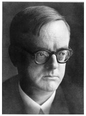
La superálgebra de Jordan $A[t]$

Olmer Folleco Solarte

Universidad del Cauca

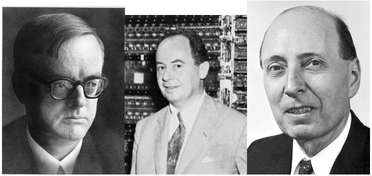
Agosto, 2014

Álgebras de Jordan

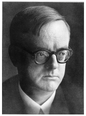


Las álgebras de Jordan aparecieron en 1933, en un trabajo del físico aleman Pascual Jordan sobre fundamentación axiomática de la mecanica quantica, para formalizar la noción de una álgebra de observables.

Posteriormente, Jordan, von Neumann y Wigner clasificaron las álgebras de Jordan de dimensión finita simples "formalmente reales".

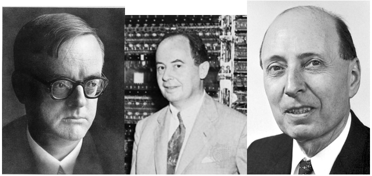


Álgebras de Jordan



Las álgebras de Jordan aparecieron en 1933, en un trabajo del físico aleman Pascual Jordan sobre fundamentación axiomática de la mecanica quantica, para formalizar la noción de una álgebra de observables.

Posteriormente, Jordan, von Neumann y Wigner clasificaron las álgebras de Jordan de dimensión finita simples “formalmente reales”.



Álgebras de Jordan

Todas las álgebras de Jordan de dimensión finita simples sobre un campo algebraicamente cerrado de característica diferente de 2 fueron clasificadas algunos años despues por Albert, usando el método del idempotente.

Despues de medio siglo de evolución, en que aparecieron importantes trabajos de N. Jacobson, K. McCrimmon, R. D. Schafer, K. A. Zhevlakov, A. M. Slin'ko, A. I. Shirshov e I. P. Shestakov, la teoría de las álgebras de Jordan culmina, en 1983, con el revolucionário resultado de E. I. Zel'manov, que clasifica las álgebras de Jordan simples en cualquier dimensión.

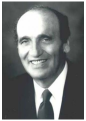
Álgebras de Jordan

Todas las álgebras de Jordan de dimensión finita simples sobre un campo algebraicamente cerrado de característica diferente de 2 fueron clasificadas algunos años despues por Albert, usando el método del idempotente.

Despues de medio siglo de evolución, en que aparecieron importantes trabajos de N. Jacobson, K. McCrimmon, R. D. Schafer, K. A. Zhevlakov, A. M. Slin'ko, A. I. Shirshov e I. P. Shestakov, la teoría de las álgebras de Jordan culmina, en 1983, con el revolucionário resultado de E. I. Zel'manov, que clasifica las álgebras de Jordan simples en cualquier dimensión.

Superálgebras de Jordan

En medio de los estudios de la álgebras de Jordan, aparecen las superálgebras, que son simplemente álgebras $\mathbb{Z}_2$- graduadas, no necesariamente asociativas. El prefijo "super"viene de la teoría de supersimetria en física teórica. Las superálgebras y sus representaciones, bimódulos, ofrecen una estructura algebraica para la formulación de la supersimetria. El estudio de tales objetos, algunas veces es llamado superálgebra lineal.

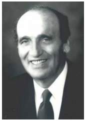


Las superálgebras de Jordan fueron introducidas por I. Kaplansky en 1972 en un *preprint*.

La superálgebra de Jordan $A[t]$

Superálgebras de Jordan

En medio de los estudios de la álgebras de Jordan, aparecen las superálgebras, que son simplemente álgebras $\mathbb{Z}_2$- graduadas, no necesariamente asociativas. El prefijo "super" viene de la teoría de supersimetria en física teórica. Las superálgebras y sus representaciones, bimódulos, ofrecen una estructura algebraica para la formulación de la supersimetria. El estudio de tales objetos, algunas veces es llamado superálgebra lineal.



Las superálgebras de Jordan fueron introducidas por I. Kaplansky en 1972 en un *preprint*.

Superálgebras de Jordan

Las superálgebras de Jordan simples de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado de característica cero fueron clasificadas por V. Kac en 1977: $M_{n+m}(F)^{(+)}$, $Q_n(F)^{(+)}$, $Josp_{n,2m}(F)$, $JP_n(F)$, la superálgebra de super-forma, K_3, D_t, K_{10}, y las álgebras de Kantor-Poisson $Kan(n)$.

El estudio de las superálgebras de Jordan sobre campos de característica positiva fue iniciado por Kaplansky.

Superálgebras de Jordan

Las superálgebras de Jordan simples de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado de característica cero fueron clasificadas por V. Kac en 1977: $M_{n+m}(F)^{(+)}$, $Q_n(F)^{(+)}$, $Josp_{n,2m}(F)$, $JP_n(F)$, la superálgebra de super-forma, K_3, D_t, K_{10}, y las álgebras de Kantor-Poisson $Kan(n)$.

El estudio de las superálgebras de Jordan sobre campos de característica positiva fue iniciado por Kaplansky.

Superálgebras de Jordan


Racine y Zelmanov clasificaron las superálgebras de Jordan de dimensión finita simples con parte par semisimple sobre un campo algebraicamente cerrado con característica $p \geq 3$.


Consuelo Martínez y Zelmanov clasificaron las superálgebras de Jordan de dimensión finita simples con parte par no semisimple sobre un campo algebraicamente cerrado con característica $p \geq 3$.

Superálgebras de Jordan

Racine y Zelmanov clasificaron las superálgebras de Jordan de dimensión finita simples con parte par semisimple sobre un campo algebraicamente cerrado con característica $p \geq 3$.

Consuelo Martínez y Zelmanov clasificaron las superálgebras de Jordan de dimensión finita simples con parte par no semisimple sobre un campo algebraicamente cerrado con característica $p \geq 3$.

Nicoleta Cantarini y V. Kac clasificaron las superálgebras de Jordan localmente compactas irreducibles de dimensión infinita.

Superálgebras de Jordan

Racine y Zelmanov clasificaron las superálgebras de Jordan de dimensión finita simples con parte par semisimple sobre un campo algebraicamente cerrado con característica $p \geq 3$.

Consuelo Martínez y Zelmanov clasificaron las superálgebras de Jordan de dimensión finita simples con parte par no semisimple sobre un campo algebraicamente cerrado con característica $p \geq 3$.

Nicoleta Cantarini y V. Kac clasificaron las superálgebras de Jordan localmente compactas irreducibles de dimensión infinita.

Álgebras de Jordan

Una **álgebra de Jordan** sobre un campo F de característica $\neq 2$ es un espacio vectorial J con una operación binária bilineal $(x, y) \to xy$ que satisface:

$$xy = yx,$$
$$(x^2y)x = x^2(yx),$$

conmutatividad y la identidad de Jordan respectivamente, para todo $x, y \in J$.

