y el uso de métodos numéricos sientan las bases para abordar proyectos más complejos en el futuro, contribuyendo así al avance de la investigación en este emocionante campo, en constante evolución. Este trabajo representa el primer paso hacia proyectos más detallados y realistas, sentando las bases para futuras investigaciones que aborden desafíos aún más complejos en la exploración espacial.*

**Palabras clave:** Problema de los cuatro cuerpos, métodos numéricos, ecuaciones diferenciales acopladas, programación en Python.



# **SIMULATION OF A SPACE TRIP FROM EARTH TO VENUS USING A SIMPLIFIED FOUR-BODY PROBLEM**

## **Abstract**

*In this work, a simulation of a space journey to Venus was conducted using a simplified four-body problem in a two-dimensional model. The gravitational fields of Earth, Venus, and the Moon on a spacecraft initially in a circular parking orbit around Earth were considered. To obtain an approximate numerical solution, certain simplifications were employed, such as treating the celestial bodies as point masses and assuming circular orbits. The main objective was to obtain different spacecraft trajectories under a variety of initial conditions, including the radius of the circular parking orbit, initial velocity, launch angle, and the relative positions of the Moon and Venus at the start of the journey. To achieve this, a Python programming code was developed to numerically solve the differential equations governing the motion using the fourth-order Runge-Kutta method.*

*Among the results, the initial conditions for various trajectories were determined, including the analysis of utilizing the gravitational assist from the Moon to propel the spacecraft towards Venus, as well as the gravitational field of Venus to achieve the return to Earth. Additionally, travel trajectories to the Moon and back were explored. Although the study was based on a simplified two-dimensional approach, it provides a solid foundation for future more detailed and realistic projects in the field of celestial mechanics and space exploration. Understanding the basic concepts and utilizing numerical methods lay the groundwork for tackling more complex projects in the future, thus contributing to the advancement of research in this exciting and ever-evolving field. This work represents the first step towards more detailed and realistic projects, laying the groundwork for future investigations that address even more complex challenges in space exploration.*

**Keywords:** Four-body problem, numerical methods, coupled differential equations, Python programming.

# Contenido

|          |                                                                                |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUCCIÓN</b>                                                            | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b>                                              | <b>5</b>  |
| <b>3</b> | <b>OBJETIVOS</b>                                                               | <b>7</b>  |
| 3.1      | Objetivo General . . . . .                                                     | 7         |
| 3.2      | Objetivos específicos . . . . .                                                | 7         |
| <b>4</b> | <b>MARCO TEÓRICO</b>                                                           | <b>8</b>  |
| 4.1      | Sistemas de referencia rotatorios . . . . .                                    | 8         |
| 4.2      | Problema de los dos cuerpos . . . . .                                          | 10        |
| 4.3      | Problema de los tres cuerpos . . . . .                                         | 13        |
| 4.4      | Métodos numéricos . . . . .                                                    | 23        |
| <b>5</b> | <b>PROBLEMA DE LOS CUATRO CUERPOS</b>                                          | <b>26</b> |
| 5.1      | Ajuste del método de RK4 para el sistema de ecuaciones diferenciales . . . . . | 37        |
| <b>6</b> | <b>RESULTADOS</b>                                                              | <b>41</b> |
| 6.1      | LIMITACIONES Y ASPECTOS A TENER EN CUENTA . . . . .                            | 41        |
| 6.2      | Viajes a la Luna . . . . .                                                     | 42        |
| 6.3      | Viajes a Venus . . . . .                                                       | 50        |
| 6.4      | Viaje Venus I (V1) . . . . .                                                   | 50        |
| 6.5      | Viaje Venus II (V2) . . . . .                                                  | 58        |
| 6.6      | Viaje Venus III (V3) . . . . .                                                 | 62        |
| <b>7</b> | <b>CONCLUSIONES</b>                                                            | <b>70</b> |
| 7.1      | Recomendaciones . . . . .                                                      | 72        |
|          | <b>Bibliografía</b>                                                            | <b>73</b> |

# Lista de Figuras

|      |                                                                                                                                                       |    |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.1  | Vector posición $\vec{B}$ en el sistema rotatorio. <i>Fuente: An introduction to mechanics, Kleppner y Kolenkow (2014).</i> . . . . .                 | 9  |
| 4.2  | Configuración de los dos cuerpos en un sistema inercial. <i>Fuente: Elementos de Astronomía de posición, Portilla (2012).</i> . . . . .               | 11 |
| 4.3  | Sistema de tres cuerpos. <i>Fuente: Elementos de Astronomía de posición, Portilla (2012).</i> . . . . .                                               | 14 |
| 4.4  | Problema restringido de los tres cuerpos en un sistema inercial. <i>Fuente: An introduction to celestial mechanics, Fitzpatrick (2012).</i> . . . . . | 19 |
| 4.5  | Problema restringido de los tres cuerpos en un sistema rotatorio. <i>Fuente: An introduction to celestial mechanics, Fitzpatrick (2012)</i> . . . . . | 21 |
| 5.1  | Sistema de cuatro cuerpos. <i>Fuente: elaboración propia.</i> . . . . .                                                                               | 26 |
| 5.2  | Sistema de cuatro cuerpos con origen en la Tierra. <i>Fuente: elaboración propia.</i> . . . . .                                                       | 29 |
| 5.3  | Movimiento de Venus y la Tierra. <i>Fuente: elaboración propia.</i> . . . . .                                                                         | 31 |
| 5.4  | Condiciones de lanzamiento iniciales . . . . .                                                                                                        | 39 |
| 6.1  | Escalas VL1 . . . . .                                                                                                                                 | 43 |
| 6.2  | Viaje completo. . . . .                                                                                                                               | 44 |
| 6.3  | Fases VL2 . . . . .                                                                                                                                   | 46 |
| 6.4  | Viaje completo. . . . .                                                                                                                               | 47 |
| 6.5  | Escalas VL3 . . . . .                                                                                                                                 | 48 |
| 6.6  | Viaje completo. . . . .                                                                                                                               | 49 |
| 6.7  | Trayectoria de Venus con respecto a la Tierra . . . . .                                                                                               | 50 |
| 6.8  | Fase I V1 . . . . .                                                                                                                                   | 51 |
| 6.9  | Fase II V1 . . . . .                                                                                                                                  | 53 |
| 6.10 | Fase II V1 . . . . .                                                                                                                                  | 55 |
| 6.11 | Viaje completo de ida. . . . .                                                                                                                        | 56 |
| 6.12 | Viaje completo. . . . .                                                                                                                               | 57 |
| 6.13 | Fase II V2 . . . . .                                                                                                                                  | 60 |
| 6.14 | Viaje completo. . . . .                                                                                                                               | 61 |
| 6.15 | Fase I V3 . . . . .                                                                                                                                   | 63 |
| 6.16 | Fase II V3 . . . . .                                                                                                                                  | 65 |
| 6.17 | Fase III V3 . . . . .                                                                                                                                 | 67 |
| 6.18 | Viaje completo. . . . .                                                                                                                               | 69 |

# Lista de Tablas

|      |                                                              |    |
|------|--------------------------------------------------------------|----|
| 6.1  | Condiciones Iniciales VL1 . . . . .                          | 43 |
| 6.2  | Característica principales VL1. Día 7. . . . .               | 45 |
| 6.3  | Característica principales VL2. Día 54. . . . .              | 47 |
| 6.4  | Condiciones Iniciales VL3 . . . . .                          | 48 |
| 6.5  | Características principales VL3. Día 5. . . . .              | 49 |
| 6.6  | Condiciones Iniciales V1 . . . . .                           | 50 |
| 6.7  | Características principales Fase I. Día 5. . . . .           | 52 |
| 6.8  | Características principales Fase II. Día 108. . . . .        | 54 |
| 6.9  | Características principales viaje completo. Día 156. . . . . | 57 |
| 6.10 | Condiciones Iniciales V2 . . . . .                           | 58 |
| 6.11 | Características principales Fase II. Día 108. . . . .        | 59 |
| 6.12 | Características principales viaje completo. Día 144. . . . . | 61 |
| 6.13 | Condiciones Iniciales V3 . . . . .                           | 62 |
| 6.14 | Características principales Fase I. Día 23. . . . .          | 64 |
| 6.15 | Características principales Fase II. Día 102. . . . .        | 66 |
| 6.16 | Características principales Fase III. Día 232. . . . .       | 68 |
| 6.17 | Características principales Fase III. Día 232. . . . .       | 69 |

# Glosario

[]

**Excentricidad:** Parámetro que mide la desviación de la forma de la órbita respecto a un círculo.

Una excentricidad cercana a 0 indica una órbita casi circular, mientras que una excentricidad cercana a 1 indica una órbita altamente elíptica.

**Eclíptica:** Plano en el espacio que contiene la órbita aparente del Sol alrededor de la Tierra a lo largo del año.

**Órbita:** Trayectoria curva que sigue un objeto en el espacio debido a la gravedad de otro objeto.

**Parámetros Iniciales:** Valores que definen el estado inicial de un sistema en un momento determinado, utilizados como punto de partida en simulaciones y cálculos.

**Sistema de Referencia:** Marco de coordenadas utilizado para describir posiciones y movimientos en el espacio, fundamental para la representación precisa de trayectorias y órbitas.

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

El problema que se aborda en este proyecto representa un avance significativo en el campo de los problemas de los cuatro o más cuerpos. Hasta el momento, no se ha resuelto este problema en el contexto de un trabajo de grado en la Universidad de Nariño, lo que genera un gran interés en los resultados obtenidos.

Además de su relevancia académica, el problema planteado tiene un impacto social importante. En el ámbito de la astrofísica, este tema es solo uno de los muchos aspectos que se pueden investigar. Es fundamental impulsar el desarrollo de esta rama de la física en nuestra región, teniendo en cuenta que se cuenta con un observatorio astronómico prometedor, uno de los pocos en Colombia. Este observatorio tiene como objetivo ampliar el estudio de la astronomía en nuestra región y contribuir al desarrollo y reconocimiento del departamento a nivel nacional e internacional. Actualmente, se encuentra en proceso la construcción de un nuevo observatorio astronómico en la ciudad de Pasto, lo que augura un futuro prometedor para la astronomía en la región; igualmente, es fundamental fomentar el interés de los estudiantes que se inclinan por esta fascinante rama de la física.

En los capítulos 2 y 3 se presenta el planteamiento del problema, resaltando que el objetivo principal de este proyecto es simular un viaje desde la Tierra hacia Venus y generar gráficas que representen diversas trayectorias, considerando una variedad de condiciones iniciales. Estas condiciones abarcarán el radio de la órbita de partida circular, la velocidad de salida, el ángulo de despegue, así como las posiciones iniciales de la Luna y Venus. A lo largo del recorrido, la nave espacial estará sujeta a la influencia gravitacional de Venus, la Tierra y la Luna. En los cálculos realizados, se considerará que las órbitas de los cuerpos celestes son circulares, y se despreciará la masa de la nave espacial.

En el capítulo 4, se profundiza en la teoría detrás del problema de los cuerpos celestes en configuraciones de dos y tres cuerpos; se presentan las generalidades de estos problemas y

se realizan deducciones que explican por qué el problema de  $n$  cuerpos ( $n \geq 3$ ) carece de solución analítica.

Seguidamente, se lleva a cabo un estudio del problema restringido de tres cuerpos. Este enfoque implica ciertas simplificaciones, como asumir que dos de los cuerpos son lo suficientemente masivos como para que se pueda despreciar la masa del tercer cuerpo. Además, se supone que estos dos cuerpos masivos se desplazan en órbitas circulares uniformes alrededor de su centro de masa, sin ser afectados por la presencia del tercer cuerpo. Aunque estas limitaciones podrían plantear dudas sobre la aplicabilidad y precisión de este problema, en el universo existen numerosos sistemas que se pueden modelar utilizando esta teoría, lo que le confiere gran importancia e interés a este proyecto. De hecho, este problema sirve como base para el desarrollo de este proyecto, ya que se aplican simplificaciones similares, como se discutirá más adelante.

Dado que no es posible encontrar una solución cerrada para este problema, es necesario recurrir a métodos numéricos que aborden el problema desde una perspectiva diferente. En dicho capítulo también se realiza una breve introducción a los métodos numéricos y se explica cómo aplicarlos para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales acopladas, ya que precisamente ese tipo de sistema debe resolverse para encontrar la solución al problema. Específicamente, se emplea el método de Runge-Kutta de cuarto orden para resolver un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales acopladas. El capítulo concluye con una explicación del funcionamiento general de este método para resolver este tipo de sistemas.

En el capítulo 5, se inicia el estudio teórico con la deducción de las ecuaciones diferenciales del problema de los cuatro cuerpos en general. Una vez obtenidas, se procede a realizar las simplificaciones adecuadas. Estas simplificaciones incluyen considerar órbitas circulares bidimensionales para los cuerpos celestes involucrados y despreciar la masa de la nave espacial. Estas simplificaciones son acordes con sistemas reales, ya que la masa de la nave espacial es insignificante en comparación con la masa de la Luna, Venus y la Tierra. Además, las órbitas de estos cuerpos presentan excentricidades muy bajas. Al aplicar estas simplificaciones al problema general, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas específicas para Venus, la Tierra, la Luna y la nave espacial, que serán resueltas utilizando un código de programación mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden, ajustado a este

sistema acoplado en específico.

En el capítulo 6, se presentan los resultados de las simulaciones realizadas. Se inicia con una sección importante que aborda las limitaciones y aspectos relevantes del proyecto y sus resultados. Esta sección es fundamental, ya que aclara que los resultados obtenidos son producto de un *modelamiento con simplificaciones* y no representan completamente la realidad.

Una vez establecido este punto, se procede a mostrar los resultados. En primer lugar, se realizaron simulaciones de viajes a la Luna. Estas trayectorias se simularon con el objetivo de verificar y validar los resultados del código, ya que uno de los libros de referencia proporciona los resultados para este problema de tres cuerpos. Entre las trayectorias se incluyen viajes de ida y vuelta a la Luna, así como el uso de la asistencia gravitatoria de este satélite para acelerar la nave hacia otros destinos.

Una vez validados los resultados del código, se procede a simular los viajes a Venus. En el primer viaje, denominado V1, se realiza una maniobra que aprovecha el fenómeno de asistencia gravitatoria en múltiples ocasiones. En términos generales, se logra una trayectoria que implica llegar a la Luna para utilizar su influencia gravitatoria y acelerar la nave hacia Venus, y posteriormente regresar a la Tierra.

El segundo viaje a Venus, denominado V2, consiste en realizar una ligera modificación en una de las condiciones iniciales relacionadas con la posición de Venus. Este viaje se lleva a cabo con el objetivo de mostrar la sensibilidad de este tipo de problemas ante pequeños cambios en sus condiciones iniciales. Además, este viaje también demuestra la posibilidad de utilizar la asistencia gravitatoria en Venus para modificar la trayectoria de la nave hacia otras direcciones, como el Sol u otro planeta (en caso de incluirse otro cuerpo en el modelo). Estas maniobras son ampliamente utilizadas en la exploración espacial.

En el último viaje a Venus, denominado V3, se sigue una trayectoria similar a la obtenida en V1, pero sin hacer uso de la asistencia gravitatoria de la Luna. Para lograr una trayectoria similar sin esta asistencia, se requiere aumentar considerablemente la velocidad inicial de la nave, lo cual conllevaría, en la realidad, numerosos desafíos tanto económicos como de reducción de carga útil de la nave. Por estas razones, en este viaje se destaca la importancia de la asistencia gravitatoria en este tipo de problemas.

Dado que los viajes a Venus son de larga duración, se dividen en fases. En los resultados de cada viaje se presentan las características generales y los valores numéricos de los parámetros



más relevantes del viaje, los cuales también son obtenidos mediante el código de simulación. Estos parámetros incluyen, por ejemplo, las distancias máximas y mínimas entre la nave espacial y los cuerpos celestes.

Para finalizar, en el capítulo 7 se presentan las conclusiones del proyecto, basadas en los resultados obtenidos, destacando su relevancia para futuros proyectos más complejos en este campo.

# Capítulo 2

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Con el desarrollo científico actual, la exploración espacial se ha convertido en un tema de gran interés para la comunidad. Los misterios y las preguntas sin respuesta que rodean este campo, junto con su importancia, han atraído a cada vez más científicos a investigar las diversas subramas de la astrofísica. Sin embargo, es fundamental comenzar por los principios físicos que rigen este estudio.

Uno de los aspectos más fascinantes es el estudio de los viajes espaciales, tanto tripulados como no tripulados. Debido al arduo trabajo y al elevado costo que conlleva enviar una nave al espacio, se requiere un análisis exhaustivo. Por esta razón, se aplican estudios físico-matemáticos detallados y se realizan simulaciones para corregir posibles errores antes del lanzamiento, a fin de evitar catástrofes. En este proyecto, se llevará a cabo una de estas simulaciones para un viaje desde la Tierra hacia Venus, utilizando un problema de cuatro cuerpos como base. Para abordar el problema en el tiempo establecido para el desarrollo del proyecto (cuatro meses) y a nivel de pregrado, se considerarán ciertas simplificaciones. Por ejemplo, se supondrá que la nave se encuentra en órbita de parqueo circular alrededor del planeta en el momento de iniciar el viaje, sin tener en cuenta el trayecto desde la superficie del planeta. Además, se considerará que las masas de los cuerpos están concentradas en un punto y que las órbitas son circulares y se encuentran en un plano común. Es importante tener en cuenta que este problema no tiene una solución analítica, por lo tanto, se recurrirá a técnicas computacionales para obtener una solución numérica. Se utilizará el método Runge-Kutta para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, que surge al aplicar la ley de gravitación universal a la nave espacial, sometida al campo gravitacional de la Tierra, la Luna y Venus.

Para la deducción de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema de los cuatro cuerpos, se tomará como base del libro de Danby (1997) titulado *Computer modeling: from*

*sports to spaceflight... from order to chaos*, específicamente en la sección 11.2 llamada *A Trip to the Moon*, donde se desarrolla un problema similar pero solamente con tres cuerpos. Luego, se compararán las ecuaciones obtenidas para los cuatro cuerpos con las ecuaciones de referencia del libro.

**El trabajo de investigación consiste en simular un viaje desde la Tierra hacia Venus y obtener gráficas que representen diferentes trayectorias, considerando una variedad de condiciones iniciales. Estas condiciones incluyen el radio de la órbita de parqueo circular, la velocidad de salida, el ángulo de despegue, la posición inicial de la Luna y la posición inicial de Venus. La nave espacial estará sometida al campo gravitacional de Venus, la Tierra y la Luna a lo largo de su recorrido. Se asumirá que las órbitas de los cuerpos celestes son circulares y se despreciará la masa de la nave en los cálculos realizados.**

**Para lograr estos propósitos, se utilizará el problema simplificado de cuatro cuerpos, el cual proporciona una base sólida para el estudio de trayectorias espaciales en este contexto. Mediante este enfoque, se aplicarán métodos numéricos y se resolverán las ecuaciones diferenciales correspondientes, utilizando el método Runge-Kutta.**

En definitiva, se pretende responder a la siguiente pregunta: **¿Cuáles son las diferentes trayectorias de una nave espacial en su viaje desde la Tierra hacia Venus, considerando diferentes condiciones iniciales, tales como el radio de la órbita de parqueo circular, la velocidad de salida, el ángulo de despegue, la posición inicial de la Luna y la posición inicial de Venus, utilizando el problema simplificado de cuatro cuerpos?**

# Capítulo 3

## OBJETIVOS

### 3.1 Objetivo General

Aplicar el problema de los cuatro cuerpos simplificado para obtener trayectorias del viaje de una nave espacial desde la Tierra hacia Venus, teniendo en cuenta el campo gravitacional de ambos planetas y de la Luna, suponiendo que inicialmente la nave se encuentra en órbita de parking circular.

### 3.2 Objetivos específicos

- Deducir las ecuaciones diferenciales del movimiento de cuatro cuerpos.
- Realizar una comparación con las ecuaciones obtenidas para el problema de tres cuerpos.
- Diseñar un código en Python para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales obtenidas para dicho problema de cuatro cuerpos.
- Diseñar un código en Python para visualizar las trayectorias de la nave bajo diferentes condiciones iniciales.

# Capítulo 4

## MARCO TEÓRICO

### 4.1 Sistemas de referencia rotatorios

La segunda ley de Newton es una herramienta sumamente útil en el estudio de la física, ya que permite predecir y comprender cómo se mueven los cuerpos en respuesta a las fuerzas que actúan sobre ellos. Sin embargo, es importante tener en cuenta que esta ley solo es válida en sistemas de referencia inerciales, es decir, aquellos en los que no hay aceleración o rotación.

En ocasiones, resulta conveniente analizar el movimiento de los cuerpos desde sistemas de referencia no inerciales que están en rotación. En el libro "An introduction to mechanics", Kleppner y Kolenkow (2014), se presenta un tratamiento para este tipo de situaciones.

Supongamos que la posición de un objeto se describe mediante el vector  $\vec{B}$  con respecto a un sistema de referencia inercial. Además, supongamos que el objeto está rotando con una velocidad angular constante  $\vec{\Omega}$ . Ahora, observamos el movimiento del objeto desde un sistema de referencia rotatorio no inercial, cuyo origen también está rotando con una velocidad angular constante  $\vec{\Omega}$  alrededor de un eje que pasa por el origen del sistema de referencia inercial, ver figura 4.1. Bajo estas condiciones, el objeto aparenta estar estacionario visto desde el sistema rotatorio, mientras que en el sistema inercial se cumple que:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{B} \quad (4.1)$$

Visto desde el sistema inercial, la derivada temporal de los vectores unitarios  $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$  en

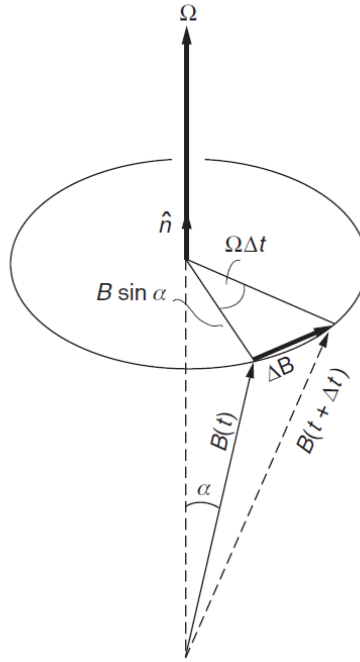


Figura 4.1: Vector posición  $\vec{B}$  en el sistema rotatorio. *Fuente: An introduction to mechanics, Kleppner y Kolenkow (2014).*

coordenadas cartesianas del sistema rotatorio, teniendo en cuenta 4.1, viene dada por:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathbf{i}}'}{dt} &= \vec{\Omega} \times \hat{\mathbf{i}}' \\ \frac{d\hat{\mathbf{j}}'}{dt} &= \vec{\Omega} \times \hat{\mathbf{j}}' \\ \frac{d\hat{\mathbf{k}}'}{dt} &= \vec{\Omega} \times \hat{\mathbf{k}}'\end{aligned}\tag{4.2}$$

Supongamos ahora que el objeto se mueve con respecto al sistema rotatorio. Teniendo en cuenta 4.1 y 4.2 se puede demostrar que:

$$\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_{in} = \left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_{rot} + \vec{\Omega} \times \vec{B}\tag{4.3}$$

La ecuación 4.3 es válida para cualquier vector. Por tanto, se puede deducir el operador:

$$\left(\frac{d_-}{dt}\right)_{in} = \left(\frac{d_-}{dt}\right)_{rot} + \vec{\Omega} \times _-\tag{4.4}$$

La ecuación 4.4 expresa la relación entre las derivadas temporales calculadas en el sistema inercial y en el sistema rotatorio.

