

MECÁNICA de FLUIDOS

Hernán Javier Gómez Zambrano
Iván Andrés Sánchez Ortiz



Editorial
Universidad de Nariño



Editorial

Universidad de Nariño

Mecánica de fluidos

Mecánica de fluidos

Hernán Javier Gómez Zambrano
Iván Andrés Sánchez Ortiz



Editorial
Universidad de Nariño

Gómez Zambrano, Hernán Javier

Mecánica de fluidos / Hernán Javier Gómez Zambrano, Iván Andrés Sánchez Ortiz. -- San Juan de Pasto : Editorial Universidad de Nariño, 2024

484 p. : ilustraciones, gráficas, tablas.

Incluye referencias bibliográficas p. 465-470 y reseña de los autores p. 463

ISBN: 978-628-7679-53-5 Digital

ISBN: 978-628-7679-52-8 Impreso

1. Mecánica de fluidos--Generalidades 2. Mecánica de fluidos--Ejercicios 3. Mecánica de fluidos--Viscosidad 4. Fluidos--Clasificación 5. Presión 6. Cinemática 7. Mecánica de fluidos--Ecuaciones fundamentales 8. Bombas, turbinas, ventiladores 9. Flujo real--Generalidades 10. Flujo en tuberías. I. Sánchez Ortiz, Iván Andrés

532 G633m – SCDD-Ed. 22



SECCIÓN DE BIBLIOTECA

Mecánica de fluidos

© Editorial Universidad de Nariño

© Hernán Javier Gómez Zambrano
Iván Andrés Sánchez Ortiz

ISBN Digital: 978-628-7679-53-5

ISBN Impreso: 978-628-7679-52-8

Corrección de estilo: Manuel E. Martínez R.

Diseño y Diagramación: Manuel Alejandro Insandara Arteaga

Fecha de publicación: abril de 2024

San Juan de Pasto-Nariño-Colombia

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o con cualquier propósito, sin autorización escrita por el autor o la Editorial Universidad de Nariño.

Contenido

1. Capítulo 1: Generalidades de la Mecánica de Fluidos.....	17
1.1 Introducción.....	17
1.2 Reseña histórica de la Mecánica de Fluidos	17
1.2.1 Edad Antigua	18
1.2.2 Edad Media y Renacimiento.....	18
1.2.3 Modernidad.....	18
1.3 Definiciones básicas	19
1.3.1 Mecánica de Fluidos	19
1.3.2 Fluido.....	20
1.3.3 Líquido.....	20
1.3.4 Gas	20
1.3.5 Flujo.....	21
1.3.6 Esfuerzo cortante	21
1.4 Sistema de unidades.....	22
1.4.1 Sistemas vigentes.....	22
1.4.2 Magnitudes fundamentales (o dimensiones).....	24
1.4.3 Cantidades derivadas	25
1.4.4 Abreviaturas.....	26
1.4.5 Cifras significativas	26
1.4.6 Prefijos.....	26
1.5 Magnitudes básicas	27
1.6 Ejemplos de sistemas de unidades.....	27
1.7 Ejercicios propuestos	28
2. Capítulo 2: Propiedades de los Fluidos.....	31
2.1 Introducción.....	31
2.2 Densidad	31

2.3	Peso específico	33
2.4	Gravedad específica	35
2.5	Presión de vapor	37
2.6	Módulo de elasticidad volumétrico	39
2.7	Tensión superficial	40
2.7.1	Capilaridad	42
2.8	Ejercicios propuestos.....	47
2.9	Viscosidad	49
2.9.1	Viscosidad dinámica.....	49
2.9.2	Viscosidad cinemática.....	52
2.9.3	Efecto de la temperatura sobre la viscosidad	53
2.9.4	Efecto de partículas sólidas sobre la viscosidad.....	57
2.10	Clasificación de los fluidos	58
2.10.1	Fluidos newtonianos.....	59
2.10.2	Fluidos no newtonianos.....	59
2.10.3	Fluido plástico ideal o fluido Bingham	59
2.10.4	Fluido pseudoplástico.....	60
2.10.5	Fluido dilatante.....	61
2.10.6	Fluido ideal.....	61
2.11	Medición de la viscosidad	62
2.11.1	Viscosímetro giratorio.....	62
2.11.2	Viscosímetro de esfera	63
2.11.3	Viscosímetro de tubo capilar	64
2.12	Ejemplos de aplicación.....	65
2.12.1	Solucionario de ejemplos	66
2.13	Ejercicios propuestos.....	74
3.	Capítulo 3: Estática de Fluidos.....	77
3.1	Introducción	77
3.2	Variación de la presión.....	77
3.3	Presión para fluidos en reposo.....	79

3.4 Solución para líquidos y gases.....	80
3.4.1 Solución para un líquido.....	81
3.4.2 Ecuación de estado de los gases.....	82
3.4.3 Procesos Térmicos.....	84
3.4.4 Solución para presiones en la atmósfera.....	87
3.4.5 Solución para un gas en proceso isotérmico.....	90
3.5 Ejercicios propuestos.....	91
3.6 Escala de presiones.....	92
3.7 Instrumentos para medir presiones.....	93
3.7.1 Tubos piezométricos.....	94
3.7.2 Manómetro en U.....	95
3.7.3 Manómetros diferenciales.....	97
3.7.4 Manómetro tipo Bourdon.....	101
3.8 Fuerzas sobre superficies.....	101
3.8.1 Fuerzas sobre superficies planas y punto de aplicación.....	101
3.8.2 Fuerzas sobre superficies curvas sumergidas y puntos de aplicación.....	108
3.9 Ejercicios propuestos.....	111
3.10 Principio de Arquímedes.....	117
3.10.1 Fuerzas de flotación.....	118
3.10.2 Cuerpo sumergido en varios fluidos.....	121
3.11 Equilibrio de un cuerpo en flotación.....	122
3.11.1 Equilibrio de cuerpos flotantes.....	122
3.11.2 Equilibrio estable.....	123
3.11.3 Equilibrio inestable.....	123
3.11.4 Estabilidad lineal.....	123
3.11.5 Estabilidad rotacional.....	123
3.11.6 Cálculo de la estabilidad rotacional.....	124
3.12 Ejemplos de aplicación.....	126
3.13 Ejercicios propuestos.....	134

3.14	Equilibrio relativo de fluidos en movimiento.....	136
3.14.1	Traslación de masas líquidas	137
3.14.2	Movimiento horizontal y vertical	138
3.14.3	Aplicación de movimiento horizontal	140
3.14.4	Movimiento vertical	144
3.15	Rotación de masas líquidas	145
3.15.1	Ecuación del paraboloide de revolución.....	145
3.16	Tensiones en recipientes de pared delgada.....	152
3.16.1	Tensión circunferencial o tangencial.....	152
3.16.2	Tensión longitudinal.....	154
3.17	Ejercicios propuestos.....	157
4.	Capítulo 4: Cinemática.....	161
4.1	Conceptos generales	161
4.1.1	Unidades cinemáticas	161
4.1.2	Variables.....	161
4.1.3	Escalar	161
4.1.4	Vector	161
4.1.5	Operadores.....	163
4.1.6	Campos.....	163
4.1.7	Derivada material	163
4.2	Vectores de uso frecuente.....	164
4.2.1	Vector unitario.....	164
4.2.2	Vector operador nabla	165
4.2.3	Vector gradiente	165
4.2.4	Vector rotacional	166
4.2.5	Vector de posición.....	166
4.2.6	Vector velocidad.....	167
4.2.7	Vector aceleración.....	167
4.3	Operador Laplaciano	173
4.4	Escalares.....	175

4.4.1 Divergencia.....	175
4.5 Métodos de descripción de un flujo.....	175
4.5.1 Método de Lagrange.....	176
4.5.2 Método de Euler.....	178
4.6 Ejercicios propuestos.....	182
4.7 Clasificación de flujos.....	183
4.7.1 Criterio temporal.....	184
4.7.2 Criterio espacial.....	186
4.7.3 Criterio dimensional.....	187
4.7.4 Criterio de densidad.....	190
4.7.5 Criterio de viscosidad.....	190
4.7.6 Criterio rotacional.....	192
4.7.7 Criterio de estabilidad.....	193
4.8 Ejemplos de aplicación.....	195
4.9 Ejercicios propuestos.....	196
4.10 Descripción de un flujo.....	197
4.10.1 Flujo volumétrico y flujo másico.....	197
4.10.2 Línea de corriente.....	200
4.10.3 Trayectoria de una partícula.....	202
4.10.4 Superficie de flujo, tubo de corriente y vena líquida.....	206
4.10.5 Función de corriente.....	207
4.10.6 Ejemplos de aplicación.....	208
4.11 Ejercicios propuestos.....	214
4.12 Flujo potencial.....	216
4.12.1 Función potencial.....	217
4.12.2 Condiciones que debe satisfacer el flujo con potencial.....	219
4.12.3 Condiciones de Cauchy-Reamann.....	220
4.12.4 Ecuación de Laplace.....	221
4.12.5 Flujo irrotacional.....	222
4.12.6 Condición de flujo ideal.....	222

4.12.7	Condición de flujo bidimensional	223
4.12.8	Relación entre función de corriente y función potencial	223
4.12.9	Solución para flujos con potencial	224
4.12.10	Métodos analíticos.....	224
4.12.11	Métodos numéricos	224
4.12.12	Método gráfico	225
4.12.13	Aplicación de los métodos de solución	225
4.12.14	Ejemplos de potencial y función de corriente	227
4.13	Ejercicios propuestos.....	232
5.	Capítulo 5: Ecuaciones Fundamentales de la Mecánica de Fluidos	235
5.1	Introducción	235
5.2	Sistema y volumen de control	236
5.2.1	Sistema	236
5.2.2	El volumen de control	236
5.3	Teorema del transporte de Reynolds	237
5.4	Ecuación de conservación de la masa	243
5.4.1	Simplificaciones a la ecuación de continuidad.....	244
5.4.2	Ecuación diferencial de continuidad	246
5.4.3	Ecuación de continuidad para una vena líquida	248
5.5	Ejemplos de aplicación.....	252
5.6	Ejercicios propuestos.....	256
5.9	Ecuación de energía.....	259
5.9.1	Deducción de la ecuación de energía	259
5.10	Solución de la ecuación de Euler	262
5.10.1	Flujo compresible	263
5.10.2	Flujo incompresible.....	264
5.11	Significado de los términos de la ecuación de energía.....	265
5.11.1	Término (z).....	266
5.11.2	Término (p/γ).....	267
5.11.3	Término ($V^2/2g$)	268

5.12 Corrección a la ecuación de energía	269
5.12.1 Corrección por distribución de velocidad	269
5.12.2 Corrección por pérdidas.....	270
5.13 Línea de energía y línea piezométrica	271
5.13.1 Línea de energía.....	272
5.13.2 Línea piezométrica.....	272
5.14 Concepto de potencia hidráulica.....	274
5.15 Ejemplos de aplicación	275
5.15.1 Flujo sin pérdidas.....	275
5.16 Ejercicios propuestos	280
5.17 Aplicación de ecuación de energía a turbo máquinas	283
5.17.1 Bombas hidráulicas.....	283
5.17.2 Turbinas	284
5.18 Ejemplos de aplicación	286
5.18.1 Bomba hidráulica.....	286
5.18.2 Turbina.....	289
5.19 Ejercicios propuestos	293
5.20 Aplicación de la ecuación de energía a medidores de caudal	296
5.20.1 Orificios con flujo permanente	296
5.20.2 Orificio en una tubería	299
5.20.3 Orificio en descarga libre.....	304
5.20.4 Orificio con flujo no permanente.....	307
5.20.5 Tubo Pitot	310
5.20.6 Tubo Venturi.....	313
5.20.7 Sifón.....	317
5.21 Ejercicios propuestos	320
5.22 Aplicación de ecuación de energía a canales abiertos	323
5.22.1 Planteamiento de ecuación de Bernoulli.....	324
5.22.2 Aplicación sobre una compuerta.....	325
5.22.3 Aplicación en canales con cambio de pendiente.....	329

5.23 Ejercicios propuestos.....	331
5.24 Ecuación de Cantidad de Movimiento (Momento)	334
5.24.1 Planteamiento de la ecuación de Momento	335
5.24.2 Coeficiente de Boussinesq.....	339
5.24.3 Ecuación sobre una corriente líquida y Coeficiente de Boussinesq	340
5.25 Ejemplos de aplicación.....	341
5.25.1 Flujo a presión	341
5.25.2 Flujo a superficie libre.....	345
5.26 Ejercicios propuestos.....	349
5.27 Ecuación de momento aplicada a turbomáquinas, álabes y accesorios	352
5.27.1 Álabes fijos.....	353
5.27.2 Álabes móviles	356
5.28 Aplicaciones a flujo en tuberías	370
5.28.1 Contracción	370
5.28.2 Cambios de dirección	373
5.29 Ejercicios propuestos.....	376
5.30 Ecuación de Cantidad de Movimiento Angular	379
5.30.1 Concepto de Torque	380
5.30.2 Planteamiento de ecuación de momento angular	381
5.30.3 Ecuación de Euler para turbo máquinas	384
5.31 Aplicaciones a turbo máquinas.....	388
5.31.1 Turbinas.....	388
5.31.2 Bombas.....	389
5.32 Aplicaciones a tuberías.....	395
5.32.1 Tubo con cambio de dirección	395
5.33 Ejercicios propuestos.....	398
5.34 Aplicaciones a turbo máquinas y accesorios	401
5.34.1 Turbinas.....	401

5.34.2 Bombas	403
5.34.3 Ventiladores.....	407
5.35 Aplicaciones a tuberías.....	410
5.35.1 Aspersores.....	410
5.36 Ejercicios propuestos	417
6. Capítulo 6: Análisis dimensional y similitud dinámica	421
6.1 Generalidades	421
6.2 Definiciones.....	422
6.2.1 Parámetro dimensional	422
6.2.2 Parámetro adimensional.....	422
6.2.3 Ecuación dimensionalmente homogénea.....	423
6.3 Teorema de π (pi) de Vaschy-Buckingham.....	424
6.3.1 Pasos para la aplicación del teorema PI.....	427
6.3.2 Ejemplos de aplicación	427
6.4 Parámetros adimensionales comunes.....	431
6.4.1 Número de Reynolds: Re	431
6.4.2 Número de Froude: FR	432
6.4.3 Número de Mach: M_A	433
6.4.4 Número de Weber: W_e	433
6.4.5 Número de Euler: E_u	434
6.5 Ejercicios propuestos	434
6.6 Fuerzas que actúan en los modelos.....	436
6.6.1 Fuerzas de inercia sobre fuerzas de gravedad.....	436
6.6.2 Fuerzas de inercia sobre fuerzas de viscosidad.....	438
6.6.3 Fuerzas de inercia sobre fuerzas de tensión superficial	440
6.7 Ejemplos de Aplicación.....	441
6.7.1 Flujo a presión	441
6.7.2 Flujo a superficie libre	443
6.8 Ejercicios propuestos	444
7. Capítulo 7: Introducción al flujo real.....	447

7.1 Generalidades	447
7.2 Ecuación de conservación de la masa	447
7.3 Ecuación de conservación de Navier-Stokes.....	450
7.3.1 Fuerzas de cuerpo $F_B(B_x, B_y)$	453
7.3.2 Fuerzas de presión $F_p(P_x, P_y)$	453
7.3.3 Fuerzas viscosas $F_s(S_x, S_y)$	453
7.4 Aplicación de las Ecuaciones de Navier -Stokes	456
7.4.1 Flujo laminar entre dos placas planas.....	456
7.5 Ejercicios propuestos.....	460
Los Autores	463
Referencias	CDLXV

Presentación

El presente texto surge con la vocación de ser una herramienta con suficientes argumentos teóricos, conceptuales y prácticos para la formación de ingenieros en el área de la Mecánica de Fluidos. Su contenido es el resultado, tanto de muchos años de experiencia de sus autores en el estudio, la docencia y la investigación de los fluidos, como de recopilación de la enseñanza de ingenieros de mayor trayectoria que fueron profesores de los autores durante sus estudios de pregrado y en los diversos niveles de postgrado. Además, se ha respaldado en el conocimiento obtenido de la innumerable bibliografía existente en la actualidad sobre el ámbito de la Mecánica de Fluidos.

El contenido está orientado hacia la formación de estudiantes de pregrado en ingeniería, pero también como libro de consulta para profesionales y como texto didáctico para los docentes. Así, este libro comprende los conceptos básicos de Mecánica de Fluidos, que generalmente se abordan en los contenidos programáticos en los diversos programas de ingeniería a nivel de pregrado.

No obstante, su texto ha sido redactado de tal manera que no solo pueda ser entendido fácilmente por los estudiantes, sino también por otros lectores con poco conocimiento en el tema; con su publicación los autores pretenden ofrecer a través de la Editorial de la Universidad de Nariño un documento de muy buena calidad a un bajo precio, para que pueda ser adquirido por los estudiosos de los fluidos.

Como guía para el ingeniero-docente, el libro se ha dividido en siete capítulos, dentro de los cuales se encontrará un total de veintitrés temáticas, cada una de ellas finalizada con una sección de ejercicios propuestos, equivalente a una clase de aproximadamente dos horas, ello con el fin de proporcionar una herramienta didáctica tanto para estudiantes como para profesores.

1. Capítulo 1: Generalidades de la Mecánica de Fluidos

1.1 Introducción

La materia, tal como se la conoce, se divide para efectos prácticos en dos estados: *sólido* y *fluido*, este último dividido a su vez en estado *gaseoso* y *líquido* (Vennard y Street, 1979).

Tal como lo expresa Mataix (1982) la mecánica de fluidos es la base de la ingeniería aplicada en el área del estudio de los fluidos como el aire y el agua, siendo más común su aplicación en el área de hidráulica en sus diferentes denominaciones; hidráulica de tuberías, de canales, medidores de flujo, hidroeléctricas, instalaciones hidrosanitarias, explotación acuícola, oceanografía, ingeniería naval, hidráulica del medio poroso, maquinas hidráulicas y toda estructura hidráulica que el hombre pueda concebir.

1.2 Reseña histórica de la Mecánica de Fluidos

Se puede afirmar que la Mecánica de Fluidos ha venido creciendo junto con la evolución del hombre en la Tierra; así, algunas interrogantes sobre la composición y movimiento del agua, quizá pudieron ser de las primeras preguntas que el ser humano se haya hecho a sí mismo sobre la naturaleza y su funcionamiento. Así, el hombre en su curiosidad científica ha tratado de comprender los fenómenos físicos donde intervienen los fluidos y dar soluciones a los diferentes problemas que se presentan en esta compleja área del conocimiento.

Para elaborar esta breve reseña histórica, se revisaron algunos de los textos reconocidos de la Mecánica de Fluidos que describen cronológicamente su evolución, entre los autores se encuentran: (Franzini y Finnemore, 1999; Shames, 1995; Nakayama, 1998; Bergadà, 2006; White, 2004; Mataix, 1982); este último libro, de especial provecho en este aspecto pues presenta una secuencia cronológica muy bien detallada de las fechas más importantes en la

historia de la Mecánica de Fluidos. Del análisis de aquellos trabajos referidos, se extrajo la siguiente cronología, desde la Edad Antigua, pasando por el Renacimiento, hasta la Modernidad.

1.2.1 Edad Antigua

En la edad antigua quizá uno de los aportes científicos más relevantes es el conocido como principio de Arquímedes, 212 a. C., el cual aún se sigue aplicando en la ingeniería práctica (Franzini y Finnemore, 1999; Mataix, 1982). Los griegos y romanos con sus aportes en sistemas de riego, acueductos, barcos de vela y baños, cuya construcción se remonta al siglo cuarto a. C., muestran la relevancia que ha tenido esta área de los fluidos en la historia humana (Franzini y Finnemore, 1999).

Tal como lo describe Nakayama (1998), en relación a los avances de la Mecánica de Fluidos de la Edad Antigua “se descubrieron reliquias prehistóricas de canales de riego en Egipto y Mesopotamia, y se ha confirmado que los canales se construyeron hace más de 4000 años a. C.”.

1.2.2 Edad Media y Renacimiento

En la edad media no se reportan aportes importantes en el estudio de los fluidos, conocida también como la “edad oscura”. Solamente hasta el siglo XV se retoma el estudio de los fluidos, como la ecuación de continuidad, configuración de flujos y diseños preliminares de máquinas hidráulicas, aportes que se le reconocen a Leonardo da Vinci (Mataix, 1982, p. 4).

1.2.3 Modernidad

A partir del siglo XVII hasta el siglo XX se realizaron los aportes más importantes al estudio de los fluidos, se nombra a continuación el autor y su aporte: se destacan los aportes de Torricelli en el estudio de orificios y la relación de altura y presión atmosférica; Pascal con la ley de Pascal; Newton con la ley de la viscosidad; Bernoulli y el teorema de Torricelli; Euler quien planteó las ecuaciones diferenciales del movimiento de un fluido ideal; D’Alembert y la paradoja que lleva su

nombre; Chezy con la ecuación de fricción en canales y similitud dinámica; Lagrange y el flujo con potencial; Vénturi y su medidor de caudal, Fourneyron y el diseño de turbinas; Poiseuille y su aporte a la resistencia en flujo laminar; Weisbach y la ecuación de fricción en tuberías; Froude con su ley de similitud dinámica de Froude; Navier y Stokes y las ecuaciones más famosas de la hidrodinámica que llevan sus nombres; Reynolds y la clasificación de flujos laminar, de transición y turbulento, Bazin y el estudio de vertederos; Joukowski y el estudio de golpe de ariete y perfiles aerodinámicos; Lanchester en el tema de sustentación y arrastre; y en años recientes, Prandtl y la teoría de capa límite, considerado como el padre de la mecánica de fluidos moderna (Mataix, 1982, p. 4).

Según Shames (1995) la mecánica de fluidos, como se la conoce hoy, nació con los aportes de investigadores eminentes, como Reynolds, Froude, Prandtl y Von Kármán; y según su criterio, el estudio de los fluidos debe ser una mezcla de investigación teórica y experimental.

Aún quedan problemas por resolver, como la solución analítica de las ecuaciones diferenciales de Navier-Stokes en tres dimensiones, que ha sido catalogado por el Clay Mathematics Institute (CMI) como uno de los siete problemas del milenio, el cual reza: *“Esta es la ecuación que gobierna el flujo de fluidos como el agua y el aire. Sin embargo, no hay pruebas de las preguntas más básicas que uno puede hacer: ¿existen soluciones y son únicas?, ¿por qué pedir una prueba?, porque una prueba no solo da certeza, sino también comprensión.”* (CMI, 2020).

1.3 Definiciones básicas

1.3.1 Mecánica de Fluidos

La mayoría de los textos clásicos de *Mecánica de Fluidos* la definen de la siguiente manera: “es la rama de la mecánica aplicada que estudia el comportamiento de los fluidos, ya sea en reposo o en movimiento” (Streeter et al., 2000), (Giles et al., 1994); de manera más específica, y como lo expresa White (2004), “la Mecánica de Fluidos se ocupa del estudio de los fluidos (líquidos y gases) en movimiento (fluidodinámica) o en reposo (fluidoestática), abarcando entonces la

mecánica de fluidos un gran número de aplicaciones tales como, por mencionar unos pocos pero importantes y variados ejemplos: la respiración, el flujo sanguíneo, la natación, los ventiladores, las turbinas, los aviones y barcos, los ríos, los molinos de viento, las tuberías e instalaciones en edificaciones, el drenaje de carreteras, los misiles, los icebergs, motores, filtros, chorros y aspersores, entre muchas otras”.

1.3.2 Fluido

La definición más conocida, dada en los libros de texto, señala: “*El fluido es una sustancia que se deforma continuamente cuando se somete a un esfuerzo cortante, sin importar qué tan pequeño sea este esfuerzo*” (Streeter et al., 2000). Los fluidos pueden ser líquidos o gases; en términos generales, los sólidos difieren de los líquidos y los líquidos de los gases, por la **separación** y facilidad de **movimiento de sus moléculas**; estas separaciones son grandes para un gas, muy pequeñas en un líquido y en extremo pequeñas para un sólido (Vennard y Street, 1979).

1.3.3 Líquido

La clásica definición señala que líquido: “*Es un estado de la materia en el que las moléculas están relativamente libres para cambiar de posición unas respecto a otras, pero restringidas por fuerzas de cohesión, con el fin de mantener un volumen relativamente fijo*”. Un líquido se considera incompresible para efectos prácticos (Potter et al., 2015).

1.3.4 Gas

Un gas se define como: “*Es un estado de la materia en el que las moléculas prácticamente no se hallan restringidas por fuerzas de cohesión. El gas no tiene forma ni volumen definidos*”. El gas se considera un fluido compresible (Potter et al., 2015).

1.3.5 Flujo

El flujo se considera como el movimiento de un fluido. Este término suele causar confusión ya que, muchas veces, se lo confunde con el fluido mismo. Por ejemplo, se tiene como un fluido *el agua*, y el flujo es *el movimiento* del agua a través de algún conducto o espacio determinado.

1.3.6 Esfuerzo cortante

La componente de la fuerza en sentido tangencial (F_t) por unidad de superficie A , es el esfuerzo cortante promedio sobre dicha superficie (también conocido como esfuerzo de corte). El esfuerzo normal es definido como la fuerza normal (F_n) por unidad de superficie A . El esfuerzo cortante en un punto, es el valor límite de la fuerza por unidad de área a medida que dicha área se reduce a un punto (Streeter et al., 2000, p. 3). Este concepto se representa gráficamente en la **Figura 1-1** y matemáticamente con las Ecuaciones 1.1 y 1.2.

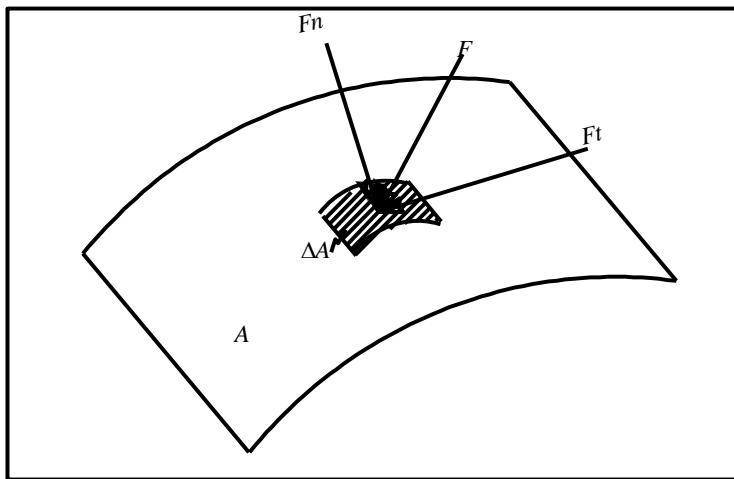


Figura 1-1.- Representación gráfica del esfuerzo cortante.

$$\tau = \frac{F_t}{A} \quad (1.1)$$

Con τ como el esfuerzo cortante promedio.

$$\tau_p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Ft}{\Delta A} \tag{1.2}$$

Donde τ es el esfuerzo cortante en un punto, ΔFt es un diferencial de fuerza y ΔA es el diferencial de superficie. El esfuerzo de corte es importante en Mecánica de Fluidos, ya que el movimiento de los fluidos se debe a la existencia de este esfuerzo.

1.4 Sistema de unidades

1.4.1 Sistemas vigentes

Según Niño y Duarte (2007), los sistemas se pueden clasificar en sistemas métricos físicos, sistemas métricos técnicos y el sistema inglés. El ingeniero italiano Giorgi propuso, en 1901, un sistema conocido como sistema Giorgi o práctico, el cual perdió su vigencia y dio origen al sistema técnico en 1960 (García, 1987). Para Colombia, se adopta el sistema internacional de medidas (SI) mediante el Decreto 3464 de diciembre 26 de 1980.

En la **Figura 1-2** se presenta, mediante un cuadro sinóptico, la clasificación de los sistemas de unidades.

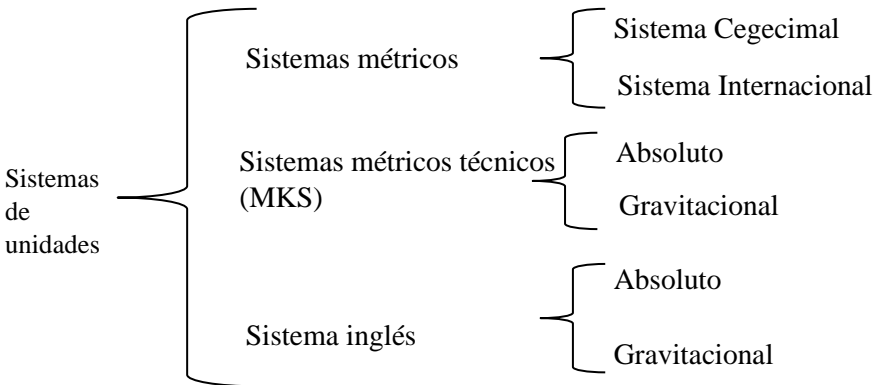


Figura 1-2. Esquema de clasificación de los sistemas de unidades.

Sistemas métricos físicos

Dentro de este tipo de sistemas se encuentran:

- Sistema Cegesimal o Científico (o sistema Gaussiano) (CGS). Fue establecido en 1881 en el Congreso de Electricidad en París. Se conoce como sistema CGS, refiriéndose a las tres unidades básicas que son centímetro (c), gramo (g), segundo (s).
- Sistema Internacional (SI). Creado por acuerdo internacional en la XI conferencia de Pesos y Medidas, celebrada en París en el año 1960. Conocido también como el Sistema Métrico Decimal. Tiene como magnitudes (o dimensiones) fundamentales la longitud, masa y tiempo con las unidades básicas de metro (m), kilogramo masa (kg), segundo (s).

Sistemas métricos técnicos

Dentro de esta clasificación, se encuentra el *sistema de los ingenieros*, conocido como MKS, el cual puede ser *gravitacional* o *absoluto*. Este sistema tiene como magnitudes fundamentales: la *longitud*, *fuerza*, *tiempo*; y como unidades básicas, respectivamente: el metro (m), el kilogramo fuerza (kgf) y el segundo (s). En el sistema gravitacional, la masa se expresa en kilogramos masa y en el sistema absoluto se expresa en unidades técnicas de masa (UTM). Para efectos de no confundir símbolos, en adelante, el kilogramo fuerza (kgf) se lo denominará también como kilopondio (kp).

Sistema Inglés

Adoptado con base en el sistema gravitacional británico, puede ser *gravitacional* o *absoluto*. En este sistema las magnitudes (o dimensiones) fundamentales son: longitud, fuerza, tiempo. Se encuentra basado en unidades inglesas: pie (ft), libra fuerza (lbf) y segundo (s), para las cantidades de longitud, fuerza, tiempo, respectivamente. En el *gravitacional*, la masa se expresa en libra-masa y en el absoluto, en *Slug*. También, como unidad de longitud, en vez de *pie* (ft o pie) se suele usar la *pulgada* (in ó pulg.).

1.4.2 Magnitudes fundamentales (o dimensiones)

Hay nueve cantidades que se consideran dimensiones fundamentales: longitud, masa, tiempo, temperatura, cantidad de sustancia, corriente eléctrica, intensidad luminosa, ángulo plano y ángulo sólido; de entre estas dimensiones, las más usadas en Mecánica de Fluidos son: longitud, masa, tiempo y temperatura. En la Tabla 1-1, se indica las cantidades o magnitudes básicas y las unidades respectivas en los diferentes sistemas de unidades.

Tabla 1-1.- Unidades de las dimensiones básicas

CANTIDAD	SISTEMAS DE UNIDADES			
	SI	S. Inglés (abs)	MKS (abs)	CGS
Longitud (l)	metro (m)	pie (ft)	metro (m)	centímetro (cm)
Masa (m)	kilogramo (kg)	slug	U.T.M.	gramo (g)
Tiempo (t)	segundo (s)	segundo (s)	segundo (s)	segundo (s)
Temperatura (°)	Kelvin (K)*	Grados Rankine (°R)	Kelvin (K)	Kelvin (K)

* No es correcto decir 20 grados Kelvin sino 20 Kelvin, pero sí es correcto decir 20 grados Rankine.