Si A es un álgebra asociativa sobre un campo F, $char F \neq 2$, entonces el álgebra $A^+ = (A^+, +, \circ)$, donde $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$, es un álgebra de Jordan.

Álgebras de Jordan

Una **álgebra de Jordan** sobre un campo F de característica $\neq 2$ es un espacio vectorial J con una operación binária bilineal $(x, y) \to xy$ que satisface:

$$xy = yx,$$
$$(x^2y)x = x^2(yx),$$

conmutatividad y la identidad de Jordan respectivamente, para todo $x, y \in J$.

Si A es un álgebra asociativa sobre un campo F, $char F \neq 2$, entonces el álgebra $A^+ = (A^+, +, \circ)$, donde $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$, es un álgebra de Jordan.

Si una álgebra de Jordan es isomorfa a una subálgebra de A^+, para algún álgebra asociativa A, entonces ella se llama *especial*, si no, se llama *excepcional*.

Álgebras de Jordan

Una **álgebra de Jordan** sobre un campo F de característica $\neq 2$ es un espacio vectorial J con una operación binária bilineal $(x, y) \to xy$ que satisface:

$$
\begin{aligned}
xy &= yx, \\
(x^2 y)x &= x^2 (yx),
\end{aligned}
$$

conmutatividad y la identidad de Jordan respectivamente, para todo $x, y \in J$.

Si A es un álgebra asociativa sobre un campo F, $char F \neq 2$, entonces el álgebra $A^+ = (A^+, +, \circ)$, donde $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$, es un álgebra de Jordan.

Si una álgebra de Jordan es isomorfa a una subálgebra de A^+, para algún álgebra asociativa A, entonces ella se llama *especial*, si no, se llama *excepcional*.

Álgebras de Jordan

Un álgebra de Jordan J es **simple** si no tiene ideales propios y $J^2 \neq 0$.
Si A es un álgebra asociativa y $* : A \to A$ una **involución**, osea $*$ es una transfomación lineal y satisface $(a^*)^* = a$ y $(ab)^* = b^*a^*$, entonces el conjunto de elementos simétricos $H(A, *) = \{a \in A | a^* = a\}$ es una subálgebra de A^+.

Álgebras de Jordan

Un álgebra de Jordan J es **simple** si no tiene ideales propios y $J^2 \neq 0$.
Si A es un álgebra asociativa y $* : A \to A$ una **involución**, osea $*$ es una transfomación lineal y satisface $(a^*)^* = a$ y $(ab)^* = b^* a^*$, entonces el conjunto de elementos simétricos $H(A, *) = \{a \in A | a^* = a\}$ es una subálgebra de A^+.

Álgebras de Jordan

Los principales ejemplos de álgebras de Jordan son:

- *Álgebras de tipo Hermitiano* $H(A,*)$: Subespacios de elementos simétricos en álgebras asociativas con involución, con respecto al producto simétrico $a \circ b$.
- *Álgebras de tipo Clifford* $J(V,f)$: $J(V,f) = F \cdot 1 + V$, donde V es un espacio vectorial junto con una forma bilineal simétrica $f(x,y)$ y $u \cdot v = f(u,v) \cdot 1$ para $u, v \in V$.
- *Álgebras de tipo Albert* $H(\mathcal{O})$: Espacio de matrices Hermitianas 3×3 sobre los Octonios, con respecto al producto simétrico $a \circ b$.

Álgebras de Jordan

Los principales ejemplos de álgebras de Jordan son:

- *Álgebras de tipo Hermitiano* $H(A,*)$: Subespacios de elementos simétricos en álgebras asociativas con involución, con respecto al producto simétrico $a \circ b$.
- *Álgebras de tipo Clifford* $J(V,f)$: $J(V,f) = F \cdot 1 + V$, donde V es un espacio vectorial junto con una forma bilineal simétrica $f(x,y)$ y $u \cdot v = f(u,v) \cdot 1$ para $u, v \in V$.
- *Álgebras de tipo Albert* $H(\mathcal{O})$: Espacio de matrices Hermitianas 3×3 sobre los Octonios, con respecto al producto simétrico $a \circ b$.

Las álgebras de tipo Hermitiano y Clifford son especiales y las de tipo Albert son excepcionales.

La superálgebra de Jordan $A[t]$

Álgebras de Jordan

Los principales ejemplos de álgebras de Jordan son:

- *Álgebras de tipo Hermitiano* $H(A,*)$: Subespacios de elementos simétricos en álgebras asociativas con involución, con respecto al producto simétrico $a \circ b$.
- *Álgebras de tipo Clifford* $J(V,f)$: $J(V,f) = F \cdot 1 + V$, donde V es un espacio vectorial junto con una forma bilineal simétrica $f(x,y)$ y $u \cdot v = f(u,v) \cdot 1$ para $u, v \in V$.
- *Álgebras de tipo Albert* $H(\mathcal{O})$: Espacio de matrices Hermitianas 3×3 sobre los Octonios, con respecto al producto simétrico $a \circ b$.

Las álgebras de tipo Hermitiano y Clifford son especiales y las de tipo Albert son excepcionales.

En 1983, en el articulo: E. Zelmanov, Prime Jordan algebras II, *Siberian Math J.* **24** no.1, 73-85, (1983). Zelmanov mostro el siguiente teorema.

Theorem

Toda álgebra de Jordan simple es de alguno de los tipos Hermitiano, Clifford ou Albert.

Álgebras de Jordan

Los principales ejemplos de álgebras de Jordan son:

- *Álgebras de tipo Hermitiano* $H(A,*)$: Subespacios de elementos simétricos en álgebras asociativas con involución, con respecto al producto simétrico $a \circ b$.
- *Álgebras de tipo Clifford* $J(V,f)$: $J(V,f) = F \cdot 1 + V$, donde V es un espacio vectorial junto con una forma bilineal simétrica $f(x,y)$ y $u \cdot v = f(u,v) \cdot 1$ para $u, v \in V$.
- *Álgebras de tipo Albert* $H(\mathcal{O})$: Espacio de matrices Hermitianas 3×3 sobre los Octonios, con respecto al producto simétrico $a \circ b$.

Las álgebras de tipo Hermitiano y Clifford son especiales y las de tipo Albert son excepcionales.

En 1983, en el articulo: E. Zelmanov, Prime Jordan algebras II, *Siberian Math J.* **24** no.1, 73-85, (1983). Zelmanov mostro el siguiente teorema.

Theorem

Toda álgebra de Jordan simple es de alguno de los tipos Hermitiano, Clifford ou Albert.