Aplicando el operador 4.4 a un vector posición general  $\vec{r}$ , se obtiene:

$$\vec{v}_{in} = \vec{v}_{rot} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (4.5)$$

esta ecuación relaciona la velocidad aparente  $\vec{v}_{in}$  de un objeto con vector posición  $\vec{r}$  en el sistema inercial, con la velocidad aparente  $\vec{v}_{rot}$  en el sistema rotatorio.

La ecuación 4.5 es un tanto intuitiva, sin embargo, al aplicar nuevamente el operador 4.4, se obtiene:

$$\vec{v}_{in} = \vec{a}_{rot} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rot} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

donde despejando  $\vec{a}_{rot}$  y multiplicando por la masa:

$$\vec{F}_{rot} = \vec{F}_{in} - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rot} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (4.6)$$

donde:

$$\vec{F}_{centrifuga} = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{F}_{Coriolis} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rot}$$

son llamadas *fuerzas ficticias*. Las fuerzas ficticias se originan debido a la aceleración del sistema de referencia y no son resultado de una interacción física real entre dos cuerpos, sino una consecuencia de la elección de un sistema de referencia en particular.

## 4.2 Problema de los dos cuerpos

El problema de los dos cuerpos se refiere al estudio de la dinámica de dos cuerpos que interactúan gravitacionalmente entre sí. Este problema es fundamental en el campo de la mecánica celeste y tiene gran importancia en el estudio de fenómenos astronómicos y espaciales.

Cuando nos enfrentamos a este problema, nuestro objetivo principal es determinar la trayectoria que describen los cuerpos en un sistema de referencia específico. El análisis se centra en (Portilla, 2012):

1. Determinar las ecuaciones diferenciales que surgen al aplicar leyes físicas a los cuerpos.

2. Encontrar las propiedades del movimiento, por ejemplo, las cantidades que se conservan.
3. Hallar el vector posición y el vector velocidad de cada cuerpo para cualquier instante.

Cabe destacar que obtener el vector posición y el vector velocidad para cada cuerpo en todo momento puede ser un desafío en la mayoría de los casos, por lo que es necesario recurrir a técnicas numéricas para aproximar las soluciones.

En un sistema inercial, podemos considerar que la posición de un cuerpo de masa  $m_1$  está dada por el vector  $\vec{r}_1$ , mientras que la posición de un cuerpo de masa  $m_2$  está dada por el vector  $\vec{r}_2$ , como se muestra en la Figura 4.2.

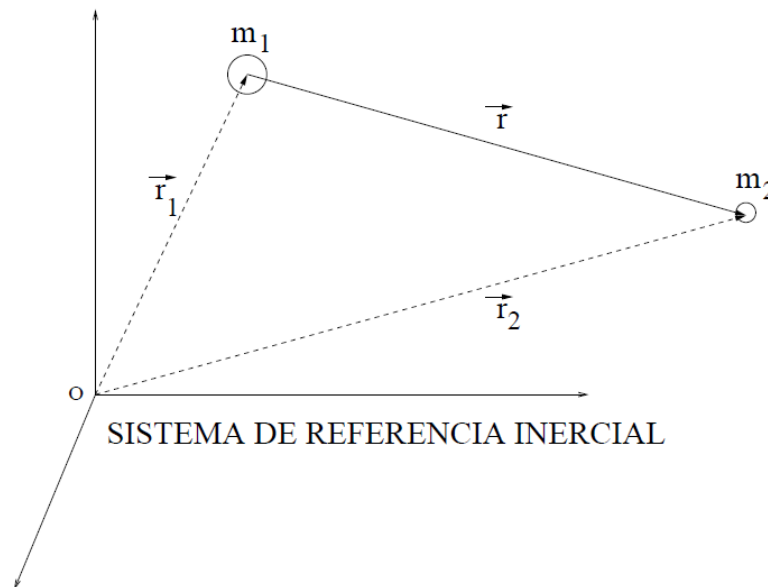


Figura 4.2: Configuración de los dos cuerpos en un sistema inercial. *Fuente: Elementos de Astronomía de posición, Portilla (2012).*

La fuerza que ejerce el cuerpo  $m_1$  sobre el cuerpo  $m_2$  es  $\vec{f}_{21}$ . Por tercera ley de Newton, el cuerpo  $m_2$  ejerce una fuerza igual y opuesta sobre  $m_1$ , es decir:

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21} = \vec{f}$$

De este modo, las ecuaciones de movimiento de los cuerpos son:



$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\vec{f} \quad (4.7)$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{f} \quad (4.8)$$

Sumando estas dos ecuaciones:

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{0}$$

integrando una y dos veces se obtiene, respectivamente:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} &= \vec{a} \\ m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 &= \vec{a}t + \vec{b} \end{aligned}$$

donde  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son vectores constantes. Además, de la definición de *centro de masa* para este sistema:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (4.9)$$

las anteriores ecuaciones se reescriben como:

$$\frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{\vec{a}}{m_1 + m_2} \quad (4.10)$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\vec{a}t + \vec{b}}{m_1 + m_2} \quad (4.11)$$

De la ecuación 4.11 se puede deducir que el centro de masa del sistema se mueve a velocidad constante y en línea recta con respecto al origen  $O$ .

Ahora, definiendo el vector de posición relativa entre los cuerpos como:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

se puede reescribir 4.9:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{cm} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (4.12)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{cm} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (4.13)$$

sustituyendo las dos anteriores ecuaciones en 4.7 y 4.8, se obtiene en ambas expresiones que:

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f} \quad (4.14)$$

donde el término  $\mu$  se conoce como *masa reducida*:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Teniendo en cuenta la *Ley de Gravitación Universal* de Newton:

$$\vec{\mathbf{f}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

y sustituyendo esta ecuación en 4.14 finalmente se obtiene:

$$\frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = -G \frac{(m_1 + m_2)}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (4.15)$$

siendo la constante  $G$  la constante de Cavendish, cuyo valor es:

$$G = 6.674 * 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}$$

El proceso anterior permitió convertir el problema de los dos cuerpos en un problema equivalente de un solo cuerpo. Según Fitzpatrick (2012) en su texto *An introduction to celestial mechanics*, la ecuación 4.15 es la *única* en mecánica celeste que tiene una solución analítica completamente cerrada. Se concluye entonces que la dinámica de un sistema aislado conformado por dos cuerpos puntuales interactuantes, siempre puede ser reducido a un sistema equivalente de un sólo cuerpo.

### 4.3 Problema de los tres cuerpos

El problema de los tres cuerpos consiste en predecir el movimiento de tres cuerpos bajo la influencia de la gravedad. Bajo esta descripción, puede parecer un problema relativamente sencillo cuando en realidad es un problema matemático extremadamente complejo que no puede ser resuelto mediante métodos analíticos.

El problema de los tres cuerpos puede ser expresado en términos de ecuaciones diferenciales. Newton fue el primero en intentar hallar una solución analítica general a dichas ecuaciones y desde entonces, nadie ha podido hallar tal solución.

Cuando se añade un tercer cuerpo de masa  $m_3$  a un sistema que consiste en principio de dos cuerpos de masa  $m_1$  y  $m_2$ , el problema a resolver es: *calcular el movimiento de tres*

masas puntuales, cuyo movimiento está gobernado por la ley de gravitación universal y que por tanto, se atraen unas a otras, para cualquier valor de las masas y para cualesquiera condiciones iniciales.

El proceso desarrollado por Portilla (2012) en *Elementos de Astronomía de posición* es el siguiente: en un sistema de coordenadas inercial dado, se disponen los cuerpos de masa  $m_i$  cuyos vectores posición son  $\vec{R}_i$  con  $i = 1, 2, 3$  relativo a un punto  $O$  del sistema inercial, tal como se indica en la figura 4.3. Ahora, se define tres vectores de posición relativa entre los cuerpos:

- $\vec{D}_{12}$  vector relativo de  $m_2$  con respecto a  $m_1$
- $\vec{D}_{13}$  vector relativo de  $m_3$  con respecto a  $m_1$
- $\vec{D}_{23}$  vector relativo de  $m_3$  con respecto a  $m_2$

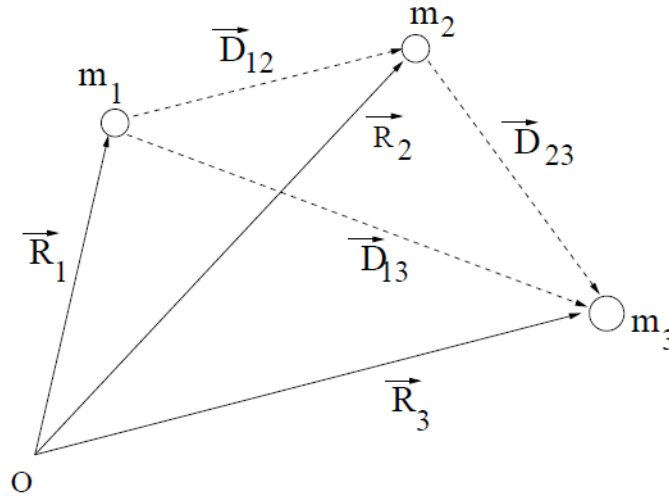


Figura 4.3: Sistema de tres cuerpos. Fuente: *Elementos de Astronomía de posición*, Portilla (2012).

La fuerza total ejercida sobre el cuerpo  $m_1$  debido a los otros dos cuerpos es, de acuerdo a la ley de gravitación universal:

$$m_1 \vec{R}_1 = G \frac{m_1 m_2}{D_{12}^3} \vec{D}_{12} + G \frac{m_1 m_3}{D_{13}^3} \vec{D}_{13} \quad (4.16)$$

Análogamente :

$$m_2 \vec{\ddot{R}}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{D_{12}^3} \vec{D}_{12} + G \frac{m_2 m_3}{D_{23}^3} \vec{D}_{23} \quad (4.17)$$

$$m_3 \vec{\ddot{R}}_3 = -G \frac{m_1 m_3}{D_{13}^3} \vec{D}_{13} - G \frac{m_2 m_3}{D_{23}^3} \vec{D}_{23} \quad (4.18)$$

son las ecuaciones de la fuerza total ejercida sobre las masas  $m_2$  y  $m_3$  respectivamente, debida a los dos cuerpos restantes.

Lo siguiente es sumar las ecuaciones 4.16 , 4.17 y 4.18 para obtener:

$$m_1 \vec{\ddot{R}}_1 + m_2 \vec{\ddot{R}}_2 + m_3 \vec{\ddot{R}}_3 = \vec{0} \quad (4.19)$$

donde integrando con respecto al tiempo

$$m_1 \vec{\dot{R}}_1 + m_2 \vec{\dot{R}}_2 + m_3 \vec{\dot{R}}_3 = \vec{P}_1 \quad (4.20)$$

Esta ecuación representa la suma de los momentos lineales de los tres cuerpos y teniendo en cuenta 4.19, se deduce que el momento lineal total es una constante de movimiento, que en el espacio, se traduce en tres constantes escalares.

Integrando nuevamente 4.20:

$$m_1 \vec{R}_1 + m_2 \vec{R}_2 + m_3 \vec{R}_3 = \vec{P}_1 t + \vec{P}_2$$

en donde teniendo en cuenta la definición de centro de masa, se deduce que :

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\vec{P}_1 t + \vec{P}_2}{m_1 + m_2 + m_3}$$

es decir, el centro de masa del sistema se desplaza con movimiento uniforme en línea recta a través del espacio. De esta manera se ha encontrado seis constantes del movimiento.

Si se reescribe las ecuaciones 4.16 , 4.17 y 4.18 de la forma:

$$m_1 \vec{\ddot{v}}_1 = G \left( \frac{m_1 m_2}{D_{12}^3} \vec{D}_{12} + \frac{m_1 m_3}{D_{13}^3} \vec{D}_{13} \right) \quad (4.21)$$

$$m_2 \vec{\ddot{v}}_2 = G \left( -\frac{m_1 m_2}{D_{12}^3} \vec{D}_{12} + \frac{m_2 m_3}{D_{23}^3} \vec{D}_{23} \right) \quad (4.22)$$

$$m_3 \vec{v}_3 = G \left( -\frac{m_1 m_3}{D_{13}^3} \vec{D}_{13} - \frac{m_2 m_3}{D_{23}^3} \vec{D}_{23} \right) \quad (4.23)$$

de la figura 4.3 y de propiedades vectoriales se deduce que :

$$\begin{aligned} \vec{R}_2 &= \vec{R}_1 + \vec{D}_{12} \\ \vec{R}_3 &= \vec{R}_1 + \vec{D}_{13} \\ \vec{R}_2 &= \vec{R}_2 + \vec{D}_{23} \\ \vec{R}_i \times \vec{R}_i &= \vec{0} \\ \vec{R}_i \times \vec{R}_j &= -(\vec{R}_j \times \vec{R}_i) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Ahora, si se multiplica 4.16 por  $\vec{R}_1 \times$ , 4.17 por  $\vec{R}_2 \times$  y 4.18 por  $\vec{R}_3 \times$ , teniendo en cuenta 4.24:

$$m_1 \vec{R}_1 \times \vec{v}_1 + m_2 \vec{R}_2 \times \vec{v}_2 + m_3 \vec{R}_3 \times \vec{v}_3 = \vec{0} \quad (4.25)$$

y dado que:

$$m_1 \vec{R}_1 \times \vec{R}_1 + m_2 \vec{R}_2 \times \vec{R}_2 + m_3 \vec{R}_3 \times \vec{R}_3 = \vec{0}$$

se puede escribir 4.25 como:

$$m_1 \frac{d}{dt} (\vec{R}_1 \times \vec{R}_1) + m_2 \frac{d}{dt} (\vec{R}_2 \times \vec{R}_2) + m_3 \frac{d}{dt} (\vec{R}_3 \times \vec{R}_3) = \vec{0}$$

o lo que es igual:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^3 \vec{R}_i \times m_i \vec{R}_i \right) = \vec{0} \quad (4.26)$$

que si se integra es:

$$\vec{L} = \left( \sum_{i=1}^3 \vec{R}_i \times m_i \vec{R}_i \right)$$

donde  $\vec{L}$  representa el *momento angular total* del sistema y puesto que se cumple 4.26, se deduce que el momento angular total del sistema se conserva. Se puede afirmar que a medida que los tres cuerpos se desplazan en el espacio, sus vectores de velocidad y posición se disponen tal que  $\vec{L}$  permanece constante y por tanto, se ha encontrado tres constantes del

movimiento adicionales.

Multiplicando 4.21 escalarmente por  $\vec{v}_1$ , 4.22 por  $\vec{v}_2$ , 4.23 por  $\vec{v}_3$  y expresando los vectores  $\vec{D}_{ij}$  como  $D_{ij}\hat{u}_{ij}$ , se puede demostrar que:

$$m_1\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_3 = -G \left[ \frac{m_1m_2}{D_{12}^2} \dot{D}_{12} + \frac{m_1m_3}{D_{13}^2} \dot{D}_{13} + \frac{m_2m_3}{D_{23}^2} \dot{D}_{23} \right] \quad (4.27)$$

y dado que:

$$\begin{aligned} \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i &= \frac{1}{2} \frac{d(\vec{v}_i)^2}{dt} \\ \frac{dD_{ij}}{dt} &= -\frac{1}{D_{ij}^2} \dot{D}_{ij} \end{aligned}$$

se puede escribir 4.27 como:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i v_i^2 \right] = G \frac{d}{dt} \left[ \frac{m_1m_2}{D_{12}} + \frac{m_1m_3}{D_{13}} + \frac{m_2m_3}{D_{23}} \right]$$

donde el término de la izquierda corresponde a la *energía cinética*  $T$  y el término de la derecha al negativo de la *energía potencial*  $V$  del sistema. Integrando ambos lados se obtiene:

$$T + V = E$$

donde  $E$  es una constante llamada *energía total del sistema*.

Como se mencionó anteriormente, si el problema de los tres cuerpos no tiene solución analítica, el problema de cuatro o más cuerpos será aún más difícil de resolver. Esto se debe a que para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales, se necesitan tantas integrales independientes como el orden del sistema. Si tenemos  $n$  cuerpos interactuando gravitacionalmente, tendremos un sistema cuyo orden es  $6n$ , lo que significa que se necesitan  $6n$  constantes de movimiento para resolver el problema.

Aunque es posible obtener diez integrales clásicas eulerianas, que incluyen seis integrales para el centro de masas, tres integrales para el momento angular y una integral de energía, sólo se pueden obtener dos constantes adicionales mediante transformaciones. En conclusión, utilizando todos los métodos disponibles, se pueden obtener  $6n - 12$  integrales independientes para el problema de  $n$  cuerpos. En el caso de tres cuerpos, que implica un sistema de orden 18,

quedan por determinar 6 integrales independientes, lo que significa que el problema no puede ser resuelto analíticamente. A pesar de los esfuerzos de los matemáticos para encontrar más constantes de movimiento, no se han encontrado más integrales independientes, por lo que los investigadores se han enfocado en probar la no existencia de más constantes de movimiento en lugar de intentar encontrar todas las constantes para un problema dado.

### 4.3.1 Problema restringido de los tres cuerpos

Se abordará el problema de los tres cuerpos mediante ciertas restricciones. Se supone que la masa  $m_3$  tiene una masa tan pequeña que su efecto gravitacional sobre  $m_1$  y  $m_2$  es despreciable. Además, las dos masas  $m_1$  y  $m_2$  realizan órbitas circulares alrededor del centro de masas del sistema. Este problema es conocido como *problema circular restringido de los tres cuerpos*.

Según Fitzpatrick (2011), si se sitúa el origen de un sistema inercial de coordenadas cartesianas  $(\xi, \eta, \zeta)$  en el centro de masa del sistema, las ecuaciones 4.12 y 4.13 se pueden escribir como:

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (4.28)$$

$$\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (4.29)$$

El plano orbital de las masas coincide con el plano  $\xi - \eta$ ,  $R$  es la distancia constante entre las masas  $m_1$  y  $m_2$ ,  $r_1$  la distancia de  $m_1$  al origen y  $r_2$  la distancia de  $m_2$  también al origen (ambas distancias constantes) como se muestra en la figura 4.5. La velocidad angular orbital es constante y será denotada como  $\omega$ .

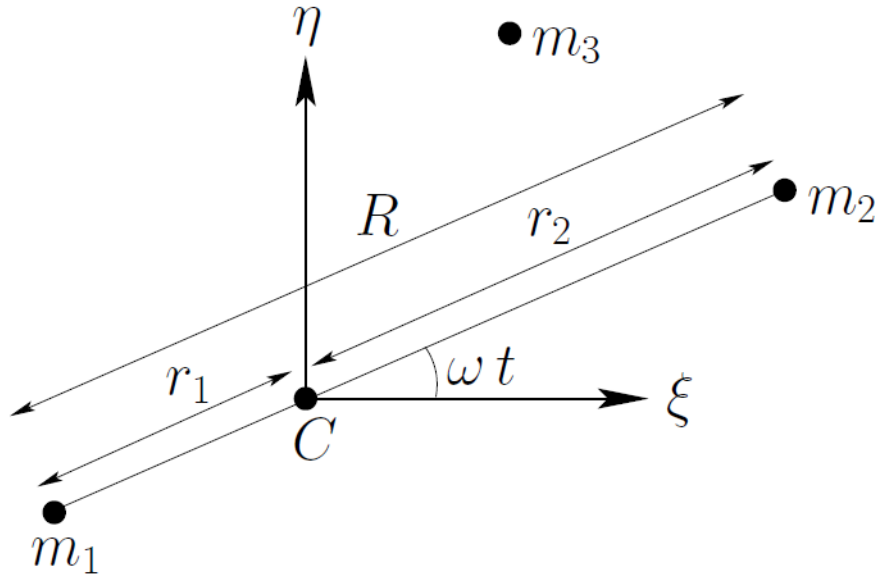


Figura 4.4: Problema restringido de los tres cuerpos en un sistema inercial. *Fuente: An introduction to celestial mechanics, Fitzpatrick (2012).*

Sea además:

$$M = m_1 + m_2$$

donde teniendo en cuenta 4.15 , 4.28 y 4.29 se puede demostrar que :

$$\omega^2 = \frac{GM}{R^3}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Es conveniente escoger la unidad de medida como  $R = 1$  y la unidad de masa como  $GM = 1$ .

Se define además:

$$\mu_1 = Gm_1 \qquad \mu_2 = Gm_2$$



de este modo:

$$\omega = 1$$

$$\mu_2 = 1 - \mu_1$$

$$r_1 = \mu_2$$

$$r_2 = \mu_1$$

$$r_2 = 1 - r_1$$

De la figura 4.5 y de las ecuaciones anteriores se deduce que los vectores posición de las masas orbitales  $m_1$  y  $m_2$  son, respectivamente:

$$\vec{\mathbf{r}}_1 = (\xi_1, \eta_1, 0) = \mu_2(-\cos(\omega t), -\sin(\omega t), 0)$$

$$\vec{\mathbf{r}}_2 = (\xi_2, \eta_2, 0) = \mu_1(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)$$

Por su parte, el vector posición de la masa  $m_3$  será denotado como  $\vec{\mathbf{r}} = (\xi, \eta, \zeta)$ . Las ecuaciones de movimiento de  $m_3$  en sus componentes cartesianas son:

$$\ddot{\xi} = -\mu_1 \frac{(\xi - \xi_1)}{\rho_1^3} - \mu_2 \frac{(\xi - \xi_2)}{\rho_2^3}$$

$$\ddot{\eta} = -\mu_1 \frac{(\eta - \eta_1)}{\rho_1^3} - \mu_2 \frac{(\eta - \eta_2)}{\rho_2^3}$$

$$\ddot{\zeta} = -\mu_1 \frac{\zeta}{\rho_1^3} - \mu_2 \frac{\zeta}{\rho_2^3}$$

donde

$$\rho_1^2 = (\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + \zeta^2$$

$$\rho_2^2 = (\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2 + \zeta^2$$

Complementemos el anterior tratamiento con el proceso realizado por Kleppner y Kolenkow (2014). Lo siguiente es considerar un sistema de referencia que rota con velocidad angular  $\omega$  alrededor de un eje normal al plano orbital de las masas  $m_1$  y  $m_2$ , y que pasa por el centro de masas. Como resultado, las masas  $m_1$  y  $m_2$  parecen estacionarias en este nuevo marco de referencia. Se define un sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  en el marco de referencia rotatorio tal que las masas  $m_1$  y  $m_2$  siempre estén en el eje  $x$ , y el eje  $z$  sea paralelo al eje  $\zeta$  definido anteriormente.

