Lecciones de

CÁLCULO INTEGRAL

Hernán Alberto Escobar Jiménez
Segundo Javier Caicedo Zambrano
Oscar Fernando Soto Ágreda

TANTVM POSSVMVS QVANTVM SCIMVS
UNIVERSIDAD DE NARIÑO

Editorial
Universidad de Nariño

Lecciones de Cálculo Integral

Lecciones de Cálculo Integral

Hernán Alberto Escobar Jiménez
Segundo Javier Caicedo Zambrano
Oscar Fernando Soto Ágreda

TANTVM POSSVMVS QVANTVM SCIMVS
UNIVERSIDAD DE NARIÑO

Editorial
Universidad de Nariño

Escobar Jiménez, Hernán Alberto

Lecciones de cálculo integral / Hernán Alberto Escobar Jiménez, Oscar Fernando Soto Ágreda, Segundo Javier Caicedo Zambrano. – 1a.ed.- San Juan de Pasto: Editorial Universidad de Nariño, 2023.
187p.:

ISBN: 978-628-7509-45-0

1. Calculo integral 2. Texto guía calculo integral 3. Problemas aplicación integral 4. Principios y aplicaciones – calculo integral I. Escobar Jiménez, Hernán Alberto II. Soto Agreda, Oscar Fernando. III. Caicedo Zambrano, Segundo Javier.

515.43 E746 – SCDD-Ed. 22

Sección de Biblioteca
"Alberto Quijano Guerrero"

Lecciones de Cálculo integral

© Editorial Universidad de Nariño

© Hernán Alberto Escobar Jiménez
Segundo Javier Caicedo Zambrano
Oscar Fernando Soto Ágreda

ISBN 978-628-7509-45-0

Fecha de publicación: 2023

San Juan de Pasto - Colombia

Diseño y diagramación:
Estudio Gráfico y digital Bogotá, D.C. - Colombia

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o con cualquier propósito, sin la autorización escrita de su autor o de la Editorial Universidad de Nariño.

Índice general

Introducción

Lecciones de Cálculo Integral es un texto a nivel universitario, diseñado como texto guía o de consulta para estudiantes de los cursos de Cálculo Integral de los programas de Física, Ingeniería Civil, Electrónica y de Sistemas, como también, de Licenciatura en Matemáticas y en Informática de la Universidad de Nariño. Por su contenido y estructura, es la continuación del libro de texto denominado Lecciones de Cálculo Diferencial de los mismos autores, el cual, también puede ser utilizado por estudiantes de Instituciones de nivel superior que ofrezcan programas similares a los mencionados, o de corte técnico, que, en su plan de estudios, incluyan la asignatura de Cálculo Integral.

En el primer capítulo del texto se desarrolla toda la temática relacionada con los métodos de integración o antidiferenciación. En el segundo capítulo, se construye el concepto de integral definida según Riemann, acompañado de la formulación y demostración formal de sus propiedades. El tercer capítulo, está dedicado a plantear y resolver problemas de aplicación de la integral definida, previa la construcción y demostración de los modelos de aplicación en las que aparecen las integrales definidas, tales como el cálculo de áreas, volúmenes de revolución, longitud de arco, volúmenes de sólidos de sección plana conocida, área de revolución y centro de gravedad de regiones planas. Finalmente, en el cuarto capítulo se aborda lo referente al cálculo de integrales impropias.

Al final de cada capítulo o sección, se plantea una serie de ejercicios, con respuesta con el fin de que los estudiantes y lectores, los resuelvan y, de paso, comprueben y comparen resultados. Se hace énfasis, en que los estudiantes o lectores de este texto, deben tener conocimientos previos de Cálculo Diferencial y de Geometría Analítica. Los autores esperan que este trabajo sea de utilidad para el cabal aprendizaje del Cálculo Integral, sus principios y aplicaciones.

Los autores.
Pasto, noviembre de 2021

Capítulo 1

Elementos fundamentales de integración

Capítulo 1

Elementos fundamentales de integración

1.1. Integral indefinida (antiderivada o primitiva)

En los cursos de Cálculo Diferencial, se estudia el siguiente problema: dada la función $F(x)$, determinar su función derivada, esto es, $f(x) = F'(x)$.

En esta sección, se aborda el problema inverso o recíproco: a partir de la función $f(x)$ se necesita encontrar la función $F(x)$, cuya derivada es precisamente $f(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$.

1.1.1. Definiciones y ejemplos

Sea $f(x)$ función continua en un intervalo I de números reales. Si existe una función $F(x)$, tal que $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$, entonces,

$$F(x) = \int f(x)dx + C.$$

En donde,

$F(x)$ = integral indefinida,antiderivada o primitiva de $f(x)$.
$f(x)$ = integrando.
$f(x)dx$ = elemento de integración.
C = constante de integración.
$\int$ = símbolo integral.
De la definición anterior, es conveniente anotar lo siguiente:

- La integral indefinida $y = \int f(x)dx + C$, geométricamente representa una familia de curvas, las cuales se desplazan hacia arriba o hacia abajo sobre el Eje x, en dependencia del signo de C.
- La derivada de una función elemental, es siempre una función elemental; mientras que, la primitiva o antiderivada de una función elemental no siempre puede expresarte como la suma finita de funciones elementales.

Por otra parte, se tienen las siguientes expresiones:

a) $\left[\int f(x)dx\right]' = [F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$.

b) $d\left[\int f(x)dx\right] = d\left[F(x)+C\right] = dF(x) = f(x)dx$.

c) $\int dF(x) = F(x) + C$.

Ejemplo 1
Calcular

a) $\int \text{sen } 2xdx$.

b) $\int \frac{dx}{(7x+2)}$.

Solución 1

a) $\int \text{sen } 2xdx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$.
En efecto, puesto que $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$, entonces,

$$F'(x) = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + C\right]' = -\frac{1}{2}(-\text{sen } 2x)(2) = \text{sen } 2x = f(x).$$

b) $\int \frac{dx}{(7x+2)} = \frac{1}{7}ln|7x+2| + C$.
Como $F(x) = \frac{1}{7}ln|7x+2| + C$, entonces,

$$F'(x) = \left[\frac{1}{7}ln|7x+2| + C\right]' = \frac{1}{7} \times \frac{1}{(7x+2)} \times 7 = \frac{1}{(7x+2)} = f(x).$$

Ejemplo 2
Calcular $\int xdx$ y realizar la gráfica de solución.
Solución
Es evidente que,

$$\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

puesto que,
$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$, entonces $F'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)' = \frac{1}{2}(2x) = x = f(x)$.
La familia de curvas $y = \frac{1}{2}x^2 + C$, se ilustra en la Figura 1 para diversos valores de C.

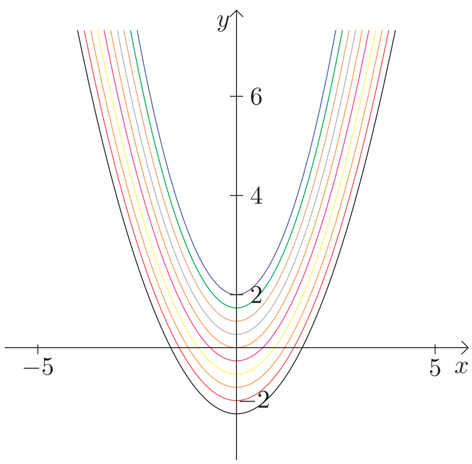


Figura 1. Familia de curvas de una integral indefinida

1.1.2. Propiedades de la integral indefinida

Si $f(x) y g(x)$ son funciones continuas en un intervalo I de números reales y a es un escalar, entonces,

a) $\displaystyle\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

b) $\displaystyle\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Demostración

a) Al derivar los dos miembros de la igualdad, se tiene,

$$\left(\int af(x)dx\right)' = af(x)$$
$$a\left(\int f(x)dx\right)' = a\left(\int f(x)dx\right)' = af(x).$$

Como las derivadas de ambos miembros son iguales, su diferencia es una constante, entonces, se concluye que,

$\displaystyle\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$

b) Al derivar el segundo miembro de la igualdad, se llega a lo siguiente:

$$\left(\int f(x)dx + \int g(x)dx\right)' = \left[\int f(x)dx\right]' + \left[\int g(x)dx\right]' = f(x)+g(x).$$

Por tanto,

$\displaystyle\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Se nota que la integral indefinida cumple las propiedades de la linealidad, consideradas en Algebra Lineal.

Por otra parte, se debe tener en cuenta los resultados siguientes:

1) Si $\displaystyle\int f(x)dx = F(x)+C$, entonces,

$\displaystyle\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax)+C.$

2) Si $\displaystyle\int f(x)dx = F(x)+C$, entonces,

$\displaystyle\int f(x+b)dx = F(x+b)+C.$

3) Si $\displaystyle\int f(x)dx = F(x+C)$, entonces,

$\displaystyle\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}f(ax+b)+C.$

La demostración de estos resultados, se realizan por medio de la derivación en los dos miembros de la igualdad.

1.1.3. Integrales inmediatas (tabla de integrales)

En las siguientes líneas, se detallan las primitivas de algunas funciones. Estas integrales se denominan inmediatas porque se deducen directamente de las fórmulas de derivación.

1) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C,\ n \neq -1.$

2) $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C.$

3) $\int a^x dx = \frac{a}{lna},\ a > 0,\ a \neq 1.$

4) $\int e^x dx = e^x + C.$

5) $\int lnxdx = x(lnx - 1) + C.$

6) $\int \text{sen } ax\ dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C.$

7) $\int \cos ax\ dx = \frac{1}{a}\text{sen } ax + C.$

8) $\int tg\ x\ dx = -\frac{1}{a}ln|\cos ax| + C.$

9) $\int ctg\ xdx = -\frac{1}{a}ln|\text{sen } ax| + C.$

10) $\int \sec ax\ dx = \frac{1}{a}ln|\sec ax + tg\ ax| + C.$

11) $\int \csc ax\ dx = -\frac{1}{a}ln|\csc ax - ctg\ ax| + C.$

12) $\int \sec^2 axdx = \frac{1}{a}tg\ ax + C.$

13) $\int \csc^2 axdx = -\frac{1}{a}ctg\ ax + C.$

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$

15) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C.$

16) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + C.$

18) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C.$

19) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\text{arcsen } \frac{x}{a} + C.$

20) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = ln|f(x)| + C.$

21) $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\text{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$

22) $\int \sqrt{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + C.$

23) $\int [f(x)]^m f'(x)dx = \frac{1}{m+1}[f(x)]^{m+1} + C,\ m \neq 1$ (Potencia generalizada).

Ejemplo 3

Aplicar las propiedades de las integrales indefinidas y la tabla de integrales inmediatas, para calcular las siguientes integrales:

1) $\int \left(4x^3 - 3x - 10x + \frac{1}{x^2}\right) dx.$

2) $\int \left(3x - \sqrt{x} + 2\sqrt[5]{x^2}\right) dx.$

3) $\int \left(\frac{6}{5x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right) dx.$

4) $\int (1 + 2x)\sqrt[3]{x}dx.$

5) $\int \frac{6 - x - 7x^2}{\sqrt{x}}dx.$

6) $\int \frac{4 - 3x}{2 - x^2}dx.$

7) $\int \frac{5x^2 + 5x + 7}{x^2 + 9}dx.$

8) $\int \frac{2x - 9}{\sqrt{4 - x^2}}dx.$

9) $\int \frac{(1 - 2x)}{x^2 + 2x + 2}dx.$

10) $\int \sqrt{x^2 - x^4}dx.$

Solución

$$1)\qquad \begin{aligned}\int\left(4x^3-3x-10x+\frac{1}{x^2}\right)dx &= 4\int(x^3)dx-3\int xdx-10\int dx+\int x^{-2}dx,\\ &=\frac{4}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2-10x-\frac{1}{x},\\ &=x^4-\frac{3}{2}x^2-10x-\frac{1}{x}+C.\end{aligned}$$

$$2)\qquad \begin{aligned}\int\left(3x-\sqrt{x}+2\sqrt[5]{x^2}\right)dx &= 3\int xdx-\int x^{\frac{1}{2}}dx+2\int x^{\frac{2}{5}}dx,\\ &=\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2\times\frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}},\\ &=\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{10}{7}x^{\frac{7}{5}},\\ &=\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{10}{7}\sqrt[5]{x^7},\\ &=\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{10}{7}x^5\sqrt[5]{x^2}+C.\end{aligned}$$

$$3)\qquad \begin{aligned}\int\left(\frac{6}{5x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right)dx &= \frac{6}{5}\int\frac{dx}{x}-2\int x^{-\frac{1}{2}}dx+3\int x^{-\frac{1}{4}}dx,\\ &=\frac{6}{5}ln|x|-2\times 2x^{\frac{1}{2}}+3\times\frac{4}{3}\times x^{\frac{4}{3}},\\ &=\frac{6}{5}ln|x|-4\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x^3}+C.\end{aligned}$$

$$4)\qquad \begin{aligned}\int(1+2x)\sqrt[3]{x}dx &= \int\sqrt[3]{x}dx+2\int x\sqrt[3]{x}dx,\\ &=\int x^{\frac{1}{3}}dx+2\int x\times x^{\frac{1}{3}}dx,\\ &=\int x^{\frac{1}{3}}dx+2\int x^{\frac{4}{3}}dx,\\ &=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+2\times\frac{3}{7}\times x^{\frac{7}{3}},\\ &=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{6}{7}\times\sqrt[3]{x^7},\\ &=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+\frac{6}{7}\times x^2\sqrt[3]{x},\\ &=\left(\frac{3}{4}x+\frac{6}{7}\times x^2\right)\sqrt[3]{x}+C.\end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned}\int \frac{6-x-7x^2}{\sqrt{x}}dx &= \int \frac{6}{\sqrt{x}}dx - \int \frac{x}{\sqrt{x}}dx - 7\int \frac{x^2}{\sqrt{x}}dx,\\ &= 6\int x^{-\frac{1}{2}}dx - \int x^{\frac{1}{2}}dx - 7\int x^{\frac{3}{2}}dx,\\ &= 6\times 2\times x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 7\times\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}},\\ &= 12\sqrt{x} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{14}{5}x^2\sqrt{x},\\ &= \left(12 - \frac{2}{3}x - \frac{14}{5}x^2\right)\sqrt{x} + C.\end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned}\int \frac{4-3x}{2-x^2}dx &= \int \frac{4}{2-x^2}dx - \int \frac{3x}{2-x^2}dx,\\ &= 4\int \frac{dx}{2-x^2} + \frac{3}{2}\int \frac{-2x}{2-x^2}dx,\\ &= 4\times\frac{1}{2\sqrt{2}}\times ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right| + \frac{3}{2}ln|2-x^2| + C.\end{aligned}$$

7) $$\begin{aligned}\int \frac{5x^2+5x+7}{x^2+9}dx &= \int \left[5 + \frac{5x-38}{x^2+9}\right]dx,\\ &= 5\int dx + 5\int \frac{xdx}{x^2+9} - 38\int \frac{dx}{x^2+9},\\ &= 5\int dx + \frac{5}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+9} - 38\int \frac{dx}{x^2+9},\\ &= 5x + \frac{5}{2}ln(x^2+9) - \frac{38}{3}arctg\left(\frac{x}{3}\right) + C.\end{aligned}$$

8) $$\begin{aligned}\int \frac{2x-9}{\sqrt{4-x^2}}dx &= \int \frac{2xdx}{\sqrt{4-x^2}} - 9\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}},\\ &= -\int (-2x)(4-x^2)^{-\frac{1}{2}} - 9\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}},\\ &= -2(4-x^2)^{-\frac{1}{2}} - 9\ \text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right),\\ &= -2\sqrt{4-x^2} - 9\ \text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + C.\end{aligned}$$

9) $$\int \frac{(1-2x)}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{[A(2x+2)+B]dx}{x^2+2x+2}$$

Donde A y B son constantes por determinar; además, $d(x^2+2x+2) = (2x+2)dx$. Al igualar los numeradores de las fracciones, se tiene:

$A(2x+2)+B = 1-2x$; $2Ax+2A+B = 1-2$.

$2A = -2$; $A = -1$; $2A+B = 1$; $B = 3$.

Luego,

$$\begin{aligned}\int \frac{(1-2x)}{x^2+2x+2}dx &= -\int \frac{(2x+2)}{x^2+2x+2}dx + 3\int \frac{dx}{(x^2+2x+1)+1},\\ &= ln|x^2+2x+2| + 3\int \frac{dx}{(x+1)^2+1},\\ &= -ln|x^2+2x+2| + 3\ arctg(x+1) + C.\end{aligned}$$

10) $$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-x^4}dx &= \int \sqrt{x^2(1-x^2)}dx = x\int \sqrt{1-x^2}dx,\\ &= \int x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = -\frac{1}{2}\int (-2x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx,\\ &= -\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3},\\ &= -\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

Ejemplo 4
Calcular las integrales que siguen:

1) $\displaystyle\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx.$ 2) $\displaystyle\int \frac{\cos 3xdx}{\sqrt{4-\text{sen }3x}}.$

3) $\displaystyle\int e^x\sqrt{a-be^x}dx.$ 4) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{tgx}}{\cos^2 x}dx.$

5) $\displaystyle\int \sqrt{6x-x^2dx}.$ 6) $\displaystyle\int \sec^5 3xtg3xdx.$

Solución

1) $$\begin{aligned}\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx &= \int \frac{e^xdx}{e^x+1} - \int \frac{dx}{e^x+1},\\ &= \int \frac{e^xdx}{e^x+1} - \int \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}(e^x+1)},\\ &= \int \frac{e^xdx}{e^x+1} + \int \frac{-e^{-x}dx}{(e^{-x}+1)},\\ &= ln|e^x+1| + ln|e^{-x}+1|,\\ &= ln\left|(e^x+1)(e^{-x}+1)\right| + C.\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}\int \frac{\cos 3x\ dx}{\sqrt{4-\ \text{sen }3x}} &= \int \cos 3x(4-\ \text{sen }3x)^{-\frac{1}{2}}dx,\\ &= -\frac{1}{3}\int -3\cos 3x(4-\ \text{sen }3x)^{-\frac{1}{2}}dx,\\ &= -\frac{1}{3}\times 2\times(4-\ \text{sen }3x)^{\frac{1}{2}},\\ &= -\frac{2}{3}(4-\ \text{sen }3x)^{\frac{1}{2}} + C.\end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned}\int e^x\sqrt{a-be^x}\;dx &= \int e^x(a-be^x)^{\frac{1}{2}}dx,\\ &= -\frac{1}{b}\int -be^x(a-be^x)^{\frac{1}{2}}dx,\\ &= -\frac{1}{b}\times\frac{2}{3}(a-be^x)^{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3b}\sqrt{(a-be^x)^3}+C.\end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt[3]{tgx}}{\cos^2 x}dx &= \int \sec^2 x(tg\ x)^{\frac{1}{3}}dx,\\ &= \frac{3}{4}(tgx)^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{tg^4x} = \frac{3}{4}tgx\sqrt[3]{tg\ x}+C.\end{aligned}$$

5)
$$\begin{aligned}\int\sqrt{6x-x^2}\;dx &= \int\sqrt{-(x^2-6x)}\;dx,\\ &= \int\sqrt{-\left[(x^2-6x+9)-9\right]}\;dx,\\ &= \int\sqrt{-[x-3)^2-9}\;dx,\\ &= \int\sqrt{9-[x-3)^2}\;dx,\\ &= \frac{1}{2}(x-3)\sqrt{9-(x-3)^2}+\frac{3^2}{2}\ \text{arcsen}\ \left(\frac{x-3}{3}\right),\\ &= \frac{1}{2}(x-3)\sqrt{6x-x^2}+\frac{9}{2}\ \text{arcsen}\ \left(\frac{x-3}{3}\right)+C.\end{aligned}$$

6)
$$\begin{aligned}\int \sec^5\ 3xtg3xdx &= \int\sec^4\ 3x(\sec 3x\times tg\ 3x)dx,\\ &= \frac{1}{3}\int\sec^4\ 3x(\sec 3x\times tg\ 3x)(3dx),\\ &= \frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\ \sec^5 3x = \frac{1}{15}\sec^5 3x+C.\end{aligned}$$

Ejemplo 5

1. Si $f'(x)=3x^2-4x+\dfrac{3}{x^2}$ y $f(2)=\dfrac{1}{2}$; determinar $f(x)$.
2. Dado que $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+1-x^2$ y $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{11}{24}$, determinar $f(x)$.
3. Si $f'(x)=\cos x+\text{sen}\ x$ y $f(0)=3$; determinar $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.
4. Si $f'(x)=\sec x\times tgx$; determinar $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-f(0)$.

Solución

1) Si $f'(x) = 3x^2 - 4x + \dfrac{3}{x^2}$ entonces, $f(x) = \displaystyle\int \left(3x^2 - 4x + \frac{3}{x^2}\right) dx + C$.

$f(x) = x^3 - 2x^2 - \dfrac{3}{x} + C$, pero $f(2) = \dfrac{1}{2}$, entonces,

$$\frac{1}{2} = 2^3 - 2(2^2) - \frac{3}{2} + C;$$
$$C = \frac{1}{2} + \frac{3}{2};$$
$$C = 2.$$

Luego, $f(x) = x^3 - 2x^2 - \dfrac{3}{x} + 2$.

2) Como $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 1 - x^2$, entonces,

$$f(x) = \int \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 1 - x^2\right] dx$$

$f(x) = \text{arcsen } x + x - \dfrac{1}{3}x^3 + C$; pero $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{11}{24}$ entonces,

$$\frac{11}{24} = \text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + C,$$
$$\frac{11}{24} = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + C,$$
$$C = -\frac{\pi}{6}.$$

Por tanto: $\dfrac{11}{24} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{24} + \dfrac{\pi}{6}$.

3) Como $f'(x) = \cos x + \text{sen } x$, entonces,

$$f(x) = \int (\cos x + \text{sen } x) dx + C,$$

$f(x) = \text{sen } x - \cos x + C$; dado que, $3 = \text{sen } 0 - \cos 0 + C$, entonces,

$$3 = 1 + C,$$
$$C = 4.$$

Luego,

$$f(x) = \text{sen } x - \cos x + 4.$$

Finalmente,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4,$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + 1 + 4,$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5.$$

4) Como $f'(x) = \sec x \times tgx$, entonces,

$$f(x) = \int secx\ tgx\ dx + C,$$
$$f(x) = \sec x + C.$$

Por tanto,

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0) = \left(\sec\left(\frac{\pi}{4}\right) + C\right) - (\sec 0 + C) = \sqrt{2} + C - 1 - C = \sqrt{2} - 1.$$

Así que,

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0) = \sqrt{2} - 1.$$

Ejercicios propuestos 1.1

A) Calcular la antiderivada de las siguientes integrales indefinidas:

1) $\displaystyle\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}dx.$ 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}dx.$

3) $\displaystyle\int x^3\sqrt{2x^2+3}\ dx.$ 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2-y)^3}.$

5) $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x^2+4)^2}.$ 6) $\displaystyle\int x(1-x^3)^2dx.$

7) $\displaystyle\int x^2(1-x^3)^2\ dx.$ 8) $\displaystyle\int \frac{3zdz}{\sqrt[3]{z^2+3}}.$

9) $\displaystyle\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x-4}}.$ 10) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+2}{x+2}\ dx.$

11) $\displaystyle\int (e^x-x^e)dx.$ 12) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx.$

13) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}.$ 14) $\displaystyle\int (\cos x-\text{sen }x)^2dx.$

15) $\displaystyle\int tg^5x\sec^2 x\ dx.$ 16) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos 3x}.$

17) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 3x}{tg3x}dx.$ 18) $\displaystyle\int \frac{\sec^5 x}{\csc x}dx.$

19) $\displaystyle\int e^{tg2x}\sec^2 2xdx.$ 20) $\displaystyle\int x\sec^2 x^2dx.$

B) Calcular las integrales siguientes:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}.$ 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-5}}.$

3) $\displaystyle\int \frac{e^2xdx}{1+e^{4x}}.$ 4) $\displaystyle\int \frac{(2x-3)dx}{x^2+6x+13}.$

5) $\displaystyle\int \frac{(5-4x)dx}{-4x^2+12x-8}.$ 6) $\displaystyle\frac{dx}{\sqrt{4x^2-25}}.$

7) $\displaystyle\int \frac{2x^4-x^2}{2x^2+1}dx.$ 8) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-8x}\ dx.$

9) $\displaystyle\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

C) Determinar la función $f(x)$ que satisfaga la condición dada en cada caso:

1) $f'(x) = \dfrac{7x^3 + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^5}}$; $f(1) = 1$.

2) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$; $f(-2) = 0$.

3) $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$; $f(9) = 1$, determinar $f(4)$.

4) $f'(x) = \dfrac{\cos^3 x + 1}{\cos^2 x}$ y $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, determinar $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

5) $f'(x) = 7\sqrt[3]{x^4 + x}$ y $f'(1) = \dfrac{1}{2}$, determinar $f(8)$.

1.2. Integración por sustitución

Se utiliza cuando no es posible encontrar la primitiva de manera inmediata. Se trata de sustituir el integrando o parte de este, por otra función, de manera que la expresión resultante sea de fácil integración.

1.2.1. Sustitución de variable

Considerar la siguiente integral:

$$I = \int f(x)dx. \tag{1.1}$$

Si no es posible encontrar la primitiva de manera inmediata, aunque se sabe que existe, entonces, es posible plantear un cambio de variable de la siguiente forma:

$$x = Q(t) \tag{1.2}$$

Donde Q es función continua de t, lo mismo que su derivada $Q'(t)$; además, posee inversa.

Entonces,

$$dx = Q'(t)\ dt$$

Se demostrará que,

$$\int f(x)dx = \int f[Q(t)]\ Q'(t)dt. \tag{1.3}$$

Para el efecto, se calculan las derivadas con respecto a "x" en los dos miembros, así:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)dx\right) = f(x). \tag{1.4}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int f[Q(t)]\ Q'(t)dt\right] = \frac{d}{dt}\left[\int f[Q(t)]\ Q'(t)dt\right]\ \frac{dt}{dx}. \tag{1.5}$$

Por la regla de derivación inversa, se tiene que,

$$\frac{dx}{dt} = Q'(t),\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{Q'(t)}.$$

Al reemplazar en (5), se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\left[\int f[Q(t)]\,Q'(t)dt\right] = \frac{d}{dt}\left[\int f[Q(t)]\,Q'(t)dt\right]\frac{1}{Q'(t)},\; f[Q(t)]Q'(t)\frac{1}{Q'(t)} = f[Q(t)] = f(x). \tag{1.6}$$

Dado que las expresiones (4) y (6) son iguales, entonces, por transitividad se obtiene que,

$$\int f(x)dx = \int f[Q(t)]\;Q'(t)dt.$$

Nota

Para utilizar formalmente la técnica de sustitución, se sugiere seguir los siguientes pasos:

a) Optar por la sustitución que sea conveniente. El cambio de variable que se elija depende del integrando.

b) Determinar el diferencial de la sustitución que elija. La nueva integral se debe definir en términos de la nueva variable.

c) Resolver la integral resultante del cambio de variable, la cual, debe ser inmediata o de fácil solución.

d) Regresar a la variable inicial y simplificar.

Ejemplo 5

Calcular las integrales dadas mediante las sustituciones que se sugieren en cada caso:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\sqrt{1+2x}};\; \sqrt{1+2x} = z.$ 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};\; x = -\frac{1}{t}.$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\text{sen }2xln(tg\,x)};\; ln(tg) = y.$ 4) $\displaystyle\int x^5\sqrt{2+x^3}\,dx;\; z^2 = 2+x^3.$

Solución

1) Sea $I = \displaystyle\int \frac{dx}{3+\sqrt{1+2x}}$. La sustitución $\sqrt{1+2x} = Z$, conduce a:

$$1+2x = z^2;\; d(1+2x) = d(z^2), \quad 2dx = 2zdz.$$

Por tanto, $I = \displaystyle\int \frac{zdz}{3+z}$.

Al efectuar la división formal de z entre $3+z$, se obtiene:

$$I = \int \left[1 - \frac{3}{z+3}\right]\; dz = z - 3\;ln|z+3| + C.$$

Dado que, $z = \sqrt{1+2x}$, entonces,

$$I = \sqrt{1+2x} - 3\;ln|\sqrt{1+2x}+3| + C.$$

2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. Sea $x = \frac{1}{t}$; $dx = -\frac{dt}{t^2}$; entonces,

$$I = -\int \frac{dt}{t^2} \times \frac{1}{\frac{1}{t} \times \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 2}} = -\int \frac{dt}{t^2 \frac{\sqrt{2-t^2}}{t^2}},$$

$$I = -\int \frac{dt}{\sqrt{2\left(\frac{1}{2} - t^2\right)}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{2} - t^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ arcsen } \left(\frac{t}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right),$$

$$I = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ arcsen } \left(\sqrt{2}t\right).$$

Pero $x = \frac{1}{t}$; $t = \frac{1}{x}$, entonces,

$$I = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ arcsen } \left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right) + C$$

3) $I = \int \frac{dx}{\text{sen } 2x ln(tg\, x)}$.

Sea $ln(tg\, x) = y$; $d(ln(tg\, x)) = dy$.

$$\frac{\sec^2 x}{tgx} \; dx = dy; \; \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\text{sen } x}{\cos x}} \; dx = dy,$$

$$\frac{dx}{\text{sen } x \cos x} = dy; \; \frac{2dx}{\text{sen } 2x} = dy.$$

Por tanto,

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} ln|y| = \frac{1}{2} ln|ln(tgx)| + C.$$

4) $\int x^5 \sqrt{2+x^3} \; dx$.

$$I = \int x^3 x^2 \sqrt{2+x^3} = \int x^3 \sqrt{2+x^3} \; x^2 dx$$

Sea $z^2 = 2 + x^3$; $d(z^2) = d(2+x^3)$; $2zdz = 3x^2 dx$,

$$\frac{2}{3} zdz = x^2 dx; \; z = \sqrt{2+x^3}.$$

Al reemplazar en la integral dada, se obtiene,

$$I = \frac{2}{3} \int (z^4 - 2z^2) dz = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{5} z^5 - \frac{2}{3} z^3\right],$$

$$I = \frac{2}{45} \left[3z^5 - 10z^3\right] = \frac{2z^3}{45} (3z^2 - 10).$$

Pero $z = \sqrt{2+x^3}$, entonces,

$$I = \frac{2x(2+x^3)^3}{45} \; [3(2+x^3) - 10]$$

$$I = \frac{2\sqrt{(2+x^3)^3}}{45} \; [3x^3 - 4] + C.$$

1) $I = \int \frac{ln(lnx)}{xlnx}\,dx.$ 2) $I = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + e^x + 1}.$

3) $I = \int \frac{x^3 dx}{(2+3x)^{\frac{7}{2}}}.$ 4) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}.$

5) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}}.$

Ejemplo 6.
Determinar las integrales dadas a continuación:

Solución.

1) $I = \int \frac{ln(lnx)}{xlnx} dx = \int ln(lnx) \left[\frac{dx}{xlnx}\right].$

Sea $u = ln(lnx)$, entonces, $du = d[ln(lnx)]$.

$du = \frac{1}{lnx}\frac{1}{x}\,dx$; $du = \frac{1}{x}\frac{dx}{lnx}.$

Por tanto,

$$I = \int udu = \frac{1}{2}u^2 + C;\ I = \frac{1}{2}[ln(lnx)]^2 + C,$$
$$I = \frac{1}{2}ln^2(\ln x) + C.$$

2) $I = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + e^x + 1}.$

Sea $z = e^x$ entonces $dz = d(e^x);\ dz = e^x dx.$

Luego,

$$I = \int \frac{dz}{z^2 + 2z + 1} = \int \frac{dz}{(z+1)^2},$$
$$I = -\frac{1}{z+1} + C,$$
$$I = -\frac{1}{e^x + 1} + C.$$

3) $I = \int \frac{x^3 dx}{(2+3x)^{\frac{7}{2}}}.$

Sea $2 + 3x = y^2;\ x = \frac{y^2 - 2}{3}$ entonces, $dx = d\left[\frac{y^2-2}{3}\right];\ dx = \frac{2}{3}ydy.$

Luego,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\left(\frac{y^2-2}{3}\right)^3 \times \frac{2}{3} y dy}{y^7} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{27} \int \frac{(y^2-2)^3}{y^6} dy, \\
I &= \frac{2}{81} \int \left[\frac{y^2-2}{y^6}\right]^3 dy = \frac{2}{81} \int \left[1 - \frac{2}{y^2}\right]^3 dy, \\
I &= \frac{2}{81} \int \left[1 - \frac{6}{y^2} + \frac{12}{y^4} \cdot \frac{8}{y^6}\right] dy = \frac{2}{81}\left[y + \frac{6}{y} - \frac{4}{y^3} + \frac{8}{5y^5}\right] + C, \\
I &= \frac{2}{81}\left[(2x+3)^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{(2x+3)^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{(2x+3)^{\frac{3}{2}}} + \frac{8}{5(2x+3)^{\frac{5}{2}}}\right] + C.
\end{aligned}
$$

4) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$.

Sea $u = \sqrt{\sqrt{x}+1}$, $u^2 = \sqrt{x}+1$; $\sqrt{x} = u^2 - 1$; $x = (u^2-1)^2$, entonces,

$$dx = d\left[(u^2-1)^2\right]; \; dx = 4u(u^2-1)du.$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{4u(u^2-1)du}{u} = 4\int (u^2-1)du, \\
I &= \frac{4}{3}u^3 - 4u, \\
I &= \frac{4}{3}\sqrt{\left(\sqrt{\sqrt{x}+1}\right)^3} - 4\sqrt{\sqrt{x}+1} + C.
\end{aligned}
$$

5) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}$.

Al racionalizar, se obtiene,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}\right)} dx, \\
I &= \int \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{\left(\sqrt{2x+1}\right)^2 - \left(\sqrt{x+1}\right)^2} dx = \int \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{2x+1-x-1} dx, \\
I &= \int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx - \int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx. \qquad \text{(a)}
\end{aligned}
$$

Llámese $I_1 = \displaystyle\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx$.

Sea $\sqrt{2x+1} = u$; $2x+1 = u^2$; $dx = udu$; $x = \dfrac{u^2-1}{2}$.

Luego,

$$
\begin{aligned}
I_1 &= 2\int \frac{u \times udu}{u^2-1} = 2\int \frac{u^2du}{u^2-1} = 2\int \left[1-\frac{1}{u^2-1}\right] du,\\
I_1 &= 2u + ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|,\\
I_1 &= 2\sqrt{2x+1} + ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|. \qquad \text{(b)}
\end{aligned}
$$

Llámese $I_2 = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\, dx.$

Sea $\sqrt{x+1} = t;\ x+1 = t^2;\ x = t^2-1;\ dx = 2tdt.$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{t(2tdt)}{t^2-1} = 2\int \frac{t^2dt}{t^2-1},\\
I_2 &= \int \left[1-\frac{1}{t^2-1}\right] dt = 2t + ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|,\\
I_2 &= 2\sqrt{x+1} + ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|.
\end{aligned}
$$

Al reemplazar (b) y (c) en (a), se obtiene,

$$I = 2\sqrt{2x+1} + ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right| - 2\sqrt{x+1} + ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C.$$

Ejercicios propuestos 1.2

1) Determinar la función $v(x)$, para que se verifique la igualdad:

a) $\displaystyle\int e^{\operatorname{sen} x} v(x)dx = e^{\operatorname{sen} x}.$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+9x^2} v(x)dx = arctg\, 3x.$

c) $\displaystyle\int (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} v(x)dx = \frac{2}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}.$

d) $\displaystyle\int \frac{v(x)}{x^4+1}\, dx = ln|x^4+1|.$

e) $\displaystyle\int \frac{v(x)}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx = arcsen2x.$

2) Calcular las integrales dadas, por medio de la técnica de sustitución.

a) $\displaystyle\int \frac{(\text{sen } x + \cos x)dx}{\sqrt[3]{\text{sen } x - \cos x}}.$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+\cos 2x}}.$

c) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+e^x}}.$ d) $\displaystyle\int \frac{ln(x+1)}{x+1}\,dx.$

e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{tgx+1}}{\cos^2 x}\,dx.$ f) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)artcg\,x}.$

g) $\displaystyle\int (3^x e^x)dx.$ h) $\displaystyle\int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x}\,dx.$

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{b^2+a^2x^2}}.$ j) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{5-x^3}.$

k) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-ln^2x}}.$ l) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-\sqrt{x}}}.$

m) $\displaystyle\int \frac{\text{sen } 2xdx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}.$ n) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}.$

o) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$ p) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}.$

q) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+lnx}}{xlnx}\,dx.$ r) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

s) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[3]{1+e^x}}.$ t) $\displaystyle\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

1.3. Integración por partes

La técnica de integración por partes, se utiliza para integrales no inmediatas y para aquellos que la sustitución de variable resulta inconveniente.

Dado que no existe una fórmula para integrar cualquier producto de funciones, las reglas de integración por partes es una excelente herramienta para integrar este tipo de funciones. Se base en la fórmula para derivar un producto de funciones.

1.3.1. Definiciones y ejemplos

Sean $u = u(x),\ v = v(x)$ funciones diferenciales de x, entonces,

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Al integrar en los dos miembros, se llega a,

$$uv = \int udv + \int vdu.$$

O bien,

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{1.7}$$

La relación (1.7) se conoce como la fórmula de integración por partes. Como puede verse, en el lado izquierdo de (1.7), la integral tiene dos factores u y dv; en el derecho, la integral $\int vdu$, debe ser inmediata o fácilmente integrable.

Ejemplo 6

Mediante la técnica de integración por partes, calcular las primitivas de las siguientes integrales:

1) $\displaystyle\int xe^{3x}dx.$ 2) $\displaystyle\int x^2\text{sen } 2x\,dx.$

3) $\displaystyle\int lnxdx.$ 4) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx.$

5) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx.$ 6) $\displaystyle\int x\,arctg\,x\,dx.$

Solución

1) $\displaystyle\int xe^{3x}dx.$

Sea $u = e^{3x}$; $dv = xdx \Rightarrow du = 3e^{3x}dx;\ v = \dfrac{1}{2}x^2.$

Entonces, $I = \dfrac{1}{2}x^2e^{3x} - \dfrac{3}{2}\displaystyle\int x^2e^{3x}dx.$

Se puede observar que, la integral del lado derecho se ha complicado y no cumple con el requisito de ser fácilmente calculable. Esto significa que la escogencia u y dv, en el producto inicial, no fue conveniente.

Sea $u = x$; $du = dx \Rightarrow dv = e^{3x}dx;\ v = \dfrac{1}{3}e^{3x}.$

Entonces,

$$I = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx,$$
$$I = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x},$$
$$I = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right)e^{3x} + C.$$

2) $\displaystyle\int x^2\text{sen } 2x\,dx.$

Sea $u = x^2;\ du = 2xdx \Rightarrow dv = \text{sen } 2xdx;\ v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x.$

Luego,

$$I = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{2}{2}\int x\cos 2xdx.$$

Se aplica nuevamente la técnica de integración por partes:

$$u_1 = x;\ du_1 = dx \Rightarrow dv_1 = \cos 2xdx;\ v = \frac{1}{2}\text{sen } 2x.$$

Entonces,

$$I = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \left[\frac{1}{2}x\text{sen } 2x - \frac{1}{2}\int \text{sen } 2xdx\right],$$
$$I = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\text{sen } 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

3) $\int lnxdx.$

Se toman u y dv de la única manera posible:

$$u = lnx;\ du = dx \Rightarrow dv = dx;\ v = x$$

Entonces,

$$I = xlnx - \int x\frac{dx}{x}$$
$$I = xlnx - x + C.$$

4) $\int x\sqrt{x+1}\,dx$

Sea $u = x$; $du = dx \Rightarrow dv = (x+1)^{\frac{1}{2}};\ v = \frac{1}{2}(x+1)^{\frac{3}{2}}$

$$I = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\int (x+1)^{\frac{3}{2}}dx,$$
$$I = \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\times\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}},$$
$$I = \frac{2}{3}x\sqrt{(x+1)^3} - \frac{4}{15}\sqrt{(x+1)^5} + C.$$

5) $I = \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \int x\left[\frac{xdx}{(x^2+1)^2}\right].$

Sea $u = x;\ du = dx \Rightarrow dv = x(x^2+1)^{-2}dx;\ v = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}.$

Entonces,

$$I = -\frac{1}{2x(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1},$$
$$I = -\frac{1}{2x(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ arctgx + C.$$

6) $I = \int xarctgxdx = \int arctgx(xdx).$

Sea $u = arctgx;\ du = \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow dv = xdx;\ v = \frac{1}{2}x^2.$

Entonces,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}x^2 arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}x^2 arctgx - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{1+x^2}\right] dx,\\
I &= \frac{1}{2}x^2 arctgx - \frac{1}{2}[x - arctgx],\\
I &= \frac{1}{2}x^2 arctgx - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}arctgx,\\
I &= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right) arctgx - \frac{1}{2}x + C.
\end{aligned}$$

NOTA

Para determinar la primitiva de una función, en ocasiones se requiere utilizar más de una sustitución y además la aplicación de la integración por partes. En las siguientes líneas se plantean y resuelven integrales con las anteriores características.

Ejemplo 7.

1) $I = \int \frac{zlnzdz}{\sqrt{1-z^2}}.$ 2) $I = \int \sec^3 x\, dx.$

3) $I = \int e^{ax}\text{sen } bxdx.$ 4) $I = \int xln^2xdx.$

5) $I = \int x\sqrt{1-x^2}arcsen\, xdx.$ 6) $I = \int \text{sen } \sqrt[3]{x}\, dx.$

Solución

1) $I = \int \frac{zlnzdz}{\sqrt{1-z^2}} = \int lnz \times \frac{zdz}{\sqrt{1-z^2}}.$

Sea $u = lnz;\ du = \frac{dz}{z} \Rightarrow dv = \frac{zdz}{\sqrt{1-z^2}};\ v = -\sqrt{1-z^2}.$

Entonces,

$$I = -\sqrt{1-z^2}\, ln|z| + \int \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\, dz. \tag{a}$$

Llámese $I_1 = \int \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$ y sea $z = \text{sen } t;\ dz = \cos t dt,$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{\sqrt{1-\text{sen}^2 t} \times \cos t dt}{\text{sen } t} = \int \frac{\sqrt{\cos^2 t}\cos t dt}{\text{sen } t}\\
I_1 &= \int \frac{\cos^2 t dt}{\text{sen } t} = \int \frac{1-\text{sen}^2 t}{\text{sen } t}\, dt = \int \left(\frac{1}{\text{sen } t} - \text{sen } t\right) dt\\
I_1 &= \int (csct - \text{sen } t)dt = ln|csct - ctgt| + \cos t + C\\
I_1 &= ln\left|\frac{1}{z} - \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right| + \sqrt{1-z^2} \qquad \text{(b)}
\end{aligned}$$

Al sustituir (b) en (a), se obtiene,

$$I = -\sqrt{1-z^2}\, ln|z| + ln\left|\frac{1}{z} - \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right| + \sqrt{1-z^2} + C.$$

2) $I = \displaystyle\int \sec^3 x\, dx = \int \sec x \times \sec^2 x\, dx.$

Sea $u = \sec x;\ du = \sec xtgxdx \Rightarrow dv = \sec^2 xdx;\ v = tgx.$

Entonces,

$$I = \sec xtg\, x - \int tg\, x \sec x\, tg\, x\, dx$$
$$I = \sec xtg\, x - \int tg^2 x \sec xdx = \sec xtg\, x - \int (\sec^2 x - 1)\sec xdx$$
$$I = \sec xtg\, x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx;\ 2I = \sec tg\, x + \int \sec x\, dx$$

Donde $I = \sec^3 xdx$, entonces,

$$I = \frac{1}{2}\sec xtgx + \frac{1}{2}ln|\sec x + tgx| + C.$$

3) $I = \displaystyle\int e^{ax} senbxdx.$

Método 1

Sea $u = e^{ax};\ du = ae^{ax}dx \Rightarrow dv = \text{sen } bx\, dx;\ v = -\dfrac{1}{b}\cos bx.$

Luego,

$$I = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx. \tag{1}$$

Llámese $I_1 = \int e^{ax}\cos bxdx.$

Sea $u_1 = e^{ax};\ du_1 = ae^{ax}dx \Rightarrow dv_1 = \cos bxdx;\ v_1 = \frac{1}{b}\text{sen } bx.$

Entonces,

$$I_1 = \frac{1}{b}e^{ax}\text{sen } bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\text{sen } bxdx,$$
$$I_1 = \frac{1}{b}e^{ax}\text{sen } bx - \frac{a}{b}I. \tag{2}$$

Al sustituir (2) en (1)

$$I = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\left[\frac{1}{b}e^{ax}\text{sen } bx - \frac{a}{b}I\right],$$
$$I = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\text{sen } bx - \frac{a^2}{b^2}I,$$
$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)I = \frac{a}{b^2}e^{ax}\text{sen } bx - \frac{1}{b}e^{ax}\cos bx,$$
$$\left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right)I = \frac{a}{b^2}e^{ax}\text{sen } bx - \frac{1}{b}e^{ax}\cos bx.$$

Finalmente,

$$I = \frac{a}{a^2+b^2}\left[ae^{ax}\text{sen } bx - be^{ax}\cos bx\right] + C,$$
$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[a\,\text{sen}\,bx - b\cos bx\right] + C.$$

Método 2

Para calcular esta integral se puede utilizar la fórmula de Euler: $e^{ix} = \cos x + i\,\text{sen}\,x$, donde $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria. Además $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = i^2$.