U.T.M. se conoce como Unidad Técnica de Masa, se establece a partir de las unidades de fuerza y aceleración. Para un cuerpo que cae en el vacío la aceleración a la que está sometido es la gravedad ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$ al nivel del mar) y la única fuerza que actúa es su peso. La UTM es la masa a la cual una fuerza de un kp (kilo-fuerza) le imprime una aceleración de $1,0 \text{ m/s}^2$. Esta unidad se utiliza para medir la masa, cuando la fuerza se mide en kg-fuerza (o kilopondio (kp)).

Algunas conversiones comunes son:

- 1 Slug = 1,4881639 UTM.
- 1 Slug = 14,6 kg.
- 1 kg = 0,1019 UTM.
- 1 N = $1,0 \text{ kg.m/s}^2 = 100 \text{ 000 dinas}$.
- 1 pie = 0,3048 m.
- 1 slug = 14600 g.

- (1 Kelvin) $K = ^\circ C + 273, 15$.
- (Rankine) $^{\circ}R = ^\circ F + 459, 67$.

Otras unidades bastante útiles son:

- 1 hectárea (ha) = 10000 m².
- 1 tonelada métrica (t) = 1000 kg.
- 1 litro (L) = 0,001 m³.
- 1 galón (gl) = 3,785 litros.
- La densidad se puede expresar en gramos/litro (g/L).
- 1 caballo de potencia HP = 76(kp.m)/s.
- 1 caballo de vapor CV = 75(kp.m)/s.

1.4.3 Cantidades derivadas

En la Tabla 1-2, que se muestra a continuación, se indican algunas unidades derivadas de uso frecuente en la Mecánica de Fluidos.

Tabla 1-2.- Unidades derivadas

CANTIDAD	SISTEMAS DE UNIDADES			
	SI	S. Inglés	MKS	CGS
Fuerza (F)	Newton (N)	lbf.(= slug.ft/s ²)	kilopondio (kp)	Dinas
Presión (p)	Pa=N/m ²	lbf/ft ²	m.c.a	Baria = dina/cm ² = 0,1 Pa
Viscosidad dinámica (μ)	Pa.s	lbf.s/ft ² ó slug/(ft.s)	kp.s/m ²	Poise = g/cm/s
Viscosidad cinemática (ν)	m ² /s	ft ² /s	m ² /s	Stoke = cm ² /s
Energía (E)	Julio (J = N.m)	lbf.ft	kp.m.(cal)	Ergio = g.cm ² /s ² = 10 ⁻⁷ .J
Potencia (P)	Vatio(W = J/s)	HP = 76kp.m/s	CV = 75kp.m/s	g.cm ² /s ³ = 10 ⁻⁷ .W

Cal: caloría, CV: caballo de vapor, HP: caballo de potencia.

Una forma práctica de recordar la conversión de unidades de la presión es tomar como base la presión atmosférica en diferentes sistemas de unidades de la siguiente manera:

$$1 \text{ atmósfera} = 10,33 \text{ m.c.a.} = 14,7 \text{ psi} = 760 \text{ mm.Hg} = 10330 \text{ kp/m}^2 = 101337,3 \text{ N/m}^2 = 101,3 \text{ kPa} = 1,013373 \text{ bares.}$$

La aceleración en el sistema CGS se da en 1,0 gal (1 galileo) = 1 cm/s².

1.4.4 Abreviaturas

En el SI, se escriben en minúscula las abreviaturas cuyos nombres de una unidad sea común, como por ejemplo, segundo (s), hora (h), metro (m), kilogramo masa (kg), kilogramo fuerza (kf), kilopondio (kp), libra fuerza (lbf), pie (ft), metro de columna de agua (m.c.a.). Si es nombre propio se escribe la primera letra con mayúscula y la segunda con minúscula, por ej. Newton (N), Pascal (Pa), Watts (W), a excepción del litro, que se representa con letra mayúscula (L).

1.4.5 Cifras significativas

En los cálculos de ingeniería, por lo general no es común basarse en un cálculo más allá de tres números significativos. El espesor de una lámina puede enunciarse como 1 centímetro, lo cual, en general, no es tan preciso como lo que implicaría decir 1,00 centímetros. No es correcto expresar los resultados de un problema con más cifras significativas que los datos del enunciado. Si se trata de longitudes por efectos prácticos basta con aproximación al centímetro.

1.4.6 Prefijos

Los múltiplos o submúltiplos de 10³ se indican mediante prefijos, los cuales no se pueden repetir; por ejemplo, la forma correcta para 10⁻⁹ es *nano*, pero no se puede decir *un mili micro*. Los prefijos más usados se indican a continuación en la Tabla 1-3.

Tabla 1-3.-Prefijos del Sistema Internacional

PREFIJO	MÚLTIPLO	ABREVIATURA
Tera	10^{12}	T
Giga	10^9	G
Mega	10^6	M
Kilo	10^3	k
Centi	10^{-2}	(c)
Mili	10^{-3}	(m)
Micro	10^{-6}	μ (mu)
Nano	10^{-9}	(n)
Pico	10^{-12}	(p)

1.5 Magnitudes básicas

En el argot científico se han establecido unidades básicas para cuantificar las cantidades físicas. En Mecánica de Fluidos las unidades más utilizadas son la longitud, la masa, tiempo y temperatura, con sus unidades de metro, kilogramo, segundo y Kelvin; respectivamente. La forma de definir estas unidades ha venido cambiando con el tiempo, las cuales son revisadas anualmente por organismos internacionales como el Comité Internacional de Pesas y Medidas (CIPM) el cual se puede consultar en su sitio web [<https://www.bipm.org/en/committees/ci/cipm>]. En este sentido en su última revisión anual 2020-2021, consigna el cambio en la calibración del kilogramo, la trazabilidad para la nueva definición se logró a través de la relación conocida entre la masa del Prototipo Internacional del Kilogramo, IPK, por sus siglas en inglés y la constante de Planck. Esto cambió el 1 de febrero de 2021, cuando el Comité Consultivo de Masa y Magnitudes Relacionadas (CCM) implementó el valor por consenso.

1.6 Ejemplos de sistemas de unidades

Ejemplo 1.1. Demostrar que una presión de $10^5 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ bar}$.

Como $1 \text{ Pascal} = 10^{-5} \text{ bares}$ y $1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pascal}$, se tiene que:
 $10^5 \text{ N/m}^2 = 10^5 \text{ Pa} = 10^5 (10^{-5} \text{ bar}) = 1 \text{ bar}$

Ejemplo 1.2. Demostrar que un kg (masa) es igual 0,1019 UTM.

Por la segunda ley de Newton se tiene que:

$F=m \cdot a$, reemplazando las unidades de cada cantidad se obtiene:

$[Kp] = [UTM] \cdot [m/s^2]$, como $[1kp] = [9,81N]$, y como $[1N] = [kg \cdot m/s^2]$,
 Reemplazando $[9,81 kg \cdot m/s^2] = [UTM] [m/s^2]$, despejando kg, se tiene:
 $1kg = [UTM] [m/s^2]/[9,81m/s^2] = 0,1019 UTM$.

Ejemplo 1.3. Deducir las unidades de potencia.

Potencia = Energía/tiempo

Energía = fuerza·longitud = $[N \cdot m] = 1 [Joule]$

Potencia = Energía/tiempo = $1 [Julio]/s = 1 \text{ Vatio (1Watts)}$

Ejemplo 1.4. Cálculo de la tarifa de energía. Si se utilizan los siguientes electrodomésticos: calentador, bombilla, estufa, plancha, calcular el valor de la energía que gastan en un día, a partir de sus potencias y horas de uso según, se presentan a continuación en la Tabla 1-4, en cuya cuarta columna se presenta el resultado del cálculo.

Tabla 1-4.- Datos y cálculos del problema

1 Electrodoméstico	2 Potencia	3 Tiempo, en horas por día	4 Energía
Calentador	2000 W	2,0 h	4 kW.h
Bombilla	100 W	4,0 h	0,4 kW.h
Estufa	6000 W	1,0 h	6,0 kW.h
Plancha	750 W	0,5 h	0,375 kW.h
TOTAL			10,775 kW.h

Si el costo de energía es de 470\$/ kW.h, entonces el costo total por concepto de consumo de energía es de $(10,775kw \cdot h) (470\$/ kW \cdot h) = 5064,25 \text{ \$/día}$.

1.7 Ejercicios propuestos

Para las demostraciones se puede implementar un procedimiento desde uno de los lados de la igualdad hasta llegar al otro.

Ejercicio 1.6.1. Demostrar que un HP = 0,7456 kW

Ejercicio 1.6.2. Demostrar que 1slug = 14600 g

Ejercicio 1.6.3. Demostrar que 10,33 m.c.a. = 14,7 psi

Ejercicio 1.6.4. Si el peso específico del agua en el sistema MKS es de 1000 kp/m³, demostrar que en el sistema inglés es de 62,4 lb_f/pie³. Usar 5 decimales para las unidades. (1kp = 2,20462l b_f; 1 m = 3,28084 pie).

Ejercicio 1.6.5. Teniendo en cuenta que todos los términos al lado y lado de la igualdad de una ecuación deben tener las mismas dimensiones, determine las dimensiones de la cantidad (n) en la siguiente ecuación:

$$Q = \frac{AR_H^{2/3}S^{1/2}}{n}, \text{ donde: } Q \text{ (m}^3/\text{s), } A \text{ (m}^2\text{), } R_H \text{ (m), } S \text{ (m/m). } R: n \text{ [sm}^{-1/3}\text{].}$$

Ejercicio 1.6.6. Hay una cantidad llamada viscosidad dinámica (μ), la cual aparece en la fórmula

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{V}{d}, \text{ donde } F \text{ es una fuerza, } A \text{ es un área, } V \text{ es una velocidad y } d \text{ es una longitud.}$$

Encontrar las unidades de la viscosidad dinámica (μ) en el Sistema Internacional. Ayuda: se despeja la viscosidad y se sustituyen las unidades de cada variable.

Ejercicio 1.6.7. Deducir el valor de la gravedad en unidades inglesas a partir del valor dado en el Sistema Internacional.

Ejercicio 1.6.8. Obtener el valor de la presión atmosférica al nivel del mar en lb/pie² y en lb/pulg², a partir del valor dado en el sistema MKS.

2. Capítulo 2: Propiedades de los Fluidos

2.1 Introducción

Como ya se señaló, la materia es dividida para efectos prácticos, en dos estados, sólido y fluido, este último a su vez, dividido en estado gaseoso y líquido. Vale aclarar que, aunque el estado fluido comprende el estado plasma de la materia, el estudio de este nuevo estado, se encuentra fuera del alcance de este texto.

En el estudio de la Mecánica de Fluidos se trabaja con un fluido, ya sea en reposo o en movimiento, por lo que conocer sus propiedades se convierte en un tema imprescindible, en este sentido, las propiedades de los fluidos de interés en la Mecánica de Fluidos son las siguientes:

1. Densidad
2. Peso específico
3. Gravedad específica
4. Presión de vapor
5. Compresibilidad y elasticidad
6. Tensión superficial
7. Viscosidad

A continuación, se detallan cada una de las propiedades mencionadas.

2.2 Densidad

La *densidad* de un fluido, también conocida como *densidad absoluta*, se denota con la letra griega ρ (rho), y es la cantidad de masa de una sustancia por unidad de volumen. Matemáticamente se expresa como:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta \forall} \quad (2.1)$$

La densidad puntual se define como:

$$\rho = \frac{\text{Lim}}{\Delta \forall \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta \forall} \quad (2.2)$$

Donde, m es la masa del fluido y \forall es el volumen del mismo. Δ indica un diferencial de la cantidad indicada. La densidad es una propiedad que cambia con la temperatura del fluido. Para el agua, la variación de la densidad se ha medido en laboratorio y por lo general se presenta en tablas o gráficas, como la Tabla 2-1.

Tabla 2-1.- Densidad del agua a diferentes temperaturas.

T (°C)	0	2	5	10	15	20	30
ρ(kg/m³)	999,87	999,97	999,99	999,73	999,13	998,23	995,67
T (°C)	40	50	70	80	90	100	
ρ(kg/m³)	992,24	998,00	978,00	972,00	965,00	958,00	

Fuente: (Azevedo et al., 1998, p. 10)

Los valores de referencia del agua a 4°C, en los diferentes sistemas de unidades, se presentan a continuación en la Tabla 2-2.

Tabla 2-2.- Valores de referencia de densidad para agua a 4°C

Sistema de unidad	Densidad (ρ)
Sistema Internacional	1000 kg/m ³
Sistema Inglés	1,94 slug/pe ³
Sistema MKS	101,94UTM/m ³
Sistema Cegesimal	1,0 g/cm ³

Como ocurre para los demás fluidos, la densidad del agua varía con la temperatura; la relación aproximada está dada por la expresión (Potter et al., 2015):

$$\rho_{H_2O} = 1000 - \frac{(T - 4)^2}{180}, \quad \text{en kg/m}^3 \quad (2.3)$$

Con T siendo la temperatura en [°C].

Otra expresión reportada por Timmons y Ebeling (2010), que se puede utilizar para determinar con mayor precisión la densidad del agua en kg/m³ para diferentes temperaturas es:

$$\rho(Kg / m^3) = 999,842594 + (6,793952 * 10^{-2} * T) - (9,095290 * 10^{-3} * T^2) + (1,001685 * 10^{-4} * T^3) - (1,120083 * 10^{-6} * T^4) + (6,536336 * 10^{-9} * T^5) \tag{2.4}$$

Donde T corresponde a la temperatura en grados Celsius (grados centígrados °C).

Para el aire, la densidad en función de la temperatura se indica en la Tabla 2-3.

Tabla 2-3.- Densidad del aire a diferentes temperaturas.

T (°C)	-40	-30	-20	-10	0	10	20	30	40
ρ (kg/m ³)	1,514	1,452	1,394	1,341	1,292	1,247	1,204	1,164	1,127
T (°C)	50	60	70	80	90	100	110	120	
ρ (kg/m ³)	1,092	1,060	1,029	0,9995	0,9720	0,9459	0,9213	0,8978	

Fuente: (Mott y Untener, 2015, p. 496).

El instrumento para medir la densidad es el densímetro, el cual consiste en un tubo de vidrio cerrado herméticamente, con un lastre compuesto de esferas de plomo, que se introduce en el fluido, y marca directamente la densidad en una escala graduada, que coincida con el nivel superficial del fluido en estudio.

2.3 Peso específico

El peso específico se denota con la letra griega γ (gamma), y es la relación que existe entre el peso (W) por unidad de volumen (∇); matemáticamente, se expresa como:

$$\gamma = \frac{W}{\nabla} \tag{2.5}$$

Si se reemplaza $W = m \cdot g$, donde m es la masa y g es la aceleración de la gravedad, y $\nabla = m/\rho$, en la ecuación (2.5), se obtiene la relación entre densidad y peso específico, dada como:

$$\gamma = \rho \cdot g \quad (2.6)$$

A continuación, en la Tabla 2-4, se presentan los valores del peso específico del agua a 4°C, en los cuatro sistemas de unidades.

Tabla 2-4.- Valores de referencia del peso específico para agua a 4°C

Sistema de Unidades	Peso específico (γ)
Sistema Internacional	9810 N/m ³
Sistema Británico	62,4 lb/pie ³
Sistema MKS	1000 kp/m ³
Sistema Cegesimal	981 dinas/cm ³

De manera similar a lo anteriormente comentado para el caso de la densidad, el peso específico de los fluidos también varía con la temperatura, tal y como se muestra para los casos del aire y el agua, respectivamente, en las Tabla 2-5 y Tabla 2-6.

Tabla 2-5.- Peso específico del aire a diferentes temperaturas.

T (°C)	-40	-30	-20	-10	0	10	20	30	40
γ (N/m ³)	14,85	14,24	13,67	13,15	12,67	12,23	11,81	11,42	11,05
T (°C)	50	60	70	80	90	100	110	120	
γ (N/m ³)	10,71	10,39	10,09	9,802	9,532	9,277	9,034	8,805	

Fuente: (Mott y Untener, 2015, p. 496).

Tabla 2-6.- Peso específico del agua a diferentes temperaturas.

T (°C)	0	2	4	5	10	15	20	30
γ (N/m ³)	9808,72	9809,71	9810,00	9809,90	9807,35	9801,47	9792,64	9767,52
T (°C)	40	50	60	70	80	90	100	
γ (N/m ³)	9733,87	9790,38	9643,23	9594,18	9535,32	9466,65	9397,98	

Fuente: adaptado de (Azevedo et al., 1998, p. 10).

Otra manera de representar la variación del peso específico de los fluidos, es a partir de gráficas como la que muestra la **Figura 2-1**, en la cual se expresa la variación de dicha propiedad del agua en función de la temperatura al estar sometida a diferentes presiones.

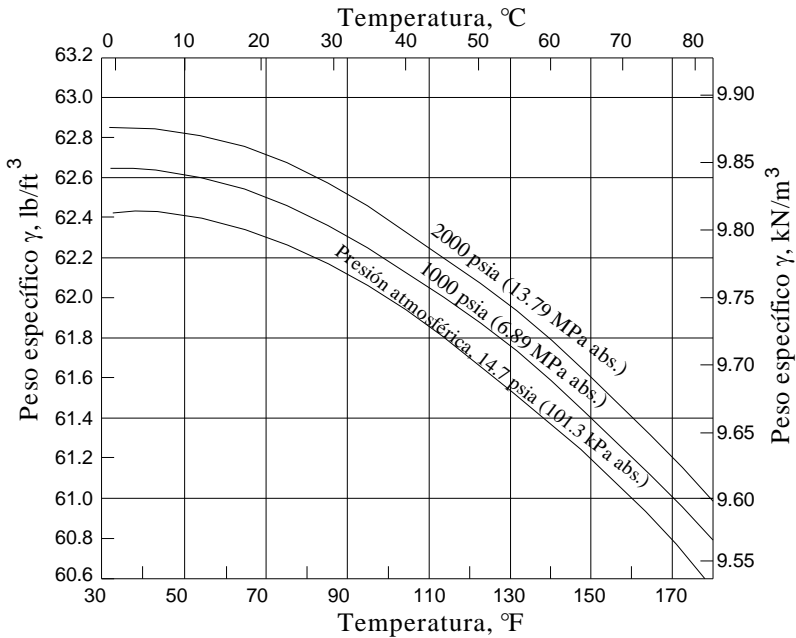


Figura 2-1.- Peso específico del agua pura en función de la temperatura y la presión.

Fuente: Adaptada de (Franzini y Finnemore, 1999, p. 14).

Potter et al. (2015), presentaron la ecuación (2.7) para la estimación aproximada del peso específico del agua en N/m^3 en función de la temperatura T en $^{\circ}C$.

$$\gamma_{H_2O} = 9800 - \frac{(T - 4)^2}{18} \tag{2.7}$$

2.4 Gravedad específica

La *gravedad específica* o *peso específico relativo* o *densidad relativa*, se denota como (G_s), y es la relación entre la densidad de una sustancia ($\rho_{sustancia}$) a cualquier temperatura y la densidad del agua a $4^{\circ}C$ ($\rho_{agua4^{\circ}C}$) y se expresa así:

$$G_s = \frac{\rho_{sustancia}}{\rho_{agua4^\circ C}} \quad (2.8)$$

O también usando la relación de los pesos específicos como peso específico de la sustancia ($\gamma_{sustancia}$) y el peso específico del agua a 4°C ($\gamma_{agua4^\circ C}$):

$$G_s = \frac{\gamma_{sustancia}}{\gamma_{agua4^\circ C}} \quad (2.9)$$

El peso específico relativo para el agua a 4 °C es de 1,0 y para el aire es de 0,00123, en condiciones estándar (sometidos a 1 atmósfera). Como la gravedad específica es la relación entre dos unidades iguales, es una cantidad adimensional y se denota utilizando un guion entre corchetes [-]. Para el mercurio, Potter et al. (2015), proporcionaron la ecuación (2.10) para el cálculo de la gravedad específica $G_{S_{Hg}}$ en función de la temperatura T en °C.

$$G_{S_{Hg}} = 13,6 - 0,0024 \cdot T \quad (2.10)$$

En la Tabla 2-7 se muestra valores típicos de densidad, peso específico y gravedad específica de líquidos comunes:

Tabla 2-7.- Propiedades de líquidos comunes.

Líquido	G_s (-)	γ (kN/m ³)	ρ (kg/m ³)
Acetona	0,787	7,72	787
Alcohol etílico	0,787	7,72	787
Alcohol metílico	0,789	7,74	789
Alcohol propílico	0,802	7,87	802
Amoníaco	0,826	8,10	826
Benceno	0,876	8,59	876
Tetracloruro de Carbono	1,590	15,60	1590
Aceite de ricino	0,960	9,42	960
Etilenglicol	1,100	10,79	1100

Líquido	G_s (-)	γ (kN/m ³)	ρ (kg/m ³)
Gasolina	0,680	6,67	680
Glicerina	1,258	12,34	1258
Keroseno	0,823	8,07	823
Aceite de linaza	0,930	9,12	930
Mercurio	13,540	132,80	13540
Propano	0,495	4,86	495
Agua de mar	1,030	10,10	1030
Trementina	0,870	8,53	870
Aceite de petróleo, medio	0,852	8,36	852
Aceite de petróleo, pesado	0,906	8,89	906

Fuente: (Mott y Untener, 2015, p. 490).

2.5 Presión de vapor

La presión de vapor (P_v), es la presión *parcial* que ejercen las moléculas en estado gaseoso (vapor) sobre la superficie del líquido del cual se han evaporado. Los líquidos se evaporan porque las moléculas se desprenden de la superficie libre del líquido; si se tiene un líquido en un recipiente cerrado, cierta fracción se evapora, y la vaporización cesa cuando el número de moléculas que se han escapado en vapor desde la superficie líquida es igual que el número de las que regresan, (las cuales chocan con la superficie líquida y se condensan, regresando nuevamente al estado líquido), por lo tanto, se dice que se ha alcanzado un estado de equilibrio entre los estados gaseoso y líquido de la sustancia contenida en el recipiente.

La presión de vapor depende de la actividad molecular, y ésta a su vez depende de la temperatura; por lo tanto, cualquier incremento en la temperatura repercutirá en un incremento de la presión de vapor. Cuando la presión por encima del líquido es igual a la presión de vapor, se produce la **ebullición**, es decir ya no puede sostenerse el estado líquido del agua porque las fuerzas de atracción no son suficientes para contener las moléculas en una fase líquida. Por ejemplo, la ebullición del agua se puede dar a temperatura ambiente, si la presión se reduce lo suficiente (Streeter et al., 2000, p. 19). En la **Tabla 2-8**, se presentan los valores de la presión de vapor en función de la temperatura.

Tabla 2-8.- Presión de vapor del agua a diferentes temperaturas.

T (°C)	0	5	10	15	20	25	30	35
P_v (m.c.a.)	0,06	0,09	0,12	0,17	0,25	0,33	0,44	0,58
T (°C)	40	50	60	70	80	90	100	
P_v (m.c.a.)	0,76	1,26	2,03	3,20	4,86	7,18	10,33	

Fuente: (Streeter et al., 2000, p. 712).

La presión de vapor es muy útil en los estudios del fenómeno de **cavitación**, el cual sucede cuando un líquido está sometido a una presión menor que su presión de vaporización, formándose burbujas de vapor localmente, las cuales son transportadas por el flujo a regiones de mayor presión; al estar sometidas a mayor presión, esas burbujas colapsan y este colapso produce altísimos valores de presión puntual, la cual es capaz de dañar las superficies sólidas junto a las cuales se produce el colapso de las burbujas, como ocurre con el hierro y otros materiales, que conforman los tubos, las carcasas de las bombas hidráulicas, las hélices, entre otros (Streeter et al., 2000) y (Potter et al., 2015).

Ejemplo 2.1. Calcule la presión de vacío necesaria para causar cavitación en un flujo de agua a una temperatura de 80°C, a una altitud de 3000 m.s.n.m.

Solución:

La presión atmosférica, para efectos prácticos, disminuye 1,2 metros por cada 1000 metros de altura en la atmósfera. Siendo para el nivel del mar de 10,33 m.c.a.; por lo tanto, para 3000 m.s.n.m. se tiene que la presión atmosférica es igual a 10,33 m.c.a.- $(1,2 \text{ m} \cdot 3000/1000) = 6,73$ m.c.a.

La presión de vapor para 80°C, según la Tabla 2-8, es de 4,86 m.c.a.; por lo tanto, se debe producir un vacío de 4,86 m.c.a. - 6,73 m.c.a. = - 1,87 m.c.a., que equivale a una presión de 1,87 m.c.a. de vacío.

Para complementar el presente análisis se recomienda al lector ver una solución similar en el Ejemplo 1.5 de (Potter et al., 2015, p. 21).

2.6 Módulo de elasticidad volumétrico

Se expresa como la relación de la *variación de la presión* (dp) a la *variación de volumen* ($d\forall$) por *unidad de volumen inicial* (\forall_i), y refiere la compresibilidad de un fluido (Giles et al., 1994). Matemáticamente, se expresa como:

$$E = \frac{dp}{-d\forall/\forall_i} = - \frac{p_f - p_i}{\frac{(\forall_f - \forall_i)}{\forall_i}} \quad (2.11)$$

Los subíndices i y f , indican inicial y final, respectivamente. Según Potter et al. (2015), todos los fluidos se comprimen si la presión aumenta, y si ésta presión aumenta también lo hace la densidad. El $d\forall$ se calcula como el volumen final (\forall_f) menos el volumen inicial (\forall_i). También se puede definir usando valores de presión y densidad, como la relación del cambio en la presión (dp), con respecto al cambio relativo de la densidad ($d\rho/\rho_i$), se expresa en la siguiente ecuación:

$$E = \frac{dp}{d\rho/\rho_i} = \frac{p_f - p_i}{\frac{(\rho_f - \rho_i)}{\rho_i}} \quad (2.12)$$

Para el agua, E a una atmósfera de presión es aproximadamente de 2100 MPa, (310 000 psi); para el aire, en condiciones normales, es igual a 1,0 atmósfera. En general, para un gas, es igual a la presión de dicho gas.

Teniendo en cuenta que para causar un cambio del 1,0% en la densidad del agua se requieren 21 MPa, los líquidos se consideran incompresibles. Si un gas experimenta cambios \geq al 4,0% se considera compresible.

Los usos de E , en la práctica, están relacionados con el cálculo del *golpe de ariete* en el flujo de líquidos en conductos a presión, el cual relaciona los módulos de elasticidad del fluido y del material del conducto. Por otro lado, se usa también para estimar la velocidad del sonido (C) a

través de líquidos, ya que está dada como $C = \sqrt{E/\rho}$, donde E [N] y ρ [kg/m³], que para el agua en condiciones estándar es $C=1450$ m/s. En la Tabla 2-9, se presentan los valores de E del agua para diferentes temperaturas.

Tabla 2-9.- Módulo de elasticidad volumétrico del agua a diferentes temperaturas.

T (°C)	0	5	10	15	20	25	30	35
E (N/m ²)	204	206	211	214	220	222	223	224
T (°C)	40	50	60	70	80	90	100	
E (N/m ²)	227	230	228	225	221	216	207	

Fuente: (Streeter et al., 2000, p. 712).

Ejemplo 2.2. El líquido comprimido en un cilindro tiene un volumen de un (1,0) litro a 1,0 MPa de presión, y un volumen de 995 cm³ a 2,0 MPa. ¿Cuál es el módulo de elasticidad volumétrico de dicho fluido? (Streeter et al., 2000, p. 18).

Solución:

Cambio en la presión $dp = 2 \text{ MPa} - 1 \text{ MPa} = 1 \text{ MPa}$,

$\forall i = 1,0 \text{ L}$, cambio en el volumen $dV = (0,995 \text{ L} - 1,000 \text{ L}) = -0,005 \text{ L}$.

$E = 1 \text{ MPa} / (-0,005 \text{ L} / 1,0 \text{ L}) = 200 \text{ MPa}$.

2.7 Tensión superficial

La tensión superficial se denota con la letra griega *sigma* (σ), y tal como lo establece (Streeter et al., 2000, p. 20), se define como el trabajo o energía superficial por unidad de área, que debe realizarse para llevar moléculas desde el interior del líquido hasta la superficie, en un número suficiente para crear una nueva unidad de superficie; matemáticamente, se expresa como:

$$\sigma = \frac{\Delta F}{\Delta L} \quad (2.13)$$

Con ΔF como un diferencial de fuerza y ΔL como un diferencial de longitud. Se puede expresar en unidades de Joule sobre metro cuadrado (J/m^2), o en Newton sobre metro (N/m).

Hay que señalar que, en el interior de un líquido, las fuerzas entre moléculas son iguales en todas las direcciones, siendo la resultante nula. En la interfaz entre líquido y gas, las moléculas ejercen una fuerza que tiene una componente en la capa de la interfaz perpendicular a ella y en dirección al líquido, las moléculas superficiales tienen mayor energía que las interiores, lo que hace que las moléculas del interior sean llevadas hacia la superficie (Giles et al., 1994).

Por otra parte, alrededor de cada molécula de un líquido en reposo, se desarrollan fuerzas moleculares de cohesión que actúan dentro de una pequeña zona alrededor de un radio r . Las moléculas del líquido que se encuentran a una profundidad mayor que r , producen fuerzas de atracción que se compensan o equilibran; lo contrario acontece con las moléculas que se encuentran dentro de la capa de espesor r en la proximidad a la superficie libre. Dentro de esta capa se ejercen fuerzas resultantes de cohesión en dirección hacia el líquido, por lo reducida de las fuerzas de cohesión del medio que se encuentra encima de la superficie libre (por ejemplo, aire). Estas fuerzas impulsan a las partículas inferiores a un movimiento ascendente, que solo es posible al desarrollarse un trabajo por el movimiento de las moléculas, equivalente al incremento de energía potencial ganado por las mismas (Sotelo, 2005).

Los líquidos tienen las propiedades de *cohesión* y *adhesión*; ambas son formas de atracción molecular. La cohesión permite que un líquido resista esfuerzos de tensión, mientras que la adhesión le permite adherirse a otro cuerpo. En la interfase entre un líquido y un gas, es decir, en la superficie del líquido, así como en la superficie entre dos líquidos inmiscibles (no mezclables), la fuerza de atracción no compensada entre moléculas forma una película imaginaria capaz de resistir tensiones. Esta propiedad de los líquidos es la denominada *tensión superficial*. Debido a que esta tensión actúa en una superficie,

se comparan dichas fuerzas midiendo la tensión por unidad de longitud de superficie (Franzini y Finnemore, 1999).

2.7.1 Capilaridad

La capilaridad es consecuencia de la tensión superficial y es la propiedad de aplicar fuerzas sobre fluidos, mediante tubos finos o medios porosos; esta propiedad, tiene efecto significativo en tubos de diámetros aproximadamente menores a 10 mm (0,010 m) (Giles et al., 1994).

En la Figura 2-2, se ilustran las fuerzas que actúan sobre la superficie libre del fluido, donde P es la fuerza debido al peso, F_c es la fuerza de cohesión que ejercen las moléculas del interior del fluido sobre aquellas localizadas en la superficie y F_a es la fuerza de adhesión que ejercen las moléculas de la pared sobre aquellas más alejadas.

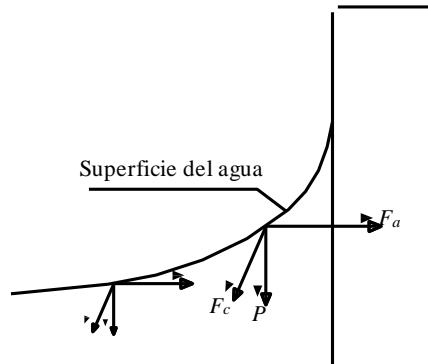


Figura 2-2.- Fuerzas actuando sobre la superficie de un fluido.

Según Simon (1983), otra importante contribución al efecto físico de la elevación capilar, lo constituye la adhesión del agua a la mayor parte de los materiales sólidos. Los sólidos que tienen adhesión positiva por el agua se llaman “hidrófilos”, o que tienen atracción por el agua; y los que la repelen son “hidrófobos”, o que tienen adhesión negativa con el agua.