La superálgebra de Jordan $A[t]$

Superálgebras de Jordan

Una **Superálgebra de Jordan** es un álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $J = J_0 + J_1$, que satisface las identidades:

$$xy = (-1)^{|x||y|}yx$$

(superconmutatividad) y

$$((xy)z)t + (-1)^{|y||z|+|y||t|+|z||t|}((xt)z)y + (-1)^{|x||y|+|x||z|+|x||t|+|z||t|}((yt)z)x = (xy)(zt) + (-1)^{|y||z|}(xz)(yt) + (-1)^{|t|(|y|+|z|)}(xt)(yz)$$

(superidentidad de Jordan), donde $|x|$ denota la paridad de x, $|x| = i$ si $x \in J_i$.

Ejemplos de Superálgebras de Jordan

- $A = M_{m+n}(F)$, $A_{\overline{0}} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$, $A_{\overline{1}} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$, e
- $A = Q(n) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} | a, b \in M_n(F)$

son superálgebras asociativas,

Ejemplos de Superálgebras de Jordan

- $A = M_{m+n}(F)$, $A_{\overline{0}} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$, $A_{\overline{1}} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$, e
- $A = Q(n) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} |a, b \in M_n(F)$

son superálgebras asociativas,

En el articulo: C. T. C. Wall, *Graded Braver Groups*, J. Reine Angew Math. 213(1964)187-199, se prueba que toda suparálgebra simple de dimensión finita asociativa sobre un campo algebraicamente cerrado F es isomorfa con alguna de estas.

Ejemplos de Superálgebras de Jordan

- $A = M_{m+n}(F)$, $A_{\bar{0}} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$, $A_{\bar{1}} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$, e
- $A = Q(n) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} |a, b \in M_n(F)$

son superálgebras asociativas,

En el articulo: C. T. C. Wall, *Graded Braver Groups*, J. Reine Angew Math. 213(1964)187-199, se prueba que toda suparálgebra simple de dimensión finita asociativa sobre un campo algebraicamente cerrado F es isomorfa con alguna de estas.

- Si A es una superálgebra asociativa. La operación $a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + (-1)^{|a||b|}ba)$ define una estructura de superálgebra de Jordan sobre A, $A^{(+)} = (A, +, \cdot)$. Las superálgebras de Jordan que se pueden obtener como subálgebras de una de estas superálgebras son llamasas **especiales**, caso contrario son llamadas **excepcionales**.

Ejemplos de Superálgebras de Jordan

- $A = M_{m+n}(F)$, $A_{\overline{0}} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$, $A_{\overline{1}} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$, e
- $A = Q(n) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} |a, b \in M_n(F)$

son superálgebras asociativas,

En el articulo: C. T. C. Wall, *Graded Braver Groups*, J. Reine Angew Math. 213(1964)187-199, se prueba que toda suparálgebra simple de dimensión finita asociativa sobre un campo algebraicamente cerrado F es isomorfa con alguna de estas.

- Si A es una superálgebra asociativa. La operación $a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + (-1)^{|a||b|}ba)$ define una estructura de superálgebra de Jordan sobre A, $A^{(+)} = (A, +, \cdot)$. Las superálgebras de Jordan que se pueden obtener como subálgebras de una de estas superálgebras son llamasas **especiales**, caso contrario son llamadas **excepcionales**.
- Si A es una superálgebra asociativa y $* : A \to A$ una superinvolución, $((a^*)^* = a$, $(ab)^* = (-1)^{|a||b|}b^*a^*)$, entonces el conjunto de elementos simétricos $H(A, *)$ es una subsuperálgebra de $A^{(+)}$.

Ejemplos de Superálgebras de Jordan

- $A = M_{m+n}(F)$, $A_{\bar{0}} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$, $A_{\bar{1}} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$, e
- $A = Q(n) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} |a, b \in M_n(F)$

son superálgebras asociativas,

En el articulo: C. T. C. Wall, *Graded Braver Groups*, J. Reine Angew Math. 213(1964)187-199, se prueba que toda suparálgebra simple de dimensión finita asociativa sobre un campo algebraicamente cerrado F es isomorfa con alguna de estas.

- Si A es una superálgebra asociativa. La operación $a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + (-1)^{|a||b|}ba)$ define una estructura de superálgebra de Jordan sobre A, $A^{(+)} = (A, +, \cdot)$. Las superálgebras de Jordan que se pueden obtener como subálgebras de una de estas superálgebras son llamasas **especiales**, caso contrario son llamadas **excepcionales**.
- Si A es una superálgebra asociativa y $* : A \to A$ una superinvolución, $((a^*)^* = a$, $(ab)^* = (-1)^{|a||b|}b^*a^*)$, entonces el conjunto de elementos simétricos $H(A, *)$ es una subsuperálgebra de $A^{(+)}$.

Ejemplos de Superálgebras de Jordan

- $M_{m+n}^{(+)}$, $m \geq 1$, $n \geq 1$.
- $Q(n)^{(+)}$, $n \geq 2$.

Ejemplos de Superálgebras de Jordan

- $M_{m+n}^{(+)}$, $m \geq 1$, $n \geq 1$.
- $Q(n)^{(+)}$, $n \geq 2$.
- Sean I_n, I_m las matrices identidad, $U = -U^t = -U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$, entonces:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^t & -c^t \\ b^t & d^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}$$

  es una superinvolución, y se denota $Josp_{n,2m}(F) = H(M_{n+2m}(F), *)$ la superálgebra de Jordan ortosimplética.

Ejemplos de Superálgebras de Jordan

- $M_{m+n}^{(+)}$, $m \geq 1$, $n \geq 1$.
- $Q(n)^{(+)}$, $n \geq 2$.
- Sean I_n, I_m las matrices identidad, $U = -U^t = -U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$, entonces:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^t & -c^t \\ b^t & d^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}$$

  es una superinvolución, y se denota $Josp_{n,2m}(F) = H(M_{n+2m}(F), *)$ la superálgebra de Jordan ortosimplética.

- El álgebra asociativa $M_{n+n}(F)$ tiene otra superinvolución:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\sigma = \begin{pmatrix} d^t & -b^t \\ c^t & a^t \end{pmatrix}$$

  y se denota $JP_n(F) = H(M_{n+n}(F), \sigma)$ la superálgebra de Jordan obtenida.

Ejemplos de Superálgebras de Jordan

- $M_{m+n}^{(+)}$, $m \geq 1$, $n \geq 1$.
- $Q(n)^{(+)}$, $n \geq 2$.
- Sean I_n, I_m las matrices identidad, $U = -U^t = -U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$, entonces:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^t & -c^t \\ b^t & d^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}$$

  es una superinvolución, y se denota $Josp_{n,2m}(F) = H(M_{n+2m}(F), *)$ la superálgebra de Jordan ortosimplética.