Nótese que e^{ix} es un número complejo, compuesto por la parte real $Re(e^{ix}) = \cos x$, y la parte imaginaria $im(e^{ix}) = \text{sen}\,x$.

Por consiguiente, $e^{(a+ib)x} = e^{ax}b^{ibx}$.

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos bx + i\,\text{sen}\,bx),$$
$$e^{(a+ib)x} = e^{ax}\cos bx + ie^{ax}\,\text{sen}\,bx.$$

De manera que, si se calcula $\int e^{(a+ib)x}dx$ y se considera la parte imaginaria de $e^{(a+ib)x)}$ que corresponde a $e^{ax}\,\text{sen}\,bx$, se tiene,

$$I = \int e^{(a+ib)x}dx = \frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}e^{(a+ib)x},$$
$$I = \int \frac{a-ib}{a-(ib)^2}e^{(a+ib)x} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}\left[e^{ax}\cos bx + ie^{ax}\text{sen } bx\right].$$

Al tomar la parte imaginaria de I, se llega a la siguiente expresión:

$$\int e^{ax}\text{sen } bxdx = \frac{ae^{ax}}{a^2+b^2}\,\text{sen}\,bx - \frac{be^{ax}}{a^2+b^2}\cos bx,$$
$$\int e^{ax}\text{sen } bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[a\,\text{sen}\,bx - b\cos bx\right] + C$$

4) $I = \int xln^2xdx = \int ln^2xxdx.$

Sea $u = ln^2x$; $du = d[ln^2x] = \dfrac{2lnx}{x}\,dx \Rightarrow dv = xdx;\ v = \frac{1}{2}x^2.$

Entonces,

$$I = \frac{1}{2}x^2ln^2x - \frac{1}{2}\int x^2\left(\frac{2lnx}{x}\right)dx,$$
$$I = \frac{1}{2}x^2ln^2x - \int x(lnx)dx, \tag{a}$$

Sea $I_1 = \int x(lnx)dx = \int lnx\ xdx$

$$u_1 = lnx;\ du = \frac{dx}{x} \Rightarrow dv = xdx;\ v = \frac{1}{2}x^2.$$

Luego,

$$I_1 = \frac{1}{2}x^2 ln^2 x - \frac{1}{2}\int x^2 \frac{dx}{x},$$
$$I_1 = \frac{1}{2}x^2 ln^2 x - \frac{1}{2}\int x\, dx,$$
$$I_1 = \frac{1}{2}x^2 ln x - \frac{1}{4}x^2. \qquad \text{(b)}$$

Al reemplazar (b) en (a), se obtiene,

$$I_1 = \frac{1}{2}x^2 ln^2 x - \frac{1}{2}x^2 ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

5) $I = \int x\sqrt{1-x^2}\, arcsen\, x\, dx = \int (arcsen\, x)\Big(x\sqrt{1-x^2}\, dx\Big).$

Sea $u = arcsen\, x;\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow dv = 2\sqrt{1-x^2}\, dx = 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx.$

$$v = -\frac{1}{2}\int -2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{3}\ \sqrt{(1-x^2)^3}.$$
$$I = -\frac{1}{3}(arcsen\, x)\sqrt{(1-x^2)^3} + \frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx,$$
$$I = -\frac{1}{3}(arcsen\, x)\sqrt{(1-x^2)^3} + \frac{1}{3}\int (1-x^2) dx,$$
$$I = -\frac{1}{3}(arcsen\, x)\sqrt{(1-x^2)^3} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^3 + C.$$

6) $I = \int \operatorname{sen} \sqrt[3]{x}\, dx.$

Sea $\sqrt[3]{x} = z;\ x = z^3;\ dx = 3z^2 dz.$

Entonces,

$$I = \int \operatorname{sen} z(3z^2 dz) = 3\int z^2(\operatorname{sen} z dz).$$

Al integrar por partes, se tiene,

$$u = z^2;\ du = 2zdz \Rightarrow dv = \operatorname{sen} zdz;\ v = -\cos z.$$

Entonces,

$$I = 3\left[-z^2\cos z + 2\int z\cos zdz\right],$$
$$I = 3 - z^2\cos z + 6\int z\cos zdz.$$

Al integrar por partes nuevamente, se tiene:

$$u_1 = z;\ du = dz \Rightarrow dv_1 = \cos zdz;\ v_1 = \operatorname{sen} z.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
I &= 3 - z^2 \cos z + 6\left[z \operatorname{sen} z - \int \operatorname{sen} z dz\right],\\
I &= 3 - z^2 \cos z + 6z \operatorname{sen} z + 6 \cos z + C,\\
I &= \left(3z^2 + 6\right) \cos z + 6z \operatorname{sen} z + C,\\
I &= \left(3\sqrt[3]{x^2} + 6\right) \cos \sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x} \operatorname{sen} \sqrt[3]{x} + C.
\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos 1.3

A) Calcular las integrales que siguen, por medio de la técnica de integración por partes:

1) $\displaystyle\int arctg 3x dx.$ 2) $\displaystyle\int e^{ax} sen 3x dx.$

3) $\displaystyle\int x^3 ln^2 x dx.$ 4) $\displaystyle\int \frac{arcsen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx.$

5) $\displaystyle\int ln\left(1 + \sqrt{1+x^2}\right) dx.$ 6) $\displaystyle\int \frac{lnx}{x^3}\, dx.$

7) $\displaystyle\int x^2 \cos^2 x dx.$ 8) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx.$

9) $\displaystyle\int (arcsenx)^2\, dx.$ 10) $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

11) $\displaystyle\int \frac{arctg\, x\, dx}{x^2(1+x^2)}.$ 12) $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{ax+b}}.$

13) $\displaystyle\int x^2\sqrt{ax+b}\, dx.$ 14) $\displaystyle\int x^3 senbx dx.$

15) $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\, dx.$

B) Calcular las primitivas de las siguientes integrales:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{3-ln^2 x}}.$ 2) $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x \cos x\, dx.$

3) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}\, dx.$ 4) $\displaystyle\int \frac{x^2 arctg\, x\, dx}{1+x^2}.$

5) $\displaystyle\int \frac{arcsen\, x\, dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$

1.4. Integrales trigonométricas

Son aquellas en las que, en el integrando aparecen funciones trigonométricas seno, coseno, tangente, etc. o combinaciones de ellas. Si bien, en los parágrafos anteriores se planteó este tipo de integrales, fueron resueltas por medio de sustitución o conversión a integrales inmediatas; sin embargo, en las siguientes líneas, se plantean y resuelven integrales trigonométricas para las cuales es necesaria la aplicación de identidades trigonométricas.

1.4.1. Definiciones y ejemplos

Para el cálculo de integrales trigonométricas, se pueden utilizar las siguientes identidades trigonométricas:

1) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$

2) $1 + tg^2 x = \sec^2 x.$

3) $1 + ctg^2 x = csc^2 x.$

4) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x).$

5) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x).$

6) $\operatorname{sen} x \cos x = \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x.$

7) $1 - \cos x = 2\operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}.$

8) $1 + \cos x = 2\cos^2 \dfrac{x}{2}.$

9) $1 \pm \operatorname{sen}\, x = 1 \pm \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

10) $\operatorname{sen} x \cos y = \dfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x-y)].$

11) $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)].$

12) $\cos x \cos y = \dfrac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)].$

Ejemplo 8
Calcular las siguientes integrales:

1) $\displaystyle\int \cos^2 4x dx.$

2) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 3x \cos^2 3x dx.$

3) $\displaystyle\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x dx.$

4) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x dx.$

5) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\, dx.$

6) $\displaystyle\int \sqrt{1 - \cos 2x}\, dx.$

7) $\displaystyle\int \sqrt{(1 + \cos x)^3}\, dx.$

8) $\displaystyle\int \cos ax\, \cos bx\, dx.$

Solución

1) $\displaystyle\int \cos^2 4x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 8x)dx$ (identidad 5),

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 8x dx,\\
&= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\operatorname{sen} 8x + C,\\
&= \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 8x + C.
\end{aligned}
$$

2) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 3x\cos^2 3x\,dx = \int\left(\frac{1-\cos 6x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right)dx$ (identidades 5 y 6),

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 6x)dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos^2 6x\,dx,\\
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\int [1+\cos(12x)]\,dx,\\
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\times\frac{1}{12}\operatorname{sen} 12x + C,\\
&= \frac{1}{8}x - \frac{1}{96}\operatorname{sen} 12x + C.
\end{aligned}
$$

3) $\displaystyle\int \operatorname{sen} 3x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int [\operatorname{sen}(3x-2x)+\operatorname{sen}(3x+2x)]dx$ (identidad 7),

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x\,dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 5x\,dx + C,\\
&= -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\cos 5x + C,\\
&= -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x + C.
\end{aligned}
$$

4) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\cos^3 x\,dx = \int \operatorname{sen}^3 x\cos^2 x\cos x\,dx,$

$$
\begin{aligned}
&= \int \operatorname{sen}^3 x(1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x\,dx,\\
&= \int \operatorname{sen}^3 x\cos x\,dx - \int \operatorname{sen}^5 x\cos x\,dx,\\
&= \int (\operatorname{sen} x)^3\cos x\,dx - \int (\operatorname{sen} x)^5\cos x\,dx,\\
&= \frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x - \frac{1}{6}\operatorname{sen}^6 x + C.
\end{aligned}
$$

5) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx,$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)dx,\\
&= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \int \cos^2 2x\,dx,\\
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\,dx,\\
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\times\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + C,\\
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C.
\end{aligned}$$

6) $\displaystyle\int \sqrt{1-\cos 2x}\,dx = \int \sqrt{2}\operatorname{sen} x\,dx,$ (identidad 10),

$$= \sqrt{2}\int \operatorname{sen} x\,dx = -\sqrt{2}\cos x + C.$$

7) $\displaystyle\int \sqrt{(1+\cos x)^3}\,dx = \int (1+\cos x)^{\frac{3}{2}} dx,$

$$\begin{aligned}
&= \int \left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}} dx = 2\sqrt{2}\int \cos^3\frac{x}{2}\,dx,\\
&= 2\sqrt{2}\int \cos x\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\,dx,\\
&= 2\sqrt{2}\int \cos\left(\frac{x}{2}\right)\left[1-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right]\,dx,\\
&= -2\sqrt{2}\int \left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 \times \cos\left(\frac{x}{2}\right)dx + 2\sqrt{2}\int \cos\left(\frac{x}{2}\right)dx,\\
&= -4\sqrt{2}\times\frac{1}{3}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right]^3 + 2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + C,\\
&= -\frac{4\sqrt{2}}{3}\operatorname{sen}^3\left(\frac{x}{2}\right) + 4\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + C.
\end{aligned}$$

8) $\displaystyle\int \cos ax\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(ax-bx)\,dx + \int \cos(ax+bx)\,dx,$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int \cos\left[(a-b)x\right]\,dx + \frac{1}{2}\int \cos\left[(a+b)x\right]\,dx,\\
&= \frac{1}{2}\times a\frac{1}{a-b}\operatorname{sen}\left[(a-b)x\right] + \frac{1}{2}\times\frac{1}{a+b}\operatorname{sen}\left[(a+b)x\right] + C,\\
&= \frac{1}{2(a-b)}\operatorname{sen}\left[(a-b)x\right] + \frac{1}{2(a-b)}\operatorname{sen}\left[(a+b)x\right] + C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 9
Calcular las siguientes integrales:

1) $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x dx}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}}$. 2) $\displaystyle\int tg^5 2x\, dx$.

3) $\displaystyle\int tg^3 2x \sec^3 2x\, dx$. 4) $\displaystyle\int ctg^3 x\, dx$.

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x \cos^3 x}}$.

Solución

1)
$$\int \frac{\cos^5 x dx}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}} = \int \frac{\cos^4 x \cos x\, dx}{(\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{3}}},$$
$$= \int \frac{(\cos^2 x)^2 \cos x\, dx}{(\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{3}}} = \int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x\, dx}{(\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{3}}},$$
$$= \int (\operatorname{sen} x)^{-\frac{1}{3}} \left[1 - 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x\right] \cos x\, dx,$$
$$= \int (\operatorname{sen} x)^{-\frac{1}{3}} \cos x\, dx - 2\int (\operatorname{sen} x)^{-\frac{5}{3}} \cos x\, dx + \int (\operatorname{sen} x)^{\frac{11}{3}} \cos x\, dx,$$
$$= \frac{3}{2}(\operatorname{sen} x)^{\frac{2}{3}} - 2 \times \frac{3}{8}(\operatorname{sen} x)^{\frac{8}{3}} + \frac{3}{14}(\operatorname{sen} x)^{\frac{14}{3}} + C,$$
$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{\operatorname{sen}^8 x} + \frac{3}{14}\sqrt[3]{\operatorname{sen}^{14} x} + C,$$
$$= \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\left[\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 x + \frac{3}{14}\operatorname{sen}^4 x\right] + C.$$

2)
$$\int tg^5 2x\, dx = \int tg^3 2x \times tg^2 2x\, dx = \int tg^3 2x(\sec^2 2x - 1)dx,$$
$$= \int tg^3 2x \sec^2 2x\, dx - \int tg^3 2x\, dx,$$
$$= \int tg^3 2x \sec^2 2x\, dx - \int tg^2 2x\, tg\, 2x\, dx,$$
$$= \int tg^3 2x \sec^2 2x\, dx - \int (\sec^2 2x - 1) tg\, 2x\, dx,$$
$$= \frac{1}{2}\int tg^3 2x \sec^2 2x\, dx - \frac{1}{2}\int tg\, 2x(2\sec^2 2x\, dx) + \int tg\, 2x\, dx,$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} tg^4 2x - \frac{1}{2} tg^2 2x - \frac{1}{2} ln|\cos 2x| + C,$$
$$= \frac{1}{8} tg^4 2x - \frac{1}{2} tg^2 2x - \frac{1}{2} ln|\cos^2 x| + C.$$

$$
\begin{aligned}
3)\ \int tg^3 2x\sec^3 2x\,dx &= \int tg^2 2x\sec^2 2x\sec 2x\,tg\,2x\,dx,\\
&= \int (\sec^2 2x-1)\sec^2 2x\sec 2x\,tg\,2x\,dx,\\
&= \int \sec^4 2x\sec 2x\,tg\,2x\,dx - \int \sec^2 2x\sec 2x\,tg\,2x\,dx,\\
&= \frac{1}{2}\int (\sec 2x)^4(2\sec^2 2x\,tg\,2x\,dx) - \frac{1}{2}\int (\sec 2x)^2(2\sec 2x\,tg\,2x\,dx),\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{5}(\sec 2x)^5 - \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}(\sec 2x)^3 + C,\\
&= \frac{1}{10}(\sec 2x)^5 - \frac{1}{6}(\sec 2x)^3 + C.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4)\ \int ctg^3 x\,dx &= \int ctg^2 x\,ctg\,x\,dx,\\
&= \int (\csc^2 x-1)ctg\,x\,dx = \int \csc^2 x\,ctg\,x\,dx - \int ctg\,x\,dx,\\
&= \int ctgx\csc^2 x\,dx - \int ctg\,x\,dx,\\
&= -\frac{1}{2}ctg^2 x - ln|\text{sen}\,x| + C.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
5)\ \int \frac{dx}{\sqrt{\text{sen}\,x\cos^3 x}} &= \int \frac{\sqrt{\cos x}dx}{\sqrt{\cos x}\sqrt{\text{sen}\,x\cos^3 x}} = \int \frac{\sqrt{\cos x}dx}{\sqrt{\text{sen}\,x\cos^4 x}},\\
&= \int \sqrt{\frac{\cos x}{\text{sen}\,x}}\times\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sqrt{ctg\,x}\sec^2 x\,dx,\\
&= \int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{tg\,x}} = \int (tg\,x)^{-\frac{1}{2}}\sec^2 x\,dx,\\
&= 2(tg\,x)^{\frac{1}{2}} + C,\\
&= 2\sqrt{tg\,x}x + C.
\end{aligned}
$$

Ejercicios propuestos 1.4

1) Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \cos^4\left(\frac{1}{2}\right)dx.$ b) $\int \text{sen}^3 y\cos^3 y\,dy.$

c) $\int \text{sen}\,2t\cos 4t\,dt.$ d) $\int \cos 3z\cos 2z\,dz.$

e) $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{1-\ \text{sen}\,x}.$ f) $\int \frac{\cos^3 x}{\text{sen}^4 x}\,dx.$

g) $\displaystyle\int tg^3 x\, dx.$ h) $\displaystyle\int tg^{\frac{3}{2}} \sec^4 x\, dx.$

i) $\displaystyle\int \csc^4 2x\, dx.$ j) $\displaystyle\int ctg^3 x \csc^4 x\, dx.$

k) $\displaystyle\int \frac{ctgx^3\, x}{\csc\, x}\, dx.$ l) $\displaystyle\int \frac{\sec^4 x}{tg^4 x}\, dx.$

m) $\displaystyle\int crg^2 x \csc^4 x\, dx.$ n) $\displaystyle\int \csc^5 x\, dx.$

2) Verificar los siguientes resultados:

a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C.$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{tg\, x}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\, ln \left| \frac{x+\sqrt{2}+1}{x^2-\sqrt{2}+1} \right| + C.$

c) $\displaystyle\int x\, \operatorname{sen}^2(x^2)\, dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2x^2) + C.$

d) $\displaystyle\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\, dx = \frac{3}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{5x}{6}\right) + 3\operatorname{sen}\left(\frac{x}{6}\right) + C.$

e) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, arcsen\, x\, dx = x - \sqrt{1-x^2}\, arcsen\, x + C.$

3) Demostrar que,

a) $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\, arctg\left[\dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\right] & \text{si } 4ac-b^2>0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\, ln\left|\dfrac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| & \text{si } b^2-4ac>0 \end{cases}$$

b) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^4 x} + \frac{x}{a^4\sqrt{s^2-x^2}} + C.$$

1.5. Sustituciones trigonométicas inversas

Cuando en el integrando aparezca planteada una de las formas:

$$\sqrt{a^2-x^2};\ \sqrt{a^2+x^2} \ \text{ o } \ \sqrt{x^2-a^2},$$

es posible encontrar la primitiva mediante sustituciones trigonométricas.

1.5.1. Definiciones y ejemplos

Los integrandos de la forma $\sqrt{a^2-x^2}$; $\sqrt{a^2+x^2}$ o $\sqrt{x^2-a^2}$, se pueden transformar en una función con otra variable t, más fácil de integrar, al efectuar los cambios que se indican en la Tabla 1.

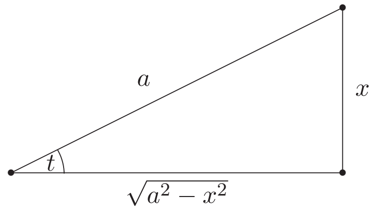
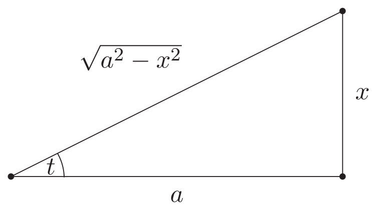
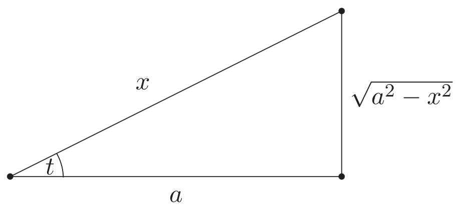
FORMA	SUSTITUCIÓN	REP. GRÁFICA
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} t$	
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \, tg \, t$	
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec t$	

Tabla 1. Sustituciones especiales

La nueva integral con variable t, debe ser de fácil resolución.

Ejemplo 10
Calcular las siguientes integrales:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{100 + x^2}}$. 2) $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4x^2 - 1}}$.

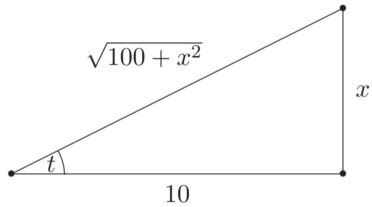
3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{25 - x^2}}$. 4) $\displaystyle\int \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}\, dx$.

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{(4x - x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Solución

1) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{100 + x^2}}$.

Sea $x = 10tg\, t$; $dx = 10 \sec^2 t dt$.



Sea $x = 10tg\,t$; $dx = 10\sec^2 tdt$.

Entonces,

$$I = \int \frac{10\sec^2 tdt}{100tg^2t\sqrt{100+100tg^2t}},$$

$$I = \int \frac{10\sec^2 tdt}{100\times 10\times tg^2t\sqrt{1+tg^2t}} = \frac{1}{100}\int \frac{\sec^2 tdt}{tg^2t\sec t},$$

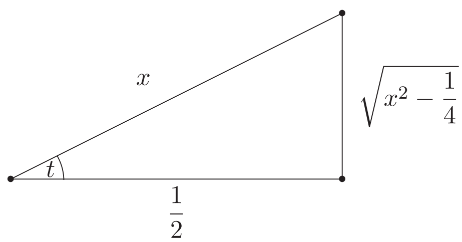
$$I = \frac{1}{100}\int \frac{\sec t\,dt}{tg^2t} = \frac{1}{100}\int \frac{\frac{1}{\cos t}}{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t}}\,dt = \frac{1}{100}\int \operatorname{sen}^{-2}t\cos t\,dt,$$

$$I = \frac{1}{100}\int (\operatorname{sen} t)^{-2}\cos t\,dt = -\frac{1}{100}(\operatorname{sen} t)^{-1} + C.$$

$$I = -\frac{\sqrt{100+x^2}}{100x} + C$$

2) $$I = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{4x^2-1}} = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{4\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}} = \frac{1}{2}\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}}.$$

Sea $x = \frac{1}{2}\sec t$; $dx = \frac{1}{2}\sec t\,tgt\,dt$.



Entonces,

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{4}\sec^2 t - \frac{1}{2}\sec t\,tg\,t}{\sqrt{\frac{1}{4}\sec^2 t - \frac{1}{4}}}\,dt = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}}\int \frac{\sec^2 t\sec t\,tg\,t\,dt}{tg\,t},$$

$$I = \frac{1}{8}\int \sec^3 t\,dt = \frac{1}{8}\int \sec t\sec^2 t\,dt,$$

Al integrar por partes, se obtiene,

$$u = \sec t;\; du = \sec t\, tgt\, dt \Rightarrow dv = \sec^2 t dt;\; v = tgt.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{8}\sec t\, tg\, t - \int tg\, t \sec t\, tg\, t\, dt,\\
I &= \frac{1}{8}\sec t\, tg\, t - \frac{1}{8}\int tg^2 \sec t\, dt,\\
I &= \frac{1}{8}\sec t\, tg\, t - \frac{1}{8}\int (\sec^2 t - 1)\sec t\, dt,\\
I &= \frac{1}{8}\sec t\, tg\, t - \frac{1}{8}\int \sec^3 t\, dt + \frac{1}{8}\sec t\, dt,\\
I &= \frac{1}{8}\sec t\, tg\, t - \frac{1}{8}I + \frac{1}{8}\int \sec t\, dt,\\
\frac{9}{8}I &= \frac{1}{8}\sec t\, tg\, t + \frac{1}{8}ln|\sec t + tg\, t|,\\
I &= \frac{1}{9}\sec t\, tg\, t + \frac{1}{9}ln|\sec t + tg\, t| + C.
\end{aligned}$$

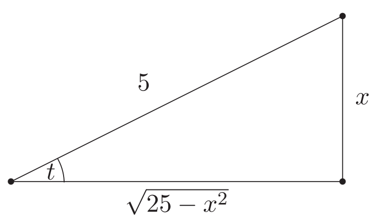
Pero $\sec t = 2x;\; tg\, t = \dfrac{\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{4x^2 - 1}.$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4x^2 - 1}} = \frac{1}{9}(2x)\sqrt{4x^2 - 1} + \frac{1}{9}ln\left|2x + \sqrt{4x^2 - 1}\right| + C,\\
I &= \frac{2}{9}(x)\sqrt{4x^2 - 1} + \frac{1}{9}ln\left|2x + \sqrt{4x^2 - 1}\right| + C.
\end{aligned}$$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{25 - x^2}}.$

Sea $x = 5\ \text{sen}\, t;\; dx = 5\cos t\, dt.$



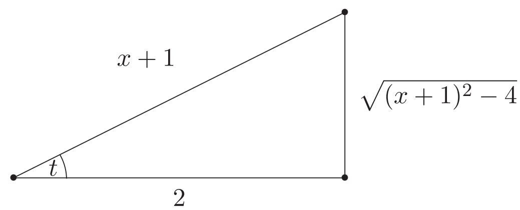
Entonces,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{5\cos t\, dt}{5 \text{ sen } t\sqrt{25 - 25 \text{ sen}^2 t}} = \frac{1}{5}\int \frac{\cos t\, dt}{\text{sen}\, t\sqrt{1-\text{sen}^2 t}},\\
I &= \frac{1}{5}\int \frac{\cos t\, dt}{\text{sen}\, t \cos t} = \frac{1}{5}\int \csc\ t\, dt,\\
I &= \frac{1}{5} ln|\csc t - ctg\, t| + C,\\
I &= \frac{1}{5} ln\left|\frac{5}{x} - \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\right| + C,\\
I &= \frac{1}{5} ln\left|\frac{5-\sqrt{25-x^2}}{x}\right| + C.
\end{aligned}
$$

4) $I = \displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}}\, dx.$

Al completar cuadrados en el trinomio $x^2 + 2x - 3$ se obtiene

$$x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 3 - 1 = (x + 1)^2 - 4.$$



Entonces,

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{(x+1)^2-4}}\, dx.$$

Como $d\left[(x+1)^2 - 4\right] = 2(x + 1)dx = (2x + 2)dx$, entonces,

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int \frac{2(x+2)}{\sqrt{(x+1)^2-4}}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{[(2x+2)+2]\, dx}{\sqrt{(x+1)^2-4}},\\
I &= \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)dx}{\sqrt{(x+1)^2-4}} + \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-4}},\\
I &= \frac{1}{2}\int \left[(x+1)^2-4\right]^{-\frac{1}{2}} \times 2(x+1)dx + \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-4}},\\
I &= \frac{1}{2} \times 2 \times \left[(x+1)^2-4\right]^{\frac{1}{2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-4}},\\
I &= \sqrt{x^2+2x-3} + \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-4}}. \qquad \text{(a)}
\end{aligned}
$$

Llámese $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-4}}$.

Sea $x+1 = 2\sec t$; $d(x+1) = d(2\sec t) \Rightarrow dx = 2\sec t\, tg\, t\, dt$.

Por tanto,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{2\sec t\, tg\, t\, dt}{\sqrt{4\sec^2 t - 4}} = \frac{2}{2}\int \frac{\sec t\, tg\, t\, dt}{\sqrt{\sec^2 t - 1}} = \int \frac{\sec t\, tg\, t\, dt}{tg\, t},\\
I_1 &= \int \sec t\, dt = ln|\sec t + tg\, t|,\\
I_1 &= ln\left|\frac{x+1}{2} + \frac{\sqrt{(x+1)^2-4}}{2}\right|,\\
I_1 &= ln\left|\frac{(x+1)+\sqrt{(x+1)^2-4}}{2}\right|. \qquad \text{(b)}
\end{aligned}$$

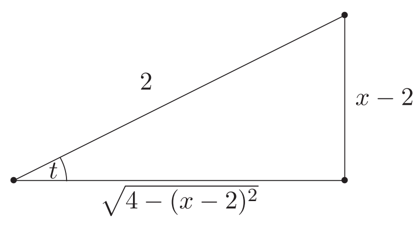
Al reemplazar (b) en (a):

$$I = \sqrt{x^2+2x-3} + ln\left|\frac{(x+1)+\sqrt{(x+1)^2-4}}{2}\right| + C.$$

5) $I = \int \frac{dx}{(4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Al completar cuadrados sobre el binomio de segundo grado $4x - x^2$, se tiene:

$$\begin{aligned}
4x - x^2 &= x^2 + 4x + 4 - 4,\\
&= -(x^2 - 4x + 4) + 4,\\
&= 4 - (x-2)^2.
\end{aligned}$$



Entonces,

$$I = \int \frac{dx}{[4-(x-2)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Sea $x - 2 = 2$ sen t; $dx = 2\cos t\, dt$.

Luego,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{2\cos t\,dt}{[4-4\,\mathrm{sen}^2 t]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{4^{\frac{3}{2}}}\int \frac{\cos t\,dt}{[1-\mathrm{sen}^2 t]^{\frac{3}{2}}},\\
I &= \frac{2}{2^3}\int \frac{\cos t\,dt}{[\cos^2 t]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos t\,dt}{\cos^3 t} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\cos^2 t},\\
I &= \frac{1}{4}\int \sec^2 t\,dt = \frac{1}{4}tgt = \frac{1}{4}\times \frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}} + C,\\
I &= \frac{x-2}{4\sqrt{4x-x^2}} + C.
\end{aligned}
$$

Ejercicios propuestos 1.5

A) Calcular las primitivas de las siguientes integrales:

1) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-100}\,dx.$ 2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-81}}{x}\,dx.$

3) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}.$

5) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$ 6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+25}}.$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}.$ 8) $\displaystyle\int \frac{dx}{(9+x^2)^2}.$

9) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+7}}.$ 10) $\displaystyle\int \frac{dx}{(4x^2-24x+2)^{\frac{3}{2}}}.$

B) Verificar

1) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}} + C.$

2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2x^2} + \frac{1}{2a}arcsen\left|\frac{x}{a}\right| + C.$

3) $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}} + C.$

1.6. Integrales de las funciones racionales

Son aquellas en las que el integrando es una función racional de la forma $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios.

1.6.1. Definiciones y ejemplos

- Una función $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, $q \neq 0$, en donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, se llama función racional.

- Se denota por $gr[p(x)]$ el grado de polinomio $p(x)$.

  Si $gr[p(x)] < gr[q(x)]$, la función $f(x)$ se llama fracción propia.

  Si $gr[p(x)] \geq gr[q(x)]$, la función $f(x)$ se llama fracción impropia.

- Toda función racional impropia se puede expresar como la suma de un polinomio y de una función racional propia. Este resultado se obtiene por medio de la aplicación del Algoritmo de Euclides.

- Toda fracción racional propia se puede expresar como la suma de fracciones racionales cuyos denominadores son de la forma $(ax+b)^n$ y $(ax^2+bx+c)^n$ donde $n \in \mathbb{Z}$. En dependencia de la naturaleza del denominador (factores), se presentan los casos que presentan en la Tabla 2.

CASO	CARACTERÍSTICAS	FRACCIONES SIMPLES
1	Factores lineales distintos: $ax+b$	$\dfrac{A}{ax+b}$
2	Factores lineales iguales: $(ax+b)^n$	$\dfrac{A_1}{ax+b} + \dfrac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \dfrac{A}{(ax+b)^n}$
3	Factores cuadráticos distintos: ax^2+bx+c	$\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
4	Factores cuadráticos iguales: $(ax^2+bx+c)^n$	$\dfrac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \dfrac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \dfrac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$

Tabla 2. Modelo de Fracciones Parciales

- $A,\ B,\ Ai,\ Bi$ son constantes por determinar.

- Los factores cuadráticos son irreducibles.

Ejemplo 11
Calcular las primitivas de las siguientes funciones racionales:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 100}.$ 2) $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x-2)^2}.$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+x^2}.$ 4) $\displaystyle\int \frac{x^4+x^3+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx.$

5) $\displaystyle\int \frac{x^4+x^2+1}{x^2-1}\,dx.$ 6) $\displaystyle\int \frac{2x^3dx}{(x^2+1)^2}.$

7) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos x(1+\cos^2 x)}.$

Solución

1) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2-100}$.

La descomposición factorial del denominador es:

$$x^2-100=(x+10)(x-10).$$

Se trata de dos factores lineales distintos. Por tanto, la fracción del integrando se expresa como la suma de dos factores lineales simples así:

$$\frac{1}{x^2-100}=\frac{A}{x+10}+\frac{B}{x-10}.$$

A y B por determinar. ¿Cómo encontrarlas?.

Método 1

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x^2-100}=\frac{A(x-10)+B(x+10)}{x^2-100},\\
&A(x-10)+B(x+10)=1,\\
&Ax-10A+Bx+10B=1 && \text{(a)}
\end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de las respectivas potencias se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales 2×2:

$$\begin{cases} A+B=0\\ 10A+10B \end{cases}$$

Cuya solución es,

$$A=-\frac{1}{20};\quad B=\frac{1}{20}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2-100}&=\int\left[\frac{A}{x+10}+\frac{B}{x-10}\right]dx,\\
&=-\frac{1}{20}\int\frac{dx}{x+10}+\frac{1}{20}\int\frac{dx}{x-10},\\
&=-\frac{1}{20}\,ln|x+10|+\frac{1}{20}\,ln|x-10|+C,\\
&=\frac{1}{20}\,ln\left|\frac{x-10}{x+10}\right|+C.
\end{aligned}$$

Método 2 (Método de raíces)

De la relación (a), se tiene:

$$Ax-10A+Bx+10B=1.$$

Si $x=10$; $B(10+10)=1$; $B=\dfrac{1}{20}$.

Si $x=-10$; $A(-10-10)=1$; $A=-\dfrac{1}{20}$.

Una vez se obtengan los valores de A y B, se continúa con el procedimiento explicado en el método 1.

2) $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x-2)^2}$.

El denominador se expresa mediante un factor lineal repetido dos veces. En correspondencia con el caso 2 de este parágrafo, la fracción racional del integrando se puede expresar, así:

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2},\\
&\frac{x}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)+B}{(x-2)^2},\\
&A(x-2)+B = x.
\end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de las potencias respectivas, se obtiene,

$A = 1,$

$-2A + B = 0;\ B = 2A;\ B = 2.$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
&I = \int \frac{xdx}{(x-2)^2} = \int \left[\frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}\right] dx,\\
&I = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{2}{(x-2)^2}\, dx,\\
&I = ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C.
\end{aligned}$$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+x^2} = \int \frac{dx}{x^2(x+1)}$.

En este caso, el denominador se descompone en dos factores lineales repetidos iguales, correspondientes a $x-0$ y $(x-0)^2$ y un factor lineal no repetido, $x+1$.

De esta manera, el integrando se descompone en las siguientes fracciones:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{D}{x+1},\\
&\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Dx^2}{x^2(x+1)},\\
&Ax(x+1)+B(x+1)+Dx^2 = 1.
\end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de las potencias respectivas, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales 3×3:

$$\begin{cases} A + D = 0\\ A + B = 0\\ B = 1 \end{cases}$$

De aquí, $B = 1;\ A = -1;\ D = 1.$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{x^2(x+1)} = \int \left[\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{D}{x+1}\right] dx,\\
I &= \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}\right) dx,\\
I &= -ln|x| - \frac{1}{x} + ln|x+|| + C,\\
I &= ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} + C.
\end{aligned}$$

4) $\displaystyle\int \frac{x^4+x^3+x+2}{x^4+3x^2+2}\, dx.$

El denominador de la fracción racional, se factoriza así:

$$x^4+3x^2+2 = (x^2+2)(x^2+1)$$

Se puede ver que los factores son cuadráticos no repetidos (caso 3), entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{x^4+x^3+x+2}{(x^2+2)(x^2+1)} &= \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{x^2+1},\\
&= \frac{(Ax+B)\big((x^2+1)+(Dx+E)(x^2+2)\big)}{(x^2+2)(x^2+1)}
\end{aligned}$$

Después de efectuar los productos indicados, simplificar e igualar los coeficientes de las potencias respectivas, se llega al sistema lineales 4×4:

$$\begin{cases} A+D=1\\ B+E=1\\ A+2D=1\\ B+2D=0 \end{cases}$$

Al resolver sistema, se obtiene,

$A=1;\ B=0;\ D=0;\ E=1.$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
I &= \int \left[\frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}\right] dx = \int \frac{xdx}{x^2+2} + \int \frac{dx}{x^2+1},\\
I &= \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1},\\
I &= \frac{1}{2}\, ln(x^2+1) + arctgx + C.
\end{aligned}$$

5) $\displaystyle\int \frac{x^4+x^2+1}{x^2-1}\, dx.$

En este caso, el integrado es una fracción racional impropia. La división formal del numerador entre el denominador y la aplicación del Algoritmo de Euclides, conduce a lo siguiente,

$$I = \int \left[x^2 + 2 + \frac{3}{x^2 - 1}\right] dx,$$
$$I = \frac{1}{3}x^3 + 2x + \frac{3}{2} ln \left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

6) $\displaystyle\int \frac{2x^3 dx}{(x^2+1)^2}.$

Aquí, el denominador es un factor cuadrático irreducible repetido dos veces, correspondiente al caso 4. De manera que, las fracciones simples asociados, son:

$$\frac{2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$
$$= \frac{(Ax+B)\big((x^2+1) + (Dx+E)(x^2+1)\big)}{(x^2+1)^2},$$
$$Ax^3 + Bx^2 + Ax + B + Dx + E = 2x^3.$$

Al igualar los coeficientes de las potencias respectivas, se obtiene,

$$\begin{cases} A = 2 \\ B = 0 \\ A + D = 0 \\ B + E = 0 \end{cases} \qquad \text{La solución del sistema } 4 \times 4 \text{ es } A = 2;\ B = 0;\ D = -2;\ E = 0$$

Por tanto,

$$I = \int \frac{2x^3 dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{2x\,dx}{x^2+2} + \int \frac{-2x\,dx}{(x^2+1)^2},$$
$$I = ln(x^2-1)^2 - \frac{1}{x^2+1} + C.$$

7) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos x(1+\cos^2 x)}.$

Sea $u = \cos x;\ du = -\operatorname{sen} x dx.$

Entonces,

$$I = -\int \frac{du}{u(1+u^2x)}.$$

El denominador es el producto del factor lineal $u-0$ y un factor cuadrático $1+u^2$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u(1+u^2x)} &= \frac{A}{u} + \frac{Bu+D}{1+u^2}, \qquad \text{(a)}\\
&= \frac{A(1+u^2)+(Bu+D)u}{u(1+u^2)},\\
A(1+u^2)&+(Bu+D)u = 1.\\
&\begin{cases} A+B=0\\ A=1\\ D=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Los resultados son: $A=1;\ D=0;\ B=-1.$

Por tanto, al reemplazar en (a), se obtiene,

$$\begin{aligned}
I &= -\int \frac{du}{u} - \int \frac{udu}{u^2+1},\\
I &= -\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int \frac{2udu}{u^2+1},\\
I &= -ln|u| - \frac{1}{2}\, ln(u^2+1) + C,\\
I &= -ln\left(\sqrt{\cos^2 x+1}\right) - ln|\cos x| + C.
\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos 1.6

Calcular las primitivas de las siguientes integrales:

1) $\displaystyle\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-3x+2}.$ 2) $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^3+9x^2+23x+15}.$

3) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\, dx.$ 4) $\displaystyle\int \frac{x^4dx}{(x+2)(x^2-1)}.$

5) $\displaystyle\int \frac{(x-3)dx}{x^3-4x^2+4x}.$ 6) $\displaystyle\int \frac{3x-7}{(x+2)^2(x+4)^2}\, dx.$

7) $\displaystyle\int \frac{(2x^2-3x-3)}{(x-1)(x^2-2x+5)}\, dx.$ 8) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}.$

9) $\displaystyle\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}\, dx.$ 10) $\displaystyle\int \frac{4dx}{x^4+1}.$

11) $\displaystyle\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\, dx.$ 12) $\displaystyle\int \frac{(4x^2-8x)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}.$

1.7. Integrales de funciones irracionales

Las funciones irracionales, son aquellas en cuya expresión matemática $f(x)$, aparece un radical. Por ejemplo $f(x)=\sqrt{x^2-x-1}$ es una función irracional.

Aunque no siempre es posible expresar la integral indefinida de una función irracional mediante funciones elementales, en las siguientes líneas se plantean y se resuelven problemas de integración de este tipo de funciones.

1.7.1. Integral con integrando de la forma $\mathbf{R}\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{\frac{m}{n}}, \ldots, \mathbf{x}^{\frac{r}{s}}\right)$

La simbología $R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right)$ significa que, con las magnitudes $x,\ x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}$, se presentan solo operaciones racionales, donde R es función racional de sus argumentos.

Si k es el común denominador de las fracciones $\frac{m}{n}, \ldots \frac{r}{s}$, entonces la sustitución $x = t^k$, convierte la integral I, en una integral de una función racional con variable t.

1.7.2. integral con integrando de la forma $\mathbf{R}\left(\mathbf{x}, \left(\frac{\mathbf{ax+b}}{\mathbf{cx+d}}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{\mathbf{ax+b}}{\mathbf{cx+d}}\right)^{\frac{r}{s}}\right)$

Donde R es función racional de sus argumentos. Si k es el común denominador de las fracciones $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$, entonces la sustitución $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, convierte la integral I en una integral de una función racional de variable t.

Ejemplo 12

Calcular las primitivas de las siguientes integrales:

1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx.$ 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}.$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a+x}-\sqrt[3]{a+x}}.$ 4) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx.$

5) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{dx}{x}.$

Solución

1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}\,dx.$

El común denominador de las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ es 6.

Sea $x = t^6;\ dx = 6t^5dt;\ x^{\frac{1}{3}} = (t^6)^{\frac{1}{3}} = t^2;\ x^{\frac{1}{2}} = (t^6)^{\frac{1}{2}} = t^3.$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{t^3(6t^5dt)}{t^2+1} = 6\int \frac{t^8dt}{t^2+1},\\
I &= 6\int \left[t^6 - t^4 + t^2 - \frac{1}{t^2+1}\right] dt,\\
I &= \frac{6}{7}t^7 - \frac{6}{5}t^5 + \frac{6}{3}t^3 - 6arctgt + C,\\
I &= \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + 2t^{\frac{1}{2}} - 6arctg\left(x^{\frac{1}{6}}\right) + C,\\
I &= \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} - 6arctg\left(\sqrt[6]{x}\right) + C.
\end{aligned}
$$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}}.$

El común denominador de las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ es 4.

Sea $x = t^4;\ dx = 4t^3dt;\ x^{\frac{1}{2}} = t^2;\ x^{\frac{1}{4}} = t.$

De esta manera,

$$I = \int \frac{4t^3dt}{t^2-t} = 4\int \frac{t^3dt}{t(t-1)} = 4\int \frac{t^2dt}{t-1},$$
$$I = 4\int \left[t+1+\frac{1}{t-1}\right] dt = 4\left[\frac{1}{2}t^2+t+ln|t+1|\right] + C,$$
$$I = 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{4}} + 4ln\left|x^{\frac{1}{4}}-1\right| + C,$$
$$I = 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + ln\left|\sqrt[4]{x}-1\right| + C.$$

3) $\displaystyle\int \frac{(a+x)^{\frac{1}{6}}dx}{\sqrt{a+x}-\sqrt[3]{a+x}} = \int \frac{(a+x)^{\frac{1}{6}}dx}{(a+x)^{\frac{1}{2}}-(a+x)^{\frac{1}{3}}}.$

El común denominador de las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{6}$ es 6.

