Funciones Zeta Locales de Igusa Vía la Fórmula de la Fase Estacionaria

Adriana Alexandra Albarracín Mantilla
Víctor Antonio Aguilar Arteaga

CINVESTAV
UAQ

ALTENCOA 6 2014
San Juan de Pasto, Colombia

Preliminares

Valor absoluto $p-$ádico

Sea p un primo fijo. Si $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, entonces

$$x = \frac{a}{b} p^m,$$

para algún único $m \in \mathbb{Z}$ con a y b no divisibles por p. La norma $p-$ádica de x se define como

$$|x|_p = p^{-m},$$

y para $x = 0$ como

$$|0|_p = 0.$$

Este valor absoluto es no arquimediano.

Preliminares

La completación con respecto al valor absoluto usual conduce a $\mathbb{R}$, y la completación con respecto a $|\cdot|_p$ conduce al campo de los números $p-$ádicos $\mathbb{Q}_p$.

Cada $x \in \mathbb{Q}_p$ puede ser escrito en la forma

$$\begin{aligned} x &= b_{-n_0}p^{-n_0} + \cdots + b_0 + b_1 p + \cdots + b_n p^n + \cdots \\ &= \sum_{n \geq -n_0} b_n p^n, \end{aligned}$$

donde $0 \leq b_n \leq p-1$ y $b_{-n_0} \neq 0$.
Esta serie converge en el valor absoluto $|\cdot|_p$ y esta representación es única.

Preliminares

Definición

El **Anillo de enteros** $p-$**ádicos** es el conjunto

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}.$$

Proposición

El anillo $\mathbb{Z}_p$ de enteros $p-$ádicos es un anillo local cuyo ideal maximal es el ideal principal $p\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq \frac{1}{p}\}$. Además, cada elemento del complemento $\mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p$ es invertible en $\mathbb{Z}_p$, siendo los únicos elementos invertibles en $\mathbb{Z}_p$.

Definición

El grupo de unidades de $\mathbb{Z}_p$ es

$$\mathbb{Z}_p^{\times} = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p = 1\}.$$

Integración sobre $\mathbb{Q}_p$

Teorema (Haar)

Sobre cada grupo G localmente compacto existe una medida de Borel dx, única salvo por múltiplos constantes positivos, tal que

1. $\int_U dx > 0$ para cada conjunto abierto de Borel U distinto del vacío, y
2. $\int_{x+E} dx = \int_E dx$ para cada conjunto de Borel.

La medida dx es llamada **medida de Haar de** G.

Integración sobre $\mathbb{Q}_p$

Con los resultados anteriores se puede asegurar la existencia de una medida de Haar para el grupo $(\mathbb{Q}_p, +)$, esta medida se puede normalizar de tal manera que

$$\int_{\mathbb{Z}_p} dx = 1.$$

Esta medida de Haar se denotará como dx.

El espacio $\mathbb{Q}_p^n$

El espacio $\mathbb{Q}_p^n = \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p \times \cdots \times \mathbb{Q}_p$ consiste de los puntos $x = (x_1, x_2, \cdots x_n)$, con $x_j \in \mathbb{Q}_p$ para $j = 1, 2, 3, \cdots, n$. La norma sobre $\mathbb{Q}_p^n$ es

$$\|x\|_p = \text{máx}_{1 \leq j \leq n} |x_j|_p, \qquad x \in \mathbb{Q}_p^n.$$

$\mathbb{Q}_p^n$ es un espacio métrico completo, totalmente disconexo y localmente compacto.

Existe una medida de Haar $d^n x$ sobre Q_p^n y se puede normalizar por la condición

$$\int_{\mathbb{Z}_p^n} d^n x = 1.$$

Funciones de Schwartz-Bruhat

Definición

Una función $\varphi : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$ se dice que es **localmente constante** si para cada $x \in \mathbb{Q}_p$ existe un subconjunto abierto y compacto U tal que $x \in U$ y $\varphi(u) = \varphi(x)$ para todo $u \in U$.

Definición

Una función localmente constante con soporte compacto es llama **función de Schwartz-Bruhat**.