- El álgebra asociativa $M_{n+n}(F)$ tiene otra superinvolución:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\sigma = \begin{pmatrix} d^t & -b^t \\ c^t & a^t \end{pmatrix}$$

  y se denota $JP_n(F) = H(M_{n+n}(F), \sigma)$ la superálgebra de Jordan obtenida.

Ejemplos de Superálgebras de Jordan

- La Superálgebra de Kaplansky de dimensión 3, $K_3 = Fe + (Fx + Fy)$, con multiplicación: $e^2 = e$, $ex = \frac{1}{2}x$, $ey = \frac{1}{2}y$, $[x, y] = e$.

- La familia 1-paramétrica de superálgebras de dimensión 4 $D_t = (Fe_1 + Fe_2) + (Fx + Fy)$, con mutiplicación: $e_i^2 = e_i$, $e_1e_2 = 0$, $e_ix = \frac{1}{2}x$, $e_iy = \frac{1}{2}y$, $xy = e_1 + te_2$, $i = 1, 2$.
  Se $t \neq 0$, D_t. Si $t = -1$, $D_t \cong M_{1+1}(F)^{(+)}$.

Ejemplos de Superálgebras de Jordan

- La Superálgebra de Kaplansky de dimensión 3, $K_3 = Fe + (Fx + Fy)$, con multiplicación: $e^2 = e$, $ex = \frac{1}{2}x$, $ey = \frac{1}{2}y$, $[x, y] = e$.

- La familia 1-paramétrica de superálgebras de dimensión 4 $D_t = (Fe_1 + Fe_2) + (Fx + Fy)$, con mutiplicación: $e_i^2 = e_i$, $e_1 e_2 = 0$, $e_i x = \frac{1}{2}x$, $e_i y = \frac{1}{2}y$, $xy = e_1 + te_2$, $i = 1, 2$.
  Se $t \neq 0$, D_t. Si $t = -1$, $D_t \cong M_{1+1}(F)^{(+)}$.

- Sea $V = V_0 + V_1$ un espacio vectorial $\mathbb{Z}_2$-graduado con superforma supersimétrica $(|) : V \times V :\rightarrow F$ e $(V_0|V_1) = (V_1|V_0) = (0)$.
  La superálgebra $J = F1 + V = (F1 + V_0) + V_1$ es de Jordan.

Ejemplos de Superálgebras de Jordan

- La Superálgebra de Kaplansky de dimensión 3, $K_3 = Fe + (Fx + Fy)$, con multiplicación: $e^2 = e$, $ex = \frac{1}{2}x$, $ey = \frac{1}{2}y$, $[x, y] = e$.

- La familia 1-paramétrica de superálgebras de dimensión 4 $D_t = (Fe_1 + Fe_2) + (Fx + Fy)$, con mutiplicación: $e_i^2 = e_i$, $e_1e_2 = 0$, $e_ix = \frac{1}{2}x$, $e_iy = \frac{1}{2}y$, $xy = e_1 + te_2$, $i = 1, 2$.
Se $t \neq 0$, D_t. Si $t = -1$, $D_t \cong M_{1+1}(F)^{(+)}$.

- Sea $V = V_0 + V_1$ un espacio vectorial $\mathbb{Z}_2$-graduado con superforma supersimétrica $(|) : V \times V :\rightarrow F$ e $(V_0|V_1) = (V_1|V_0) = (0)$.
La superálgebra $J = F1 + V = (F1 + V_0) + V_1$ es de Jordan.

- V. Kac introdujo la superálgebra de dimensión 10 K_{10} relacionada (via la construcción TKK) con la superálgebra de Lie de dimensión 40 excepcional.

Ejemplos de Superálgebras de Jordan

- La Superálgebra de Kaplansky de dimensión 3, $K_3 = Fe + (Fx + Fy)$, con multiplicación: $e^2 = e$, $ex = \frac{1}{2}x$, $ey = \frac{1}{2}y$, $[x, y] = e$.

- La familia 1-paramétrica de superálgebras de dimensión 4 $D_t = (Fe_1 + Fe_2) + (Fx + Fy)$, con mutiplicación: $e_i^2 = e_i$, $e_1e_2 = 0$, $e_ix = \frac{1}{2}x$, $e_iy = \frac{1}{2}y$, $xy = e_1 + te_2$, $i = 1, 2$.
  Se $t \neq 0$, D_t. Si $t = -1$, $D_t \cong M_{1+1}(F)^{(+)}$.

- Sea $V = V_0 + V_1$ un espacio vectorial $\mathbb{Z}_2$-graduado con superforma supersimétrica $(|) : V \times V :\to F$ e $(V_0|V_1) = (V_1|V_0) = (0)$.
  La superálgebra $J = F1 + V = (F1 + V_0) + V_1$ es de Jordan.

- V. Kac introdujo la superálgebra de dimensión 10 K_{10} relacionada (via la construcción TKK) con la superálgebra de Lie de dimensión 40 excepcional.

- La superálgebra de Jordan de dimensión 2^{n+1} $Kan(n) = J(G_n, \{,\})$.

Ejemplos de Superálgebras de Jordan

- La Superálgebra de Kaplansky de dimensión 3, $K_3 = Fe + (Fx + Fy)$, con multiplicación: $e^2 = e$, $ex = \frac{1}{2}x$, $ey = \frac{1}{2}y$, $[x, y] = e$.

- La familia 1-paramétrica de superálgebras de dimensión 4 $D_t = (Fe_1 + Fe_2) + (Fx + Fy)$, con mutiplicación: $e_i^2 = e_i$, $e_1 e_2 = 0$, $e_i x = \frac{1}{2}x$, $e_i y = \frac{1}{2}y$, $xy = e_1 + te_2$, $i = 1, 2$.
Se $t \neq 0$, D_t. Si $t = -1$, $D_t \cong M_{1+1}(F)^{(+)}$.

- Sea $V = V_0 + V_1$ un espacio vectorial $\mathbb{Z}_2$-graduado con superforma supersimétrica $(|) : V \times V :\to F$ e $(V_0|V_1) = (V_1|V_0) = (0)$.
La superálgebra $J = F1 + V = (F1 + V_0) + V_1$ es de Jordan.

- V. Kac introdujo la superálgebra de dimensión 10 K_{10} relacionada (via la construcción TKK) con la superálgebra de Lie de dimensión 40 excepcional.

- La superálgebra de Jordan de dimensión 2^{n+1} $Kan(n) = J(G_n, \{,\})$.

Clasificación de Superálgebras de Jordan

- En el artículo: V. G. Kac, *Classification of simple $\mathbb{Z}$-graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras*[Comm. in Algebra 5(1977),no. 13, 1375-1400]. V. Kac probo que toda superálgebra de Jordan de dimensión finita simple sobre un campo F algebraicamente cerrado de característica 0 es isomorfa con una de las 9 superálgebras mencionadas anteriormente.