Según García (1987), al colocar un capilar de forma vertical en un recipiente que contiene líquido que moje, el líquido asciende por el capilar, hasta alcanzar una determinada altura (h). Según la **Figura 2-3**, al aplicar la ecuación (2.14) a la superficie del menisco en el capilar que con gran aproximación se puede considerar como un casquete esférico de radio (R).

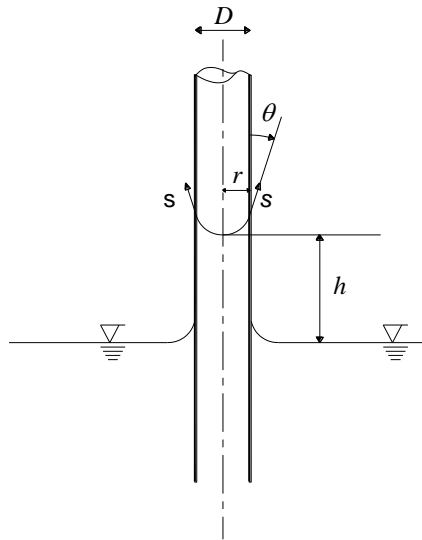


Figura 2-3.- Diagrama del ascenso capilar. Adaptada de: (Franzini y Finnemore, 1999, p. 24).

La relación entre el radio de capilar (r), el radio del menisco (R), y el ángulo de contacto (θ), se expresa como:

$$r = R \cdot \cos \theta \tag{2.14}$$

Por la curvatura de la superficie habrá una sobrepresión (ΔP) hacia el centro del menisco que, de acuerdo a la ley de Laplace, (superficie de una cara), tomará el valor siguiente:

$$\Delta P = \frac{2 \cdot \sigma}{R} \tag{2.15}$$

Reemplazando en esta expresión $R = r/\cos \theta$, se tiene,

$$\Delta P = \frac{2 \cdot \sigma}{r} \cos \theta \quad (2.16)$$

Por efecto de esta sobrepresión, el líquido asciende una altura (h):

$$\Delta P = \gamma h \quad (2.17)$$

Igualando las ecuaciones para ΔP y solucionando para (h), altura a la que asciende el líquido en el capilar, se obtiene:

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\gamma r} \quad (2.18)$$

Donde:

- σ : Tensión superficial en unidades de fuerza por unidad de longitud.
- θ : Ángulo de contacto.
- γ : Peso específico del líquido (N/m^3).
- r : Radio del tubo (m).
- h : Ascenso capilar (m).

Otra manera de deducir la ecuación es igualar el peso del volumen de agua en la altura h , dado como $W = \gamma(\pi r^2 h)$ y la componente vertical de la fuerza debido a la tensión superficial dada como, $F \sigma_v = \sigma 2\pi r \cos(\theta)$, al hacer $W = F \sigma_v$, $\gamma(\pi r^2 h) = \sigma 2\pi r \cos(\theta)$, se despeja h , y se obtiene de igual manera la ecuación (2.18) (Potter et al., 2015, p. 21).

Con base en lo explicado por Simon (1983), la adhesión entre fluidos y sólidos se expresa por el ángulo de contacto (θ) en el borde de las superficies de contacto. Los materiales hidrófobos tienen un ángulo de contacto que es mayor de 90° . Por ejemplo, el ángulo de contacto entre el agua y la parafina es de 107° ; por lo tanto, la parafina es un buen agente impermeabilizante.

Por otra parte, la plata es neutra al agua pura, su ángulo de contacto es de casi 90° , mientras que el cuarzo y otros materiales que se encuentran en los suelos porosos tienen un ángulo de contacto con el agua de menos de 90° ; esto quiere decir que se empapan con facilidad. El ángulo de

contacto entre el vidrio común y el agua que contiene impurezas, es de cerca de 25° . De hecho, las fuerzas cohesivas entre el agua y las partículas de tierra son tan grandes que solo se pueden separar evaporando el agua. Como complemento a estos valores, Franzini y Finnemore (1999) manifiestan que si el tubo está limpio, entonces se tendrá $\theta = 0^\circ$ para el agua y cerca de 140° para el mercurio.

Igualmente, Franzini y Finnemore (1999) expresan que los efectos relacionados con la tensión superficial son en general despreciables en la mayoría de aplicaciones prácticas en ingeniería, sin embargo, pueden ser importantes en problemas relacionados con ascenso capilar, tales como en zonas con aguas subterráneas. Cuando se utilizan tubos pequeños para medir las propiedades de los fluidos tales como las presiones, las mediciones deben hacerse teniendo en cuenta los efectos relacionados con la tensión superficial; una medición correcta correspondería al caso en que la tensión superficial fuera cero. Estos efectos pueden ser importantes también en la formación de gotas y burbujas, en la desintegración de chorros de líquido y en estudios con modelos hidráulicos cuando el modelo sea pequeño.

La tensión superficial es importante en los sistemas acuáticos porque la aireación está íntimamente relacionada con ella. La tensión superficial ejerce gran influencia en el tamaño de las burbujas, lo que es importante en los aireadores de burbuja y unidades de fraccionamiento de espuma.

A continuación se presenta la **Figura 2-4**, en la cual se puede estimar el ascenso o depresión capilar para tubos de diversos diámetros:

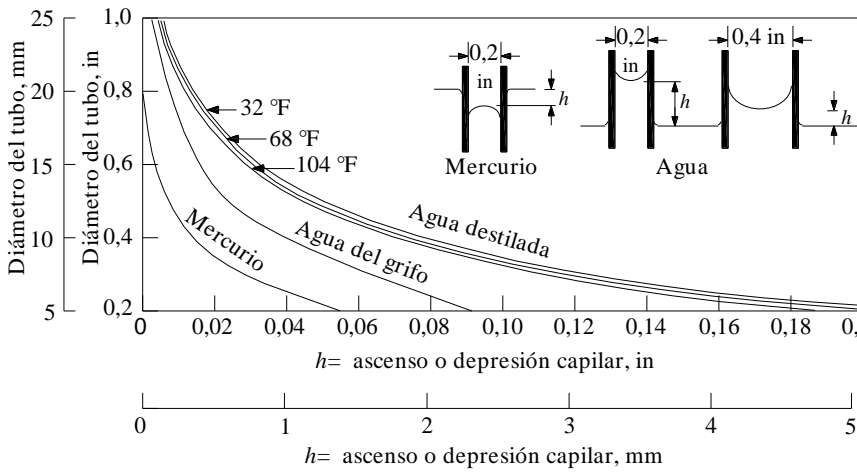


Figura 2-4.- Ascenso o depresión capilar en tubos circulares de vidrio limpios.

Fuente: (Franzini y Finnemore, 1999, p. 24).

En la Tabla 2-10 se presentan valores típicos de la tensión superficial del agua a presión atmosférica estándar a nivel del mar.

Tabla 2-10.- Tensión superficial del agua a presión atmosférica estándar a nivel del mar

Temperatura (°C)	Tensión superficial σ (N/m)	Temperatura (°F)	Tensión superficial σ (lb/ft)
0	0,0762	32	0,00518
5	0,0754	40	0,00514
10	0,0748	50	0,00509
15	0,0741	60	0,00504
20	0,0736	70	0,00500
30	0,0718	80	0,00492
40	0,0701	90	0,00486
50	0,0682	100	0,00480
60	0,0668	120	0,00465
70	0,0650	140	0,00454
80	0,0630	160	0,00441
90	0,0612	180	0,00426
100	0,0594	200	0,00412
		212	0,00404

Fuente: (Potter et al., 2015, p. 796).

A continuación, la Tabla 2-11 presenta valores típicos de la tensión superficial de líquidos comunes.

Tabla 2-11.- Tensión superficial de líquidos comunes a presión atmosférica estándar a nivel del mar y aproximadamente 60 °F a 70 °F (16 °C a 21 °C).

Líquido	Tensión superficial σ (N/m)	Tensión superficial σ (lb/ft)
Alcohol etílico	0,022	0,0015
Benceno	0,029	0,0020
Crudo	0,030	0,0020
Tetracloruro de carbono	0,026	0,0018
Glicerina	0,063	0,0043
Queroseno	0,025	0,0017
Mercurio	0,467	0,0320
Aceite SAE 10	0,036	0,0025
Aceite SAE 30	0,035	0,0024
Trementina	0,026	0,0018

Fuente: (Franzini y Finnemore, 1999, p. 469)

En la Tabla 2-12 se presentan valores típicos de la tensión superficial de contacto entre fluidos.

Tabla 2-12.- Tensión superficial de contacto entre algunos fluidos.

Líquido	Tensión superficial σ (gr/cm)
Benceno – aire	0,0295
Mercurio – aire	0,4700
Mercurio – agua	0,0401
Alcohol etílico – aire	0,0258
Alcohol etílico – agua	0,0023
Tetracloruro de Carbono – aire	0,0272
Aceite lubricante – aire	0,0357 a 0,0387
Aceite crudo – aire	0,0238 a 0,0387

Fuente: (Sotelo, 2005, p. 31).

2.8 Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.1.8.1. Una presión de 1,0 MPa aplicado a 300 L de líquido, causa una reducción en volumen de 0,6 L; calcule el módulo de elasticidad volumétrico en GPa y señale la respuesta (Streeter et al., 2000, p. 19).

(a) -0,5;

- (b) 0,5;
 (c) 50;
 (d) 500;
 (e) ninguna de las anteriores.

Ejercicio 2.1.8.2. Encontrar la expresión del módulo de elasticidad volumétrico de los líquidos en términos de la densidad.

Ejercicio 2.1.8.3. Calcular la altura a la que asciende el agua en un tubo capilar de 1 mm de diámetro, en contacto con la atmósfera, para el agua a 20°C y el ángulo de contacto (α) para tubo limpio se puede suponer igual a 90° (Chereque, 1987, pp. 14).

Respuesta: $h = 3,0$ cm. Según el esquema se muestra en la **Figura 2-5**.

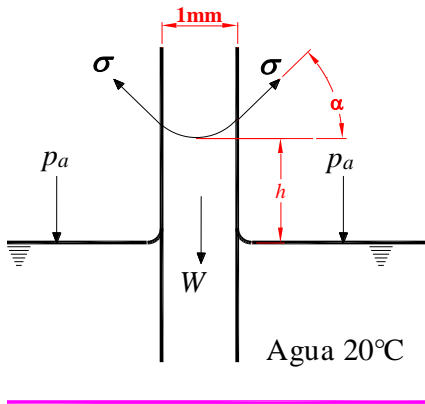


Figura 2-5.- Ascenso o depresión capilar en tubo de vidrio.

Fuente: (Chereque, 1987, pp. 14).

Ejercicio 2.1.8.4. Considere el agua de mar en el punto más profundo del océano, la Fosa de las Marianas. La base de la fosa está a 10994 m bajo el nivel del mar. La densidad del agua en la superficie del mar es de 1022 kg/m^3 y la presión al nivel del mar es de $p=10^5 \text{ Pa}$. Calcular la densidad del agua en el fondo de la Fosa de las Marianas con un $E = 2,34 \times 10^9 \text{ Pa}$.

Respuesta: 1070 kg/m^3 .

Ejercicio 2.1.8.5. Un recipiente cilíndrico de 1,00 m de diámetro y 2,00 m de alto, pesa 30,00 kg; si se llena con un líquido, el conjunto pesa 1500,00 kg; determinar el peso específico del líquido, la densidad y el peso específico relativo o densidad relativa (Fernández, 2001, p.3).

Respuesta: 936,31kg/m³; 94,93 UTM/m³; 0,936.

2.9 Viscosidad

Según Simon (1983), quizá la más importante propiedad física del agua desde el punto de vista de la hidráulica sea su resistencia al cortante o deformación angular. La medida de la resistencia de un fluido al movimiento relativo se conoce como viscosidad. La viscosidad la define como la capacidad de un fluido para convertir energía cinética, o sea energía de movimiento, en energía calorífica. La energía que se convierte en calor se considera perdida, ya que no puede contribuir a más movimiento. Puede originar el calentamiento del fluido, o de lo contrario, perderse por disipación en la atmósfera. La energía requerida para mover una cierta cantidad de agua por una tubería, un canal abierto o una estructura hidráulica se determina por la cantidad de pérdidas por cortante viscoso que se encontrarán en el camino. Por consiguiente, la viscosidad del fluido controla inherentemente su movimiento.

Para efectos de análisis matemáticos, en Mecánica de Fluidos, la viscosidad se divide en dos tipos: *viscosidad dinámica* y *viscosidad cinemática*, términos que se analizan con detalle en los siguientes ítems.

2.9.1 Viscosidad dinámica

La *viscosidad dinámica*, también llamada viscosidad absoluta, consiste en la resistencia interna entre las moléculas de un fluido en movimiento y determina las fuerzas que lo mueven y deforman. También se puede definir, como el coeficiente de proporcionalidad entre el esfuerzo cortante (τ) y la tasa de deformación (dv/dy), resultando la “*Ley de viscosidad de Newton*” (Streeter et al., 2000).

Para determinar la viscosidad dinámica, basado en Streeter et al. (2000), se plantea el siguiente análisis. En la **Figura 2-6**, se ilustra el caso de

dos placas paralelas infinitas entre las cuales se encuentra una delgada capa de fluido; una de las placas se encuentra estacionaria mientras que la otra está en movimiento a la velocidad V , debido a la aplicación de la fuerza F que se corresponde con algún área A de la placa móvil. Las partículas en contacto con la placa superior se moverán a la misma velocidad, la condición fundamental que se presenta cuando un fluido viscoso real está en contacto con una superficie de frontera, es que el fluido tiene la misma velocidad que la frontera ya que las partículas de fluido se adhieren a las paredes; a dicha condición se la denomina “condición de no desplazamiento”. La velocidad de la superficie estacionaria es cero y de la superficie en movimiento es igual a V . Si la distancia que separa las dos superficies sólidas se considera pequeña, entonces la rapidez de cambio de velocidad (perfil de velocidades) con respecto a la posición Y , es lineal (se describe un perfil de velocidades lineal pues varía como una línea recta). El gradiente de velocidad es una medida del cambio de velocidad y se define como $\Delta v/\Delta y$.

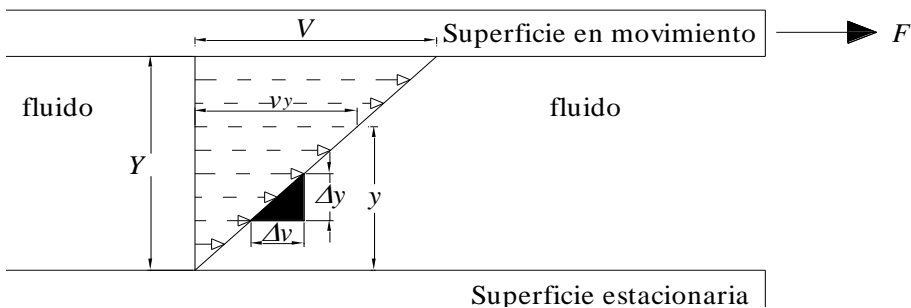


Figura 2-6.-Gradiente de velocidad en un fluido en movimiento.

En el perfil de velocidades lineal, el comportamiento es como si el fluido estuviera compuesto de una serie de capas finas, cada una de las cuales se desliza un poco en relación a la siguiente. Existirá cierta relación que vincula a la fuerza tangencial aplicada (F_t) con el área (A) de la placa móvil y la distribución de la velocidad (V) respecto a la distancia (Y); así:

$$F_t \propto \frac{AV}{Y} \quad (2.19)$$

Por semejanza de triángulos, se puede reemplazar V/Y en la **Figura 2-6** por el gradiente de velocidades $\Delta v/\Delta y$. Si se introduce una constante de proporcionalidad, representada con la letra griega μ (mu), el esfuerzo cortante τ (tao) entre dos capas finas de fluido cualesquiera se puede expresar como:

$$\tau = \frac{F_t}{A} = \mu \left(\frac{V}{Y} \right) = \mu \left(\frac{\Delta v}{\Delta y} \right) = \mu \left(\frac{dv}{dy} \right) \quad (2.20)$$

Por lo tanto, la proporcionalidad que está dada por la viscosidad dinámica μ y la anterior ecuación (2.20), se denomina “**Ley de viscosidad de Newton**” o “**Ecuación fundamental de la viscosidad**”, la cual se cumple en los fluidos newtonianos (Streeter et al., 2000). Un líquido puede soportar esfuerzos de compresión, cortantes o tangenciales, pero no de **tracción**; en los fluidos, la deformación aumenta constantemente bajo la acción de un esfuerzo cortante, por pequeño que este sea (Domingo, 2011). La forma transpuesta de dicha ecuación define la constante de proporcionalidad, como se presenta en la siguiente expresión:

$$\mu = \frac{\tau}{dv/dy} \quad \mu = \tau \left(\frac{dy}{dv} \right) \quad (2.21)$$

Donde, μ es Coeficiente de viscosidad o “viscosidad absoluta” o “viscosidad dinámica” (por estar relacionado con la fuerza), y τ es el esfuerzo tangencial (tensión o esfuerzo cortante $\tau = F/A$).

Unidades de la viscosidad dinámica. Sustituyendo las unidades en la ecuación (2.21), en los diferentes sistemas de unidades en el sistema SI, se tiene:

$$\mu = \frac{N}{m^2} \cdot \frac{m}{m/s} = \frac{N \cdot s}{m^2} = Pa \cdot s \quad (2.22)$$

De este modo se puede obtener las unidades para la viscosidad en los otros sistemas de unidades, cuya demostración se deja como ejercicio para que sea desarrollada por el lector.

En la Tabla 2-13 se indica las unidades de la viscosidad dinámica en los cuatro sistemas de unidades.

Tabla 2-13.- Unidades de la viscosidad dinámica.

CANTIDAD	SISTEMA DE UNIDAD			
	SI	Sistema Inglés	MKS	CGS
Viscosidad Dinámica	Pa·s	lb _r ·s/ft ² ó slug/(ft·s)	kp/ m ² ·s	Poise = g/(cm·s) ó 1 dina·s/cm ²

2.9.2 Viscosidad cinemática

La *viscosidad cinemática* es la relación entre la viscosidad absoluta o dinámica (μ) y la densidad del fluido (ρ), la cual mide en un fluido, su resistencia a fluir debido a su propio peso; esta relación aparece en muchas aplicaciones, por ejemplo, se encuentra contenida en el número de Reynolds. Esta viscosidad se expresa con la letra griega ν (nu), así:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.23)$$

Para determinar las unidades, se reemplaza las unidades correspondientes a las cantidades involucradas en la ecuación (2.23).

$$\nu = \frac{kg}{m \cdot s} \cdot \frac{1}{kg/m^3} = \frac{kg \cdot m^3}{kg \cdot m \cdot s} = \frac{m^2}{s} \quad (2.24)$$

De igual manera, la deducción se puede hacer para los sistemas de unidades restantes. En resumen, las unidades en las que se expresan la viscosidad cinemática ν en los sistemas de unidades, se muestran en la Tabla 2-14.

Tabla 2-14.- Unidades de la viscosidad cinemática.

CANTIDAD	SISTEMAS DE UNIDADES			
	SI	S. Inglés	MKS	CGS
Viscosidad Cinemática	m ² /s	ft ² /s	m ² /s	Stoke=cm ² /s

2.9.3 Efecto de la temperatura sobre la viscosidad

Según Beltrán (1990), la viscosidad de los gases aumenta con la temperatura, hecho que se atribuye a que, para mayores temperaturas, las moléculas del gas tienen mayor velocidad y el choque con sus vecinas es más frecuente, con lo cual el intercambio de energía y de cantidad de movimiento es más rápido. En los líquidos, por su parte, la viscosidad disminuye con la temperatura, lo cual puede explicarse porque sus moléculas están más cercanamente espaciadas, predominando las fuerzas intermoleculares; así, al aumentar la temperatura, la amplitud de las vibraciones hace que estas tiendan a alejarse, con una consiguiente disminución de dichas fuerzas.

La viscosidad de los fluidos varía significativa con la temperatura. En los fluidos líquidos, al aumentar la temperatura existe una disminución de la viscosidad dinámica, pues estos fluidos presentan menor resistencia al esfuerzo cortante, por lo cual disminuye la cohesión (lo cual se evidencia, por ejemplo, en el aceite para motor); en los gases, por el contrario, al aumentar la temperatura se incrementa la viscosidad dinámica, pues en ellos predomina el intercambio de moléculas entre dos capas de velocidades distintas. De igual manera, la viscosidad cinemática de los gases varía mucho con la presión y la temperatura, mientras que, la de los líquidos, solo varía con la temperatura Beltrán (1990).

La ecuación (2.25) propuesta por Yang (1995), permite determinar la viscosidad cinemática del agua en función de la temperatura, en m²/s con T° en °C.

$$\nu = \frac{1,792 \cdot 10^{-6}}{1 + (0,337 \cdot T^{\circ}) + (0,000221 \cdot T^{o2})} \tag{2.25}$$

También se puede recurrir a la expresión mostrada en la ecuación (2.26), que presentan Timmons y Ebeling (2010), dada como:

$$\nu = (-9,9653 \cdot 10^{-6} \cdot T^{o3} + 0,001143 \cdot T^{o2} - 0,05807 \cdot T^o + 1,7851) \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s} \quad (2.26)$$

Donde, ν es la viscosidad cinemática en m^2/s ; T^o es la temperatura del agua en $^{\circ}\text{C}$.

En el siguiente código de Octave y Matlab se calculan las ecuaciones 2.25 y 2.26:

CÓDIGO (Se abre una pestaña del Editor de Octave o Matlab y se copia las líneas)

Entrada

```
clear;clc;
T=input('Ingrese la temperatura del agua= '); % Entre el valor de la
temperatura en °C.
visc_Yang=(1,792*10^(-6))/(1+0,0337*T+0,000221*T^2) % valor de
la viscosidad en m2/s.
Visc_Timmons= (-9,9653*10^(-6)*T^3+0,001143*T^2-
0,05807*T+1,7851)*10^(-6) % valor de la viscosidad en m2/s.
```

Salida

```
Ingrese la temperatura del agua = 15
visc_Yang = 1,1522e-06 m2/s
Visc_Timmons = 1,1376e-06 m2/s
```

La diferencia de la ecuación (2.26) con respecto a la ecuación (2.25), es de 1,23% para una temperatura de 15°C .

Seguidamente, la Tabla 2-15 presenta los valores de la viscosidad cinemática del agua para diferentes temperaturas.

Tabla 2-15.- Viscosidad cinemática del agua.

Temperatura [°C]	Viscosidad cinemática [m ² /s . 10 ⁻⁶]	Temperatura [°C]	Viscosidad cinemática [m ² /s . 10 ⁻⁶]
0	1,79		
1	1,73	21	0,97
2	1,68	22	0,95
3	1,62	23	0,93
4	1,57	24	0,90
5	1,52	25	0,88
6	1,48	26	0,87
7	1,43	27	0,85
8	1,39	28	0,83
9	1,35	29	0,81
10	1,31	30	0,80
11	1,27	31	0,78
12	1,23	32	0,77
13	1,20	33	0,75
14	1,17	34	0,74
15	1,13	35	0,72
16	1,10	36	0,71
17	1,07	37	0,70
18	1,05	38	0,68
19	1,02	39	0,67
20	0,99	40	0,66

Fuente: (Timmons y Ebeling, 2010, p. 41).

En la Tabla 2-16, se presentan los valores de la viscosidad dinámica y cinemática del aire a presión atmosférica, para diferentes temperaturas.

Tabla 2-16.- Propiedades físicas del aire a presión atmosférica.

Temperatura (°C)	Viscosidad Dinámica μ (kg·s/m ²)	Viscosidad Cinemática ν (m ² /s)
-40	1,51 E 10 ⁻⁵	9,98 E 10 ⁻⁶
-30	1,56 E 10 ⁻⁵	1,08 E 10 ⁻⁵
-20	1,62 E 10 ⁻⁵	1,16 E 10 ⁻⁵
-10	1,67 E 10 ⁻⁵	1,24 E 10 ⁻⁵
0	1,72 E 10 ⁻⁵	1,33 E 10 ⁻⁵
10	1,77 E 10 ⁻⁵	1,42 E 10 ⁻⁵
20	1,81 E 10 ⁻⁵	1,51 E 10 ⁻⁵
30	1,86 E 10 ⁻⁵	1,60 E 10 ⁻⁵
40	1,91 E 10 ⁻⁵	1,69 E 10 ⁻⁵
50	1,95 E 10 ⁻⁵	1,79 E 10 ⁻⁵
60	1,99 E 10 ⁻⁵	1,89 E 10 ⁻⁵
70	2,04 E 10 ⁻⁵	1,99 E 10 ⁻⁵
80	2,09 E 10 ⁻⁵	2,09 E 10 ⁻⁵
90	2,13 E 10 ⁻⁵	2,19 E 10 ⁻⁵
100	2,17 E 10 ⁻⁵	2,30 E 10 ⁻⁵
110	2,22 E 10 ⁻⁵	2,40 E 10 ⁻⁵
120	2,26 E 10 ⁻⁵	2,51 E 10 ⁻⁵

Fuente: (Mott y Untener, 2015, p. 496).

A continuación, la Tabla 2-17, presenta los valores de viscosidad dinámica para líquidos comunes.

Tabla 2-17.- Viscosidad dinámica de líquidos comunes, continuación.

Líquido	Viscosidad dinámica μ (Pa·s)
Acetona	3,16 E 10 ⁻⁴
Alcohol etílico	1,00 E 10 ⁻³
Alcohol metílico	5,60 E 10 ⁻⁴
Alcohol propílico	1,92 E 10 ⁻³
Benceno	6,03 E 10 ⁻⁵
Tetracloruro de Carbono	9,10 E 10 ⁻⁵
Aceite de ricino	6,51 E 10 ⁻²
Etilenglicol	1,62 E 10 ⁻⁴
Gasolina	2,87 E 10 ⁻⁶
Glicerina	9,60 E 10 ⁻²
Keroseno	1,64 E 10 ⁻⁵
Aceite de linaza	3,31 E 10 ⁻⁴
Mercurio	1,53 E 10 ⁻⁵

Tabla 2-17.- Viscosidad dinámica de líquidos comunes.

Líquido	Viscosidad dinámica μ (Pa·s)
Propano	1,10 E 10 ⁻⁶
Agua de mar	1,03 E 10 ⁻⁵
Trementina	1,37 E 10 ⁻⁵
Aceite de petróleo, medio	2,99 E 10 ⁻⁵
Aceite de petróleo, pesado	1,07 E 10 ⁻³

Fuente: (Mott y Untener, 2015, p. 490).

Finalmente, la **Tabla 2-18** presenta los valores de la densidad y de la viscosidad cinemática de combustibles para diferentes temperaturas.

Tabla 2-18.- Densidad y viscosidad cinemática de combustibles a diferentes temperaturas.

Fluido	Temperatura (°C)	Densidad ρ (kg/m ³)	Viscosidad Cinemática ν (m ² /s)
Gasolina	5	737	0,000000757
	10	733	0,000000710
	15	728	0,000000681
	20	725	0,000000648
	25	720	0,000000621
	30	716	0,000000596
Aceite combustible	5	865	0,00000598
	10	861	0,00000516
	15	858	0,00000448
	20	855	0,00000394
	25	852	0,00000352
	30	849	0,00000313

2.9.4 Efecto de partículas sólidas sobre la viscosidad

La viscosidad de un fluido se puede alterar introduciendo partículas sólidas dentro del mismo, por ejemplo, en el caso del estudio de flujos bifásicos. Para estimar este efecto, se han propuesto ecuaciones empíricas y teóricas, en función de la concentración de sólidos presentes en el fluido, siendo la más conocida, la ecuación de Einstein para la viscosidad (Graf, 1984). Esta ecuación es usada en el estudio de la reología de sistemas multifásicos. En ella, la variación de la

viscosidad del fluido puro por la presencia de partículas sólidas está descrita como:

$$\mu_m = \mu(1 + 2,5C) \quad (2.27)$$

donde C es la fracción volumétrica de sólidos, calculada como la relación entre el volumen de partículas sobre el volumen total; μ es la viscosidad de la fase continua; μ_m es la viscosidad de la mezcla resultante; y la constante 2,5 es lo que se conoce como viscosidad intrínseca, válida en este caso para esferas rígidas. Por su parte Graf (1984), presenta varias ecuaciones de este tipo propuestas por otros autores.

2.10 Clasificación de los fluidos

En el cuadro sinóptico de la

Figura 2-7 que se muestra a continuación, se indica como se clasifican los fluidos según la relación entre esfuerzo cortante y deformación.

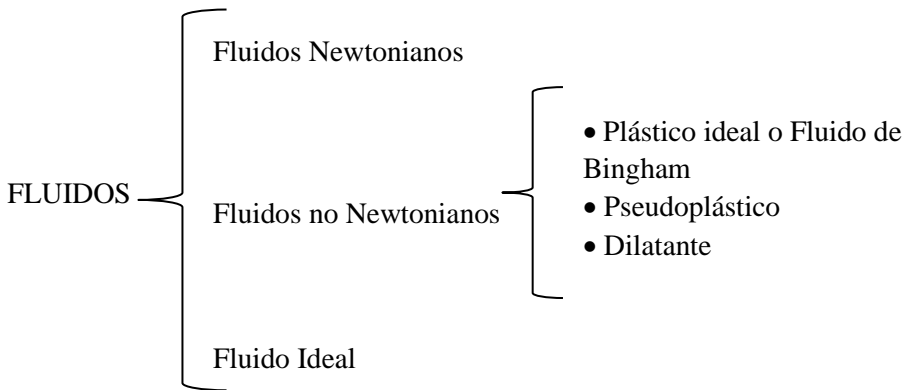


Figura 2-7.- Cuadro sinóptico de clasificación de fluidos.

A continuación, se describe con mayor detalle cada uno de los tipos de fluidos.

2.10.1 Fluidos newtonianos

Es el fluido que cumple con la ley de viscosidad de Newton y se comporta según la forma transpuesta de la ya mostrada ecuación (2.20); es decir, si el esfuerzo cortante de un fluido es directamente proporcional al gradiente de velocidad, la viscosidad dinámica μ es función exclusivamente de la condición del fluido, en particular de su temperatura. La magnitud del gradiente de velocidad no tiene efecto sobre la magnitud de μ (Streeter et al., 2000, p. 4).

Los fluidos más comunes como agua, aire, aceite, gasolina y petróleo, están clasificados como fluidos newtonianos. Según Beltrán (1990), en los fluidos newtonianos la presión tiene un pequeño efecto sobre el coeficiente de viscosidad, siendo ese efecto generalmente despreciable.

2.10.2 Fluidos no newtonianos

Por el contrario, los fluidos que no se comportan de acuerdo a la referida ecuación 2.20, es decir, que no cumplen la ley de viscosidad de Newton, se denominan fluidos no newtonianos, los cuales suelen tener una composición molecular más compleja. La viscosidad del fluido no newtoniano no solamente depende del gradiente de velocidad, sino también de la condición del fluido. A continuación se describe cada uno de los fluidos no newtonianos (Streeter et al., 2000, p. 4).

2.10.3 Fluido plástico ideal o fluido Bingham

Este tipo de fluido requiere un esfuerzo cortante mínimo para causar movimiento, esfuerzo conocido como **esfuerzo de cadencia** o **rigidez plástica** (τ_y), lo que implica que, por debajo de este esfuerzo, no se presenta tasa de deformación. Este fluido se cuantifica con la siguiente ecuación:

$$\tau = \tau_y + \eta \frac{dv}{dy} \quad (2.28)$$

η es conocido como el coeficiente de rigidez (Beltrán, 1990).

Las mezclas de agua y arcilla, por encima del 10% de concentración, la bentonita y agua entre 9% y 27 % en concentración, pasta de dientes

(dentífricos), la pintura, el asfalto y las suspensiones acuosas de sedimentos de aguas residuales, todas estas mezclas tienen comportamiento de fluidos Bingham, aunque no tienen una relación *esfuerzo-razón de deformación* lineal (Potter et al., 2015).