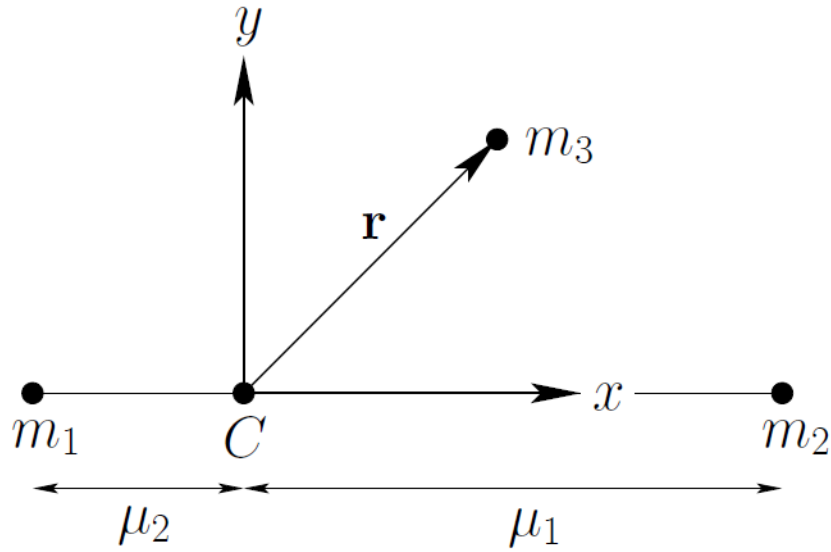


Figura 4.5: Problema restringido de los tres cuerpos en un sistema rotatorio. *Fuente: An introduction to celestial mechanics, Fitzpatrick (2012)*

De este modo, las masas  $m_1$  y  $m_2$  tienen vectores de posición fijos  $\vec{r}_1 = \mu_2(-1, 0, 0)$  y  $\vec{r}_2 = \mu_1(1, 0, 0)$ . Por su parte el vector posición de  $m_3$  será denotado como  $\vec{r} = (x, y, z)$ . La ecuación de movimiento de  $m_3$ , teniendo en cuenta 4.6, es:

$$\ddot{\vec{r}} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = -\mu_1 \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{\rho_1^3} - \mu_2 \frac{(\vec{r} - \vec{r}_2)}{\rho_2^3} - \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (4.30)$$

siendo  $\vec{\omega} = \omega(0, 0, 1)$  y:

$$\rho_1^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2$$

$$\rho_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2$$

Si se escribe 4.30 por componentes:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\omega\dot{y} &= -\mu_1 \frac{(x + \mu_2)}{\rho_1^3} - \mu_2 \frac{(x - \mu_1)}{\rho_2^3} + \omega^2 x \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} &= -\mu_1 \frac{y}{\rho_1^3} - \mu_2 \frac{y}{\rho_2^3} + \omega^2 y \\ \ddot{z} &= -\mu_1 \frac{z}{\rho_1^3} - \mu_2 \frac{z}{\rho_2^3}\end{aligned}$$

o alternativamente:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = -\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} \quad (4.31)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = -\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} \quad (4.32)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} \quad (4.33)$$

donde  $\mathfrak{U}$  es la suma de los potenciales gravitacional y centrífugo:

$$\mathfrak{U} = -\frac{\mu_1}{\rho_1} - \frac{\mu_2}{\rho_2} - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

Multiplicando 4.31, 4.32 y 4.33 por  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  y  $\dot{z}$  respectivamente:

$$\ddot{x}\dot{x} - 2\omega\dot{y}\dot{x} = -\dot{x}\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x}$$

$$\ddot{y}\dot{y} + 2\omega\dot{x}\dot{y} = -\dot{y}\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y}$$

$$\ddot{z}\dot{z} = -\dot{z}\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z}$$

sumando las anteriores expresiones se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \mathfrak{U} \right] = 0$$

es decir:

$$C = -2\mathfrak{U} - v^2$$

Esta es la integral de Jacobi, o constante de Jacobi, a veces llamada la integral de energía relativa. Su valor depende de las masas de los cuerpos involucrados y de las condiciones iniciales del sistema. Es importante destacar que aunque a veces se la llama integral de energía, en realidad no es una integral de la energía porque en el problema restringido de tres cuerpos, ni la energía ni el momento angular se conservan. La constante de Jacobi es, sin embargo, la única integral del problema restringido de tres cuerpos que se conoce.

## 4.4 Métodos numéricos

En esta sección se explicará la forma cómo resolver ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

El método a usar tiene la forma general:

$$\text{Valor nuevo} = \text{Valor anterior} + \text{pendiente} \times \text{tamaño de paso}$$

que matemáticamente se expresa como:

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

Según esta ecuación, se busca aproximar la solución de la ecuación diferencial a través de la iteración de un proceso que toma "pasos" sucesivos en el dominio de la variable independiente. Cada paso consiste en estimar la solución en un punto dado a partir de la solución obtenida en el paso anterior. De esta forma, se va construyendo una aproximación numérica de la solución en un conjunto de puntos discretos, que se van uniendo para formar una trayectoria que se aproxima a la solución exacta. Se mencionará brevemente algunos métodos de paso.

### 4.4.1 Método de Euler

En este método, se utiliza la primera derivada de la función para calcular la pendiente, es decir:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \quad (4.34)$$

donde  $f(x_i, y_i)$  es la ecuación diferencial evaluada en  $x_i$  y  $y_i$ .

Si la solución, es decir, la función que describe el comportamiento de  $y$ , tiene derivadas continuas, se puede representar mediante una expansión en series de Taylor alrededor de un valor inicial  $(x_i, y_i)$ .

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{1}{2!}f'(x_i, y_i)h^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n-1)}(x_i, y_i)h^n + O(h^{n+1}) \quad (4.35)$$

Al comparar las ecuaciones 4.34 y 4.35, se puede ver que el método de Euler corresponde a la serie de Taylor truncada en el término de la primera derivada (Chapra, 2010).

### 4.4.2 Métodos de Runge-Kutta RK

Una manera de mejorar la calidad de los resultados, según 4.35, es incluir más términos de la serie, pero esto implica calcular derivadas de orden superior. Sin embargo, existe una serie de métodos denominados *Runge-Kutta*, que logran la precisión de un enfoque de series de Taylor sin requerir el cálculo de derivadas superiores. Existen muchas variaciones, pero todas pueden expresarse en la forma generalizada de la ecuación:

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$$

donde  $\phi(x_i, y_i, h)$  se llama función de incremento, la cual puede interpretarse como una pendiente representativa sobre el intervalo.

Los métodos RK más populares son los de cuarto orden. La forma clásica del método RK4 es:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \quad (4.36)$$

donde:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + h\frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + h\frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + hk_3) \end{aligned} \quad (4.37)$$

El método RK4 es conocido por su alta precisión, ya que el error global de truncamiento es del orden  $O(h^4)$ . Además, es relativamente fácil de implementar y puede manejar una amplia gama de ecuaciones diferenciales ordinarias.

### 4.4.3 Sistemas de ecuaciones diferenciales

El problema que se aborda en este proyecto requiere la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias simultáneas en lugar de una sola ecuación. Dichos sistemas se pueden

representar de manera general como:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\end{aligned}$$

La solución de tal sistema requiere que se conozcan  $n$  condiciones iniciales en el valor inicial de  $x$ . En el desarrollo del trabajo se adapta el método de RK4 para la solución del sistema de ecuaciones del problema en cuestión.

## Capítulo 5

# PROBLEMA DE LOS CUATRO CUERPOS

En este capítulo se deducen las ecuaciones de movimiento del problema de los cuatro cuerpos. Consideremos el siguiente diagrama:

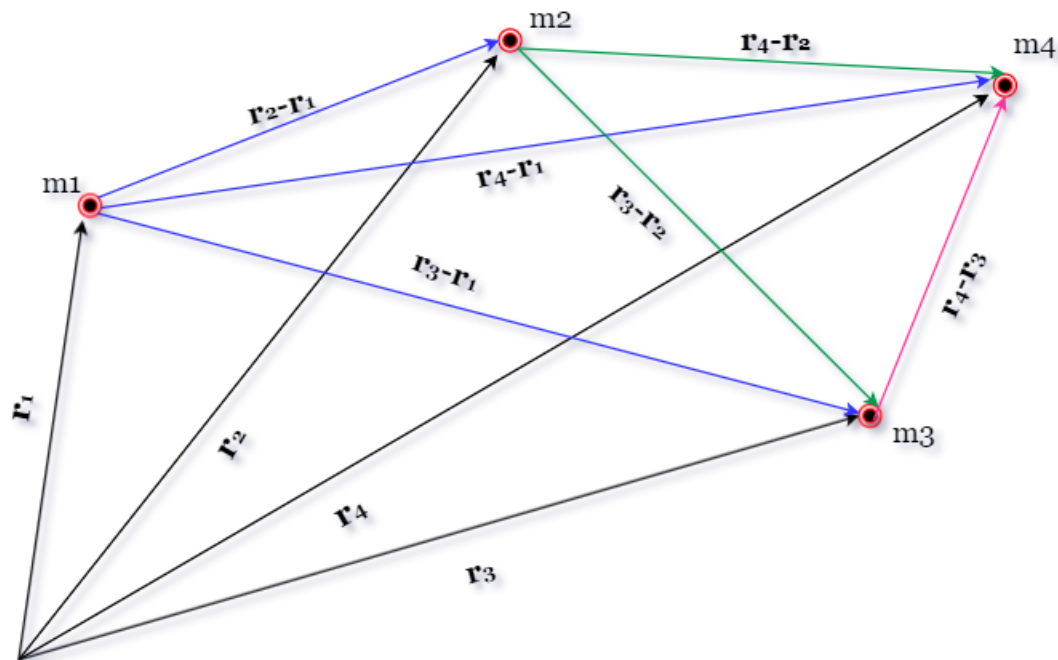


Figura 5.1: Sistema de cuatro cuerpos. *Fuente: elaboración propia.*

En la figura 5.1 se muestran los vectores posición de las cuatro masas del problema con respecto a un sistema de referencia inercial, así como los vectores de posición relativos entre las masas. Al aplicar la *Ley de Gravitación Universal* a los cuerpos en cuestión, se obtienen

las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = Gm_1m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} + Gm_1m_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} + Gm_1m_4 \frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_1|^3}$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -Gm_1m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} + Gm_2m_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} + Gm_2m_4 \frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_2|^3}$$

$$m_3 \ddot{\vec{r}}_3 = -Gm_1m_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} - Gm_2m_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} + Gm_3m_4 \frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_3|^3}$$

$$m_4 \ddot{\vec{r}}_4 = -Gm_1m_4 \frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_1|^3} - Gm_2m_4 \frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_2|^3} - Gm_3m_4 \frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_3|^3}$$

Lo siguiente es trasladar el origen del sistema de referencia de tal forma que este coincida con la masa  $m_1$ . Definiendo ahora los vectores relativos como:

- $\vec{R}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  vector relativo de  $m_2$  con respecto a  $m_1$ .
- $\vec{R}_3 = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$  vector relativo de  $m_3$  con respecto a  $m_1$ .
- $\vec{R}_4 = \vec{r}_4 - \vec{r}_1$  vector relativo de  $m_4$  con respecto a  $m_1$ .

Con esto en cuenta, se puede escribir las ecuaciones de movimiento como:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = Gm_2 \frac{\vec{R}_2}{|\vec{R}_2|^3} + Gm_3 \frac{\vec{R}_3}{|\vec{R}_3|^3} + Gm_4 \frac{\vec{R}_4}{|\vec{R}_4|^3} \quad (5.1)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -Gm_1 \frac{\vec{R}_2}{|\vec{R}_2|^3} + Gm_3 \frac{\vec{R}_3 - \vec{R}_2}{|\vec{R}_3 - \vec{R}_2|^3} + Gm_4 \frac{\vec{R}_4 - \vec{R}_2}{|\vec{R}_4 - \vec{R}_2|^3} \quad (5.2)$$

$$\ddot{\vec{r}}_3 = -Gm_1 \frac{\vec{R}_3}{|\vec{R}_3|^3} - Gm_2 \frac{\vec{R}_3 - \vec{R}_2}{|\vec{R}_3 - \vec{R}_2|^3} + Gm_4 \frac{\vec{R}_4 - \vec{R}_3}{|\vec{R}_4 - \vec{R}_3|^3}$$



$$\vec{r}_4 = -Gm_1 \frac{\vec{R}_4}{|\vec{R}_4|^3} - Gm_2 \frac{\vec{R}_4 - \vec{R}_2}{|\vec{R}_4 - \vec{R}_2|^3} - Gm_3 \frac{\vec{R}_4 - \vec{R}_3}{|\vec{R}_4 - \vec{R}_3|^3}$$

Restando 5.1 de 5.2 se obtiene:

$$\vec{R}_2 = Gm_3 \left[ \frac{\vec{R}_3 - \vec{R}_2}{|\vec{R}_3 - \vec{R}_2|^3} - \frac{\vec{R}_3}{|\vec{R}_3|^3} \right] + Gm_4 \left[ \frac{\vec{R}_4 - \vec{R}_2}{|\vec{R}_4 - \vec{R}_2|^3} - \frac{\vec{R}_4}{|\vec{R}_4|^3} \right] - G(m_1 + m_2) \frac{\vec{R}_2}{|\vec{R}_2|^3} \quad (5.3)$$

Estas ecuaciones no son intuitivas. Esto es porque el origen de coordenadas se encuentra en un sistema no inercial. Ahora, se aplicará 5.3 al sistema de interés: la Tierra, Venus, la Luna y la nave espacial. La denominación es la siguiente:

Para las masas:

- $T = m_1$  Masa de la Tierra.
- $S = m_2$  Masa de la nave.
- $M = m_3$  Masa de la Luna.
- $V = m_4$  Masa de Venus.

Para los vectores posición:

- $\vec{r} = \vec{R}_2$  Vector posición de la nave espacial con respecto a la Tierra.
- $\vec{r}_m = \vec{R}_3$  Vector posición de la Luna con respecto a la Tierra.
- $\vec{r}_v = \vec{R}_4$  Vector posición Venus con respecto a la Tierra.

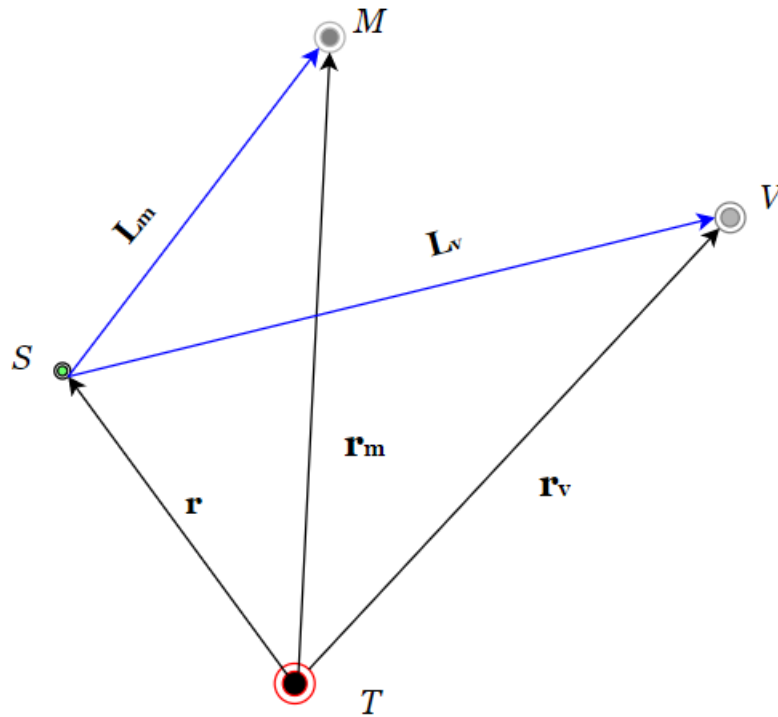


Figura 5.2: Sistema de cuatro cuerpos con origen en la Tierra. *Fuente: elaboración propia.*

Con esta convención y despreciando la masa de la nave espacial por resultar excesivamente pequeña en comparación con la masa de los cuerpos celestes, la ecuación 5.3 se reescribe como:

$$\ddot{\vec{r}} = -GT \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + GM \left[ \frac{\vec{r}_m - \vec{r}}{|\vec{r}_m - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}_m}{|\vec{r}_m|^3} \right] + GV \left[ \frac{\vec{r}_v - \vec{r}}{|\vec{r}_v - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^3} \right] \quad (5.4)$$

Esta es la ecuación general del movimiento de la nave sometida al campo gravitacional de los tres cuerpos masivos. Ahora, se define un par de vectores de posición relativos entre la nave y la Luna y entre la nave y Venus:

$$\vec{L}_m = \vec{r}_m - \vec{r} \quad (5.5)$$

$$\vec{L}_v = \vec{r}_v - \vec{r} \quad (5.6)$$

El siguiente paso es definir un nuevo sistema de unidades. Para esto, se va a utilizar la misma

convención de Danby (1997) en su libro *Computer modeling: from sports to spaceflight... from order to chaos*:

- Masa de la Tierra  $T = 1$
- La unidad de tiempo se escoge de tal forma que la constante de Cavendish sea  $G = 1$
- Distancia entre la Tierra y la Luna  $d = 1$

De este modo, la masa de la Luna en este sistema es:

$$M = \frac{7.349 \times 10^{22} \text{ kg}}{5.972 \times 10^{24} \text{ kg/um}} = 0.0123 \text{ um} \quad (5.7)$$

Análogamente para Venus:

$$V = \frac{4.867 \times 10^{24} \text{ kg}}{5.972 \times 10^{24} \text{ kg/um}} = 0.8149 \text{ um} \quad (5.8)$$

De la tercera ley de Kepler se puede deducir que si una masa  $m_1$  gira alrededor de una masa  $m_2$  en una órbita elíptica con semieje mayor  $a$ , el periodo de revolución viene dado por:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G(m_1 + m_2)}} \quad (5.9)$$

El periodo de traslación de la Luna con respecto a estrellas fijas se denomina *mes sideral* y es de 27.32 días. Por tanto, en el nuevo sistema de unidades:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{1}{1 + 0.0123}} = 6.245 \text{ ut} \quad (5.10)$$

Es decir, que una unidad de tiempo en el nuevo sistema equivale a:

$$\frac{27.320 \text{ días}}{6.245 \text{ ut}} = 4.375 \text{ días/ut} \quad (5.11)$$

y por tanto la unidad de velocidad es equivalente a:

$$1 \text{ uv} = \frac{\text{ul}}{\text{ut}} = \frac{384400 \text{ km}}{4.375 \text{ días}} = 1.017 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad (5.12)$$

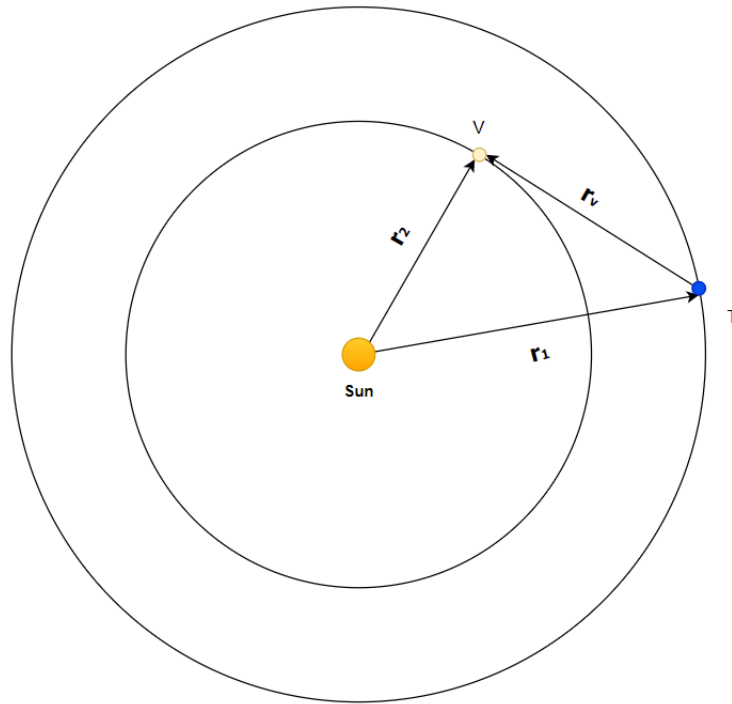


Figura 5.3: Movimiento de Venus y la Tierra. *Fuente: elaboración propia.*

Ahora, como se está trabajando con órbitas bidimensionales, las componentes cartesianas del movimiento de la Luna con respecto a la Tierra son:

$$x_m = \cos(nt + \phi_L) \quad (5.13)$$

$$y_m = \sin(nt + \phi_L) \quad (5.14)$$

$$n = \frac{2\pi}{P_m} = \sqrt{1 + M} \quad (5.15)$$

donde la cantidad  $\phi_L$  es una fase que permite ubicar a la Luna en la posición deseada al inicio del viaje.

Por otro lado, se debe deducir las ecuaciones de movimiento de Venus con respecto a la Tierra. Consideremos la Figura 5.3:

En la Figura 5.3 se puede observar que el vector de posición de Venus con respecto a la Tierra es:

$$\vec{r}_v = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (5.16)$$

donde  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  son los vectores de posición de la Tierra y Venus respectivamente, con respecto al Sol. Si se asume órbitas circulares, estos vectores vienen dados por:

$$\vec{r}_1 = d_T \cos(n_T t) \hat{i} + d_T \sin(n_T t) \hat{j} \quad (5.17)$$

$$\vec{r}_2 = d_v \cos(n_v t) \hat{i} + d_v \sin(n_v t) \hat{j} \quad (5.18)$$

donde  $d_T$  y  $n_T$  es el radio orbital medio y la frecuencia de traslación de la Tierra respectivamente y  $d_v$  y  $n_v$  son los parámetros correspondientes para Venus.