- En el artículo: M. Racine and E. Zelmanov, *Simple Jordan superalgebras with semisimple even part* [J. of Algebra 270(2003), no. 2,374-444], se hace una clasificación de superálgebras de Jordan de dimensión finita simples con parte par semisimple sobre un campo algebraicamente cerrado con característica $p \geq 3$, cuando $p = 3$ aparecen nueos ejemplos.

Clasificación de Superálgebras de Jordan

- En el artículo: V. G. Kac, *Classification of simple $\mathbb{Z}$-graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras*[Comm. in Algebra 5(1977),no. 13, 1375-1400]. V. Kac probo que toda superálgebra de Jordan de dimensión finita simple sobre un campo F algebraicamente cerrado de característica 0 es isomorfa con una de las 9 superálgebras mencionadas anteriormente.

- En el artículo: M. Racine and E. Zelmanov, *Simple Jordan superalgebras with semisimple even part* [J. of Algebra 270(2003), no. 2,374-444], se hace una clasificación de superálgebras de Jordan de dimensión finita simples con parte par semisimple sobre un campo algebraicamente cerrado con característica $p \geq 3$, cuando $p = 3$ aparecen nueos ejemplos.

- En el artículo: C. Martinez and E. Zelmanov, *Simple finite-dimentional Jordan superalgebras in prime characterístic* [J. of Algebra 236 (2001), no. 2,575-629], aparecen 2 nuevos ejemplos cuando la parte par no es semisimple.

Clasificación de Superálgebras de Jordan

- En el artículo: V. G. Kac, *Classification of simple $\mathbb{Z}$-graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras*[Comm. in Algebra 5(1977),no. 13, 1375-1400]. V. Kac probo que toda superálgebra de Jordan de dimensión finita simple sobre un campo F algebraicamente cerrado de característica 0 es isomorfa con una de las 9 superálgebras mencionadas anteriormente.

- En el artículo: M. Racine and E. Zelmanov, *Simple Jordan superalgebras with semisimple even part* [J. of Algebra 270(2003), no. 2,374-444], se hace una clasificación de superálgebras de Jordan de dimensión finita simples con parte par semisimple sobre un campo algebraicamente cerrado con característica $p \geq 3$, cuando $p = 3$ aparecen nueos ejemplos.

- En el artículo: C. Martinez and E. Zelmanov, *Simple finite-dimentional Jordan superalgebras in prime characterístic* [J. of Algebra 236 (2001), no. 2,575-629], aparecen 2 nuevos ejemplos cuando la parte par no es semisimple.

- En el artículo: N. Cantarini and V.G. Kac, *Classification of linearly compact simple Jordan and generalized Poisson superalgebras* [J. of Algebra 313 (2007), no. 1, 100-124], se clasifican superálgebras de Jordan localmente compactas simples de dimensión infinita.

Clasificación de Superálgebras de Jordan

- En el artículo: V. G. Kac, *Classification of simple $\mathbb{Z}$-graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras*[Comm. in Algebra 5(1977),no. 13, 1375-1400]. V. Kac probo que toda superálgebra de Jordan de dimensión finita simple sobre un campo F algebraicamente cerrado de característica 0 es isomorfa con una de las 9 superálgebras mencionadas anteriormente.

- En el artículo: M. Racine and E. Zelmanov, *Simple Jordan superalgebras with semisimple even part* [J. of Algebra 270(2003), no. 2,374-444], se hace una clasificación de superálgebras de Jordan de dimensión finita simples con parte par semisimple sobre un campo algebraicamente cerrado con característica $p \geq 3$, cuando $p = 3$ aparecen nueos ejemplos.

- En el artículo: C. Martinez and E. Zelmanov, *Simple finite-dimentional Jordan superalgebras in prime characterístic* [J. of Algebra 236 (2001), no. 2,575-629], aparecen 2 nuevos ejemplos cuando la parte par no es semisimple.

- En el artículo: N. Cantarini and V.G. Kac, *Classification of linearly compact simple Jordan and generalized Poisson superalgebras* [J. of Algebra 313 (2007), no. 1, 100-124], se clasifican superálgebras de Jordan localmente compactas simples de dimensión infinita.

Superálgebras de Kantor $J(A)$

Una **Superálgebra Punto-Corchete** $A = (A_0 + A_1, \cdot, \{,\})$ es una ϕ-superálgebra $(A, \cdot)$ asociativa y conmutativa junto con un producto super-anti-simétrico $\{,\}$, donde ϕ es un álgebra de escalares unitária, conmutativa y asociativa.

Con una de estas superálgebras, podemos crear una nueva superálgebra $J(A)$, llamada **Superálgebra de Kantor**, usando el conocido **proceso de duplicación de Kantor**, como sigue:

La superálgebra de Jordan $A[t]$

Superálgebras de Kantor $J(A)$

Una **Superálgebra Punto-Corchete** $A = (A_0 + A_1, \cdot, \{,\})$ es una ϕ-superálgebra $(A, \cdot)$ asociativa y conmutativa junto con un producto super-anti-simétrico $\{,\}$, donde ϕ es un álgebra de escalares unitária, conmutativa y asociativa.

Con una de estas superálgebras, podemos crear una nueva superálgebra $J(A)$, llamada **Superálgebra de Kantor**, usando el conocido **proceso de duplicación de Kantor**, como sigue:

Hacemos la suma directa de ϕ-módulos $J = A \oplus \overline{A}$, donde $\overline{A}$ es solo una copia isomorfa de A, y la multiplicación en $J(A)$ se define como sigue:

Superálgebras de Kantor $J(A)$

Una **Superálgebra Punto-Corchete** $A = (A_0 + A_1, \cdot, \{,\})$ es una ϕ-superálgebra $(A, \cdot)$ asociativa y conmutativa junto con un producto super-anti-simétrico $\{,\}$, donde ϕ es un álgebra de escalares unitária, conmutativa y asociativa.

Con una de estas superálgebras, podemos crear una nueva superálgebra $J(A)$, llamada **Superálgebra de Kantor**, usando el conocido **proceso de duplicación de Kantor**, como sigue:

Hacemos la suma directa de ϕ-módulos $J = A \oplus \overline{A}$, donde $\overline{A}$ es solo una copia isomorfa de A, y la multiplicación en $J(A)$ se define como sigue:

$$\begin{aligned} f \bullet g &= f \cdot g, \\ f \bullet \overline{g} &= \overline{f \cdot g}, \\ \overline{f} \bullet g &= (-1)^{|g|}\overline{f \cdot g}, \\ \overline{f} \bullet \overline{g} &= (-1)^{|g|}\{f, g\}, \end{aligned}$$

La superálgebra de Jordan $A[t]$

Superálgebras de Kantor $J(A)$

Una **Superálgebra Punto-Corchete** $A = (A_0 + A_1, \cdot, \{,\})$ es una ϕ-superálgebra $(A, \cdot)$ asociativa y conmutativa junto con un producto super-anti-simétrico $\{,\}$, donde ϕ es un álgebra de escalares unitária, conmutativa y asociativa.