La sustitución apropiada es,

$$(a+x)^{\frac{1}{6}} = t;\ a+x = t^6;\ dx = 6t^5dt.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{t(6t^5dt)}{t^3-t^2} = 6\int \frac{t^6dt}{t^2(t-1)} = 6\int \frac{t^4dt}{t-1},$$
$$I = 6\int \left[t^3+t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right] dt,$$
$$I = \frac{6}{4}t^4 + \frac{6}{3}t^3 + \frac{6}{2}t^2 + 6t + 6\ ln\,|t-1| + C,$$
$$I = \frac{3}{2}(a+x)^{\frac{2}{3}} + 2(a+x)^{\frac{1}{2}} + 3(a+x)^{\frac{1}{3}} + 6(a+x)^{\frac{1}{6}} + 6\ ln\left|(a+x)^{\frac{1}{6}}-1\right| + C,$$
$$I = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(a+x)^2} + 2\sqrt{a+x} + 3\sqrt[3]{a+x} + 6\sqrt[6]{a+x} + 6\ ln\left|\sqrt[6]{a+x}-1\right| + C.$$

4) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx.$

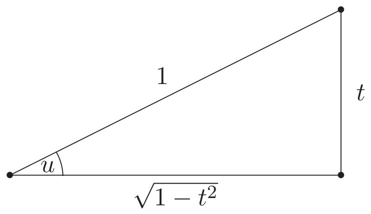
Sea $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = t;\ \dfrac{x-1}{x+1} = t^2;\ x-1 = t^2(x+1);\ x-1 = t^2x+t^2;$

$$x(1-t^2) = 1+t^2;\ x = \frac{1+t^2}{1-t^2};\ dx = \frac{2(1-t^2)t+2(1+t^2)t}{(1-t^2)^2}dt;\ dx = \frac{4tdt}{(1-t^2)^2}.$$

Por tanto,

$$I = \int t\left[\frac{4tdt}{(1-t^2)^2}\right] = \int \frac{4tdt}{(1-t^2)^2}.$$

En esta fracción racional, se opta por efectuar una sustitución trigonométrica, así:



$$t = \operatorname{sen} u;\ dt = \cos u\, du.$$

Entonces,

$$I = 4\int \frac{\operatorname{sen}^2 u \cos u\, du}{(1-\operatorname{sen}^2 u)^2} = 4\int \frac{\operatorname{sen}^2 u \cos u\, du}{\cos^4 u},$$
$$I = 4\int \frac{\operatorname{sen}^2 u}{\cos^3 u}\, du = 4\int \frac{1-\cos^2 u}{\cos^3 u}\, du = 4\int \frac{du}{\cos^3 u} - 4\int \frac{\cos^2 u}{\cos^3 u}\, du,$$
$$I = 4\int \sec^3 u du - 4\int \sec u du.$$

En correspondencia con el ejercicio 2 del ejemplo 10, se tiene,

$$I = 4\times\frac{1}{2}\left[\sec u\, tgu + ln|\sec u + tgu|\right] - 4\, ln|\sec + tgu| + C,$$
$$I = 2\sec u\, tgu - 2\, ln|\sec + tgu| + C.$$

Pero,

$$\sec u = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x-1}{x+1}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{x+1}}} = \sqrt{\frac{x+1}{2}}.$$
$$tgu = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}} = \sqrt{\frac{x-1}{2}}.$$

Luego,

$$I = 2\sqrt{\frac{x+1}{2}}\sqrt{\frac{x-1}{2}} - 2ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{2}} + \sqrt{\frac{x-1}{2}}\right| + K,$$
$$I = \frac{2}{2}\sqrt{x^2-1} - 2ln\left|\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right| + 2ln\sqrt{2} + K,$$
$$I = \sqrt{x^2-1} - 2\, ln\left|\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right| + C \text{ donde } C = 2ln\sqrt{2} + K.$$

5) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x}.$

Sea $\dfrac{x-1}{x+1}=t^2;\ x=\dfrac{1+t^2}{1-t^2};\ dx=\dfrac{4tdt}{(1-t^2)^2}$.

Entonces,

$$I=\int\left[\frac{t4tdt}{(1-t^2)^2}\times\frac{1}{\frac{1+t^2}{1-t^2}}\right]dt=4\int\frac{t^2dt}{(1-t^2)^2(1+t^2)^2},$$

$$I=4\int\frac{t^2dt}{(1+t)(1-t)(1+t^2)^2}.$$

La aplicación de fracciones parciales conduce a lo siguiente:

$$I=\int\frac{dt}{1+t}+\int\frac{dt}{1-t}-2\int\frac{dt}{1+t^2},$$

$$I=ln|1+t|-ln|1-t|-2arctgt+C.$$

Pero,

$$t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}};\ \frac{1+t}{1-t}=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}},$$

$$I=ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right|-2arctg\left[\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right]+C.$$

Ejercicios propuestos 1.7

Determinar la primitiva de las siguientes integrales:

1) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{3}+1}\,dx.$ 2) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}\,dx.$

3) $\displaystyle\int\frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}\,dx.$ 4) $\displaystyle\int\frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}\,dx.$

5) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x^2}.$ 6) $\displaystyle\int\frac{\sqrt[7]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^8}+\sqrt[14]{x^{15}}}\,dx.$

7) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}\,dx.$ 8) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x-1}dx}{x+1-3\sqrt{x-1}}.$

9) $\displaystyle\int\frac{1-\sqrt{3x+2}}{1+\sqrt{3x+2}}\,dx.$ 10) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}.$

11) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx.$ 12) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+2\sqrt[8]{x}}.$

13) $\displaystyle\int\frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2+x}{2-x}}\,dx.$ 14) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx.$

15) $\displaystyle\int\frac{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx.$

1.8. Integración del binomio diferencial

En estas integrales, la variable x o funciones de la variable x, están afectadas por radicales o expresiones fraccionarias.

1.8.1. Binomio diferencial

Una integral de la forma,

$$I = \int x^m (a + bx^n)^p \, dx \tag{1}$$

Donde m, n, p, a, b son constantes reales, se llama binomio diferencial.

La integral (1) se puede reducir a una integral de una función racional y, por consiguiente, se puede expresar como la suma de funciones elementales, en los tres casos siguientes:

1) P es un número entero.

2) $\dfrac{m+1}{n}$ es un número entero.

3) $\dfrac{m+1}{n+p}$ es un número entero.

Sea $x^n = u$; $dx = \dfrac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} du$.

Al reemplazar en (1) se obtiene,

$$I = \int x^m (a + bx^n)^p \, dx = \frac{1}{n} \int u^{\frac{m}{n}} (a + bu)^p \, u^{\frac{1}{n}-1} \, du,$$

$$I = \frac{1}{n} \int u^{\frac{m+1}{n}-1} (a + bu)^p \, du,$$

$$I = \frac{1}{n} \int u^q (a + bu)^p \, du \text{ en donde } q = \frac{m+1}{n} - 1. \tag{2}$$

1) Sea $p \in \mathbb{Z}$. Si q es racional; sea $q = \dfrac{r}{s}$, de donde la integral (2) tiene la forma:

$$I = \int R\left(u^{\frac{r}{s}}, u\right) du \tag{3}$$

La expresión (3) se puede reducir a la integral de una función racional, mediante la sustitución $u = t^s$ (ver parágrafo 1.9, p. 61).

2) Sea $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$; entonces, $q = \dfrac{m+1}{n-1}$, es también entero. El número p es racional, denotado por $p = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

De esta manera, la integral (2), se puede escribir como:

$$I = \int R\left(u^q, (a + bu)^{\frac{\alpha}{\beta}}\right) du. \tag{4}$$

La integral (4) se puede reducir a racional, al efectuar la sustitución $a + bu = t^\beta$ (ver parágrafo 1.9).

3) Sea $\dfrac{m+1}{n}+p \in \mathbb{Z}$; entonces, $\dfrac{m+1}{n}-1+p=q+p$, también es un número entero.

Así, la integral (2) se transforma en:

$$I=\int u^{q+p}\left(\frac{a+bu}{u}\right)^{p} du. \tag{5}$$

Donde $(q+p)$ es un número entero y $p=\dfrac{k}{l}$ es un número racional.

La integral (5) es de la forma,

$$I=\int u^{q+p}\left(\frac{a+bu}{u}\right)^{\frac{k}{l}} du. \tag{6}$$

La integral (6), se puede reducir a racional mediante la siguiente sustitución:

$$\frac{a+bu}{u}=t^{l}.$$

(ver parágrafo 1.9)

NOTA

Sólo en los tres casos mencionados es posible racionalizar el integrando y expresar la integral como suma finita de funciones elementales.

Ejemplo 13

Calcular las integrales:

1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}^{2}}{(1+\sqrt[3]{x})^{2}}\,dx.$ 2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}^{2}}\,dx.$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{2}\sqrt{(1+x^{2})^{3}}}.$ 4) $\displaystyle\int \frac{x^{5}dx}{\sqrt{(a+bx^{3})^{3}}}.$

Solución

1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x^{2}}}{(1+\sqrt[3]{x})^{2}}\,dx=\int x^{\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} dx.$

En este caso $m=\dfrac{2}{3};\ n=\dfrac{1}{3};\ p=-2\in\mathbb{Z}.$

En consecuencia, el ejemplo corresponde al primer caso de integrales de binomios diferenciales.

Entonces, sea $x^{\frac{1}{3}}=u;\ x=u^{3};\ dx=3u^{2}\,du;\ x^{\frac{2}{3}}=u^{2}.$

Por tanto,

$$I=\int u^{2}(1+u)^{-2}(3u^{2}du)=3\int\frac{u^{2}du}{(1+u)^{2}},$$

$$I=3\int\left(u^{2}-2u+3\right)du-3\int\frac{4du}{u+1}-3\frac{3du}{(1+u)^{2}},$$

$$I=u^{3}-3u^{2}+9u-12\,ln|u+1|-\frac{9}{u+1}+C \text{ pero } u=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x},$$

$$I=x-3\sqrt[3]{x^{2}}+9\sqrt[3]{x}-12\,ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|-\frac{9}{\sqrt[3]{x}+1}+C.$$

2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} dx.$

Aquí,

$$m = -\frac{2}{3};\ n = \frac{1}{3};\ \frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1 \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, el ejemplo corresponde al caso 2.

Sea $x^{\frac{1}{3}} = u;\ x = u^3;\ dx = 3u^2du;\ x^{\frac{2}{3}} = u^2.$

Entonces,

$$I = \int u^{-2}(1+u)^{\frac{1}{2}}(3u^2du) = 3\int (1+u)^{\frac{1}{2}}du,$$
$$I = 3\times\frac{2}{3}(1+u)^{\frac{3}{2}} + C \text{ pero } u = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}.$$

Luego,

$$I = 2\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} + C,$$
$$I = 2\sqrt{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3} + C.$$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int x^{-2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} dx.$

En este caso,

$$m = -2;\ n = 2;\ p = -\frac{3}{2};\ \frac{m+1}{n} + p = \frac{-2+1}{2} - \frac{3}{2} = -2 \in \mathbb{Z}.$$

Esta integral corresponde al caso 3 de binomios diferenciales.

Sea $x^2 = u;\ x^{-2} = u^{-1};\ x = u^{\frac{1}{2}};\ dx = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du.$

Luego,

$$I = \frac{1}{2}\int u^{-1}(1+u)^{-\frac{3}{2}}u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{3}{2}}(1+u)^{-\frac{3}{2}}du,$$
$$I = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{3}{2}}\times\frac{u^{-\frac{3}{2}}}{u^{-\frac{3}{2}}}(1+u)^{-\frac{3}{2}}du = \frac{1}{2}\int u^{-3}\left(\frac{1+u}{u}\right)^{-\frac{3}{2}} du \qquad \text{(A)}$$

Sea $\frac{1+u}{u} = t^2;\ 1+u = ut^2;\ u(1-t^2) = -1;\ u = \frac{1}{t^2-1};\ du = \frac{-2t}{(t^2-1)^2}.$

Al reemplazar en (A),

$$I = \frac{1}{2}\int (t^2-1)^3(t^2)^{-\frac{3}{2}}\left[\frac{2tdt}{(t^2-1)^2}\right] = -\int (t^2-1)t^{-2}dt,$$
$$I = -\int\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt = -t - \frac{1}{t} + C \text{ pero } t = \sqrt{\frac{1+u}{u}} = \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Finalmente,

$$I = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

4) $\displaystyle\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{(a+bx^3)^3}} = \int x^5 \left(a+bx^3\right)^{-\frac{3}{2}} dx.$

Aquí,

$$m=5;\ n=3,\ p=-\frac{3}{2};\ \frac{m+1}{n}=\frac{5+1}{3}=2\in\mathbb{Z}.$$

Entonces,

$$\frac{1}{3}\int u^{\frac{5}{3}}(1+bu)^{-\frac{3}{2}}u^{-\frac{2}{3}}du=\frac{1}{3}\int u(1+bu)^{-\frac{3}{2}}du \qquad ((B))$$

Sea $a+bu=t^2$; $bdu=2tdt$; $u=\dfrac{2}{b}tdt$; $u=\frac{t^2-a}{b}$.

Al sustituir en (B), se tiene,

$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{3}\int\frac{t^2-a}{b}\times(t^2)^{-\frac{3}{2}}\times\frac{2}{b}tdt,\\
I&=\frac{2}{3b^2}\int(t^2-a)t^{-2}dt=\frac{2}{3b^2}\int\left(1-\frac{a}{t^2}\right)dt,\\
I&=\frac{2}{3b^2}\left[t+\frac{a}{t}\right]=\frac{2}{3b^2}\left[\frac{t^2+a}{t}\right]+C,\\
I&=\frac{2}{3b^2}\left[\frac{a+bu+a}{\sqrt{a+bu}}\right]+C=\frac{2}{3b^2}\left[\frac{2a+bu}{\sqrt{a+bu}}\right]+C,\\
I&=\frac{2}{3b^2}\left[\frac{2a+bx^3}{\sqrt{a+bx^3}}\right]+C.
\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos 1.8

Calcular las primitivas de las siguientes integrales:

1) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\sqrt[4]{2+\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$ 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}.$

3) $\displaystyle\int \sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}\,dx.$ 4) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$

5) $\displaystyle\int \frac{2\sqrt{1+x^4}}{x^3}\,dx.$ 6) $\displaystyle\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx.$

7) $\displaystyle\int x^5\sqrt{1+x^3}\,dx.$ 8) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^n(1+x^n)^{\frac{1}{n}}}.$

9) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}.$ 10) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{x^3}\,dx.$

1.9. Integrales de funciones racionales de seno y coseno

Se estudia la integración de funciones racionales que incluyen las funciones $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$.

1.9.1. Definiciones y ejemplos

Considerar la integral,

$$I = \int R(\cos x,\, \operatorname{sen} x)dx \qquad (1)$$

Donde R indica que las funciones trigonométricas seno y coseno aparecen en el numerador o denominador de una función racional.

La sustitución $tg\dfrac{x}{2} = t$, convierte la integral (1) en una integral racional de variable t.

Dicha cambio de variable se denomina sustitución universal.

En efecto,

$$x = 2arctg\, t;\ dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$
$$\operatorname{sen} x = 2\cos x\ \operatorname{sen} x = 2 \times \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \times \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 - \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Como se puede observar, la diferencial dx, sen x y $\cos x$ vienen definidas en términos de funciones racionales de variable t.

Ejemplo 14

Determinar las siguientes integrales:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\ \operatorname{sen}\, x + \cos x}.$ 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{5+4\ \operatorname{sen} 2x}.$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+tgx}.$ 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{2-\operatorname{sen}^2 x}.$

5) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x dx}{\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x}.$

Solución

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}.$

Sea $tg\left(\dfrac{x}{2}\right) = t;\ x = arctgt;\ dx = \dfrac{2dt}{1+2t^2};\ \operatorname{sen} x = \dfrac{2dt}{1+t^2};\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Entonces,

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+2t+1-t^2}{1+t^2}},$$
$$I = 2\int \frac{dt}{2+2t},$$
$$I = \int \frac{dt}{1+t} = ln|1+t| + C,$$
$$I = ln\left|1+tg\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{5+4\,\text{sen}\,2x}$.

Sea $2x = y;\ dx = \dfrac{1}{2}dy$.

Entonces,

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{5+4\ \text{sen}\ 2x}.$$

La sustitución $tg\left(\dfrac{y}{2}\right) = t$,conduce a:

$$y = 2arctg\,t;\ dy = \frac{2dt}{1+t^2};\ \text{sen}\ y = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Por tanto,

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+\frac{4(2t)}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{5+5t^2+8t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{5+5t^2+8t},$$

$$I = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{9}{25}} = \frac{1}{5}\times\frac{5}{3}\,arctg\left[\frac{t+\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}\right]+C,$$

$$I = \frac{1}{3}\,arctg\left[\frac{5t+4}{3}\right]+C \text{ pero } t = tg\left(\frac{y}{2}\right) = tg\left(\frac{2x}{2}\right) = tgx,$$

Luego,

$$I = \frac{1}{3}\,arctg\left[\frac{5tdx+4}{3}\right]+C.$$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+tgx}$.

Sea $tgx = u;\ x = arctgu;\ dx = \dfrac{du}{1+u^2}$.

Entonces,

$$I = \int \frac{\frac{du}{1+u^2}}{1+u} = \int \frac{du}{(1+u)(1+u^2)} = \int \left[\frac{A}{B}+\frac{Bu+D}{1+u^2}\right]du,$$

$$I = \frac{1}{2}\int\frac{du}{1+u} - \frac{1}{2}\int\frac{udu}{1+u^2} + \frac{1}{2}\int\frac{du}{1+u^2},$$

$$I = \frac{1}{2}\,ln|1+u| - \frac{1}{4}\,ln(1+u^2) + \frac{1}{2}\,arctgu + C,$$

$$I = \frac{1}{2}\,ln|1+tgx| - \frac{1}{4}\,ln(1+tg^2x) + \frac{1}{2}x + C.$$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{2-\ \text{sen}^2x}$.

Sea $tg\, x = u$; $dx = \dfrac{du}{1+u^2}$; $\operatorname{sen} x = \dfrac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}$.

Entonces,

$$I = \int \frac{\dfrac{du}{1+u^2}}{2 - \left(\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2} = \int \frac{\dfrac{du}{1+u^2}}{\dfrac{2(1+u^2)-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{du}{2+2u^2-u^2},$$
$$I = \int \frac{du}{u^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, arctg\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right),$$
$$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\, arctg\left(\frac{\sqrt{2}u}{2}\right) + C,$$
$$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\, arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, tgx\right) + C.$$

5) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x\, dx}{\cos^4 x + \ \operatorname{sen}^4 x}$.

$$I = \int \frac{\operatorname{sen} 2xdx}{(\cos^4 x + 2\cos^2 x\ \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x) - 2\cos^2 x\ \operatorname{sen}^2 x},$$
$$I = \int \frac{\operatorname{sen} 2xdx}{(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)^2 - 2\cos^2 x\ \operatorname{sen}^2 x},$$
$$I = \int \frac{\operatorname{sen} 2xdx}{1 - 2\cos^2 x\ \operatorname{sen}^2 x},$$

Pero, $\cos x\ \operatorname{sen}\ x = \dfrac{1}{2}\ \operatorname{sen}\ 2x$; $2\cos^2 x\ \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1}{2}\ \operatorname{sen}^2 x$.

Entonces,

$$I = \int \frac{\operatorname{sen} 2xdx}{1 - \dfrac{1}{2}\ \operatorname{sen}^2 2x} = 2\int \frac{\operatorname{sen} 2xdx}{2 - \operatorname{sen}^2 2x}.$$

Sea $2x = y$; $dx = \dfrac{1}{2}dy$,

$$I = \frac{2}{2}\int \frac{\operatorname{sen} ydy}{2 - \operatorname{sen}^2 y} = \int \frac{\operatorname{sen} ydy}{1 - \operatorname{sen}^2 y}.$$

La sustitución $tg\left(\dfrac{y}{2}\right) = t$,conduce a:

$$y = 2\, arctgb;\ dy = \frac{2t}{1+t^2};\ \operatorname{sen} y = \frac{2t}{1+t^2}.$$

De esta manera,

$$I = \int \frac{\dfrac{2t}{1+t^2} \times \dfrac{2dt}{1+t^2}}{2 - \left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)^2} = 4 \int \frac{\dfrac{tdt}{(1+t^2)^2}}{\dfrac{2(1+t^2)^2 - 4t^2}{(1+t^2)^2}},$$

$$I = 4 \int \frac{tdt}{2 + 4t^2 + 2t^4 - 4t^2} = 4 \int \frac{tdt}{2(1+t^4)},$$

$$I = \int \frac{2tdt}{1+t^4} = \int \frac{2tdt}{1+(t^2)^2}.$$

Sea $t^2 = z;\ 2tdt = z.$

Luego,

$$I = \int \frac{dz}{1+(z^2)^2} = \ arctgz + C.$$

Pero $z = t^2;\ z = tg^2\left(\frac{y}{2}\right) = tg^2\left(\dfrac{2x}{2}\right) = tg^2 x.$

Entonces,

$$I = \ arctg\left(tg^2 x\right) + C.$$

Ejercicios propuestos 1.9

Determinar las primitivas de las siguientes integrales:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + 2}.$ 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - 2\ \operatorname{sen} x}.$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{2 - \cos x}.$ 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \cos x - 1}.$

5) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x dx}{1 + \operatorname{sen}^2 x}.$ 6) $\displaystyle\int \frac{dx}{5 + 3\ \operatorname{sen} x}.$

7) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x dx}{1 + \operatorname{sen} x}.$ 8) $\displaystyle\int \frac{\cos x dx}{1 + \cos x}.$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1 + \cos x)^2}.$ 10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x + tg^2 x}.$

1.10. Otras sustituciones

En las siguientes líneas, se plantean y resuelven integrales que requieren una sustitución especial o algún procedimiento matemático particular.

En algunas ocasiones, al resolver integrales que contienen funciones racionales, se presentan operaciones algebraicas dispendiosas, por lo cual, se requiere tener mucho cuidado a lo largo del proceso.

Por otra parte, es conveniente anotar que, algunas integrales se pueden resolver por métodos diferentes. Se necesita, entonces, optar por el camino más eficiente, el cual, estará orientado por la experiencia y habilidad para resolver este tipo de integrales.

Ejemplo 15
Calcular las integrales indefinidas:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$. 2) $\displaystyle\int \frac{x^5dx}{(1+x^2)^3}$.

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2\text{sen}^2 x+b^2\cos^2 x}$. 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}}$.

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+2}}$.

Solución

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$.

Al completar cuadrados en el trinomio x^2+x+1, se obtiene,

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Entonces,

$$I=\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^3}.$$

Sea $x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,tgt;\ dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 tdt$.

Por tanto,

$$I=\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{dx}{\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}tgt\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{4}{3}\right)^3\int\frac{\sec^2 tdt}{(tg^2+1)^3},$$

$$I=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{64}{27}\int\frac{\sec^2 tdt}{\sec^6 tdt}=\frac{32\sqrt{3}}{27}\int\frac{dt}{\sec^4 t}=\frac{32\sqrt{3}}{27}\int\cos^4 tdt.$$

$$I=\frac{32\sqrt{3}}{27}\int\left[\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\right]^2 dt,$$

$$I=\frac{32\sqrt{3}}{27}\times\frac{1}{4}\int(1+2\cos 2t+\cos^2 2t)dt,$$

$$I=\frac{8\sqrt{3}}{27}\left[t+\text{sen}\,2t+\frac{1}{2}\int(1+\cos 4t)dt\right],$$

$$I=\frac{8\sqrt{3}}{27}\left[t+\text{sen}\,2t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}\ \text{sen}\,4t\right]+C,$$

$$I=\frac{8\sqrt{3}}{27}\left[\frac{3}{2}t+\text{sen}\,2t+\frac{1}{8}\ \text{sen}\,4t\right]+C,$$

Pero $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}tg\,t;\; t=arctg\left[\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]$.

Además,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}2t = 2\cos t\operatorname{sen}t = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x^2+x+1}}\times\frac{(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{(2x+1)\sqrt{3}}{2\sqrt{x^2+x+1}},\\
&\operatorname{sen}4t = 4\operatorname{sen}t\cos t - 8\operatorname{sen}^3 t\cos t\\
&\operatorname{sen}4t = \frac{4(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}}\times\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x^2+x+1}}-8\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\right)^3\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x^2+x+1}}\right),\\
&\operatorname{sen}4t = \frac{(2x+1)\sqrt{3}}{x^2+x+1}-\frac{(2x+1)^3\sqrt{3}}{2(x^2+x+1)^2}.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{8\sqrt{3}}{27}\left[\frac{3}{2}\,arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{(2x+1)\sqrt{3}}{2(x^2+x+1)}+\frac{(2x+1)\sqrt{3}}{8(x^2+x+1)}-\frac{(2x+1)^2\sqrt{3}}{16(x^2+x+1)^2}\right].\\
I &= \frac{8\sqrt{3}}{27}\left[\frac{2}{3}\,arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{5(2x+1)\sqrt{3}}{8(x^2+x+1)}-\frac{(2x+1)\sqrt{3}}{16(x^2+x+1)^2}\right]+C.
\end{aligned}$$

2) $\displaystyle\int\frac{x^5dx}{(1+x^2)^3}$.

El integrando corresponde a una función racional, cuyo denominador contiene un factor cuadrático irreducible, repetido tres veces, así:

$$\frac{x^5}{(1+x^2)^3}=\frac{Ax+B}{1+x^2}+\frac{Dx+E}{(1+x^2)^2}+\frac{Fx+G}{(1+x^2)^2}.$$

Donde A, B, D, E, F, G son constantes por determinar. A primera vista, resulta un procedimiento algebraico dispendioso; de manera que, se opta por calcular la integral propuesta como un binomio diferencial, así:

$$I=\int x^5(1+x^2)^{-3}dx.$$

Aquí $m=5;\; n=2;\; p=-3$ como $p=-3\in\mathbb{Z}$, corresponde al primer caso binomial.

Sea $x^2=u;\; x=u^{\frac{1}{2}}; dx=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du;\; x^5=u^{\frac{5}{2}}$.

Por tanto,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int u^{\frac{5}{2}}(1+u)^{-3}u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{2}\int u^2(1+u)^{-3}du,\\
I &= \frac{1}{2}\int\frac{u^2du}{(1+u)^3}
\end{aligned}$$

Sea $1+u=t;\; du=dt;\; u=t-1;\; u^2=(1+t)^2$.

Luego,

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{(t-1)^2 dt}{t^3} = \frac{1}{2}\int \frac{t^2-2t+1}{t^3}\,dt,$$

$$I = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^3}\right) dt = \frac{1}{2}\,ln|t| + \frac{1}{t} - \frac{1}{4t^2} + C.$$

Pero $t = 1 + u = 1 + x^2$, entonces,

$$I = \frac{1}{2}\,ln(1+t^2) + \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{4(1+x^2)} + C.$$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 \operatorname{sen} x + b^2 \cos^2 x}.$

Para esta integral, podría utilizarse la sustitución universal $tgx = t$; sin embargo, se la puede resolver fácilmente, por otro procedimiento.

Al dividir numerador y denominador por $\cos^2 x$, se llega a lo siguiente:

$$I = \int \frac{\dfrac{dx}{\cos^2 x}}{\dfrac{a^2 \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + b^2} = \int \frac{\sec^2 x dx}{a^2 tg^2 x + b^2}.$$

Sea $tgx = u;\ d(tgx) = d(u);\ \sec^2 x dx = du.$

Por tanto,

$$I = \int \frac{du}{a^2u^2 + b^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{du}{u^2 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^2},$$

$$I = \frac{1}{a^2} \times \frac{a}{b}\, arctg\left[\frac{u}{\dfrac{b}{a}}\right] + C = \frac{1}{ab}\, arctg\left[\frac{a}{b}u\right] + C.$$

Pero $u = tgx$, entonces,

$$I = \frac{1}{ab}\, arctg\left[\frac{a}{b}\, tgx\right] + C.$$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}}.$

Sea $x = \dfrac{1}{z};\ dx = -\frac{1}{z^2}\,dz$, entonces,

$$I = -\int \frac{dz}{z^2 \dfrac{1}{2}\sqrt{1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2}}} = -\int \frac{dz}{z^2 \dfrac{1}{z^2}\sqrt{z^2+z+1}},$$

$$I = -\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+z+1}} = \int \frac{dz}{\sqrt{\left(z+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}.$$

Sea $z+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,tgt;\; dz=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 tdt.$

Luego,

$$I=-\int\frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 tdt}{\sqrt{\dfrac{3}{4}tg^2t+\dfrac{3}{4}}}=\frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}\int\frac{\sec^2 tdt}{\sqrt{tg^2t+1}}.$$

$$I=\int\frac{\sec^2 tdt}{\sec t}=-\int\sec t\,tgt=-ln|\sec t+tgt|+C.$$

Pero,

$$\sec t=\frac{2\sqrt{z^2+z+1}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}x};$$

$$tgt=\frac{z+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2z+1}{\sqrt{3}}=\frac{2+x}{\sqrt{3}}.$$

Finalmente,

$$I=ln\left|\frac{2\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}x}+\frac{2+x}{\sqrt{3}}\right|+C,$$

$$I=ln\left|\frac{2\sqrt{x^2+x+1}+2+x}{\sqrt{3}}\right|+C.$$

5) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+2}}.$

Sea $\sqrt{x^2-x+2}=z-x$,

$x^2-x+2=z^2-2zx+x^2$,

$2xz-x=z^2-2$,

$x(2z-1)=z^2-2$,

$x=\dfrac{z^2-2}{2z-1};\; dx=\dfrac{2(z^2-z+2)}{(2z-1)^2}\,dz.$

Por tanto,

$$I=2\int\frac{\dfrac{(z^2-z+2)dz}{(2z-1)^2}}{\left(\dfrac{z^2-2}{2z-1}\right)(z-x)}.$$

Pero,

$$z-x=z-\frac{z^2-2}{2z-1};\; z-x=\frac{(z^2-z+2)}{2z-1}.$$

De esta manera,

$$I = 2\int \frac{(z^2 - z + 2)dz}{(2z-1)(z^2-2)\dfrac{(z^2-z+2)}{2z-1}} = 2\int \frac{dz}{z^2-2},$$

$$I = \frac{2}{2\sqrt{2}}\, ln\left|\frac{\sqrt{2}-z}{\sqrt{2}+z}\right|,$$

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\, ln\left|\frac{\sqrt{2}-x-\sqrt{x^2+x+2}}{\sqrt{2}+x+\sqrt{x^2+x+2}}\right| + C.$$

Ejercicios propuestos 1.10

Calcular las primitivas de las siguientes integrales indefinidas:

1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx.$

2) $\displaystyle\int \frac{\cos x dx}{5+4\cos x}.$

3) $\displaystyle\int \sqrt{tgx}$; sugerencia: $tgx = y^2$.

4) $\displaystyle\int x^2\left(a+bx^5\right)^{-\frac{18}{5}}\,dx.$

5) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x}\,dx.$

6) $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{1-x^2}}{1-x\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+1}}.$

8) $\displaystyle\int \frac{(2a^2-x^2)x^3\,dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{3}{2}}}.$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(x^4-a^4)}.$

1.11. Respuestas Ejercicios Capítulo 1

Respuestas ejercicios propuestos 1.1

A)

1) $\dfrac{1}{2}x^2 + 5x + \dfrac{4}{x} + C.$

2) $2\sqrt{x+3} + C.$

3) $\dfrac{3}{16}\sqrt[3]{(2x^2+3)^4} + C.$

4) $\dfrac{1}{2(2-y)^2} + C.$

5) $\dfrac{-1}{4(x^2+4)^2} + C.$

6) $\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{2}{5}x^5 + \dfrac{1}{8}x^8 + C.$

7) $-\dfrac{1}{9}(1-x^2)^3 + C.$

8) $\dfrac{9}{4}\sqrt[3]{(z^2+3)^2} + C.$

9) $\sqrt{x^2+2x-4} + C.$

10) $\dfrac{1}{2}x^2 + 2\,ln|x+2| + C.$

11) $e^x - \dfrac{x^{e+1}}{e+1} + C.$ 12) $ln(e^x+1)^2 - x + C.$

13) $ln\dfrac{C}{(1-\sqrt{x})^2}; C > 0.$ 14) $x + \dfrac{1}{2}\cos 2x + C.$

15) $\dfrac{1}{6}tg^6 x + C.$ 16) $\dfrac{1-\cos 3x}{3\operatorname{sen} 3x} + C.$

17) $\dfrac{1}{3}\,ln|tg3x| + C.$ 18) $\dfrac{1}{4}\sec^4 x + C.$

19) $\dfrac{1}{2}e^{tg2x} + C.$ 20) $\dfrac{1}{2}\,tgx^2 + C.$

B)

1) $arcsen\left(\dfrac{\sqrt{5}x}{3}\right) + C.$ 2) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}arcsen\left(\dfrac{\sqrt{5}x}{5}\right) + C.$

3) $\dfrac{1}{2}\,arctge^{2x} + C.$ 4) $ln(x^2+6x+13) - \dfrac{9}{2}\,arctg\left(\dfrac{x+3}{2}\right) + C.$

5) $\sqrt{-4x^2+12x-8} - \dfrac{1}{2}\,arcsen(2x-3) + C.$

6) $\dfrac{1}{2}\,ln\left|2x\sqrt{4x^2-25}\right| + C.$ 7) $\dfrac{1}{3}x^3 - x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,arctg\left(\sqrt{2}x\right) + C.$

8) $\dfrac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x} - 8\,ln\left|x-4+\sqrt{x^2-8x}\right| + C.$

9) $2\sqrt{1+x^2} + 3\,ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C.$

C)

1) $f(x) = 3x^{\frac{7}{3}} - 6x^{-\frac{1}{6}} + 4.$ 2) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x - 4.$

3) $-2.$ 4) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

Respuestas ejercicios propuestos 1.2

1)

a) $\cos x.$ b) $3.$ c) $-2x.$ d) $4x^3.$ e) $\dfrac{1}{2}.$

2)

a) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} + C.$

b) $\frac{1}{2}\, ln\,|\sec x + tgx| + C$; $\sec > 0.$

c) $\frac{2}{3}\sqrt{(e^x+1)^3} - 2\sqrt{e^x+1} + C.$

d) $\frac{ln^2(x+1)}{2} + C.$

e) $\frac{2}{3}\sqrt{(tgx+1)^3} + C.$

f) $ln\,|arctgx| + C.$

g) $\frac{3^x e^x}{ln\,3+1} + C.$

h) $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x - \left(\frac{b}{x}\right)}{lna - lnb} - 2x + C.$

i) $\frac{1}{a}\, ln\mid ax + \sqrt{b^2+a^2x^2} + C.$

j) $\frac{\sqrt{5}}{30}\, ln\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{x^3-\sqrt{5}}\right) + C.$

k) $arcsen(lnx) + C.$

l) $4\sqrt{1+\sqrt{x}} + C.$

m) $-2\sqrt{1+\cos^2 x} + C.$

n) $\frac{1}{2}\, arcsen\, x^2 + C.$

o) $\frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3} + C.$

p) $-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + C.$

q) $2\sqrt{1+lnx} - ln\,|lnx| + 2\, ln\,\left|\sqrt{1+lnx} - 1\right| + C.$

r) $-\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C.$

s) $\frac{3}{10}\,(2e^x-3)\,\sqrt[3]{(1+e^x)^2} + C.$

t) $2\sqrt{1+x^2} + 3\, ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C.$

Respuestas ejercicios propuestos 1.3

A)

1) $3\,xarctg\,3x - \frac{1}{2}\left|1+9x^2\right| + C.$

2) $\frac{2}{3}\, e^{2x}\operatorname{sen}\, 3x - \frac{3}{13}\, e^{2x}\cos 3x + C.$

3) $\frac{1}{5}x^5\, ln^2 x - \frac{2x^5}{25}\, lnx + \frac{2}{125}x^5 + C.$

4) $2\sqrt{x}\, arcsen\,\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C.$

5) $xln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - \sqrt{1+x^2} + C.$

6) $-\frac{1}{2x^2}\, ln\,(\sqrt{e}x) + C.$

7) $\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2\,\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{8}\,\operatorname{sen} 2x + C.$

8) $\frac{1}{2}\, arctgx - \frac{x}{2(1+x^2)} + C.$

9) $x(arcsenx)^2 + 2(arcsenx)\sqrt{2-x^2} - 2x + C.$

10) $\dfrac{1}{2}\,arcsenx - \dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$

11) $ln\left|\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right| - \dfrac{1}{3}\,arctgx - \dfrac{1}{2}(arctgx)^2 + C.$

12) $\dfrac{2(3a^2x^2 - 4abx + 8b^2)}{15a^3}\,\sqrt{ax+b} + C.$

13) $\dfrac{2(15a^2x^2 - 12abx + 8b^2)}{105a^3}\,\sqrt{(ax+b)^3} + C.$

14) $\left(\dfrac{3x^2}{b^2} - \dfrac{6}{6^4}\right)\operatorname{sen} bx + \left(\dfrac{6x}{b^3} - \dfrac{x^3}{b}\right)\cos bx + C.$

14) $\dfrac{x}{4}\,(x^2-2)\sqrt{4 - x^2 + 2arcsen\,\dfrac{x}{2}} + C.$

B)

1) $arcsen\left(\dfrac{lnx}{\sqrt{3}}\right) + C.$ 2) $\dfrac{1}{8}\,\operatorname{sen}\,2x - \dfrac{1}{4}x\cos 2x + C.$

3) $\sqrt{(a-x)(x-b)} - (a-b)\;arctg\,\sqrt{\dfrac{a-x}{x-b}} + C.$

4) $xarctgx - \dfrac{1}{2}\,(arctgx^2) - \dfrac{1}{2}\,(arctgx)^2 + C.$

5) $\dfrac{xarcsenx}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2}\,ln\,|1-x^2| + C.$

Respuestas ejercicios propuestos 1.4

1)

a) $\dfrac{5}{10}x + \dfrac{1}{2}\,\operatorname{sen}\,x + \dfrac{3}{32}\,\operatorname{sen}\,22 - \dfrac{1}{24}\,\operatorname{sen}^3 x + C.$

b) $\dfrac{1}{5}\cos^5 y - \dfrac{1}{3}\cos^2 y + C.$ c) $\dfrac{1}{4}\cos 2t - \dfrac{1}{12}\cos 6t + C.$

d) $\dfrac{1}{2}\,\operatorname{sen}\,z + \dfrac{1}{10}\,\operatorname{sen}\,5z + C.$ e) $\operatorname{sen} x + \dfrac{1}{2}\,\operatorname{sen}^2 x + C.$

f) $cscx - \dfrac{1}{3}\,csc^3x + C.$ g) $\dfrac{1}{2}tg^2x + ln\,|\cos x| + C.$

h) $\dfrac{2}{5}\,tg^{\frac{5}{2}}x + \dfrac{2}{9}\,tg^{\frac{9}{2}}x + C.$ i) $-\dfrac{1}{2}\,ctg2x - \dfrac{1}{6}\,ctg^3 2x + C.$

j) $-\dfrac{1}{4}\,ctg^4x - \dfrac{1}{6}\,ctg^6x + C.$ k) $-\operatorname{sen} x - cscx + C.$

l) $-\dfrac{1}{3tg^3x} - \dfrac{1}{tgx} + C.$ m) $-\dfrac{1}{4}\,ctg^4x - \dfrac{1}{6}\,ctg^6x + C.$

n) $-\dfrac{1}{4}\,csc^3xctgx - \dfrac{3}{8}\,cscxctgx + \dfrac{3}{8}\,ln\,|cscx + ctgx| + C.$

Respuestas ejercicios propuestos 1.5

A)

1) $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-100}-50\,ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.$

2) $\sqrt{x^2-81}-9\ arcsec\ \left|\frac{x}{9}\right|+C.$

3) $-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{1}{2}\ arcsec\ \left(\frac{x}{a}\right)+C.$

4) $-\frac{1}{2}\,ln\left|\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+C.$

5) $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}\,ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C.$

6) $-\frac{\sqrt{x^2+25}}{50x^2}+\frac{1}{150}\,ln\left|\frac{5+\sqrt{x^2+25}}{x}\right|+C.$

7) $-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+C.$

8) $\frac{1}{54}\ arctg\ \left(\frac{x}{3}\right)+\frac{1}{18}\frac{x}{(9+x^2)}+C.$

9) $-\frac{1}{3}\frac{2x+7}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}}+C.$

10) $-\frac{1}{9}\frac{x-3}{\sqrt{4x^2-24+27}}+C.$

Respuestas ejercicios propuestos 1.6

1) $ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right|+C.$

2) $\frac{1}{8}\ ln\ \left|\frac{(x+3)^6}{(x+5)^5(x+1)}\right|+C.$

3) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+ln\ \left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C.$

4) $\frac{1}{x-1}+ln\ \left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C.$

5) $\frac{3}{x-2}+ln\ \left|\frac{(x-2)^2}{x^2}\right|+C.$

6) $\dfrac{-5x+12}{x^2+6x+8}+ln\ \left(\dfrac{x+4}{x+2}\right)^2+C.$

7) $ln\left|\dfrac{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}{x+1}\right|+\dfrac{1}{2}\ arctg\left(\dfrac{x-1}{2}\right)+C.$

8) $ln\left|\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right|+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ arctg\ \left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$

9) $ln\left(\dfrac{x^2+4}{(x+1)^2}\right)+\dfrac{1}{2}\ arctg\dfrac{x}{2}+C.$

10) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ln\left|\dfrac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+\sqrt{2}\ arctg\left[\dfrac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right]+C.$

11) $\dfrac{2-x}{4(x^2+2)}+ln\ \sqrt{x^2+2}-\dfrac{\sqrt{2}}{8}\ arctg\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)+C.$

12) $\dfrac{3x^2-1}{(x+1)(x^2+1)}+ln\,\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}+arctgx+C.$

Respuestas ejercicios propuestos 1.7

1) $\dfrac{4}{3}\left[\sqrt[4]{x^3}-ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right|\right]+C.$

2) $\dfrac{2}{27}\sqrt[4]{x^9}-\dfrac{2}{13}\ \sqrt[12]{x^{13}}+C.$

3) $-\dfrac{6}{\sqrt[6]{x}}-\dfrac{12}{\sqrt[12]{x}}+2\,ln\,|x|-24\,ln\ \left(\sqrt[12]{x}+1\right)+C.$

4) $\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-9\,ln\ \left(\sqrt[6]{x}+1\right)+\dfrac{3}{2}\,ln\ \left(\sqrt[3]{x}+1\right)+3arctg\ \sqrt[6]{x}+C.$

5) $ln\left|\dfrac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right|-\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}+C.$

6) $14\left[\sqrt[14]{x}-\dfrac{1}{2}\sqrt[7]{x}+\dfrac{1}{3}\ \sqrt[14]{x}-\dfrac{1}{4}\sqrt[7]{x^2}+\dfrac{1}{5}\ \sqrt[14]{x^{15}}\right]+C.$

7) $\sqrt{3x^2-7x-6}+\dfrac{11\sqrt{3}}{6}\,ln\left|x-\dfrac{7}{6}+\sqrt{x^2-\dfrac{7}{3}x-2}\right|+C.$

8) $2\sqrt{x+1}+8\,ln\ \left|\sqrt{x-1}-2\right|-2\,ln\left|\sqrt{x-1}-1\right|+C.$

9) $-x-\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}\left(\sqrt{3x+2}-ln\left|\sqrt{3x+2}+1\right|\right)+C.$

10) $2\sqrt{x+1}+ln\left|\sqrt{x+1}+1\right|-4\sqrt[4]{x+1}+C.$

11) $\dfrac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}-3\,ln\,|1+\sqrt[3]{x}|+6arctg\sqrt[6]{x}+C.$

12) $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}-16\sqrt[8]{x}+2\,ln\,|\sqrt[8]{x}+1|+3\,ln\,|\sqrt[4]{x}-\sqrt[8]{x}+2|$
$+\dfrac{62\sqrt{7}}{7}\,arctg\left(\dfrac{2\sqrt[8]{x}-1}{\sqrt{7}}\right)+C.$

13) $\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)^4}+C.$

14) $\dfrac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\dfrac{12}{5}\sqrt[6]{x^5}+4\sqrt{x}-12\sqrt[6]{x}+12\,arctg\sqrt[6]{x}+C.$

15) $\dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+\dfrac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-x-\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+3\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+6\,ln\,|\sqrt[3]{x}+1|$
$+6arctg\,\sqrt[6]{x}+1+C.$

Respuestas ejercicios propuestos 1.8

1) $\dfrac{10\sqrt[3]{x^2}-16}{15}\sqrt[4]{\left(2+\sqrt[3]{x^2}\right)^5}+C.$

2) $-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)+C.$

3) $\dfrac{8}{77}(7\sqrt{x}-4)\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^7}+C.$

4) $\dfrac{2(4+3\sqrt[3]{x})(2-\sqrt[3]{x})^{\frac{3}{2}}}{5}+C.$

5) $ln\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)-\dfrac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}+C.$

6) $\dfrac{5x^3-3}{40}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C.$

7) $\dfrac{2(3x^3-2)(1+x^3)^{\frac{3}{2}}}{45}+C.$

8) $-\dfrac{(1+x^n)^{\frac{n-1}{m}}}{(n-1)x^{n-1}}+C.$

9) $\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+C.$

10) $\dfrac{-\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{2x^2}-\dfrac{3\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\dfrac{3a}{2}\,ln\left|\dfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C.$

Respuestas ejercicios propuestos 1.9

1) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,arctg\left(\dfrac{2tg\dfrac{x}{2}+1}{3}\right)+C.$

2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,ln\left|\dfrac{tg\dfrac{x}{2}-2-\sqrt{3}}{tg\dfrac{x}{2}-2+\sqrt{3}}\right|+C.$

3) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,arctg\left(\sqrt{3}tg\dfrac{x}{2}\right)+C.$

4) $ln\left|tg\dfrac{x}{2}1-\right|+C.$

5) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\, ln \left| \dfrac{tg^2\dfrac{x}{2}+3-2\sqrt{2}}{tg^2\dfrac{x}{2}+3+2\sqrt{2}} \right| + C.$ 6) $\dfrac{1}{2}\, arctg\left(\dfrac{5tg\dfrac{x}{2}+3}{4} \right) + C.$

7) $\dfrac{2}{1+tg\dfrac{x}{2}} + x + C.$ 8) $x - tg^2\dfrac{x}{2} + C.$

9) $\dfrac{1}{2}tg\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{6}tg^3\dfrac{x}{2} + C.$ 10) $-\dfrac{1}{2}\left[ctgx + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, arctg\left(\dfrac{tgx}{\sqrt{2}} \right) \right] + C.$

Respuestas ejercicios propuestos 1.10

1) $ln \left| \dfrac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+2\sqrt{x+1}} \right| + C.$

2) $\dfrac{1}{4}x - \dfrac{5}{6}\, arctg\left(\dfrac{1}{3}tg\dfrac{x}{2} \right) + C.$

3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[ln\left(\operatorname{sen} - \sqrt{\operatorname{sen} 2x} + \cos x + arctg\left(\dfrac{\sqrt{\operatorname{sen} 2x}}{\cos x - \operatorname{sen}\ \ \mathrm{x}} \right) \right) \right] + C.$

4) $\dfrac{1}{a^3}\left(a+bx^5\right)^{-\frac{13}{5}} \left[\dfrac{1}{3}(a+bx^5)^2 - \dfrac{1}{4}b(a+bx^5) + \dfrac{1}{13}b^2 \right] + C.$

5) $e^x(10\operatorname{sen} 2x + 5\cos 2x + 1) + C.$

6) $-\dfrac{1}{2}\, ln\left| 1 - x\sqrt{1-x^2} \right| + \sqrt{3}\, arctg\left(\dfrac{2x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{3(1-x^2)}} \right) - arcsenx + C.$

7) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\, arcsen\left(\dfrac{\sqrt{3}}{x-2} \right) C.$

8) $\dfrac{(a^2-x^2)^2+3a^4}{3(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} + C.$

9) $\dfrac{2(2ax+b)}{(4ac-b^2)\sqrt{ax^2+bx+c}} + C.$

10) $\dfrac{1}{2a^4x^2} + \dfrac{1}{4a^6}\, ln\left| \dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2} \right| + C.$

Capítulo 2

Integral definida

CAPÍTULO 2. INTEGRAL DEFINIDA

Capítulo 2

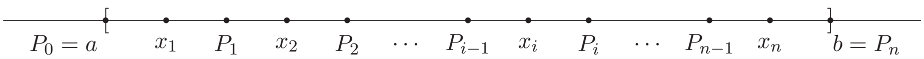
Integral definida

2.1. Definiciones y conceptos

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Considérese dividido este intervalo en n subintervalos, por medio de los puntos:

$P_0,\ P_1, \ldots, P_{i-1}, \ldots, P_n$. Si $P_0 = a;\ P_n = b$, entonces,

$a = P_0 < P_1 < \cdots < P_{n-1} < P_n = b$.