Congruencias polinomiales y series de Poincaré

Sea $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \cdots, x_n] \setminus \mathbb{Z}_p$ se define

$$N_m = \begin{cases} \#(\{x \in (\mathbb{Z}_p/p^m\mathbb{Z}_p)^n : f(x) \equiv 0 \pmod{p^m}\}) & \text{si } m \geq 1 \\ 1 & \text{si } m = 0. \end{cases}$$

Donde $x \equiv y \pmod{p^m}$ significa que $x - y \in p^m\mathbb{Z}_p$.

Un problema básico es estudiar el comportamiento de N_m cuando $m \to \infty$.

Congruencias polinomiales y series de Poincaré

Serie de Poincaré

Se define la **serie de Poincaré** como la serie

$$P(t) := \sum_{m=0}^{+\infty} N_m (p^{-n} t)^m,$$

donde $t \in \mathbb{C}$ con $|t| < 1$ y N_m como se definió anteriormente.

Se espera que las propiedades analíticas de $P(t)$ proporcionen información acerca del comportamiento asintótico de la sucesión $\{N_m\}_{m=1}^{\infty}$. Una pregunta fundamental es

¿$P(t)$ es una función racional?.

Funciones zeta locales

Definición

Sean $f(x) \in \mathbb{Q}_p[x_1, \cdots, x_n] \setminus \mathbb{Q}_p$ y φ una función localmente constante con soporte compacto. La **función zeta local** (también llamada **función zeta local de Igusa**) asociada a (f, φ) es

$$Z_\varphi(s, f) := \int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus f^{-1}(0)} \varphi(x)|f(x)|_p^s d^n x, \qquad s \in \mathbb{C}, Re(s) > 0,$$

donde $d^n x$ es la medida de Haar de $(\mathbb{Q}_p^n, +)$ normalizada de tal manera que

$$\int_{\mathbb{Z}_p^n} d^n x = 1.$$

Funciones zeta locales

Proposición

La integral

$$Z_{\varphi}(s,f) = \int_{\mathbb{Q}_p^n - f^{-1}(0)} \varphi(x)|f(x)|_p^s d^n x$$

converge y es analítica para $Re(s) > 0$.

Funciones zeta locales

Definición

Dado $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \cdots, x_n] \setminus \mathbb{Z}_p$ se define

$$Z(s) := \int_{\mathbb{Z}_p^n \setminus f^{-1}(0)} |f(x)|_p^s d^n(x), \quad s \in \mathbb{C}, Re(s) > 0.$$

Proposición

Con la notación anterior

$$P(t) = \frac{1 - tZ(s)}{1 - t}, \ t = p^{-s}, \ \text{para} \ \ Re(s) > 0,$$

donde $P(t)$ es la serie de Poincaré.

Funciones zeta locales

Igusa demostró que la función zeta local admite una continuación meromórfica a todo $\mathbb{C}$ como una función racional en la variable p^{-s}.

Corolario

$P(t)$ es una función racional de t.

Funciones zeta locales

La racionalidad de $P(t)$ fue conjeturada en 1960 por Borevich y Shafarevich. Igusa probó este resultado a mediados de 1970. La racionalidad de $Z_\varphi(s, f)$ también permite encontrar cotas para los N_m's.

La prueba del teorema anterior dada por Igusa depende de un resultado profundo en geometría algebraica conocido como el teorema de resolución de singularidades de Hironaka.

Fórmula de la fase estacionaria

Se identifica, como conjuntos, a $\mathbb{F}_p$ con $\{0, 1, \cdots, p-1\}$. Sea "$-$"la función reducción módulo p, es decir, la función

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathbb{F}_p \\ x_0 + p(\cdots) & \longrightarrow & x_0. \end{array}$$

Esta función puede extenderse a $\mathbb{Z}_p^n \longrightarrow \mathbb{F}_p^n$. La reducción módulo p de un subconjunto $E \subset \mathbb{Z}_p^n$ será denotado por $\overline{E} \subset \mathbb{F}_p^n$. Si $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \cdots, x_n] \setminus p\mathbb{Z}_p[x_1, \cdots, x_n]$ entonces $\overline{f}$ denota su reducción módulo p.
Si A es un conjunto finito $\#A$ denota su número de elementos.