Con una de estas superálgebras, podemos crear una nueva superálgebra $J(A)$, llamada **Superálgebra de Kantor**, usando el conocido **proceso de duplicación de Kantor**, como sigue:

Hacemos la suma directa de ϕ-módulos $J = A \oplus \overline{A}$, donde $\overline{A}$ es solo una copia isomorfa de A, y la multiplicación en $J(A)$ se define como sigue:

$$
\begin{aligned}
f \bullet g &= f \cdot g, \\
f \bullet \overline{g} &= \overline{f \cdot g}, \\
\overline{f} \bullet g &= (-1)^{|g|}\overline{f \cdot g}, \\
\overline{f} \bullet \overline{g} &= (-1)^{|g|}\{f, g\},
\end{aligned}
$$

para $f, g \in A_0 \cup A_1$. Asi obtenemos una superálgebra conmutativa $J(A) = J_0 + J_1$, donde $J_0 = A_0 + \overline{A_1}$ e $J_1 = A_1 + \overline{A_0}$

La superálgebra de Jordan $A[t]$

Superálgebras de Kantor $J(A)$

Una **Superálgebra Punto-Corchete** $A = (A_0 + A_1, \cdot, \{,\})$ es una ϕ-superálgebra $(A, \cdot)$ asociativa y conmutativa junto con un producto super-anti-simétrico $\{,\}$, donde ϕ es un álgebra de escalares unitária, conmutativa y asociativa.

Con una de estas superálgebras, podemos crear una nueva superálgebra $J(A)$, llamada **Superálgebra de Kantor**, usando el conocido **proceso de duplicación de Kantor**, como sigue:

Hacemos la suma directa de ϕ-módulos $J = A \oplus \overline{A}$, donde $\overline{A}$ es solo una copia isomorfa de A, y la multiplicación en $J(A)$ se define como sigue:

$$\begin{aligned} f \bullet g &= f \cdot g, \\ f \bullet \overline{g} &= \overline{f \cdot g}, \\ \overline{f} \bullet g &= (-1)^{|g|}\overline{f \cdot g}, \\ \overline{f} \bullet \overline{g} &= (-1)^{|g|}\{f, g\}, \end{aligned}$$

para $f, g \in A_0 \cup A_1$. Asi obtenemos una superálgebra conmutativa $J(A) = J_0 + J_1$, donde $J_0 = A_0 + \overline{A_1}$ e $J_1 = A_1 + \overline{A_0}$

Supercorchete de Jordan

Ahora, sea $A = A_0 + A_1$ una superálgebra punto-corchete. El corchete $\{,\}$ es llamado un **Supercolchete de Jordan** si satisface:

$$\{f, (g \cdot h)\} = \{f, g\} \cdot h + (-1)^{|f||g|} g \cdot \{f, h\} - D(f) \cdot g \cdot h,$$

$$\{f, \{g, h\}\} - \{\{f, g\}, h\} - (-1)^{|f||g|}\{g, \{f, h\}\} = \\ D(f) \cdot \{g, h\} + (-1)^{|g|(|f|+|h|)} D(g) \cdot \{h, f\} + (-1)^{|h|(|f|+|g|)} D(h) \cdot \{f, g\}$$

$$\{\{x, x\}, x\} = -\{x, x\} \cdot D(x),$$

donde $D(f) = \{f, 1\}$.

Supercorchete de Jordan

Ahora, sea $A = A_0 + A_1$ una superálgebra punto-corchete. El corchete $\{,\}$ es llamado un **Supercolchete de Jordan** si satisface:

$$\{f, (g \cdot h)\} = \{f, g\} \cdot h + (-1)^{|f||g|} g \cdot \{f, h\} - D(f) \cdot g \cdot h,$$

$$\{f, \{g, h\}\} - \{\{f, g\}, h\} - (-1)^{|f||g|}\{g, \{f, h\}\} =$$
$$D(f) \cdot \{g, h\} + (-1)^{|g|(|f|+|h|)} D(g) \cdot \{h, f\} + (-1)^{|h|(|f|+|g|)} D(h) \cdot \{f, g\}$$

$$\{\{x, x\}, x\} = -\{x, x\} \cdot D(x),$$

donde $D(f) = \{f, 1\}$.

Theorem

(Critério de Jordan) Si A es una superálgebra punto-corchete entonces $J(A)$ es una superálgebra de Jordan si, y sólo si, $\{,\}$ es un supercorchete de Jordan.

Supercorchete de Jordan

Ahora, sea $A = A_0 + A_1$ una superálgebra punto-corchete. El corchete $\{,\}$ es llamado un **Supercolchete de Jordan** si satisface:

$$\{f,(g\cdot h)\} = \{f,g\}\cdot h + (-1)^{|f||g|}g\cdot\{f,h\} - D(f)\cdot g\cdot h,$$

$$\{f,\{g,h\}\} - \{\{f,g\},h\} - (-1)^{|f||g|}\{g,\{f,h\}\} = \\ D(f)\cdot\{g,h\} + (-1)^{|g|(|f|+|h|)}D(g)\cdot\{h,f\} + (-1)^{|h|(|f|+|g|)}D(h)\cdot\{f,g\}$$

$$\{\{x,x\},x\} = -\{x,x\}\cdot D(x),$$

donde $D(f) = \{f,1\}$.

Theorem

(Critério de Jordan) Si A es una superálgebra punto-corchete entonces $J(A)$ es una superálgebra de Jordan si, y sólo si, $\{,\}$ es un supercorchete de Jordan.

Superalgebra de Grassmann G_n

Sea G_n la superálgebra de Grassman con generadores impares $e_1, e_2, \ldots, e_n$, con $e_ie_j + e_je_i = 0$ e $e_i^2 = 0$.

Definimos una superderivación $\dfrac{\partial}{\partial e_j}$ para $j = 1, 2, \ldots, n$ con las identidades:

Superalgebra de GrassmannG_n

Sea G_n la superálgebra de Grassman con generadores impares $e_1, e_2, \ldots, e_n$, con $e_i e_j + e_j e_i = 0$ e $e_i^2 = 0$.

Definimos una superderivación $\dfrac{\partial}{\partial e_j}$ para $j = 1, 2, \ldots, n$ con las identidades:

$$\frac{\partial e_i}{\partial e_j} = \delta_{ij}, \text{ e } \frac{\partial (uv)}{\partial e_j} = \frac{\partial u}{\partial e_j} v + (-1)^{|u|} u \frac{\partial v}{\partial e_j},$$

Superalgebra de GrassmannG_n

Sea G_n la superálgebra de Grassman con generadores impares $e_1, e_2, \ldots, e_n$, con $e_i e_j + e_j e_i = 0$ e $e_i^2 = 0$.