Sea $\Delta x_i = P_i - p_{i-1}$, la longitud del intervalo que ocupa el lugar i.

Entonces,

$$\Delta x_1 = P_1 - P_0;\ \Delta x_2 = P_2 - P_1, \ldots, \Delta x_n = P_n - P_{n-1}$$

Tómese en cada subintervalo, un punto x_i, de modo que $x_i \in [P_{i-1}, P_i]$ y fórmese la siguiente suma, denominada suma de Riemann:

$$S_n = f(x_{})\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_i)\Delta x_i + \cdots + f(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\delta x_i \tag{1}$$

Cuando el número de subdivisiones aumenta indefinidamente, esto es cuando $n \to \infty$, se define,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \left[f(x_1)\Delta x_1 + \cdots + f(x_i)\Delta x_i + \cdots + f(x_n)\Delta x_n\right],\\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx. \end{aligned} \tag{2}$$

La integral

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

se denomina *Integral Definida* o Integral de Riemann de la función $f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$. El número a se denomina límite inferior; el número b, límite superior y, $f(x)$ se denomina integrando.

2.2. Propiedades de la integral definida

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en el intervalo $[a,b]$ y α un escalar; entonces,

1) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$

2) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$

3) $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx.$

4) $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

5) $c \in [a,b]$, entonces, $\displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x) = \int_a^b f(x)dx.$

6) Teorema del valor medio: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_0);\ x_0 \in [a,b].$

7) Teorema fundamental del cálculo (Newton $-$ Barrow)
Si $F(x)$es la primitiva de $f(x)$, esto es $F'(x) = f(x)$, entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\mid_a^b = F(b) - F(a)\ \forall x \in [a,b].$$

Demostración
1) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0.$
La demostración es inmediata, pues la longitud del intervalo de integración es 0, es decir $\Delta x = 0$. Por tanto, $S_n = 0$; entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = 0 = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

b) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$

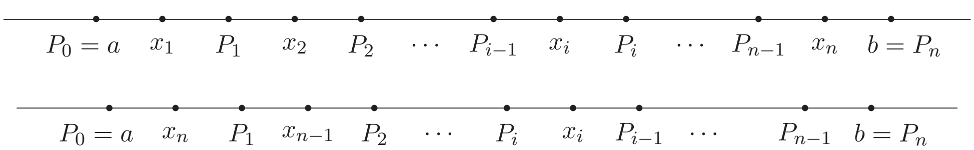


Figura 2. Partición del intervalo $[a,b]$

Para la integral del primer miembro, considérese la primera partición de $[a,b]$ de la Figura 2; los puntos x_i en cada subintervalo, se numeran de izquierda a derecha.

Para la integral del segundo miembro, se considera la segunda partición de $[a, b]$, de la Figura 2; los puntos x_i en cada subintervalo, se numeran de derecha a izquierda.

A partir de la primera partición, los Δx_i en cada subintervalo son positivos, mientras que, en la segunda partición, los Δx_i son negativos. Entonces, como se trata del mismo intervalo $[a, b]$, se tiene que:

- Para la primera partición:
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx.$$

- Para la segunda partición:
$$\lim_{n\to\infty} S_n = -\int_a^b f(x)dx.$$

Luego,
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

6) El primer teorema del valor medio para integrales, establece que, si $f(x)$, es continua en $[a, b]$, se verifica que:
$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_0) \text{ donde } x_0 \in [a, b].$$

En efecto,

Si $f(x) = k$ (constante), $\displaystyle\int_a^b kdx = k(b-a)$; pues,
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} k\Delta x_i = (k + k + \cdots + k)\Delta x = nk\left(\frac{b-a}{n}\right) = k(b-a).$$

Note que las longitudes de los subintervalos, son:
$$\Delta x_i = \left(\frac{b-a}{n}\right).$$

Para otras situaciones, sean m y M, el mínimo y máximo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Al efectuar convenientemente la partición de $[a, b]$ y la elección de los puntos x_i, se tiene que,
$$\sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i.$$

Cuando $n \to \infty$, se obtiene lo siguiente,
$$\int_a^b mdx < \int_a^b f(x)dx < \int_a^b Mdx,$$
$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$$
$$m < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx < M.$$

Dado que $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y que $\frac{1}{b}\int_a^b f(x)dx$ es un número comprendido entre m y M, entonces, por aplicación de propiedades de las funciones continuas, debe existir un punto $x_0 \in [a,b]$, para el cual se cumpla lo siguiente:

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Por tanto,

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_0).$$

Problema 1

Demostrar que,
Si $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)dx$, entonces, $F'(x) = f(x)$.

Demostración

Para calcular la derivada de $F(x)$, se procede como sigue:
Por hipótesis,

$$\begin{aligned} F(x+\Delta x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx = \int_a^{x+\Delta x} f(x)dx + \int_x^a f(x)dx, \\ &= \int_x^a f(x)dx + \int_a^{x+\Delta x} f(x)dx = \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx = f(x_0)\Delta x. \end{aligned}$$

donde, por teorema valor medio de integrales,

$$x_0 \in [x, x+\Delta x].$$

Por tanto,

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x_0).$$

Al tomar limites, se obtiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0) = f(x).$$

Dado que, $\Delta x \to 0$, entonces, $x_0 \to x$.
De manera que, $F'(x) = f(x)$.

Problema 2

Demostrar el teorema fundamental del cálculo (Newton $-$ Barrow):
Si $F(x)$ es la primitiva de $f(x)$, $\forall x \in [a, ab]$, siendo $f(x)$ continua en $[a,b]$, entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \ \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Demostración

Al aplicar la propiedad demostrada en el problema 1, se tiene que,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) + C.$$

Si el límite superior es, $x = a$, entonces,

$$\int_a^a f(x)dx = 0 = F(a) + C.$$

De donde $c = -F(a)$.

Por tanto,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) - F(a).$$

Si el límite superior es, $x = b$, se obtiene que,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) - F(a) = F(x) \ \Big|_a^b .$$

NOTA

A partir del Teorema Fundamental del Cálculo, se puede afirmar que la derivación y la integración de una función, son operaciones inversas. En esencia, la fórmula de Newton−Barrow, establece un método muy práctico para calcular integrales definidas, cuando se conoce la primitiva del integrando, sin tener que recurrir a los cálculos mediante sumas finitas.

El problema que sigue, ilustra lo mencionado anteriormente.

Problema 3

Demostrar que $\displaystyle\int_0^5 xdx = \frac{25}{2}$.

Demostración

a) Método 1.

Se define una partición del intervalo $[0, 5]$, en n subintervalos, cuya longitud es $\dfrac{5-0}{n} = \dfrac{5}{n} = \Delta x$.

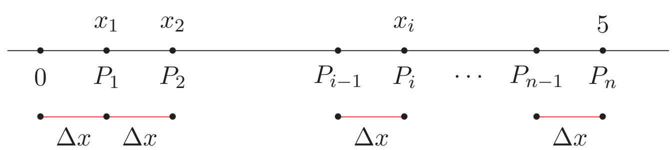


Figura 3. Partición del intervalo $[0, 5]$, en n subintervalos iguales

Elegir los puntos x_i, de manera que cada x_i coincida con el lado derecho de cada subintervalo. (Ver Figura 3).

A partir de esta partición, se puede escribir:

$$x_1 = \Delta x,\ x_2 = 2\Delta x, \ldots, x_n = n\Delta x.$$

Entonces,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (i\Delta x)\Delta x_i,$$
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i(\Delta x)^2 = (1+2+\cdots+n)(\Delta x)^2,$$
$$= (1+2+\cdots+n)\left(\frac{5}{n}\right)^2.$$

Pero $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Por tanto,

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{25}{n^2}\right) = \frac{25}{2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{25}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Por definición de integral definida, se tiene que,

$$\int_0^5 xdx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{25}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{25}{2}(1-0) = \frac{25}{2}.$$

b) Método 2.

Se calcula la integral indefinida:

$$\int xdx = \frac{1}{2}x^2 = F(x).$$

Al aplicar el teorema fundamental del cálculo, se tiene,

$$\int_0^5 xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^6 = \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^5 = \frac{1}{2}[25-0] = \frac{25}{2}.$$

Problema 4

Aplicar el teorema fundamental del cálculo para calcular las siguientes integrales definidas:

1) $\displaystyle\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx.$ 2) $\displaystyle\int_{-1}^{4}\frac{x}{x+2}\,dx.$

3) $\displaystyle\int_{3}^{11}\sqrt{2x+3}\,dx.$ 4) $\displaystyle\int_{4}^{8}\frac{x}{\sqrt{x^2-15}}\,dx.$

5) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x-1}{\cos 2x+1}\,dx.$ 6) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\cos x+\operatorname{sen} x}dx.$

Solución

1) $I = \displaystyle\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx = \left[-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^3}\right]_{-3}^{-1}.$

$$I = \left(-\frac{1}{(-1)}+\frac{1}{2(-1)^2}\right)-\left(-\frac{1}{(-3)}+\frac{1}{2(-3)^2}\right),$$

$$I = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{18}\right) = \frac{3}{2} - \frac{7}{18} = \frac{10}{9}.$$

En consecuencia,

$$\int -1_{-3} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx = \frac{10}{9}.$$

2) $I = \displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{1}{x+2}\, dx.$

Después de la división formal de x entre $x \pm 2$, se tiene,

$$I = \int_{-1}^{4} \left[1 - \frac{2}{x+2}\right] dx = [x - 2\,ln\,|x+2|]_{-1}^{4}$$
$$I = (4 - 2\,ln\,|x+2|) - (-1 - 2\,ln\,|-1+2|)$$
$$I = 4 - 2\,ln\,6 + 1 + 2\,ln\,1 = 5 - 2\,ln\,6.$$

Luego,

$$\int_{-1}^{4} \frac{x}{x+2}\, dx = 5 - 2\,ln\,6.$$

3) $\displaystyle\int_{3}^{11} \sqrt{2x+3}\, dx = \int_{3}^{11} (2x+3)^{\frac{1}{2}} dx.$

$$I = \frac{1}{2}\int_{3}^{11} 2(2x+3)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\left[(2x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_{3}^{11},$$
$$I = \frac{1}{3}\left\{[2(11)+3]^{\frac{3}{2}} - [2(3)+3]^{\frac{3}{2}}\right\},$$
$$I = \frac{1}{3}\left[(25)^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{3}\left[(5^4)^{\frac{3}{2}} - (3^2)^{\frac{3}{2}}\right],$$
$$I = \frac{1}{3}[125 - 27] = \frac{98}{3}.$$

Por tanto,

$$\int_{3}^{11} \sqrt{2x+3}\, dx = \frac{98}{3}.$$

4) $\displaystyle\int_{4}^{8} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 15}}\, dx = \int_{4}^{8} x\left(x^2 - 15\right)^{-\frac{1}{2}} dx.$

$$I = \frac{1}{2}\int_{4}^{8} 2x\left(x^2 - 15\right)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \times 2\left[\left(x^2 - 15\right)^{\frac{1}{2}}\right]_{4}^{8},$$
$$I = \left[\left(8^2 - 15\right)^{\frac{1}{2}} - \left(4^2 - 15\right)^{\frac{1}{2}}\right] = (49)^{\frac{1}{2}} - (1)^{\frac{1}{2}} = 7 - 1 = 6.$$

En consecuencia,

$$\int_{4}^{8} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 15}}\, dx = 6.$$

5) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x - 1}{\cos 2x + 1}\, dx.$

Inicialmente, se calcula la integral indefinida,

$$I_1 = \frac{\cos 2x - 1}{\cos 2x + 1}\, dx.$$

Sea $tgx = t$; $x = arctgt$; $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2},$$

$\cos 2x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Por tanto,

$$I_1 = \int \frac{\cos 2x - 1}{\cos 2x + 1}\, dx = \int \frac{\dfrac{1-t^2}{1+t^2} - 1}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 1} \times \frac{dt}{1+t^2},$$

$$I_1 = -\int \frac{2t^2 dt}{2(1+t^2)} = -\int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2},$$

$$I_1 = -\int \left[1 - \frac{1}{1+t^2}\right] dt = -t + arctgt = -tgx + x.$$

Luego,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int \frac{\cos 2x - 1}{\cos 2x + 1}\, dx = [I_1]_0^{\frac{\pi}{4}} = [-tgx + x]_0^{\frac{\pi}{4}},$$

$$I = \left(-1 + \frac{\pi}{4}\right) - (-0 + 0) = \frac{\pi}{4} - 1.$$

De manera que,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int \frac{\cos 2x - 1}{\cos 2x + 1}\, dx = \frac{\pi}{4} - 1.$$

6) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\, dx.$

La integral indefinida es inmediata; por tanto,

$$I = [ln\ |\cos x + \operatorname{sen} x|]_0^{\frac{\pi}{3}},$$

$$I = ln\ \left|\cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right| - ln\ |\cos 0 + \operatorname{sen} 0|,$$

$$I = ln\ \left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right| - ln\,|1+0| = ln\ \left|\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right|.$$

En consecuencia,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\, dx = ln \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right).$$

Problema 5

Calcular las integrales definidas que siguen:

1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x dx}{\cos^2 x - 5\cos x + 4}.$

2) $\displaystyle\int_1^3 ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) sx.$

3) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx.$

Solución

1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x dx}{\cos^2 x - 5\cos x + 4}.$

Inicialmente, se encuentra la primitiva, para lo cual se calcula la integral indefinida:

$$I_1 = \int \frac{\operatorname{sen} x dx}{\cos^2 x - 5\cos x + 4}\,dx.$$

METODO 1

Sea $\cos x = t$; sen $xdx = -dt$, entonces,

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\int \frac{dt}{t^2-5t+4} = -\int \frac{dt}{(t-4)(t-1)},\\
&= -\int\left(\frac{A}{t-4}+\frac{B}{t-1}\right)dt = -\int \frac{\frac{1}{3}dt}{t-4} + \int \frac{\frac{1}{3}dt}{t-1},\\
&= \frac{1}{3}\,ln\,\left[ln\,|t-1| - ln\,|t-4|\right] = \frac{1}{3}\,ln\left|\frac{t-1}{t-4}\right|,\\
&= \frac{1}{3}\,ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x - 4}\right|.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$I = [I1]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{3}\left\{ln\left|\frac{\cos\frac{3\pi}{4}-1}{\cos\frac{3\pi}{4}-4}\right| - ln\left|\frac{\cos\frac{\pi}{4}-1}{\cos\frac{\pi}{4}-4}\right|\right\},$$

$$I = \frac{1}{3}\,ln\quad \frac{7+3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}\Bigg).$$

METODO 2

Es posible calcular la integral definida al cambiar los límites de integración, en correspondencia con la sustitución $\cos x = t$; así,

Si $x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Si $x = \dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow \cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Por tanto,

$$I = \frac{1}{3}\left[ln\left|\frac{t-1}{t-4}\right|\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{3}\,ln\left(\frac{7+3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}\right)$$

2) $\displaystyle\int_1^3 ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) dx.$

Se aplica integración por partes, así:

Sea $u = ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$; $du = \dfrac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}}\,dx$; $dv = dx$; $v = x$.

Por tanto,

$$I = \int_0^3 ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) dx = \left[xln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) - \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}\right]_1^3,$$
$$I = \left[xln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) - \frac{1}{2}\int 2x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}dx\right]_1^3,$$
$$I = \left[xln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) - \frac{1}{2}2x\sqrt{x^2-1}\right]_1^3,$$
$$I = \left[3\,ln\,(3+2\sqrt{2}) - 2\sqrt{2}\right] - [1\,ln\,1 - 0],$$
$$I = 3\,ln\,(3+2\sqrt{2}) - 2\sqrt{2}.$$

3) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{4-x^2}\,dx.$

Para hallar la primitiva, se recurre a la sustitución trigonométrica inversa, así:

$$x = 2\text{sen}\,t;\ dx = 2\cos t dt$$

Entonces,

$$I_1 = \int 4\text{sen}^2 t\sqrt{4 - 4\text{sen}^2 t}\,2\cos t dt,$$
$$I_1 = 16\int \text{sen}^2 t\sqrt{1 - \text{sen}^2 t}\ \cos t dt,$$
$$I_1 = 16\int \text{sen}^2 t\cos^2 t\,dt = 4\int (2\text{sen}^2 t\cos^2 t)^2\,dt,$$
$$I_1 = 4\int \text{sen}^2 2t\,dt = \frac{4}{2}\int (1-\cos 4t)\,dt,$$
$$I_1 = 2\left[t - \frac{1}{4}\text{sen}\,4t\right].$$

Ahora bien, si

Si $x = -1 \Rightarrow -1 = 2\ \text{sen}\,t$; $\text{sen}\,t = -\dfrac{1}{2}$; $t = -\dfrac{\pi}{6}$.

Si $x = 1 \Rightarrow 1 = 2\ \text{sen}\,t$; $\text{sen}\,t = \dfrac{1}{2}$; $t = \dfrac{\pi}{6}$.

De esta manera,

$$I = \int_{-1}^{1} x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = [I_1]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 2\left[t - \frac{1}{4}\text{ sen } 4t\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}},$$

$$I = 2\left[\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\text{ sen }\frac{2\pi}{3}\right) - \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\text{ sen }\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right],$$

$$I = 2\left[\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 2\left[\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right],$$

$$I = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ejercicios propuestos Capítulo 2

Calcular las siguientes integrales definidas:

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$. 2) $\displaystyle\int_2^3 \frac{2xdx}{1+x^2}$.

3) $\displaystyle\int_4^9 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$. 4) $\displaystyle\int_3^4 \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}\,dx$.

5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \text{ sen } 3xdx$. 6) $\displaystyle\int_8^{27} \frac{dx}{x-\sqrt[3]{x}}$.

7) $\displaystyle\int_{-8}^{-3} \frac{(x+2)dx}{x(x-2)^2}$. 8) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{2+tg\theta}$.

9) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} t^3 e^{t^2 dt}$. 10) $\displaystyle\int_{-1}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Respuestas Ejercicios propuestos Capítulo 2

1) $\sqrt{3}-1$. 2) $ln\,2$. 3) $4\,ln\dfrac{3}{4} - 1$.

4) $4\,ln(2+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}$. 5) $\dfrac{\pi^2-4}{27}$. 6) $\dfrac{3}{2}\,ln\,\dfrac{8}{3}$.

7) $\dfrac{1}{2}\,ln\,\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{5}$. 8) $\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right) + \dfrac{\pi}{10}$. 9) $\dfrac{e^2+1}{2}$.

10) $ln\,(\sqrt{2}-1)$.

Capítulo 3

Aplicaciones de la integral definida

CAPÍTULO 3. APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Capítulo 3

Aplicaciones de la integral definida

3.1. Cálculo de áreas planas

El área de la figura plana es una medida de la extensión de una región limitada por curvas en el plano xy.

3.1.1. Área bajo la curva

Sea $y = f(x)$ una función continua, no negativa, definida en el intervalo $[a, b]$. Divídase el intervalo dado en "n" subintervalos, por medio de los puntos:

$$P_0,\ P_1, \ldots, P_{i-1}, P_i, \ldots, P_{n-1}, P_n.$$

de modo que,

$$a = P_0 < P_1 < \cdots < P_{i-1} < P_i < \cdots < P_{n-1} < P_n = b.$$

Sea $\Delta x_i = P_i - P_{i-1}$ la longitud de cada subintervalo. Tómese en cada subintervalo el punto x_i, de modo que $x_i \in [P_i, P_{i-1}]$. Desde cada punto P_i, elévense perpendiculares, hasta que se corten con la curva de ecuación $y = f(x)$.

Por cada punto de intersección de los x_i con la curva $y = f(x)$. Trácense paralelas al eje x. De esta manera, se determinan rectángulos, cuya base es la longitud de cada subintervalo y la altura es el valor correspondiente a $f(x_i)$ (ver Figura 4).

La suma finita de las áreas de los rectángulos, corresponde al área aproximada de la región plana limitada por las rectas $x = a$, $x = b$, la curva $y = f(x)$, y el eje x, la cual se le llamará S_n.

Entonces,

$$S_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_i)\Delta x_i + \cdots + f(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i. \qquad (1)$$

La suma (1) es una suma de Riemann y, por tanto, define una integral definida entre a y b, cuando $n \to \infty$.

El área exacta, se calcula como sigue,

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \text{ unidades de área.} \qquad (2)$$

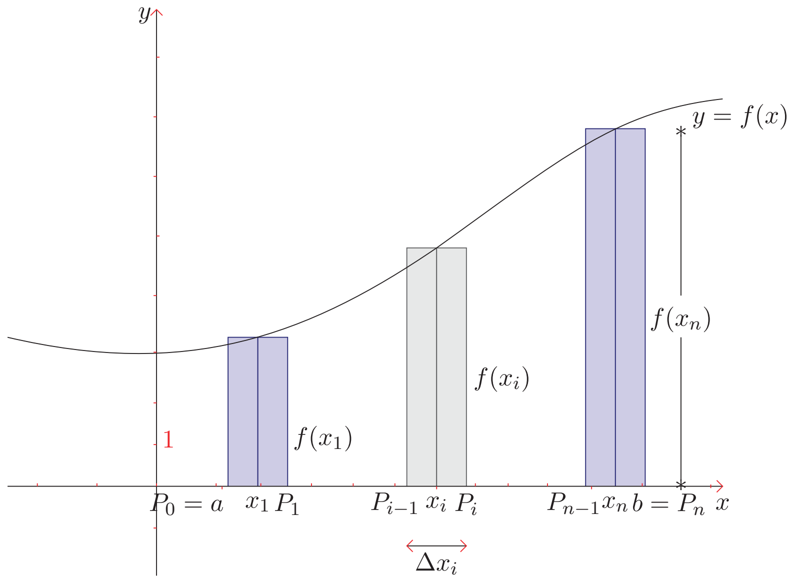


Figura 4. Área bajo la curva

3.1.2. Área entre dos curvas

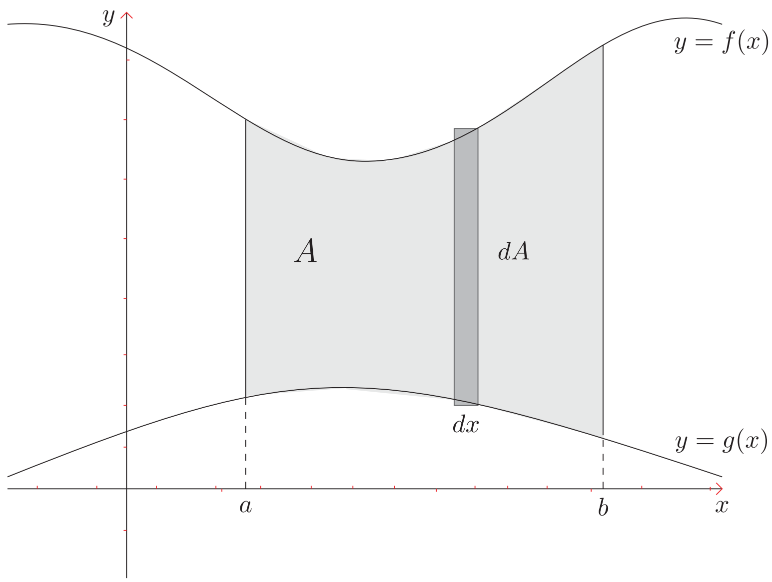


Figura 5. Área entre dos curvas: elemento vertical de área

Cuando la región plana está determinada por las gráficas de las funciones $y = f(x)$, $y = g(x)$ con $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$, entonces, el área de la región descrita se calcula por medio de la siguiente integral definida (ver Figura 5):

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \text{ unidades de área.} \tag{3}$$

NOTA

1) Para áreas calculadas mediante las expresiones (1), (2) y (3), se utilizaron elementos verticales de área.

2) Cuando la región plana está limitada por las curvas:

   $x = g(y)$; $y = c$; $y = d$; y el eje y, entonces, el área de dicha región, se calcula mediante la siguiente integral definida (ver Figura 6):

$$A = \int_c^d g(y) dy. \tag{4}$$

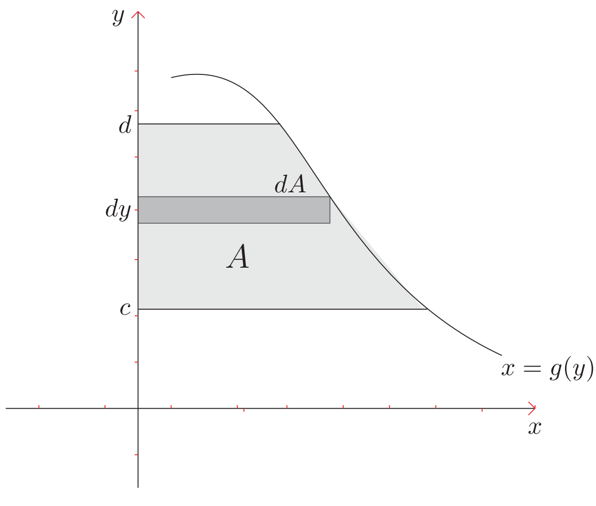


Figura 6. Área entre dos curvas: elemento horizontal de área

Si la región está limitada por $x = g(y)$, $x = h(y)$ con $g(y) \geq h(y)$ $\forall y \in [c, d]$, entonces, su área se calcula mediante la integral definida que sigue (ver Figura 7):

$$A = \int_c^d [g(y) - h(y)]\, dy \text{ unidades de área.} \tag{5}$$

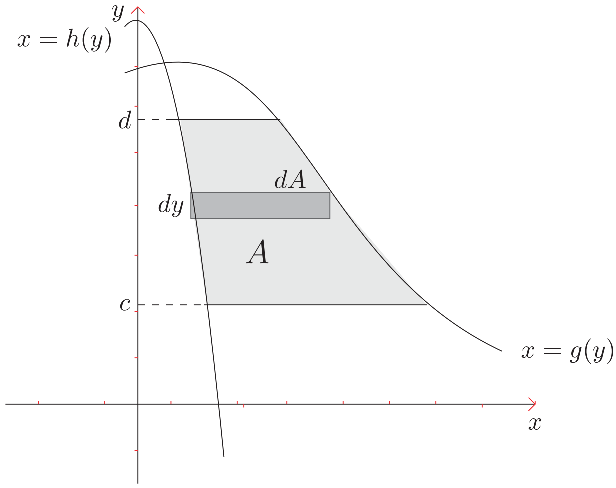


Figura 7. Área de la región limitada por dos curvas $x = g(y)$ y $x = h(y)$

Problema 1

Calcular el área comprendida entre $x = 0$, $x = 2$, $y = 2^x$ y el eje x, de dos maneras (ver Figura 8):

a) Elementos verticales de área (integrar por x)

b) Elementos horizontales de área (integrar por y)

Solución

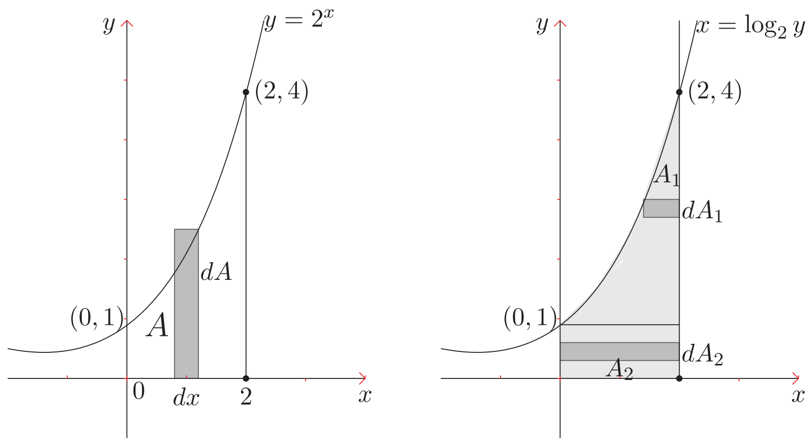


Figura 8.1 Figura 8.2

Figura 8. Elementos de área: vertical y horizontal

a) Al considerar la Figura 8.1. el área de la región limitada por $x = 0,\ x = 2,\ y = 2^x$ y el eje x, se calcula, así:

$$A = \int_0^2 2^x dx = \frac{1}{ln2}[2^x]_0^2 = \frac{1}{ln2}[2^2 - 2^0] = \frac{1}{ln2}(4-1) = \frac{3}{ln2}$$
$$\approx 4,328 \text{ unidades de área.}$$

b) En la Figura 8.2, es necesario calcular las áreas A_1 y A_2, de la siguiente manera:

$$A_1 = \int_1^4 (2 - \log_2) dy$$

Dado que, $\log_2 y = \dfrac{lny}{ln2}$, entonces,

$$A_1 = \int_1^4 \left(2 - \frac{lny}{ln2}\right) dy = \left[2y - \frac{1}{ln2} y(lny - 1)\right]_1^4,$$
$$A_1 = \frac{3}{ln2} - 2.$$
$$A_2 = \int_0^1 2dy = [2y]_0^1 = 2.$$

Por tanto,

$$A = A_1 + A_2; \quad A = \frac{3}{ln2} - 2 + 2,$$
$$A = \frac{3}{ln2} \approx 4,328 \text{ unidades cuadradas.}$$

Problema 2

Determinar el área comprendida entre las curvas definidas por: $y^2 = 4x$; $y = 2x - 4$.

Solución

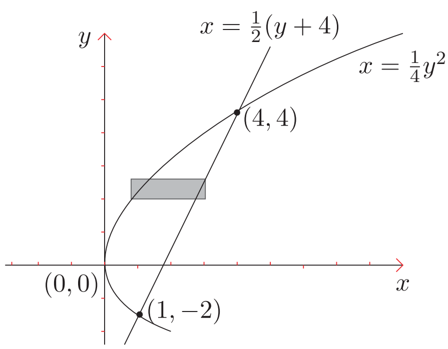


Figura 9. Área entre dos curvas: elemento horizontal de área

Al analizar la Figura 9, se puede observar que resulta sencillo el procedimiento de cálculo de área de la región común, por medio de elementos horizontales de área; esto es, integrar por y.

Al escribir las dos funciones dadas en términos de y, se tiene,

$$y^2 = 4x \Rightarrow x = \frac{1}{4}y^2,$$
$$y = 2x - 4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y+4) \text{ y además } -2 \leq y \leq 4.$$

Por tanto,

$$A = \int_{-2}^{4} \left[\frac{1}{2}(y+4) - \frac{1}{4}y^2\right] dy,$$
$$A = \int_{-2}^{4} \left[\frac{1}{2}y + 2 - \frac{1}{4}y^2\right] dy = \left[\frac{1}{4}y^2 + 2y - \frac{1}{12}y^3\right]_{-2}^{4},$$
$$A = \left(\frac{1}{4}(16) + 2(4) - \frac{1}{2}(64)\right) - \left(\frac{1}{4}(4) + 2(-2) - \frac{1}{12}(-8)\right) = 9$$

El área correspondiente, es de 9 unidades cuadradas.

NOTA

También se puede efectuar el cálculo por medio de elementos verticales de área. En este caso, se deben calcular dos integrales cuyos límites de integración son: $0 \leq x \leq 1$ y $1 \leq x \leq 4$.

Problema 3

Determinar el área de la región limitada por las siguientes curvas:

$$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 7; \; y = 29.$$

Solución

La función polinómica intercepta el eje y en el punto $(0, -7)$; el punto $(6, 29)$ corresponde a la intersección de la recta $y = 29$ con $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$.

Al utilizar elementos verticales de área (ver Figura 10), el área común correspondiente, es:

$$A = \int_{0}^{6} \left[29 - \left(x^3 - 9x^2 + 24x - 7\right)\right] dx,$$
$$A = \int_{0}^{6} \left[-x^3 + 9x^2 - 24x + 367\right] dx,$$
$$A = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 3x^3 - 12x^2 + 36X\right]_{0}^{6} = -\frac{1}{4}(6^4) + 3(6^3) - 12(6^2) + 36(6),$$
$$A = 108.$$

El área solicitada, es de 108 unidades cuadradas.

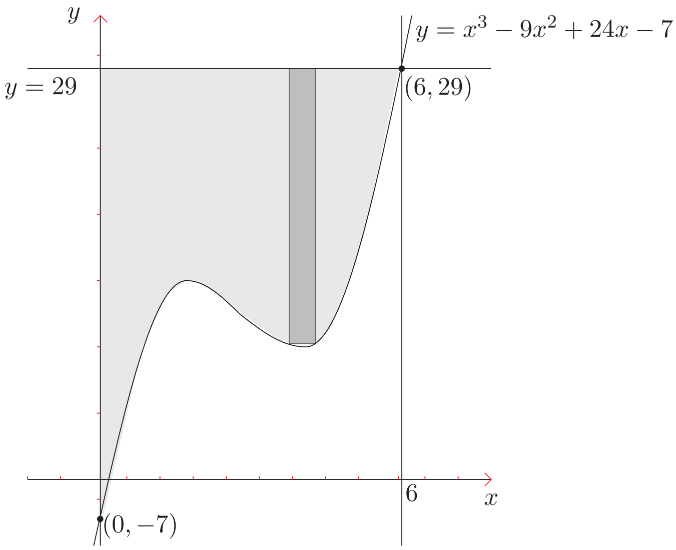


Figura 10. Área delimitada por dos curvas: problema 3

Problema 4

Determinar el área comprendida entre las curvas $y = x^2$; $y = \dfrac{1}{2}x^2$; $y = 2x$ (ver Figura 11).

$$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 7;\ y = 29.$$

Solución

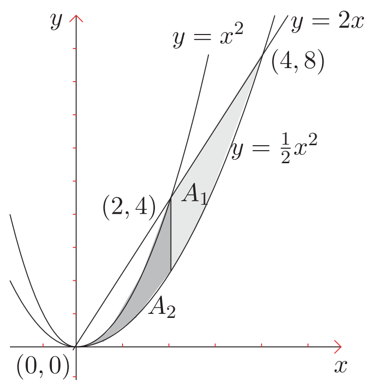


Figura 11. Área delimitada por tres curvas: problema 4

Los puntos de interacción entre las curvas son las siguientes:

- (0, 0) es punto común a las tres curvas.
- (2, 4) es punto de intersección entre las curvas $y = x^2 \wedge y = 2x$

- (4, 8) es punto de intersección entre las curvas $y = \frac{1}{2}x^2 \wedge y = 2x$

Por tanto, es necesario calcular dos áreas A_1 y A_2.
Al integrar por x se tiene,

$$A_1 = \int_2^4 \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \left[x^2 - \left(2x - \frac{1}{6}x^3\right)\right]_2^4 = 16 - \frac{32}{3} - 4 + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$
$$A_2 = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 = \frac{1}{6}[x^3]_0^2 = \frac{1}{6}(8) = \frac{4}{3}.$$

Finalmente,

$$A = A_1 + A_2 = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

El área correspondiente es de 4 unidades cuadradas.

Problema 5

Determinar el área limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 25$ y las rectas $y = 4$, $y = 1$.

Solución

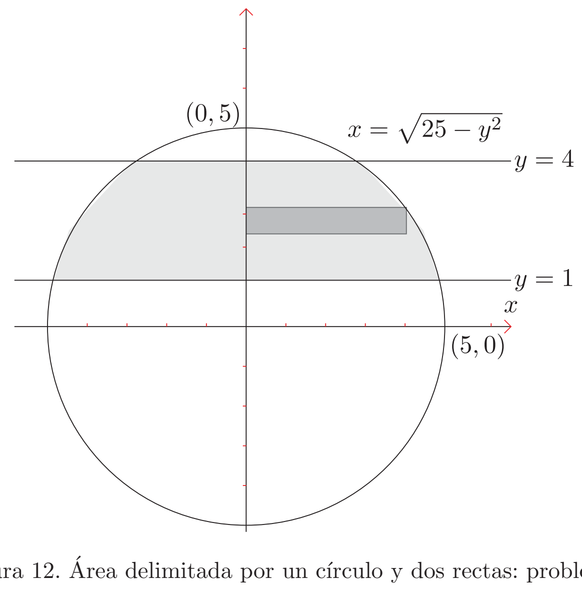


Figura 12. Área delimitada por un círculo y dos rectas: problema 5

En correspondencia con la Figura 12, se puede ver que conviene efectuar el cálculo del área, por medio de los elementos horizontales de área. Por tanto, se escribe la ecuación del circulo en términos de y; además, la variación de y se establece como $1 \leq y \leq 4$.

Por otra parte, la simetría de la región permite calcular el área así:

$$
\begin{aligned}
A &= 2\int_{1}^{4} \sqrt{25-y^2}\,dy,\\
A &= 2\left[\frac{y\sqrt{25-y^2}}{2}+\frac{25}{2}\,arcsen\,\frac{y}{5}\right]_1^4,\\
A &= 2\left\{\left[\frac{4\sqrt{25-16}}{2}+\frac{25}{2}\,arcsen\,\frac{4}{5}\right]-\left[\frac{1\sqrt{25-1}}{2}+\frac{25}{2}\,arcsen\,\frac{1}{5}\right]\right\},\\
A &= 2[6+11,59119023-2,449489743-2,51697401,\\
A &= 25,249452295 \approx 25,25 \text{ unidades cuadradas.}
\end{aligned}
$$

Problema 6

Determinar el área de la región limitada por las siguientes curvas (ver Figura 13):

$$y = e^{2x};\; y = e^{x};\; y = 4.$$

Solución

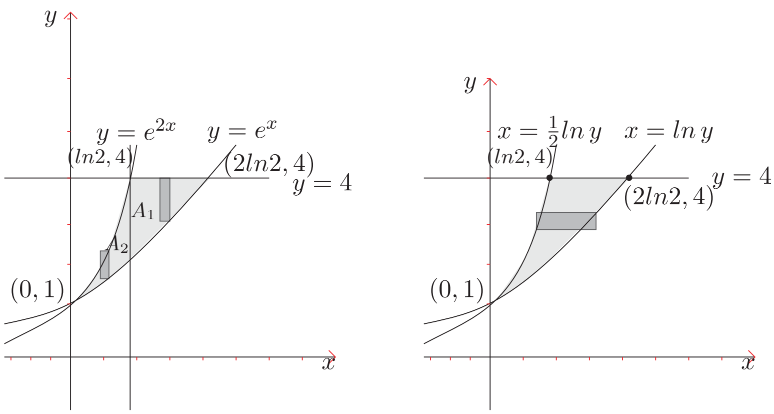


Figura 13.1 Figura 13.2

Figura 13. Elementos horizontales y verticales de área: problema 6

a) Al utilizar elementos verticales de área (Figura 13.1), es necesario calcular dos áreas, puesto que, la variación de "x" así lo exige; entonces,

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \int_{ln2}^{2\,ln2} (4 - e^x)dx = [4x - e^x]_{ln2}^{2\,ln2}\,,\\
A_1 &= \left(4\,ln2 - e^{ln\,2}\right) - \left(4(2\,ln2) - e^{2\,ln2}\right)\\
A_1 &= 8\,ln2 - 4 - 4\,ln2 + 2\\
A_1 &= (4(2\ln 2))\,.\\
A_2 &= \int_0^{ln2} \left(e^{2x} - e^x\right) dx = \left[\frac{1}{2}\left(e^{2x} - e^x\right)\right]_0^{ln2}\,,\\
A_2 &= \left(\frac{1}{2}\left(e^{2\,ln2} - e^{ln2}\right)\right)_0^{ln2} - \left(\frac{1}{2}\left(e^0 - e^0\right)\right),\\
A_2 &= 2 - 2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
A_T &= A_1 + A_2,\\
A_T &= 4\,ln2 - 2 + \frac{1}{2},\\
A_T &= 4\,ln2 - \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

b) Al utilizar elementos horizontales de área (Figura 13.2), se obtiene una integral definida, así:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^4 \left(ln\,y - \frac{1}{2}\,ln\,y\right) dy = \frac{1}{2}\int_1^4 lnydy,\\
A &= \frac{1}{2}\,[y(lny - 1)]_1^4 = \frac{1}{2}\,[4(ln4 - 1) - 1(ln1 - 1)]\,,\\
A &= \frac{1}{2}\,[8\,ln2 - 4 + 1] = \frac{1}{2}\,[8\,ln2 - 3]\,,\\
A &= 4\,ln2 - \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

Por tanto, el área comprendida es de $4\,ln2 - \dfrac{3}{2}$ unidades cuadradas.

Problema 7

Determinar el área de la región comprendida entre las siguientes gráficas (ver Figura 14):

$$xy = 4,\; y = x,\; x = 4,\; y = 0.$$

Solución

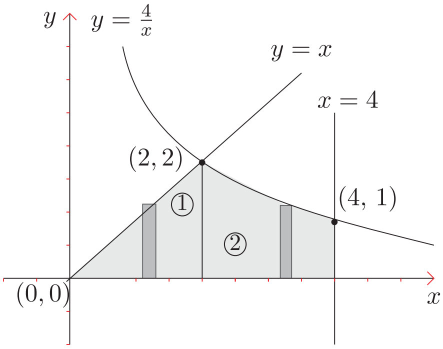


Figura 14.1

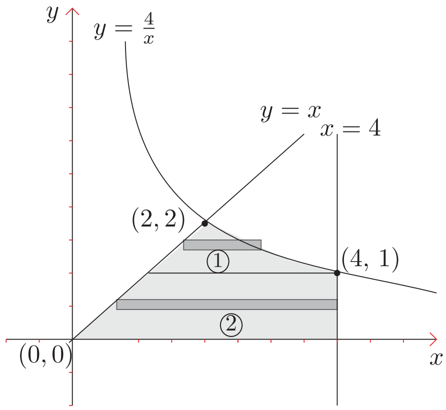


Figura 14.2

Figura 14. Elementos horizontales y verticales de área: problema 7

a) Al utilizar elementos verticales de área, se requiere calcular dos áreas A_1 y A_2, así:

$$A_1 = \int_0^2 xdx = \frac{1}{2}[x^2]_0^2 = \frac{1}{2}(4) = 2.$$
$$A_2 = \int_2^4 \frac{4}{x}dx = 4[ln4]_2^4 = 4(ln4 - ln2) = 4ln\left(\frac{4}{2}\right) = 4ln2,$$
$$A_T = A_1 + A_2 = 2 + 4ln2.$$

b) Por medio de elementos horizontales de área, también se deben calcular dos áreas A_1 y A_2, así:

$$A_1 = \int_1^2 \left(\frac{4}{y} - y\right) dy = \left[4lny - \frac{1}{2}y^2\right]_1^2 = 4ln2 - \frac{1}{2}(4) - 4ln1 + \frac{1}{2},$$
$$A_1 = 4ln2 - 2 + \frac{1}{2} = 4ln2 - \frac{3}{2},$$
$$A_2 = \int_0^1 (4 - y)dy = \left[4y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2},$$
$$A_T = A_1 + A_2 = 4ln2 - \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 4ln2 + 2.$$

Por tanto, el área correspondiente es de $4ln2 + 2$ unidades cuadradas.

Problema 8

Determinar el área comprendida entre las curvas $y + (x - 1)^2 = 0,\ x + y = 0,\ y = 0$. (ver Figura 15).