De este modo, las componentes de  $\vec{r}_v$  son:

$$x_v = d_v \cos(n_v t) - d_T \cos(n_T t) \quad (5.19)$$

$$y_v = d_v \sin(n_v t) - d_T \sin(n_T t) \quad (5.20)$$

Sin embargo, es necesario añadir un parámetro extra a las ecuaciones 5.19 y 5.20 que permita ubicar a Venus en una posición específica de su órbita con respecto a la Tierra al inicio del movimiento. Dicho parámetro se define como  $\phi_v$ , tiene unidades de tiempo y formará parte de las condiciones iniciales del problema. Por tanto:

$$x_v = d_v \cos(n_v(t + \phi_v)) - d_T \cos(n_T(t + \phi_v)) \quad (5.21)$$

$$y_v = d_v \sin(n_v(t + \phi_v)) - d_T \sin(n_T(t + \phi_v)) \quad (5.22)$$

Lo siguiente es determinar el valor numéricos de las cantidades  $d_T$ ,  $n_T$ ,  $d_v$  y  $n_v$  en el nuevo sistema de unidades.

Dado que en el nuevo sistema de unidades, la unidad de longitud  $ul$  es igual al radio medio de la órbita de la Luna :

$$d_T = 1 \text{ ua} = \frac{149597870.70 \text{ km}}{384400.00 \text{ km}/ul} = 389.17 \text{ ul} \quad (5.23)$$

$$d_v = 0.7233 \text{ ua} = \frac{108204139.90 \text{ km}}{384400.00 \text{ km}/ul} = 281.49 \text{ ul} \quad (5.24)$$

Por su parte, en el nuevo sistema de unidades cada unidad de tiempo  $ut$  corresponde a 4.375

días, por tanto el periodo de traslación de la Tierra es:

$$P_T = \frac{365.250 \text{ días}}{4.375 \text{ días/ut}} = 83.486 \text{ ut} \quad (5.25)$$

y como el periodo de traslación de venus es 0.6152 veces el de la Tierra:

$$P_v = 51.360 \text{ ut} \quad (5.26)$$

de este modo, las frecuencias de traslación para la Tierra y Venus son, respectivamente:

$$n_T = \frac{2\pi}{P_T} = 0.0753 \text{ ut}^{-1} \quad (5.27)$$

$$n_v = \frac{2\pi}{P_v} = 0.1223 \text{ ut}^{-1} \quad (5.28)$$

Con esto, se ha transformado los parámetros de las ecuaciones 5.21 y 5.22 al nuevo sistema de unidades.

Por otro lado, para los vectores de posición de la nave relativos a la Tierra, la Luna y Venus  $\vec{r}$ ,  $\vec{L}_m$  y  $\vec{L}_v$  respectivamente, se tiene que:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (5.29)$$

$$L_m^2 = (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 \quad (5.30)$$

$$L_v^2 = (x - x_v)^2 + (y - y_v)^2 \quad (5.31)$$

Reescribiendo la ecuación 5.4 en sus componentes cartesianas con las nuevas definiciones:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r^3} + M \left[ \frac{x_m - x}{L_m^3} - x_m \right] + V \left[ \frac{x_v - x}{L_v^3} - \frac{x_v}{|\vec{r}_v|^3} \right] \quad (5.32)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{r^3} + M \left[ \frac{y_m - y}{L_m^3} - y_m \right] + V \left[ \frac{y_v - y}{L_v^3} - \frac{y_v}{|\vec{r}_v|^3} \right] \quad (5.33)$$

Lo siguiente es definir nuevas variables con el fin de reducir el orden de las ecuaciones difer-

enciales 5.32 y 5.33:

$$\begin{aligned}y_1 &= x \\y_2 &= \frac{dx}{dt} \\y_3 &= y \\y_4 &= \frac{dy}{dt}\end{aligned}$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas que se obtiene es:

$$\begin{aligned}\frac{dy_2}{dt} &= -\frac{y_1}{(y_1^2 + y_3^2)^{3/2}} + M \left[ \frac{x_m - y_1}{[(y_1 - x_m)^2 + (y_3 - y_m)^2]^{3/2}} - x_m \right] \\&\quad + V \left[ \frac{x_v - y_1}{[(y_1 - x_v)^2 + (y_3 - y_v)^2]^{3/2}} - \frac{x_v}{|\vec{\mathbf{r}}_v|^3} \right] \\[10pt]\frac{dy_4}{dt} &= -\frac{y_3}{(y_1^2 + y_3^2)^{3/2}} + M \left[ \frac{y_m - y_3}{[(y_1 - x_m)^2 + (y_3 - y_m)^2]^{3/2}} - y_m \right] \\&\quad + V \left[ \frac{y_v - y_3}{[(y_1 - x_v)^2 + (y_3 - y_v)^2]^{3/2}} - \frac{y_v}{|\vec{\mathbf{r}}_v|^3} \right]\end{aligned}\tag{5.34}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= y_2 \\[10pt]\frac{dy_3}{dt} &= y_4\end{aligned}$$

Expresando las ecuaciones de forma explícita:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_2}{dt} &= -\frac{y_1}{(y_1^2 + y_3^2)^{3/2}} + M \left[ \frac{\cos(nt + \phi_L) - y_1}{\{[y_1 - \cos(nt + \phi_L)]^2 + [y_3 - \sin(nt + \phi_L)]^2\}^{3/2}} - \cos(nt + \phi_L) \right] + \\
&V \left[ \frac{d_v \cos(n_v(t + \phi_v)) - d_T \cos(n_T(t + \phi_v)) - y_1}{\{[y_1 - d_v \cos(n_v(t + \phi_v)) + d_T \cos(n_T(t + \phi_v))]^2 + [y_3 - d_v \sin(n_v(t + \phi_v)) + d_T \sin(n_T(t + \phi_v))]^2\}^{3/2}} - \right. \\
&\left. \frac{d_v \cos(n_v(t + \phi_v)) - d_T \cos(n_T(t + \phi_v))}{\{[d_v \cos(n_v(t + \phi_v)) - d_T \cos(n_T(t + \phi_v))]^2 + [d_v \sin(n_v(t + \phi_v)) - d_T \sin(n_T(t + \phi_v))]^2\}^{3/2}} \right] \\
\frac{dy_4}{dt} &= -\frac{y_3}{(y_1^2 + y_3^2)^{3/2}} + M \left[ \frac{\sin(nt + \phi_L) - y_3}{\{[y_1 - \cos(nt + \phi_L)]^2 + [y_3 - \sin(nt + \phi_L)]^2\}^{3/2}} - \sin(nt + \phi_L) \right] + \\
&V \left[ \frac{d_v \sin(n_v(t + \phi_v)) - d_T \sin(n_T(t + \phi_v)) - y_3}{\{[y_1 - d_v \cos(n_v(t + \phi_v)) + d_T \cos(n_T(t + \phi_v))]^2 + [y_3 - d_v \sin(n_v(t + \phi_v)) + d_T \sin(n_T(t + \phi_v))]^2\}^{3/2}} - \right. \\
&\left. \frac{d_v \sin(n_v(t + \phi_v)) - d_T \sin(n_T(t + \phi_v))}{\{[d_v \cos(n_v(t + \phi_v)) - d_T \cos(n_T(t + \phi_v))]^2 + [d_v \sin(n_v(t + \phi_v)) - d_T \sin(n_T(t + \phi_v))]^2\}^{3/2}} \right] \\
\frac{dy_1}{dt} &= y_2 \\
\frac{dy_3}{dt} &= y_4
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Es evidente la complejidad del sistema de ecuaciones diferenciales acopladas que gobiernan el movimiento y por tanto, se resalta la utilidad de los métodos numéricos para la solución de este tipo de problemas. Con la deducción de estas ecuaciones se ha cumplido el primer objetivo específico del proyecto.



Lo siguiente es realizar una comparación de las ecuaciones diferenciales en su forma compacta 5.34, con las obtenidas por Danby (1997) en su libro, en la sección 11.2 titulada *A trip to the Moon*, en la que se deduce las ecuaciones diferenciales para el problema de los tres cuerpos de un viaje a la Luna.

Si en 5.34 no se considera a Venus, la cantidad  $V$  que corresponde a la masa del planeta se anula. Por tanto se obtiene, para el primer par de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{dy_2}{dt} &= -\frac{y_1}{(y_1^2 + y_3^2)^{3/2}} + M \left[ \frac{x_m - y_1}{[(y_1 - x_m)^2 + (y_3 - y_m)^2]^{3/2}} - x_m \right] \\ \frac{dy_4}{dt} &= -\frac{y_3}{(y_1^2 + y_3^2)^{3/2}} + M \left[ \frac{y_m - y_3}{[(y_1 - x_m)^2 + (y_3 - y_m)^2]^{3/2}} - y_m \right]\end{aligned}\quad (5.36)$$

que tienen la misma estructura que las ecuaciones mencionadas, tal como fue pronosticado. Otra diferencia importante se encuentra en las ecuaciones 5.13 y 5.14. La fase  $\phi_L$  no se encuentra en las ecuaciones de Danby, y como se explicó previamente, su inclusión permite seleccionar la posición inicial deseada para la Luna. Esto brinda un mayor control sobre la trayectoria de la nave, ya que su movimiento no está limitado únicamente por el ángulo de lanzamiento para el encuentro con la Luna. Si este ángulo fuera 0, se obtendrían las mismas ecuaciones para  $x_m$  y  $y_m$  del libro mencionado, lo que implica que el sistema de ecuaciones diferenciales sería el mismo. Por lo tanto, las ecuaciones del proyecto de Danby representan un caso particular de las deducidas en este proyecto, como era de esperarse. En las ecuaciones (5.35), se puede observar que los parámetros  $V$  y  $\phi_L$  complican enormemente el sistema, pero al mismo tiempo lo hacen mucho más interesante, ampliando el estudio de los tres cuerpos a uno de cuatro cuerpos. Con esta comparación realizada, se ha cumplido el segundo objetivo específico.

## 5.1 Ajuste del método de RK4 para el sistema de ecuaciones diferenciales

La forma de resolver el sistema de ecuaciones es aplicar el método RK4 para cada una de las ecuaciones en cada uno de los pasos. Lo primero es calcular las pendientes para todas las variables en el valor inicial. Esas pendientes, que son el conjunto de los  $k_1$ , son utilizadas para hacer predicciones de la variable dependiente en el punto medio del intervalo. Estos valores intermedios se utilizan a su vez para calcular un conjunto de pendientes en el punto intermedio (los  $k_2$ ). Estas nuevas pendientes se llevan de vuelta al punto de partida para hacer otro conjunto de predicciones en el punto intermedio que conducen a nuevas predicciones de pendientes en el punto intermedio (los  $k_3$ ). Estas se utilizan luego para hacer predicciones al final del intervalo que se utilizan para desarrollar pendientes al final del intervalo (los  $k_4$ ). Por último, los  $k$  se combinan en un conjunto de funciones de incremento y se llevan de vuelta al principio para hacer la predicción final. Aplicando las ecuaciones 4.37 al sistema de cuatro ecuaciones diferenciales, se tiene que:

$$k_{11} = f_1(t[i], y_1[i], y_2[i], y_3[i], y_4[i])$$

$$k_{12} = f_2(t[i], y_1[i], y_2[i], y_3[i], y_4[i])$$

$$k_{13} = f_3(t[i], y_1[i], y_2[i], y_3[i], y_4[i])$$

$$k_{14} = f_4(t[i], y_1[i], y_2[i], y_3[i], y_4[i])$$

$$k_{21} = f_1\left(t[i] + \frac{h}{2}, y_1[i] + \frac{k_{11}h}{2}, y_2[i] + \frac{k_{12}h}{2}, y_3[i] + \frac{k_{13}h}{2}, y_4[i] + \frac{k_{14}h}{2}\right)$$

$$k_{22} = f_2\left(t[i] + \frac{h}{2}, y_1[i] + \frac{k_{11}h}{2}, y_2[i] + \frac{k_{12}h}{2}, y_3[i] + \frac{k_{13}h}{2}, y_4[i] + \frac{k_{14}h}{2}\right)$$

$$k_{23} = f_3\left(t[i] + \frac{h}{2}, y_1[i] + \frac{k_{11}h}{2}, y_2[i] + \frac{k_{12}h}{2}, y_3[i] + \frac{k_{13}h}{2}, y_4[i] + \frac{k_{14}h}{2}\right)$$

$$k_{24} = f_4\left(t[i] + \frac{h}{2}, y_1[i] + \frac{k_{11}h}{2}, y_2[i] + \frac{k_{12}h}{2}, y_3[i] + \frac{k_{13}h}{2}, y_4[i] + \frac{k_{14}h}{2}\right)$$

$$k_{31} = f_1\left(t[i] + \frac{h}{2}, y_1[i] + \frac{k_{21}h}{2}, y_2[i] + \frac{k_{22}h}{2}, y_3[i] + \frac{k_{23}h}{2}, y_4[i] + \frac{k_{24}h}{2}\right) \quad (5.37)$$

$$k_{32} = f_2\left(t[i] + \frac{h}{2}, y_1[i] + \frac{k_{21}h}{2}, y_2[i] + \frac{k_{22}h}{2}, y_3[i] + \frac{k_{23}h}{2}, y_4[i] + \frac{k_{24}h}{2}\right)$$

$$k_{33} = f_3\left(t[i] + \frac{h}{2}, y_1[i] + \frac{k_{21}h}{2}, y_2[i] + \frac{k_{22}h}{2}, y_3[i] + \frac{k_{23}h}{2}, y_4[i] + \frac{k_{24}h}{2}\right)$$

$$k_{34} = f_4\left(t[i] + \frac{h}{2}, y_1[i] + \frac{k_{21}h}{2}, y_2[i] + \frac{k_{22}h}{2}, y_3[i] + \frac{k_{23}h}{2}, y_4[i] + \frac{k_{24}h}{2}\right)$$

$$k_{41} = f_1(t[i] + h, y_1[i] + k_{31}h, y_2[i] + k_{32}h, y_3[i] + k_{33}h, y_4[i] + k_{34}h)$$

$$k_{42} = f_2(t[i] + h, y_1[i] + k_{31}h, y_2[i] + k_{32}h, y_3[i] + k_{33}h, y_4[i] + k_{34}h)$$

$$k_{43} = f_3(t[i] + h, y_1[i] + k_{31}h, y_2[i] + k_{32}h, y_3[i] + k_{33}h, y_4[i] + k_{34}h)$$

$$k_{44} = f_4(t[i] + h, y_1[i] + k_{31}h, y_2[i] + k_{32}h, y_3[i] + k_{33}h, y_4[i] + k_{34}h)$$

por lo que la ecuación 4.36 aplicada a cada una de las variables dependientes de este sistema resulta en:

$$\begin{aligned}
y_1[i+1] &= y_1[i] + \frac{k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41}}{6}h \\
y_2[i+1] &= y_2[i] + \frac{k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42}}{6}h \\
y_3[i+1] &= y_3[i] + \frac{k_{13} + 2k_{23} + 2k_{33} + k_{43}}{6}h \\
y_4[i+1] &= y_4[i] + \frac{k_{14} + 2k_{24} + 2k_{34} + k_{44}}{6}h
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Ahora, para poder aplicar las anteriores ecuaciones se debe tener ciertas condiciones iniciales, estas se dividen en dos partes:

### Condiciones iniciales de lanzamiento

- **Altura:** Este valor corresponde a la altura de la órbita de parqueo circular, medida desde la superficie de la Tierra.
- **Velocidad Inicial  $V_o$ :** corresponde al valor de rapidez de la nave al inicio del movimiento.
- **Ángulo de lanzamiento  $\alpha$ :** Ángulo entre el radio  $r_o$  y el eje  $y$  negativo.

Con estas condiciones se puede ajustar la posición y velocidad inicial de la nave.

La altura de la órbita de parqueo se puede asociar al radio de la misma teniendo en cuenta el siguiente diagrama, realizado por Basante (2013):

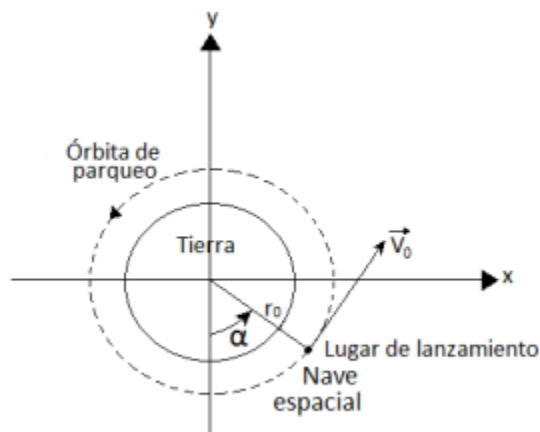


Figura 5.4: Condiciones de lanzamiento iniciales

Entonces, el radio de la órbita de parqueo es, en el nuevo sistema de unidades:

$$r_o = \frac{6378 + \text{Altura}}{384400} \quad (5.39)$$

donde se tiene en cuenta que se debe sumar el radio de la Tierra y la altura se debe expresar en kilómetros. Teniendo en cuenta estas condiciones y la Figura 5.4, los valores iniciales de las variables dependientes son:

$$\begin{aligned} y_1[0] &= r_o \sin(\alpha) \\ y_2[0] &= V_o \cos(\alpha) \\ y_3[0] &= -r_o \cos(\alpha) \\ y_4[0] &= V_o \sin(\alpha) \end{aligned} \quad (5.40)$$

### Condiciones iniciales de los cuerpos celestes

- **Posición inicial de la Luna  $\phi_L$ :** el ángulo  $\phi_L$  permite ubicar al satélite en cualquier punto de su órbita alrededor de la Tierra al inicio del movimiento. Por ejemplo:

1. Si  $\phi_L = 0$ , la posición inicial de la Luna es (1,0)
2. Si  $\phi_L = 90$ , la posición inicial de la Luna es (0,1)
3. Si  $\phi_L = 180$ , la posición inicial de la Luna es (-1,0)

y de la misma manera para cualquier ángulo  $\phi_L$ .

- **Posición inicial de Venus  $\phi_v$ :** Esta fase se mide en días. Se toma como referencia el eje  $x$  negativo. Por ejemplo:

1. Si  $\phi_v = 0$ , el movimiento de Venus inicia desde el eje  $x$  negativo.
2. Si  $\phi_v = n$ , el movimiento de Venus está adelantado  $n$  días con respecto al eje  $x$  negativo, es decir que su posición inicial se encuentra en las coordenadas que Venus tendría  $n$  días después de iniciar su movimiento en el eje de referencia.
3. Si  $\phi_v = -n$ , el movimiento de Venus está atrasado  $n$  días con respecto al eje  $x$  negativo, es decir que Venus llegará a este eje  $n$  días después de iniciado el movimiento.

# Capítulo 6

## RESULTADOS

El código de programación está diseñado de tal forma que permite obtener características importantes del viaje *para cualquier instante de tiempo*, tales como:

1. Distancia a la Luna
2. Distancia a la Tierra
3. Distancia a Venus
4. Velocidad de la Nave

**Nota:** En la descripción de los resultados, a menudo se utiliza indistintamente la palabra "velocidad" y "rapidez" para referirse a la magnitud del vector velocidad. Esto se hace únicamente con el fin de mejorar la redacción del texto, ya que se menciona este concepto con frecuencia. Sin embargo, es importante tener en cuenta el significado físico preciso. Cuando se produce un cambio en la dirección, se especifica claramente para evitar confusiones y distinguir adecuadamente el fenómeno que ha ocurrido.

### 6.1 LIMITACIONES Y ASPECTOS A TENER EN CUENTA

Pese a que previamente se mencionó las simplificaciones del problema, es necesario aclarar que:

- El programa está diseñado para simular un viaje bidimensional.
- Se asume que las órbitas de los cuerpos celestes, incluyendo la Luna, Venus y la Tierra, son circulares al deducir las ecuaciones de movimiento relativo entre Venus y la Tierra. Esta suposición se basa principalmente en las bajas excentricidades de estas órbitas, ya que en la práctica son muy cercanas a la forma circular.

- No se ha tenido en cuenta el volumen de los cuerpos celestes en este estudio. Dado que se considera que los cuerpos son masas puntuales, el código ha sido diseñado para mostrar una circunferencia en la posición de cada cuerpo. Estas representaciones visuales tienen la finalidad de brindar una idea general de la ubicación de los cuerpos, pero no están a escala en términos del tamaño real de los cuerpos. Son simplemente una herramienta visual que facilita la observación del movimiento de los cuerpos involucrados.
- El código ha sido diseñado para permitir la modificación de la posición de la Luna y Venus según sea necesario. Sin embargo, es importante destacar que en un viaje real se requeriría un estudio exhaustivo de las posiciones precisas de los cuerpos celestes, y es poco probable que se logren replicar las condiciones iniciales exactas que se muestran aquí. Si se desea realizar una simulación con posiciones más precisas, se debe llevar a cabo un estudio utilizando efemérides. Las efemérides son tablas o registros que contienen información detallada sobre la posición y los eventos astronómicos de los cuerpos celestes, como planetas, lunas, cometas y asteroides, en un momento específico en el tiempo. Estos registros incluyen datos como las coordenadas de posición, las distancias, las velocidades, los ángulos, las fases y otros parámetros relevantes. Sin embargo, este tipo de estudio es complejo y está más allá del alcance de este trabajo en particular.
- Las imágenes de fondo que se muestran en las gráficas de las trayectorias tienen un propósito puramente estético y no deben interpretarse como una representación visual precisa de la realidad. Su uso se limita a mejorar la presentación visual de las gráficas y no tienen ningún efecto sobre las trayectorias reales de los cuerpos.

## 6.2 Viajes a la Luna

Danby (1997), en la sección 11.2 *A trip to the moon*, proporciona algunas gráficas para viajes a la Luna, dadas las condiciones iniciales específicas. Se utilizó estas gráficas como referencia para determinar si el código funciona correctamente.