2.10.4 Fluido pseudoplástico

Los fluidos pseudoplásticos se vuelven menos resistentes al movimiento al aumentar la razón de deformación, también conocidos como fluidos adelgazantes al corte (Vennard y Street, 1979). Entre los fluidos *pseudoplásticos*, se encuentran las suspensiones acuosas de arcilla, el polietileno fundido y el plasma sanguíneo. Estos fluidos se pueden modelar según la ley de potencia.

$$\tau = K \left(\frac{dv}{dy} \right)^n \quad (2.29)$$

Donde K es un coeficiente de consistencia del fluido y n es el índice de la ley de potencia o comportamiento del fluido que, para fluidos pseudoplásticos, siempre es menor que 1, ($n < 1$) (Beltrán, 1990).

En la Tabla 2-19 se presentan algunos valores de K y de n para fluidos de esta categoría.

Tabla 2-19.- Valores de K y n para fluidos pseudoplástico.

Tipo de fluido	% en peso de concentración	K [N.sm ⁻²]	n [-]
Arcilla amarilla en agua	23,2	5,55	0,229
Carboxilimetilcelulosa en agua	0,67	0,304	0,716
	1,5	3,13	0,554
	3,0	9,89	0,566
Caliza en agua	33,0	7,18	0,171
Napalm en queroseno	10,0	0,64	0,520
Pulpa de papel en agua	4,0	20,0	0,575
Cemento en agua	54,3	2,51	0,153

Fuente (Beltrán, 1990, pp. 8).

2.10.5 Fluido dilatante

Los fluidos dilatantes, también conocidos como fluidos espesantes al corte, se vuelven más resistentes al movimiento a medida que aumenta la razón de la deformación (Vennard y Street, 1979). Entre los fluidos *dilatantes*, están las arenas movedizas y lodos. Estos fluidos se pueden modelar así mismo mediante la ley de potencia.

$$\tau = K \left(\frac{dv}{dy} \right)^n \tag{2.30}$$

Donde K es un coeficiente de consistencia del fluido, y n es el índice de la ley de potencia o comportamiento del fluido; para fluidos dilatantes (n) siempre es mayor que 1, ($n > 1$) (Beltrán, 1990).

2.10.6 Fluido ideal

Es el tipo de fluido carente de viscosidad. Aunque en la realidad no existe este tipo de fluidos, su concepto sirve para lograr soluciones teóricas, como es el caso del flujo con potencial.

En la **Figura 2-8** se ilustra esquemáticamente el comportamiento de los tipos de fluidos newtonianos y no newtonianos:

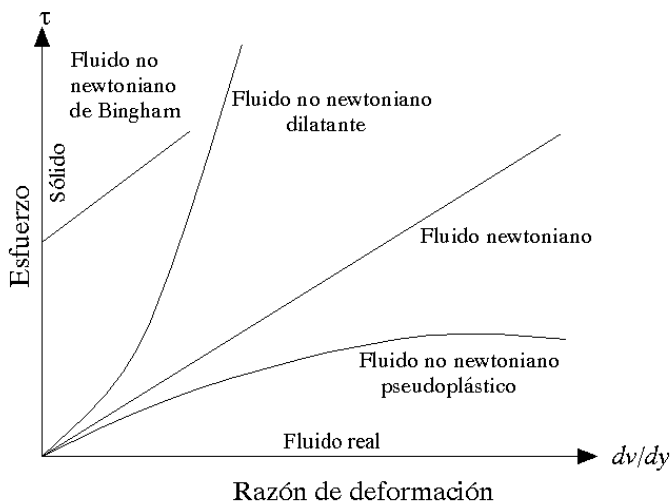


Figura 2-8.- Clasificación de flujos en fluidos newtonianos y no newtonianos. Fuente: Adaptada de (Vennard y Street, 1979, p. 36)

2.11 Medición de la viscosidad

La medición de la viscosidad se realiza por medio de instrumentos de laboratorio denominados “viscosímetros”, que pueden ser básicamente de tres tipos:

- Viscosímetros giratorios
- Viscosímetros de esfera
- Viscosímetros de tubo capilar

En los viscosímetros se imparte al fluido un movimiento laminar, ya sea aplicándole una diferencia de presiones (viscosímetro de tubo capilar), o por el movimiento de un cuerpo (viscosímetro de esfera) o de una superficie sólida (viscosímetro giratorio).

2.11.1 Viscosímetro giratorio

“La medición con viscosímetros giratorios es una herramienta de fácil uso para determinar la viscosidad de los fluidos, incluidas las pinturas, los productos del petróleo y las soluciones de polímeros. Si bien las normas suelen usar la medición con viscosímetros giratorios, el procedimiento de calibración o validación de la medición no siempre forma parte de la norma, lo que puede ocasionar resultados diferentes entre laboratorios” (ASTM, 2013).

“Una norma propuesta para la calibración de la viscosidad por parte del usuario mejorará la coincidencia de resultados entre laboratorios. La **WK43494**, que es un método de prueba para calibrar la viscosidad de los viscosímetros giratorios, está siendo elaborada por el subcomité E37.08 sobre Reología, parte del **Comité E37** de ASTM International sobre Mediciones térmicas” (ASTM, 2013).

En la **Figura 2-9** se muestra una imagen del viscosímetro giratorio.

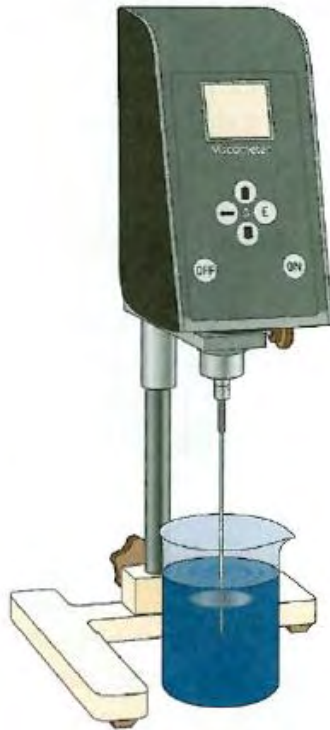


Figura 2-9.- Imagen del viscosímetro giratorio. Fuente: (Mott y Untener, 2015, p. 27).

2.11.2 Viscosímetro de esfera

También aparece en el estado del arte con el nombre de viscosímetro de bola. Tal como lo presenta Industria Química (2020), es un viscosímetro de laboratorio de gran precisión y de aplicación universal que destaca por su sencillo manejo y amplio rango de medición. Se utiliza principalmente en la inspección de calidad de sustancias fluidas. Es por ello un dispositivo indispensable para la formación y medición en centros educativos especializados. Entre sus aplicaciones destacan los fines educativos/pedagógicos, las industrias petroleras (por ejemplo, aceites minerales), papelera, química polimérica, cosmética, farmacéutica, o sectores como el alimentario, los combustibles o la detergencia. En la **Figura 2-10** se ilustra una imagen del viscosímetro de esfera.



Figura 2-10.- Imagen del viscosímetro de esfera o de bola “Höppler”.
Fuente: Industria Química (2020).

2.11.3 Viscosímetro de tubo capilar

Es un dispositivo, generalmente de laboratorio, usado para medir la viscosidad de un fluido haciéndolo pasar a un gradiente de presión o velocidad conocidos, a través de un tramo de tubería de diámetro D y longitud L conocidos. La viscosidad de petróleos, que son fluidos newtonianos, se mide utilizando un tubo capilar de vidrio en un baño termostático, cuando se realiza conforme a los procedimientos del API (Oilfield Glossary, 2020). En la **Figura 2-11** se muestra una imagen de este tipo de viscosímetro.

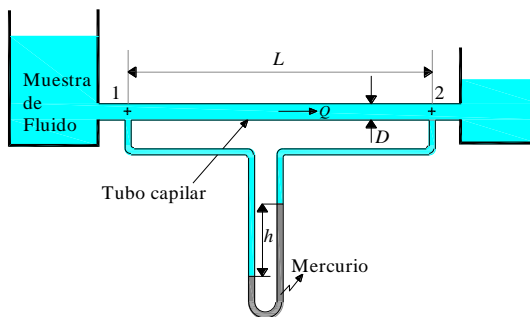


Figura 2-11.- Imagen del viscosímetro de tubo capilar. Fuente:
Adaptado de (Mott y Untener, 2015, p. 28).

La viscosidad dinámica se despeja de la ecuación de Hagen-Poiseuille para flujo laminar, ya que las variables involucradas se pueden medir en el dispositivo de laboratorio.

2.12 Ejemplos de aplicación

Existen varios casos donde se puede aplicar el concepto de la viscosidad para efectos prácticos en la ingeniería, a continuación se presentan algunos ejemplos.

Ejemplo 2.3. Encontrar la distribución de esfuerzos cortantes para el flujo indicado en la **Figura 2-12**, para un fluido con viscosidad dinámica de $1,5 \times 10^{-3} \text{ kp/m}^2\cdot\text{s}$, en los siguientes casos: a) para distribución lineal de velocidades, b) para distribución parabólica de velocidades. Adoptar valores de $y = (0,03 \text{ m}, 0,02 \text{ m}, 0,01 \text{ m}, 0,005 \text{ m}$ y $0,0 \text{ m})$ y una velocidad máxima de $0,45 \text{ m/s}$ para la distancia de $0,03 \text{ m}$.

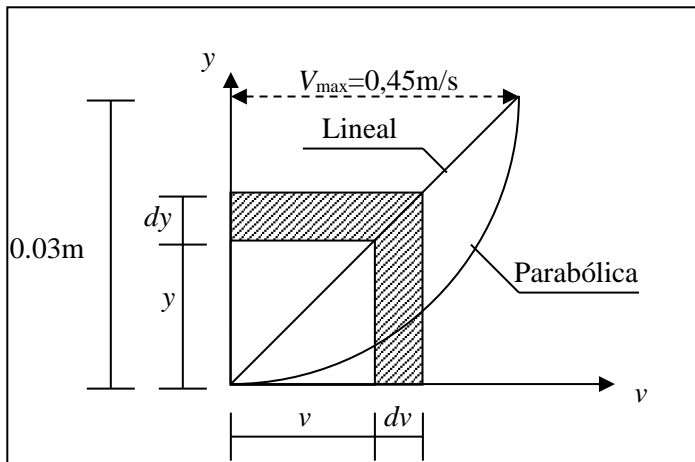


Figura 2-12.- Esquema distribución de velocidades correspondiente al Ejemplo 2.3.

Ejemplo 2.4. Se tiene un viscosímetro con cilindros concéntricos, calcular la viscosidad dinámica, con los siguientes datos: cilindros de $30,0 \text{ cm}$ de largo, diámetro del cilindro interno de $20,0 \text{ cm}$, diámetro del cilindro externo de $20,2 \text{ cm}$, torque o momento de torsión de $0,13$

N.m, velocidad angular de $\omega = 400$ r.p.m. (r.p.m. = revoluciones por minuto).

Ejemplo 2.5.

Si un cuerpo de dimensiones $1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 1\text{ m}$, que pesa 100 N , se desliza sobre un fluido con una inclinación de 30° , a una velocidad de $0,2\text{ m/s}$ y la viscosidad del fluido es de 1 poise. Determinar el espesor (t) que debe tener la capa de fluido en movimiento. Inicialmente tome las suposiciones para un espesor muy pequeño, ($y \ll \ll$). Ver **Figura 2-13**

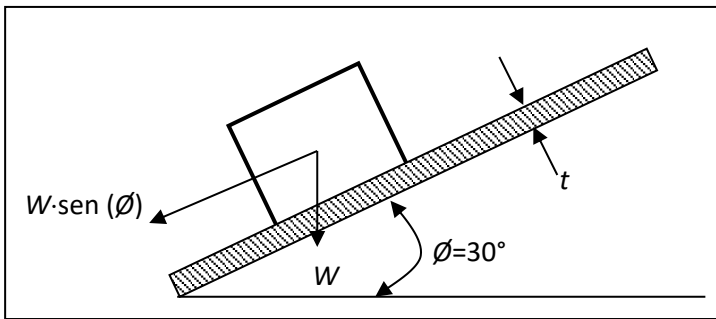


Figura 2-13.- Esquema del Ejemplo 2.5.

Ejemplo 2.6. Si un cilindro gira concéntricamente dentro de otro, el cual contiene un líquido con una viscosidad dinámica de $0,72\text{ Pa}\cdot\text{s}$, el diámetro externo del tubo interior es de 36 cm y la separación entre el tubo interior y el exterior es de $1,23\text{ mm}$, la velocidad angular (ω) es de 200 r.p.m. y la longitud del tubo es de $1,0\text{ m}$. Hallar la potencia (P) perdida por resistencia con el fluido. (Tomar $P = F \cdot v_t$), F es fuerza y v_t es la velocidad tangencial igual a $\omega \cdot r$. Solucionar el problema de forma aproximada ($dv/dy = v/r$), y exacta tomado $dv/dy = -dv/dr$. (Solución idéntica al ejemplo 2.4 en la cual el Torque $\Gamma = FR_1$, y $P = F\omega R_1$).

2.12.1 Solucionario de ejemplos

Ejemplo 2.3

a. Solución con distribución lineal

Por similitud de triángulos se encuentra la relación entre V y Y . Esto se hace suponiendo que el espesor es muy delgado, menor a 5 mm .

$$\frac{dv}{dy} = \frac{V_{\max}}{Y_{\max}} = \frac{V}{Y} \tag{1}$$

De la anterior ecuación se calcula la relación V/Y para cada altura, la cual se convierte en una constante. Este valor se reemplaza en la ecuación de viscosidad de Newton y se halla el esfuerzo cortante, como se indica en la Tabla 2-20, en la cual se observa que el esfuerzo cortante es constante en la vertical.

Tabla 2-20.- Solución del Ejemplo 2.3 con distribución lineal de velocidades.

Y [m]	V [m/s]	V/Y [s ⁻¹]	τ [K _p /m ²]
0,03	0,45	15	22,5E10 ⁻³
0,02	0,3	15	22,5E10 ⁻³
0,01	0,15	15	22,5E10 ⁻³
0,005	0,045	15	22,5E10 ⁻³

b. Solución con distribución parabólica

Se empieza solucionando la ecuación de la parábola, cuando el vértice (V) se encuentre en (h, k) , la ecuación de la parábola representada en la **Figura 2-14**, se da como:

$$(y - k)^2 = -4P(x - h) \tag{2}$$

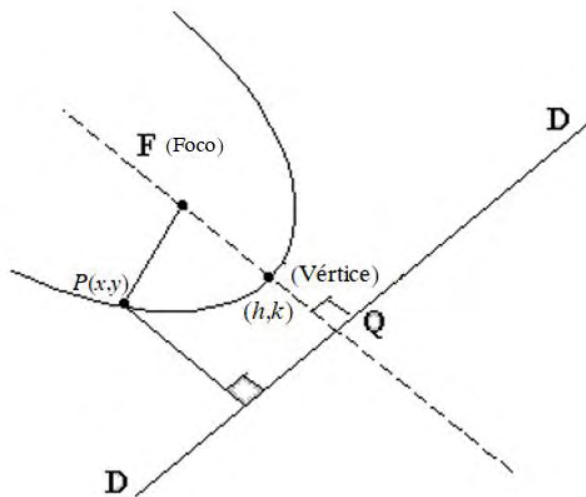


Figura 2-14.- Geometría de la parábola

Si se toma el eje x como el eje de la velocidad $x = V$, es necesario encontrar los valores de (h, k) y P , donde P es la distancia entre el vértice y el Foco, también llamada distancia focal, en este caso k corresponde al valor de Y_{\max} y h al de V_{\max} , o valores del vértice de la parábola, por lo tanto:

$$(y - 0,03m)^2 = -4P(V - 0,45m/s) \quad (3)$$

Con la condición de frontera, dada como $Y = 0, V = 0$.

$$(0 - 0,03m)^2 = -4P(0 - 0,45m/s) \quad (4)$$

$$P = \frac{(0,03m)^2}{4(0,45m/s)} = 5 * 10^{-4} m * s \quad (5)$$

$$(y - 0,03m)^2 = -\frac{1}{500}(V - 0,45m/s) \quad (6)$$

Despejando la velocidad se tiene:

$$V = 0,45m/s - 500(y - 0,03m)^2 \quad (7)$$

Como el interés consiste en saber el cambio de la velocidad con la profundidad Y , se deriva la anterior ecuación con respecto a Y .

$$\frac{dV}{dY} = 0 - 2(500)(y - 0,03m)^1 \quad (8)$$

$$\frac{dV}{dY} = -1000(y - 0,03m) \quad (9)$$

Con la ecuación anterior se encuentra la distribución de esfuerzos reemplazando en la ecuación de viscosidad de Newton. Los cálculos se indican en la Tabla 2-21.

Tabla 2-21.- Solución del Ejemplo 2.3 con distribución parabólica de velocidades.

Y [m]	V [m/s]	dV/dY [s ⁻¹]	τ [Kp/m ²]
0,03	0,45	0,0	0,000
0,02	0,40	10,0	0,015
0,01	0,25	20,0	0,030
0,005	0,14	25,0	0,0375
0,00	0,00	30,0	0,045

Como se observa en la Tabla 2-21, el esfuerzo cortante tiene una variación lineal con la profundidad, con valor máximo en la pared y cero en la superficie.

Ejemplo 2.4.

El problema se puede solucionar de forma exacta y aproximada. Primero se solucionará el problema de manera aproximada y luego de forma exacta. Se plantea el esquema del enunciado en la **Figura 2-15**.

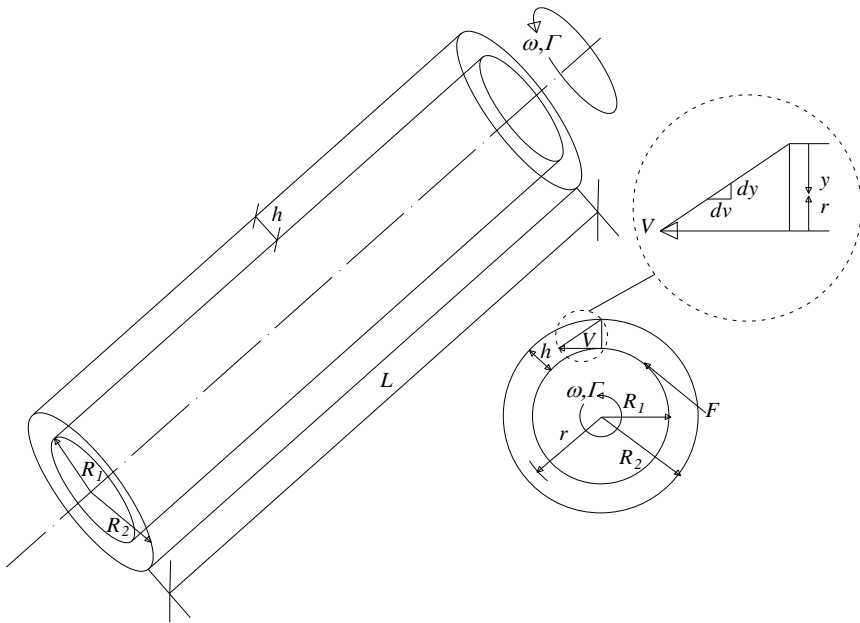


Figura 2-15.- Geometría del viscosímetro de cilindros.

Obsérvese en la ampliación de la **Figura 2-15**, como la distribución de velocidades va en la dirección del giro, donde en la pared externa es

cero, ya que el cilindro externo se encuentra en reposo; nótese además que la dirección de “ y ” va desde el radio externo al interno, y el radio “ r ” va en dirección de R_1 a R_2 , por lo tanto “ y ” y “ r ” tienen signo contrario, $y = -r$.

Solución aproximada:

Al rotar el cilindro interno se genera un esfuerzo cortante (τ), que interesa conocer, entre la superficie del cilindro y el fluido. El torque o momento angular Γ , será:

$$\Gamma = FR_1; F = \tau A_L; A_L = 2\pi R_1 L \Rightarrow \tau = \frac{\Gamma}{2\pi L R_1^2} \quad (1)$$

Por otro lado, según la ley de viscosidad de Newton se obtiene:

$$\tau = \mu \left(\frac{dV}{dy} \right) = \mu \left| \frac{dV}{dr} \right| \quad (2)$$

Si se hace la siguiente aproximación, para separaciones de cilindro muy pequeñas por lo general menores a 5 mm. Con U como la velocidad tangencial del cilindro interno.

$$\left| \frac{dV}{dr} \right| = \frac{U}{(R_2 - R_1)} = \frac{U}{h} \quad (3)$$

Como la velocidad tangencial U , puede ser dada como $U = \omega \cdot R_1$, el esfuerzo cortante es dado como:

$$\tau = \mu \frac{\omega R_1}{h} \quad (4)$$

Igualando las ecuaciones (1) y (4) se obtiene:

$$\mu \frac{\omega R_1}{h} = \frac{\Gamma}{2\pi L R_1^2} \quad (5)$$

Despejando para la viscosidad dinámica:

$$\mu = \frac{h\Gamma}{\omega 2\pi L R_1^3} \quad (6)$$

Presentando las unidades en el SI la viscosidad queda en Pa.s, y se debe dar ω en [rad/s], por lo que ω en [rpm] debe multiplicarse por $2\pi/60$, ($1\text{rpm} = 2\pi/60 \text{ rad/s}$), de este modo, introduciendo estos valores se obtiene:

$$\mu = \frac{60}{2\pi} \frac{h\Gamma}{\omega 2\pi L R_1^3} = 15 \frac{h\Gamma}{\omega \pi^2 L R_1^3} \quad (7)$$

Solución exacta:

Al rotar el cilindro interno se genera un esfuerzo cortante entre la superficie del cilindro y el fluido. El torque o momento angular Γ , a una distancia (r) cualquiera, será:

$$\Gamma = F \cdot (r); F = \tau A_L; A = 2\pi r L \Rightarrow \tau = \frac{\Gamma}{2\pi L r^2} \quad (8)$$

Por otro lado según la ley de viscosidad de Newton se obtiene

$$\tau = \mu \left(\frac{dV}{dy} \right) \quad (9)$$

Como $R_2 = y+r$, al derivar se obtiene $0 = dy+dr$, por lo tanto, $dy = -dr$.

$$\tau = -\mu \frac{dV}{dr} \quad (10)$$

Igualando las ecuaciones (8) y (10) se obtiene:

$$-\mu \left| \frac{dV}{dr} \right| = \frac{\Gamma}{2\pi L r^2} \quad (11)$$

Aplicando separación de variables;

$$-\mu dV = \frac{\Gamma}{2\pi L} \frac{dr}{r^2} \quad (12)$$

Integrando la ecuación (12) se tiene:

$$-\mu \int_{\omega R_1}^0 dV = \frac{\Gamma}{2\pi L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{\Gamma}{2\pi L} \int_{R_1}^{R_2} r^{-2} dr \quad (13)$$

Al solucionar la integral definida en ambos lados de la ecuación, se obtiene:

$$-\mu(0 - \omega R_1) = -\frac{\Gamma}{2\pi L} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \quad (14)$$

$$\mu = \frac{\Gamma}{\omega 2\pi L R_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (15)$$

Como la diferencia de los radios es igual al espesor h , se tiene:

$$\mu = \frac{\Gamma}{\omega 2\pi L R_1} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right) = \frac{\Gamma}{\omega 2\pi L R_1} \left(\frac{h}{R_1 R_2} \right) = \frac{\Gamma h}{\omega 2\pi L R_2 R_1^2} \quad (16)$$

Esta ecuación es similar a la obtenida por el método aproximado; en este caso hay influencia de R_2 . Como (ω debe ir en rad/s), por lo que ω en [rpm] debe multiplicarse por $2\pi/60$, para convertir a rad/s. Si el espesor h es muy pequeño, se puede aproximar que $R_1 = R_2$, y se obtiene la solución del método aproximado de la ecuación (7).

Ejemplo 2.5.

Considerando que el bloque está inclinado, es necesario descomponer todas las fuerzas en la dirección del plano inclinado, el peso W actúa en dirección del plano como $W \cdot \text{sen}(30)$. La fuerza F derivada del esfuerzo cortante viscoso es:

$$F = \tau A_b = \mu \left(\frac{dv}{dy} \right) A_b \quad (1)$$

Si se asume que el espesor del fluido es muy pequeño (menor a 5,0 mm), se puede usar la derivada aproximada.

$$F = \mu \left(\frac{V}{t} \right) A_b \quad (2)$$

Igualando el peso W y la fuerza F , se despeja el espesor.

$$W \times \text{sen}(30) = \mu \left(\frac{V}{t} \right) A_b \quad (3)$$

$$t = \frac{\mu V A_b}{W \times \text{sen}(30)} \quad (4)$$

1 poise (P) = $1 \text{ g} \cdot (\text{s} \cdot \text{cm})^{-1} = 1 \text{ dina} \cdot \text{s} \cdot \text{cm}^{-2} = 0,1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Al reemplazar los valores en el sistema SI de unidades, se tiene un espesor de $t = 0,0004 \text{ m}$ ($= 0,4 \text{ mm} < 5,0 \text{ mm}$, por lo tanto, la suposición fue correcta).

Ejemplo 2.6.

Como potencia $P = \Gamma \cdot \omega$, y tomando la solución del Ejemplo 2.4, se tiene dos métodos:

Método aproximado

$$\Gamma = \frac{\omega \pi^2 L R_1^3 \mu}{15h} \quad (1)$$

$$P = \frac{\omega^2 \pi^2 L R_1^3 \mu}{15h} \quad (2)$$

En la ecuación (2), la velocidad angular es en rpm, las demás cantidades están expresadas en el sistema de unidades SI, obteniéndose una potencia de 44 924 W.

Método exacto

$$\Gamma = 2\pi \frac{\mu \omega L R_2 R_1^2}{h} \quad (3)$$

$$P = 2\pi \frac{\mu \omega^2 L R_2 R_1^2}{h} \quad (4)$$

Se debe convertir la velocidad angular de rpm a radianes/segundo, para aplicar la ecuación (4), obteniéndose una potencia de 45231W.

La diferencia entre estos dos métodos de cálculo de la potencia es de 0,68%.

2.13 Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.13.1. Con base en: (Shames, 1995, p. 30), (Niño y Duarte, 2007, pp. 1–11), (Bergada, 2006, p. 7) y (Fernández, 2001, p. 13).

Se hace rotar un cuerpo cónico con una velocidad constante de 10 rad/s. Una película de aceite con una viscosidad de $4,5 \times 10^{-5}$ lb.s/pie² separa el cono del contenedor. El espesor de la película (e) es de 0,01 pulg. ¿Qué torque se requiere para mantener este movimiento en unidades del sistema Inglés? El cono tiene un radio de 2 pulg. en la base y 4 pulg. de altura. Use la suposición de perfil lineal y la ley de viscosidad de Newton (**Figura 2-16**).

Para resolver el ejercicio se puede buscar apoyo en los siguientes enlaces: <https://youtu.be/-SvrSs6nDMw>, <https://www.youtube.com/watch?v=SwlmHutH0fY> y https://www.youtube.com/watch?v=ab3_15V_rnI.

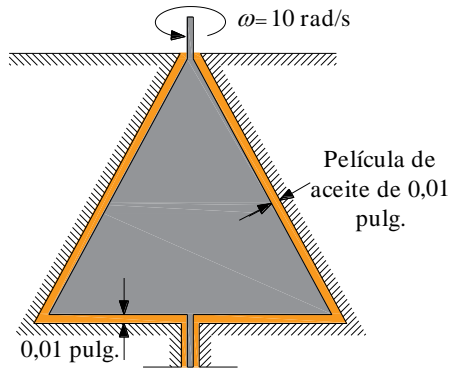


Figura 2-16.- Geometría del cono. Fuente: Adaptado de (Shames, 1995, pp.30).

Ejercicio 2.13.2. (Bergadà, 2006, p. 3).

Halle la potencia necesaria para mantener una velocidad angular (ω) constante de 10 rad/s en el viscosímetro cilíndrico de la **Figura 2-17**. (Considérense los esfuerzos cortantes, en la superficie lateral y en la base). Resolver a partir de los siguientes datos: $H = 10$ cm, $R_1 = 3$ cm, $h = 0,1$ cm, $\mu = 7 \cdot 10^{-3}$ N·s/m².

Resp. $P = 0,0127$ [W]

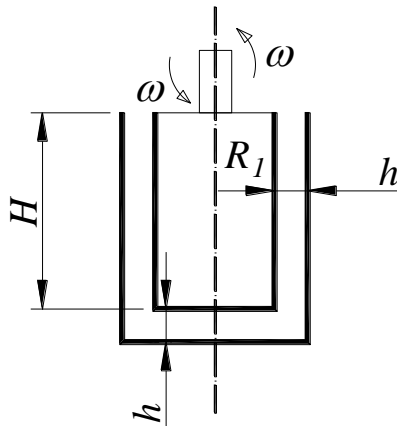


Figura 2-17.- Geometría del Ejercicio 2.13.2.

Ejercicio 2. 13.3. (Çengel y Cimbala, 2006, p. 59).

¿Cómo varía la viscosidad dinámica de *a)* los líquidos y *b)* los gases, con la temperatura?. Explique las causas de la diferencia.

Ejercicio 2. 13.4. (Çengel y Cimbala, 2006, p. 59).

Se debe mover un bloque de 50 cm x 30 cm x 20 cm, que pesa 150 N, tal y como se muestra en **Figura 2-18**, a una velocidad constante de 0,8 m/s sobre una superficie inclinada con un coeficiente de fricción de 0,27.

a) Determine la fuerza F necesaria a aplicar en la dirección horizontal.

b) Si se aplica una película de aceite de 0,4 mm de espesor, con una viscosidad dinámica de 0,012 Pa.s, entre el bloque y la superficie inclinada, determine el porcentaje de reducción en la fuerza necesaria.

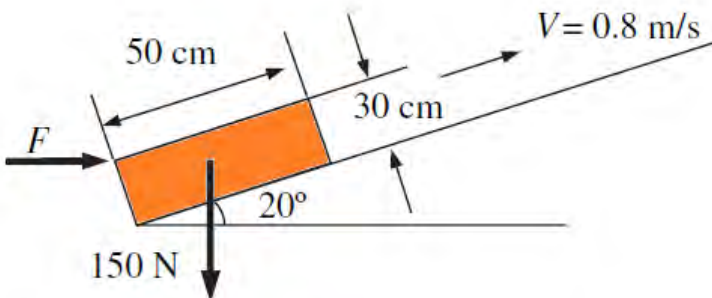


Figura 2-18.- Geometría del bloque.

Ejercicio 2. 13.5.

Si la viscosidad absoluta de un aceite es de 510 poises. ¿Cuál es su viscosidad en el sistema SI?. (Diaz, 2006, p. 12).

3. Capítulo 3: Estática de Fluidos

3.1 Introducción

La estática de los fluidos estudia el equilibrio de los fluidos en reposo o en aquellos que no existe movimiento relativo entre sus elementos (Vennard y Street, 1979, p. 57), (Potter et al., 2015). En ingeniería por lo general se trabaja con valores medios de las variables y no como un estudio detallado de cada molécula, de este modo se tiene en cuenta valores medios de la temperatura, presión, velocidad y las propiedades de los fluidos, partiendo de la suposición de que el fluido es un medio continuo y no una sustancia formada por moléculas discretas.

3.2 Variación de la presión

Según Potter et al. (2015), existe la deducción de una ecuación general para predecir la variación de presión de los fluidos en reposo o sometidos a una aceleración mientras la posición relativa de los elementos de fluido unos respecto a otros permanece inalterada (esto elimina el esfuerzo cortante). Para determinar la variación de presión en tales fluidos, se considera el elemento infinitesimal que se muestra en la **Figura 3-1**, donde el eje **z** está en la dirección vertical.