Solución

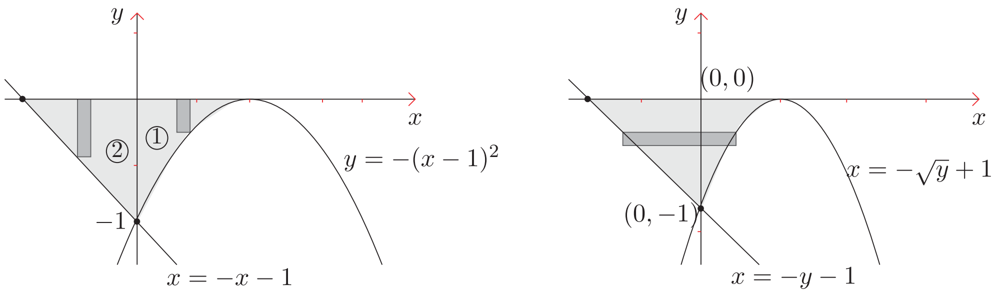


Figura 15.1 Figura 15.2

Figura 15. Elementos horizontales y verticales de área: problema 8

a) Por elementos de área verticales se deben calcular dos áreas A_1 y A_2 (ver Figura 15.1), así:

$$A_1 = \int_0^1 \left[0 + (x-1)^2\right] dx = \int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{1}{3}\left[(x-1)^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}[0-(-1)] = \frac{1}{3}.$$
$$A_2 = \int_{-1}^0 [0 - (-x-1)]dx = \int_{-1}^0 (x+1)dx = \frac{1}{2}\left[(x-1)^2\right]_{-1}^0 = \frac{1}{2}\left[1^2 + 0^2\right] = \frac{1}{2}.$$
$$A_T = A_1 + A_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

b) El cálculo del área por medio de área horizontales requiere la evaluación de una integral definida (ver Figura 15.2).

$$A = \int_{-1}^0 [(-\sqrt{y}+1) - (-y-1)]\, dy,$$
$$A = \int_{-1}^0 \left[-y^{\frac{1}{2}} + y + 2\right] dy = \left[-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}y^2 + 2y\right]_{-1}^0,$$
$$A = 0 + \frac{2}{3}(-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(-1)^2 - 2(-1) = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{-4-3+12}{6} = \frac{5}{6}.$$

El área correspondiente es de $\frac{5}{6}$ unidades cuadradas.

3.1.3. Área de curvas planas en coordenadas polares

Sea $r = f(\theta)$ la ecuación de una función en coordenadas polares y; OP_1 *y* OP_n los radios vectoriales (ver Figura 16).

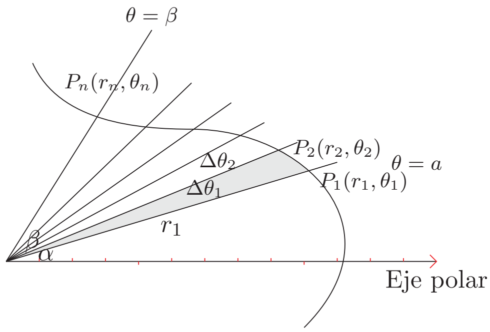


Figura 16. Área de curvas planas en coordenadas polares

Sean α y β los ángulos que forman los radios vectoriales y el eje polar. En correspondencia con la Figura 16, el área de la región limitada por la curva $r = f(\theta)$ y los radios vectores OP_1 y OP_n es igual a la suma de las áreas de los vectores circulares.

Sean $\Delta\theta_1,\ \Delta\theta_2, \ldots, \Delta\theta_n$ los ángulos centrales y $r_1,\ r_2, \ldots, r_n$ los radios vectores de los sectores circulares.

Si se tiene en cuenta que el área de un sector circular de ángulo central θ (medido en radianes) y radio vector r es $A = \dfrac{1}{2}r^2\theta$, entonces, el área aproximada del sector es:

$$S_n = \frac{1}{2}r_1^2\Delta\theta_1 + \frac{1}{2}r_2^2\Delta\theta_2 + \cdots + \frac{1}{2}r_n^2\Delta\theta_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i^2\Delta\theta_i.$$

Cuando $\Delta\theta_i \to 0$, el área barrida por el radio vector desde P_1 a P_n es:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)d\theta \ \text{ ó } \ A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)d\theta \ \text{ unidades de área.}$$

Problema 9

Determinar el área de la lemniscata $r^2 = 4\cos 2\theta$.

Solución

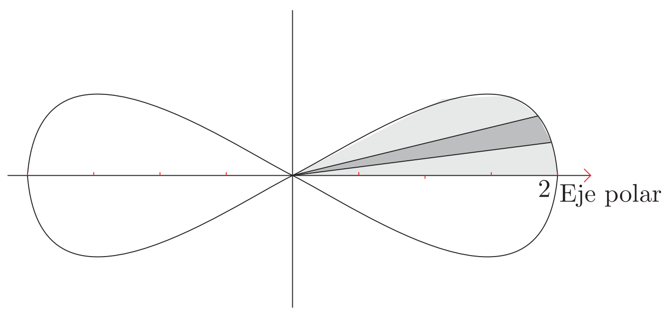


Figura 17. Área de curvas planas en coordenadas polares (lemniscata): problema 9

La gráfica es simétrica respecto al eje x y al eje y. Por tanto, el área total es 4 veces el área sombreada. (ver Figura 17)

Como $r = 0$ cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$, la variación de θ es de 0 a $\frac{\pi}{4}$.

Entonces,

$$
\begin{aligned}
A &= 4 \times \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\cos 2\theta d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta,\\
A &= 8 \times \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 4 \left[\operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen} 0\right],\\
A &= 4\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - 0\right) = 4 \times 1 = 4.
\end{aligned}
$$

El área a determinar es de 4 unidades cuadradas.

Problema 10

Calcular el área comprendida entre las curvas definidas por $r = 1,\ r = 1 + \cos\theta,\ \theta = 0$, en el primer cuadrante.

Solución

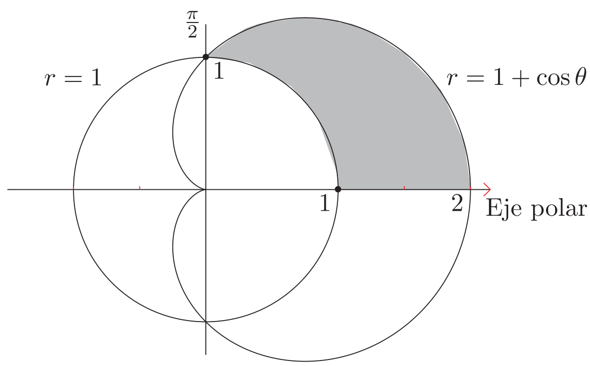


Figura 18. Área de curvas planas en coordenadas polares: problema 10

$r = 1$ es un círculo de radio 1 y centro en $(0, 0)$, mientras que $r = 1 + \cos\theta$ es un cardiode (ver Figura 18).

Las dos curvas en el primer cuadrante se interceptan en $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$. Para calcular el área común entre las curvas en el primer cuadrante, se procede así:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(1+\cos\theta)^2 - 1\right] d\theta,\\
A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta - 1) d\theta,\\
A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta) d\theta,\\
A &= [\text{sen}\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{4}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{8}\text{ sen } 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}},\\
A &= \text{sen}\frac{\pi}{2} - \text{sen}\theta + \frac{1}{4}\times\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{8}\text{ sen } \pi - \frac{1}{8}\text{sen}\theta,\\
A &= 1 + \frac{\pi}{8} = \frac{8+\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

El área común es $\dfrac{8+\pi}{8}$ unidades cuadradas.

3.1.4. Área bajo la curva definida en ecuaciones paramétricas

El área bajo la curva $y = f(x)$, $f(x) \geq 0\ \forall(x, y) \in [a, b]$ se calcula mediante la siguiente integral definida,

$$A = \int_a^b f(x)dx \text{ unidades cuadradas.}$$

En esta integral, se utiliza elementos verticales de área y coordenadas cartesianas.

Si la función está definida mediante las ecuaciones paramétricas (ver Figura 19):

$$\begin{cases} x = \varnothing(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases} \qquad \alpha \leq t \leq \beta$$

entonces, el área bajo la curva, se calcula así:

$$\int_\alpha^\beta ydx = \int_\alpha^\beta \varnothing(t)\varphi'(t)dt \text{ unidades cuadradas}$$

Pues, $dx = d(\varphi(t)) = \varphi'(t)dt$.

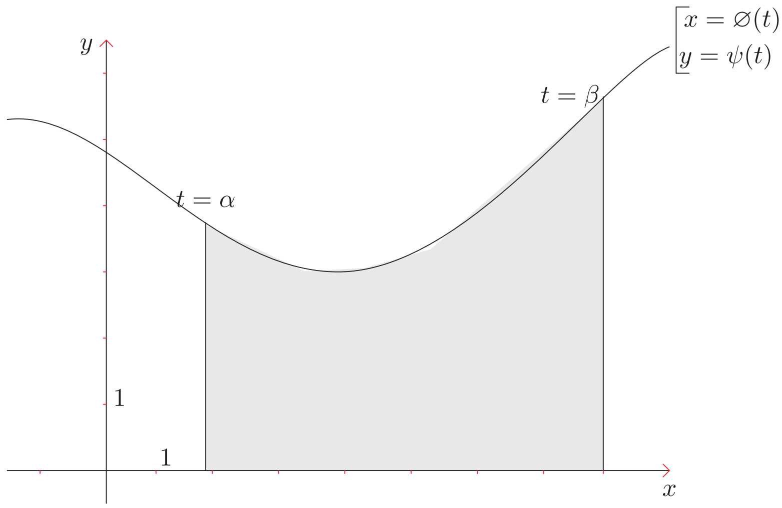


Figura 19. Área bajo curvas definidas por ecuaciones paramétricas

Problema 11

Determinar el área bajo la curva definida paramétricamente como sigue:

$$\begin{cases} y = 3t + 4t^2 \\ x = 2t \end{cases} \qquad t \in [0, 5]$$

Solución

En la Figura 20, se presenta la curva definida paramétricamente (parábola).

Para $t = 0,\ x = 0,\ y = 0 \Rightarrow (0, 0)$ es un punto de la parábola.

Para $t = 5,\ x = 10,\ y = 115 \Rightarrow (10, 115)$ es un punto de la parábola.

Entonces,

$$A = \int_0^5 y dx = \int_0^5 (3t + 4t^2)(2t)' dt,$$

$$A = 2\int_0^5 \left(3t + 4t^2\right) dt = 2\left[\frac{3}{2}t^2 + \frac{4}{3}t^3\right]_0^5,$$

$$A = 2\left[\frac{3}{2}(25) + \frac{4}{3}(125)\right] = 2\left[\frac{75}{2}\frac{500}{3}\right] = \frac{325}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$

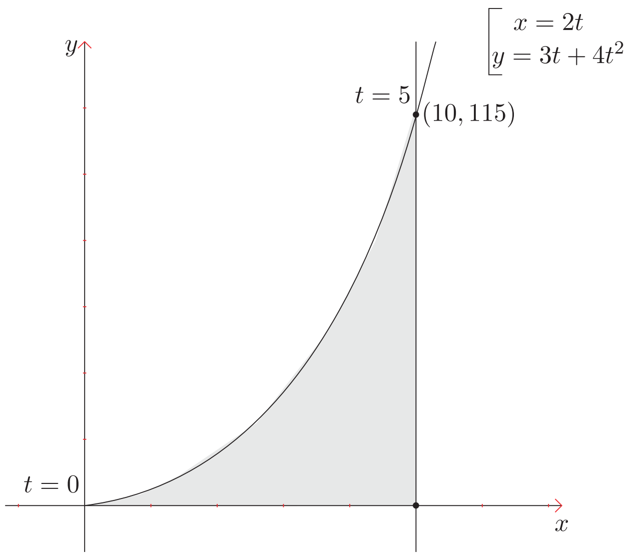


Figura 20. Área bajo curvas definidas por ecuaciones paramétricas: problema 11

Problema 12

Determinar el área limitada por las siguientes curvas dadas paramétricamente:

Elipse:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Círculo:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Solución

La Figura 21, ilustra el área común entre las curvas. Al aprovechar la simetría entre ellas, se calcula el área común en el primero y segundo cuadrantes y luego se multiplica por 2, así:

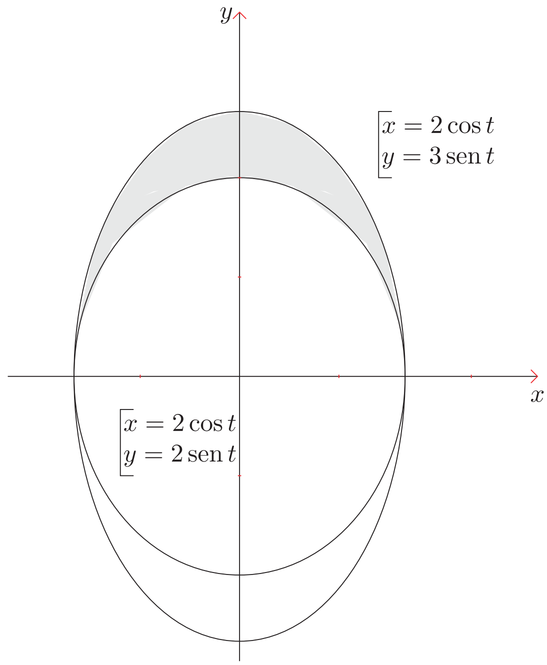


Figura 21. Área bajo curvas definidas por ecuaciones paramétricas: problema 12

Área de la elipse:

$$
\begin{aligned}
A_e &= 2\int_0^{\pi} y dx,\\
A_e &= 2\int_0^{\pi} (3\,\mathrm{sen}\, t)(2\cos t)' dt = -12\int_0^{\pi} \mathrm{sen}\, t\,\mathrm{sen}\, t dt,\\
A_e &= -12\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2 t dt = -12\int_0^{\pi} \frac{(1-2\cos t)}{2} dt,\\
A_e &= -12\left[\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\, 2t\right]_0^{\pi} = -12\left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\, 2t\right) - (0-0)\right],\\
A_e &= -6\pi.
\end{aligned}
$$

NOTA

El valor negativo del área se produce porque el parámetro t recorre la elipse en sentido contrario; por tanto, área de la elipse es 6π unidades cuadradas.

Área del círculo:

$$A_c = 2\int_0^{\pi} ydx = 2\int_0^{\pi} (2\operatorname{sen} t)(2\cos t)'dx,$$
$$A_c = -8\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t \operatorname{sen} tdt = -8\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 tdt,$$
$$A_c = -8\int_0^{\pi} (1-\cos 2t)dt = -8\left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\right]_0^{\pi},$$
$$A_c = -8\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right) = -4\operatorname{sen}\pi.$$

Por tanto, el área del circulo es 4π unidades cuadradas.

Finalmente, el área común se obtiene por diferencia:
$A = A_e - A_c = 6\pi - 4\pi = 2\pi$ unidades cuadradas.

Ejercicios propuestos 3.1

1) Determinar el área comprendida entre las curvas dadas. (unidades cuadradas)

   a) $x^2 + y - 9 = 0;\ x - y + 3 = 0.$
   b) $y = e^x;\ y = e^{-x};\ x = 0;\ x = 2.$
   c) $y = tgx;\ x = 0;\ x = \frac{\pi}{4}.$
   d) Dentro de $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$
   e) $y = x^2 - 2x - 3$; el eje x; $-2 \le x \le 4.$
   f) $y = \operatorname{sen} x;\ y = cos$ x; en el periodo fundamental.
   g) Triangulo de vertices $A(3,3);\ B(-4,-1);\ C(1,-4).$
   h) $y = \ln x;\ y = \log_{10} x;\ x = 10.$

2) Determinar el área encerrada por las siguientes curvas dadas paramétricamente:

   a) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\operatorname{sen}^3 t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

   b) $\begin{cases} x = t - \operatorname{sen} t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

3) Calcular el área encerrada por las siguientes curvas dadas en forma polar:

   a) $r = 2r\operatorname{sen}\theta.$
   b) $r = a(1+\cos\theta).$
   c) $r = a\cos(3\theta).$

3.2. Volumen de revolución

3.2.1. Sólido de revolución

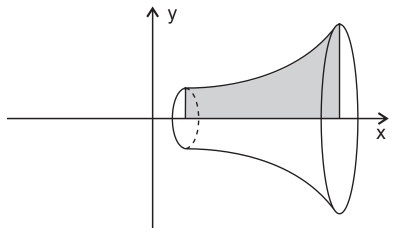


Figura 22.1

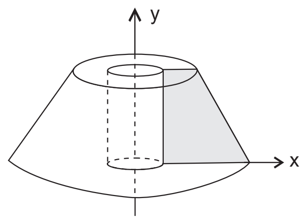


Figura 22.2

Figura 22. Volumen de sólidos de revolución

Sólido de Revolución es el cuerpo que se genera por la rotación de una región cerrada del plano, alrededor de una recta del mismo plano, llamada Eje de Rotación (revolución).

En las Figuras 22.1 y 22.2, se pueden visualizar sólidos de revolución generados por la rotación alrededor del eje x y del eje y de regiones cerradas del plano, respectivamente.

3.2.2. Método de los discos circulares (anillos)

Antes de construir la expresión que calcula el volumen de un sólido de revolución conviene tener en mente el volumen de un cilindro circular de radio r y altura h. (ver Figura 23).

$V = \pi r^2 h$ unidades cúbicas .

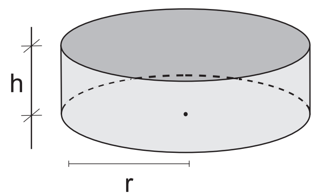


Figura 23. Volumen sólidos de revolución-Método de discos circulares

Considere una función $y = f(x)$ continua y positiva $\forall x \in [a, b]$.

Sea P una partición del intervalo $[a, b]$, determinada mediante los puntos:

$$P_1,\ P_2, \ldots, P_{i-1},\ P_i, \ldots, P_n,$$

de modo que,

$$a = P_0 < P_1 < \cdots < P_{i-1} < P_i < \cdots < P_{n-1} < P_n = b.$$

Los puntos P_i, determinan n subintervalos $[P_{i-1}, P_i]$, cuya longitud es $\Delta x_i = P_i - P_{i-1}$. En cada subintervalo se escoge un punto x_i de modo que $x_i \in [P_{i-1}, P_i]$ y se forman rectángulos de base Δx_i y altura $f(x_i)$. (ver Figura 24.1).

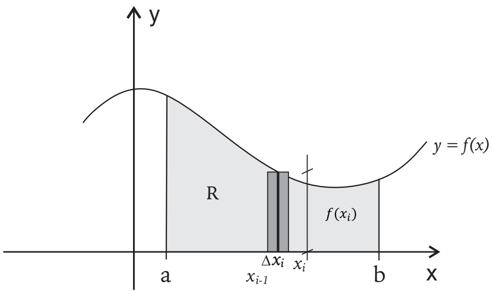


Figura 24.1

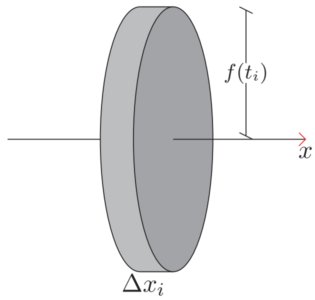


Figura 24.2

Figura 24. Volumen de sólidos de revolución-Método discos circulares: región limitada por una curva

Al rotar alrededor del eje x (ver Figura 24.2), el rectángulo elemental, se genera un cilindro circular de altura Δx_i y radio $f(x_i)$, cuyo volumen es:

$$dV_i = \pi[f(x_i)]^2\Delta x_i.$$

Como hay "n" rectángulos, el volumen de revolución aproximado, se calcula mediante la siguiente suma:

$$S_n = \pi\,[f(x_1)]^2\,\Delta x_1 + [f(x_2)]^2\,\Delta x_2 + \cdots + [f(x_n)]^2\,\Delta x_n = \pi\sum_{i=1}^{n}[f(t_i)]^2\,\Delta x_i.$$

S_n es una suma de Riemann.

Cuando $\Delta x_i \to 0 (n \to \infty)$, se define el siguiente límite:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} S_n = \lim_{\Delta x_i \to 0} \pi\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)]^2\,\Delta x_i = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx.$$

En consecuencia, el volumen del sólido de revolución que se genera por la región limitada por: $y = f(x)$; el eje x; $x = a$; $x = b$, cuando gira alrededor del eje x, viene dado por la siguiente integral definida:

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx \quad \text{unidades cúbicas.}$$

Si la región está limitada por las gráficas de las funciones $y = f(x),\ y = g(x)$; donde $f(x)$ y $g(x)$ son positivas y, además, $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a,b]$, entonces el volumen del solido de revolución que se genera, se calcula como sigue (ver Figura 25):

$$V = \pi\int_a^b \left\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\right\} dx \quad \text{unidades cúbicas.}$$

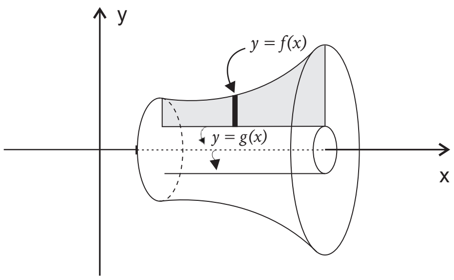


Figura 25.1

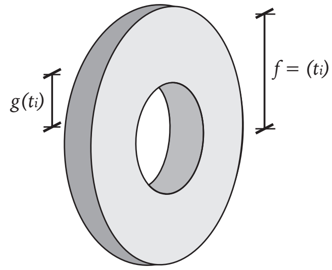


Figura 25.2

Figura 25. Volumen de sólidos de revolución-Método discos circulares: región limitada por dos curvas

NOTAS

1) Procesos y formulas análogas se obtienen cuando la variable independiente de la(s) función(es) es y, es decir, son de la forma $x = g(y)$.

2) Se debe tener en cuenta que, el elemento diferencial de área, es perpendicular al eje de rotación.

3) Cuando el elemento diferencial de área gira alrededor del eje x, se genera un anillo circular, con radio mayor $f(x_i)$ y radio menor $g(x_i)$. (ver Figura 25.2) y altura Δx_i.

Problema 13

Calcular el volumen del sólido engendrado, al girar alrededor del eje x la región del plano cartesiano limitada por:

a) $y = \dfrac{1}{2}x^3;\ y = 0;\ x = 2.$

b) $y^2 = 4x;\ y = x.$

c) $y = \operatorname{sen} x;\ x = 0;\ x = \pi.$

Solución

a)

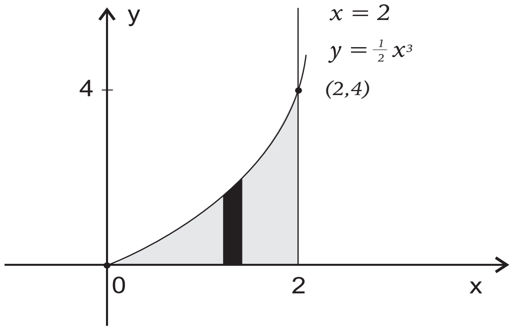


Figura 26.1

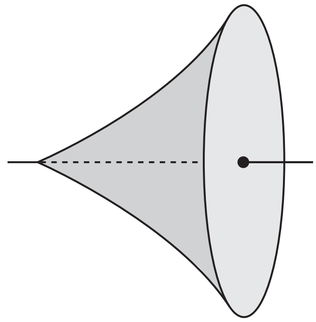


Figura 26.2

Figura 26. Volumen de sólidos de revolución-Método discos circulares: problema 13, caso a

En correspondencia con la Figura 26, el volumen de revolución se calcula como sigue:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x^3\right]^2 dx = \frac{1}{8}\pi \int_0^2 x^6 dx, \\
V &= \frac{1}{8} \times \frac{1}{7}\pi \left[x^7\right]_0^2 = \frac{\pi}{56}(128 - 0), \\
V &= \frac{16}{7}\pi \text{ unidades cúbicas.}
\end{aligned}
$$

b) Los puntos de interacción de las curvas son $(0,0)$ y $(4,0)$ (ver Figura 27).

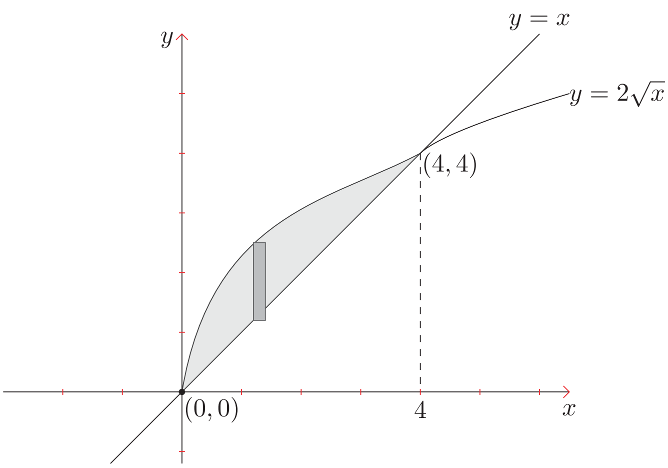


Figura 27.1

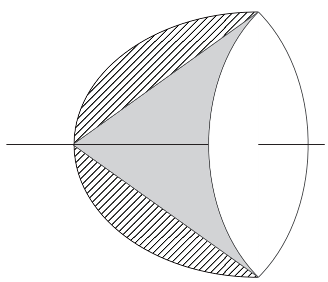


Figura 27.2

Figura 27. Volumen de sólidos de revolución-Método discos circulares: problema 13, caso b

Entonces, $V = \pi \int_0^4 \left[(2\sqrt{x})^2 - x^2\right] dx.$

$$V = \pi \int_0^4 (4x - x^2)dx = \pi \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^4.$$
$$V = \pi \left[\left(2(16) - \frac{64}{3}\right) - (0-0)\right] = \pi \left(32 - \frac{64}{3}\right).$$
$$V = \frac{94-64}{3}\pi = \frac{32}{3}\pi \ \text{ unidades cúbicas.}$$

c) ver Figura 28.

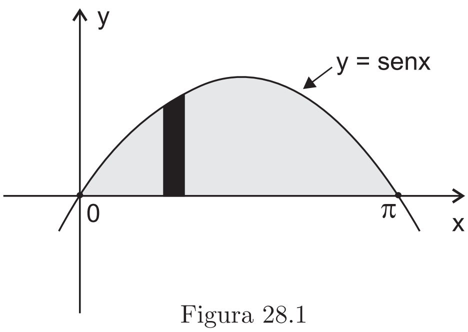


Figura 28.1

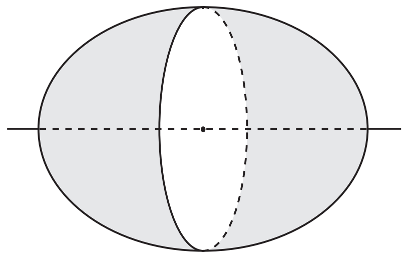


Figura 28.2

Figura 28. Volumen de sólidos de revolución-Método discos circulares: problema 13, caso c

$$V = \pi \int_0^\pi \text{ sen } x dx = \pi \left[-\cos x\right]_0^\pi$$
$$V = \pi \left[-\cos \pi + \cos 0\right] = \pi[1+1] = 2\pi,$$
$$V = 2\pi \text{ unidades cúbicas.}$$

Problema 14

Calcular el volumen del sólido de revolución generado por la rotación alrededor del eje y, la región plana limitada por las siguientes curvas:

a) $y = 2x^2;\ y = 0;\ x = 0;\ x = 5.$

b) $x^2 - y^2 = 16;\ y = 0;\ x = 8.$

Solución

a) Al utilizar el método de anillos, como el giro se hace alrededor del eje y, es necesario expresar "x" en términos de "y", pues el elemento diferencial de área es perpendicular al eje de giro (ver Figura 29).

El volumen del sólido de revolución se calcula, así:

$$V = \pi \int_0^{50} \left[5^2 - \left(\sqrt{\frac{y}{2}} \right)^2 \right] dy = \pi \int_0^{50} \left(25 - \frac{y}{2} \right) dy,$$

$$V = \pi \left[25y - \frac{1}{4}y^2 \right]_0^{50} = \pi \left[1250 - \frac{2500}{4} \right],$$

$$V = 625\pi \text{ unidades cúbicas.}$$

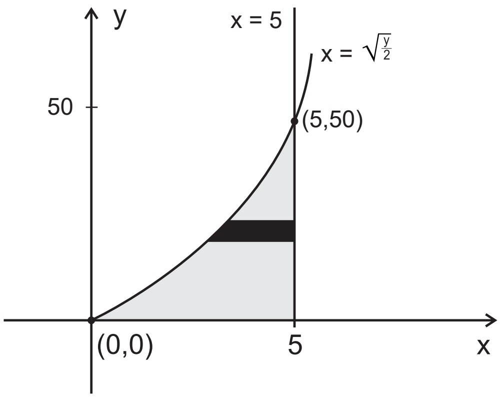


Figura 29.1

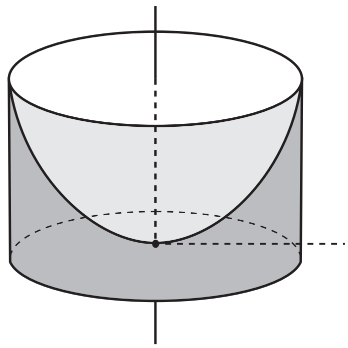


Figura 29.2

Figura 29. Volumen de sólidos de revolución-Método discos circulares: problema 14, caso a

b) Para este ejercicio se aplica el mismo procedimiento del ejercicio (a).

El punto de intersección de las curvas $x^2 - y^2 = 16$ y la recta $x = 8$, es $\left(8, 4\sqrt{3}\right)$ (ver Figura 30).

Por tanto,

$$V = \pi \int_0^{4\sqrt{3}} \left[8^2 - \left(\sqrt{16 + y^2} \right)^2 \right] dy = \pi \int_0^{4\sqrt{3}} \left[64 - 16 - y^2 \right] dy,$$

$$V = \pi \int_0^{4\sqrt{3}} \left[48 - y^2 \right] dy = \pi \left[48y - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^{4\sqrt{3}},$$

$$V = \pi \left[48 \left(4\sqrt{3} \right) - \frac{1}{3} \left(4\sqrt{3} \right)^3 \right] = \pi \left(192\sqrt{3} - 64\sqrt{3} \right),$$

$$V = 128\sqrt{3}\pi \;\; \text{unidades cúbicas.}$$

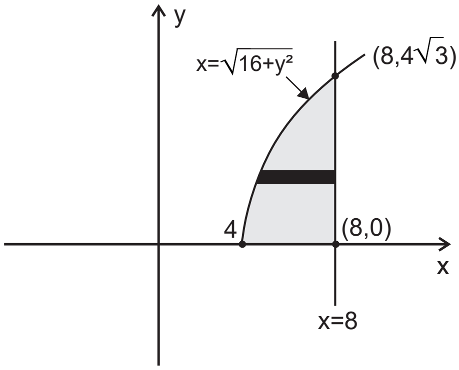


Figura 30.1

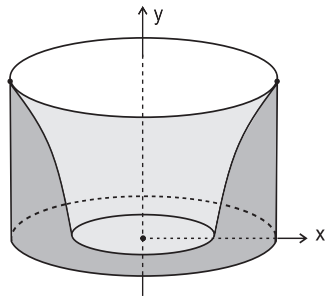


Figura 30.2

Figura 30. Volumen de sólidos de revolución-Método discos circulares: problema 14, caso b

Problema 15

Calcular el volumen de los siguientes sólidos:

a) Esfera de radio r.

b) Cono circular recto de altura h y radio r.

c) Cilindro circular de altura h y radio r.

d) Tronco de cono circular de altura h y radio $R, r;\ R > r$.

Solución

Cada uno de estos sólidos tiene simetría axial. Por tanto, es posible calcular su volumen mediante la rotación de una región plana cerrada alrededor de una recta o eje de rotación, así:

a) Para el efecto se considera la región del primer cuadrante (ver Figura 31), limitada por el circulo $x^2 - y^2 = R^2$.

Al utilizar elementos verticales de área, la función a considerar, es:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \text{ y } 0 \leq x \leq R.$$

$$V = 2\pi \int_0^R \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = 2\pi \int_0^R \left(R^2 - x^2\right) dx,$$

$$V = 2\pi \left[R^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^R = 2\pi \left[R^2 R - \frac{1}{3}R^3\right],$$

$$V = 2\pi \left[R^3 - \frac{1}{3}R^3\right] = 2\pi \left[\frac{2R^3}{3}\right],$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ unidades cúbicas.}$$

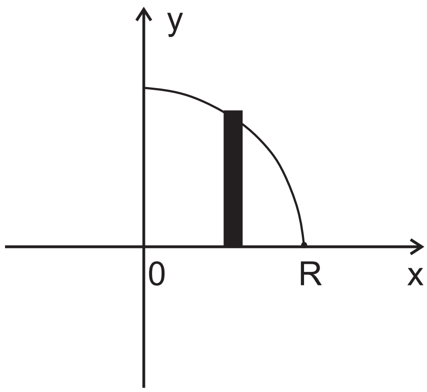


Figura 31.1

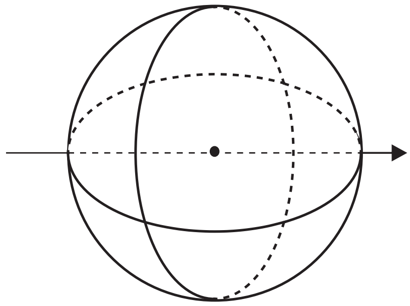


Figura 31.2

Figura 31. Volumen de sólidos de revolución-Método discos circulares: problema 15, caso a

b) La recta que pasa por $(0,0)$ y (h,R), tiene la siguiente ecuación:

$$y = \frac{R}{h}x.$$

El triángulo rectángulo OAB, gira alrededor del eje x (ver Figura 32).

Al utilizar el método de discos, se encuentra que,

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{R}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{3h^2}[h^3 - 0^3] = \frac{\pi R^2 h^3}{3h^2},$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \text{ unidades cúbicas.}$$

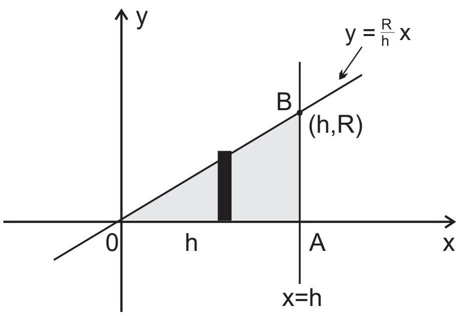


Figura 32.1

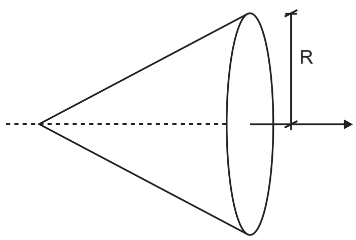


Figura 32.2

Figura 32. Volumen de sólidos de revolución-Método discos circulares: problema 15, caso b

c) El rectángulo $OABC$ gira alrededor del eje "y" como el elemento diferencial horizontal de área (ver Figura 33), entonces,

$$V = \pi \int_0^h (R)^2 dy = \pi R^2 \int_0^h dy,$$
$$V = \pi R^2 [y]_0^h = \pi R^2 (h - 0),$$
$$V = \pi R^2 h \;\text{ unidades cúbicas.}$$

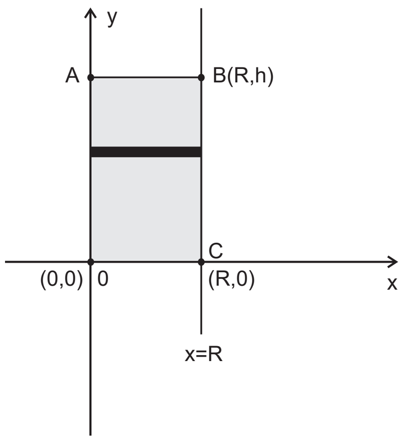


Figura 33.1

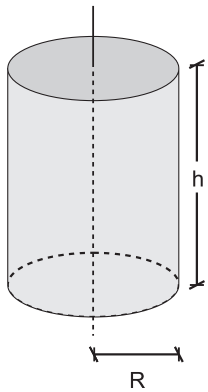


Figura 33.2

Figura 33. Volumen de sólidos de revolución-Método discos circulares: problema 15, caso c

d) Para el cálculo del volumen del tronco de cono circular, se considera la rotación alrededor del eje x, del trapecio rectangular $OABC$ (ver Figura 34).

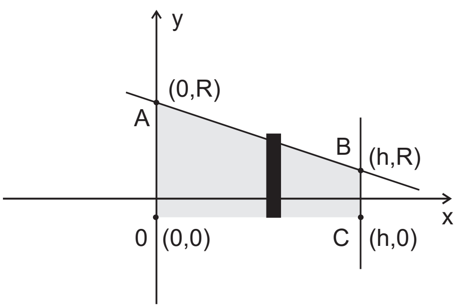


Figura 34.1

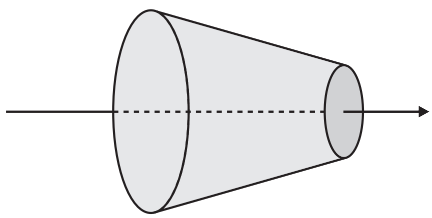


Figura 34.2

Figura 34. Volumen de sólidos de revolución-Método discos circulares: problema 15, caso d

La recta generatriz que pasa por A y B, tiene la siguiente pendiente:

$$m_{AB} = \frac{R-r}{0-} = \frac{R-r}{-h} = \frac{r-R}{h}.$$

La ecuación de dicha recta, es,

$$y - R = \frac{r-R}{h}(x-0) = \left(\frac{r-R}{h}\right)x + R.$$

Entonces, el volumen es,

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^h \left[\left(\frac{r-R}{h}\right)x + R\right]^2 dx,\\
V &= \pi \left(\frac{h}{r-R}\right) \int_0^h \left(\frac{r-R}{h}\right) \left[\left(\frac{r-R}{h}\right)x + R\right]^2 dx,\\
V &= \frac{\pi h}{r-R} \times \frac{1}{3} \left\{\left[\left(\frac{r-R}{h}\right)x + R\right]^3\right\}_0^h,\\
V &= \frac{\pi h}{3(r-R)} \left\{\left[\left(\frac{r-R}{h}\right)h + R\right]^3 - R^3\right\},\\
V &= \frac{\pi h}{3(r-R)}\left[r^3 - R^3\right] = \frac{\pi h}{3(r-R)}(r-R)(r^2 + rR + R^2),\\
v &= \frac{\pi}{3}(r^2 + rR + R^2) \ \text{ unidades cúbicas.}
\end{aligned}$$

Problema 16

La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$, sobre el eje x encierra un área A. Calcular el volumen de revolución generado por A, al girar sobre la recta $y = 2$.

Solución

Al utilizar el método de discos, se obtiene (ver Figura 35),

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^4 \left[2^2 - \left(2 - \sqrt{x}\right)^2\right] dx,\\
V &= \pi \int_0^4 \left(4 - 4 + 4\sqrt{x} - x\right) dx,\\
V &= \int_0^4 \left(4x^{\frac{1}{2}} - x\right) dx = \pi \left[4 \times \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^4,\\
V &= \pi \left[8 \times \frac{8}{3} - 8\right] = \pi \left(\frac{64}{3} - 8\right),\\
V &= \frac{40}{3}\pi \ \text{ unidades cúbicas.}
\end{aligned}$$

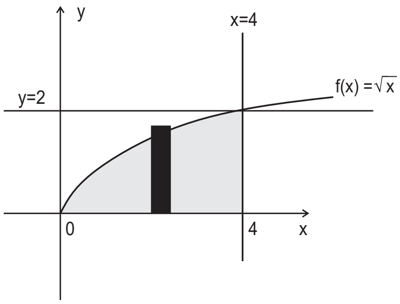


Figura 35.1

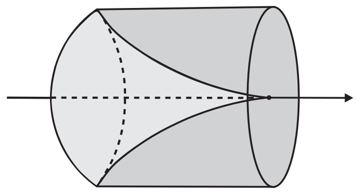


Figura 35.2

Figura 35. Volumen de sólidos de revolución-Método discos circulares: problema 16

3.2.3. Método de corteza cilíndrica

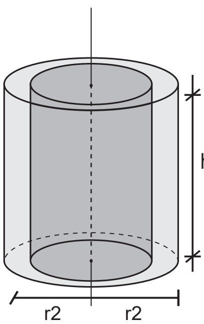


Figura 36.1

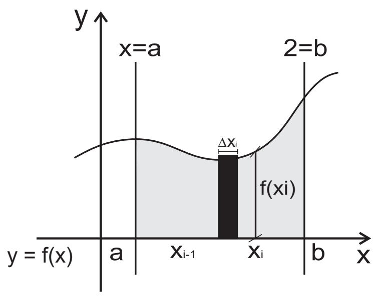


Figura 36.2

Figura 36. Volumen de sólido de revolución-Método de corteza cilíndrica

Una corteza cilíndrica es un sólido contenido o limitado por dos cilindros concéntricos (Ver Figura 36.1.) de altura h. Si el radio interior de la corteza cilíndrica es r_1 y el radio exterior r_2, su volumen está dado por la siguiente expresión:

$$V = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h.$$

Sea $y = f(x)$ continua y positiva $\forall x \in [a, b]$ y $a \geq 0$. (ver Figura 36.2). Si la región limitada por la gráfica de $y = f(x)$; $x = a$; $x = b$; el eje x, gira alrededor del eje "y", se genera un sólido de revolución. El elemento diferencial de área es paralelo al eje de rotación.

Sea P una partición del intervalo $[a, b]$ por medio de "n" puntos,

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_{i-1},\ x_i, \ldots, x_n$$

de modo que,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Sea $\overline{x_i}$, el punto medio de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, entonces,

$$\overline{x_i} = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i).$$

Cuando el rectángulo elemental de área de base Δx_i y altura $f(\overline{x_i})$, gira alrededor del eje "y", se obtiene una corteza cilíndrica, cuyo volumen es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\Delta V_i &= \pi x_i^2 f(\overline{x_i}) - \pi x_{i-1}^2 f(\overline{x_i}),\\
\Delta V_i &= \pi(x_i^2 - x_{i-1}^2) f(\overline{x_i}),\\
\Delta V_i &= \pi(x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1}) f(\overline{x_i}).
\end{aligned}$$

Dado que,

$$(x_i - x_{i-1}) = \Delta x_i \ \text{ y } (x_i + x_{i-1}) = 2\overline{x_i}$$

Entonces,

$$\Delta V_i = 2\pi \overline{x_i} f(\overline{x_i}) \Delta x_i.$$

Al rotar los "n" rectángulos alrededor del eje y, se obtiene "n" cortezas cilíndricas, cuya suma produce un volumen de revolución aproximado, dado por:

$$S_n = 2\pi\overline{x_1} f(\overline{x_1})\Delta x_1 + 2\pi\overline{x_2} f(\overline{x_2})\Delta x_2 + \cdots + 2\pi\overline{x_n} f(\overline{x_n})\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} 2\pi\overline{x_i} f(\overline{x_i})\Delta x_i.$$

Expresión que constituye una suma de Riemann y, cuando $\Delta x_i \to 0$ $(n \to \infty)$, se obtiene el volumen de revolución, que se calcula como sigue:

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} S_n = 2\pi \int_a^b x f(x) dx \text{ unidades cúbicas.}$$

En esta expresión, x es la distancia al eje de rotación del elemento diferencial de área.