Fórmula de la fase estacionaria

Fórmula de la fase estacionaria

Sea $\overline{E} \subset \mathbb{F}_p^n$ y se denota por $\overline{S}$ su subconjunto que consiste en todos los $\overline{a} \in \overline{E}$ tales que $\overline{f}(\overline{a}) = \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i}(\overline{a}) = 0$ para $1 \leq i \leq n$. Sean S y E las preimagenes de $\overline{S}$ y $\overline{E}$ bajo $\mathbb{Z}_p^n \longrightarrow \mathbb{F}_p^n$ y sea N el número de ceros de $\overline{f}(x)$ en $\overline{E}$. Entonces

$$\int_E |f(x)|_p^s d^n x = p^{-n}(\#\overline{E} - N) + \frac{p^{-n-s}(1-p^{-1})(N - \#\overline{S})}{1 - p^{-1-s}}$$

$$+ \int_S |f(x)|_p^s d^n x.$$

Fórmula de la fase estacionaria

Igusa conjeturó que aplicando recursivamente FFE es posible establecer la racionalidad de integrales del tipo $\int_E |f(x)|_p^s d^n x$, en el caso en que el polinomio f tiene coeficientes en un campo completo no arquimediano de característica arbitraria, por ejemplo, el campo de las series de Laurent (o series formales meromorfas) $\mathbb{F}_p((t))$.

Fórmula de la fase estacionaria

Una **forma fuertemente no degenerada** es un polinomio $f(x_1, \cdots, x_k)$ homogéneo tal que $\overline{f}(\overline{a}) = \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i}(\overline{a}) = 0$, $1 \leq i \leq n$, implica que $\overline{a} = 0$.

Jay R. Goldman probó que si $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \cdots, x_n]$ es una forma fuertemente no degenerada de grado d, la serie de Poincaré está dada por

$$P(t) = \frac{R(t)}{(1 - p^{n-1}t)(1 - p^{n(d-1)}t^d)}$$

donde $R(t)$ es un polinomio de grado d que se calcula de manera fácil y eficaz.

Fórmula de la fase estacionaria

Sea $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \cdots, x_n] \setminus p\mathbb{Z}_p[x_1, \cdots, x_n]$ una forma fuertemente no degenerada de grado d, la función $Z(s, f)$ se puede calcular usando la FFE de la siguiente manera: se tiene $E = \mathbb{Z}_p^n$, $\overline{E} = \mathbb{F}_p^n$, $S = (p\mathbb{Z}_p)^n$ y $\overline{S} = \{0\}$. Luego,

$$
\begin{aligned}
Z(s, f) &= p^{-n}(p^n - N) + \frac{p^{-n-s}(1 - p^{-1})(N - 1)}{1 - p^{-1-s}} \\
&\quad + \int_{(p\mathbb{Z}_p)^n} |f(x)|_p^s d^n x \\
&= p^{-n}(p^n - N) + \frac{p^{-n-s}(1 - p^{-1})(N - 1)}{1 - p^{-1-s}} \\
&\quad + p^{-n-ds} \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(y)|_p^s d^n y \\
&= p^{-n}(p^n - N) + \frac{p^{-n-s}(1 - p^{-1})(N - 1)}{1 - p^{-1-s}} + p^{-n-ds} Z(s, f)
\end{aligned}
$$

Fórmula de la fase estacionaria

Por lo tanto,

$$Z(s,f) = \frac{1}{1-p^{-n-ds}}\left\{p^{-n}(p^n - N) + \frac{p^{-n-s}(1-p^{-1})(N-1)}{1-p^{-1-s}}\right\}.$$

Funciones zeta de polinomios semicuasihomogéneos

Definición

Para un anillo conmutativo A y $f(x) \in A[x]$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$, se denota por $V_f(A)$ a la correspondiente hipersuperficie, es decir

$$V_f(A) = \{x \in A^n : f(x) = 0\}.$$

Definición

Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}_p$ y V_f la correspondiente $\mathbb{Q}_p-$hipersuperficie. Se dice que un punto $P \in \mathbb{Q}_p^n$ es una **singularidad aislada de** $V_f(\mathbb{Q}_p)$, si la única solución del sistema de ecuaciones

$$f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0,$$

sobre una clausura algebraica fija de $\mathbb{Q}_p$ es el punto P.