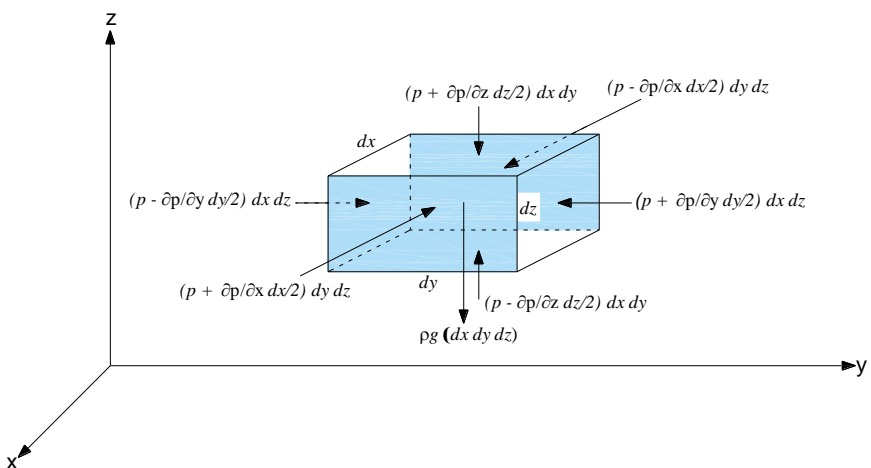


Figura 3-1.- Fuerzas que actúan sobre un elemento infinitesimal que está en reposo en marco de referencia xyz . Fuente: Adaptado de (Potter et al., 2015).

La variación de presión de un punto a otro se determinará aplicando la segunda ley de Newton, es decir, “*la suma de las fuerzas que actúan sobre el elemento de fluido es igual a la masa multiplicada por la aceleración del elemento*” (Potter et al., 2015).

Si se supone que existe una presión p en el centro de este elemento, las presiones en cada una de las caras se pueden expresar con la ayuda del cálculo por medio de la regla de la cadena, obteniendo la **diferencial total** de la presión, $p = p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ (Potter et al., 2015, p. 41). Dada como:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (3.1)$$

Al realizar un desplazamiento desde el centro, a una cara que está a una distancia $(dx/2)$ en dirección del eje positivo de \mathbf{x} , se tiene que la presión es:

$$p\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) = p(x, y, z) + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \quad (3.2)$$

Las presiones en todas las caras se expresan de esta manera, como se observa en la **Figura 3-1**. La segunda ley de Newton se escribe en forma vectorial para un sistema de masa constante, aplicada al eje \mathbf{x} , fuerza de cara anterior menos fuerza de cara posterior (Potter et al., 2015, p. 41).

$$\Sigma F = m \cdot a; \Rightarrow \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dydz = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) dx dy dz = ma \quad (3.3)$$

Esto produce las ecuaciones de las tres componentes $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, escribiendo la masa como densidad por volumen, $\rho (dx dy dz)$ e incluyendo la fuerza del peso en el eje \mathbf{y} , se tiene:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz &= ma_x = (\rho dx dy dz)a_x \\
 -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz &= ma_y = (\rho dx dy dz)a_y \\
 -\frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz &= m(a_z + g) = (\rho dx dy dz)(a_z + g)
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Las variables a_x , a_y y a_z son las aceleraciones en cada uno de los ejes; \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} ; respectivamente. Al dividir las anteriores expresiones entre el diferencial de volumen $\Delta V = dx \cdot dy \cdot dz$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho a_x \\
 \frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho a_y \\
 \frac{\delta p}{\delta z} &= -\rho(a_z + g)
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Ahora se puede determinar el diferencial de presión en cualquier dirección de un fluido acelerado, al reemplazar la ecuación (3.5) en la ecuación (3.1), se obtiene lo siguiente:

$$dp = -\rho a_x dx - \rho a_y dy - \rho(a_z + g) dz
 \tag{3.6}$$

La dirección (\mathbf{z}) siempre es vertical. Las diferencias de presión entre puntos especificados se pueden calcular integrando la ecuación (3.6).

3.3 Presión para fluidos en reposo

En un fluido en reposo la aceleración en cualquiera de las tres direcciones es cero, $a_x = 0$, $a_y = 0$ y $a_z = 0$, por lo tanto, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g\end{aligned}\tag{3.7}$$

Lo que significa que en un fluido en reposo no existe variación de la presión con la distancia horizontal en \mathbf{x} y \mathbf{y} , solo existe variación de presión en el eje \mathbf{z} o en la vertical (Potter et al., 2015); con base en lo anterior, la ecuación (3.7) se reduce a:

$$dp = -\rho \cdot g dz\tag{3.8}$$

O bien:

$$dp = -\gamma \cdot dz \quad dp = -\gamma dz\tag{3.9}$$

Cabe señalar que dp es negativo si dz es positivo; esto es, la presión disminuye a medida que se asciende en altura y aumenta cuando se disminuye en altura. Hay que mencionar, además, que la superficie libre del líquido es altamente importante pues se trata del nivel de referencia a partir del cual se suelen medir o estimar las presiones hidrostáticas sobre superficies de fondo, paredes o superficies laterales. Con base en lo anterior, es importante tener presente que el nivel al que se encuentra la superficie libre de un líquido en un estado estático, es el mismo para recipientes de diferentes formas, en los que el fluido se encuentre contenido, teniendo como referencia un mismo nivel de partida.

Usualmente, al estudiar presiones debidas a líquidos en reposo, dicho análisis parte desde la denominada “superficie libre” (que se refiere a la superficie que separa un gas de un líquido) hacia abajo, aceptando que la presión aumenta con la profundidad de manera lineal.

3.4 Solución para líquidos y gases

Teniendo en cuenta que los líquidos y los gases tienen propiedades diferentes, la ecuación general de la estática de fluidos debe

solucionarse por separado, como se muestra a continuación. Por ejemplo, para los gases se debe conocer la relación entre presión, densidad y temperatura, además de los procesos térmicos en los cuales se desarrolla el fenómeno a estudiar.

3.4.1 Solución para un líquido

La ecuación (3.9) se puede solucionar para un líquido en reposo; integrando a ambos lados se tiene:

$$p = -\gamma \cdot z + C \quad (3.10)$$

Para hallar la constante de integración C , se toma como nivel de referencia la superficie del líquido, con h variando de manera positiva a medida que aumenta la profundidad, y se supone que en la superficie del agua $z = -h$, si $h = 0$, la presión es la equivalente a la presión atmosférica (p_{atm}); entonces, cuando $h = 0$, $p = p_{atm}$, por lo tanto, $C = p_{atm}$, transformándose la ecuación (3.10) en:

$$p = \gamma \cdot h + p_{atm} \quad (3.11)$$

Esta última ecuación (3.11), indica que la presión en un punto dentro de un líquido, es igual a la presión ejercida por el fluido por encima de dicho punto más la presión atmosférica en la altitud correspondiente (sobre el nivel del mar) a la localización de dicho punto h , la cual se mide desde la superficie del agua hacia el fondo del líquido, o en dirección negativa de z .

Ejemplo 3.1.

Se tiene un conducto con flujo a presión, el cual conduce aceite, como se ilustra en la **Figura 3-2**. Determinar a qué altura, en pies de columna de aceite, subiría por un piezómetro colocado en la pared del tubo, si en el mismo punto (p) se mide una presión de 14,7 psi, con gravedad específica del aceite de 0,8. Despreciar la presión atmosférica sobre la sección abierta del piezómetro.

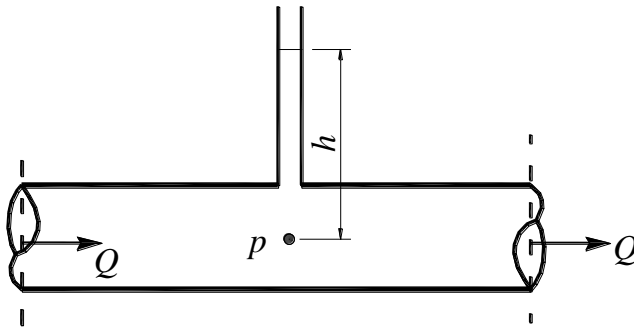


Figura 3-2.- Esquema del Ejemplo 3.1.

Solución: a partir de la ecuación (3.11) se despeja la altura, $h = p / (G_{\text{saceite}} \cdot \gamma_{\text{agua}4^{\circ}\text{C}})$, recordando que el peso específico del agua es de $62,4 \text{ lb/pie}^3$. Con base en lo anterior, y convirtiendo la presión de psi a lb/pie^2 , se halla la altura que el aceite alcanza: ía.

$$\frac{p}{\gamma} = h = \frac{14,7 \text{ psi}(\text{lb} / \text{in}^2)}{0,8 \cdot 62,4 \text{ lb} / \text{pie}^3} = \frac{14,7(\text{lb} / \text{in}^2)}{0,8 \cdot 62,4 \text{ lb} / \text{pie}^3} \quad (1)$$

$$14,7 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} = 14,7 \frac{\text{lb}}{(1/12 \text{ pies})^2} = 14,7 \text{ lb} (12 \text{ pies})^2 = 2116,8 \text{ lb} / \text{pie}^2$$

$$(2) h = \frac{2116,8 \text{ lb} / \text{pie}^2}{0,8 \cdot 62,4 \text{ lb} / \text{pie}^3} = 42,4 \text{ pie} \quad (3)$$

3.4.2 Ecuación de estado de los gases

Tomando los conceptos de Streeter et al. (2000), Niño y Duarte (2006) y Potter et al. (2015), la **ecuación de estado** se conoce como la relación de densidad, presión y temperatura de un cuerpo en un estado físicamente determinado. La ley de los gases perfectos es conocida también como *ley de los gases ideales*. Si la temperatura (T°) es relativamente baja y/o la presión relativamente alta, se debe tener cuidado en aplicar la ley de los gases reales.

Para el caso del aire, la ecuación es válida para temperaturas mayores a -50°C (58°F) y para presiones que no sean excesivamente altas. Un **gas perfecto** es toda aquella sustancia que satisface *la ecuación del estado del gas*, dada por la ecuación (3.12).

$$P\forall_s = RT \quad (3.12)$$

Donde P es la presión absoluta en kp/m^2 , T es la temperatura absoluta en Kelvin, R es la constante del gas y \forall_s es el volumen específico dado según siguiente ecuación:

$$\forall_s = \frac{1}{\rho} \quad (3.13)$$

La constante del gas R está dada por:

$$R = \frac{R_u}{M} \quad (3.14)$$

Donde R_u es la constante universal de los gases, igual a $8314 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{mol}\cdot\text{K})$ ($= 49,710 \text{ pie}\cdot\text{lb}_f/(\text{slug}\cdot\text{mol}\cdot^{\circ}\text{R})$), donde $(\text{kg}\cdot\text{mol})$ es un kilogramo mol; M es la masa molar, cuyo valor se encuentra estipulado en tablas, por ejemplo, para el aire es $28,97 \text{ kg}/\text{kg}\cdot\text{mol} = 28,97 \text{ slug}/\text{slug}\cdot\text{mol}$. El valor de R para el aire en el SI es de $286,98 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ y en el Sistema Inglés es de $1716 \text{ ft}\cdot\text{lb}_f/(\text{slug}\cdot^{\circ}\text{R})$.

Ejemplo 3.2.

Un tanque con un volumen de $0,2 \text{ m}^3$ contiene $0,5 \text{ kg}$ de nitrógeno (masa molar, $M = 28 \text{ kg}/(\text{kg}\cdot\text{mol})$), la temperatura al interior del tanque es de 20°C . Calcule la presión del gas de nitrógeno dentro del tanque.

Solución: Se debe hallar la densidad del gas dada como: $\rho_{\text{gas}} = 0,5 \text{ kg}/0,2 \text{ m}^3 = 2,5 \text{ kg}/\text{m}^3$. El volumen específico es de $1/(2,5 \text{ kg}/\text{m}^3) = 0,4$; $R = 8314 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{mol}\cdot\text{K})/28 \text{ kg}/(\text{kg}\cdot\text{mol}) = 296,9285 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$.

La presión está dada como, $P = RT\rho_{\text{gas}} = (296,9285 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K}))\cdot(273,15+20^\circ\text{C})\cdot(2,5 \text{ kg}/\text{m}^3) = 217611,5\text{J}/\text{m}^3 = 217611,5 \text{ (N}/\text{m}^2) = 217611,5 \text{ Pa}$.

Si se trabaja la constante universal de los gases como $R_u = 8,3145 \text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$, y la masa molar del nitrógeno para un valor de $M = 28 \text{ g}/\text{mol}$, como aparece frecuentemente en la literatura, la constante $R = 8,3145\text{J}/(\text{mol}\cdot\text{K})/28(\text{g}/\text{mol}) = 0,2969 \text{ J}/(\text{g}\cdot\text{K})$; por lo tanto la presión es:

$$P = RT\rho_{\text{gas}} = (0,2969285\text{J}/(\text{g}\cdot\text{K}))\cdot(273,15+20^\circ\text{C})\cdot 2500\text{g}/\text{m}^3 = 217611,5\text{J}/\text{m}^3 = 217611,5\text{N}\cdot\text{m}/\text{m}^3 = 217611,5 \text{ N}/\text{m}^2 = 217611,5 \text{ Pa} = 218\text{k Pa}$$

Para el aire a nivel del mar, las características de la atmósfera internacional estándar son dadas como: $P = 1,033\text{kp}/\text{cm}^2$ y $T = 15^\circ\text{C} = 288,15^\circ\text{K}$.

3.4.3 Procesos Térmicos

Para solucionar la ecuación fundamental de la estática de fluidos para un fluido compresible, se debe tener en cuenta el tipo de proceso termodinámico (Niño y Duarte, 2007), (Chereque, 1987). A continuación, se describe las modalidades de tales procesos.

1 Proceso Isotérmico

Es el proceso donde la temperatura es constante y sólo cambia la presión (p) y volumen (∇), como se indica en ecuación siguiente:

$$p_o \nabla_o = p_f \nabla_f \quad (3.15)$$

Donde p_o es la presión inicial y ∇_o es el volumen inicial, mientras que p_f y ∇_f son los correspondientes valores finales.

2 Proceso Isobárico

Proceso donde la presión es constante y sólo cambia la temperatura (T) y volumen (∇), como se indica a continuación:

$$\frac{\forall_o}{T_o} = \frac{\forall_f}{T_f} \quad (3.16)$$

Donde T_o y \forall_o son la temperatura y el volumen iniciales, respectivamente, y T_f y \forall_f son la temperatura y el volumen finales, respectivamente.

3 Proceso Isócoro (o isovolumétrico o isométrico)

Es el proceso donde el volumen es constante y sólo cambia la temperatura (T) y presión (p), como se indica en la ecuación (3.17).

$$\frac{p_o}{T_o} = \frac{p_f}{T_f} \quad (3.17)$$

Donde p_o y T_o son la presión y la temperatura iniciales, respectivamente, y p_f y T_f son la presión y la temperatura finales, respectivamente.

4 Proceso Adiabático

Para dicho proceso no existe transferencia de calor en el entorno, o un gas no absorbe calor (Q_L); se expresa como:

$$dQ_L = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{p_o}{\rho^k} = \text{constante} \quad (3.19)$$

Donde p_o es la presión inicial, ρ es la densidad y k es el exponente adiabático, que para el aire tiene un valor $k = 1,4$.

5 Proceso Isoentrópico (o Isentrópico)

Es un proceso adiabático pero reversible, que consiste en volver al estado inicial sin pérdidas, (o sin fricción); en este proceso se debe cumplir lo siguiente:

$$\frac{T_f}{T_o} = \left(\frac{p_f}{p_o} \right)^{\frac{k-1}{k}} \quad (3.20)$$

$$p_o \nabla_o^k = p_f \nabla_f^k \quad (3.21)$$

Esta ecuación (3.20) es válida para un proceso reversible adiabático en un gas ideal.

Ejemplo 3.3. Si se tiene aire sometido a fuerza de compresión dentro de un recipiente, calcular la presión final y temperatura final a partir de los siguientes datos: $p_o = 3\text{kp/cm}^2$; $T_o = 20^\circ\text{C}$; $V_o = 0,4\text{ cm}^3$, $\nabla_f = 0,07\text{ cm}^3$; $k = 1,4$. Para los procesos: a) isotérmico y b) isoentrópico.

Solución: en la **Figura 3-3** se muestra la representación gráfica del problema.



Figura 3-3.- Esquema del Ejemplo 3.3. (a) estado inicial, (b) estado final.

(a) *Proceso Isotérmico.*

$$p_f = p_o (\nabla_o / \nabla_f) = (3\text{kp/cm}^2) \cdot (0,4\text{cm}^3) / (0,07\text{cm}^3) = 17,1429\text{kp/cm}^2$$

(b) *Proceso Isoentrópico.*

$$p_f = p_o \cdot (\nabla_o / \nabla_f)^k = (3\text{kp/cm}^2) \cdot [(0,4\text{cm}^3) / (0,07\text{cm}^3)]^{1,4} = 34,4245\text{kp/cm}^2$$

$$T_f = T_o \cdot (p_f / p_o)^{(k-1)/k} = (20+273, 15) \cdot [(34,4245\text{kg/cm}^2) / (3\text{kg/cm}^2)]^{(1,4-1)/1,4} = 588,67\text{K}$$

3.4.4 Solución para presiones en la atmósfera

Presión atmosférica estándar (P_{atmst}): es la presión al nivel medio del mar y a la temperatura de 15°C ; equivale a la atmósfera real que se encuentra en muchas partes del mundo (Loayza, 2005). Este valor ya se ha estandarizado como:

$$P_{\text{atmst}} = 1,033227 \text{ kp/cm}^2 = 10,33 \text{ m}_{\text{H}_2\text{O}} = 760 \text{ mm}_{\text{Hg}} =$$

$$1 \text{ atm} = 29,92 \text{ pulg}_{\text{Hg}} = 14,7 \text{ psi} = 2116,2 \text{ lb/pie}^2 = 33,87 \text{ pie}_{\text{H}_2\text{O}} = 406,79 \text{ pulg}_{\text{H}_2\text{O}} =$$

$$101325,0 \text{ Pa} = 101,325 \text{ kPa} = 1,01325 \times 10^6 \text{ dinas/cm}^2 = 1,01325 \text{ Bar.}$$

Variación de la Presión atmosférica con la altura: Potter et al. (2015), afirmaron que para la atmósfera en la que la densidad depende de la altura (es decir, $\rho = f(z)$), se debe integrar la anterior ecuación (3.8) a lo largo de una distancia vertical. La atmósfera se divide en cinco capas: la tropósfera (la más cercana a la tierra), la estratósfera, la mesósfera, la ionósfera y la exósfera. Puesto que las condiciones cambian con el tiempo y la latitud en la atmósfera (las capas son más gruesas en el ecuador y más delgadas en los polos), los cálculos se basan en la *atmósfera estándar*, que está a una latitud de 40° . En la atmósfera estándar la temperatura de la tropósfera varía linealmente con la altitud según la siguiente fórmula:

$$T(z) = T_0 - \alpha z \quad (3.22)$$

Donde

- T : Temperatura de la tropósfera, en grados Kelvin (o Rankine).
- T_0 : Temperatura para condiciones de atmósfera estándar 288 K (518°R).
- α : Tasa de lapso = $0,0065 \text{ K/m}$ ($0,00357^{\circ}\text{R/ft}$).
- z : Altitud a la que se desea conocer la temperatura, en metros o pies

En la parte baja de la estratósfera, entre los 11 y los 20 km, la temperatura es constante ($-56,5^{\circ}\text{C}$). Más arriba, la temperatura vuelve a aumentar y alcanza su máximo cerca de los 50 km. para luego disminuir hasta el borde de la ionósfera. La variación de la temperatura en la atmósfera estándar se muestra en el esquema en la **Figura 3-4**.

Dado que la densidad del aire en la ionósfera y en la exósfera es tan baja, es posible colocar satélites en órbita alrededor de la Tierra en cualquiera de estas capas.

En la **Figura 3-4**, se indica la variación de la temperatura y la presión atmosférica, en las diferentes capas que componen la atmósfera terrestre.

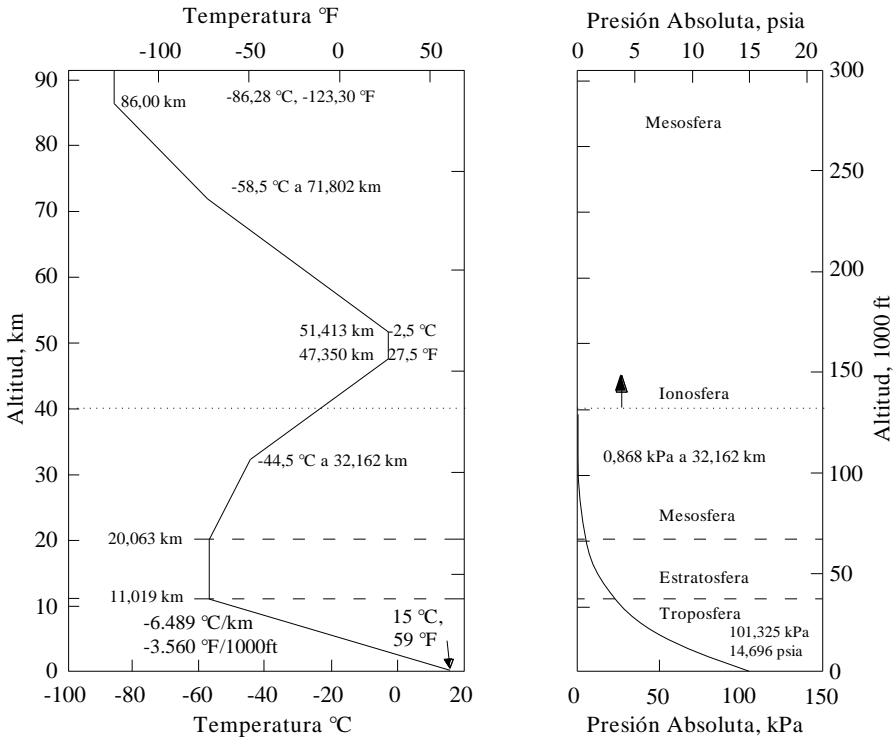


Figura 3-4.- Distribuciones de temperatura y presión de la Atmósfera Estándar.

Fuente: (Franzini y Finnemore, 1999, p. 18); (White, 2004, p. 69).

Deducción de la ecuación para la atmósfera: para determinar la variación de presión de la tropósfera, se puede usar la ley de los gases ideales, vista anteriormente, $p = \rho RT$, reemplazando en la ecuación (3.8), el resultado es:

$$dp = -\left(\frac{p}{RT}\right)g dz \quad (3.23)$$

Es decir:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT} dz \quad (3.24)$$

Esto se puede integrar entre el nivel del mar y la altitud z .

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R} \int_0^z \frac{dz}{T_0 - \alpha z} \quad (3.25)$$

Al integrar, usando el método de sustitución como $m = T_0 - \alpha z$, donde $dz = dm / (-\alpha)$, se integra la función dm/m , cuyo resultado es $\ln(m)$, nuevamente se sustituye (m), se evalúa el término $\ln(T_0 - \alpha z)$ entre 0 y z y se obtiene:

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{g}{\alpha R} \ln\left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right) \quad (3.26)$$

Solucionando para la presión p :

$$p = p_0 \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right)^{g/\alpha R} \quad (3.27)$$

Donde

- p : Presión atmosférica para la altitud a la cual se desea conocer.
- $p_0 = p_{\text{atm}}$: Presión atmosférica estándar es igual a 1,0 atmósfera = 10,33 m.c.a. = 101,3 kPa (abs) = 14,696 psi (abs), a nivel del mar.
- T_0 : Temperatura para condiciones de atmósfera estándar.
- α : Tasa de lapso.
- z : Altitud a la que se desea conocer la temperatura.
- g : Aceleración gravitacional, con un valor de 9,81 m/s² en el SI y de 32,185 ft/s² en el Sistema Inglés.
- R : Constante de los gases, para el aire = 0,287 kJ/kg.K = 1716 ft.lbf/slug.°R; (1Joule=1N.m).

3.4.5 Solución para un gas en proceso isotérmico

A la ecuación diferencial se le calcula la integral a ambos lados,

$$\int dp = -\int \gamma dz \quad (3.28)$$

Para proceso isotérmico se obtiene:

$$p_o \nabla_o = p_f \nabla_f \quad (3.29)$$

$$p_o \frac{m}{\rho_o} = p_f \frac{m}{\rho_f} \quad (3.30)$$

$$p_o \frac{g}{\gamma_o} = p_f \frac{g}{\gamma_f} \quad (3.31)$$

$$\gamma_f = \gamma_o \frac{p_f}{p_o} \quad (3.32)$$

$$\gamma = \gamma_o \frac{p}{p_o} \quad (3.33)$$

Remplazando el peso específico para el gas en la ecuación (3.28):

$$\int dp = -\int \gamma_o \frac{p}{p_o} dz \quad (3.34)$$

$$\int_{p_o}^{p_f} \frac{dp}{p} = -\int_{z_o}^{z_f} \frac{\gamma_o}{p_o} dz \quad (3.35)$$

$$\ln\left(\frac{p_f}{p_o}\right) = -\frac{\gamma_o}{P_o}(z_f - z_o) \quad (3.36)$$

$$p_f = p_o e^{\left[\frac{-\gamma_o}{p_o} (z_f - z_o) \right]} \quad (3.37)$$

Ejemplo 3.4. Suponiendo que en la atmósfera prevalecen condiciones isotérmicas, calcular la presión y la densidad a una elevación de 2000 msnm, si la presión inicial en $z_o = 0,0$ es de $p_o = 10^5 \text{ Pa}_{abs}$, y la densidad inicial es de $\rho_o = 1,24 \text{ kg/m}^3$ (Streeter et al., 2000, p. 40).

Solución:

$$p_f = (10^5 \text{ Pa}_{abs}) e^{\left[\frac{-(1,24) \cdot (9,81)}{10^5 \text{ Pa}} (2000 - 0) \right]} = 78404 \text{ N/m}^2 \quad (1)$$

$$\rho_f = 1,24 \frac{78404 \text{ N/m}^2}{10^5 \text{ Pa}_{abs}} = 0,972 \text{ kg/m}^3 \quad (2)$$

3.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.5.1.- (Chereque, 1987, p. 13).

Calcular la presión a 1500 m de profundidad en el mar: **a)** considerando el agua incompresible con peso específico ($\gamma = 1025 \text{ kg/m}^3$); **b)** considerando el agua compresible con $E = 21000 \text{ kg/cm}^2$.

Ejercicio 3. 5.2. - (Chereque, 1987, p. 14).

Si la presión de vapor del agua a 20°C es aproximadamente $0,024 \text{ kp/cm}^2$, expresar la en altura equivalente de agua (en m.c.a.).

Ejercicio 3. 5.3.- (Chereque, 1987, p. 15).

Hallar el valor el peso específico (γ) del aire a la presión atmosférica, al nivel del mar y a 15°C . Usar ecuación de estado de los gases perfectos.

Ejercicio 3. 5.4.- (Niño y Duarte, 2007, p. 2–6).

Calcular la presión atmosférica a la elevación de 6000 msnm en mm de mercurio, en las siguientes condiciones: **a)** con densidad del aire constante si la presión atmosférica a nivel del mar es de 100 kN/m^2 , con peso específico del aire a 15°C de 12 N/m^3 ; **b)** con temperatura del aire constante entre el nivel del mar y los 6000 msnm; **c)** Para proceso isotérmico e isoentrópico.

Ejercicio 3. 5.5.- (Streeter et al., 2000, p. 40)

En una atmósfera isotérmica, la presión tiene la siguiente característica:

- a) permanece constante,
- b) disminuye linealmente con la elevación,
- c) se incrementa exponencialmente con la elevación,
- d) varía en la misma forma que la densidad,
- e) permanece constante, al igual que la densidad.

3.6 Escala de presiones

Según Franzini y Finnemore (1999), si se mide la presión con respecto al cero absoluto, se denomina presión absoluta; cuando se mide respecto a la presión atmosférica, se llama presión manométrica, ya que prácticamente todos los medidores de presión registran cero cuando están expuestos a la atmósfera, por lo que miden la diferencia entre la presión del fluido al que están conectados y la del aire circundante.

Se llama presión de vacío, si la presión es inferior a la presión atmosférica, y su valor manométrico corresponde a la cantidad por debajo de la presión atmosférica a la que se halla. El vacío perfecto correspondería al cero absoluto de presión. Todo valor de presión absoluto es positivo, debido a que un valor negativo indicaría una tensión. Las presiones relativas son positivas si se encuentran por encima de la presión atmosférica y negativas si están por debajo (Franzini y Finnemore, 1999, p. 34). Según lo anterior se deduce la relación para la presión absoluta:

$$P_{absoluta} = P_{relativa} + P_{atmosférica} \quad (3.38)$$

En la **Figura 3-5** se indica gráficamente el concepto de presión absoluta y presión manométrica (Potter et al., 2015), (Franzini y Finnemore, 1999). En términos prácticos generalmente se trabaja con presiones manométricas.

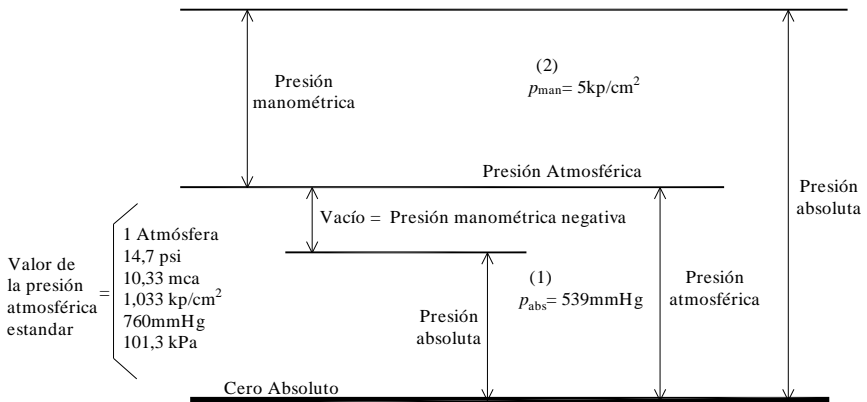


Figura 3-5.- Tipos de presiones. Fuente (Franzini y Finnemore, 1999, p. 34).

Ejemplo 3.5.

La presión atmosférica en el punto (1) de la **Figura 3-5**, en escala absoluta es de 539 mm de Hg, en escala manométrica será de -221 mm de Hg.

Ejemplo 3.6.

Una presión de 5 kp/cm^2 en el punto (2) de la **Figura 3-5** en escala manométrica, será equivalente a $1,033 \text{ kp/cm}^2 + 5 \text{ kp/cm}^2 = 6,033 \text{ kp/cm}^2$, en escala absoluta a nivel del mar.

La presión atmosférica que se toma es la presión atmosférica local, prevaleciente o predominante que varía con la latitud, altitud y condiciones climáticas (Mott y Untener, 2015, p. 52,53). La presión atmosférica a nivel del mar se denomina presión atmosférica normal o estándar (Giles et al., 1994, p. 19). Si en este texto no se especifica la presión atmosférica local, se supondrá que es la presión atmosférica estándar.

3.7 Instrumentos para medir presiones

Las presiones manométricas se miden con dispositivos denominados manómetros, estos son aparatos que utilizan alturas de líquidos para medir presiones. Los manómetros pueden tener diferentes formas, dimensiones y utilizar diferentes fluidos según su aplicación.

Entre estos dispositivos están los piezómetros, manómetros en U, manómetro diferencial en U y en U invertida para fluido indicador con densidad menor que el fluido medido. Existen otros mecanismos que transforman la presión en lecturas digitales, denominados manómetros digitales, o de manecillas de reloj, como el manómetro tipo Bourdon.

3.7.1 Tubos piezométricos

Según Franzini y Finnemore (1999), una columna piezométrica es un dispositivo sencillo para la medición de presiones moderadas en líquidos; consiste en un tubo de longitud adecuada (como se muestra en la **Figura 3-6**), en donde el líquido puede subir sin llegar a rebosar. La altura del líquido en el tubo dará directamente un valor de la altura de presión; Para reducir los errores capilares el diámetro del tubo debe ser como mínimo de 12 mm (0,5 in).

Para la conexión se hacen las siguientes recomendaciones: El agujero debe ser ortogonal tanto a la pared interna como externa, el extremo del tubo piezométrico debe estar a ras con la superficie interna del tubo, eliminar cualquier rugosidad o irregularidad alrededor del agujero, el diámetro no mayor de 1/8 de pulgada.