Problema 17

Utilizar el método de la corteza cilíndrica para determinar el volumen de revolución del sólido generado por la rotación alrededor del eje "y" de la región limitada por las siguientes curvas:

a) $y = \frac{1}{2}x^2;\ x = 1;\ x = 4;\ y = 0.$

b) $y = lnx;\ x = 1;\ x = e;\ y = 0.$

c) $y = x;\ xy = 1;\ x = 2.$

Solución

a) El volumen del sólido generado, se calcula así (ver Figura 37):

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_1^4 x \left[\frac{1}{2}x^2\right] dx = \frac{2\pi}{2} \int_1^4 x^3 dx = \frac{\pi}{4}[x^4]_1^4,\\
V &= \frac{\pi}{4}[4^4 - 1^4] = \frac{\pi}{4}(256 - 1),\\
V &= \frac{255}{14}\pi \text{ unidades cúbicas.}
\end{aligned}$$

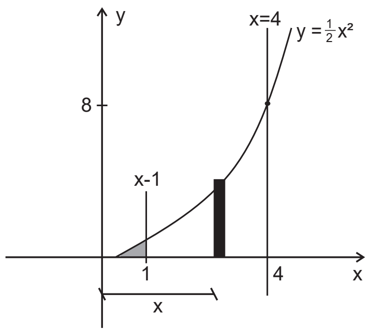


Figura 37.1

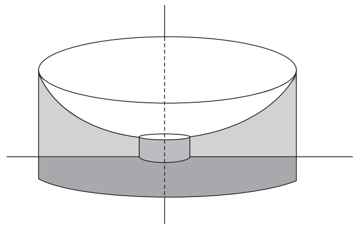


Figura 37.2

Figura 37. Volumen de sólidos de revolución-Método de corteza cilíndrica: problema 17, caso *a*

b) El volumen se calcula, de la siguiente manera (ver Figura 38):

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_1^e x ln\, x\, dx = 2\pi \left[\frac{1}{2}x^2 ln\, x - \frac{1}{4}x\right]_1^e,\\
V &= \pi \left[x^2 ln - \frac{1}{2}\right]_1^e = \pi \left[e\, ln\, e - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\right],\\
V &= \pi \left[\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\right] = \frac{\pi}{2}(e^2+1),\\
V &= \frac{\pi}{2}(e^2+1) \text{ unidades cúbicas.}
\end{aligned}
$$

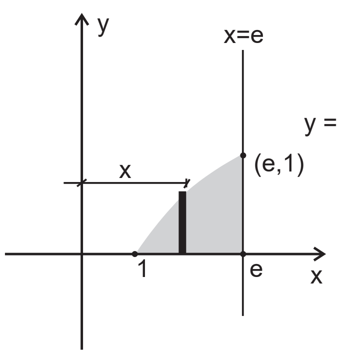


Figura 38.1

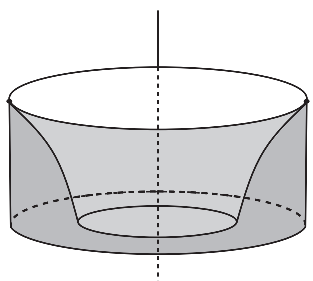


Figura 38.2

Figura 38. Volumen de sólidos de revolución-Método de corteza cilíndrica: problema 17, caso *b*

c) El volumen se calcula, así (ver Figura 39):

$$V = 2\pi \int_1^2 x\left[x - \frac{1}{x}\right]dx = 2\pi \int_1^2 (x^2-1)dx,$$
$$V = 2\pi\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^2 = 2\pi\left[\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1\right],$$
$$V = 2\pi\left[\frac{7}{3} - 1\right] = \frac{8}{3}\pi,$$
$$V = \frac{8}{3}\pi \text{ unidades cúbicas.}$$

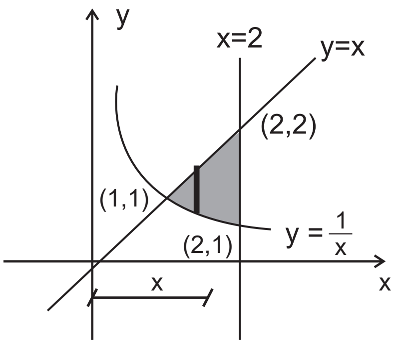


Figura 39.1

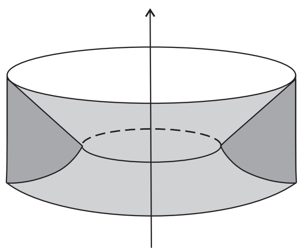


Figura 39.2

Figura 39. Volumen sólido de revolución-Método de corteza cilíndrica-Problema 17, caso c

Problema 18

Calcular de dos maneras diferentes el volumen de revolución del sólido generado por la rotación alrededor del eje "y" de la región plana limitada por las siguientes curvas (ver Figura 40):

$$y = 2 - x^2;\ x = 1;\ y = 0;\ x = 0.$$

Solución

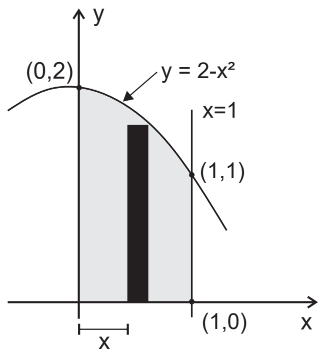


Figura 40.1

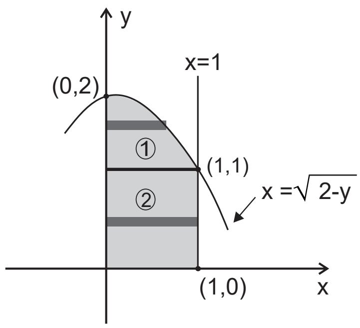


Figura 40.2

Figura 40. Volumen sólido de revolución-Método de corteza cilíndrica: problema 18

a) Método de la corteza cilíndrica

$$V = 2\pi \int_0^1 x[2 - x^2]dx,$$
$$V = 2\pi \int_0^1 [2x - x^3]dx = 2\pi \left[x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1,$$
$$V = 2\pi \left[1^2 - \frac{1}{4}(1^4)\right] = 2\pi \left(1 - \frac{1}{4}\right),$$
$$V = \frac{3\pi}{2} \text{ unidades cúbicas.}$$

b) Método de los discos
Se necesita calcular dos volúmenes de rotación, así:

$$V_1 = \pi \int_1^2 \left(\sqrt{2-y}\right)^2 dy = \pi \int_1^2 (2-y)dy,$$
$$V_1 = \pi \left[2y - \frac{1}{2}y^2\right]_1^2 = \pi \left[4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}\right],$$
$$V_1 = \frac{\pi}{2}.$$
$$V_2 = \pi \int_0^1 1^2 dy = \pi[y]_0^1 = \pi.$$
$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3}{2}\pi \text{ unidades cúbicas.}$$

Ejercicios propuestos 3.2

1) Calcular el volumen de revolución generado por la rotación alrededor del eje x, de la región plana limitada por las siguientes curvas:

a) $y = 4x^2;\ x = 0:\ y = 16.$
b) $4x^2 + 9y^2 = 36.$
c) $y^2 = x^3;\ y = 0;\ x = 2.$
d) $y = x^2;\ y = 4x - x^2.$
e) $y = -x^2 - 3x + 6;\ x + y - 3 = 0.$

2) Determinar el volumen de revolución generado por la rotación alrededor del eje y, de la región limitada por las siguientes curvas:

a) $y = 4x^2;\ x = 0:\ y = 16.$
b) $x^2 - y^2 = 16;\ y = 0;\ x = 8.$
c) $y = x^2 - 5x + 6;\ y = 0.$
d) $y = e^{-x^2};\ y = 0;\ x = 0;\ x = 1.$
e) $4x^2 + 9y^2 = 36.$

3) Determinar el volumen del sólido de revolución generado por la rotación alrededor del eje x, de la región limitada por las siguientes curvas:

a) $y = x - 1;\ y = x - 3;\ y = -1;\ y = 0.$
b) $y = e^x;\ y = e^{2x};\ y = e^2.$

4) Resolver el problema (3), considerando la rotación alrededor del eje y.

3.3. Volúmenes de sólidos de sección conocida

3.3.1. Definiciones y conceptos

Un cilindro recto es un sólido limitado por dos regiones planas R_1 y R_2 congruentes y paralelas, y por una superficie lateral generada por un segmento de recta que tiene sus puntos extremos sobre las fronteras de R_1 y R_2, de tal manera que se mueve perpendicularmente a las regiones dadas (ver Figura 41).

En las figuras 41.1, 41.2 y 41.3 se pueden visualizar diversos cilindros.

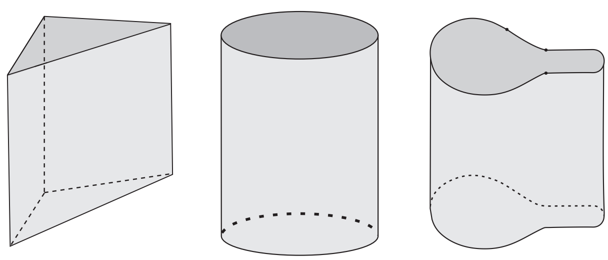


Figura 41.1 Figura 41.2 Figura 41.3

Figura 41. Volumen de sólidos de sección conocida

3.3.2. Cálculo del volumen de un sólido de sección paralela conocida

Considere un sólido en el que el área de la base es A unidades cuadradas y la altura h unidades de longitud; entonces, por definiciones del volumen del cilindro recto, $V = Ah$ unidades cubicas.

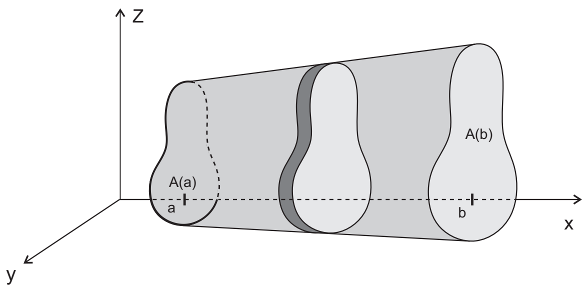


Figura 42.1

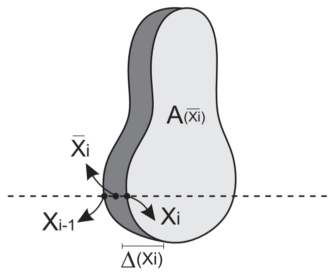


Figura 42.2

Figura 42. Volumen de sólidos de sección paralela conocida

Se están considerando sólidos para los cuales el área de cualquier sección plana es perpendicular a una recta fija que une las dos bases del cilindro. En la Figura 42, se observa que el sólido se encuentra entre dos planas perpendiculares al eje x en $x = a$ y $x = b$.

Sea P una partición del intervalo $[a, b]$ en "n" subintervalos, por medios de los puntos $x_0,\ x_1, \ldots, x_{i-1},\ x_i \ldots, x_n$; de modo que, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n$.

Se generan los subintervalos $[x_0, x_1],\ [x_1, x_2], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ y se toma $\overline{x_i}$ en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, tal que $x_{i-1} < \overline{x_i} < x_i$ y se construyen cilindros rectos de altura Δx_i y áreas respectivas $A(\overline{x_i})$.

El volumen de cada cilindro elemental es:

$\Delta V_i = A(\overline{x_i})\Delta x_i$ unidades cubicas.

Ahora bien, la suma de los volúmenes de los "n" cilindros rectos, proporciona el volumen aproximado del solido, así:

$$S_n = A(\overline{x_1})\Delta x_1 + A(\overline{x_2})\Delta x_2 + \cdots + A(\overline{x_n})\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} A(\overline{x_i})\Delta x_i.$$

La suma anterior, es una suma de Riemann y, por tanto, cuando $\Delta x_i \to 0 (n \to \infty)$, se define el volumen exacto del sólido, así:

$$V = \lim_{\Delta x_i \to \infty} S_n = \int_a^b A(x)dx \ \text{ unidades cubicas.}$$

Note en la anterior expresión que, $A(x)$ es función continua $\forall x \in [a, b]$ y que el área de la sección conocida del sólido, depende de la variable x.

Problema 19

La base de un sólido es un círculo de radio r. Todas las secciones perpendiculares a un diámetro fijo de la base, son cuadrados. Calcular el volumen del sólido.

Solución

Considere la base del círculo $x^2 + y^2 = r^2$, localizado en el plano xy.(ver Figura 43).
El elemento esencial del área de la sección transversal es un cuadrado, cuya área es:

$$A(x) = 2yz = (2y)(2y) = 4y^2.$$

Pero $x^2 + y^2 = r^2$, entonces, $y^2 = r^2 - x^2$.
Por tanto,

$$A(x) = 4(r^2 - x^2).$$

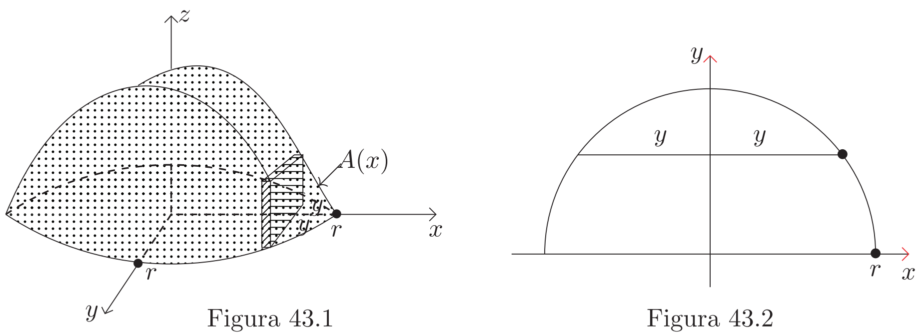


Figura 43.1 Figura 43.2

Figura 43. Volumen de sólidos de sección perpendicular conocida: problema 19

En consecuencia, el volumen del sólido, es:

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-r}^{r} 4(r^2 - x^2)dx = 4\int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)dx,\\
V &= 8\int_{0}^{r} (r^2 - x^2)dx = 8\left[r^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^r,\\
V &= 8\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3\right),\\
V &= \frac{16}{3}r^3 \text{ unidades cubicas.}
\end{aligned}$$

Problema 20

La base de un sólido es un círculo que tiene un radio de r unidades. Calcular el volumen del sólido si todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo de la base, son triángulos equiláteros.

Solución

Al tomar eje x como diámetro fijo, la ecuación del círculo base del sólido es:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

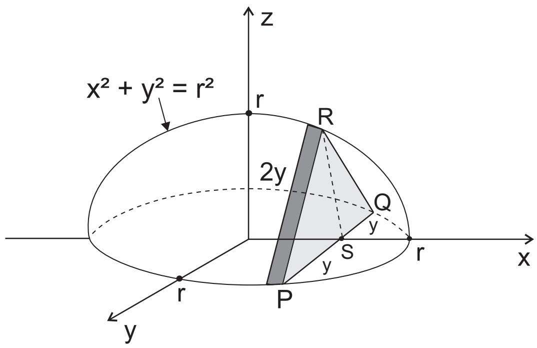


Figura 44. Volumen de sólidos de sección perpendicular conocida: problema 20

Dado que, el triángulo equilátero PQR (ver Figura 44) es la sección transversal perpendicular al eje x, entonces, su área es:

$$A(x) = \frac{1}{2}\overline{PQ} \times \overline{RS}. \tag{1}$$

El triangulo PQR es rectángulo, entonces, al aplicar Teorema de Pitágoras, se obtiene:

$$\begin{aligned} \overline{RS} &= \sqrt{\overline{PR}^2 - \overline{PS}^2}, \\ \overline{RS} &= \sqrt{(2y)^2 - y^2} = \sqrt{3y^2} = \sqrt{3}y \end{aligned} \tag{2}$$

Al reemplazar (2) en (1), se tiene:

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{2}(2y)\left(\sqrt{3}y\right), \\ A(x) &= \sqrt{3}y^2 \end{aligned}$$

Pero $x^2 + y^2 = r^2$, entonces,

$$\begin{aligned} y^2 &= r^2 - x^2, \\ A(x) &= \sqrt{3}(r^2 - x^2). \end{aligned}$$

En consecuencia, el volumen del sólido es:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} \sqrt{3}(r^2 - x^2)dx = \sqrt{3}\left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r}, \\ V &= \left[\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3\right) - \left(r^3 - \frac{1}{3}r^3\right)\right]\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}r^3, \\ V &= \frac{4\sqrt{3}}{3}r^3 \text{ unidades cubicas.} \end{aligned}$$

Problema 21

Determinar el volumen de un conoide de altura h y base circular de radio r.

Solución

Un conoide es una superficie con un plano director y dos directrices, una curva y otra recta. Si la directriz es un círculo, se llama conoide circular perpendicular al eje x, el cual es isósceles.

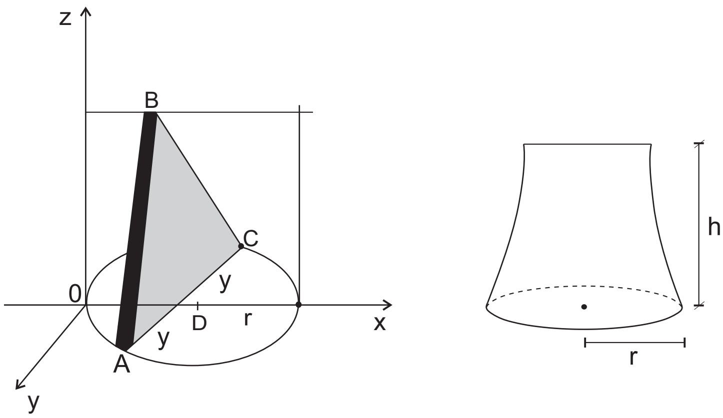


Figura 45. Volumen de un sólido de sección conocida (conoide): problema 21

Se dispone el sólido como en la Figura 45. La sección transversal es el triangulo ABC, perpendicular al eje x, el cual es isósceles.

Ahora bien, el círculo base tiene la siguiente ecuación:

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2.$$

Es decir,

$$\begin{aligned} &x^2 - 2xr + r^2 + y^2 = r^2, \\ &x^2 + y^2 = 2xr. \end{aligned}$$

Al despejar y, se obtiene:

$$y = \sqrt{2xr - x^2}.$$

Además, $\overline{BD} = h$.

El área del triángulo ABC es:

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{2}\overline{AC} \times \overline{BD} = \frac{1}{2}(2y)h, \\ A(x) &= \sqrt{2xr - x^2}h. \end{aligned}$$

En consecuencia, el volumen del conoide circular es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
V &= h\int_0^{2r}\sqrt{2xr-x^2}\,dx = h\int_0^{2r}\sqrt{r^2-(x-r)^2}\,dx,\\
V &= \left[\frac{(x-r)}{2}\sqrt{r^2-(x-r)^2}+\frac{r^2}{2}\,arcsen\left(\frac{x-r}{r}\right)\right]_0^{2r},\\
V &= h\left[\left(0+\frac{r^2}{2}\,arcsen\,1\right)-(0-arcsen(-1))\right],\\
V &= h\left(\frac{r^2}{2}\times\frac{\pi}{2}+\frac{r^2}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)=h\frac{r^2\pi}{2},\\
V &= h\frac{r^2\pi}{2}\ \text{unidades cubicas.}
\end{aligned}
$$

Problema 22

Calcular el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos $A(a,0,0);\ B(0,b,0);\ C(0,0,c)$ (ver Figura 46).

Solución

La sección transversal es el triángulo rectángulo MPN, cuya área es:

$$A(x)=\frac{1}{2}yz. \tag{1}$$

La ecuación de la recta que pasa por A y C es:

$$z=c-\frac{c}{a}x. \tag{2}$$

Y la ecuación de la recta que pasa por A y B es:

$$y=b-\frac{b}{a}x. \tag{3}$$

Al reemplazar (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \frac{1}{2}\left(c-\frac{c}{a}x\right)\left(b-\frac{b}{a}x\right),\\
A(x) &= \frac{1}{2}\frac{b(a-x)}{a}\frac{c(a-x)}{a},\\
A(x) &= \frac{bc}{2a^2}(a-x)^2.
\end{aligned}
$$

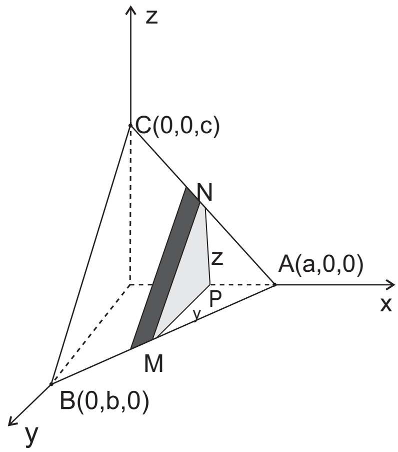


Figura 46. Volumen de un sólido de sección conocida (tetraedro): problema 22

Por consiguiente, el volumen del tetraedro es:

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{bc}{2a^2}\int_0^a (a-x)^2 dx = \frac{bc}{2a^2}\frac{1}{3}\left[(a-x)^3\right]_0^a,\\
V &= \frac{bc}{6a^2}\left[0-a^3\right] = \frac{a^3bc}{6a^2},\\
V &= \frac{abc}{6} \quad \text{unidades cubicas.}
\end{aligned}
$$

Problema 23

Calcular el volumen limitado por el paraboloide $z = x^2 + 4y^2$ y el plano $z = 1$.

Solución

La sección transversal corresponde a una elipse con semiejes x, y; además, perpendicular al eje z (ver Figura 47).

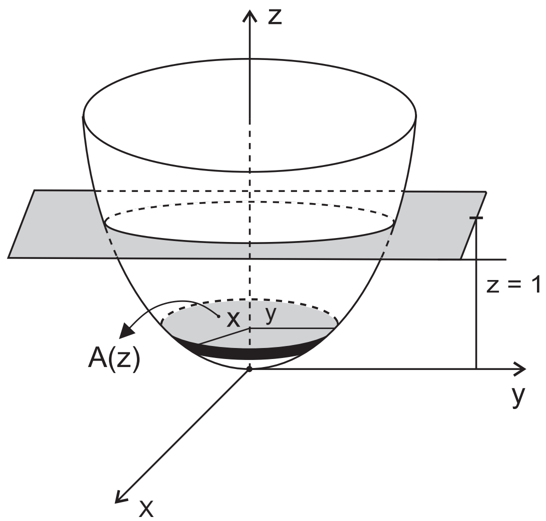


Figura 47. Volumen de un sólido de sección conocida (paraboloide): problema 23

Por tanto, el área de esta sección transversal se debe escribir en términos de z, así: $A(z) = \pi xy$ corresponde al área de la elipse.
Ahora bien:

$$x = 0 \Longrightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{z},$$
$$y = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{z}.$$

Luego,

$$A(z) = \pi(\sqrt{z})\left(\frac{1}{2}\sqrt{z}\right),$$
$$A(z) = \frac{\pi}{2}z.$$

Entonces,

$$V = \int_0^1 A(z)dz = \frac{\pi}{2}\int_0^1 zdz,$$
$$V = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2}[z^2]_0^1 = \frac{\pi}{4}(1^2 - 0^2),$$
$$V = \frac{\pi}{4} \text{ unidades cubicas.}$$

Problema 24

Determinar el volumen del sólido limitado por el hiperboloide de una hoja: $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ y los planos $x = 0$; $x = a$.

Solución

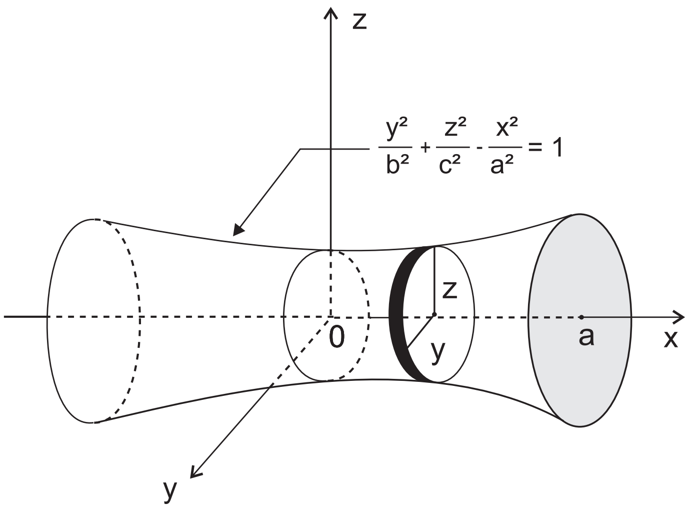


Figura 48. Volumen de un sólido de sección conocida (hiperboloide): problema 24

La sección transversal es una elipse con semiejes x, y; además, perpendicular al eje x (ver Figura 48).

El área de esta sección, es:

$$A(x) = \pi yz. \tag{1}$$

Ahora bien,

$$y = 0 \Longrightarrow z = c\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}},$$
$$z = 0 \Longrightarrow y = b\sqrt{\frac{1 + x^2}{a^2}}.$$

Al reemplazar en (1), se obtiene:

$$A(x) = \pi \left(s\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} \right) \left(b\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} \right),$$
$$A(x) = \pi bc \left(a + \frac{x^2}{a^2} \right).$$

Luego,

$$V = \int_0^a \pi bc \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \pi bc \left[x + \frac{x^3}{3a^2} \right]_0^a,$$
$$V = \pi bc \left(a + \frac{a^3}{3a^2} \right),$$
$$V = \frac{4\pi}{3} abc \text{ unidades cubicas.}$$

Ejercicios propuestos 3.3

1) Un sólido tiene base circular de radio r. Calcular el volumen del sólido si cada sección plana perpendicular a un diámetro fijo es:

   a) Un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa está en el plano de la base.

   b) Un triángulo rectángulo isósceles con cateto en el plano de la base.

2) La base de un sólido tiene la forma de una elipse con eje mayor de 20cm y eje menor de 10cm. Calcular el volumen del sólido si cada sección perpendicular al eje mayor es:

   a) Un cuadrado.

   b) Un triángulo equilátero.

3) Un sólido tiene base triangular encerrada en el primer octante por la recta $2x + 5y = 10$. Determinar el volumen del sólido si las secciones planas perpendiculares al eje x son semicirculares.

4) Calcular el volumen de la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

5) Determinar el volumen del elipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

3.4. Longitud de arco

3.4.1. Definiciones y conceptos

Si se considera una curva Γ que inicia en el punto P_1 y termina en P_2, intuitivamente, la longitud de Γ es la suma de las cuerdas $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}$ cuando los puntos P_i son suficientemente cercanos entre sí.

En el plano, si se tiene dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, la distancia entre P y Q se calcula mediante la expresión:

$$d(P, Q) = \overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Basados en los dos criterios anteriormente mencionados, en las siguientes líneas se plantea y deduce la integral definida que permite calcular la longitud de una curva, denominada también como longitud de arco (ver Figura 49).

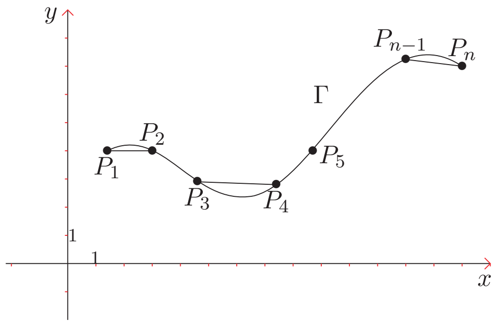


Figura 49.1

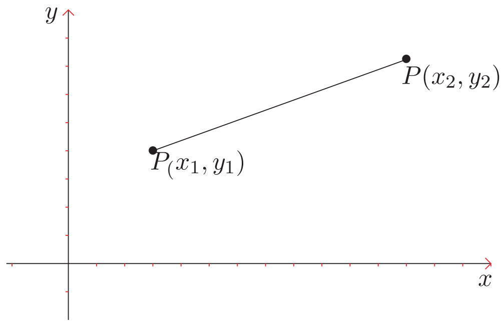


Figura 49.2

Figura 49. Longitud de arco

3.4.2. Cálculo de la longitud de arco

Sea $y = f(x)$ función continua en $[a, b]$, al igual que $f'(x)$. Se define la partición P sobre $[a, b]$ mediante los puntos (ver Figura 50):

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots x_n = b,$$

de modo que,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b.$$

Estos puntos x_i, definen "n" subintervalos:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

cuyas longitudes respectivas son:

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_i, \ldots, \Delta x_n.$$

Desde cada punto x_i trazar una perpendicular hasta que se intercepte con la curva Γ. Estos puntos de intersección determinan los puntos:

$$P_0 = A,\ P_1,\ P_2, \ldots, P_{i-1},\ P_i,\ P_n = B.$$

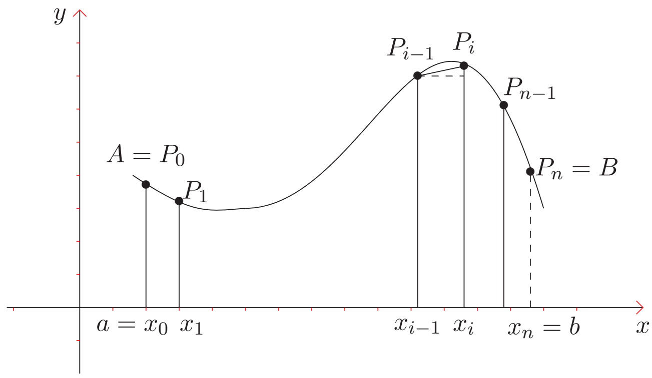


Figura 50. Cálculo de la longitud de arco

Para la cuerda $\overline{P_{n-1}P_n}$ se tiene lo siguiente:

$$\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i.$$

Ahora bien, según el Teorema de Valor Medio del Calculo Diferencial, al ser $f(x)$ función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), existe al menos un punto $\overline{x_i} \in [x_{i-1}, x_i]$, de tal forma que $f'(\overline{x_i}) = \dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$ en donde $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ y $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

En consecuencia,

$$\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right| = \sqrt{1 + [f'(\overline{x_i}]^2}\Delta x_i$$

Al sumar las longitudes de las "n" cuerdas se tiene la siguiente expresión:

$$S_n = \sqrt{1 + [f'(\overline{x_i}]^2}\Delta x_i + \sqrt{1 + [f'(\overline{x_2}]^2}\Delta x_2 + \cdots + \sqrt{1 + [f'(\overline{x_n}]^2}\Delta x_n,$$
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\overline{x_i}]^2}\Delta x_i.$$

Esta suma, determina la longitud aproximada de la curva para $a \leq x \leq b$.

Cuando $\Delta x_i \to 0$, se define la longitud exacta de arco, como sigue:

$$L = \lim_{\Delta x_i \to 0} S_n = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]}dx \text{ unidades de longitud.}$$

De igual manera, si $g(y)$ y $g'(y)$ son continuas en el intervalo $[c, d]$, entonces la longitud de arco de la curva $x = g(y)$ para $c \leq y \leq d$, esta dada por:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dg}{dy}\right)^2}dy \text{ unidades de longitud.}$$

Problema 25

Calcular la longitud de arco de la curva cuya ecuación es $y^3 = x^2$, comprendida entre los puntos $(0,0)$ y $(8,4)$.

Solución

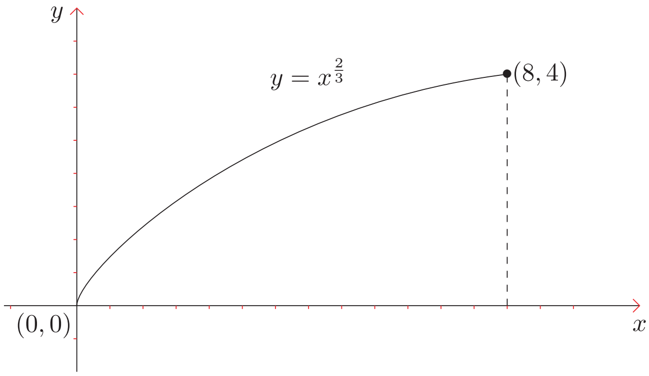


Figura 51. Cálculo de longitud de arco: problema 25

La ecuación de la curva se puede escribir como sigue (ver Figura 51):
$y = x^{\frac{2}{3}}$.
Entonces,
$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.
Luego,

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\left[\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right]^2},$$

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}},$$

$$\sqrt{1+(y')^2} = \frac{\sqrt{9x^{\frac{2}{3}}+4}}{3x^{\frac{1}{3}}}.$$

En consecuencia, la longitud de arco se calcula así:

$$L = \int_0^8 \frac{\sqrt{9x^{\frac{2}{3}}+4}}{3x^{\frac{1}{3}}}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^8 x^{-\frac{1}{3}}\left(9x^{\frac{2}{3}}+4\right)^{\frac{1}{2}}dx,$$

$$L = \frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\int_0^8 6x^{-\frac{1}{3}}\left(9x^{\frac{2}{3}}+4\right)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{18}\times\frac{2}{3}\left[\left(9x^{\frac{2}{3}}+4\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^8,$$

$$L = \frac{1}{27}\left[\left((9(4)+4)^{\frac{3}{2}}\right)\left((9(0)+4)^{\frac{3}{2}}\right)\right] = \frac{1}{27}\left(40^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}}\right),$$

$$L = \frac{1}{27}\left(80\sqrt{10}-8\right),$$

$$L = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right) \quad \text{unidades de longitud.}$$

Problema 26

Calcular la longitud de la circunferencia (ver Figura 52):
$x^2 + y^2 = r^2$.

Solución

En la Figura 51, se ilustra una cuarta parte de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$. Por la simetría de la curva, basta calcular la longitud de arco en el primer cuadrante y luego multiplicar por 4.

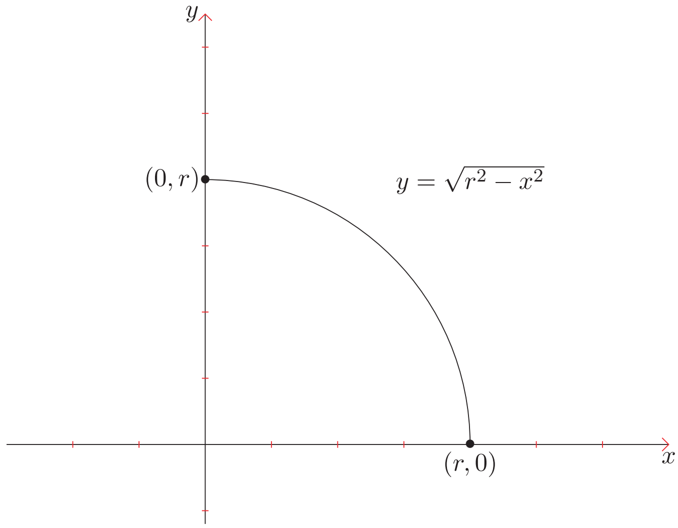


Figura 52. Cálculo de longitud de arco: problema 26

Al derivar implícitamente la expresión $x^2 + y^2 = r^2$, se tiene:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(r^2),$$
$$2x + 2yy' = 0;\ y' = -\frac{x}{y}.$$

Luego,

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2},$$
$$\sqrt{\frac{y^2 + x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{y^2 + x^2}}{y},$$
$$\sqrt{1 + (y')^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

En consecuencia, la longitud de la circunferencia es:

$$L = 4\int_0^r \frac{r dx}{\sqrt{r^2+x^2}} = 4r\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2+x^2}},$$
$$L = 4r\left[arcsen\frac{x}{r}\right]_0^r = 4r\left[arcsen\,\frac{r}{r} - arcsen\,0\right],$$
$$L = 4r(arcsen\,1) = 4r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi r.$$

La longitud de la circunferencia es $2\pi r$ unidades de longitud.

Problema 27

Calcular la longitud de arco de la curva que sigue, desde $x = 1$ a $x = 3$ (ver Figura 53): $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$.

Solución

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}.$$

Entonces,

$$y' = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2}.$$

Por tanto,

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2}\right)^2},$$
$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4}},$$
$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4}},$$
$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2}\right)^2} = \left|\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}\right|.$$

Por tanto, la longitud de la curva es:

$$L = \int_1^3 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}\right)dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2x}\right]_1^3 = \frac{27}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2},$$
$$L = \frac{27-1-1+3}{6} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}.$$

La longitud de la curva es $\dfrac{14}{3}$ unidades de longitud.

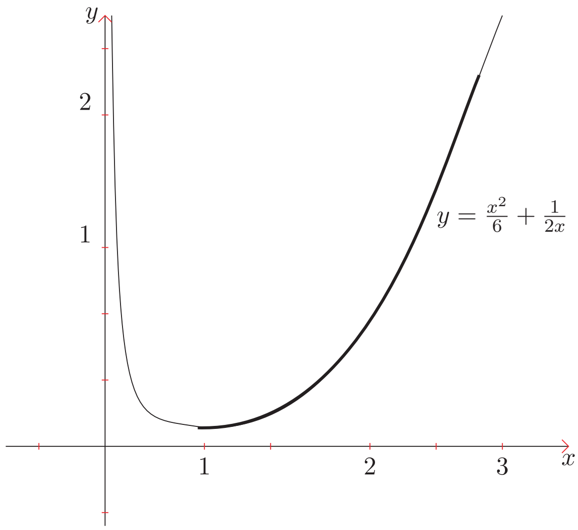


Figura 53. Cálculo de arco: problema 27

Problema 28

Calcular la longitud de arco de la curva $y = ln\, x$ desde $x = \sqrt{3}$ hasta $x = \sqrt{8}$ (ver Figura 54).

Solución

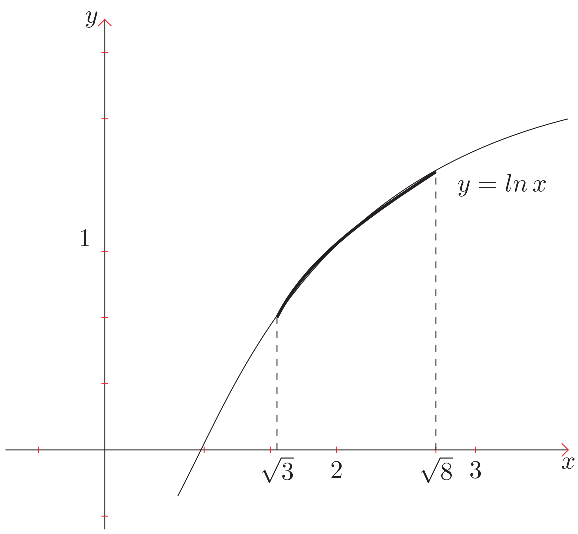


Figura 54. Cálculo de arco: problema 28

a) Integración por x

A partir de $y = ln\, x$, se tiene:

$y' = \dfrac{1}{x}$

$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

En consecuencia, la longitud de arco es:

$$L = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx,$$

$$L = \left[\sqrt{x^2+1} - ln\left(\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right)\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}},$$

$$L = \sqrt{8+1} - ln\left(\frac{1+\sqrt{8^2+1}}{den}\right) - \sqrt{3+1} - ln\left(\frac{1+\sqrt{3^2+1}}{3}\right),$$

$$L = 3 - ln\,4 + ln\sqrt{8} - 2 + ln\,2 - ln\sqrt{3},$$

$$L = 1 + \frac{1}{2} ln\frac{3}{2} \text{ unidades de longitud.}$$

b) Integración por y

A partir de la ecuación $y = ln\,x$, se tiene:

$x = e^y$.

Ahora bien,

Si $x = \sqrt{3}$; $\sqrt{3} = e^y$; $y = ln\sqrt{3}$; $y = \frac{1}{2} ln\,3$,

Si $x = \sqrt{8}$; $\sqrt{8} = e^y$; $y = \frac{3}{2}\,ln\,2$.

Además,

$\frac{dx}{dy} = e^y$,

$\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1+e^{2y}}$.

Luego,

$$L = \int_{\frac{1}{2}ln3}^{\frac{3}{2}ln2} \sqrt{1+e^{2y}}\, dy = \left[\sqrt{e^{2y}+1} - ln\left(\frac{1+\sqrt{e^{2y}+1}}{e^{2y}}\right)\right]_{\frac{1}{2}ln3}^{\frac{3}{2}ln2},$$

$$L = \sqrt{8+1} - ln\left(\frac{1+\sqrt{8+1}}{\sqrt{8}}\right) - \sqrt{3+1} - ln\left(\frac{1+\sqrt{3+1}}{\sqrt{3}}\right),$$

$$L = 1 + \frac{1}{2} ln\frac{3}{2} \text{ unidades de longitud.}$$

Problema 29

Calcular la longitud de arco de $y = ln(\sec x)$ desde $(0,0)$ hasta $\left(\frac{\pi}{2}, ln2\right)$ (ver Figura 55).

Solución

Como $y = ln(\sec x)$, entonces

$$y' = \frac{\sec x \times tg\,x}{\sec x} = tg\,x.$$

Entonces,

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+tg^2x} = \sec x$$

Por tanto, la longitud de la curva es:

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x\, dx = [ln|\sec x + tg\, x|]_0^{\frac{\pi}{3}}\ ,\\
L &= ln\ \left|\sec\frac{\pi}{3} + tg\frac{\pi}{3}\right| - ln|\sec 0 + tg\, 0|,\\
L &= ln\left|\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} + \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\right| = ln\left|\frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right|,\\
L &= ln\left(2+\sqrt{3}\right)\ \text{unidades de longitud.}
\end{aligned}$$

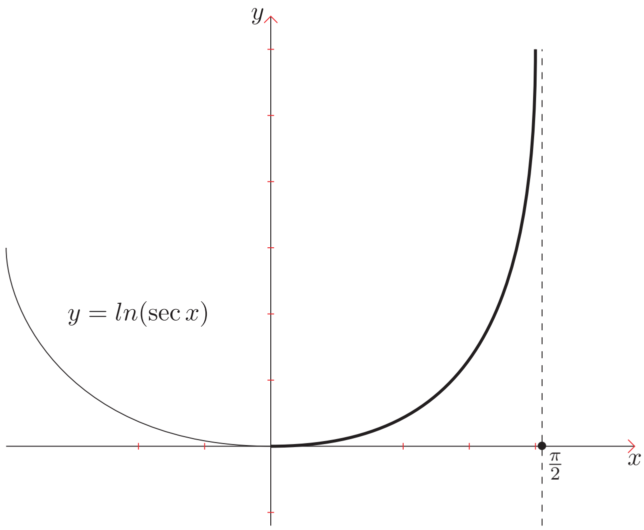


Figura 55. Cálculo de la longitud de arco: problema 29

Problema 30

Calcular la longitud de arco desde $(0, 3)$ hasta $\left(2, \sqrt{5}\right)$ en el sentido de las manecillas del reloj, a lo largo del circulo $x^2 + y^2 = 9$ (ver Figura 56)

Solución

Al derivar implícitamente la ecuación del circulo $x^2 + y^2 = 9$, se llega a:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(x^2+y^2) = \frac{d}{dx}(9),\\
&2x + 2yy' = 0;\ y' = -\frac{x}{y}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} = \frac{3}{\sqrt{9-x^2}}.$$

La longitud de arco pedida es:

$$L = \int_0^2 \sqrt{1+y'^2} = 3\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}},$$
$$L = 3\left[arc\,sen\frac{x}{3}\right]_0^2 = 3\,arc\,sen\frac{2}{3} \approx 2,1892.$$

La longitud de arco es 2,1892 unidades de longitud.

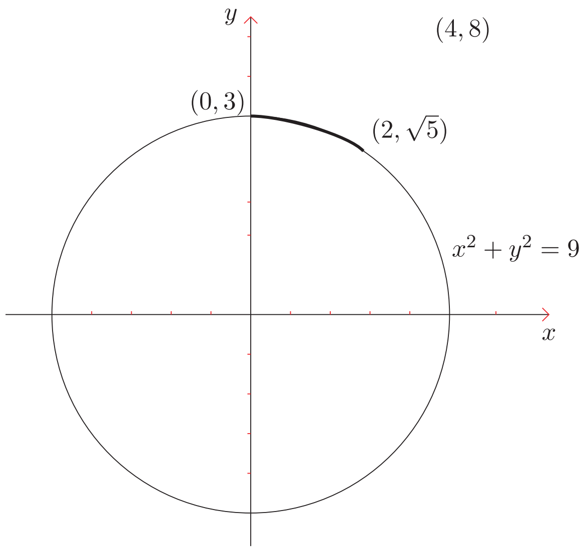


Figura 56. Cálculo de la longitud de arco: problema 30

3.4.3. Longitud de arco para funciones paramétricas

Suponga que una curva Γ se define mediante las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x = f(t); \; y = g(t) \tag{1}$$

En donde f y g son continuas en el intervalo $[a, b]$, al igual que f' y g'.

Sea P una partición del intervalo $[a, b]$ mediante los puntos:

$$t_0, \; t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i, \ldots, t_n$$

de modo que,

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = b.$$

Esta partición determina "n" subintervalos de longitud $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ para el intervalo que ocupa el lugar i.

Ahora bien, al asociar cada punto t_i, un punto $P_i(f(t_i), g(t_i))$ de la curva Γ, se trazan segmentos de recta (ver Figura 57):

$$\overline{P_0P_1}, \overline{P_1P_2}, \cdots, \overline{P_{i-1}P_i}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}.$$

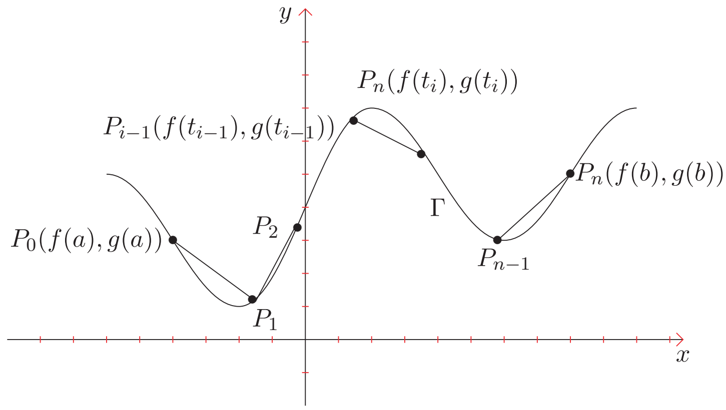


Figura 57. Longitud de arco para funciones paramétricas

La longitud del segmento $\overline{P_{i-1}P_i}$ está dada por la siguiente expresión:

$$\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right| = \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2} \qquad (2)$$

Intuitivamente, la suma de las longitudes de los segmentos mencionados arriba, proporciona una longitud aproximada de la curva Γ, desde $t = a$ hasta $t = b$.