Definimos una superderivación $\dfrac{\partial}{\partial e_j}$ para $j = 1, 2, \ldots, n$ con las identidades:

$$\frac{\partial e_i}{\partial e_j} = \delta_{ij}, \text{ e } \frac{\partial (uv)}{\partial e_j} = \frac{\partial u}{\partial e_j} v + (-1)^{|u|} u \frac{\partial v}{\partial e_j},$$

y se define un supercorchete:

Superalgebra de GrassmannG_n

Sea G_n la superálgebra de Grassman con generadores impares $e_1, e_2, \ldots, e_n$, con $e_i e_j + e_j e_i = 0$ e $e_i^2 = 0$.

Definimos una superderivación $\frac{\partial}{\partial e_j}$ para $j = 1, 2, \ldots, n$ con las identidades:

$$\frac{\partial e_i}{\partial e_j} = \delta_{ij}, \text{ e } \frac{\partial(uv)}{\partial e_j} = \frac{\partial u}{\partial e_j} v + (-1)^{|u|} u \frac{\partial v}{\partial e_j},$$

y se define un supercorchete:

$$\{f, g\} = (-1)^{|f|} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial e_i} \frac{\partial g}{\partial e_i}$$

La superálgebra de Jordan $A[t]$

Superalgebra de GrassmannG_n

Sea G_n la superálgebra de Grassman con generadores impares $e_1, e_2, \ldots, e_n$, con $e_i e_j + e_j e_i = 0$ e $e_i^2 = 0$.

Definimos una superderivación $\dfrac{\partial}{\partial e_j}$ para $j = 1, 2, \ldots, n$ con las identidades:

$$\frac{\partial e_i}{\partial e_j} = \delta_{ij}, \text{ e } \frac{\partial (uv)}{\partial e_j} = \frac{\partial u}{\partial e_j} v + (-1)^{|u|} u \frac{\partial v}{\partial e_j},$$

y se define un supercorchete:

$$\{f, g\} = (-1)^{|f|} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial e_i} \frac{\partial g}{\partial e_i}$$

que es un supercorchete de Jordan, luego $Kan(n) := J(G_n)$ es una superálgebra de Jordan.

Superalgebra de GrassmannG_n

Sea G_n la superálgebra de Grassman con generadores impares $e_1, e_2, \ldots, e_n$, con $e_i e_j + e_j e_i = 0$ e $e_i^2 = 0$.

Definimos una superderivación $\dfrac{\partial}{\partial e_j}$ para $j = 1, 2, \ldots, n$ con las identidades:

$$\frac{\partial e_i}{\partial e_j} = \delta_{ij}, \text{ e } \frac{\partial (uv)}{\partial e_j} = \frac{\partial u}{\partial e_j} v + (-1)^{|u|} u \frac{\partial v}{\partial e_j},$$

y se define un supercorchete:

$$\{f, g\} = (-1)^{|f|} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial e_i} \frac{\partial g}{\partial e_i}$$

que es un supercorchete de Jordan, luego $Kan(n) := J(G_n)$ es una superálgebra de Jordan.

Criterio

$(A, .)$ asociativa y superconmutativa con 1

Supercorchete de Jordan $\{,\} : A \times A \to A$:

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + (-1)^{|f||g|} g\{f, h\} - \{f, 1\}gh, \ \mathbf{JC1}$$

$$\{f, \{g, h\}\} - \{\{f, g\}, h\} - (-1)^{|f||g|}\{g, \{f, h\}\} =$$
$$\{f, 1\}\{g, h\} + (-1)^{|f|(|g|+|h|)}\{g, 1\}\{h, f\} + (-1)^{|h|(|f|+|g|)}\{h, 1\}\{f, g\}, \ \mathbf{JC2}$$

$$\{\{x, x\}, x\} = -\{x, x\} \cdot D(x), \ \mathbf{JC3}$$

para $f, g, h \in A_0 \cup A_1$ e $x \in A_1$.

Criterio

$(A, .)$ asociativa y superconmutativa con 1

Supercorchete de Jordan $\{,\} : A \times A \to A$:

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + (-1)^{|f||g|} g\{f, h\} - \{f, 1\}gh, \ \mathbf{JC1}$$

$$\{f, \{g, h\}\} - \{\{f, g\}, h\} - (-1)^{|f||g|}\{g, \{f, h\}\} = \\ \{f, 1\}\{g, h\} + (-1)^{|f|(|g|+|h|)}\{g, 1\}\{h, f\} + (-1)^{|h|(|f|+|g|)}\{h, 1\}\{f, g\}, \ \mathbf{JC2}$$

$$\{\{x, x\}, x\} = -\{x, x\} \cdot D(x), \ \mathbf{JC3}$$

para $f, g, h \in A_0 \cup A_1$ e $x \in A_1$.

$$A \longrightarrow A[t]$$
$$\{,\} \longrightarrow \{,\}$$

Criterio

$(A, .)$ asociativa y superconmutativa con 1

Supercorchete de Jordan $\{,\} : A \times A \to A$:

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + (-1)^{|f||g|}g\{f, h\} - \{f, 1\}gh, \ \mathbf{JC1}$$

$$\{f, \{g, h\}\} - \{\{f, g\}, h\} - (-1)^{|f||g|}\{g, \{f, h\}\} =$$
$$\{f, 1\}\{g, h\} + (-1)^{|f|(|g|+|h|)}\{g, 1\}\{h, f\} + (-1)^{|h|(|f|+|g|)}\{h, 1\}\{f, g\}, \ \mathbf{JC2}$$

$$\{\{x, x\}, x\} = -\{x, x\} \cdot D(x), \ \mathbf{JC3}$$

para $f, g, h \in A_0 \cup A_1$ e $x \in A_1$.

$$A \longrightarrow A[t]$$
$$\{,\} \longrightarrow \{,\}$$

Criterio

$$\{1,1\} = \{t,t\} = 0,$$

$$\{at^n, bt^m\} = \{a,b\}t^{n+m} - na\{b,t\}t^{n+m-1} + na\{b,1\}t^{n+m} - m\{a,1\}bt^{n+m} + m\{a,t\}bt^{n+m-1},$$

para todo $a, b \in A$ y $n, m \in \mathbb{N}$.

Criterio

$$\{1,1\} = \{t,t\} = 0,$$

$$\{at^n, bt^m\} = \{a,b\}t^{n+m} - na\{b,t\}t^{n+m-1} + na\{b,1\}t^{n+m} - m\{a,1\}bt^{n+m} + m\{a,t\}bt^{n+m-1},$$

para todo $a, b \in A$ y $n, m \in \mathbb{N}$.

$$\{a,t\} = a_{\gamma(a)}t^{\gamma(a)} + \cdots + a_1 t + a_0,$$

donde $a_i \in A$ y $\gamma(a) \in \mathbb{N}$.