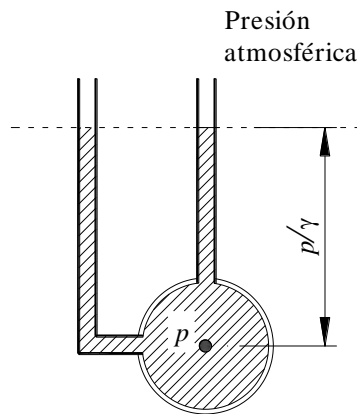


Figura 3-6.- Geometría de un Piezómetro.

Como los tubos piezométricos sirven para medir la presión de un líquido, midiendo la altura de elevación (h) del mismo líquido, se puede conocer la presión como:

$$p = \rho gh \quad (3.39)$$

En un tubo como el de la **Figura 3-6**, el piezómetro se lo puede colocar en cualquier sitio y medirá la misma presión.

Teniendo en cuenta que la altura h es una altura física, el piezómetro se recomienda para presiones bajas con $h \leq 1,5$ m, de lo contrario, será muy difícil tomar la medida de una gran altura.

Ejemplo 3.7.

Si en un piezómetro conectado en un tubo a presión como se muestra en la **Figura 3-6**, se mide una altura de agua de 1,5 metros a temperatura de 4° C, ¿cuál es la presión manométrica dentro del tubo en Pascales?

Resp. $p_{\text{tubo}} = (9810\text{N/m}^3) (1,5\text{m}) = 14715$ Pa.

3.7.2 Manómetro en U

El tipo más sencillo de manómetro es el tubo en forma de **U**, como se muestra en la **Figura 3-7**. Un extremo del tubo está conectado a la presión que se va a medir, mientras que el otro extremo se comunica con la atmósfera. En el tubo hay contenido un líquido manométrico, que no se mezcla con el fluido cuya presión se quiere medir. Los fluidos manométricos más usados son agua ($G_s \approx 1,0$), mercurio ($G_{sHg} \approx 13,55$) y aceites ligeros coloreados ($G_s \approx 0,8$).

La determinación de la presión es función de la diferencia de alturas entre las ramas del tubo en **U**. Se pueden medir presiones relativas a la atmósfera, o presiones diferenciales entre dos tomas de presión, para ambos casos se utiliza manómetros de tubo en **U** simple o compuesto

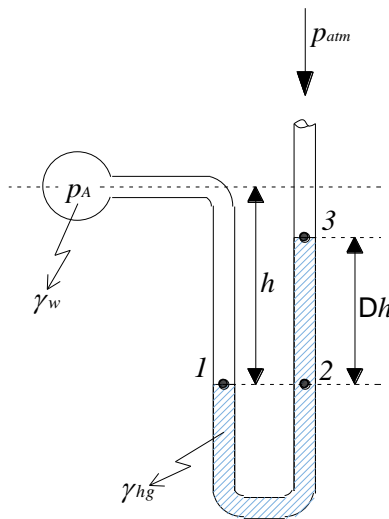
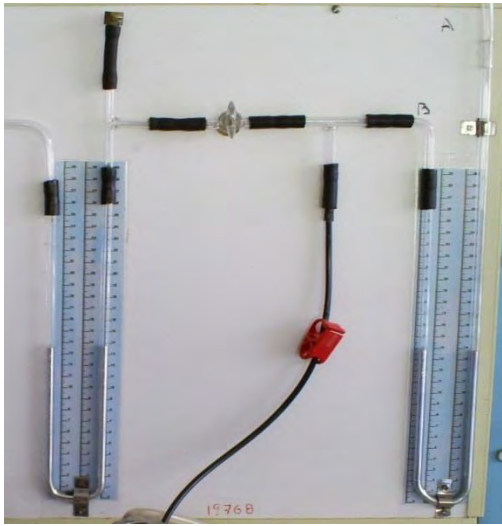


Figura 3-7.- Fotografía y diagrama de un manómetro de tubo en U sencillo, donde: (γ_w) indica el peso específico del agua, (γ_{Hg}) indica el peso específico del mercurio, (h) es la longitud vertical de columna de agua y (Δh) es el delta de altura desplazada.

De acuerdo con Mott y Untener (2015), bajo la acción de la presión que se va a determinar, el fluido manométrico es desplazado de su posición normal. Puesto que los fluidos dentro del manómetro están en reposo, la ecuación (3.39), puede utilizarse para escribir expresiones para los

cambios de presión que se presentan a través del manómetro. Estas expresiones pueden combinarse y resolverse algebraicamente para la presión deseada (p).

$$p = \gamma h \quad (3.40)$$

Ejemplo 3.8.

Si en un piezómetro en U, como el mostrado en la la **Figura 3-7**, conectado en un tubo a presión, se mide un delta de altura (Δh) de agua de 0,25 metros, ¿Cuál es la presión p_A dentro del tubo en pascals, absoluta y manométrica, si la presión atmosférica al nivel del mar es de 101325 Pa, la gravedad específica del mercurio = 13,56, $h = 1,0$ m y la gravedad específica del agua = 1,0?

Solución. Se siguen las siguientes recomendaciones:

- Identificar los puntos dentro del manómetro en los cuales existe el contacto entre dos fluidos, por ejemplo (1, 2, 3,...).
- El plano que atravesase varios puntos del manómetro, en los cuales por debajo o por encima se forme una U con el mismo fluido, las presiones son iguales.

Según lo anterior se tiene, para la Figura 3.7, que la presión en 1 es igual a la presión en 2, ya sea acercándose por la izquierda o por la derecha. Si se toma presión en 1 por la izquierda se tiene que, $p_1 = p_A + h \cdot \gamma_w$, y, si se la toma por la derecha, se tiene que $p_2 = p_{atm} + \Delta h \cdot \gamma_{Hg}$, igualando $p_1 = p_2$, se obtienen las siguientes expresiones:

$$p_A = p_{atm} + (\gamma_{hg} \Delta h) - (\gamma_w h) \text{ Absoluta} \quad (1)$$

$$p_A = (\gamma_{hg} \Delta h) - (\gamma_w h) \text{ Manométrica} \quad (2)$$

Remplazando valores se tiene que $p_{Abs} = 124869$ Pa y $p_{Aman} = 23544$ Pa.

3.7.3 Manómetros diferenciales

Los manómetros diferenciales se dividen en abiertos y cerrados. Los manómetros abiertos consisten en un tubo transparente en forma de U, parcialmente lleno de un líquido pesado, comúnmente mercurio; uno de

sus extremos se conecta de manera perpendicular a la pared que confina el flujo del recipiente que lo contiene, mientras que el otro extremo puede estar abierto a la atmósfera, en este caso se mide la diferencia de presiones entre dos puntos. Los manómetros cerrados, son provistos de un sistema mecánico de aguja y carátula graduada donde se leen directamente las presiones. En la **Figura 3-8** se indica un manómetro diferencial cerrado.

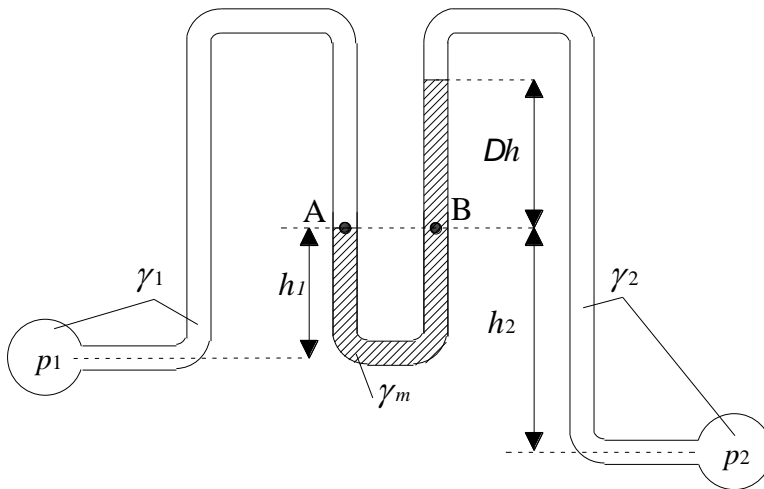


Figura 3-8.- Manómetro diferencial cerrado, donde: (γ_1) y (γ_2) indican el peso específico del fluido 1 y 2; (γ_m) indica el peso específico del fluido manométrico; h_1 y h_2 longitud vertical de columna de agua, y (Δh) es la altura desplazada del fluido manométrico.

Ejemplo 3.9.

Si un manómetro diferencial, como el mostrado en **Figura 3-8**, es conectado entre dos tubos a presión, se mide un delta de altura (Δh) de agua de 0,5 metros, la gravedad específica del fluido manométrico = 13,6, la gravedad específica del agua en el tubo 1 = 1,0, la gravedad específica del aceite del tubo 2 = 0,85, la altura $h_1 = 0,2\text{m}$ y la altura $h_2 = 0,3\text{m}$ ¿Cuál es la diferencia de presión manométrica entre los tubos (1) y (2) en kilo pascales?

R: $p_{man} = 62 \text{ kPa}$.

En muchas aplicaciones interesa únicamente determinar la diferencia entre dos presiones y por este motivo se pueden utilizar los manómetros diferenciales como el de la **Figura 3-8**; si se selecciona los puntos A y B, en los cuales las presiones son iguales, se tiene la siguiente expresión:

$$p_A = p_1 - \gamma_1 h_1 \quad (1)$$

$$p_B = p_2 - \gamma_2 h_2 - \Delta h \gamma_2 + \Delta h \gamma_m \quad (2)$$

$$p_1 - \gamma_1 h_1 = p_2 - \gamma_2 h_2 - \Delta h \gamma_2 + \Delta h \gamma_m \quad (3)$$

$$p_1 - p_2 = -\gamma_2 h_2 - \Delta h \gamma_2 + \Delta h \gamma_m + \gamma_1 h_1 \quad (4)$$

$$p_1 - p_2 = \gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2 + \Delta h (\gamma_{Hg} - \gamma_2) \quad (5)$$

Si se pide conocer la diferencia Δh , se tiene que:

$$\Delta h = \frac{(p_1 - p_2) - (\gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2)}{(\gamma_{Hg} - \gamma_2)} \quad (6)$$

O también si se quiere:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma_{w4^\circ C}} = Gs_1 h_1 - Gs_2 h_2 + \Delta h (Gs_{Hg} - Gs_2) \quad (7)$$

El manómetro diferencial es apropiado para medir diferencias grandes de presión, cuando se utiliza con un líquido pesado como es el mercurio. Para una diferencia pequeña de presión se puede utilizar un fluido ligero, tal como el aceite, o incluso el propio aire.

Ejemplo 3.10. Adaptado de Niño y Duarte (2007).

Calcúlese la diferencia de presión en m.c.a., entre la descarga y la succión de una bomba que transporta agua, como se muestra en la **Figura 3-9**, si el líquido manométrico es mercurio y $h = 0,35$ m.

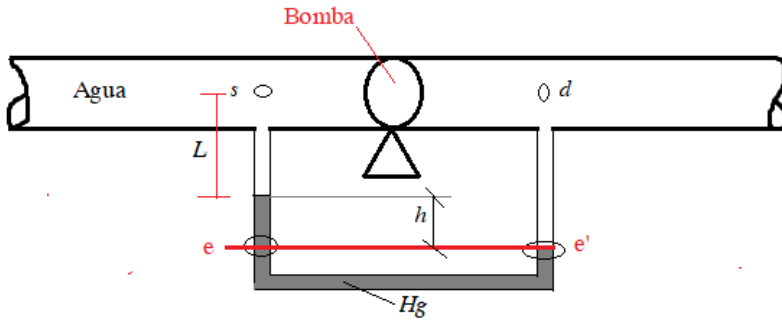


Figura 3-9.- Manómetro diferencial conectado a un tubo.

Solución:

$$p_e = p_{e'} \quad (1)$$

$$p_s + L\gamma + h\gamma_{Hg} = p_d + (L + h)\gamma \quad (2)$$

$$p_d - p_s = L\gamma + h\gamma_{Hg} - (L + h)\gamma \quad (3)$$

$$p_d - p_s = h\gamma_{Hg} - (h\gamma) = h(\gamma_{Hg} - \gamma) \quad (4)$$

$$p_d - p_s = 0,35(13600 - 1000) = 4410 \text{ kp} / \text{m}^2 \quad (5)$$

$$\frac{p_d - p_s}{1000} = 0,35(13,600 - 1) = 4,41 \text{ mca} \quad (6)$$

3.7.4 Manómetro tipo Bourdon

Las presiones o los vacíos se miden comúnmente utilizando el manómetro de **Bourdon** de la Figura 3-10. En este tipo de manómetro un tubo curvado de sección elíptica cambiará su curvatura al cambiar la presión dentro del tubo: el extremo móvil del tubo gira la manecilla de un cuadrante mediante un mecanismo de unión articulado. La combinación de un manómetro de presión y de vacío se denomina un “manómetro compuesto”. Los medidores de presiones negativas se denominan **vacuómetros**.

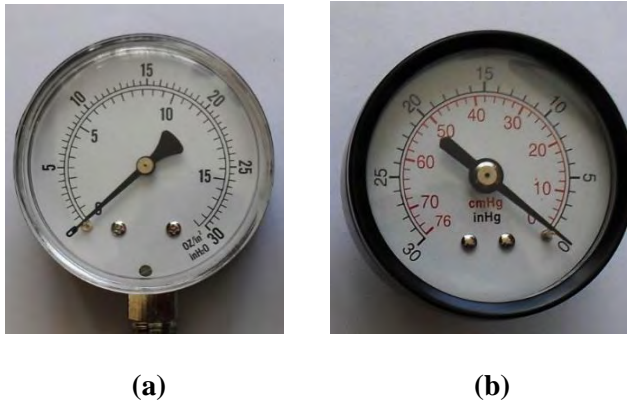


Figura 3-10.- (a). Fotografía de un Manómetro tipo Bourdon, (b). Fotografía de un Vacuómetro. Fuente: Los autores.

Usualmente los manómetros para medir presiones positivas, expresan sus lecturas en libras por pulgada cuadrada (psi) y los manómetros que miden presiones negativas o "**vacuómetros**" expresan las mediciones en mm o pulgadas de mercurio. Un vacuómetro mide con la manecilla girando en sentido contrario a las manecillas del reloj.

3.8 Fuerzas sobre superficies

3.8.1 Fuerzas sobre superficies planas y punto de aplicación

- **Fuerzas**

De acuerdo con Mott y Untener (2015), la fuerza resultante se define como la suma de las fuerzas que actúan sobre pequeños elementos del área de interés. En la **Figura 3-11**, se ilustra el concepto para una forma de área arbitraria.

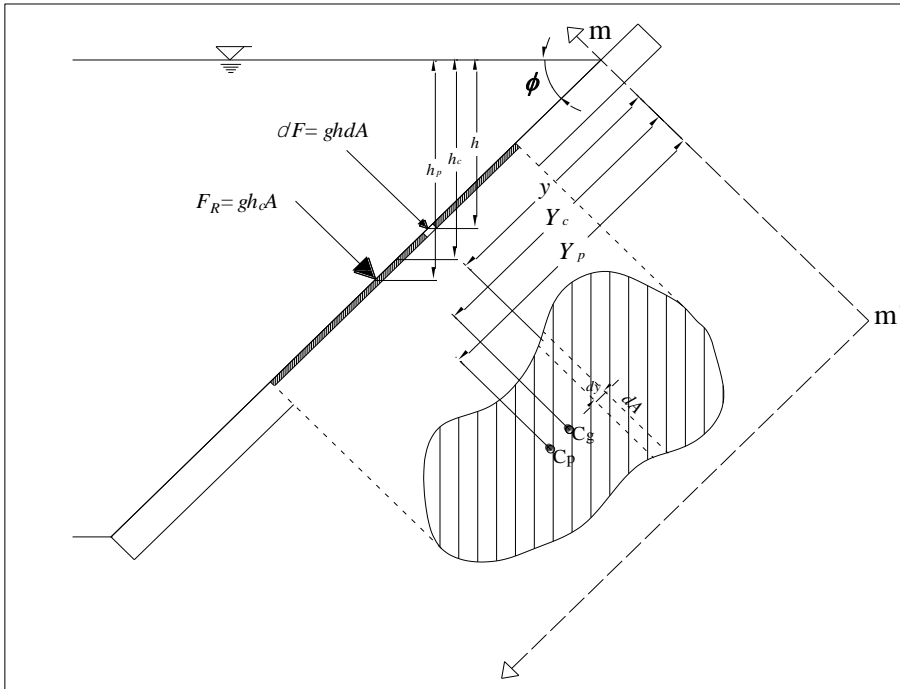


Figura 3-11.- Esquema para deducir la fuerza resultante y centro de presión en superficies planas sumergidas.

Existe un diferencial de fuerza dF actuando sobre un diferencial de área dA y como la presión debido al fluido es $p = \gamma h$, entonces, el diferencial de la fuerza es:

$$dF = p(dA) = \gamma h(dA) \tag{3.41}$$

Obsérvese que:

$$h = y \text{sen } \phi \tag{3.42}$$

El valor de y se lo mide a lo largo de la superficie plana inclinada desde la superficie libre del líquido, entonces,

$$dF = \gamma(y \text{sen } \phi)(dA) \tag{3.43}$$

Para encontrar la fuerza F se integra dF :

$$F_R = \int_A dF = \int_A \gamma(y \text{sen } \phi)(dA) = \gamma \text{sen } \phi \int_A y(dA) \tag{3.44}$$

De la mecánica se sabe que el término $\int y(dA)$ es igual al producto del área total por la distancia al centroide de área desde el eje de referencia, o también conocido como primer momento de área; esto es,

$$\int_A y(dA) = Y_c A \quad (3.45)$$

Entonces la fuerza resultante, F_R , es:

$$F_R = \gamma \text{sen } \phi (Y_c A) \quad (3.46)$$

Ahora se puede sustituir: $h_c = Y_c \text{sen } \phi$, entonces:

$$F_R = \gamma h_c A \quad (3.47)$$

Donde h_c es la altura vertical medida desde la superficie del líquido hasta el centroide de la compuerta o placa. Por lo tanto es necesario conocer los centroides de las placas según su geometría.

- **Punto de aplicación**

El centro de presión C_p en la superficie sumergida, es el punto en el cual actúa la fuerza de presión resultante F_R . Se localiza por debajo del centro de gravedad porque la intensidad de la presión se incrementa con la profundidad. La ubicación del centro de presión, representada por la distancia Y_p se calcula sumando los momentos de las fuerzas incrementales en torno a un eje en la superficie del agua que pasa por el punto **m** de la Figura 3.11 Merrit (1999).

En la **Figura 3-11**, el momento (dM) de cada pequeña fuerza, dF , con respecto a este eje, es dado como:

$$dM = dF \cdot (y) \quad (3.48)$$

Pero $dF = \gamma (\text{sen } \phi)(dA)$, entonces,

$$dM = y [\gamma (\text{sen } \phi)(dA)] \quad (3.49)$$

$$dM = \gamma \operatorname{sen} \phi \left[y^2 (dA) \right] \quad (3.50)$$

El momento de todas las fuerzas que actúan sobre el área completa se encuentra integrando sobre el área. Ahora bien, si se supone que la fuerza resultante, F_R , actúa en el centro de presión, su momento con respecto al eje m-m' es $F_R Y_p$, entonces se tiene:

$$F_R Y_p = M = \int (\gamma \operatorname{sen} \phi y^2 dA) \quad (3.51)$$

$$F_R Y_p = \gamma \operatorname{sen} \phi \int (y^2 dA) \quad (3.52)$$

De nuevo, de la teoría de la mecánica se sabe que el término $\int (y^2 dA)$ se define como el momento de inercia I del área completa con respecto a un eje horizontal desde el cual se mide y reemplazando I , se tiene,

$$F_R Y_p = \gamma \cdot \operatorname{sen} \phi \cdot I \quad (3.53)$$

Resolviendo para Y_p , se obtiene:

$$Y_p = \frac{\gamma \cdot \operatorname{sen} \phi \cdot I}{F_R} \quad (3.54)$$

Sustituyendo la expresión para F_R de la ecuación (3.53) se obtiene:

$$Y_p = \frac{\gamma \operatorname{sen} \phi I}{\gamma \operatorname{sen} \phi (Y_c A)} = \frac{I}{Y_c A} \quad (3.55)$$

Usando el teorema de los ejes paralelos para el momento, se tiene,

$$I = I_{xc} + AY_c^2 \quad (3.56)$$

Donde, I_{xc} es el momento de inercia del área de interés con respecto de su propio eje centroidal horizontal o eje x , y Y_c es la distancia del eje de referencia al centroide. Realizando las respectivas sustituciones, se obtiene:

$$Y_p = \frac{I_{xc} + AY_c^2}{Y_c A} \tag{3.57}$$

$$Y_p = \frac{I_{xc}}{Y_c A} + Y_c \tag{3.58}$$

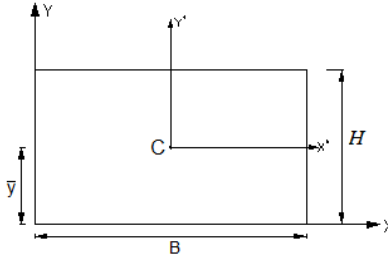
El centro de presión siempre está a una profundidad mayor que el centroide de un área que esté inclinada. Puede ser de interés calcular solamente la diferencia entre Y_p y Y_c con la ecuación:

$$Y_p - Y_c = \frac{I_{xc}}{Y_c A} \tag{3.59}$$

En la tabla 3-1

Tabla 3-1 se indican los valores para el centro de gravedad y el momento de inercia centroidal de algunas áreas conocidas.

Tabla 3-1.- Áreas, centroides y momentos de inercia de algunas figuras geométricas más conocidas. $\bar{y} = Y_c$, con respecto al eje x' .

Figura Geométrica	Esquema	Área	Posición Centroide	Momento de Inercia centroidal con respecto a eje x
Rectángulo		$A = B \cdot H$	$\bar{y} = \frac{H}{2}$	$I_{x'c} = \frac{B \cdot H^3}{12}$

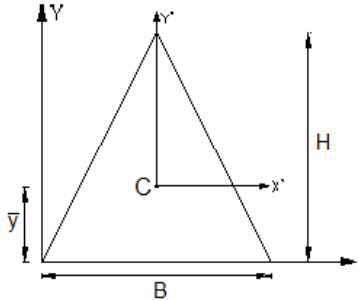
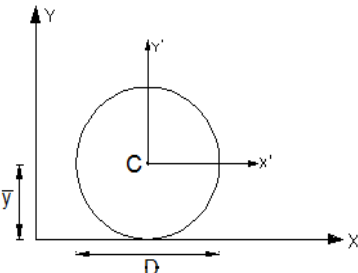
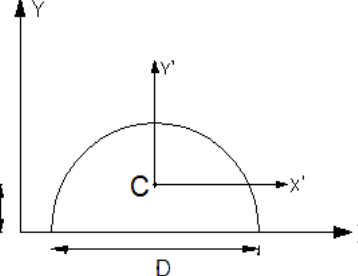
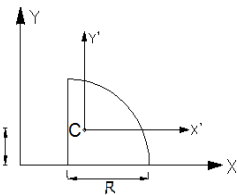
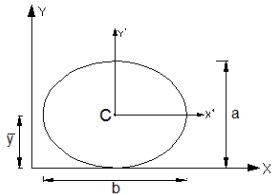
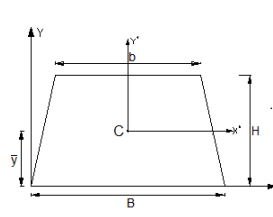
<p>Triángulo</p>		$A = \frac{B \cdot H}{2}$	$\bar{y} = \frac{H}{3}$	$I_{x'c} = \frac{B \cdot H^3}{36}$
<p>Círculo</p>		$A = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$	$\bar{y} = \frac{D}{2}$	$I_{x'c} = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$
<p>Medio círculo</p>		$A = \frac{\pi \cdot D^2}{8}$	$\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$	$I_{x'c} = 6,86 \cdot 10^{-3} \cdot D^4$

Tabla 3-2.- Áreas, centroides y momentos de inercia de algunas figuras geométricas más conocidas. $\bar{y} = Y_c$, con respecto al eje x' . (continuación)

<p>Figura Geométrica</p>	<p>Esquema</p>	<p>Área</p>	<p>Posición Centroide</p>	<p>Momento de Inercia centroidal con respecto a eje x</p>
<p>Cuarto de círculo</p>		$A = \frac{\pi \cdot D^2}{16}$	$\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$	$I_{x'c} = 5,49 \cdot 10^{-2} \cdot R^4$

<p>Elipse</p>		$A = \pi \cdot a \cdot b$	$\bar{y} = b$	$I_{x'c} = \frac{\pi \cdot b \cdot a^3}{64}$
<p>Trapezio</p>		$A = \frac{(B + b)H}{2}$	$\bar{y} = \frac{H(2b + B)}{3(b + B)}$	$I_{x'c} = \frac{H^3(b^2 + (4 \cdot B \cdot b) + B^2)}{36(B + b)}$

Ejemplo 3.10.

Determinése la magnitud y el punto de acción (Y_p) de la fuerza de presión resultante F_R debida al agua, en unidades del sistema inglés, contra una compuerta de desagüe, de cinco pies (5ft) de base y altura cinco pies (5 ft), a una distancia de 2,5 pies (2,5 ft) desde el plano (O-O') hasta el borde superior de la compuerta, inclinada a un ángulo ϕ de $53,2^\circ$ con la horizontal Merrit (1999). La geometría se muestra en la **Figura 3-12.**

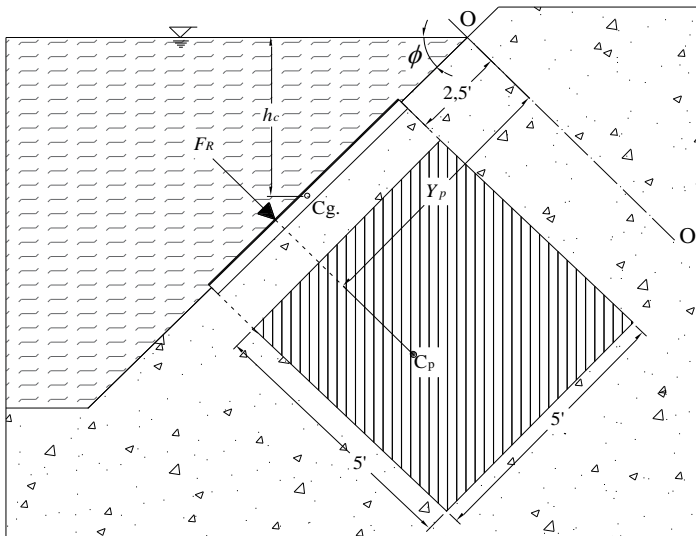


Figura 3-12.- Esquema para deducir la fuerza resultante y centro de presión en superficies planas sumergidas.

Solución:

$$h_c = 4,0 \text{ ft},$$

$$A = 25 \text{ ft}^2,$$

$$F_R = (62,4 \text{ lb/ft}^3) (4 \text{ ft}) (25 \text{ ft}^2) = 6240 \text{ lb}.$$

$$Y_{cg} = 2,5 \text{ ft} + 5 \text{ ft} / 2 = 5,0 \text{ ft}.$$

$$I_{xc} = (5 \text{ ft})(5 \text{ ft})^3 / 12 = 52,0833 \text{ ft}^4.$$

$$Y_p = 52,0833 \text{ ft}^4 / 25 \text{ ft}^2 / 5 \text{ ft} + 5 \text{ ft} = 5,417 \text{ ft}.$$

3.8.2 Fuerzas sobre superficies curvas sumergidas y puntos de aplicación

Según Merrit (1999), la fuerza resultante de la presión sobre las superficies curvas sumergidas no puede calcularse con las ecuaciones desarrolladas para la fuerza sobre superficies planas sumergidas, debido a las variaciones no lineales en la dirección de la fuerza de presión; pero se puede calcular usando las componentes de la fuerza horizontal y vertical, R_x y R_y , respectivamente, en combinación vectorial. En la **Figura 3-13**, se indica la presión hidrostática que actúa sobre una superficie curva sumergida. La sección ABC se puede considerar como un prisma de ancho unitario (por ejemplo 1m, 1pie, etc.), y se puede analizar como un cuerpo libre, de acuerdo a los principios de la estática.

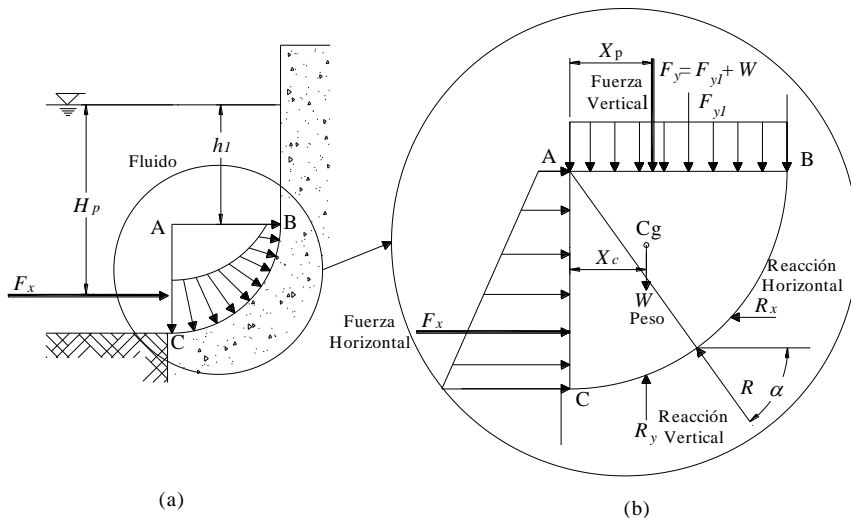


Figura 3-13.- Presiones sobre un superficie curva: (a) Variación de la presión en su configuración general. (b) Diagrama de cuerpo libre de la superficie curva.

Para hallar el valor de la resultante R , se necesita conocer las fuerzas R_x y R_y , y el cálculo se hace mediante la siguiente expresión:

$$R = \sqrt{(R_x^2 + R_y^2)} \quad (3.60)$$

En la ecuación anterior (3.60), R_x es la fuerza horizontal y R_y es la fuerza vertical, las cuales se calculan de la siguiente manera:

Fuerza horizontal, R_x : se calcula como una placa plana sumergida con $\phi = 90^\circ$, correspondiente a la proyección vertical de la superficie curva, con la siguiente expresión:

$$F_x = \gamma h_c A_p \quad (3.61)$$

Donde, γ es el peso específico del fluido, h_c es la altura vertical desde la superficie del fluido hasta el centroide del área proyectada y A_p es el área proyectada vertical. El punto de aplicación de la fuerza horizontal R_x es calculado como si fuera una placa plana sumergida en posición vertical, donde $Y_p = H_p$, con la siguiente ecuación:

$$H_p = \frac{I_c}{h_c A_p} + h_c \quad (3.62)$$

Donde, I_c es el momento de inercia con respecto al eje horizontal (x') que pasa por el centroide del área vertical proyectada. En la **Figura 3-13** (b), H_p es la profundidad de aplicación de la fuerza R_x .

Fuerza vertical, R_y : Esta es igual al peso del volumen de líquido *real* o *imaginario* por encima de la superficie curva. Se considera un volumen real si el líquido está en contacto por encima de la superficie curva y se considera imaginario si el líquido está en contacto por debajo de la superficie curva. Por ejemplo, en la **Figura 3-13** (a), corresponde a un volumen real sobre la curva B-C, se calcula como:

$$R_y = \gamma V_l \quad (3.63)$$

Donde, ∇_l es el volumen real o imaginario que actúa sobre la superficie curva. El punto de aplicación de la fuerza vertical corresponde al centroide del volumen real o imaginario (c.g.) que actúa sobre la superficie curva. Por lo general el ancho de las superficies suele considerarse constante, en este caso solo depende de la cara frontal del volumen por encima, donde suele ser un área compuesta por dos o más áreas simples conocidas, y para hallar el centroide del área compuesta se recurre a la siguiente ecuación.

$$X_C = \frac{\sum_{k=1}^n (A_k x_{ck})}{A} \quad (3.64)$$

Donde, n es el número de áreas, X_c será la distancia desde un eje determinado hasta el centroide del área compuesta, A_k es el área de una superficie simple k , x_{kc} es la distancia del centroide de cada área desde el mismo eje determinado hasta el centroide del área simple k .