Por otra parte, dado que f' y g' son continuas en el intervalo $[a, b]$, entonces existen puntos $\overline{t_i}$ y $\overline{\overline{t_i}}$ en $[a, b]$, tales que,

$$\begin{aligned} f(t_i) - f(t_{i-1}) &= f'(\overline{t_i})\Delta t_i. \\ g(t_i) - g(t_{i-1}) &= g'(\overline{\overline{t_i}})\Delta t_i. \end{aligned} \qquad (3)$$

Al sustituir en (2), se tiene:

$$\begin{aligned} \left|\overline{P_{i-1}P_i}\right| &= \sqrt{\left[f'(\overline{t_i})\Delta t_i\right]^2 + \left[g'(\overline{\overline{t_i}})\Delta t_(i)\right]^2}, \\ \left|\overline{P_{i-1}P_i}\right| &= \sqrt{\left[f'(\overline{t_i})\right]^2 + \left[g'(\overline{\overline{t_i}})\Delta\right]^2}\Delta t_i. \end{aligned}$$

La suma de todas las longitudes de los segmentos, proporciona la longitud aproximada de Γ.

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \left|\overline{P_{i-1}P_i}\right| \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left[f'(\overline{t_i})\right]^2 + \left[g'(\overline{\overline{t_i}})\Delta\right]^2}\Delta t_i.$$

Ahora bien, cuando $\Delta x_i \to 0$ $(n \to \infty)$, la longitud exacta de L es:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left[f'(\overline{t_i})\right]^2 + \left[g'(\overline{\overline{t_i}})\Delta\right]^2}\Delta t_i, \\ L &= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)\Delta]^2}\, dt \text{ unidades de longitud.} \end{aligned}$$

Problema 31

Calcular la longitud de la curva definida paramétricamente como $x = t^3$; $y = t^2$ desde $t = 1$ hasta $t = 3$ (ver Figura 58).

Solución

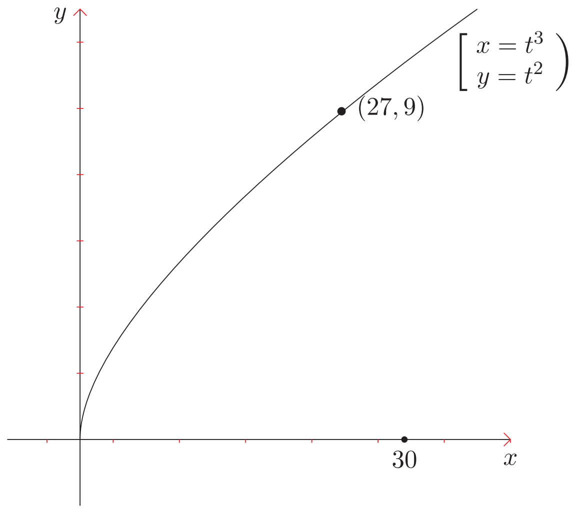


Figura 58. Longitud de arco para funciones paramétricas: problema 31

$$\begin{aligned} x = t^3;\ \frac{dx}{dt} &= 3t^2 \\ y = t^2;\ \frac{dx}{dt} &= -t. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
L &= \int_1^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt, \\
L &= \int_1^3 \sqrt{(3t^2)^2 + (t)^2}\, dt, \\
L &= \int_1^3 \sqrt{9t^4 + 4t^2}\, dt = \int_1^3 t\sqrt{9t^2 + 4}\, dt, \\
L &= \frac{1}{18} \int_1^3 18(9t^2 + 4)^{\frac{1}{2}} dt, \\
L &= \frac{1}{18} \times \frac{2}{3} \left[(9t^2 + 4)^{\frac{3}{2}}\right]_1^3 = \frac{1}{27} \left[(9t^2 + 4)^{\frac{3}{2}}\right]_1^3, \\
L &= \frac{1}{27} \left[\left\{(9 \times 9 + 4)^{\frac{3}{2}}\right\} - \left\{(9 \times 1 + 4)^{\frac{3}{2}}\right\}\right], \\
L &= \frac{1}{27} \left[85^{\frac{3}{2}} - 13^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{27} \left(85\sqrt{85} - 13\sqrt{13}\right), \\
L &\approx 27{,}29 \text{ unidades de longitud.}
\end{aligned}$$

Problema 32

Determinar la longitud de la circunferencia de radio r, definida paramétricamente como:

$$x = r\ \cos t;\ \ y = r\ \operatorname{sen} t.$$

Solución

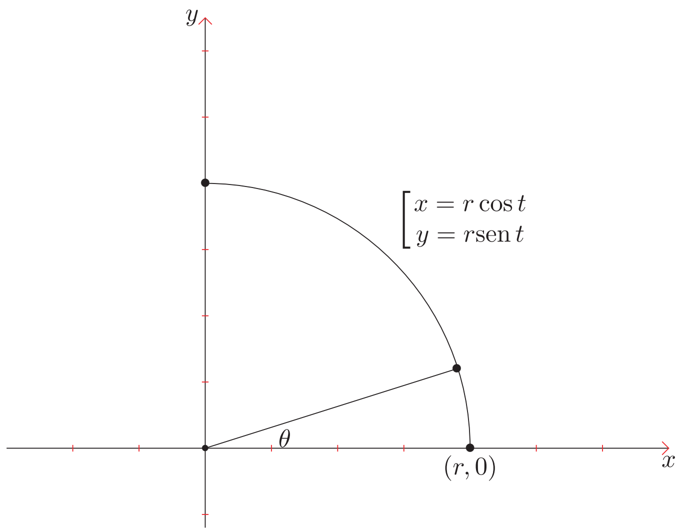


Figura 59. Longitud de arco para funciones paramétricas: problema 32

En la Figura 59, se puede ver una cuarta de la circunferencia. Por tanto, por la simetría de la circunferencia respecto al origen, basta calcular la longitud en el primer cuadrante $\left(0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ y luego multiplicar por cuatro, así:

$$x = r\cos t;\ \frac{dx}{dt} = -r\ \operatorname{sen} t,$$
$$y = r\ \operatorname{sen} t;\ \frac{dy}{dt} = r\cos t.$$

Entonces,

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(-r\ \operatorname{sen} t)^2 + (r\cos t)^2} = \sqrt{r^2(\operatorname{sen} t + \cos^2 t)} = r$$

En consecuencia, la longitud de la circunferencia se determina como sigue:

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt,$$
$$L = 4r\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 4r[t]_0^{\frac{\pi}{2}},$$
$$L = 4r\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = 2\pi r.$$

La longitud de la circunferencia de radio r vale $2\pi r$ unidades de longitud.

Problema 33

Calcular la longitud de la curva $x = e^t \operatorname{sen} t, y = e^t \cos t$, desde $t = 0$ a $t = \dfrac{\pi}{2}$. (ver Figura 60)

Solución

$$\begin{aligned} x &= e^t \operatorname{sen} t; \ \frac{dx}{dt} = e^t (\cos t + \operatorname{sen} t), \\ y &= e^t \cos t; \ \frac{dy}{dt} = e^t (-\operatorname{sen} t + \cos t). \end{aligned}$$

Por tanto, la longitud de la curva es:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt, \\ L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(e^t(\cos t + \operatorname{sen} t))^2 + (e^t(-\operatorname{sen} t + \cos t))^2}\, dt, \\ L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{e^{2t}(\cos + \operatorname{sen} t)^2 + (-\operatorname{sen} t + \cos t)^2}\, dt, \\ L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sqrt{\cos^2 t + 2\cos t - \operatorname{sen} tt + \operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t - 2\cos t \operatorname{sen} t}\, dt, \\ L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sqrt{1+1}\, dt = \sqrt{2}[e^t]_0^{\frac{\pi}{2}}, \\ L &= \sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right) \text{ unidades de longitud.} \end{aligned}$$

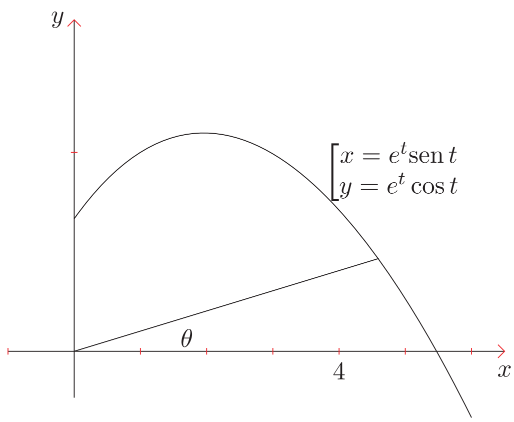


Figura 60. Longitud de arco para funciones paramétricas: problema 33

3.4.4. Longitud de arco en coordenadas polares

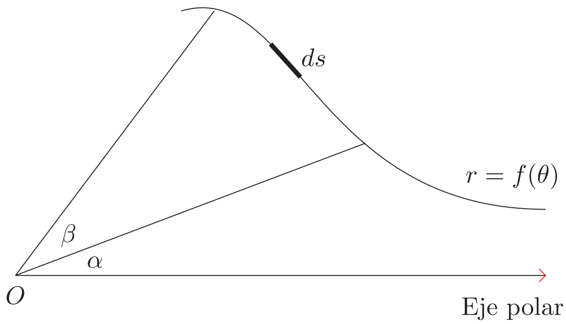


Figura 61. Longitud de arco en coordenadas polares

Sea Γ una curva plana, definida en forma polar (ver Figura 61), así:

$$r = f(\theta) \tag{1}$$

Si (x, y) es la representación del punto P de la curva Γ y (r, θ) es la representación del mismo punto P, entonces,

$$x = r\ \cos\theta;\ y = r\ \text{sen}\,\theta \tag{2}$$

Al reemplazar (1) en (2), se tiene,

$$x = \cos\theta f(\theta);\ y = \ \text{sen}\ \theta f(\theta) \tag{3}$$

Las ecuaciones (3) se pueden considerar como ecuaciones paramétricas de Γ donde θ es el parámetro.

Por tanto, si la curva Γ es continua en $[\alpha, \beta]$ entonces la longitud de arco según el parágrafo 3.4.3 es:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \tag{4}$$

Pero,

$$\begin{aligned} x = r\cos\theta \text{ entonces } \frac{dx}{d\theta} &= -r\ \text{sen}\ \theta + \cos\theta\frac{dr}{d\theta}, \\ y = r\ \text{sen}\ \theta \text{ entonces } \frac{dy}{d\theta} &= r\cos\theta + \ \text{sen}\ \theta\frac{dr}{d\theta}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} &= \sqrt{\left(-r\,\text{sen}\ + \cos\theta\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \left(r\cos\theta + \text{sen}\ \theta\frac{dr}{d\theta}\right)^2}, \\ &= \sqrt{r^2\text{sen}^2\theta - 2r\ \text{sen}\ \theta\cos\theta\frac{dr}{d\theta} + \cos^2\theta\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\cos^2\theta + 2r\cos\theta\ \text{sen}\ \theta\frac{dr}{d\theta} + \text{sen}^2\theta\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}, \\ &= \sqrt{r^2\left(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right) + \left(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta\right)\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}. \qquad (5)$$

Al sustituir (5) en (4), se obtiene la expresión para longitud de la curva Γ definida en forma polar como $r=f(\theta)$ $\theta\in[\alpha,\beta]$.

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \text{ unidades de longitud.}$$

Problema 34

Calcular la longitud del cardiode $r=a(1+\cos\theta)$ (ver Figura 62).

Solución

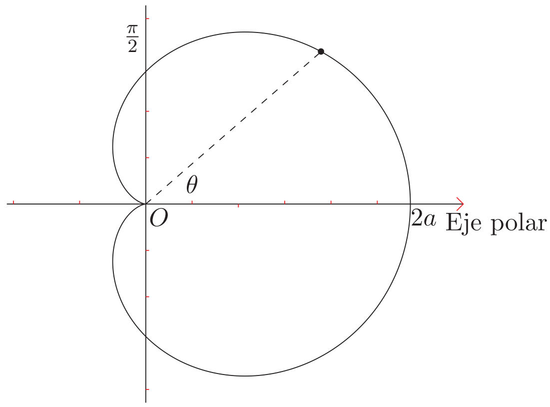


Figura 62. Longitud de arco en coordenadas polares: problema 34

De la expresión $r=a(1+\cos\theta)$, se tiene $\dfrac{dr}{d\theta}=-a \text{ sen } \theta$.
Entonces,

$$\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2}=\sqrt{(-a\,\text{sen}\theta)^2+a^2(1+\cos\theta)^2},$$

$$\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2}=\sqrt{a^2\text{sen}^2\theta+a^2+2a^2+\cos\theta+a^2\cos^2\theta},$$

$$\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2}=\sqrt{a^2(\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta)+a^2+2a^2\cos\theta},$$

$$\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2}=\sqrt{a^2(2+\cos\theta)}=a\sqrt{2+2\cos\theta}=a\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\theta}.$$

Dado que la curva del cardiode es simétrica respecto al eje polar, basta calcular la longitud entre 0 y π, luego multiplicar por 2, así:

$$L=2\int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2}=2a\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta.$$

Dado que,

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
L &= 2a\sqrt{2}\sqrt{2}\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 4a\times 2\left[\text{sen }\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi},\\
L &= 8a\left[\text{sen }\frac{\pi}{2} - \text{sen } 0\right] = 8a(1) = 8a.
\end{aligned}$$

La longitud del cardiode es $8a$ unidades de longitud.

Problema 35

Determinar la longitud de arco de $r = \dfrac{2}{1+\cos\theta}$ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. (ver Figura 63).

Solución

$$\begin{aligned}
r &= \frac{2}{1+\cos\theta},\\
\frac{dr}{d\theta} &= \frac{2\text{ sen }\theta}{(1+\cos\theta)^2},\\
\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} &= \sqrt{\left(\frac{2\text{sen }\theta}{(1+\cos\theta)^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+\cos\theta}\right)^2},\\
\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} &= \sqrt{\frac{4\text{sen}^2\theta}{(1+\cos\theta)^4} + \frac{4}{(1+\cos\theta)^2}},\\
\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} &= \sqrt{\frac{4\text{sen}^2\theta + 4(1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)^4}},\\
\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} &= \frac{2\sqrt{\text{sen}^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}}{(1+\cos\theta)^2} = \frac{2\sqrt{2+2\cos\theta}}{(1+\cos\theta)^2},\\
\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} &= \frac{2\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\theta}}{(1+\cos\theta)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{(1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

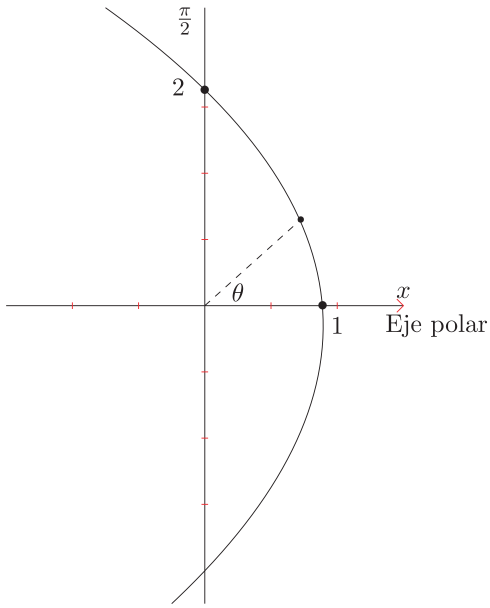


Figura 63. Longitud de arco en coordenadas polares: problema 35

Por tanto, la longitud pedida es:

$$L = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
\cos^2\frac{\theta}{2} &= \frac{1+\cos\theta}{2}, \\
2\cos^2\frac{\theta}{2} &= 1+\cos\theta, \\
\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{3}{2}} &= (1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
L &= \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\int_0^{\pi 2} \frac{d\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^3\frac{\theta}{2}\,d\theta, \\
L &= \left[\sec\frac{\theta}{2}\,tg\,\frac{\theta}{2} + ln\left|\sec\frac{\theta}{2} + \,tg\,\frac{\theta}{2}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\sec\frac{\pi}{4}\,tg\,\frac{\pi}{4} + ln\left|\sec\frac{\pi}{4} + \,tg\,\frac{\pi}{4}\right|\right], \\
L &= \sqrt{2} + ln\left(\sqrt{2}+1\right) \text{ unidades de longtiud.}
\end{aligned}$$

NOTA
La Figura 63, corresponde a una parábola.

El cambio a coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \text{ sen } \theta \end{cases}$$

transforma la ecuación dada en coordenadas polares a coordenadas cartesianas, a la siguiente ecuación:

$$y^2 = 4 - 4x.$$

Al despejar x, se obtiene:

$$x = \frac{4-y^2}{4}; \ \frac{dx}{dy} = -\frac{y}{2}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1+\left(-\frac{y}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4+y^2}$$

En correspondencia al parágrafo 3.4.2. la longitud de arco, es:

$$L = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{4+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y\sqrt{4+y^2}}{2} + 2\,ln\left|y+\sqrt{4+y^2}\right|\right]_0^2,$$

$$L = \sqrt{2} + 2\,ln\,2 + ln\left(1+\sqrt{2}\right) - 2\,ln\,2,$$

$$L = \sqrt{2} + ln\left(1+\sqrt{2}\right) \text{ unidades de longitud.}$$

Ejercicios propuestos 3.4

1) Calcular la longitud total del centroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

2) Calcular la longitud de arco de la curva $y^3 = 8x^2$ desde $x = 1$ a $x = 8$.

3) Calcular la longitud de arco de $27y^2 = 4(x-2)^3$ desde $(2, 0)$ a $(11, 6\sqrt{3})$.

4) Calcular la longitud de arco de $y = ln(\cos x)$ desde $x = \frac{\pi}{6}$ a $\frac{\pi}{4}$.

5) Calcular la longitud de arco para la función $x = \frac{1}{12}y^2$ desde $y = 0$ a $y = 6$.

6) Calcular la longitud de arco de las funciones definidas paramétricamente:

   a) $x = e^t \cos t; \ y = e^t \text{ sen } t$ desde $t = 0$ a $t = 4$.

   b) $x = t-$ sen $t; \ y = 1 - \cos t$ desde $t = 0$ a $t = 2\pi$.

   c) $x = ln\sqrt{1+t^2}; \ y = arctgt$ desde $t = 0$ a $t = 1$.

7) Calcular la longitud de arco de las funciones definidas en forma polar

   a) $r = 1 - \cos\theta$.

   b) Primera espura de la espiral logarítmica .

   c) $r = 2R\cos\theta$.

3.5. Superficies de revolución

3.5.1. Definiciones y conceptos

Una Superficie de Revolución es aquella que se genera por la rotación de una curva plana alrededor de un eje de rotación, la cual se halla en el mismo plano de la curva. A la curva que gira se la suele llamar generatriz y al eje de rotación directriz.

En la Figura 64.1 se visualiza una curva plana (generatriz) y un eje de giro (directriz) paralelo al eje x. al rotar el segmento lineal $\overline{AB}$, alrededor del eje de rotación se genera la superficie de revolución de la Figura 64.2.

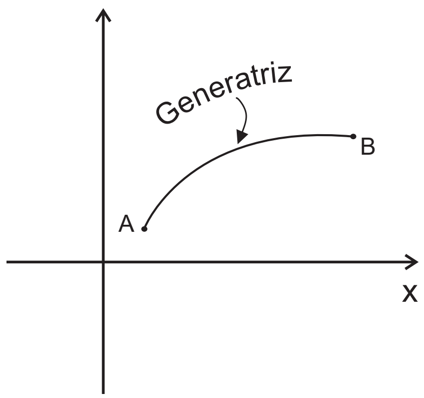


Figura 64.1

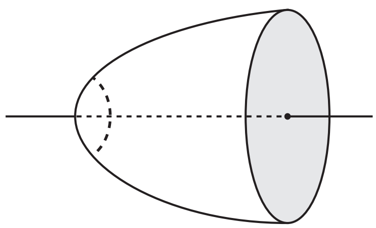


Figura 64.2

Figura 64. Superficies de revolución

Para construir la expresión que calcula el área de la superficie de revolución, es importante precisar el concepto de Área Lateral de un Cono Circular Truncado (ver Figura 65) de radio R y $rR > r$ y Segmento Recto Generatriz de longitud L.

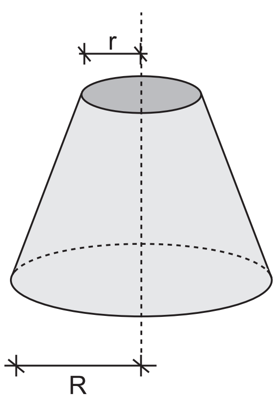


Figura 65. Área lateral del cono circular truncado

El área lateral del cono circular truncado corresponde a:
$A_L = 2\pi(R+r)L$ unidades de superficie.
O también,
$A_L = 2\pi R_p L$ unidades de superficie, donde R_p es el radio promedio.

3.5.2. Cálculo del área de superficie

Sea $y = f(x)$ una curva continua en $[a, b]$, al igual que su derivada $f'(x)$ (ver Figura 66).
Se define sobre $[a, b]$ una partición P, mediante los puntos:

$$a = x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i \ldots, x_n,$$

de modo que,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n.$$

Estos puntos definen "n" subintervalos:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

cuyas longitudes respectivas son:

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_i, \ldots, \Delta x_n.$$

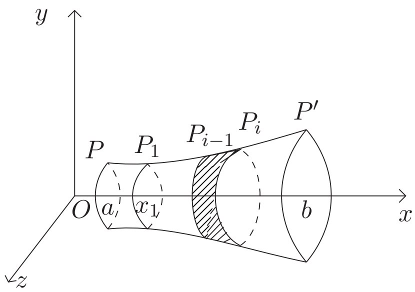


Figura 66.1

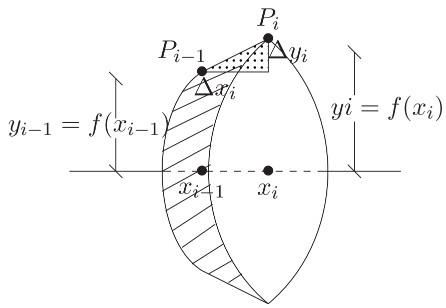


Figura 66.2

Figura 66. Cálculo del área de superficie

Al levantar perpendiculares desde estos puntos x_i e interceptarse con la curva Γ, se generan los puntos:

$$P_0, P_1, \ldots, P_{i-1}, P_i \ldots, P_n,$$

y a su vez forman las cuerdas:

$$\overline{P_0, P_1}, \overline{P_1, P_2}, \ldots, \overline{P_{i-1}, P_i}, \ldots, \overline{P_{n-1}, P_n}.$$

La longitud de cada cuerda P_{i-1}, P_i se calcula como sigue:

$$\left|\overline{P_{i-1}, P_i}\right| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta x_i}{\Delta y_i}\right)^2}\,\Delta x_i.$$

Por el teorema del valor medio, al ser $f(x)$ continua en $[a,b]$ y diferenciable en $(a.b)$, existe al menos un punto $\overline{x_i} \in [x_{i-1}, x_i]$, de modo que $f'(\overline{x_i}) = \dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$, en donde:

$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1});\;\; \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Por tanto, $|\overline{P_{i-1}, P_i}| = \sqrt{1 + [f'(\overline{x_i})]^2}\Delta x_i$ unidades de longitud.

Cuando la cuerda $\overline{P_{i-1}, P_i}$ rota alrededor del eje x, genera un tronco de cono circular cutos radios son $f(x_{i-1})$ y $f(x_i)$.

Por tanto, el área lateral del torno de cono circular elemental es (Figura 62.2).

$$A_i = 2\pi\left[\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right]\;\left|\overline{P_{i-1}, P_i}\right|,$$
$$A_i = 2\pi\left[\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right]\;\sqrt{1 + [f'(\overline{x_i})]^2}\Delta x_i.$$

Como $f(x)$ es continua, entonces existe un punto $\overline{\overline{x_i}} \in [x_{i-1}, x_i]$, tal que,

$$f(\overline{\overline{x_i}}) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}.$$

Así, el área lateral del tronco de cono circular elemental es,

$$A_i = 2\pi f(\overline{\overline{x_i}})\sqrt{1 + [f(\overline{x_i})]^2}\Delta x_i.$$

Intuitivamente, el área aproximada de superficie corresponde a la suma de las reas laterales de los troncos de cono circulares; esto es,

$$A_s \approx \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\overline{\overline{x_i}})\sqrt{1 + [f(\overline{x_i})]^2}\Delta x_i.$$

El área exacta de la superficie de revolución se obtiene cuando $\Delta x_i \to 0$ $(n \to \infty)$, así:

$$A_S \approx \sum_{\Delta x_i \to 0}^{n} A_i = \lim_{\Delta x_i \to 0}\sum 2\pi f(\overline{\overline{x_i}})\sqrt{1 + [f'(\overline{x_i})]^2}\Delta x_i,$$
$$A_S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(\overline{x_i})]^2}\,dx \quad \text{o} \quad A_S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

NOTAS

1) Las integrales calculan el área de revolución; el giro se hace alrededor del eje x.

2) Si la curva Γ gira alrededor del eje y, el área de superficie se calcula mediante la siguiente integral:

$$A_S = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1 + [f'(\overline{x_i})]^2}\,dx \text{ o } A_S = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

3) Cuando la función Γ depende de y, esto es, x=g(y), se efectúan consideraciones análogas para los giros respectivos.

Problema 37

El arco de parábola cúbica $y = \dfrac{1}{4}x^3$ comprendida entre $x = 0$ y $x = 2$ gira alrededor del eje x. Determinar el área de la superficie de revolución que se genera (ver Figura 67).

Solución

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{4}x^3, \\
y' &= \frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}x^2, \\
\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} &= \sqrt{1+\left(\frac{3}{4}x^2\right)^2} = \frac{\sqrt{16+9x^4}}{4}.
\end{aligned}
$$

El área de superficie, se calcula como sigue:

$$
\begin{aligned}
A_S &= \int_0^2 y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2\pi \int_0^2 x^3 \frac{\sqrt{16+9x^4}}{4}\, dx, \\
A_S &= \frac{\pi}{8}\int_0^2 x^3 \left(\sqrt{16+9x^4}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi}{8}\times\frac{1}{36}\int_0^2 36x^3\left(\sqrt{16+9x^4}\right)^{\frac{1}{2}} dx, \\
A_S &= \frac{\pi}{8}\times\frac{1}{36}\times\frac{2}{3}\left[\left(\sqrt{16+9x^4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{\pi}{432}\left[\left(\sqrt{16+9x^4}\right)^{\frac{3}{2}} - 16^{\frac{3}{2}}\right], \\
A_S &= \frac{\pi}{432}\left(160^{\frac{3}{2}} - 16^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{64\pi}{432}\left(10\sqrt{10}-1\right), \\
A_S &= \frac{4\pi}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right).
\end{aligned}
$$

El área de superficie de revolución vale $\dfrac{4\pi}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$ unidades de superficie.

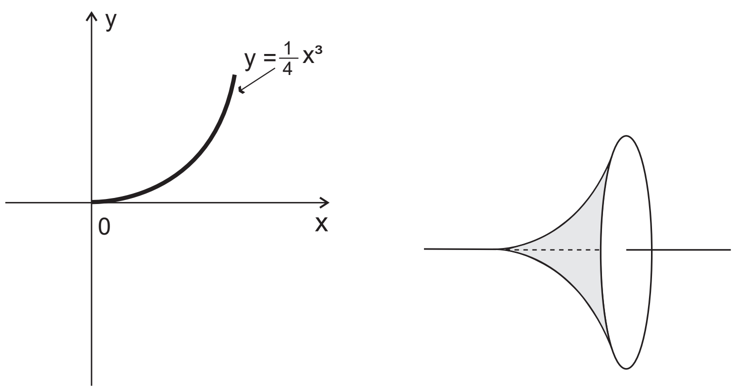


Figura 67.1 Figura 67.2

Figura 67. Cálculo del área de superficie: problema 37

Problema 38

Demostrar que, el área de superficie de la esfera de radio R es $A_s = 4\pi R^2$ unidades de superficie.

Solución

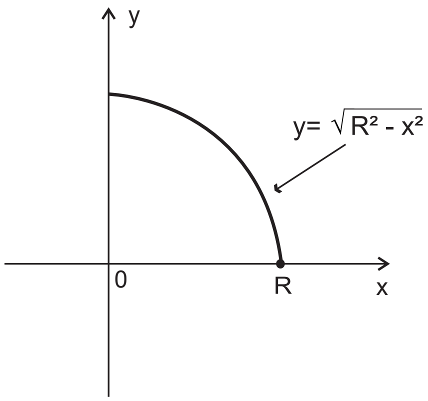


Figura 68.1

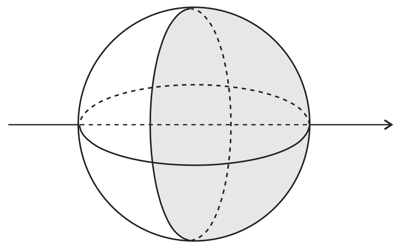


Figura 68.2

Figura 68. Cálculo del área de superficie: problema 38

La Figura 68, muestra el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, centrada en el origen y correspondiente a $\frac{1}{4}$ de ella. Por tanto, para calcular el área de superficie total, se calcula el giro de este arco alrededor del eje x, luego se multiplica por 2.

La ecuación de la curva generatriz es, $x^2 + y^2 = R^2$.

Al derivar implícitamente respecto a x, se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2\right) = \frac{d}{dx}(R^2),$$
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0,$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Entonces,

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\sqrt{y^2+x^2}}{y} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

En consecuencia, el área total de la esfera es:

$$A_S = 2\times 2\pi \int_0^R y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx,$$
$$A_S = 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = 4\pi R\,[x]_0^R,$$
$$A_S = 4\pi R^2 \text{ unidades de superficie.}$$

Problema 39

Determinar el área de superficie de revolución de la curva $x^4 + 3 = 6xy$, desde $x = 1$ a $x = 2$, cuando gira alrededor del eje x (ver Figura 69).

Solución

De la ecuación $x^4 + 3 = 6xy$, se obtiene, $y = \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{3}x$.
Entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2}\right)^2},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4}} = \sqrt{\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4}},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2}\right)^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x2} = \frac{x^4 + 1}{2x^2},$$

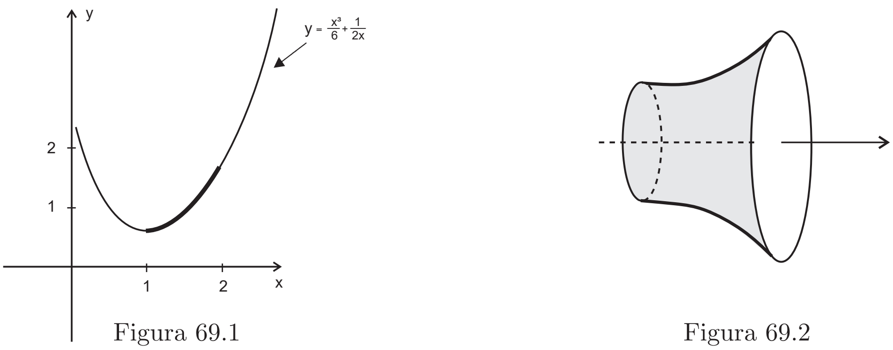


Figura 69.1 Figura 69.2

Figura 69. Cálculo del área de superficie: problema 39

El área de superficie, es:

$$A_S = 2\pi \int_0^2 y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_1^2 \frac{x^4 + 3}{6x} \times \frac{x^4 + 1}{2x^2}\, dx,$$

$$A_S = \frac{\pi}{6} \int_1^2 \frac{(x^4 + 3)(x^4 + 1)}{x^3}\, dx = \frac{\pi}{6} \int_1^2 \left(x^5 + 4x + 3x^3\right)\, dx,$$

$$A_S = \frac{\pi}{6} \left[\frac{1}{6}x^6 + 2x^2 - \frac{3}{2x^2}\right]_1^2 = \frac{\pi}{6} \left[\frac{1}{6}(64) + 2(4) - \frac{3}{8} - \frac{1}{6} - 2 + \frac{3}{2}\right],$$

$$A_S = \frac{\pi}{6} \times \frac{141}{8} = \frac{47}{16}\pi.$$

El área de revolución vale $\dfrac{47}{16}\pi$ unidades de superficie.

Problema 40

Determinar el área de superficie de la curva $x^4 + 3 = 6xy$ desde $x = 1$ a $x = 2$, cuando gira alrededor del eje y (ver Figura 70).

Solución

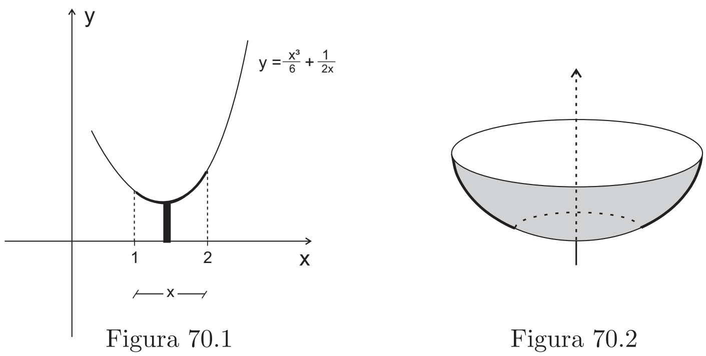


Figura 70.1 Figura 70.2

Figura 70. Cálculo del área de superficie: problema 40

Según el problema 39,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{x^4 + 1}{2x^2}$$

El giro de la curva se hace alrededor del eje y.

El área de la superficie de revolución, es:

$$A_S = 2\pi \int_1^2 x\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2\pi \int_1^2 x\left(\frac{x^4 + 1}{2x^2}\right) dx,$$

$$A_S = \left[\frac{1}{4}x^4 + ln\, x\right]_1^2 = \pi\left[\frac{1}{4}(16) + ln\, 2 - \frac{1}{4} - ln\, 1\right],$$

$$A_S = \left(\frac{15}{4} + ln\, 2\right) \text{ unidades de superficie.}$$

Nótese que se ha integrado por "x", aunque el giro se hace alrededor del eje y; "x" es la distancia del elemento diferencial al eje de giro.

NOTA

Si la curva Γ esta definida paramétricamente por $x = x(t)$; $y = y(t)$; $t_1 < t < t_2$; y, además, $x(t)$; $y(t)$ son continuas en $[t_1, t_2]$, entonces, el área de superficie de revolución cuando Γ gira alrededor del eje x, se calcula por medio de la siguiente integral definida:

$$A_S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$$

Si el giro se hace alrededor del eje y, entonces, el área de superficie de revolución se calcula por medio de la siguiente integral:

$$A_S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$$

Problema 41

Calcular el área de superficie del solido generado por la siguiente cicloide (ver Figura 71):
$x = t-$ sen t; $y = 1 - \cos t$; $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solución

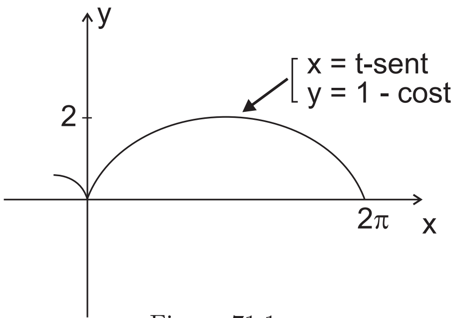


Figura 71.1

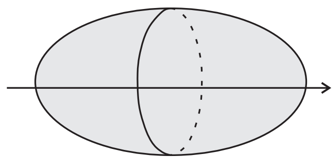


Figura 71.2

Figura 71. Cálculo del área de superficie: problema 41

De las ecuaciones paramétricas $x = t-$ sent; $y = 1 - \cos t$, se tiene:

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t,$$
$$\frac{dy}{dt} = \cos t.$$

Entonces,

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(1-\cos t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2} = \sqrt{2(1-\cos t)}.$$

Por tanto, el área de superficie, es:

$$A_S = 2\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)}\, dt,$$
$$A_S = 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^{\frac{3}{2}} dt,$$
$$A_S = 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\, \operatorname{sen}^3 \frac{t}{2} dt = 8\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 \frac{t}{2}\, dt,$$
$$A_S = 8\pi \left[-2\cos t - \frac{t}{2} + \frac{2}{3}\cos^3 \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8\pi \left[-2(-1) - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3}\right],$$
$$A_S = 8\pi \left(4 - \frac{4}{3}\right) = \frac{64}{3}\pi.$$

El área de revolución vale $\dfrac{64}{3}\pi$ unidades de superficie.

Problema 42

Calcular el área de superficie que se obtiene al girar la curva $4y = x^2 - 2\,ln\,x$, desde $x = 1$ hasta $x = 4$, cuando gira alrededor del eje y (ver Figura 72).

Solución

De $4y = x^2 - 2\,ln\,?$x, se obtiene $y = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}\,ln\,x$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x},$$
$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}\right)^2},$$
$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}\right)^2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}.$$

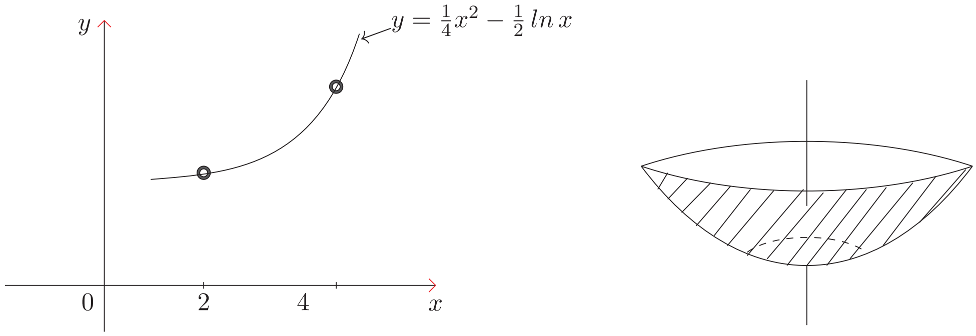


Figura 72.1 Figura 72.2

Figura 72. Cálculo del área de superficie: problema 42

Por tanto, el área de superficie es:

$$A_S = 2\pi \int_1^4 x\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}\right)dx = 2\pi \int_1^4 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)dx,$$
$$A_S = 2\pi \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x\right]_1^4 = 2\pi \left[\frac{1}{6}(64) + 2 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right],$$
$$A_S = 2\pi(12) = 24\pi \text{ unidades de superficie.}$$

Ejercicios propuestos 3.5

Determinar el área de superficie generada, por la rotación del arco que se da, en cada caso, alrededor del eje que se indica (unidades de superficie):

1) $y = \dfrac{1}{3}x^3$ desde $x = 0$ a $x = 3$; eje x.

2) $y = ln\, x$ desde $x = 1$ a $x = 7$; eje y.

3) $y^3 = x$ desde $y = 0$ a $y = 3$; eje y.

4) $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2 \text{ sen } t - \text{sen } 2t) \end{cases}$; eje x.

5) $3x^2 + 4y^2 = 3a^2$; eje x.

6) $3x^2 + 4y^2 = 3a^2$; eje y.

7) $\begin{cases} x = e^t \text{sen } t \\ y = e^t \cos \end{cases}$; desde $t = 0$ a $t\dfrac{\pi}{2}$; eje x.

8) $y^2 = 24 - 4x$ desde $x = 3$ hasta $x = 6$.

3.6. Centro de gravedad

3.6.1. Sólido de revolución

El Centro de Gravedad es el punto de equilibrio de un cuerpo, sistema o estructura y, por tanto, está directamente relacionada con la estabilidad del mismo. El centro de gravedad también es conocido como Centro de Balance o Centro de Equilibrio.

El Centro de Gravedad de una región plana se llama *Centroide*, si la función de distribución de masa de esa región (lamina delgada) es uniforme o constante. Se denota por $(\overline{x}, \overline{y})$ (ver Figura 73).

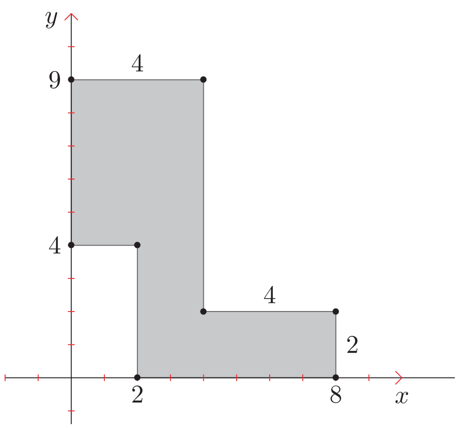


Figura 73.1

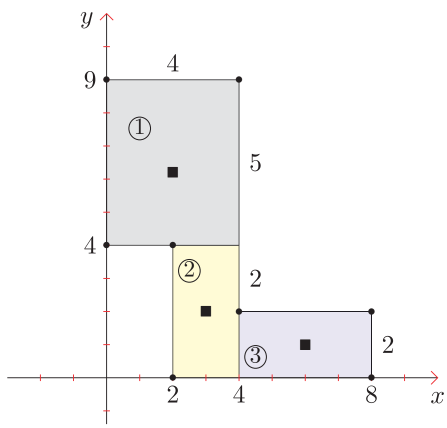


Figura 73.2

Figura 73. Centro de gravedad

Desde un punto de vista estrictamente físico, si una región uniforme plana (ver Figura 73.1) se puede subdividir en rectángulos (ver Figura 73.2), es posible calcular el Centroide de la región.

Al considerar que el Centroide de un rectángulo es el punto localizado en el corte de sus diagonales, se procede de la siguiente manera:

1) Calcular los momentos de superficie respecto al eje x, el cual, es la suma de los productos de cada área rectangular por la distancia al eje x del Centroide respectivo.

   Entonces:

$$\begin{aligned}
&\text{Áreas: } A_1 = 5(4) = 20;\ A_2 = 2(4);\ A_3 = 4(2) = 8.\\
&A_T = 20 + 8 + 8 = 36.\\
&\text{Centroides: } (2,6);\ (3,2);\ (6,1).\\
&M_X = 20(6,5) + 8(2) + 8(1) = 154.
\end{aligned}$$

   Consecuentemente,

$$M_y = 20(2) + 8(3) + 8(6) = 112.$$

2) Las coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$ del Centroide se calculan como sigue:

$$\begin{aligned}
&A_T\,\overline{x} = M_y;\ \overline{x} = \frac{M_y}{A_T} = \frac{112}{36} = \frac{28}{9} \approx 3,11,\\
&A_T\,\overline{y} = M_x;\ \overline{y} = \frac{M_x}{A_T} = \frac{154}{36} = \frac{77}{18} \approx 4,277,\\
&(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{28}{9}, \frac{77}{18}\right).
\end{aligned}$$

   Los conceptos de Momento de Superficie de cada subregión, permiten calcular el Centroide de una región plana limitada por las curvas de las funciones dadas.

3.6.2. Cálculo del Centroide de áreas planas por medio de integrales

Considérese la región plana uniforme R limitada por $y = f(x)$, al eje x entre $x = a$ y $x = b$. Subdivídase R en "n" rectángulos de base Δx_i.

El rectángulo elemental (ver Figura 74) tiene base dx, altura y, centroide $C(h,k)$.

El área del rectángulo elemental, es:

$$dA = ydx;\ h = x;\ k = \frac{1}{2}y. \tag{1}$$

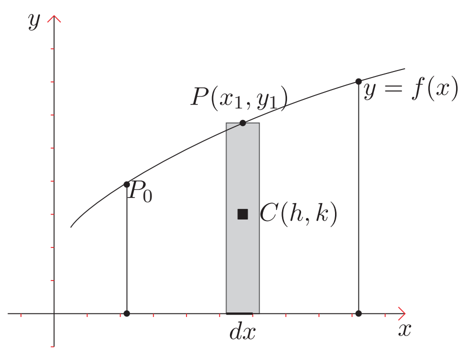


Figura 74. Cálculo del Centroide de áreas planas por medio de integrales

El Momento de Superficie de este rectángulo elemental con respecto a x, es:

$$dM_x = kdA. \tag{2}$$

Y el Momento de Superficie del mismo rectángulo elemental con respecto a y es

$$dM_y = hdA. \tag{3}$$

De manera que el momento total de R, es la suma de los momentos de los rectángulos elementales, así:

$$M_x = \int_a^b kdA \quad \text{y} \quad M_y = \int_a^b hdA.$$

Finalmente, si $(\overline{x}, \overline{y})$ es el Centroide de R, siendo A su área, entonces,

$$A\overline{x} = M_y; \;\; A\overline{y} = M_x.$$

Pero según las expresiones (1) y (2),

$$A\overline{x} = M_y = \int_a^b hdA = \int_a^b xydx.$$

Entonces,

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b xydx}{A} \quad \text{o} \quad \overline{x} = \frac{\int_a^b xf(x)}{A}.$$

De la misma manera,

$$A\overline{y} = M_x = \int_a^b kdA = \frac{1}{2}\int_a^b yydx = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx.$$

Por tanto,

$$\overline{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{A} \quad \text{ó} \quad \overline{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx}{A}$$

De manera que, las coordenadas del Centroide de la región R son $(\overline{x}, \overline{y})$, donde:

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b xf(x)}{A}; \quad \overline{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx}{A}.$$

NOTAS

1) Si la región plana uniforme R está limitada por las curvas $y = f(x)$; $y = g(x)$, continuas y $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, entonces, el Centroide $(\overline{x}, \overline{y})$ se calcula mediante las siguientes integrales definidas (ver Figura 75):

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\;dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)]\;dx},$$

$$\overline{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b x\left[f^2(x) - g^2(x)\right]\;dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)]\;dx}.$$

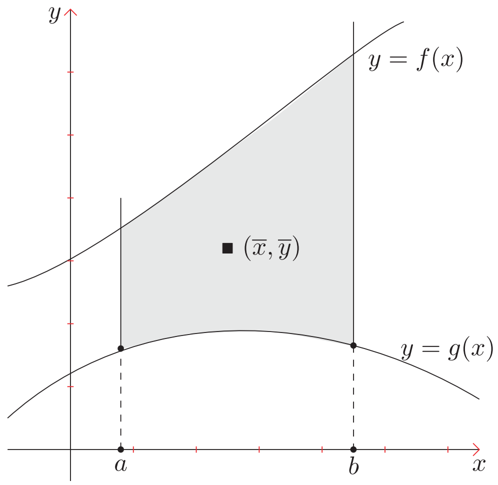


Figura 75. Centroide de región plana uniforme

2) Se realizan consideraciones análogas si las funciones son $x = g(y)$; $y = h(y)$; es decir, son dependientes de "y".