## 6.2.1 Viaje VL1

| Condición Inicial | Valor     | Condición Inicial  | Valor |
|-------------------|-----------|--------------------|-------|
| Altura            | 100.0 km  | Ángulo de despegue | -39°  |
| Velocidad Inicial | 11.0 km/s | Fase lunar inicial | 0°    |

Tabla 6.1: Condiciones Iniciales VL1

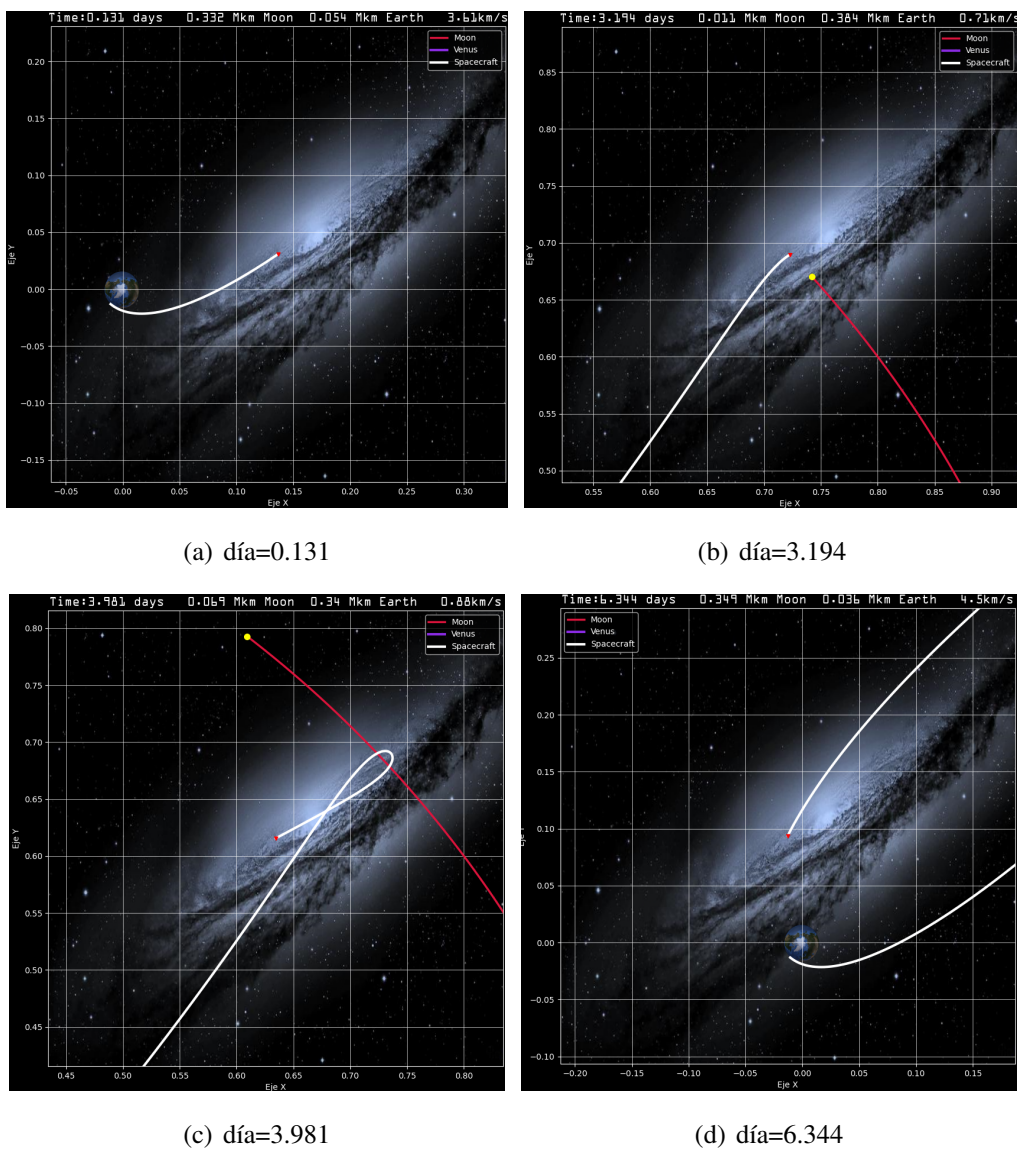


Figura 6.1: Escalas VL1



## VIAJE COMPLETO

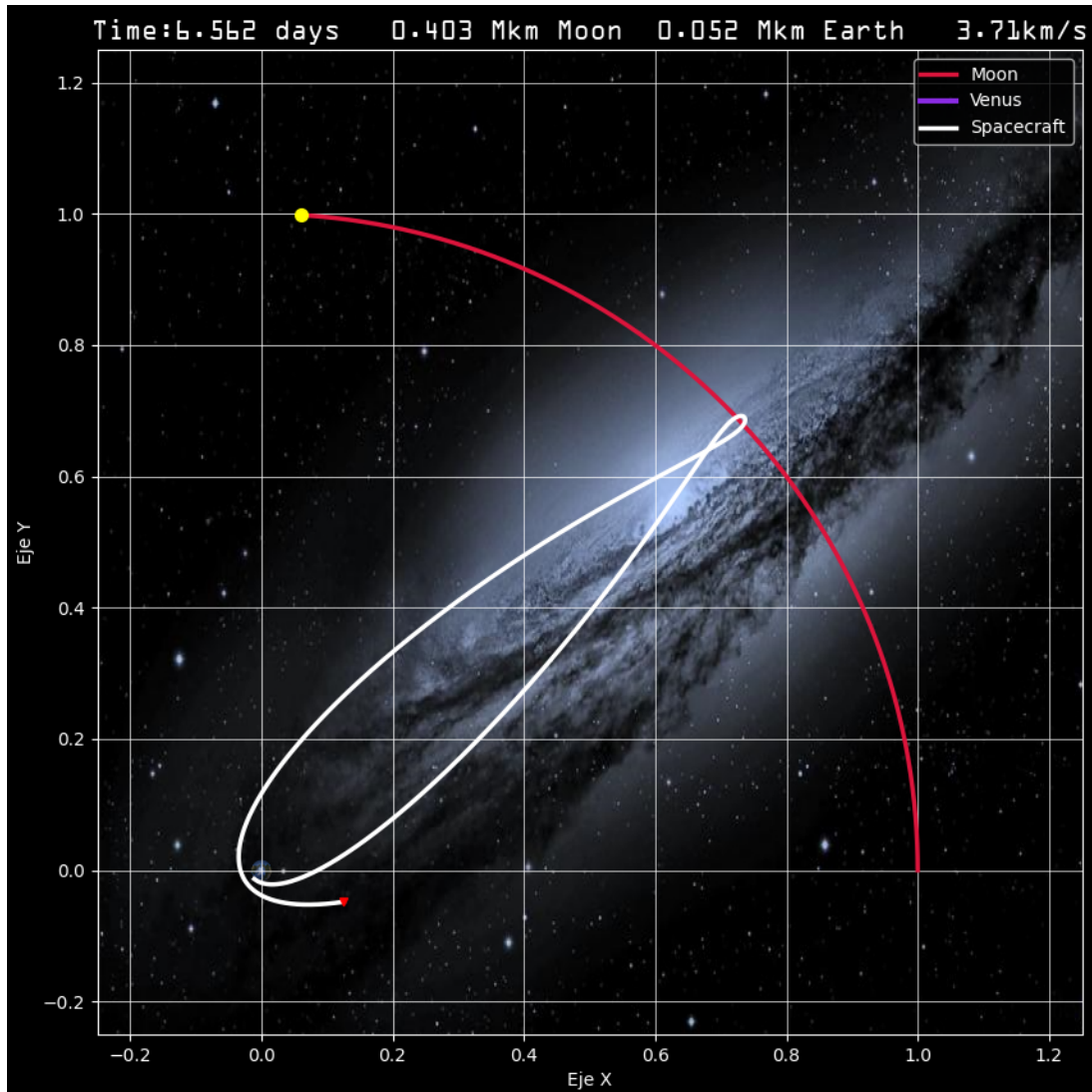


Figura 6.2: Viaje completo.

**Nota:** Para el viaje a la Luna, la condición correspondiente a la fase de Venus  $\phi_v$  es irrelevante, debido a la enorme distancia que se encuentra Venus de nuestro satélite (Incluso en el punto más cercano de la órbita de Venus).

|   | Característica              | Distancia (km)   |
|---|-----------------------------|------------------|
| 1 | Menor distancia a la Luna   | 3409.403         |
| 2 | Mayor distancia a la Tierra | 387816.894       |
|   | Característica              | Velocidad (km/s) |
| 3 | Menor velocidad alcanzada   | 0.68             |
| 4 | Mayor velocidad alcanzada   | 11.00            |

Tabla 6.2: Característica principales VL1. Día 7.

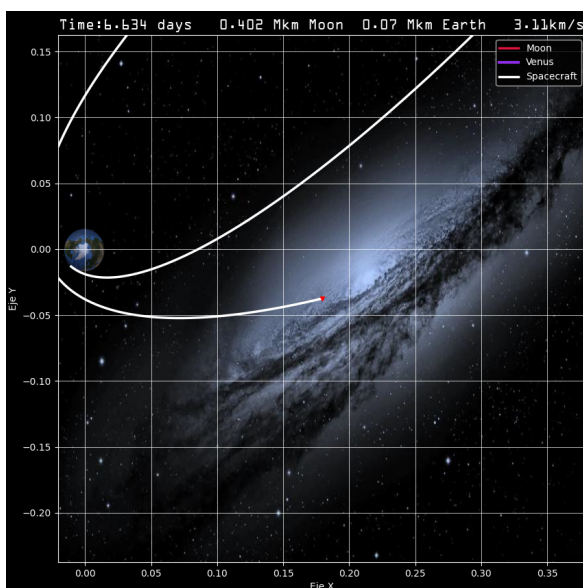
El viaje VL1 consiste en llegar desde la Tierra a las cercanías de la Luna, de tal forma que el campo gravitacional del satélite genere un cambio de dirección en la nave y esta regrese al planeta. Este viaje se puede extender más días y observar una trayectoria más completa como se verá a continuación. La figura 6.2 es una de las referencias para determinar la funcionalidad del código.

Como se mencionó, el código proporciona en cada instante de tiempo, parámetros de interés para el viaje. En la Figura 6.2, se puede observar en la parte superior estos parámetros, de izquierda a derecha:

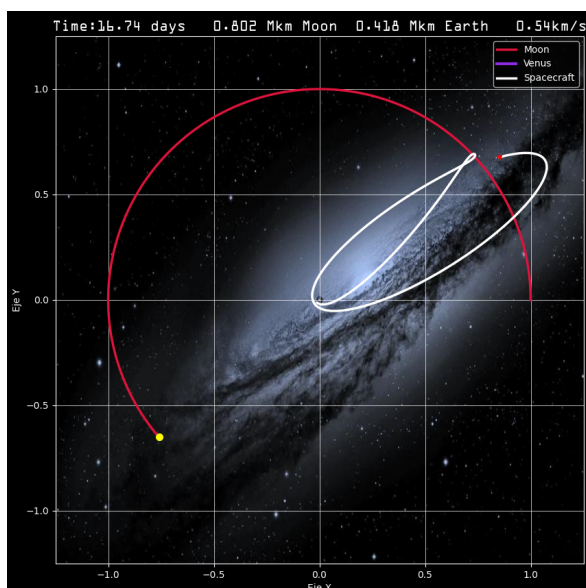
1. Tiempo en días.
2. Distancia a la Luna en millones de kilómetros.
3. Distancia a la Tierra en millones de kilómetros.
4. Rapidez de la nave.
5. Distancia a Venus en millones de kilómetros. (No es necesario mostrar este valor **para los viajes a la Luna**)

### 6.2.2 Viaje VL2

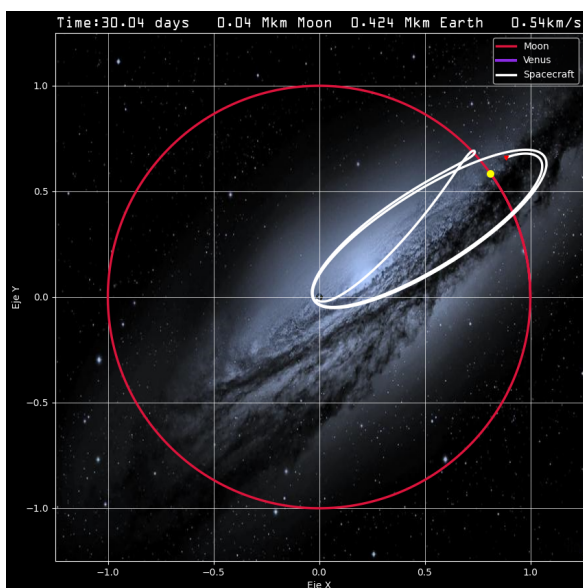
**Condiciones iniciales:** Este viaje es una extensión de VL1, por lo que las condiciones iniciales son las mismas. Las siguientes imágenes corresponden a la continuación de las figuras 6.1 y 6.2.



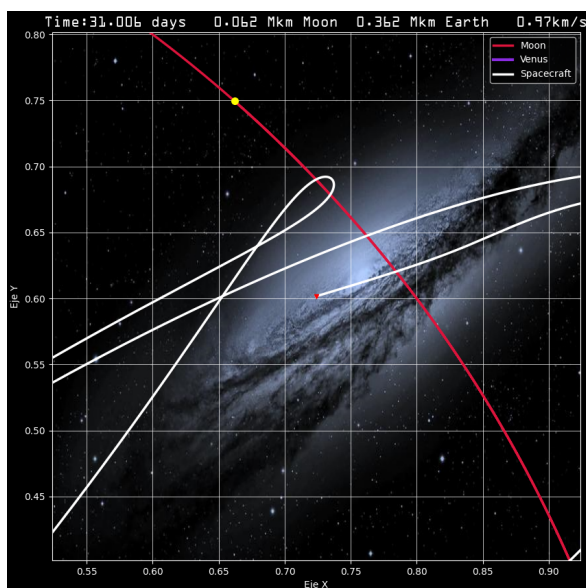
(a) día=6.634



(b) día=16.740



(c) día=30.040



(d) día=31.006

Figura 6.3: Fases VL2

VIAJE COMPLETO

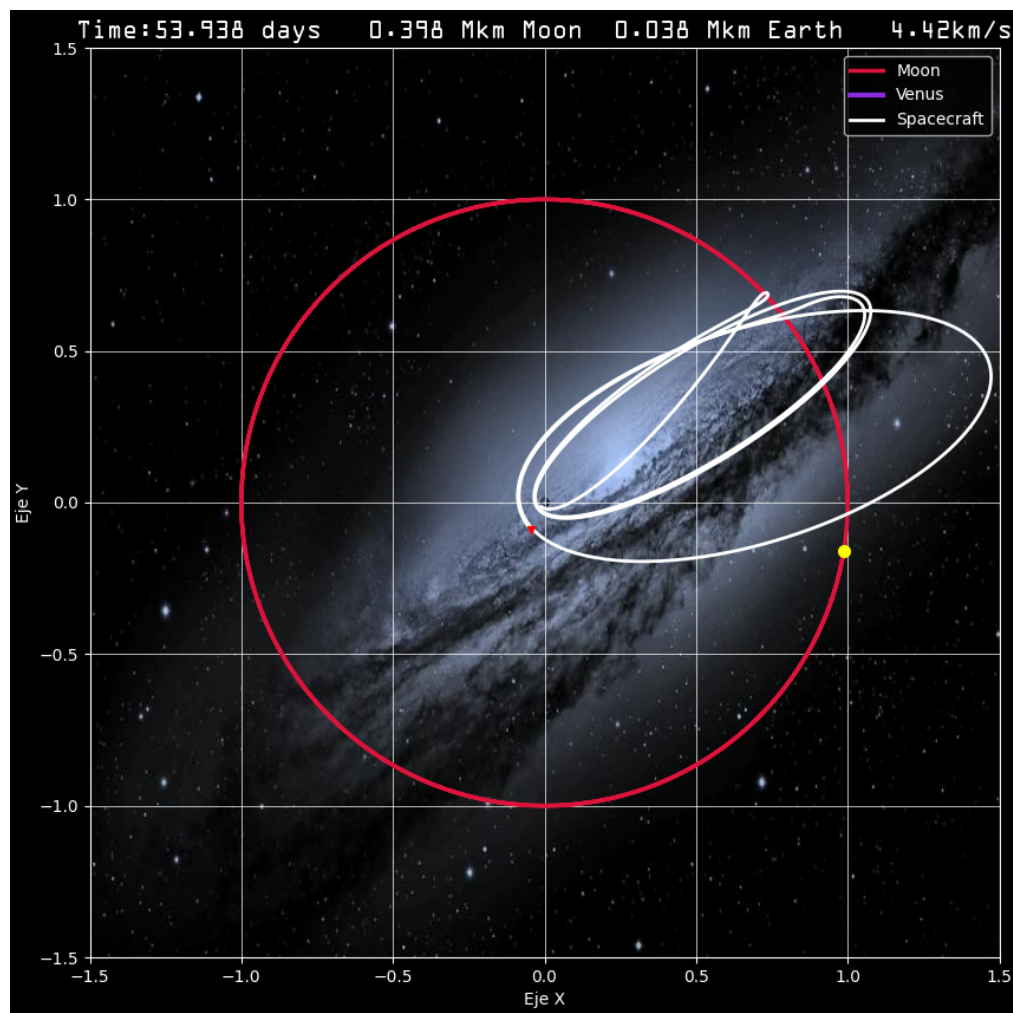


Figura 6.4: Viaje completo.

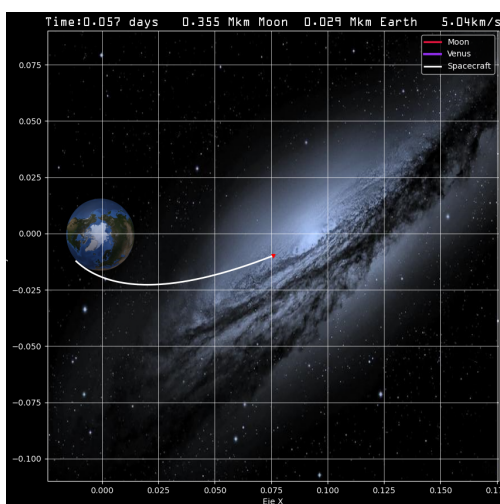
|   | Característica              | Distancia (km)   |
|---|-----------------------------|------------------|
| 1 | Menor distancia a la Luna   | 3409.403         |
| 2 | Mayor distancia a la Tierra | 590841.320       |
|   | Característica              | Velocidad (km/s) |
| 4 | Menor velocidad alcanzada   | 0.18             |
| 5 | Mayor velocidad alcanzada   | 11.00            |

Tabla 6.3: Característica principales VL2. Día 54.

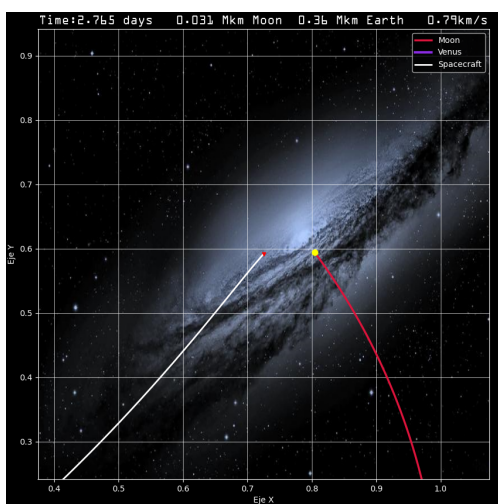
## 6.2.3 Viaje VL3

| Condición Inicial | Valor            | Condición Inicial  | Valor       |
|-------------------|------------------|--------------------|-------------|
| Altura            | <b>100.0 km</b>  | Ángulo de despegue | <b>-43°</b> |
| Velocidad Inicial | <b>11.0 km/s</b> | Fase lunar inicial | <b>0°</b>   |

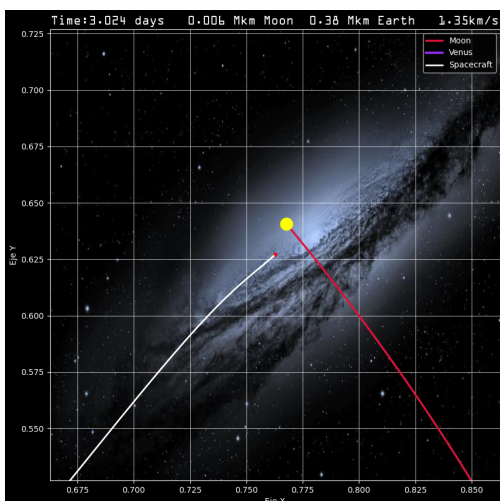
Tabla 6.4: Condiciones Iniciales VL3



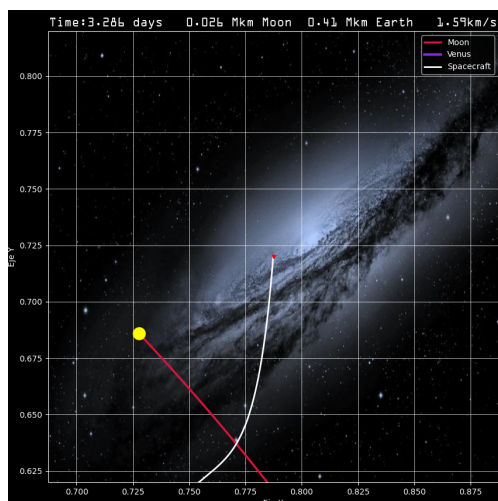
(a) día=0.057



(b) día=2.765



(c) día=3.024



(d) día=3.286

Figura 6.5: Escalas VL3



VIAJE COMPLETO

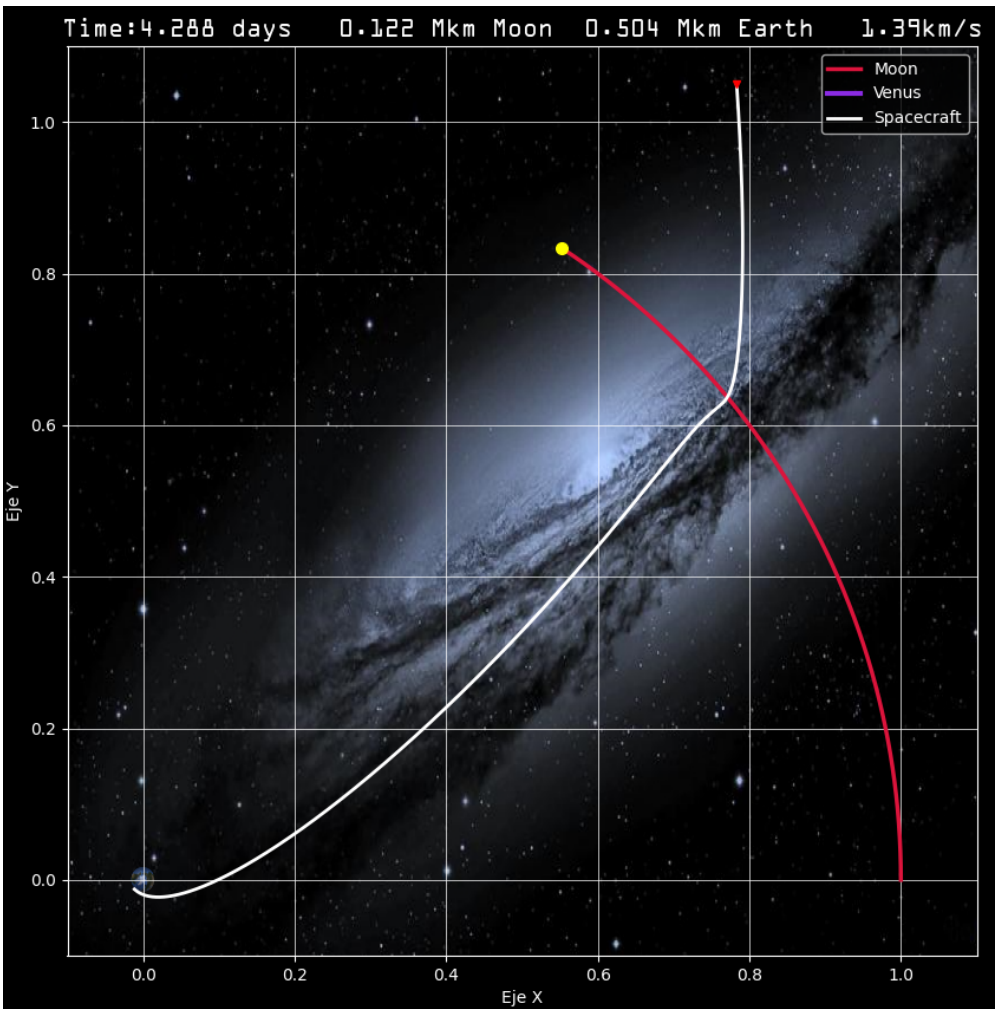


Figura 6.6: Viaje completo.

|   | Característica              | Distancia (km)          |
|---|-----------------------------|-------------------------|
| 1 | Menor distancia a la Luna   | 4849.282                |
| 2 | Mayor distancia a la Tierra | 567859.690 y aumentando |
|   | Característica              | Velocidad (km/s)        |
| 4 | Menor velocidad alcanzada   | 0.79                    |
| 5 | Mayor velocidad alcanzada   | 11.00                   |

Tabla 6.5: Características principales VL3. Día 5.