La dirección de la resultante sobre la superficie curva, alfa (α) se calcula como:

$$\alpha = \text{tg}^{-1} \left(\frac{R_y}{R_x} \right) \quad (3.65)$$

Ejemplo 3.17.

Calcúlese la magnitud y dirección de la fuerza de presión resultante sobre un ancho de un (1,0) pie de la compuerta en abanico de radio 5,0 pies de la **Figura 3-14**.

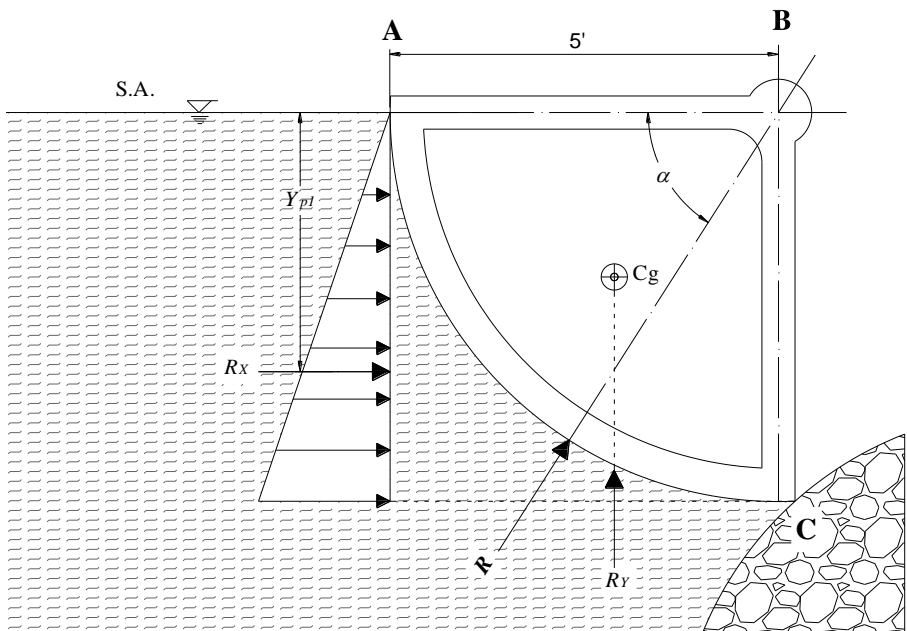


Figura 3-14.- Compuerta de abanico. (S.A.=superficie del agua).

Solución:

$$R_x = (62,4\text{lb/ft}^3) (2,5\text{ft}) (5\text{ft} \cdot 1\text{ft}) = 780\text{lb.}$$

$$R_y = (62,4\text{ lb/ft}^3)(2)((\pi 10\text{ft}^2/4)/4)(1) = 1220\text{ lb.}$$

$$R = (780^2 + 1220^2)^{0,5} = 1450\text{ lb.}$$

$$\alpha = \text{tag}^{-1}(1220/780) = 57,4^\circ.$$

3.9 Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.9.1. (Munson et al., 1990, p. 52).

Dado un tanque cerrado que contiene aire comprimido y aceite (G_s aceite = 0,90) como se muestra en la **Figura 3-15**. Un manómetro de tubo en U que usa mercurio está conectado al tanque. Las alturas de las columnas son $h_1 = 36$ pulgadas, $h_2 = 6$ pulgadas y $h_3 = 9$ pulgadas. Determine la lectura de presión (en psi) del manómetro.

Respuesta: $p_{\text{manómetro}} = 3,06\text{psi.}$

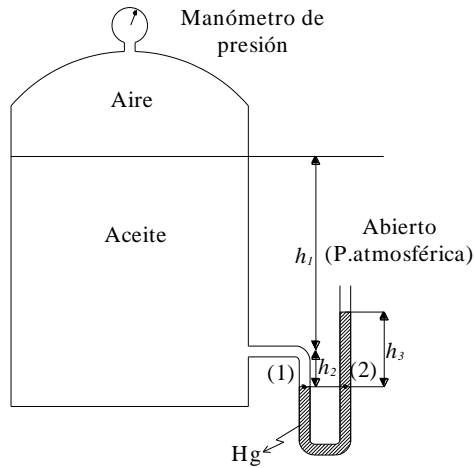


Figura 3-15.- Esquema del tanque y manómetro (Munson et al., 1990, p.52).

Ejercicio 3.9.2. (Giles et al., 1994 n.d., p. 34).

Con referencia a la **Figura 3-16**, determinar: a) La fuerza ejercida por el agua sobre la placa del fondo AB de la tubería de 0,60 m de diámetro en kilopondios (kp); b) la fuerza total sobre el plano C en kilopondios (kp).

Respuesta: 1410 kp, 21200 kp.

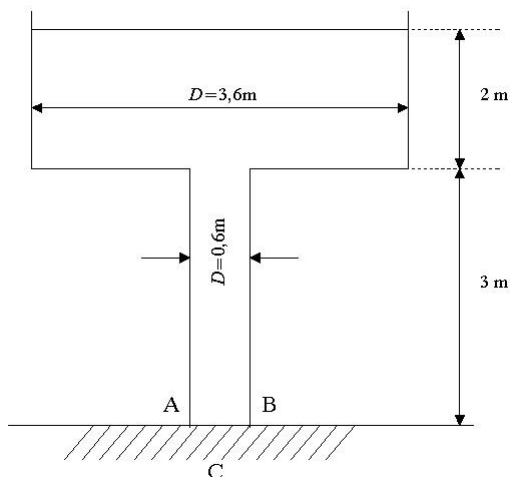


Figura 3-16.- Esquema del depósito cilíndrico y tubería (Giles et al., 1994, p. 34).

Ejercicio 3.9.3. (Mott y Untener, 2015, p. 60).

Para el manómetro diferencial compuesto de la **Figura 3-17**, calcule la diferencia de presión entre el conducto para agua y el conducto para aceite.

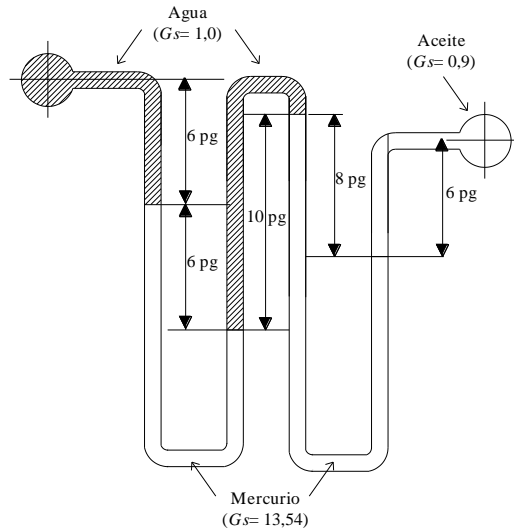


Figura 3-17.- Esquema del manómetro diferencial compuesto. Fuente: (Mott y Untener, 2015, p. 60).

Ejercicio 3.9.4. (Giles et al., 1994, p. 58).

Determinar el valor de z en metros que se muestra en la **Figura 3-18**, de forma que la fuerza total sobre la barra BD no sobrepase los 8,172 kp al suponer que la longitud en dirección perpendicular al dibujo es de 1,22 m y que la barra BD está articulada en ambos extremos.

Respuesta: 1,79 m.

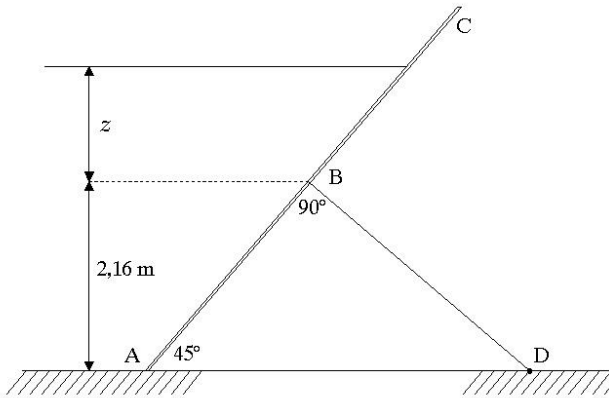


Figura 3-18.- Esquema de la superficie plana sumergida. Fuente: (Giles et al., 1994, p. 58).

Ejercicio 3.9.5. (Giles et al., 1994, p. 60).

En la **Figura 3-19**, se muestra una compuerta circular inclinada de 1,0 m de diámetro sobre la que actúa agua por uno de los lados. Determinar la fuerza resultante que actúa sobre la compuerta y la situación del centro de presión.

Respuesta: 14,86 kN; 2,260 m por debajo de la superficie libre y medida a lo largo de la superficie inclinada.

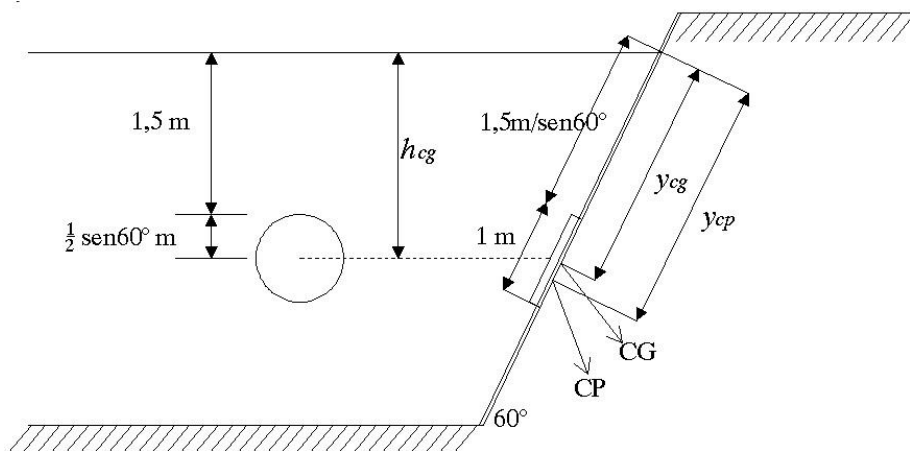


Figura 3-19.- Esquema de la compuerta circular. Fuente: (Giles et al., 1994, pp. 60).

Ejercicio 3.9.6. (Giles et al., 1994, p. 60), (Fernández, 2001, p. 78).

En la **Figura 3-20**, el cilindro de 1,22 m de diámetro y 1,22 m de longitud, está sometido a la acción del agua por su lado izquierdo y de un aceite de densidad relativa 0,800 por su lado derecho. Determinar: **a)** la fuerza normal en B si el cilindro pesa 1,816 kp y **b)** la fuerza horizontal debida al aceite y al agua si el nivel de aceite desciende 0,305 m.

Respuestas: **a)** 536 kp, **b)** 10407 kp hacia la derecha.

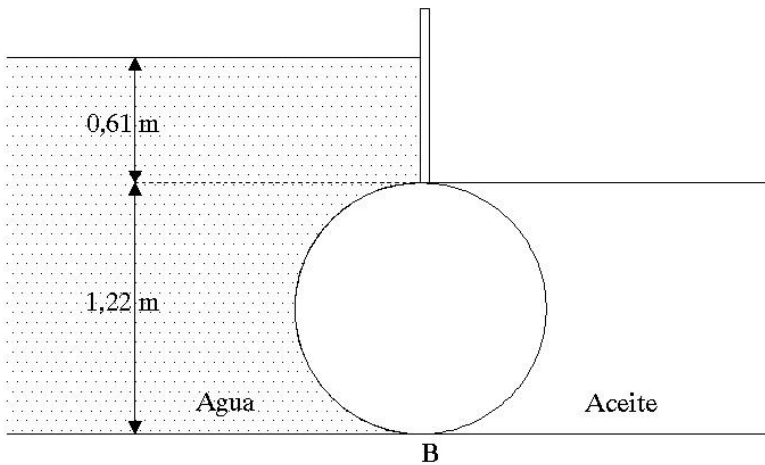


Figura 3-20.- Esquema de cilindro dique. Fuente: (Giles et al., 1994, pp. 60).

Ejercicio 3.9.7. (Shames, 1995, p. 89).

Con base en lo ilustrado en la **Figura 3-21**, ¿Cuál es la diferencia de presión entre los puntos A y B de los tubos?

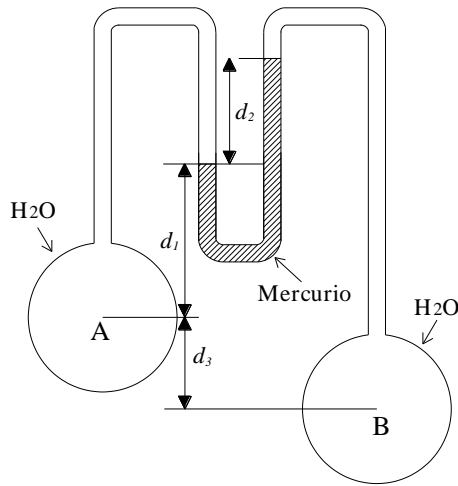


Figura 3-21.- Esquema del manómetro diferencial.

Ejercicio 3.9.8. (Shames, 1995, p. 89).

En la **Figura 3-22** se muestra un vertedero cilíndrico, de control, que tiene un diámetro de 3 m y una longitud de 6 m. Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza resultante causada por los fluidos sobre el vertedero.

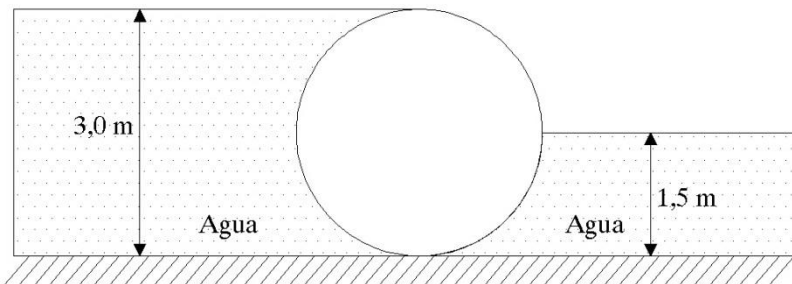


Figura 3-22.- Esquema del vertedero cilíndrico. Fuente: (Shames, 1995, pp. 89).

Ejercicio 3.9.10. (Mataix, 1982, p. 80).

En la **Figura 3-23** se muestra la geometría del manómetro. **a)** Encontrar el valor de la altura h , despreciando las columnas de aire, con gravedad específica del mercurio 13,6 y gravedad específica del agua 1,0. **b)**

¿Cuál sería el valor de la altura de h si los espacios de aire se llenaran de agua de gravedad específica 1,0?

Respuestas: (a) $h = 18,42$ m, (b) $h = 15,42$ m. Se recomienda ver el video: https://youtu.be/Cy_y_LCW1r0.

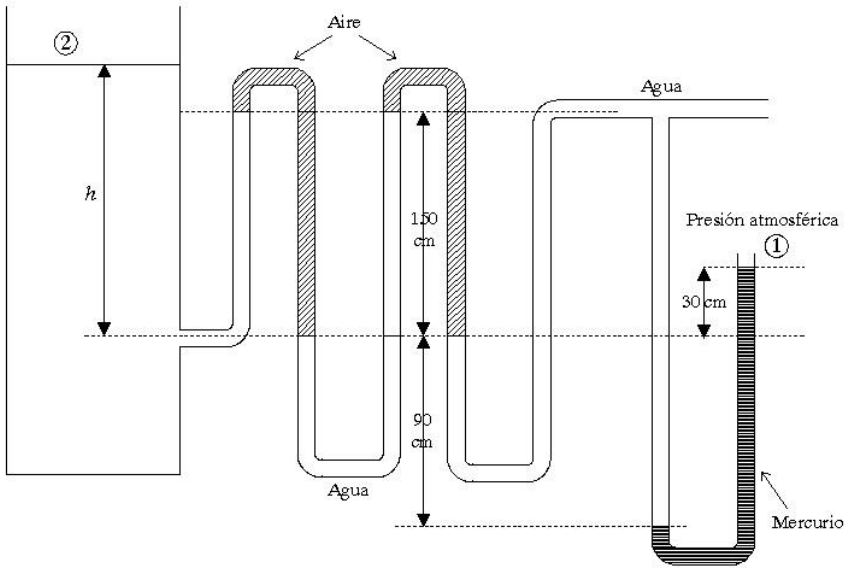


Figura 3-23.- Esquema del manómetro en U compuesto. Fuente: (Mataix, 1982, pp. 80).

3.10 Principio de Arquímedes

Este principio, propuesto por el filósofo griego Arquímedes, entre los años 287-212 A.C, reza: **“la fuerza de flotación sobre un cuerpo es igual al peso del líquido desplazado”** Potter et al. (2015, p. 61).

Según Potter et al. (2015), este principio, conocido también como la ley de flotación, se remonta unos 2200 años atrás en la historia. Según la leyenda, Herón, rey de Siracusa, abrigaba la sospecha que su nueva corona de oro estaba hecha de otros materiales, que no de oro puro; de modo que pidió a Arquímedes que lo sacara de dudas. Al parecer, Arquímedes preparó un trozo de oro puro que pesaba lo mismo que la corona. Se descubrió que el trozo pesaba más en agua que la corona, lo

que convenció a Arquímedes de que la corona no era de oro puro. El material falso ocupaba un volumen mayor para tener el mismo peso que el oro, y por ende, desalojaba más agua (Potter et al., 2015).

3.10.1 Fuerzas de flotación

Según Streeter et al. (2000), se denomina fuerza de flotación a la fuerza resultante ejercida sobre un cuerpo por un fluido estático, en el cual dicho cuerpo está sumergido o flotando. **La fuerza de flotación siempre actúa verticalmente hacia arriba.** Así, no puede haber ninguna componente horizontal de la resultante, porque la proyección del cuerpo sumergido o porción sumergida del cuerpo flotante en un plano vertical es siempre cero.

La fuerza de flotación sobre un cuerpo sumergido es la diferencia entre el componente vertical de la fuerza de presión en su lado inferior y el componente vertical de la fuerza de presión en su lado superior. En la **Figura 3-24**, la fuerza hacia arriba en el fondo es igual al peso del líquido, real o imaginario, que está situado verticalmente arriba de la superficie ABC, indicado por el peso del líquido dentro de ABCEFA. La fuerza hacia abajo sobre la superficie superior es igual al peso del líquido ADCEFA. Esto es similar al tratamiento que se le da a fuerzas sobre superficies curvas.

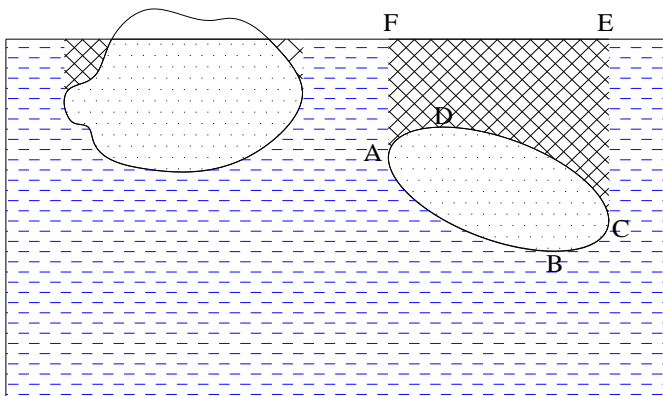


Figura 3-24.- Fuerza de flotación sobre cuerpos flotantes y sumergidos.

La diferencia entre las dos fuerzas es una fuerza, dirigida verticalmente hacia arriba, debida al peso del fluido ABCD que es desplazado por el sólido. En forma de ecuación se tiene:

$$F_b = \nabla \gamma \tag{3.66}$$

En donde, F_b es la fuerza de flotación y es la fuerza ejercida sobre un cuerpo sumergido o flotante por un fluido estático; ∇ es el volumen del fluido desplazado; y (γ) es el peso específico del fluido desalojado. La misma fórmula sirve para cuerpos flotantes cuando el ∇ se toma como el volumen de líquido desplazado. En general, la fuerza de empuje es igual al peso de volumen de líquido desalojado por un cuerpo, ya sea sumergido o flotante.

En la **Figura 3-25**, adaptada de Streeter et al. (2000), se tiene que la fuerza vertical ejercida sobre un elemento del cuerpo en forma de un prisma vertical de corte transversal dA es:

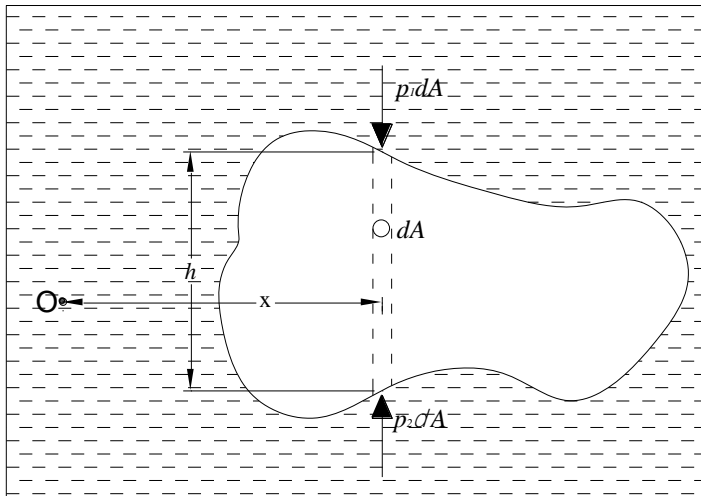


Figura 3-25.- Componentes de fuerza vertical sobre el elemento del cuerpo.

$$dF_b = (p_2 - p_1) dA \tag{3.67}$$

$$dF_b = \gamma h \cdot dA = \gamma(h \cdot dA) = \gamma \cdot d\forall \quad (3.68)$$

En la que $d\forall$ es el volumen del prisma. Acá, integrando sobre el cuerpo completo, se tiene la siguiente expresión:

$$F_b = \gamma \int_V dV = \gamma \forall \quad (3.69)$$

Donde γ se considera constante en todo el volumen. Al calcular los momentos con respecto al eje (O) se puede encontrar la línea de acción de la fuerza de flotación y se igualan al momento de la resultante; cabe recordar que el peso es igual al volumen multiplicado por el peso específico de la sustancia ($W = \forall \gamma$); con base en lo anterior se obtiene:

$$W \bar{x} = \gamma \forall \bar{x} = \gamma \int_V x d\forall \quad (3.70)$$

Solucionando la ecuación para \bar{x} , se tiene:

$$\bar{x} = \frac{1}{\forall} \int_V x d\forall : \bar{x} = \frac{\sum_i^{N_v} x_i \forall_i}{\forall} \quad (3.71)$$

En donde \bar{x} es la distancia del eje a la línea de acción, N_v es el número de volúmenes considerados; es por ello que la fuerza de flotación actúa a través del centroide del volumen de fluido desplazado. Esto es válido tanto para cuerpos sumergidos como flotantes. El centroide de volumen de fluido desplazado se llama “*centro de flotación*”.

Al resolver un problema de estática que incluye cuerpos sumergidos o flotantes, el objeto se toma generalmente como cuerpo libre y se dibuja un diagrama de cuerpo libre. La acción del fluido es reemplazada por la fuerza de flotación. Deberá mostrarse el peso del objeto (que actúa a través de su centro de gravedad), así como todas las demás fuerzas de contacto.

3.10.2 Cuerpo sumergido en varios fluidos

Si todo el cuerpo se considera formado por un gran número de prismas, entonces el empuje neto total en el cuerpo es:

$$F_b = \sum \Delta F b \quad (3.72)$$

$$F_b = \sum_{i=1}^{N_f} [(\rho_i g h_i) \Delta A] \quad (3.73)$$

Donde:

F_b : Empuje neto sobre todo el cuerpo.

$\Delta F b$: Empuje neto sobre todo el prisma.

ρ_i : Densidad del fluido i .

g : Aceleración gravitacional.

h_i : Porción del cuerpo (altura) sumergida en el fluido i .

ΔA : Área de la sección transversal del prisma.

N_f : Número de tipos de fluido.

Si se tiene un objeto sumergido en dos fluidos, donde, $(h_1 \cdot \Delta A)$ es el volumen del cuerpo sumergido en el fluido más ligero (V_1) y $(h_2 \cdot \Delta A)$ es el volumen del cuerpo sumergido en el fluido más denso (V_2). Sustituyendo estos valores en la ecuación (3.18), se tiene:

$$F_b = \rho_1 g \nabla_1 + \rho_2 g \nabla_2 = \gamma_1 \nabla_1 + \gamma_2 \nabla_2 \quad (3.74)$$

Que corresponde a la fuerza gravitacional de la masa de los fluidos desplazada por el cuerpo.

Si se analiza la ecuación, se hará evidente que cuando un cuerpo está flotando libremente en un gas y un líquido, tales como aire y agua, debido a que la densidad del gas -en este caso aire-, denominada ρ_a ($\rho_a = 1,225 \text{ kg/m}^3$), es despreciable comparada con la densidad del líquido, entonces la fuerza gravitacional de la masa de gas desplazada por el cuerpo será despreciable comparada con la fuerza gravitacional de la masa de líquido, que es la fuerza gravitacional de la masa de líquido desplazado por el cuerpo. En general todo cuerpo flotante está sometido

al empuje de dos fluidos, uno que es un gas, por ejemplo el aire y el otro el líquido.

3.11 Equilibrio de un cuerpo en flotación

3.11.1 Equilibrio de cuerpos flotantes

En la **Figura 3-26** se indica un cuerpo flotante en equilibrio, donde Y_s es la separación entre el centro de flotación (C_f) y el centro de gravedad (C_g), medida sobre la misma línea vertical.

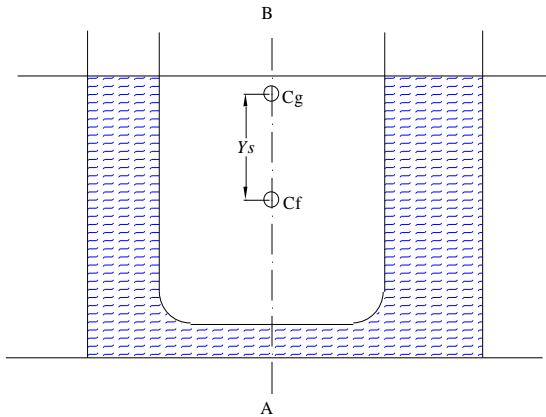


Figura 3-26.- Equilibrio de cuerpo flotante

Un cuerpo que está flotando libremente, deberá cumplir las siguientes condiciones para que se encuentre en equilibrio:

- El empuje F_b deberá ser igual a la fuerza gravitacional (W) actuante sobre el cuerpo.
- El centro de gravedad del cuerpo (C_g) y su centro de flotación (C_f) deberán estar sobre la misma línea vertical A-B de la **Figura 3-26**.

El equilibrio de cuerpos flotantes no está limitado a aquellos casos en donde el centro de gravedad del cuerpo se encuentre situado por debajo del centro de flotación. Existen, en la práctica, un gran número de casos en los cuales el centro de gravedad está por encima del centro de flotación.

3.11.2 Equilibrio estable

Se dice que un cuerpo se encuentra en equilibrio, si por algún cambio de su posición original, por pequeño que este sea, existen fuerzas o momentos tendientes a restaurar el cuerpo a dicho punto.

Un cuerpo que se encuentre flotando sobre un líquido en reposo, posee una estabilidad de flotación en el sentido vertical.

3.11.3 Equilibrio inestable

Se dice que un cuerpo se encuentra en equilibrio inestable, cuando cualquier pequeño desplazamiento angular desarrolla un par de fuerzas que tenderán a incrementar dicho desplazamiento.

3.11.4 Estabilidad lineal

Es un tipo de estabilidad que presenta cuando un pequeño desplazamiento lineal, en cualquier dirección, genera fuerzas de restablecimiento que tienden a retornarlo a su posición inicial. Estas fuerzas actuarían únicamente en la misma dirección, pero en sentido contrario. El ejemplo más común es cuando se sumerge un balón en agua hasta cierta profundidad: al soltarlo, llega a alcanzar un equilibrio vertical.

3.11.5 Estabilidad rotacional

Es un caso más complejo que el anterior, en donde se presentan fuerzas restauradoras con pequeños desplazamientos angulares, por lo tanto, generando momentos estabilizantes en el cuerpo. Un cuerpo completamente sumergido en un líquido es rotacionalmente estable, sólo cuando su *centro de gravedad* está **por debajo** de su *centro de flotación*.

Para la estabilidad rotacional de un cuerpo sumergido, según la **Figura 3-27a**, el centro de gravedad G del cuerpo está arriba del centroide C (también conocido como centro de flotación) del volumen desplazado, y una rotación angular pequeña produce un momento que continuará impulsando la rotación; por tanto, el cuerpo es **inestable** y se vuelca.

Según la **Figura 3-27b**, el centro de gravedad G del cuerpo está por debajo del centroide C , una rotación angular pequeña produce un momento restaurador y el cuerpo es **estable**. Si C y G coinciden en un punto, entonces el cuerpo muestra una **estabilidad neutral**; esto ocurre si la densidad es constante en todos los puntos del cuerpo sumergido (Potter et al., 2015).

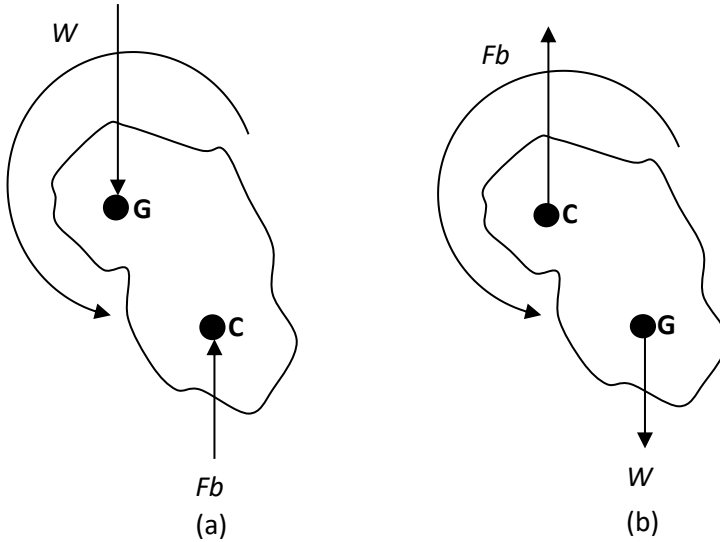


Figura 3-27.- Equilibrio Rotacional, cuerpo sumergido. (a) Cuerpo inestable. (b) Cuerpo estable. Fuente: adaptada de (Potter et al., 2015).

3.11.6 Cálculo de la estabilidad rotacional

Con base en el análisis hecho por Potter et al. (2015) y Giles et al. (1994), y a partir de la **Figura 3-28**, se realiza el análisis para la sección transversal del cuerpo flotante.

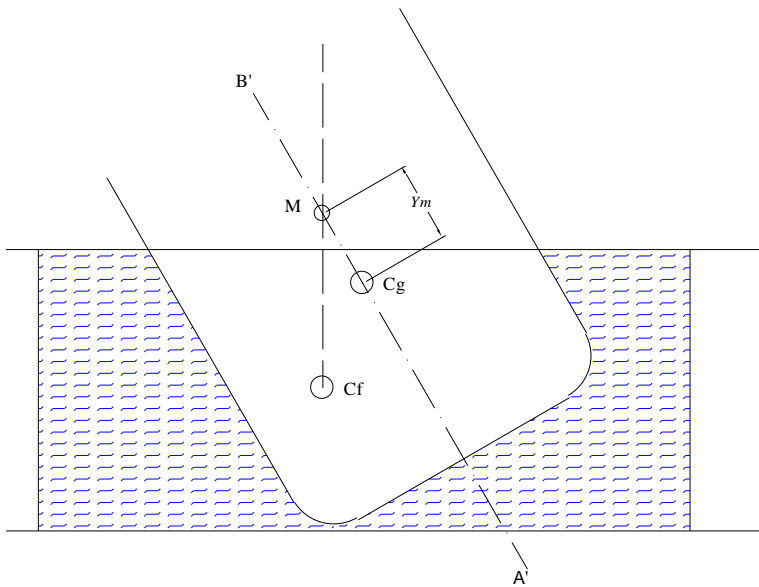


Figura 3-28.- Sección transversal del cuerpo flotante.