Problema 44

Determinar las coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$ del centroide de la región plana limitada por $y = 6x - x^2$; $y = x$.

Solución

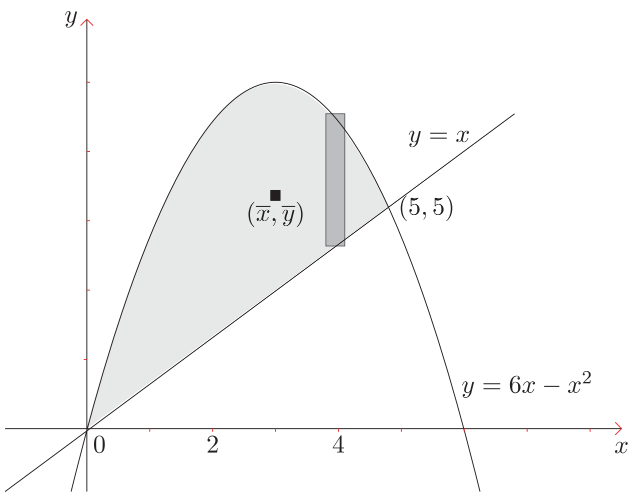


Figura 76. Centroide de áreas planas: problema 44

Las curvas $y = 6x - x^2$; $y = x$ se cortan en el punto $(5, 5)$ (ver Figura 76). Entonces, se calculan las siguientes integrales:

$$A = \int_0^5 \left[\left(6x - x^2\right) - x\right] \, dx = \int_0^5 \left(-x^2 + 5x\right) \, dx,$$

$$A = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right]_0^5 = \frac{126}{6},$$

$$M_y = \int_0^5 x \left[\left(6x - x^2\right) - x\right] \, dx,$$

$$M_y = \int_0^5 \left(-x^3 + 5x^2\right) \, dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3\right]_0^5 = \frac{625}{12},$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^5 \left[\left(6x - x^2\right)^2 - x^2\right] \, dx,$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^5 \left(35x^2 - 12x^3 + x^4\right) \, dx = \left[\frac{35}{3}x^3 - 3x^4 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^5 = \frac{625}{6},$$

Por tanto,

$$\overline{x} = \frac{M_y}{A} \frac{\frac{625}{12}}{\frac{125}{6}} = \frac{5}{2},$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{A} \frac{\frac{625}{6}}{\frac{125}{6}} = 5.$$

En consecuencia,

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{5}{2}, 5\right).$$

Problema 45

Determinar el Centroide de la región limitada por las siguientes curvas (ver Figura 77):

$$x^2 = 8y; \; y = 0; \; x = 4.$$

Solución

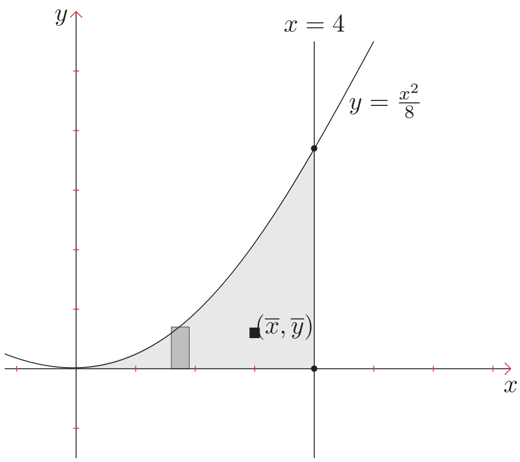


Figura 77.1

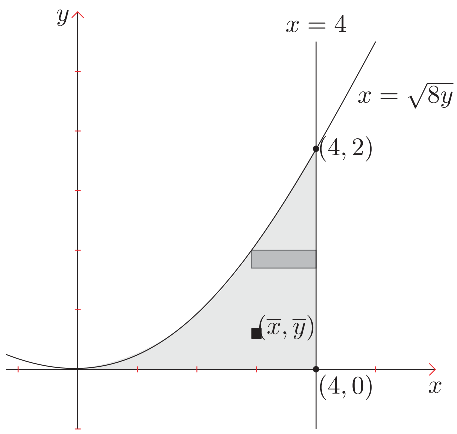


Figura 77.2

Figura 77. Centroide de áreas planas: problema 45

a) Por elementos verticales de áreas:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{8}\int_0^4 x^2\,dx = \frac{1}{24}\left[x^3\right]_0^4 = \frac{64}{24} = \frac{8}{3},\\
M_y &= \frac{1}{8}\int_0^4 xx^2dx = \frac{1}{8}\int_0^4 x^3\,dx = \frac{1}{32}\left[x^4\right]_0^4 = \frac{256}{32} = 8,\\
M_x &= \frac{1}{2}\int_0^4 \left(\frac{1}{3}x^2\right)^2 dx = \frac{1}{128}\times\frac{1}{5}\left[x^5\right]_0^4 = \frac{1024}{(128)(5)} = \frac{8}{5}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{M_y}{A} = \frac{8}{\frac{8}{3}} = 3,\\
\overline{y} &= \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

El Centroide tiene las siguientes coordenadas:

$$(\overline{x},\overline{y}) = \left(3, \frac{3}{5}\right).$$

b) Elementos de área horizontales

$$A = \int_0^2 \left(4 - \sqrt{8y}\right) dy = \left[4y - \frac{2}{3}\sqrt{8}y^{\frac{2}{3}}\right]_0^2,$$
$$A = 4(2) - \frac{2}{3}\sqrt{8}\sqrt{8} = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3},$$
$$M_y = \int_0^2 y\left(4 - \sqrt{8y}\right) dy = \left[2y^2 - \frac{2}{5}\sqrt{8}y^{\frac{2}{5}}\right]_0^2 = 8 - \frac{32}{5} = \frac{8}{5},$$
$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^2 \left[4 - \left(\sqrt{8y}\right)^2\right] dy = \frac{1}{2}\int_0^2 (16 - 8y)dy = \frac{1}{2}\left[16y - 4y^2\right]_0^2 = 8.$$

Por tanto,

$$\overline{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{8}{\frac{8}{3}} = 3,$$
$$\overline{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{5}.$$

El Centroide está localizado en las siguientes coordenadas:

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(3, \frac{3}{5}\right).$$

Problema 46

Determinar el Centroide de la región del primer cuadrante limitada por el círculo: $x^2+y^2 = r^2$.

Solución

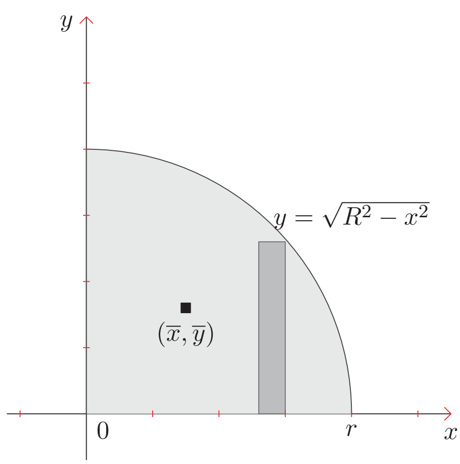


Figura 78. Centroide de áreas planas: problema 46

Se utilizan elementos verticales de área: $A = \dfrac{1}{4}\pi r^2$; pues, se trata de la cuarta parte del área del circulo $x^2 + y^2 = r^2$ (ver Figura 78).

Por otra parte, la región estudiada es simétrica respecto del origen; por lo cual, $\overline{x} = \overline{y}$.

Entonces,

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^r \left(r^2 - x^2\right) dx,$$
$$M_x = \frac{1}{2}\left[r^2 x - \frac{1}{3}r^3\right]_0^r = \frac{1}{2}\left[r^3 - \frac{1}{3}r^3\right] = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}r^3 = \frac{1}{3}r^3.$$

En consecuencia,

$$\overline{x} = \overline{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{1}{3}r^3}{\frac{1}{4}\pi r^2} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Luego,

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{4r}{3\pi}, \frac{4r}{3\pi}\right).$$

Problema 47

Determinar el Centroide de la región limitada por los ejes coordenados y la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

Solución

La región es simétrica respecto al origen de coordenadas, por lo cual, $\overline{x} = \overline{y}$ (ver Figura 79).

Al utilizar elementos verticales de área, se tiene,

$$A = \int_0^a \left(a - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + x\right) dx = \left[ax - 2\sqrt{a} \times \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{1}{2}x^2\right]_0^a = a^2 - \frac{4}{3}a^2 + \frac{1}{2}a^2,$$
$$A = \frac{1}{6}a^2.$$

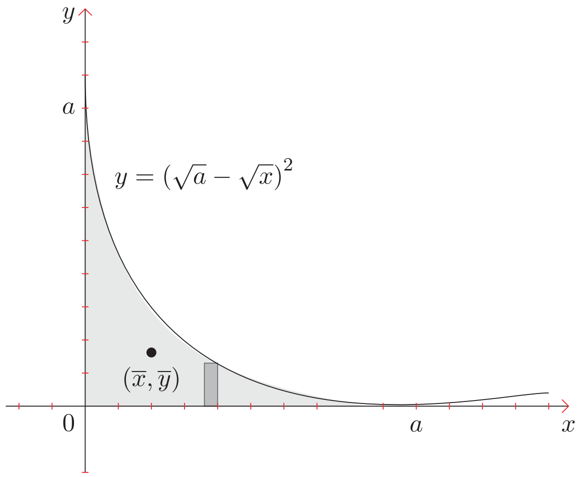


Figura 79. Centroide de áreas planas: problema 47

Debido a la simetría, es posible calcular M_x o M_y; en este caso, se opta por M_y.

$$M_y = \int_0^a x\left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2 dx = \int_0^a \left(ax - 2\sqrt{a}\sqrt{x^3} + x^2\right) dx,$$

$$M_y = \left[\frac{a}{2}x^2 - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}x^3\right]_0^a = \frac{a^3}{2} - \frac{4}{5}a^3 + \frac{1}{3}a^3,$$

$$M_y = \frac{1}{30}a^3.$$

En consecuencia,

$$\overline{x} = \overline{y} = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{1}{30}a^3}{\frac{1}{6}a^2} = \frac{1}{5}a.$$

Por tanto,

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{1}{5}a,\ \frac{1}{5}a\right).$$

Problema 48

Determinar el Centroide de la región plana limitada por las siguientes curvas (ver Figura 80): $y^2 = 4x$ y $y = 2x - 4$.

Solución

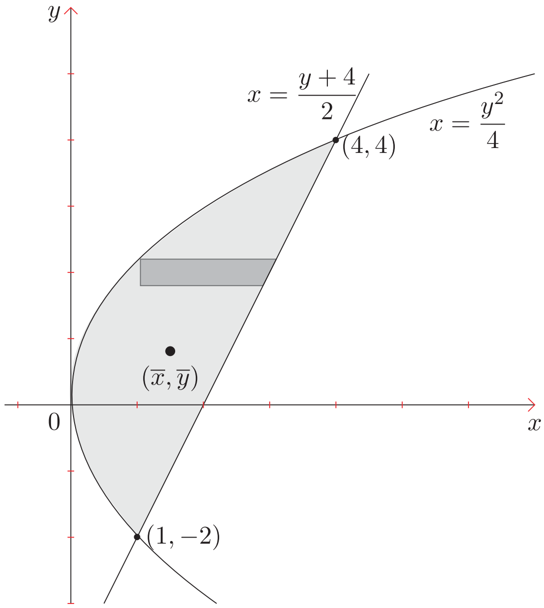


Figura 80. Centroide de áreas planas: problema 48

Es conveniente integrar por "y", es decir utilizar elementos horizontales de área. De acuerdo al Problema 2 del parágrafo 3.1 (p.95), el área de la región es $A = 9$ unidades cuadradas.

$$M_y = \int_{-2}^{4} y\left[\frac{1}{2}(y+4) - \frac{1}{4}y^2\right] dy,$$

$$M_y = \int_{-2}^{4} \left[\frac{1}{2}y^2 + 2y - \frac{1}{4}y^3\right] dy = \left[\frac{1}{6}y^3 + y^2 - \frac{1}{16}y^4\right]_{-2}^{4} = 9,$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{4} \left\{\left[\frac{1}{2}(y+4)\right]^2 - \left[\frac{1}{4}y^2\right]^2\right\} dy,$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{4} \left(\frac{1}{4}y^2 + 4y + 8 - \frac{1}{16}y^4\right) dy = \left[\frac{1}{12}y^3 + 2y^2 + 8y - \frac{1}{80}y^5\right]_{-2}^{4} = \frac{77}{5}.$$

Por tanto,

$$\overline{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{77}{5}}{9} = \frac{77}{45},$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{9}{9} = 1.$$

En consecuencia,

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{77}{45}, 1\right).$$

Problema 49

Determinar las coordenadas del Centroide del polígono de vértices $0(0,0)$; $A(0,2)$; $B(2,3)$; $C(4,1)$ y $D(4,0)$ (ver Figura 81).

Solución

Se deben determinar las ecuaciones de las rectas que forman el polígono, así:

- Recta que pasa por A y B:

$$m_{AB} = \frac{3-2}{2-0} = \frac{1}{2}.$$

Ecuación:

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x-0),$$
$$y = \frac{1}{2}x + 2.$$

- Recta que pasa por B y C:

$$m_{BC} = \frac{3-1}{2-4} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Ecuación:

$$y - 3 = -1(x-2),$$
$$y = -x + 5.$$

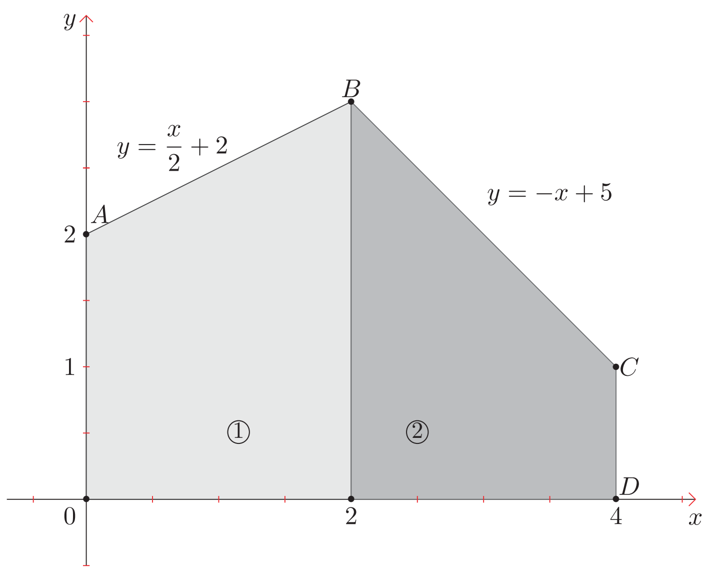


Figura 81. Centroide de áreas planas: problema 49

Para calcular el área total, se deben calcular A_1 y A_2, así:

$$A_1 = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x + 2\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^2 + 2x\right]_0^2 = 5.$$

$$A_2 = \int_1^4 (-x+5)dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 5x\right]_2^4 = 4.$$

Luego,

$$A = A_1 + A_2 = 5 + 4 = 9.$$

Calcular los momentos de superficie:

$$M_y = \int_0^2 x\left(\frac{1}{2}x + 2\right) dx + \int_2^4 x(-x+5)\, dx$$

$$M_y = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x\right) dx + \int_2^4 (-x+5x)\, dx$$

$$M_y = \left[\frac{1}{6}x^3 + x^2\right]_0^2 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right]_2^4 = \frac{16}{3} + \frac{34}{3} = \frac{50}{3}$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(\frac{1}{2}x + 2\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_2^4 (-x+5)\, dx$$

$$M_x = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}x + 2\right)^3\right]_0^2 - \frac{1}{6}\left[(-x+5)^3\right]_2^4 = \frac{19}{3} + \frac{13}{3} = \frac{32}{3}$$

Entonces,

$$\overline{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{50}{3}}{9} = \frac{50}{27},$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{32}{3}}{9} = \frac{32}{27}.$$

En consecuencia,

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{50}{27}, \frac{32}{27}\right).$$

Ejercicios propuestos 3.6

Determinar el Centroide de las regiones planas uniformes limitadas por las siguientes curvas:

1) $x = 4y - y^2;\ y = x$.

2) $y = x^2 - 2x - 3;\ y = -x^2 + 6x - 3$.

3) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ primer cuadrante.

4) $x^2 + y^2 = 1;\ x + y = 1$ primer cuadrante.

5) $y = \operatorname{sen} x;\ y = \cos x;\ 0 \le x \le 2\pi$.

6) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ primer cuadrante .

7) Polígonos de vértices: $(0,0)$; $(0,1)$; $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $(1,1)$; $(1,0)$.

Respuestas Ejercicios propuestos Capítulo 3

Respuestas ejercicios propuestos 3.1

1)

a) $\frac{125}{6}$. b) $\frac{e^2+1}{e^2-2}$. c) $\frac{1}{2} \ln 2$. d) πr^2.

e) $\frac{46}{3}$. f) 2. g) $\frac{41}{2}$. h) 7, 93.

2)

a) $\frac{3\pi a^2}{8}$. b) 3π.

3)

a) πr^2. b) $\frac{3}{2}\pi a^2$. c) $\frac{\pi}{4} a^2$.

Respuestas ejercicios propuestos 3.2

1)

a) $\frac{2048}{5}\pi$. b) 16π. c) 4π. d) $\frac{32}{3}\pi$. e) $\frac{1792}{15}\pi$.

2)

a) 32π. b) $128\sqrt{3}\pi$. c) $\frac{5\pi}{6}$. d) $\pi\left(1 - \frac{1}{e}\right)$. e) 24π.

3)

a) 2π. b) $\frac{\pi}{4}\left(1 + 3e^4\right)$.

4)

a) 16π. b) $\frac{3\pi}{2}\left(e^2 - 1\right)$.

Respuestas ejercicios propuestos 3.3

1)

a) $\frac{4}{3}r^3$. b) $\frac{8}{3}r^3$.

2)

a) $1333\ \text{cm}^3$. b) $577,3\ \text{cm}^3$.

3) $\frac{5\pi}{6}\ \text{cm}^3$. **4**) $\frac{4\pi}{3}r^3$. **5**) $\frac{4\pi}{3}\,abc$.

Respuestas ejercicios propuestos 3.4

1) $6a$. 2) $\frac{1}{27}\left(104\sqrt{3}-125\right)$. 3) 14. d) $\frac{\sqrt{3}}{3}ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

5) $6\sqrt{2}+6\,ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

6)

a) $\sqrt{2}\left(e^4-1\right)$. b) 8. c) $\frac{\pi}{4}$.

7)

a) 8. b) $\sqrt{2}\left(e^{2\pi}-1\right)$. c) $2\pi r$.

Respuestas ejercicios propuestos 3.5

1) $\frac{\pi}{9}\ \left(82\sqrt{82}-1\right)$. 2) $\left(34\sqrt{2}+ln\left(3+2\sqrt{2}\right)\pi\right)$. 3) $\frac{\pi}{27}\left(730\sqrt{730}-1\right)$.

4) $\frac{64}{3}\pi a^2$. 5) $\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\ \pi a^2$. 6) $(4+3\,ln\,3)\frac{\pi a^2}{2}$.

7) $\frac{2\sqrt{2}}{5}\pi\left(e^{\pi}-2\right)$. 8) $\frac{56}{3}\pi$.

Respuestas ejercicios propuestos 3.6

1) $\left(\frac{12}{5},\frac{3}{2}\right)$. 2) $(2,1)$. 3) $\left(\frac{4a}{3\pi},\frac{4b}{3\pi}\right)$.

4) $\left(\frac{2}{3(\pi-2)},\frac{2}{3(\pi-2)}\right)$. 5) $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)\ \pi a^2$. 6) $\left(\frac{9}{5},-\frac{9}{10}\right)$.

7) $\left(\frac{24a^3}{315},\frac{24a^3}{315}\right)$. 8) $\left(\frac{1}{2},\frac{7}{18}\right)$.

Capítulo 4

Integrales impropias

Capítulo 4

Integrales impropias

Para la definición de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Se aseguró inicialmente que la función integrando $f(x)$ era continua en un intervalo $[a, b]$ de números reales y no se mencionó que eventualmente que los límites a o b o ambas sean infinitos.

Cuando se presenta la circunstancia que $f(x)$ sea discontinua en uno o varios puntos de $[a, b]$ o que, por lo menos alguno de los límites de integración sea infinito, entonces aparecen las integrales impropias.

4.1. Definición

La siguiente integral definida, denomina Integral Impropia, si,

$$I = \int_a^b f(x)\ dx$$

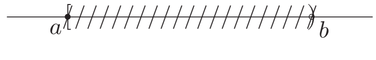
a) $f(x)$ tiene uno o más puntos de discontinuidad en el intervalo $[a, b]$.

b) Al menos uno de los límites de integración es infinito.

4.2. Definición integrando discontinuo

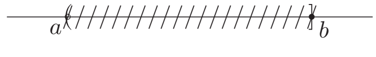
1) Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, pero discontinua en $x = b$, entonces,

$$I = \int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \text{ si limite existe.}$$



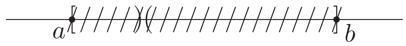
2) Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, pero discontinua en $x = a$, entonces,

$$I = \int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\delta\to 0^+} \int_{a+\delta}^{b} f(x)\ dx \text{ si limite existe.}$$



3) Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, excepto en $x = c$ $a < c < b$, entonces,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,\\
I &= \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\delta\to 0^+}^b f(x)\,dx \text{ si los limites existen,}
\end{aligned}
$$



NOTA

Si el límite existe, se dice que la integral converge; si el límite no existe o es infinito, la integral diverge.

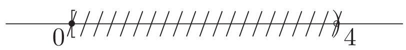
Problema 49

Calcular las siguientes integrales impropias:

$$
\begin{array}{lll}
1)\ \displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} & 2)\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1-\ \operatorname{sen} x}} & 3)\ \displaystyle\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}\\
4)\ \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^5 \frac{dx}{\sqrt{4x-2}} & 5)\ \displaystyle\int_0^1 x\,ln\,x\,dx & 6)\ \displaystyle\int_0^5 \frac{dx}{(x-3)^2}
\end{array}
$$

Solución

1) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

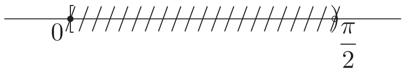


El integrando $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$, presenta una discontinuidad en $x = 4$.
Por consiguiente, de acuerdo a la definición 4.2, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{4-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[arcsen\,\frac{x}{4} \right]_0^{4-\varepsilon},\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[arcsen\,\frac{4-\varepsilon}{4} - arcsen\,\frac{0}{4} \right] = arcsen\,\frac{4}{4} = arcsen\,1,\\
&\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$ vale $\dfrac{\pi}{2}$.

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1-\ \operatorname{sen} x}}$.
La función integrando,
El integrando $\dfrac{\cos x\,dx}{\sqrt{1-\ \operatorname{sen} x}}$, tiene una discontinuidad en $\dfrac{\pi}{2}$, pues, en sen $\dfrac{\pi}{2} = 1$.



Por tanto,

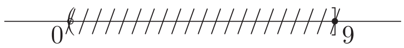
$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1-\ \text{sen }x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \cos x(1-\ \text{sen }x)^{-\frac{1}{2}} dx,\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[2(1-\ \text{sen }x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon},\\
&-2\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\left(1-\ \text{sen }\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)-(1-\ \text{sen }0)\right)\right],\\
&= -2\left[\left(1-\ \text{sen }\frac{\pi}{2}\right)-1\right] = -2\left[(1-1)-1\right],\\
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1-\ \text{sen }x}} = 2.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1-\ \text{sen }x}} \text{ vale } 2.$$

3) $\displaystyle\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

La función integrado $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, no es continua en el limíte inferior $x=0$.

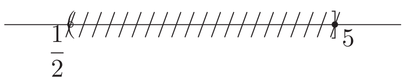


Por tanto,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^9 x^{-\frac{1}{2}} dx\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[x^{\frac{1}{2}}\right]_0^9\\
&= 2\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[9^{\frac{1}{2}}-(0+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\right] = 2[3-0] = 6\\
&\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 6
\end{aligned}
$$

4) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^5 \frac{dx}{\sqrt{4x-2}}$

La función integrando $\dfrac{1}{\sqrt{4x-2}}$, tiene discontinuidad en el límite inferior $x=\dfrac{1}{2}$.

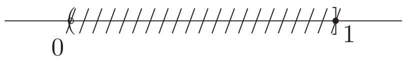


Por tanto,

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{5} \frac{dx}{\sqrt{4x-2}} &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^{5} \frac{dx}{\sqrt{4x-2}}, \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^{5} (4x-2)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{4} \times 2 \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[(4x-2)^{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^{5}, \\
&= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left\{[4(5)-2]^{\frac{1}{2}} - \left[4\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)-2\right]\right\}, \\
&= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[18^{\frac{1}{2}} - 0^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{18} = \frac{3}{2}\sqrt{2}, \\
\int_{\frac{1}{2}}^{5} \frac{dx}{\sqrt{4x-2}} &= \frac{3}{2}\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

5) $\displaystyle\int_0^1 x \, ln \, x \, dx.$

La función integrando $f(x) = x\,ln\,x$, es discontinua en el límite inferior $x = 0$.



Por definición 4.2, se tiene,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x\,ln\,x\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^1 x\,ln\,x\,dx, \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{1}{2}x^2\left(ln\,x - \frac{1}{2}\right)\right]_{\varepsilon}^{1} = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[ln\,1 - \frac{1}{2} - \varepsilon^2 ln\,\varepsilon - \frac{1}{2}e^2\right].
\end{aligned}
$$

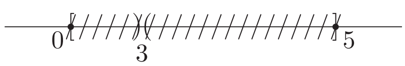
Al calcular $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^2\,ln\,\varepsilon$, se tiene,

$$
\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^2\,ln\,\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\frac{1}{e}}{-\frac{1}{2}} = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{\varepsilon^2}{2}\right) = 0.
$$

Luego, $\displaystyle\int_0^1 x\,ln\,x\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$

6) $\displaystyle\int_0^5 \frac{dx}{(x-3)^2}$

La función integrando $\dfrac{1}{(x-3)^2}$, presenta discontinuidad en $x = 3$.



Dado que, $3 \in [0,5]$, entonces, de acuerdo a la definición 4.2 se tiene:

$$\int_0^5 \frac{dx}{(x-3)^2} = \int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2} + \int_0^5 \frac{dx}{(x-3)^2},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{3-\varepsilon} \frac{dx}{(x-3)^2} + \lim_{\delta\to 0^+} \int_{3+\delta}^5 \frac{dx}{(x-3)^2},$$

$$\int_0^5 \frac{dx}{(x-3)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{1}{x-3}\right]_0^{3-\varepsilon} - \lim_{\delta\to 0^+} \left[\frac{1}{x-3}\right]_{3+\delta}^5,$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\left(\frac{1}{3-\varepsilon-3}\right) + \frac{1}{3}\right] - \lim_{\delta\to 0^+} \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3+\delta-3}\right)\right],$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{3}\right) - \lim_{\delta\to 0^+} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\delta}\right).$$

Como los limites no existen, entonces se concluye que la integral diverge. Vale anotar que, si una de las integrales de la suma diverge, entonces toda la integral diverge.

Ahora bien, dado que la integral definida es sinónimo de área; entonces, al graficar la función:

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}.$$

se establece que $x = 3$ es asíntota vertical (Figura 82).

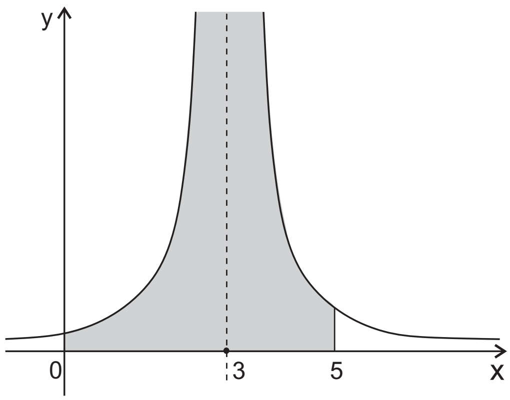


Figura 82. Integral impropia divergente

De manera que, no es posible calcular el área mediante la integral definida (ver Figura 82). Si no se tuviera en cuenta que en $x = 3$, existe discontinuidad, entonces, se habría obtenido que:

$$\int_0^5 \frac{dx}{(x-3)^2} = -\left[\frac{1}{x-3}\right]_0^5 = -\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right] = -\frac{5}{6},$$

resultado que es absurdo, puesto que, el área siempre es un número positivo.

Problema 50

Calcular las integrales impropias:

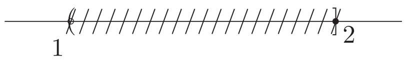
1) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. 2) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}$. 3) $\displaystyle\int_{-4}^{4} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

4) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{dx}{x(x-4)}$. 5) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\,ln\,x\,dx$.

Solución

1) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

El integrando $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ tiene discontinuidad en $x=1$; $1 \in [1,2]$.



Por tanto, $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Dado que, la primitiva es,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = arcsen\,x,$$

Entonces, al aplicar la definición 4.2, se tiene,

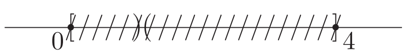
$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} [arcsen\,x]_1^2 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} [arcsen\,2 - arcsen\,(1+\varepsilon)]$$
$$= arcsen\,2 - arcsen\,1 = \frac{\pi}{3}$$

Por tanto, $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{3}$

Esto es,la integral $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ converge y vale $\dfrac{\pi}{3}$.

2) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}$.

El integrando $f(x) = \dfrac{dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}$ presenta una discontinuidad en $x=2$.



Entonces,

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}} = \int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}} + \int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}},$$

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}} + \lim_{\delta\to 0^+} \int_{2+\delta}^4 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}},$$

$$= 3\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[(x-2)^{\frac{1}{3}}\right]_0^{2-\varepsilon} + 3\lim_{\delta\to 0^+} [x-2]_{2+\delta}^4,$$

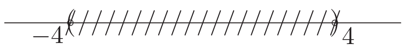
$$= 3\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[(2-\varepsilon-2)^{\frac{1}{3}} - (-2)^{\frac{1}{3}}\right] + 3\lim_{\delta\to 0^+} \left[(4-2)^{\frac{1}{3}} - (2+\delta-2)^{\frac{1}{3}}\right],$$

$$= 3\left[0+2^{\frac{1}{3}}\right] + 3\left[2^{\frac{1}{3}} - 0\right] = 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2}.$$

Finalmente, $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}} = 6\sqrt[3]{2}.$

3) $\displaystyle\int_{-4}^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}.$

La función $\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$, tiene discontinuidad en los extremos del intervalo $[-4,4]$.



Por tanto,

$$\int_{-4}^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \int_{-4}^0 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} + \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}},$$

$$\int_{-4}^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-4+\varepsilon}^0 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} + \lim_{\delta\to 0^+} \int_0^{4-\delta} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}},$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[arcsen\frac{x}{4}\right]_{-4+\varepsilon}^0 + \lim_{\delta\to 0^+} \left[arcsen\frac{x}{4}\right]_0^{4-\delta},$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[arcsen\,0 - arcsen\left(\frac{-4+\varepsilon}{4}\right)\right] + \lim_{\delta\to 0^+} \left[arcsen\left(\frac{-4-\delta}{4}\right) - arcsen\,0\right],$$

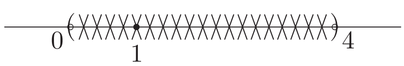
$$= 0 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi.$$

$$\int_{-4}^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \pi.$$

4) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{x(x-4)}.$

El integrando $\dfrac{1}{x(x-1)}$.

Presenta discontinuidad en $x=0,\ x=4$. Estos puntos hacen parte del intervalo $[0,4]$. Por tanto, dado que la función es continua en $(0,4)$, se divide la integral en dos partes, así:



$$\int_0^4 \frac{dx}{x(x-4)}dx = \int_0^1 \frac{dx}{x(x-4)}dx + \int_1^4 \frac{dx}{x(x-4)}dx.$$

$$\int_4^4 \frac{dx}{x(x-4)}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x(x-4)}dx + \lim_{\delta\to 0^+}\int_1^{4-\delta} \frac{dx}{x(x-4)}dx.$$

Como $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x-4)} = \frac{1}{4}\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)dx,$ entonces,

$$\int_0^4 \frac{dx}{x(x-4)}dx = \frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(ln\,|x-4| - ln\,|x|\right)|_\varepsilon^1 + \frac{1}{4}\lim_{\delta\to 0^+}\left(ln\,|x-4| - ln\,|x|\right)|_1^{4-\delta},$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(ln\,3 - ln\,|\varepsilon-4| - ln\,|\varepsilon|\right) + \frac{1}{4}\lim_{\delta\to 0^+}\left(ln\,|\delta| - ln\,|4-\delta| - ln\,3 + 0\right),$$

$$= -\infty - \infty = -\infty.$$

Por tanto, $\displaystyle\int_4^4 \frac{dx}{x(x-4)}dx$ diverge.

4.3. Definición límites de integración infinitos

1) Si la función es continua en el intervalo $[a,\infty)$, entonces,

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \text{ si limite existe.}$$

2) Si $f(x)$ es continua en el intervalo $(-\infty,b]$, entonces,

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \text{ si limite existe.}$$

3) Si $f(x)$ es continua en el intervalo $(-\infty,\infty)$, entonces,

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx,$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)dx \text{ si los limites existen.}$$

Cuando los limites existen, se dice que la integral impropia es **convergente**; si los limites no existen, se dice que la integral impropia es **divergente**.

Problema 51

Calcular las siguientes integrales impropias:

1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+4}$. 2) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{2x}dx$. 3) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}dx$.

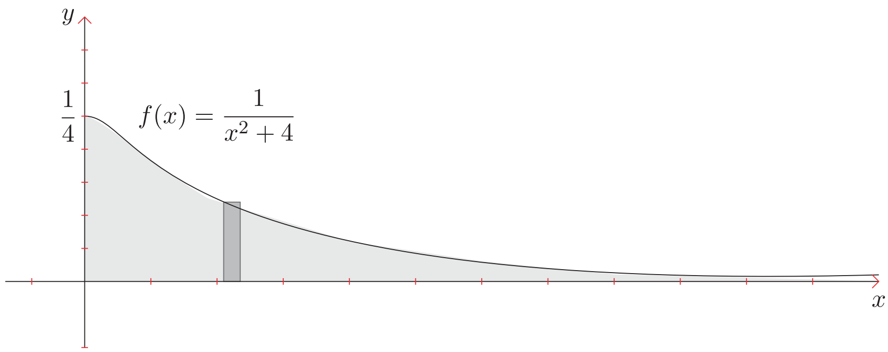
4) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$. 5) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{xdx}{x^2+4}$. 6) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Solución

1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4}$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4} &= \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{dx}{x^2+4}dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{2}\, arctg\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^b,\\ &= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} \left[arctg\left(\frac{b}{2}\right) - arctg\left(\frac{0}{2}\right)\right],\\ &= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} arctg\,\infty = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Por tanto, $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \frac{\pi}{4}$.



83. Cálculo de integrales impropias: problema 51, caso 1

En la Figura 83, se puede ver el área bajo la curva de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+4} \text{ entre } 0 \text{ e } \infty.$$

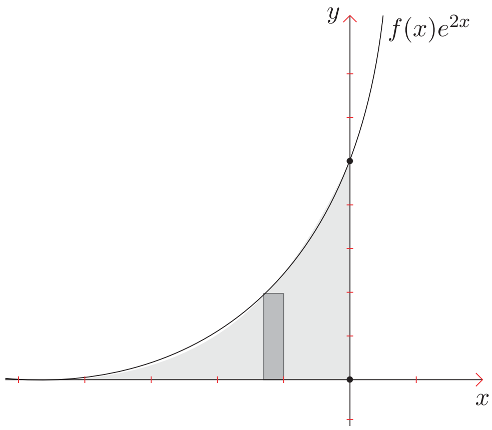
Nótese que el eje x es asíntota horizontal de la curva 2.

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}dx$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} e^{2x}dx &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 e^{2x} = \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty} \left[e^{2x}\right]_a^0,\\ &= \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty} \left[e^0 - e^{2a}\right] = \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty} \left[1 - e^{2a}\right],\\ &= \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Por tanto, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}dx = \frac{1}{2}$..

En la Figura 84, se puede ver la curva de $f(x) = e^{2x}$ entre los puntos $-\infty$ y 0. El área bajo la curva vale $\frac{1}{2}$ de unidades cuadradas. Igual que en el ejemplo 1, el eje x es asíntota.



84. Cálculo de integrales impropias: problema 51, caso 2

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx.$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx &= \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2} + \int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}dx,\\
&= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}\int_{a}^{0}(-2x)e^{-x^2}dx + \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}\int_{0}^{b}(-2x)e^{-x^2}dx,\\
&= -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left[e^{-x^2}\right]_a^0 - \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[e^{-x^2}\right]_0^b,\\
&= -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{e^{x^2}}\right]_a^0 - \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{e^{x^2}}\right]_0^b,\\
&= -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left[1-\frac{1}{e^{2a}}\right] - \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{e^{2b}}-1\right],\\
&= -\frac{1}{2}(1-0) - \frac{1}{2}(0-1),\\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.
\end{aligned}
$$

Entonces, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx = 0.$

Por tanto,la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx$ converge y vale 0.

4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)^2}.$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)^2} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{(x^2+1)^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)^2},\\
&= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{xdx}{(x^2+1)^2} + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{xdx}{(x^2+1)^2},\\
&= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{2} \int_{a}^{0} 2x\left(x^2+1\right)^{-2} dx + \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} \int_{0}^{b} 2x\left(x^2+1\right)^{-2} dx,\\
&= -\frac{1}{2} \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{x^2+1}\right]_a^0 - \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{x^2+1}\right]_0^b,\\
&= -\frac{1}{2} \lim_{a\to-\infty} \left[1 - \frac{1}{a^2+1}\right] - \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{b^2+1} - 1\right],\\
&= -\frac{1}{2}(1-0) - \frac{1}{2}(0-1),\\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Entonces, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)^2} = 0.$

Por tanto,la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$ converge y vale 0.

5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4}.$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{x^2+4} + \int_{0}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4},\\
&= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{2} \int_{a}^{0} \frac{2xdx}{x^2+4} + \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} \int_{0}^{b} \frac{2xdx}{x^2+4},\\
&= \frac{1}{2} \lim_{a\to-\infty} \left[ln\left(x^2+4\right)\right]_a^0 + \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left[ln\left(x^2+4\right)\right]_0^b,\\
&= \frac{1}{2} \lim_{a\to-\infty} \left[ln\,4 - ln\left(a^2+4\right)\right] + \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left[\left(b^2+4\right) - ln\,4\right],\\
&= -\infty + \infty.
\end{aligned}$$

Por tanto,la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4}$ diverge.

6) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

Esta integral impropia presenta una discontinuidad en el límite inferior $x = 0$; además, el límite superior es ∞. Para calcular su valor, se divide en dos integrales impropias, así:

$$\int_{0}^{-\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_{0}^{1} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx + \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \tag{A}$$

Dado que,

$$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = -2e^{-\sqrt{x}}$$

Entonces, se calcula por separado cada integral.

$$\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = -2\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[e^{-\sqrt{x}}\right]_\varepsilon^1,$$

$$\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = -2\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[e^{-1} - e^{-\sqrt{\varepsilon}}\right] = -2\left[e^{-1}-1\right] = -2e^1+2 \qquad \text{(B)}$$

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = -2\lim_{b\to\infty}\left[e^{-\sqrt{x}}\right]_1^b,$$

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = -2\lim_{b\to\infty}\left[e^{-\sqrt{b}} - e^{-1}\right] = -2\left[0-e^{-1}\right] = 2e^{-1} \qquad \text{(C)}$$

Al reemplazar (B) y (C) en (A), se obtiene:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = -2e^1+2+2e^{-1} = 2.$$

Por tanto, la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$, converge y vale 2.

NOTAS

1) Algunos autores, a las integrales impropias con integrando discontinuo en al menos un punto del intervalo de números reales $[a,b]$, denominan como *Integrales Impropias de Segunda Clase*; mientras que las integrales impropias con al menos un límite de integración ∞, las denominan como *Integrales Impropias de Primera Clase*.

2) Cuando en una integral impropia, alguno de sus límites es ∞ y $f(x)$ presenta al menos una discontinuidad en $[a,b]$, se la suele llamar *Integral Impropia de Tercera Clase*. (ver ejemplo 6).

4.4. Ejercicios propuestos Capítulo 4

A) Calcular las integrales impropias:

1) $\displaystyle\int_0^{100}\frac{dx}{\sqrt{100-x}}.$	2) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4-x2}}.$	3) $\displaystyle\int_0^1 ln\,x\,dx.$
4) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x^3+x}.$	5) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^3-x}.$	6) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos x\,dx}{1+\text{ sen } x}.$
7) $\displaystyle\int_0^{e}\frac{ln\,x}{\sqrt{x}}\,dx.$	8) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx.$	9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^4}+1}\,dx.$
10) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x dx}{1+e^{2x}}.$	11) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x\,ln^2 x}.$	12) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2e^{-x}dx.$

B) Determinar el área limitada por las siguientes curvas:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ a la derecha de $x = 3$.

2) $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)^2}$ a la derecha de $x = 2$.

4.5. Respuestas Ejercicios propuestos Capítulo 4

A)

1) 100.	2) π.	3) -1.	4) 1.	5) Diverge.	6) Diverge.
7) $-2\sqrt{e}$.	8) 1.	9) Diverge.	10) $\dfrac{\pi}{2}$.	11) $\dfrac{1}{ln\, 2}$.	12) 6.

B)

1) $\dfrac{1}{4}\, ln\, 5$ 2) $1 - ln\, 2$.

Bibliografía

Ayres, F. (1974). *Cálculo Diferencial e Integral.* México: McGraw-Hill.

Berman, G. (1977). *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático.* Moscú: Mir.

Casabianca, M. (1995). *Problemas Resueltos de Cálculo Diferencial.* Bogotá: Tercer Mundo Editores.

Demidovich, B. (1980). *Problemas y ejercicios de análisis matemático.* Moscú: Mir.

Edwards, C. & Penney, D. (1994). *Cálculo con Geometría Analítica.* Madrid: Prentice-Hall.

Fleming, W. & Varberg, D. (2003). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* México: Prentice - Hall.

Granville, W. (2009). *Cálculo diferencial e integral.* México: Limusa.

Leithold, L. (1995). *El Cálculo con Geometría Analítica.* Madrid: Harper.

Piskunov, N. (1979). *Cálculo diferencial e integral.* Tomo II. Moscú: Mir.

Purcell, E. & Varberg, D. (1992). *Cálculo con geometría Analítica.* México: Prentice-Hall.

Stewart, J. (1999). *Cálculo Diferencial e Integral.* México: Thompson.

Lecciones de Cálculo Integral

Primera impresión
Se terminó de imprimir en Xpress Estudio Gráfico y digital
para Universidad de Nariño Mayo de 2023
Bogotá, D.C. Colombia

Se utilizó papel Holmen Book 055gr Cream
y Holmen 300gr para la portada
Fuente roman 11 pt para interiores

El libro de texto *Lecciones de Cálculo Integral,* está diseñado para que estudiantes universitarios de las carreras Física, Ingeniería Civil, Electrónica y de Sistemas, y Licenciaturas de Matemáticas e Informática de la Universidad de Nariño, lo utilicen como texto guía o de consulta.

También puede ser utilizado por estudiantes de otras instituciones de nivel superior que ofrezcan carreras similares a las mencionadas o, de tipo técnico, en cuyo plan de estudios se incluya el *Cálculo Integral.*

Las temáticas tratadas en el texto corresponden a la que normalmente se ofrece en un curso de cálculo integral, a saber: técnicas de integración, integral definida y sus propiedades, aplicaciones de la integral definida y cálculo de integrales impropias.

Los lectores deben estar familiarizados con conceptos del *Cálculo Diferencial y de la Geometría Analítica.*

ISBN: 978-628-7509-45-0

9 786287 509450

Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1904

Universidad de Nariño
ACREDITADA DE ALTA CALIDAD
RESOLUCIÓN MEN 10567 - MAYO 23 DE 2017

Editorial
Universidad de Nariño