Criterio

$$\{1,1\} = \{t,t\} = 0,$$

$$\{at^n, bt^m\} = \{a,b\}t^{n+m} - na\{b,t\}t^{n+m-1} + na\{b,1\}t^{n+m} - m\{a,1\}bt^{n+m} + m\{a,t\}bt^{n+m-1},$$

para todo $a, b \in A$ y $n, m \in \mathbb{N}$.

$$\{a,t\} = a_{\gamma(a)}t^{\gamma(a)} + \cdots + a_1 t + a_0,$$

donde $a_i \in A$ y $\gamma(a) \in \mathbb{N}$.

Criterio

Theorem

Si $(A, ., \{,\})$ *es una superálgebra punto-corchete donde* $\{,\}$ *es un super-corchete de Jordan y* t *es una indeterminada par. Entonces el corchete* $\{,\}$ *sobre* $A[t]$ *es un super-corchete de Jordan si, y sólo si, satisface las siguientes condiciones:*

$$\{ab, t\} = \{a, t\}b + a\{b, t\} - \{1, t\}ab,$$

$$\{a, \{b, t\}\} - \{\{a, b\}, t\} - (-1)^{|a||b|}\{b, \{a, t\}\} = \{a, 1\}\{b, t\} + (-1)^{|a||b|}\{b, 1\}\{t, a\} + \{t, 1\}\{a, b\},$$

$$\{\{yt, yt\}, yt\} = -\{yt, yt\} \cdot D(yt)$$

para todo $a, b \in A_0 \cup A_1$ *e* $y \in A_1$, *que llamaremos* $JA1$, $JA2$ *y* $JA3$ *respectivamente. De nuevo, la última identidad es necesaria sólo cuando el campo tiene característica* 3.

Ejemplos

En el caso partícular donde A é G_n:

$$\{e_I e_J, t\} = \{e_I, t\}e_J + e_I\{e_J, t\} - \{1, t\}e_I e_J,$$

$$\{e_I, \{e_J, t\}\} = \{\{e_I, e_J\}, t\} + (-1)^{|I||J|}\{e_J, \{e_I, t\}\} + \{t, 1\}\{e_I, e_J\},$$

$$\{\{e_I, t\}, t\} = \{\{e_I, t\}, 1\}t, \text{ se } |I| \text{ es ímpar},$$

donde $I, J \subset I_n$, $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ e $J = \{j_1, \ldots, j_s\}$.

- Si en la superálgebra $G_n[t]$ tomamos $\{e_i, t\} = \{1, t\} = 0$, para todo $i \in I_n$, tenemos que $\{e_I, t\} = 0$ para todo $I \subset I_n$, y claramente $JA1$, $JA2$ e $JA3$ se satisfacen. Luego, tenemos un super-corchete de Jordan sobre $G_n[t]$ tal que:

$$\{e_I t^m, e_J t^l\} = \{e_I, e_J\}t^{m+l},$$

donde $\{e_I, e_J\}$ es el super-corchete de Jordan definido anteriormente sobre G_n.

Ejemplos

En el caso partícular donde A é G_n:

$$\{e_I e_J, t\} = \{e_I, t\}e_J + e_I\{e_J, t\} - \{1, t\}e_I e_J,$$

$$\{e_I, \{e_J, t\}\} = \{\{e_I, e_J\}, t\} + (-1)^{|I||J|}\{e_J, \{e_I, t\}\} + \{t, 1\}\{e_I, e_J\},$$

$$\{\{e_I, t\}, t\} = \{\{e_I, t\}, 1\}t, \text{ se } |I| \text{ es ímpar},$$

donde $I, J \subset I_n$, $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ e $J = \{j_1, \dots, j_s\}$.

- Si en la superálgebra $G_n[t]$ tomamos $\{e_i, t\} = \{1, t\} = 0$, para todo $i \in I_n$, tenemos que $\{e_I, t\} = 0$ para todo $I \subset I_n$, y claramente $JA1$, $JA2$ e $JA3$ se satisfacen. Luego, tenemos un super-corchete de Jordan sobre $G_n[t]$ tal que:

  $$\{e_I t^m, e_J t^l\} = \{e_I, e_J\}t^{m+l},$$

  donde $\{e_I, e_J\}$ es el super-corchete de Jordan definido anteriormente sobre G_n.

Ejemplos

- Si en la superálgebra $G_n[t]$ tomamos $\{e_i, t\} = 0$, para todo $i \in I_n$,
$$\{1, t\} = \alpha_r t^r + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0,$$
entonces tenemos que $\alpha_q \in F$. Luego, tenemos un super-corchete de Jordan sobre $G_n[t]$ tal que:
$$\{e_I t^m, e_J t^l\} = \{e_I, e_J\}t^{m+l} + (m(s-1) - l(k-1))e_I e_J \{1, t\} t^{m+l-1}.$$

- Si en la superálgebra $G_n[t]$, con n par, tomamos $\{1, t\} = 0$ e $\{e_i, t\} = (-1)^i e_{I'} t^{m_i}$, donde $I' = I_n \setminus \{i\}$ y m_i es un número natural que depende de i. Vamos a tener $m_i = m_j$ para todo $i \neq j$.

Asi tenemos un super-corchete de Jordan sobre $G_n[t]$, con n par, tal que:
$$\{e_I t^h, e_J t^l\} = \{e_I, e_J\}t^{h+l} - h e_I \{e_J, t\} t^{h+l-1} + l\{e_I, t\} e_J t^{h+l-1}.$$

Ejemplos

- Si en la superálgebra $G_n[t]$ tomamos $\{e_i, t\} = 0$, para todo $i \in I_n$,

$$\{1, t\} = \alpha_r t^r + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0,$$

entonces tenemos que $\alpha_q \in F$. Luego, tenemos un super-corchete de Jordan sobre $G_n[t]$ tal que:

$$\{e_I t^m, e_J t^l\} = \{e_I, e_J\} t^{m+l} + (m(s-1) - l(k-1)) e_I e_J \{1, t\} t^{m+l-1}.$$

- Si en la superálgebra $G_n[t]$, con n par, tomamos $\{1, t\} = 0$ e $\{e_i, t\} = (-1)^i e_{I'} t^{m_i}$, donde $I' = I_n \setminus \{i\}$ y m_i es un número natural que depende de i. Vamos a tener $m_i = m_j$ para todo $i \neq j$.

Asi tenemos un super-corchete de Jordan sobre $G_n[t]$, con n par, tal que:

$$\{e_I t^h, e_J t^l\} = \{e_I, e_J\} t^{h+l} - h e_I \{e_J, t\} t^{h+l-1} + l \{e_I, t\} e_J t^{h+l-1}.$$

Gracias!

Muchas Gracias!