## 6.3 Viajes a Venus

Teniendo en cuenta las ecuaciones 5.21 y 5.22, la gráfica de la órbita de Venus vista desde la Tierra es:

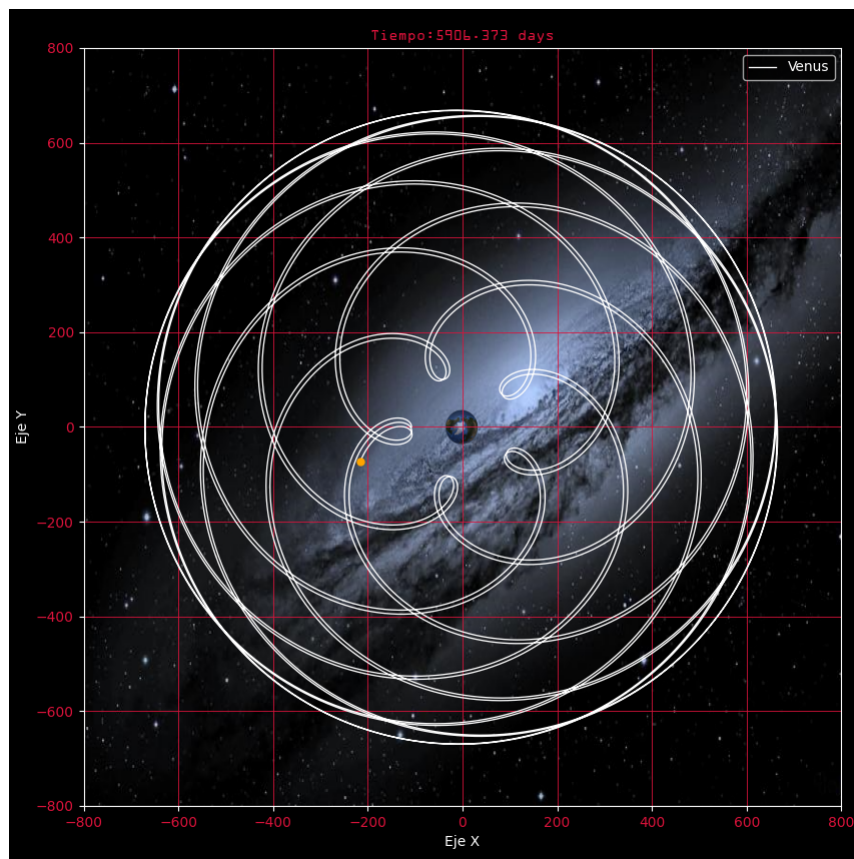


Figura 6.7: Trayectoria de Venus con respecto a la Tierra

## 6.4 Viaje Venus I (V1)

| Condición Inicial | Valor     | Condición Inicial  | Valor | Condición de Venus                   |
|-------------------|-----------|--------------------|-------|--------------------------------------|
| Altura            | 218.0 km  | Ángulo de despegue | 30°   | Fase inicial en días:<br>-96.7430996 |
| Velocidad Inicial | 10.9 km/s | Fase lunar inicial | 71.1° |                                      |

Tabla 6.6: Condiciones Iniciales V1

Debido a la larga duración del viaje, este se divide tres en fases.

### 6.4.1 Fase I

La primera fase del viaje consiste en salir del sistema Tierra-Luna, con una velocidad que permita llegar a Venus.

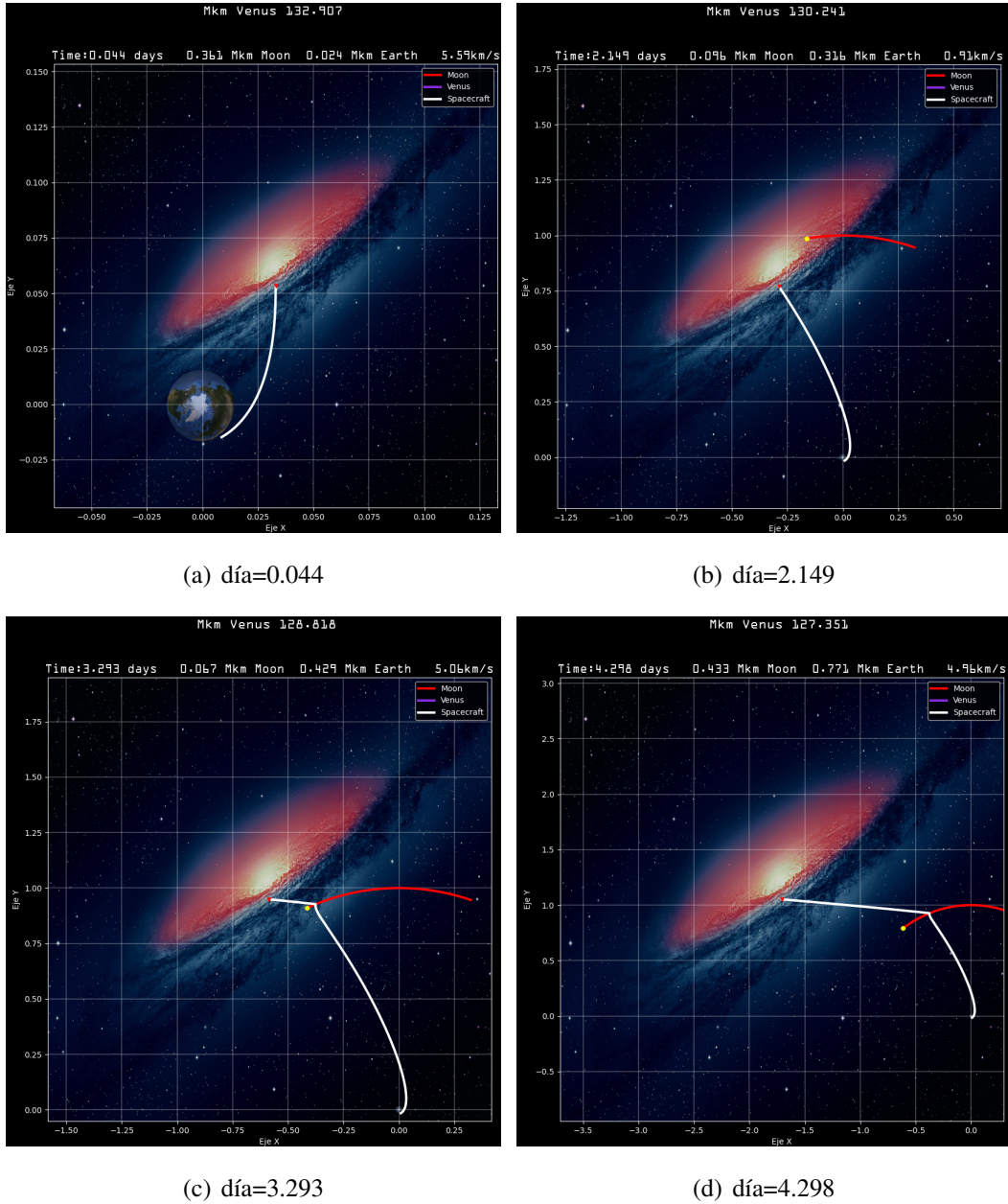


Figura 6.8: Fase I V1



Con respecto a la Figura 6.8:

- Se puede observar en (a) que la nave pierde mucha de su rapidez inicial a medida que se aleja de la Tierra en dirección a la Luna
- En (b), la nave a perdido casi toda su rapidez, su valor en este punto es de  $0.91 \text{ km/s}$ .
- Gracias a la asistencia gravitatoria de la Luna, en (c) se aprecia como la nave fue acelerada y gana una velocidad de aproximadamente  $5.05 \text{ km/s}$ .
- Finalmente, en (d) la nave pierde un poco de rapidez mientras escapa del campo gravitatorio de la Luna, pero logra salir del sistema Tierra-Luna con una rapidez aproximada de  $4.83 \text{ km/s}$  rumbo a Venus.

|          | <b>Característica</b>       | <b>Distancia (km)</b>    |
|----------|-----------------------------|--------------------------|
| <b>1</b> | Menor distancia a la Luna   | 134.525                  |
| <b>2</b> | Menor distancia a Venus     | 123014155.887            |
| <b>3</b> | Mayor distancia a la Tierra | 1047396.974 y aumentando |
|          | <b>Característica</b>       | <b>Velocidad (km/s)</b>  |
| <b>4</b> | Menor velocidad alcanzada   | 0.75                     |
| <b>5</b> | Mayor velocidad alcanzada   | 10.9                     |

Tabla 6.7: Características principales Fase I. Día 5.

Se ha mencionado el uso de la denominada *asistencia gravitatoria*. La asistencia gravitatoria, es una técnica utilizada en la exploración espacial para aprovechar la influencia gravitatoria de un cuerpo celeste, como un planeta o una luna, con el fin de alterar la trayectoria y velocidad de una nave espacial. Este efecto puede ser aprovechado estratégicamente para realizar maniobras de vuelo espacial más eficientes y económicas. Al utilizar la asistencia gravitatoria de un cuerpo planetario, una nave espacial puede aumentar su velocidad sin necesidad de utilizar grandes cantidades de combustible adicional. Esto es especialmente útil en misiones interplanetarias de larga duración, donde el ahorro de combustible es crucial.

### 6.4.2 Fase II

Esta fase abarca el intervalo de tiempo en el que la nave se encuentra en las cercanías de Venus. El viaje hasta este punto tarda aproximadamente 100 días después de la primera fase.

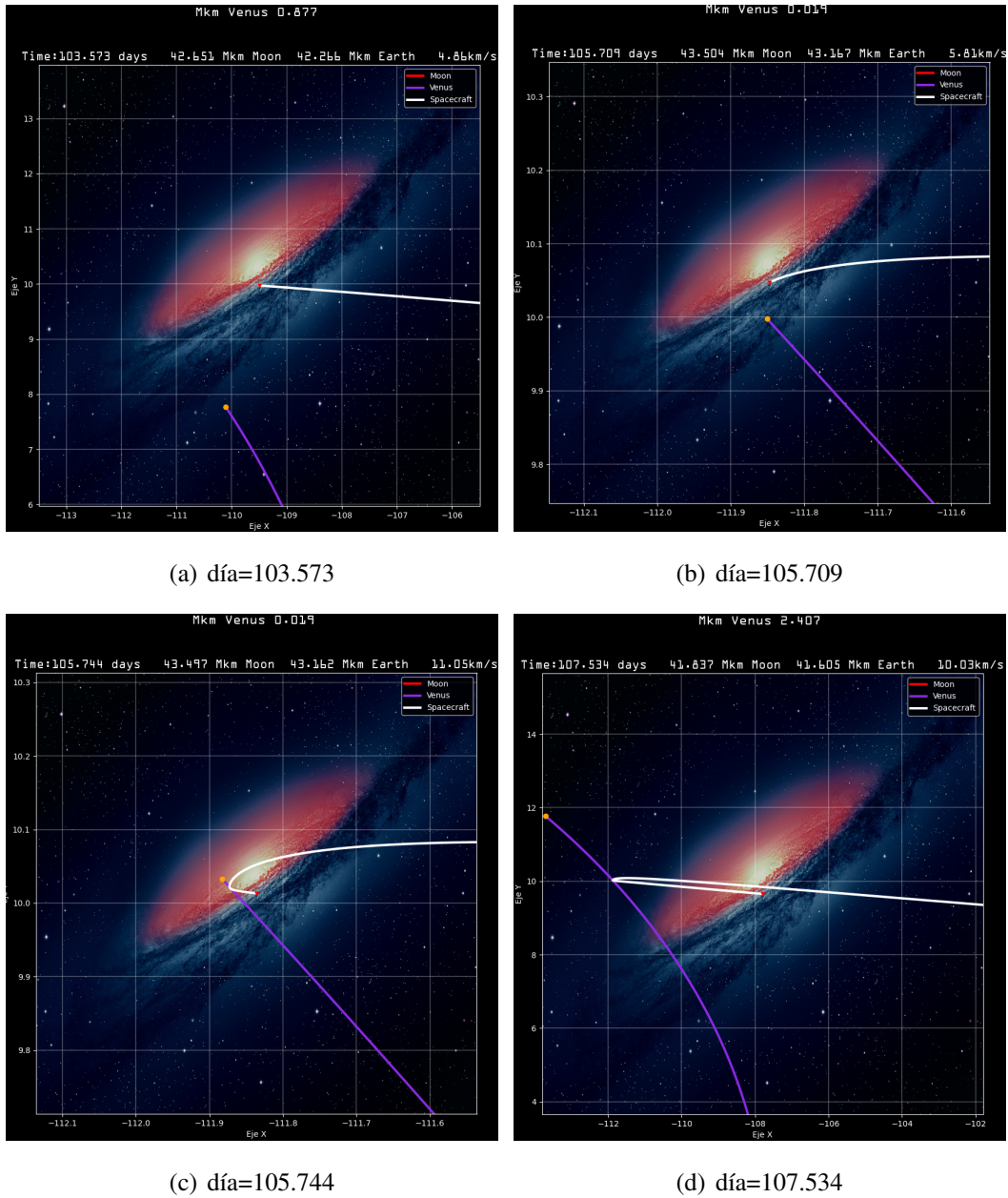


Figura 6.9: Fase II V1

Con respecto a la Figura 6.9:

- En (a), la nave comienza a verse afectada por la gravedad de Venus, por lo que su velocidad empieza a cambiar (se acelera).
- En(b), la trayectoria se curva hacia el planeta y su rapidez aumenta enormemente.
- En (c), la nave logra una trayectoria casi paralela a la de llegada a Venus, lo que le permitirá eventualmente regresar a la Tierra. La rapidez de la nave supera los  $11.05 \text{ km/s}$  gracias a la asistencia gravitatoria de Venus.
- Finalmente, en (d) la nave pierde un poco de su velocidad mientras abandona el campo gravitacional de Venus y se dirige hacia la Tierra a una rapidez de  $10.03 \text{ km/s}$  aproximadamente.

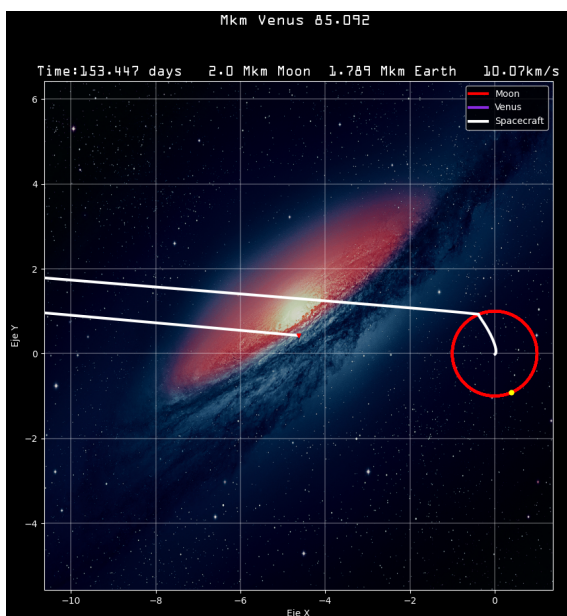
|          | <b>Característica</b>       | <b>Distancia (km)</b>   |
|----------|-----------------------------|-------------------------|
| <b>1</b> | Menor distancia a la Luna   | 134.525                 |
| <b>2</b> | Menor distancia a Venus     | 488.084                 |
| <b>3</b> | Mayor distancia a la Tierra | 43176132.331            |
|          | <b>Característica</b>       | <b>Velocidad (km/s)</b> |
| <b>4</b> | Menor velocidad alcanzada   | 0.75                    |
| <b>5</b> | Mayor velocidad alcanzada   | 10.43                   |

Tabla 6.8: Características principales Fase II. Día 108.

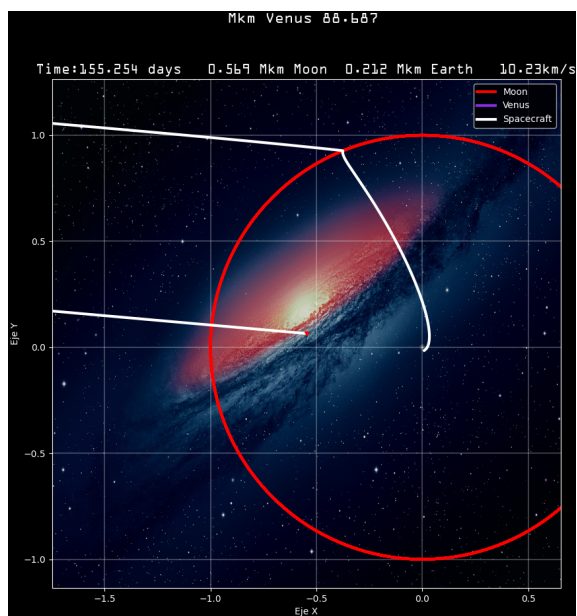
### 6.4.3 Fase III

En este punto, la nave se encuentra próxima a llegar a la Tierra. Se puede observar que:

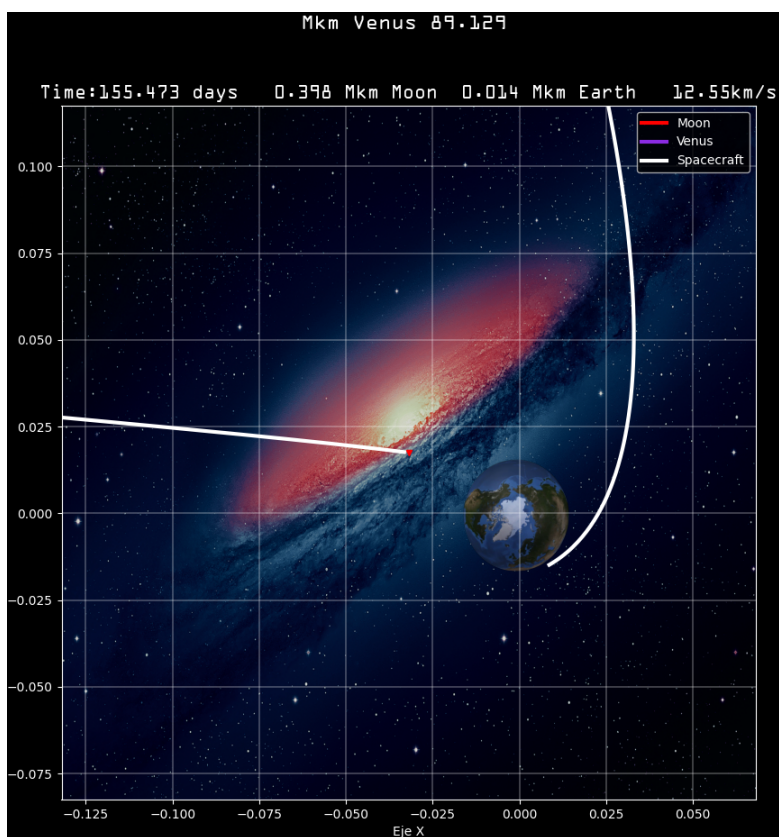
- En (a), la velocidad de la nave comienza a cambiar a medida que se acerca al sistema Tierra-Luna, su rapidez en este punto es de  $10.07 \text{ km/s}$  y continúa el aumento.
- En (b), la nave ya ha traspasado la órbita de la Luna y se dirige a la Tierra.
- Finalmente en (c), la nave está a punto de concluir su viaje. Debido a la proximidad con la Tierra, sufre una gran aceleración.



(a) día=153.447



(b) día=155.254



(c) día=155.473

Figura 6.10: Fase II V1

Las características principales del viaje en este punto corresponden a la totalidad del mismo y se encuentra en la Tabla 6.9.

### VIAJE COMPLETO

La trayectoria de la nave en el viaje de ida se puede observar en la figura 6.11. El viaje completo se muestra en la Figura 6.12.