Funciones zeta de polinomios semicuasihomogéneos

Definición

Sean $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, n enteros positivos y primos relativos. Un polinomio $f(x) \in \mathbb{Q}_p[x]$ se llama **polinomio cuasihomogéneo** de peso d y exponentes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, si satisface

$$f(t^{\alpha_1}x_1, \cdots, t^{\alpha_n}x_n) = t^d f(x), \qquad \text{para cada } t \in \mathbb{Q}_p$$

y el origen de $\mathbb{Q}_p^n$ es una singularidad aislada de la $\mathbb{Q}_p-$hipersuperficie V_f.

Funciones zeta de polinomios semicuasihomogéneos

Definición

Un polinomio $F(x)$ se llama **polinomio semicuasihomogéneo** si tiene la forma $f(x) + \sum b_i e_i(x) \in \mathbb{Q}_p[x]$, donde $f(x)$ es un polinomio cuasihomogéneo, cada monomio $e_i(x) = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$ satisface $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j m_j > d$ y el origen de $\mathbb{Q}_p^n$ es una singularidad aislada de la $\mathbb{Q}_p-$hipersuperficie V_f. El polinomio $f(x)$ se llama la parte cuasihomogénea de $F(x)$.

Funciones zeta de polinomios semicuasihomogéneos

Teorema (Zuñiga)

Sea un polinomio semicuasihomogéneo $F(x) \in \mathbb{Q}_p[x]$ tal que la parte cuasihomogénea $f(x)$ tiene peso d y exponentes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. Entonces la función zeta local de Igusa de $F(x)$ es una función racional de p^{-s}. Más precisamente,

$$Z(F, s) = \frac{L(p^{-s})}{(1 - p^{-1}p^{-s})(1 - p^{-|\alpha|}p^{-ds})} \tag{1}$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ y $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Además, el polinomio $L(p^{-s})$ se puede calcular de manera efectiva.

Bibliografía

- V. S. Albis and W. A. Zuñiga, *Una introducción elemental a la teoría de las funciones zeta locales de Igusa*, Lecturas Matemáticas 20 (1999); 5-33.
- J. R. Goldman, *Numbers of solutions of congruences: Poincare series for strongly nondegenerate forms* , Proc. Amer. Math. Soc. 87 No. 4 (1983), 586-590.
- L. J. Goldstein, *Analytic Number Theory*, Pretince Hall, Englewood Cliffs, 1971.
- P. Halmos, *Measure Theory*, Van der Nostrand Reinhold Company, New York, 1950.

Bibliografía

- J.-I. Igusa, *An Introduction to Theory of Local Zeta Functions*, Studies in Advanced Mathematics vol. 14, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- Svetlana Katok, *p-adic Analysis Compared with Real* , Student mathematical library vol.37, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- Fernando Quadros, *p-adic Numbers: An Introduction*, Universitext, Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.
- Alain M. Robert, *A course in p-adic Analysis*, Graduate texts in mathematics, 198, Springer-Verlag, New York, 2000.

Bibliografía

- Vladimirov V. S., *Generalized functions over the field of p-adic numbers* , Russian Math. Surveys 43:5, 1988, 19-64.
- Vladimirov V. S., Volovich I. V. and Zelenov E. I., *p-adic Analysis and Mathematical Physics*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1994.
- W. A. Zuñiga-Galindo, *Igusa's local zeta functions of semiquasihomogeneous polynomials*, Transactions of the American Mathematical society 353:8, 2001, 3193-3207.
- W. A. Zuñiga-Galindo, *An introduction to the theory of local zeta functions*, Notas escuela CIMPA, Colombia, 2012.