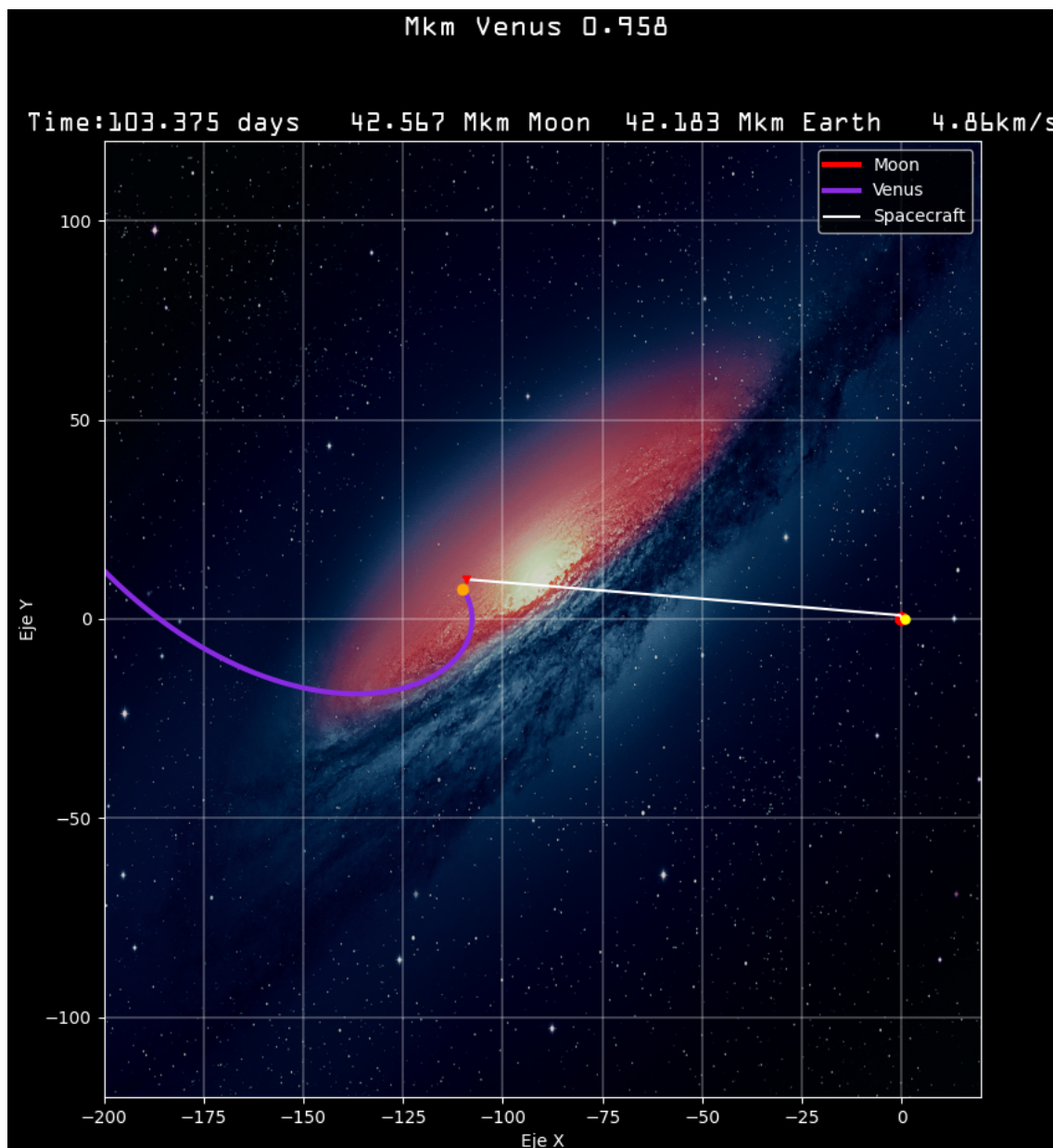


Figura 6.11: Viaje completo de ida.



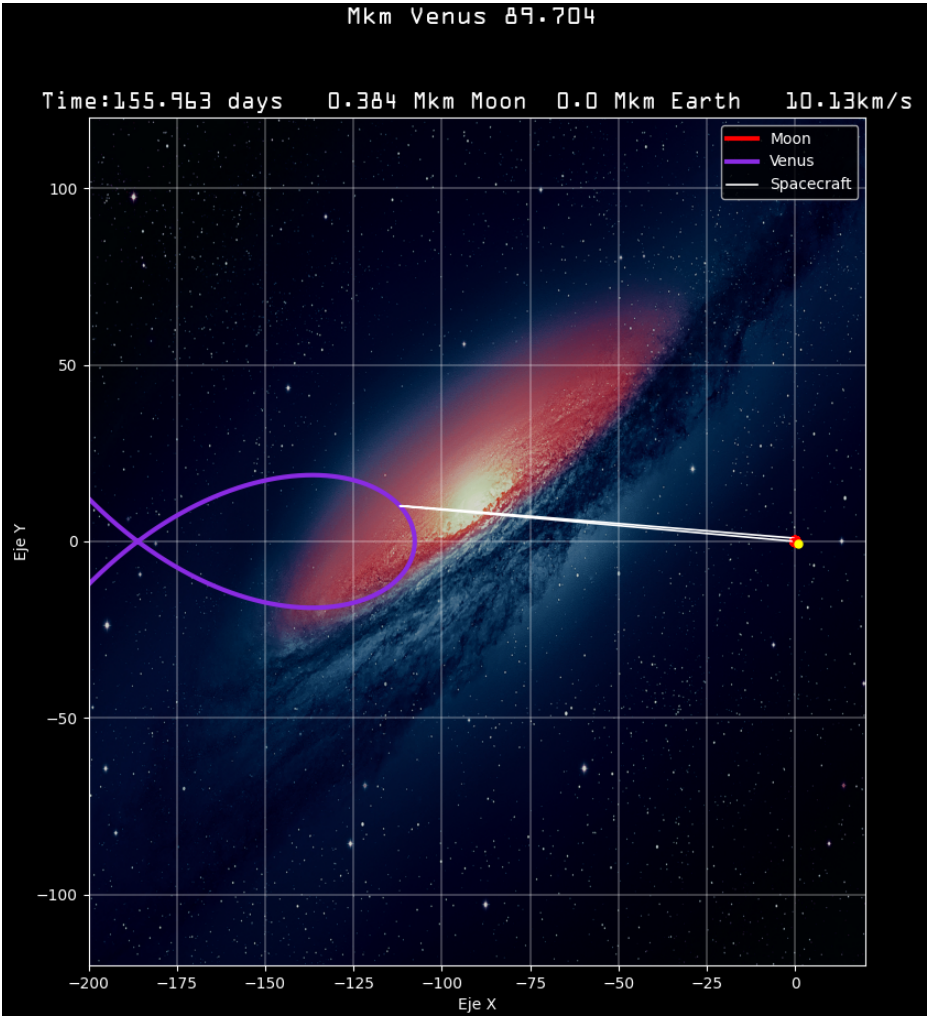


Figura 6.12: Viaje completo.

|   | Característica              | Distancia (km)   |
|---|-----------------------------|------------------|
| 1 | Menor distancia a la Luna   | 134.525          |
| 2 | Menor distancia a Venus     | 488.084          |
| 3 | Mayor distancia a la Tierra | 43176132.331     |
|   | Característica              | Velocidad (km/s) |
| 4 | Menor velocidad alcanzada   | 0.75             |
| 5 | Mayor velocidad alcanzada   | 35.43            |

Tabla 6.9: Características principales viaje completo. Día 156.

**NOTA:** Las características principales del viaje completo son las mismas que las de la Fase II. Esto es porque en esta fase se presentaron los valores máximos y mínimos de las características correspondientes.

## 6.5 Viaje Venus II (V2)

Este viaje permite observar cómo puede cambiar la trayectoria de la nave si se hace un pequeño cambio en las condiciones iniciales.

| Condición Inicial | Valor            | Condición Inicial  | Valor        | Condición de Venus                      |
|-------------------|------------------|--------------------|--------------|-----------------------------------------|
| Altura            | <b>218.0 km</b>  | Ángulo de despegue | <b>30°</b>   | <b>Fase inicial en días:<br/>-96.55</b> |
| Velocidad Inicial | <b>10.9 km/s</b> | Fase lunar inicial | <b>71.1°</b> |                                         |

Tabla 6.10: Condiciones Iniciales V2

Las condiciones iniciales son exactamente las mismas que para el viaje V1, salvo la condición de la fase inicial de Venus. Dicha fase se escoge de tal modo que Venus se encuentre adelantado una pequeña fracción de día con respecto a su trayectoria en V1.

### 6.5.1 Fase I

Esta fase es la misma que la Fase I de V1, es decir que su descripción se encuentra en la Figura 6.8 y la Tabla 6.7. Esto es de esperarse puesto que no se ha cambiado ninguna condición inicial del despegue o la trayectoria de la Luna, solamente se hizo una pequeña variación en la fase inicial de Venus.

### 6.5.2 Fase II

|          | <b>Característica</b>       | <b>Distancia (km)</b>   |
|----------|-----------------------------|-------------------------|
| <b>1</b> | Menor distancia a la Luna   | 134.525                 |
| <b>2</b> | Menor distancia a Venus     | 61914.894               |
| <b>3</b> | Mayor distancia a la Tierra | 44543099.956            |
|          | <b>Característica</b>       | <b>Velocidad (km/s)</b> |
| <b>4</b> | Menor velocidad alcanzada   | 0.75                    |
| <b>5</b> | Mayor velocidad alcanzada   | 10.9                    |

Tabla 6.11: Características principales Fase II. Día 108.

De la Figura 6.13 se puede observar que:

- En (a), la nave sigue una trayectoria cercana a Venus, a unos 0.819 millones de kilómetros del planeta y con una rapidez de  $4.87 \text{ km/s}$
- En (b), la nave sufre una aceleración debida al planeta. Su trayectoria comienza a curvarse, su velocidad cambia y aumenta. En su punto más cercano a Venus, la nave se encuentra a  $61914.894 \text{ km}$  del planeta.
- En (c), la nave se curva en dirección de Venus, su velocidad ronda los  $6.88 \text{ km/s}$  y comienza a experimentar pequeñas disminuciones debidas al tirón gravitacional del planeta.
- Finalmente en (d), la nave a cambiado su dirección y ha ganado una rapidez mucho mayor con respecto a la que tenía antes de su interacción con Venus.



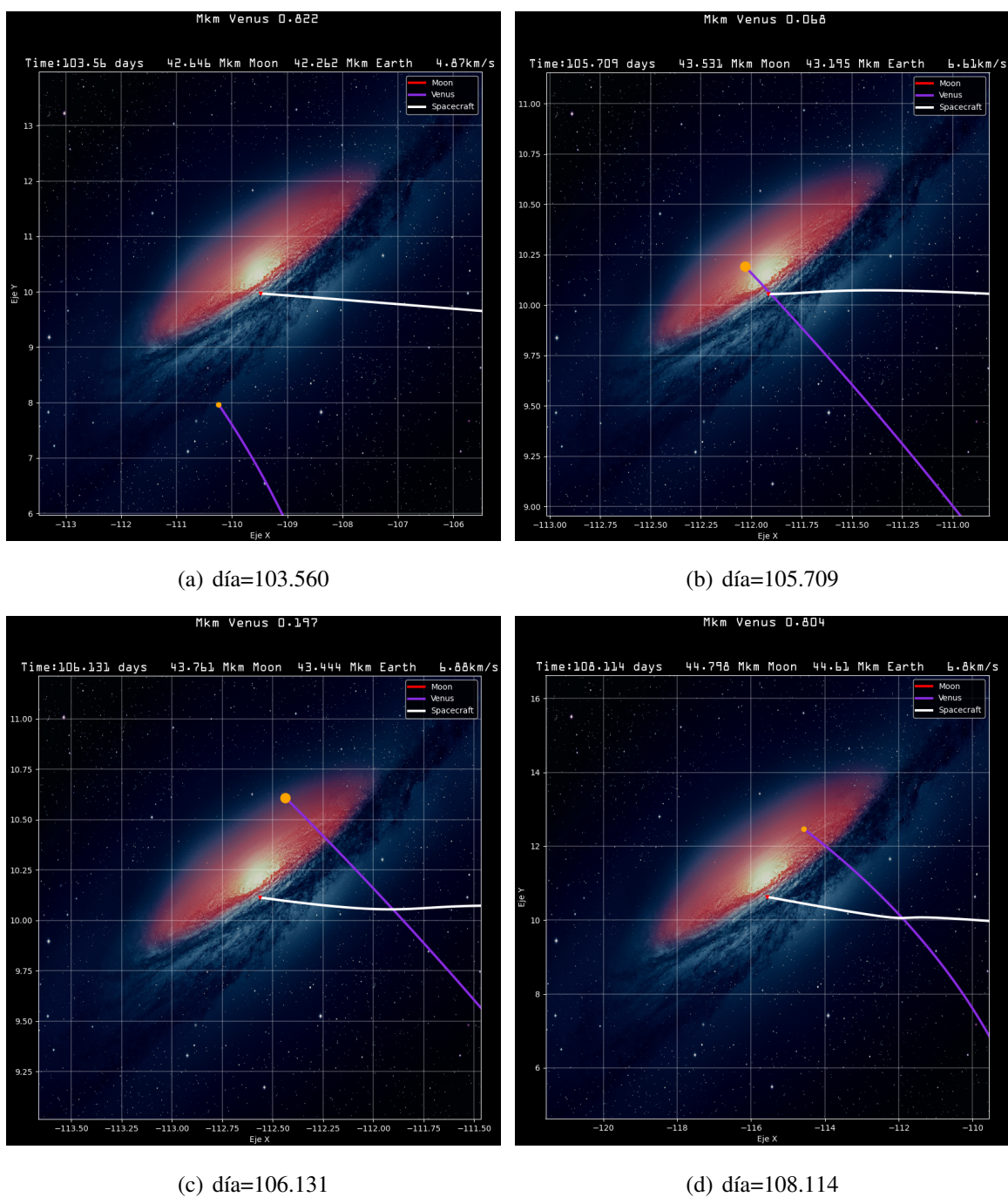


Figura 6.13: Fase II V2

## VIAJE COMPLETO

La trayectoria de la nave se puede observar en la Figura 6.14.

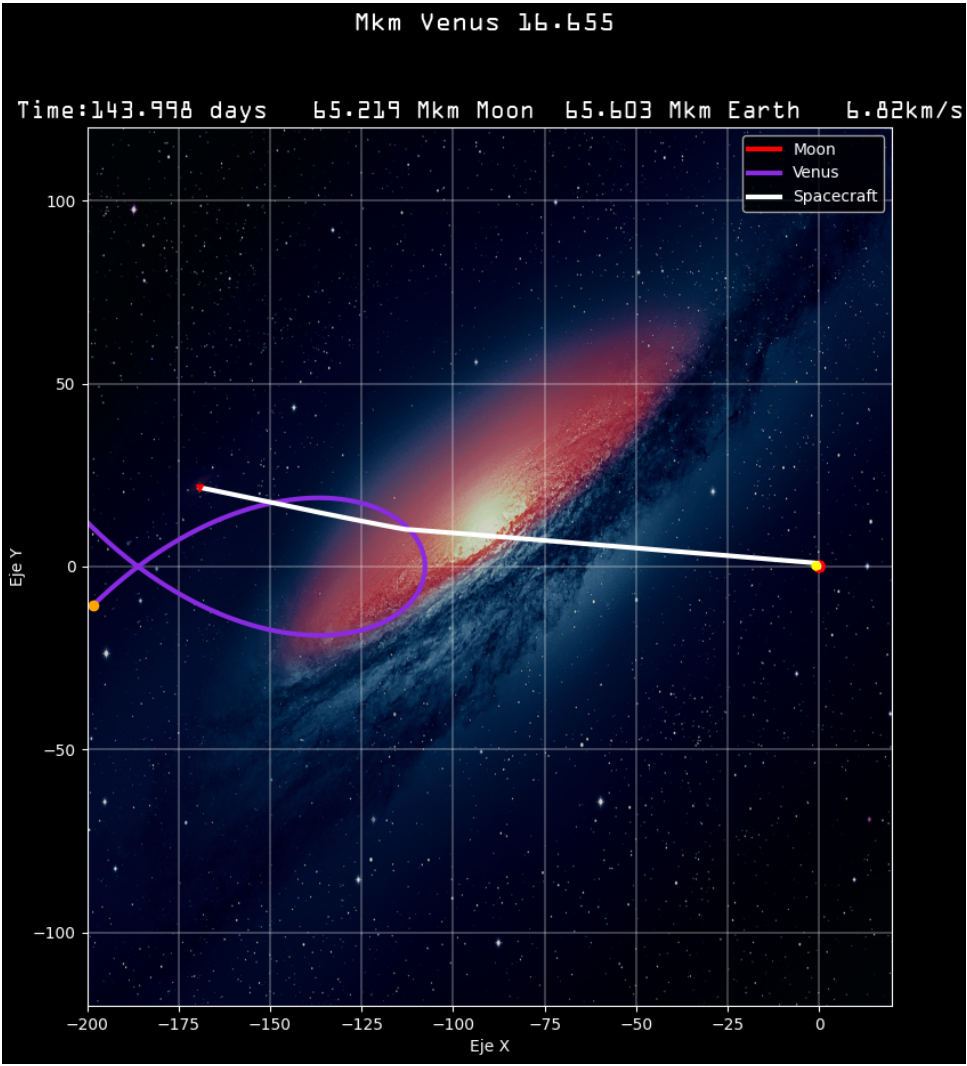


Figura 6.14: Viaje completo.

|   | Característica              | Distancia (km)            |
|---|-----------------------------|---------------------------|
| 1 | Menor distancia a la Luna   | 134.525                   |
| 2 | Menor distancia a la Venus  | 61914.894                 |
| 3 | Mayor distancia a la Tierra | 65603768.441 y aumentando |
|   | Característica              | Velocidad (km/s)          |
| 4 | Menor velocidad alcanzada   | 0.75                      |
| 5 | Mayor velocidad alcanzada   | 10.9                      |

Tabla 6.12: Características principales viaje completo. Día 144.

Además, en la Figura 6.14 se puede observar que gracias a la asistencia gravitacional de Venus, la nave adquiere una rapidez de  $6.82 \text{ km/s}$  mayor que la velocidad que tenía antes de interactuar con Venus, que fue de aproximadamente  $4.87 \text{ km/s}$  (Figura 6.13 (a)). La dirección de la velocidad es arbitraria, pero si se desea enviar la nave hacia una localización más específica, se puede buscar las condiciones iniciales apropiadas. Este viaje sirvió para demostrar la sensibilidad del problema al cambio de condiciones iniciales, además de el uso de los cuerpos celestes para la asistencia gravitatoria.

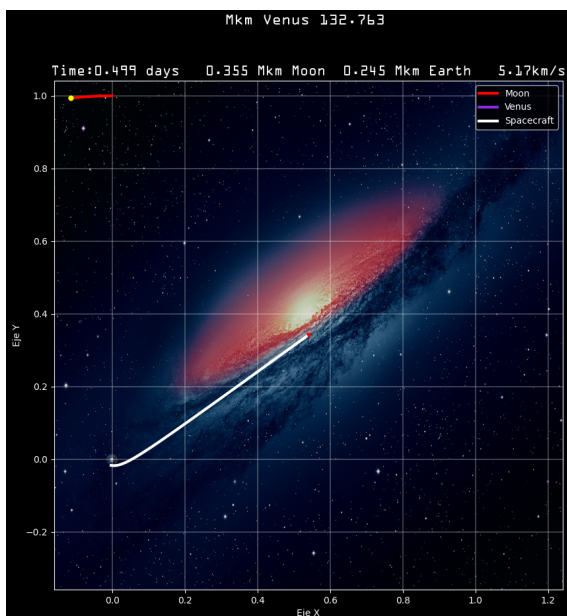
## 6.6 Viaje Venus III (V3)

El objetivo de este viaje es lograr un trayecto ida y vuelta hacia Venus, sin utilizar la asistencia gravitatoria de la Luna. Se puede observar que en la Figura 6.9 (a), la velocidad del trayecto de ida es de  $4.86 \text{ km/s}$  y la nave toma aproximadamente 105 días en llegar a Venus. La idea es observar con qué velocidad de salida (desde la Tierra), debe despegar la nave para reproducir resultados similares **para el viaje de ida**, sin usar la asistencia gravitatoria de la Luna. Se encontró que la velocidad de salida debe ser de  $12.0 \text{ km/s}$  para las siguientes condiciones iniciales:

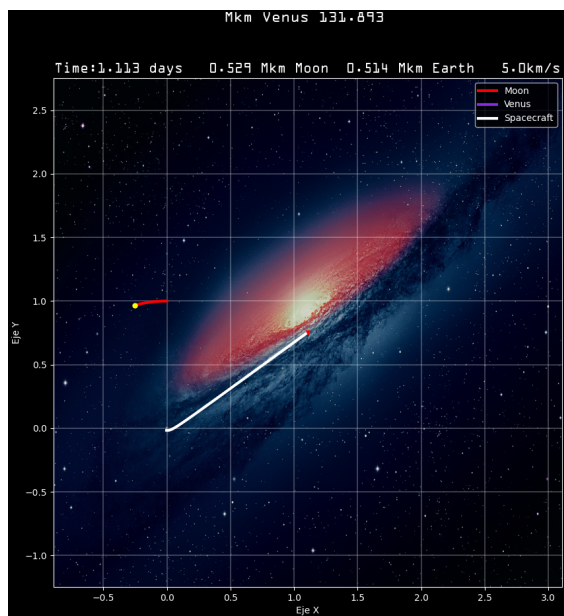
| Condición Inicial | Valor            | Condición Inicial  | Valor        | Condición de Venus                               |
|-------------------|------------------|--------------------|--------------|--------------------------------------------------|
| Altura            | <b>218.0 km</b>  | Ángulo de despegue | <b>-10°</b>  | <b>Fase inicial en días:</b><br><b>487.65723</b> |
| Velocidad Inicial | <b>12.0 km/s</b> | Fase lunar inicial | <b>90.0°</b> |                                                  |

Tabla 6.13: Condiciones Iniciales V3

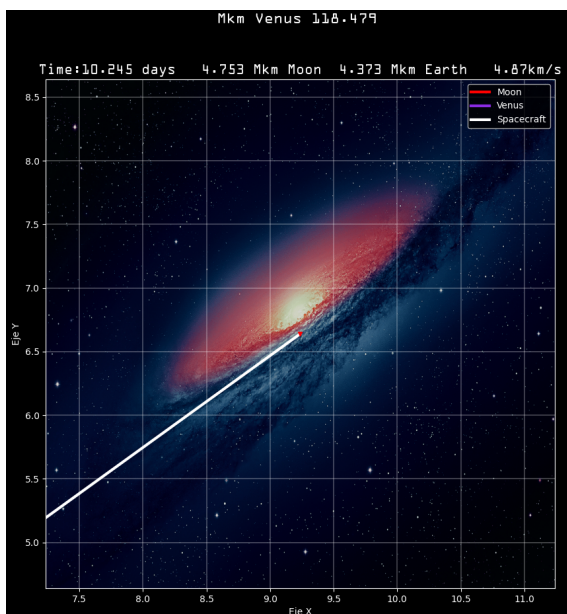
## 6.6.1 Fase I



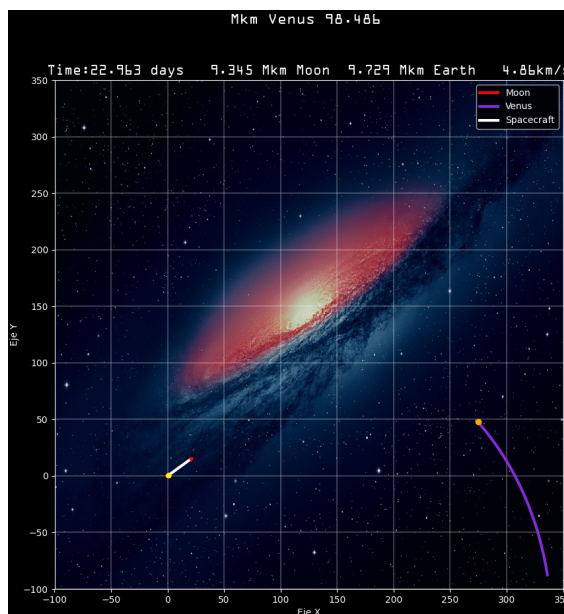
(a) día=0.499



(b) día=1.113



(c) día=10.245



(d) día=23.963

Figura 6.15: Fase I V3

Con respecto a la Figura 6.15:

- En (a), puesto que la distancia entre la Luna y la nave es grande, la trayectoria no sufre una curvatura apreciable. La rapidez de la nave sigue disminuyendo debido a la atracción de la Tierra.
- En (b), la velocidad de la nave comienza a estabilizarse a medida que se aleja de la Tierra.
- En (c), el campo gravitacional de la Tierra y la Luna ya no afecta apreciablemente a la nave, su velocidad se estabiliza en un valor cercano a los  $4.87\text{km/s}$ .
- En (d), la nave aún se encuentra muy lejos de Venus, pero se puede apreciar que, tanto la nave como Venus, se dirigen al punto de encuentro.

|          | <b>Característica</b>       | <b>Distancia (km)</b>      |
|----------|-----------------------------|----------------------------|
| <b>1</b> | Menor distancia a la Luna   | 344314.876                 |
| <b>2</b> | Menor distancia a Venus     | 98426297.716 y acercándose |
| <b>3</b> | Mayor distancia a la Tierra | 9744379.087 y alejándose   |
|          | <b>Característica</b>       | <b>Velocidad (km/s)</b>    |
| <b>3</b> | Menor velocidad alcanzada   | 4.86                       |
| <b>4</b> | Mayor velocidad alcanzada   | 12.0                       |

Tabla 6.14: Características principales Fase I. Día 23.



## 6.6.2 Fase II

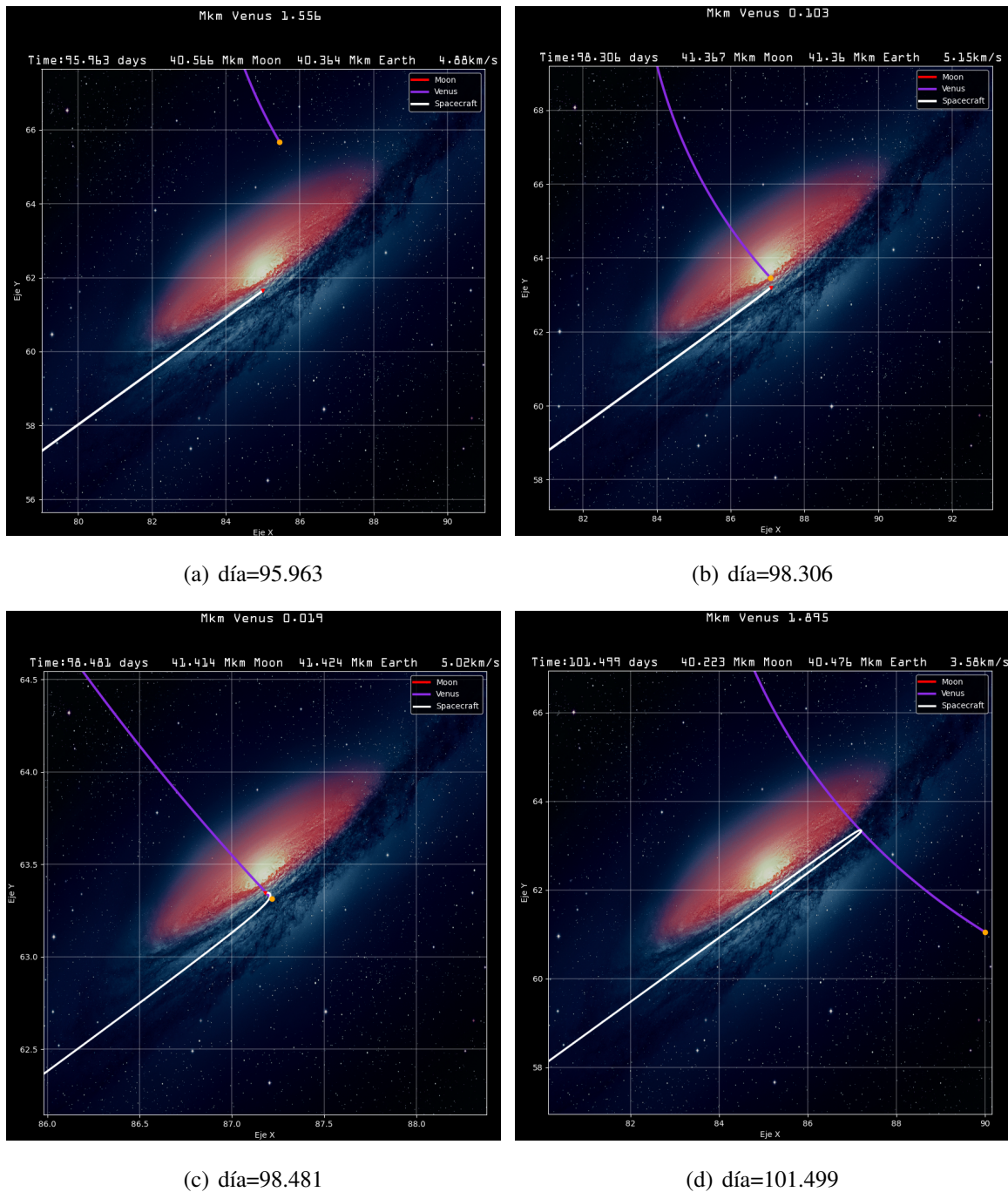


Figura 6.16: Fase II V3

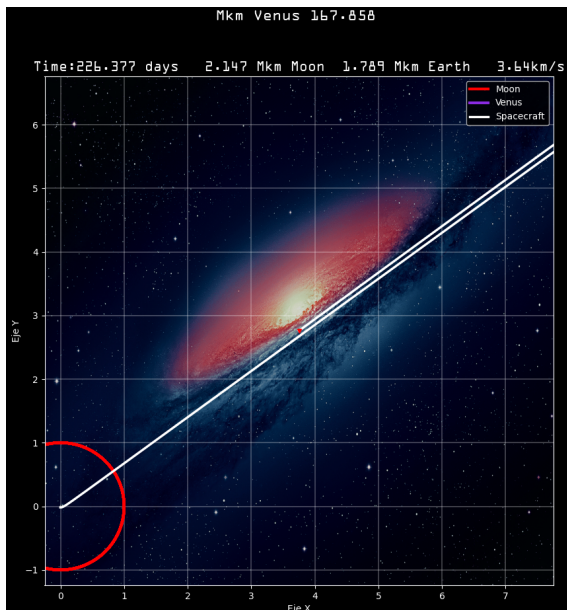
Con respecto a la Figura 6.16:

- En (a), la nave se encuentra cerca a Venus, su velocidad comienza a aumentar.
- En (b), su velocidad pasa los  $5.0 \text{ km/s}$  y su trayectoria comienza a curvarse debido a la cercanía del planeta.
- En (c), la trayectoria se ha curvado en dirección de regreso a la Tierra, su velocidad comienza a disminuir.
- En (d), se ha logrado la dirección deseada, pero en este caso la gravedad de Venus ha desacelerado la nave y esta se dirige a la Tierra con una velocidad mucho menor a la que tenía en el viaje de ida a Venus. Su rapidez oscila los  $3.6 \text{ km/s}$ .

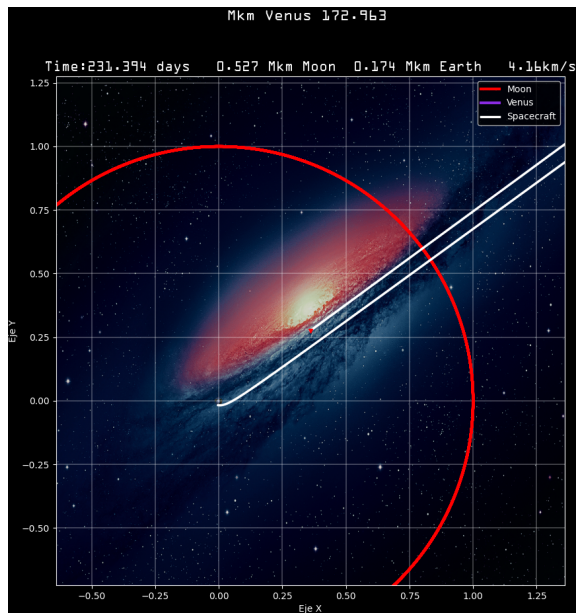
|          | <b>Característica</b>       | <b>Distancia (km)</b>   |
|----------|-----------------------------|-------------------------|
| <b>1</b> | Menor distancia a la Luna   | 344314.876              |
| <b>2</b> | Menor distancia a Venus     | 4242.266                |
| <b>3</b> | Mayor distancia a la Tierra | 41431442.411            |
|          | <b>Característica</b>       | <b>Velocidad (km/s)</b> |
| <b>3</b> | Menor velocidad alcanzada   | 3.58                    |
| <b>4</b> | Mayor velocidad alcanzada   | 12.0                    |

Tabla 6.15: Características principales Fase II. Día 102.

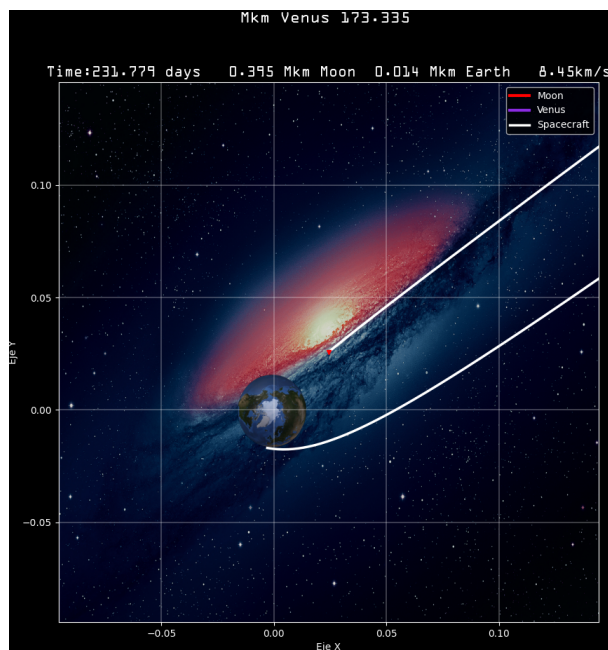
## 6.6.3 Fase III



(a) día=226.377



(b) día=231.394



(c) día=231.799

Figura 6.17: Fase III V3



Con respecto a la Figura 6.17:

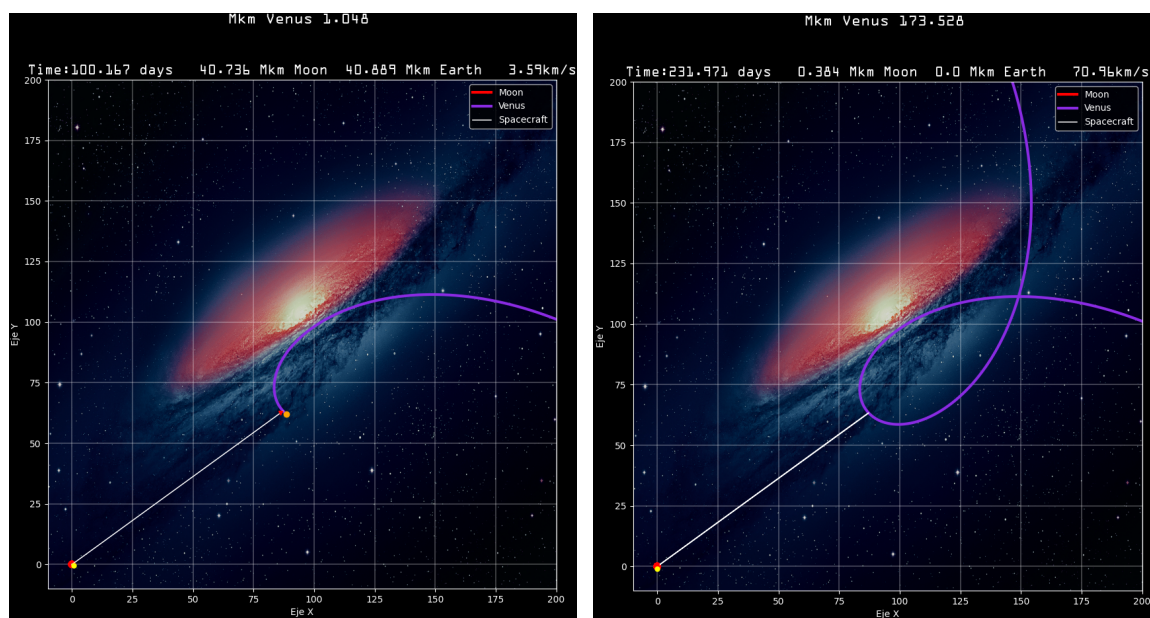
- La nave se encuentra 1.794 millones de kilómetros de la Tierra. Su velocidad en este punto es de  $3.64 \text{ km/s}$  y comenzará a aumentar pronto.
- En (b), la nave ha cruzado la órbita de la Luna. Su velocidad ha aumentado hasta los  $4.15 \text{ km/s}$  gracias al campo gravitatorio de la Tierra.
- En (c), la nave llega a la Tierra. Su velocidad traspasa los  $11.76 \text{ km/s}$  debido a la cercanía con el planeta.

|   | Característica              | Distancia (km)   |
|---|-----------------------------|------------------|
| 1 | Menor distancia a la Luna   | 344314.876       |
| 2 | Menor distancia a Venus     | 4242.266         |
| 3 | Mayor distancia a la Tierra | 41431442.411     |
|   | Característica              | Velocidad (km/s) |
| 3 | Menor velocidad alcanzada   | 2.59             |
| 4 | Mayor velocidad alcanzada   | 76.32            |

Tabla 6.16: Características principales Fase III. Día 232.

## VIAJE COMPLETO

La trayectoria de la nave en el viaje de ida se puede observar en la Figura 6.18(a). El viaje completo se muestra en la Figura 6.18(b). El viaje de ida ha tomado aproximadamente 100 días, que es un valor similar al del Viaje 1. Sin embargo, el trayecto de regreso a la Tierra ha tardado más de 130 días. Esto es debido a que la gravedad de Venus frenó en el cambio de dirección, como se mencionó anteriormente.



(a) Viaje completo de ida.

(b) Viaje completo.

Figura 6.18: Viaje completo.

|   | Característica              | Distancia (km)   |
|---|-----------------------------|------------------|
| 1 | Menor distancia a la Luna   | 344314.876       |
| 2 | Menor distancia a Venus     | 4242.266         |
| 3 | Mayor distancia a la Tierra | 41431442.411     |
|   | Característica              | Velocidad (km/s) |
| 3 | Menor velocidad alcanzada   | 2.59             |
| 4 | Mayor velocidad alcanzada   | 76.32            |

Tabla 6.17: Características principales Fase III. Día 232.

**NOTA:** Las características principales del viaje completo son las mismas que las de la Fase II. Esto es porque en esta fase se presentaron los valores máximos y mínimos de las características correspondientes.

# Capítulo 7

## CONCLUSIONES

Este proyecto presenta algunas restricciones importantes que deben tenerse en cuenta al interpretar sus resultados. A pesar de los esfuerzos realizados, se reconocen algunas limitaciones. El programa está diseñado para simular viajes espaciales en un entorno bidimensional, lo que implica una simplificación del problema real que ocurre en un espacio tridimensional. Esta simplificación puede influir en la precisión de las trayectorias simuladas y en la falta de consideración de ciertos efectos tridimensionales.

En general, este trabajo explora muchos de los fenómenos más interesantes presentes en este tipo de problemas. Aunque existen limitaciones y simplificaciones que impiden una réplica exacta de un viaje espacial real (lo cual es extremadamente complejo y fuera del alcance de un proyecto de pregrado y realizado por una sola persona), este estudio representa un primer paso hacia la ejecución de este tipo de proyectos y abre la puerta a la inclusión de más cuerpos celestes en futuros trabajos, así como a la realización de simulaciones más complejas.

En cuanto a los viajes a la Luna, se obtuvieron los resultados proporcionados por Danby (1997). Estos resultados sirven como base para demostrar que el código funciona correctamente y genera resultados coherentes. Dado que no existen referencias específicas para las trayectorias de cuatro cuerpos simuladas en este estudio, los resultados obtenidos a partir de las trayectorias lunares validan la eficacia del código en general.

Los viajes simulados ofrecen la oportunidad de visualizar diversos fenómenos relacionados con los campos gravitacionales, como la asistencia gravitatoria, que se utiliza con frecuencia para alterar la dirección y la magnitud de la velocidad según sea conveniente. En el caso del Viaje a Venus I, se aprovecha este fenómeno en varias ocasiones: en la Luna, para redirigir la nave hacia Venus y aumentar su velocidad, y en Venus, para modificar la dirección de la nave y permitir su retorno a la Tierra, además de aumentar su velocidad en el proceso.

El Viaje a Venus II se llevó a cabo para demostrar la sensibilidad del problema ante cambios en las condiciones iniciales. Concretamente, un pequeño cambio de 0.19 días (aproximadamente 4.56 horas) en la fase inicial de Venus, se reflejó en una trayectoria completamente

diferente después de la interacción con Venus. Además, al elegir las condiciones iniciales adecuadas, también se puede modificar la trayectoria subsiguiente a la interacción con Venus para enviar la nave hacia una dirección específica, como el Sol u otro planeta. De esta manera, es posible aprovechar aún más el código para obtener diversas trayectorias útiles en problemas más específicos. Este tipo de viajes se utiliza ampliamente para modificar la trayectoria de naves espaciales y sondas en la exploración espacial.

El Viaje a Venus III proporcionó evidencia para demostrar la utilidad e importancia de la asistencia gravitatoria. En este viaje, a diferencia de V1, la Luna no se utilizó para acelerar la nave, lo que requirió una velocidad inicial mucho mayor para lograr un viaje similar. Específicamente, la velocidad de la nave se incrementó en  $1.1 \text{ km/s}$ , lo cual, en términos de combustible, resulta en un aumento en la carga de la nave y una reducción en la carga útil, lo que genera un incremento significativo en el costo general del viaje. Además, este viaje demostró que la asistencia gravitatoria de los cuerpos celestes no siempre se traduce en un aumento de velocidad, ya que en el viaje de regreso la nave perdió velocidad después de interactuar con Venus. Estas maniobras también son útiles en situaciones donde se requiere reducir la velocidad, por ejemplo, para lograr aterrizajes más controlados y minimizar los riesgos.

Además, este proyecto y sus resultados presentan características únicas que, al menos en el ámbito universitario, no se han abordado previamente. Por ejemplo, se implementaron dos condiciones iniciales adicionales relacionadas con las posiciones de Venus y la Luna. Además, el programa desarrollado permite obtener datos clave del viaje en cualquier momento dado, como la distancia de la nave respecto a Venus, la Tierra y la Luna, así como su velocidad en diferentes puntos de la trayectoria. Esto facilita un estudio más detallado de los viajes espaciales y también ayuda a determinar las condiciones iniciales necesarias para un viaje específico. Se demostró que pequeños cambios en estas condiciones iniciales tienen un impacto significativo en la trayectoria de la nave, lo que subraya la complejidad y sensibilidad de este tipo de problemas.

Es importante destacar que debido a la naturaleza del problema, existe una amplia gama de trayectorias posibles tanto para los viajes a la Luna como para los viajes a Venus. Dado el gran número de combinaciones de las cinco condiciones iniciales, es posible explorar una multitud de trayectorias útiles e interesantes al variar adecuadamente cualquiera de estas

condiciones.

Para finalizar, aún cuando en este estudio se haya realizado en un enfoque simplificado de dos dimensiones, este proporciona una base sólida para proyectos futuros más detallados y realistas en el campo de la mecánica celeste y la exploración espacial. La comprensión de los conceptos fundamentales y el uso de métodos numéricos establecen los cimientos para abordar desafíos más complejos en el futuro, contribuyendo al progreso de la investigación en este emocionante campo en constante evolución. Este trabajo representa el primer paso hacia proyectos más detallados y realistas, sentando las bases para futuras investigaciones que afronten desafíos aún más complejos en la exploración espacial.

## **7.1 Recomendaciones**

Para futuros trabajos de esta naturaleza, se sugiere tener en cuenta el volumen de los cuerpos involucrados. Esto permitirá el estudio de fenómenos tridimensionales que se asemejen más a la realidad y facilitará la visualización de trayectorias más precisas. Evidentemente, la complejidad aumenta significativamente al considerar estos volúmenes, ya que se debe tener en cuenta características como la distribución de masa de los planetas, su forma precisa y la manera en que rotan en torno a su eje de rotación.

# Bibliografía

- 1 Kleppner, D., & Kolenkow, R. (2014). An introduction to mechanics. Cambridge University Press.
- 2 Fitzpatrick, R. (2012). An introduction to celestial mechanics. Cambridge University Press.
- 3 Barbosa, J. G. P. (2012). Elementos de astronomía de posición. Universidad Nacional de Colombia.
- 4 Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2011). Numerical methods for engineers (Vol. 1221). New York: Mcgraw-hill.
- 5 Danby, J. A. (1997). Computer modeling: from sports to spaceflight... from order to chaos.
- 6 Basante, C. (2013). Órbitas de transferencia libre en un sistema tierra-luna.