Según la **Figura 3-28**, es posible determinar una expresión cuantitativa para la altura metacéntrica (Ym), según se presenta en la siguiente ecuación:

$$Ym = \frac{I_o}{\nabla_d} - Ys \tag{3.75}$$

Donde: ∇_d es el volumen de líquido desalojado; I_o es el segundo momento de área (o momento de inercia) del área en planta del cuerpo sin cabeceo más desfavorable; Ys es la distancia entre el centro de gravedad y el centro de flotación (Cf) cuando el cuerpo está con $A'-B'$ en posición vertical (Giles, 1998). Para una sección rectangular, dicho momento de área está dado por:

$$I_o = \frac{L \cdot B^3}{12} \tag{3.76}$$

Donde L es la longitud del cuerpo en una vista en planta y B es el ancho del cuerpo en planta.

En la **Figura 3-28**, M es el metacentro correspondiente al punto en que una línea vertical, a través del centro de flotación, interseca la posición girada de la línea que pasa por el centro de gravedad y flotación para la condición de equilibrio A'-B'. La altura del metacentro M indica si un cuerpo flotante o sumergido tiene tendencia a volcarse o no, al encontrarse en posición fuera del equilibrio. A partir del análisis del metacentro, si la altura del mismo es mayor que la altura del centro de gravedad, se puede concluir que el cuerpo es estable (altura M > altura Cg).

Con base en *la altura metacéntrica*, si la misma reporta un **valor positivo (+)** el *cuerpo es estable*, de lo contrario tiende a volcarse. ($Y_m > 0$, el cuerpo es estable). Si el valor de la altura metacéntrica es cero, la posición del metacentro coincide con el centro de gravedad y se encuentra en equilibrio indiferente, siendo un estado crítico.

3.12 Ejemplos de aplicación

Ejemplo 3.11.

Encontrar una expresión para calcular el peso específico de un cuerpo de *volumen irregular*, usando dos fluidos de diferente densidad. Si se mide el peso sumergido en dos líquidos diferentes W_{s1} y W_{s2} y se conoce el peso específico de los líquidos γ_1 y γ_2 .

En el fluido N° 1 se debe cumplir que:

$$W_{s1} + \forall \gamma_1 = W_a \quad (1)$$

Donde, W_a es el peso en el aire del cuerpo. En el fluido N° 2 se debe cumplir que:

$$W_{s2} + \forall \gamma_2 = W_a \quad (2)$$

Se procede a igualar los pesos en el aire, ya que este peso debe ser el mismo,

$$W_{s1} + \forall \gamma_1 = W_{s2} + \forall \gamma_2 \quad (3)$$

Se despeja el volumen:

$$\nabla = \frac{W_{s1} - W_{s2}}{\gamma_2 - \gamma_1} \quad (4)$$

El peso específico del cuerpo se halla como,

$$\gamma_s = \frac{W_a}{\nabla} = W_a \left(\frac{W_{s1} - W_{s2}}{\gamma_2 - \gamma_1} \right)^{-1} \quad (5)$$

Ejemplo 3.12.

Una pieza de mineral pesa 1,5 N en el aire y 1,1 N cuando se sumerge en agua. ¿Cuál es su volumen en cm^3 ?, ¿Cuál es su densidad relativa?. Despreciar la fuerza de boyamiento del aire. Esquema de la **Figura 3-29**.

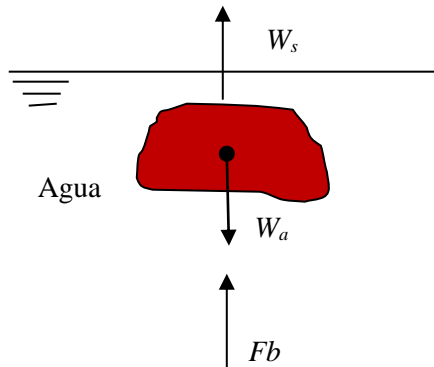


Figura 3-29.- Diagrama libre de fuerzas actuando sobre el cuerpo

W_s es el peso sumergido, W_a será el peso en el aire y F_b es el empuje.

$$W_a - W_s = F_b = \nabla \gamma_w \quad (1)$$

$$\nabla = \frac{W_a - W_s}{\gamma_w} = \quad (2)$$

$$G_s = \frac{W_a / \nabla}{\gamma_{w4^\circ C}} = \frac{W_a}{\gamma_{w4^\circ C} \frac{W_a - W_s}{\gamma_w}} = \frac{\gamma_w}{\gamma_{w4^\circ C}} \frac{W_a}{W_a - W_s} \quad (3)$$

Ejemplo 3.13. (Fernández, 2001, pp. 89).

Si se tiene una pieza de madera de sección cuadrada de 80 mm de lado y de 1,50 metros de longitud, con densidad relativa de 0,651, como se muestra en la **Figura 3-30**. ¿Cuántos kilogramos de plomo deben unirse al extremo inferior de la pieza de madera para que flote verticalmente con 0,3 m fuera del agua? La gravedad específica del plomo es $G_{sPb} = 11,2$.

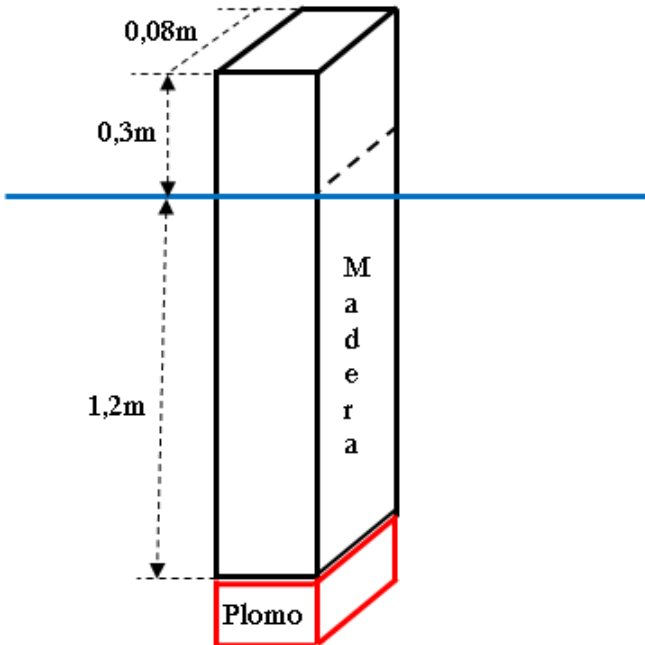


Figura 3-30.- Sección transversal de la pieza de madera flotante

Solución:

Peso de la madera:

$$W_m = \nabla \gamma_m \quad (1)$$

Fuerza boyante por definición:

$$F_b = \nabla_{ms} \gamma_w + \nabla_{pb} \gamma_w \quad (2)$$

Peso total del cuerpo:

$$W_T = \nabla_m \gamma_m + \nabla_{pb} \gamma_{pb} \quad (3)$$

Para un cuerpo flotante se cumple que, $F_b = W_T$. Entonces, se tiene que:

$$\nabla_{ms} \gamma_w + \nabla_{pb} \gamma_w = \nabla_m \gamma_m + \nabla_{pb} \gamma_{pb} \quad (4)$$

Se despeja el volumen del plomo:

$$\nabla_{pb} = \frac{\nabla_{ms} \gamma_m - \nabla_m \gamma_w}{(\gamma_w - \gamma_{pb})} \quad (5)$$

$$W_{pb} = \nabla_{pb} \gamma_{pb} = \frac{(\nabla_{ms} \gamma_m - \nabla_m \gamma_w)}{(\gamma_w - \gamma_{pb})} \gamma_{pb} \quad (6)$$

Al reemplazar los valores del problema se tiene que $W_{pb} = 1,57 \text{ kp}$.

Ejemplo 3.14.

Si se tiene una pieza metálica compuesta de dos metales fundidos, como se muestra en la **Figura 3-31**, encontrar la proporción de los dos metales en la pieza.

Solución.

Datos conocidos:

Se pesa la pieza en el aire y se obtiene WT_a , se pesa la pieza en agua y se obtiene el peso sumergido WT_s , se debe conocer el peso específico de los metales, para el metal 1, γ_1 y para el metal 2, γ_2 .

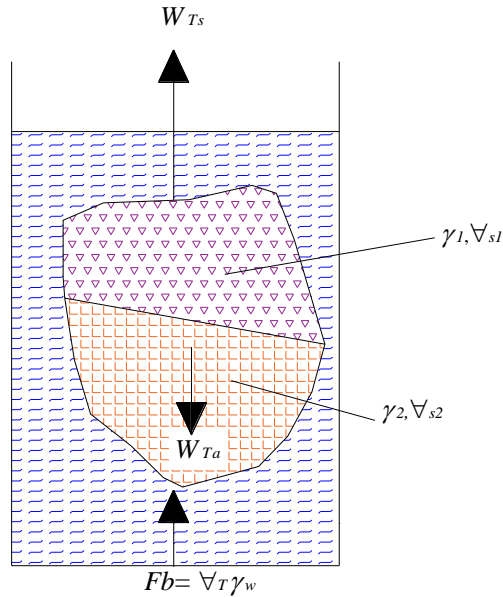


Figura 3-31.- Esquema del problema de la pieza sumergida

Se plantea la ecuación del empuje como si fuera un cuerpo sumergido.

$$Fb = \nabla_T \gamma_w = W_{Ta} - W_{Ts} \quad (1)$$

Se calcula el volumen total a partir de la ecuación del empuje.

$$\nabla_T = \frac{W_{Ta} - W_{Ts}}{\gamma_w} \quad (2)$$

Se plantea la ecuación de volumen total.

$$\nabla_T = \nabla_{s1} + \nabla_{s2} \quad (3)$$

Se plantea la ecuación de peso total.

$$W_T = W_1 + W_2 = \nabla_{s1} \gamma_1 + \nabla_{s2} \gamma_2 \quad (4)$$

Combinado las ecuaciones (3) y (4), y reemplazando ∇_{s1} se tiene:

$$W_T = (V_T - V_{s2})\gamma_1 + \nabla_{s2}\gamma_2 \quad (5)$$

Se despeja ∇_{s2} .

$$W_T = (\gamma_1 \nabla_T - \gamma_1 \nabla_{s2}) + \nabla_{s2}\gamma_2 \quad (6)$$

$$W_T = \gamma_1 \nabla_T + \nabla_{s2}(\gamma_2 - \gamma_1) \quad (7)$$

$$\nabla_{s2} = \frac{W_T - \gamma_1 \nabla_T}{(\gamma_2 - \gamma_1)} \quad (8)$$

Ahora que se conoce volumen ∇_{s2} y el peso específico del metal 2, se halla el peso correspondiente al metal 2, luego se procede a encontrar el peso del metal 1.

Práctica: Se propone como trabajo que el lector compruebe la ecuación (8) del Ejemplo 3.14 a nivel de laboratorio, usando dos piezas regulares de las que se conozca su volumen y su densidad por separado.

Ejemplo 3.15.

Una embarcación de fondo plano y extremos planos rectangulares, con un ancho en planta de $W = 7,625$ m, una longitud en planta de $L = 12,810$ m, un calado de 1,83 m, se encuentra con su centro de gravedad ubicado a 0,305 metros por encima del nivel del agua, tal y como se muestra en la **Figura 3-32**. ¿Es estable la embarcación?; ¿Cuál es el valor del **par-adrizante** en el agua si el ángulo de escora es de 12° ? (**Escora** es la inclinación que toma un buque cuando éste se aparta de la vertical) (Giles et al., 1994, pp. 74).

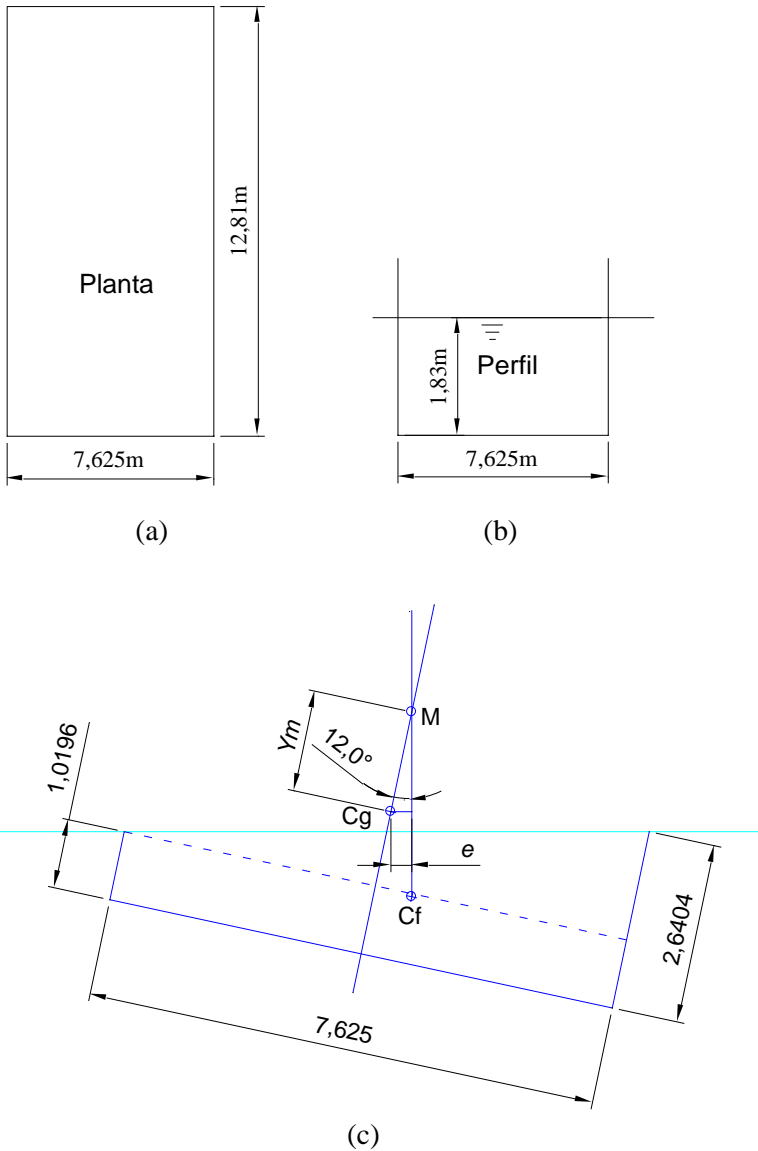


Figura 3-32.- Esquema del Ejemplo 3.15. (a) Dimensiones en planta de la embarcación. (b) Dimensiones en perfil vertical en equilibrio. (c) Dimensiones de la embarcación en perfil con un ángulo de escora de 12° .

Solución: Primero se calcula la altura metacéntrica.

$$Ym = \frac{12,81m \cdot (7,625m)^3}{12(1,83m \cdot 7,625m \cdot 12,81m)} - \left(\frac{1,83m}{2} + 0,305m \right) = +1,4276m \quad (1)$$

Como la altura metacéntrica es positiva, se concluye que **la embarcación es estable**.

El **par adrizante** se calcula como la fuerza de boyamiento por la excentricidad e ($M_{res} = F_b \cdot e$). Donde e es la distancia horizontal entre el centro de gravedad y la línea vertical que pasa por el centro de flotación (Niño y Duarte, 2006, pp. 2–29).

Se calcula el centro de flotación (Cf) desde la base mayor ($B' = 2,6404$ m), con la siguiente ecuación:

$$\bar{y}' = \frac{H \cdot (2b + B')}{3 \cdot (b + B')} = \frac{7,625m \cdot (2 \cdot 1,0196m + 2,6404m)}{3 \cdot (1,0196m + 2,6404m)} = 3,2497m \quad (2)$$

Para encontrar el \bar{x}' , es el centroide entre un rectángulo y un triángulo, medido desde el fondo inclinado.

$$\bar{x}' = \frac{A_R \cdot \bar{x}_R + A_T \cdot \bar{x}_T}{A} = \frac{7,7745m^2 \cdot (1,0196m / 2) + 6,1791m^2 \cdot (1,0196m + 0,5403m)}{13,9538m^2} = 0,9748m \quad (3)$$

También se puede hallar \bar{y}' con el método usado para hallar \bar{x}' . Estos valores corresponden a las coordenadas del centro de flotación Cf (\bar{y}', \bar{x}'); posteriormente, al trazar una línea vertical pasando por dicho punto, se encuentra el metacentro (M). La excentricidad e es la distancia horizontal entre el (Cg) y M. Otra manera de encontrarlo es usando Ym y calculando $e = Ym \cdot \text{sen}(12^\circ) = 0,2968$ m.

El par restaurador (M_{res}) para que el cuerpo retorne a su estado inicial, está dado como, $M_{res} = F_b(e) = Ym \cdot \text{sen}(\theta) F_b$, donde θ es el ángulo de escora.

$$M_{res} = 1000kp/m^3(1,83m \cdot 7,625m \cdot 12,81m) \cdot 1,428m \cdot \text{sen}(12^\circ) = 53055kp \cdot m \quad (4)$$

3.13 Ejercicios propuestos

Ejercicio. 3.13.1. (Giles et al., 1994, p. 78).

Un cilindro de madera sólido, tiene 0,610 m de diámetro y una altura de 1,220 m. La densidad relativa de la madera es 0,60. Demostrar que el cilindro no es estable si se coloca verticalmente en aceite de densidad relativa 0,85.

Ejercicio. 3.13.2. (Giles et al., 1994, p. 78).

Un globo vacío y su equipo pesan 45,4 kp. Al inflarlo con un gas de peso específico $0,553 \text{ kp/m}^3$, el globo adopta una forma esférica con 6,1 m de diámetro. ¿Cuál es la máxima carga que puede elevar el globo, suponiendo un peso específico del aire igual a $1,230 \text{ kp/m}^3$?

Solución: 34,5 kp.

Ejercicio. 3.13.3. (Mott y Untener, 2015, p. 112).

La **Figura 3-33** muestra una balsa hecha con cuatro tambores huecos en los que se apoya una plataforma. Cada tambor pesa 30 lb. **(a)** ¿Cuál es el peso total de la plataforma (y de cualquier objeto que se coloque sobre ella) que la balsa puede soportar cuando los tambores están sumergidos por completo en agua dulce?. **(b)** ¿Cuánta altura de los tambores quedaría sumergida si sólo soportan a la plataforma?. **(c)** ¿Cuál es el peso adicional que sumergiría a los tambores y la plataforma? Suponga que no queda aire atrapado en el interior de la plataforma.

Respuesta: a) 1681 lb b) 4,67 pulgadas.

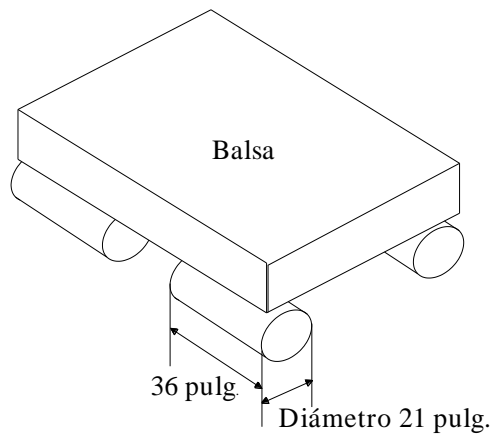


Figura 3-33.- Esquema balsa flotante. (Mott y Untener, 2015, p. 112).

Ejercicio 3.13.4. (Munson et al., 1990, p. 90).

Una masa cilíndrica con un diámetro de 1,0 m, M , está conectada a una compuerta rectangular de 2,0 m de ancho, como se ilustra en la **Figura 3-34**. La compuerta se abre cuando el nivel del agua, h , disminuye por debajo de los 2,5 m. Determine el peso de la masa M en esta condición. Desprecie la fricción en la bisagra de la puerta y en la polea.

Respuesta: 2480 kg. Ayuda: el peso del agua contra la compuerta vertical genera una fuerza hidrostática en dirección hacia la izquierda, encontrar el peso de la masa M , si h es menor o igual a 2,5 m, la compuerta gira en sentido de las manecillas del reloj.

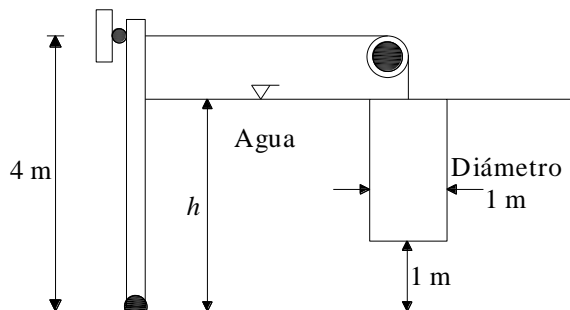


Figura 3-34.- Esquema de la compuerta giratoria. Fuente: (Munson et al., 1990, p. 90).

Ejercicio. 3.13.5. (Shames, 1995, p. 105).

Un bloque de madera de una densidad relativa de 0,7, está flotando en agua como se ilustra en la **Figura 3-35**. Una barra ligera localizada en el centro del bloque sostiene un cilindro A cuyo peso es 20 N. ¿A qué altura h se obtendrá estabilidad neutral? Ayuda: si el metacentro M coincide con el centro de gravedad G, se tiene una estabilidad neutra.

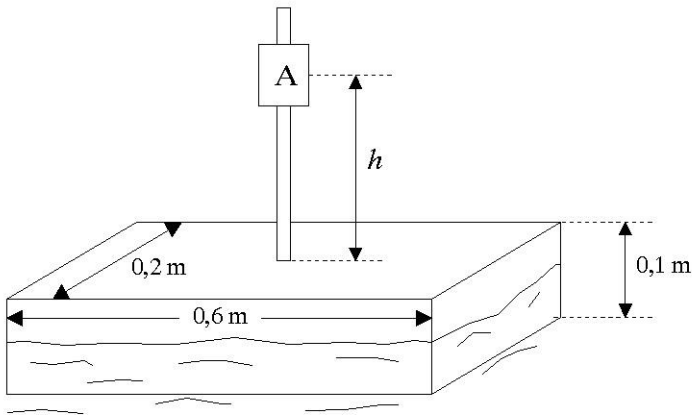


Figura 3-35.- Esquema del bloque de madera flotante. Fuente: (Shames, 1995, p. 105).

3.14 Equilibrio relativo de fluidos en movimiento

El **equilibrio relativo de fluidos en movimiento**, incluye la **traslación horizontal y vertical**, y la **rotación de masas líquidas**. Para el estudio de este fenómeno, no debe haber movimiento entre las partículas del agua, ni tensiones cortantes, ni movimiento entre el fluido y el recipiente que lo contiene y el fluido es sometido a una aceleración constante. Según Streeter y colaboradores: “*Cuando se mueve de esta manera, se dice que el fluido se encuentra en equilibrio relativo. A pesar de que el equilibrio relativo no es un fenómeno de estática de fluidos, se discute aquí dada la similitud de las relaciones*” (Streeter et al., 2000).

Para incluir los efectos de la aceleración se aplican los principios modificados de la estática de los fluidos. Para deducir las ecuaciones que rigen el fenómeno se parte de la **derivada total de la presión**, (dp), la cual se puede expresar de la siguiente manera:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \tag{3.77}$$

Donde p es la presión en función de (x, y) , ∂ denota derivada parcial.

3.14.1 Traslación de masas líquidas

La **traslación de masas líquidas** incluye **movimiento horizontal y vertical**, con aceleración en x (a_x), aceleración en y (a_y) u otra dirección (a_s). Según muestra la **Figura 3-36**, cuando el fluido está en reposo, las presiones en los puntos (1, 2, 3) son iguales, $p_1 = p_2 = p_3$ (p = presión); pero con el fluido en movimiento $p_1 \neq p_2 \neq p_3$. Se cumple que el volumen $\forall_1 = \forall_2$, (sombreado). En el plano horizontal la presión es diferente, pero en el plano inclinado paralelo a la superficie las presiones son iguales ($p_4 = p_5 = p_6$). Para el cálculo de la presión con movimiento de traslación se calcula la ecuación de la línea recta que genera la superficie del agua.

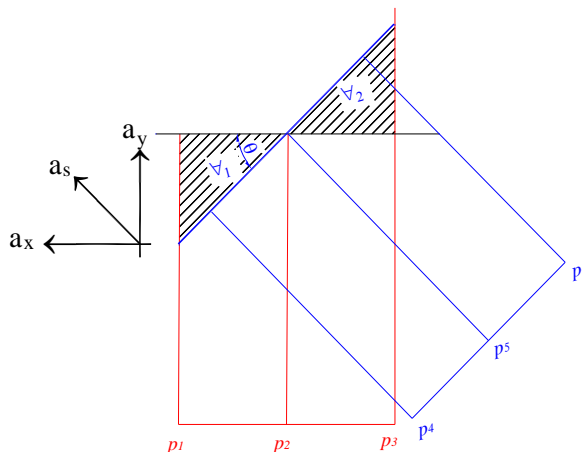


Figura 3-36.- Esquema de traslación de una masa líquida.

3.14.2 Movimiento horizontal y vertical

Para la deducción de la ecuación que rige la traslación de masas líquidas, se toma como base el esquema de la **Figura 3-37a**, donde se tiene un elemento infinitesimal soportando fuerzas dentro de un líquido acelerado en x y y , con un área transversal A y longitud l . Al realizar un diagrama de fuerzas sobre este elemento infinitesimal, como se muestra en la **Figura 3-37b**, con cuatro fuerzas debido a la presión actuando en cada lado ($F = p \cdot A$) y la fuerza debido a su propio peso (W).

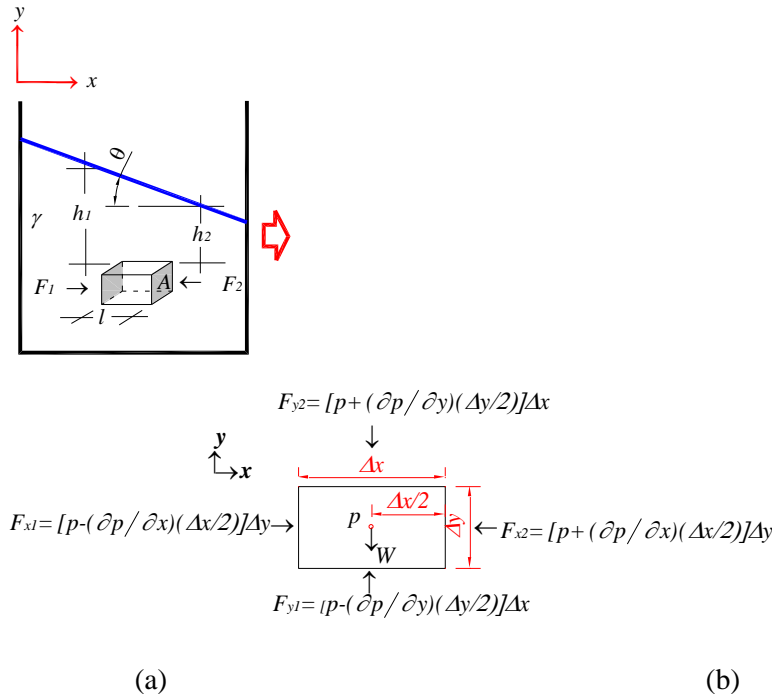


Figura 3-37.- Esquema de la acción de fuerzas sobre un elemento diferencial.

La presión en la cara anterior en la dirección x , será la presión en el centro (p) menos el cambio de la presión en la distancia $\Delta x / 2$. Igualmente para las caras restantes.

Dirección x :

Aplicando la segunda ley de Newton, dada como:

$$F = ma \tag{3.78}$$

Para la sumatoria de esfuerzos que actúan sobre el elemento diferencial se tiene:

$$\sum F_x = F_{x1} - F_{x2} = m(a_x) \tag{3.79}$$

Como el diferencial de la masa es la densidad (ρ) por el diferencial de volumen ($d\forall$), entonces,

$$m(a_x) = \rho d\forall(a_x) = \rho(1)\Delta x \Delta y(a_x) \tag{3.80}$$

Además, las fuerzas que actúan sobre el elemento infinitesimal son:

$$\sum F_x = \left[p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y - \left[p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y = -\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta y \tag{3.81}$$

Igualando las ecuaciones (3.80) y (3.81) se obtiene:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta y = \rho(1)\Delta x \Delta y(a_x) \tag{3.82}$$

Por lo tanto, el diferencial de presión es dado como:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho(a_x) = -\frac{\gamma}{g} a_x \tag{3.83}$$

Dirección y:

Realizando el mismo procedimiento para la dirección vertical, en este caso el **eje y**, y teniendo en cuenta que se suma la fuerza por $W = \rho g \cdot d\forall$, se logra obtener: (se propone como actividad complementaria al lector que realice la demostración respectiva).

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -[\rho(a_y) + \gamma] = -\left(\frac{\gamma}{g}a_y + \gamma\right) = -\gamma\left(\frac{a_y}{g} + 1\right) \quad (3.84)$$

Solución para variación en el eje x y en el eje y:

Como la derivada total de la presión fue dada como:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \quad (3.85)$$

Remplazando, las derivadas parciales se tienen:

$$dp = \frac{\gamma}{g} a_x dx - \gamma \left(\frac{a_y}{g} + 1 \right) dy \quad (3.86)$$

$$\int dp = -\frac{\gamma}{g} a_x \int dx - \gamma \left(\frac{a_y}{g} + 1 \right) \int dy$$

Esta ecuación es válida tanto para fluidos incompresibles como compresibles; en la solución para fluidos compresibles se debe tener en cuenta la ley de los gases perfectos, como se planteó en temas anteriores (Niño y Duarte, 2007, pp. 2–31).

Para fluidos incompresibles, integrando se tiene:

$$p = -\frac{\gamma}{g} a_x x - \gamma \left(\frac{a_y}{g} + 1 \right) y + C \quad (3.87)$$

Siendo C la constante de integración que se puede obtener mediante condiciones de contorno. Con esta ecuación se puede calcular la presión con las coordenadas (x, y) en cualquier punto bajo o en la superficie.

3.14.3 Aplicación de movimiento horizontal

Simplificando solo para **movimiento horizontal**, donde $a_y = 0$ se tiene que:

$$p = -\frac{\gamma}{g} a_x x - \gamma y + C \tag{3.88}$$

La constante de integración C , se encuentra según las condiciones de frontera del problema a solucionar.

Ejemplo 3.16. Adaptado de (Giles et al., 1994, p. 81).

Un depósito rectangular de 6,1 m de longitud, 1,83 m de profundidad y 2,14 m de ancho, contiene agua hasta una profundidad de 0,92 m. Si está sometido a una aceleración horizontal en la dirección de su longitud de 2,45 m/s²: **a)** encontrar La fuerza total sobre cada uno de los dos extremos del depósito debido a la acción del agua. **b)** Demostrar que la diferencia entre estas dos fuerzas es igual a la fuerza no equilibrada, necesaria para acelerar la masa líquida ($m \cdot a$).

Solución: Se plantea el diagrama de la

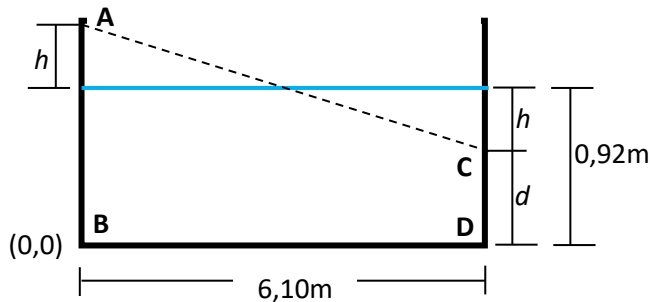


Figura 3-38.

Figura 3-38.- Esquema del depósito rectangular acelerado.

a) Se tiene que la distancia $d = (0,92 \text{ m}) - (h)$. Usando condiciones de frontera, para el punto $x_A = 0$ y $y_A = 0,92 \text{ m} + h$, se tiene una presión $p_A = 0$.

$$p = -\frac{\gamma}{g} (a_x)x - \gamma y + C \tag{3.89}$$

$$0 = -\frac{\gamma}{g}(a_x)(0) - \gamma(0,92m + h) + C \quad (3.90)$$

Se obtiene que,

$$0 = -\gamma(0,92m + h) + C \quad (3.91)$$

$$C = +\gamma(0,92m + h) \quad (3.92)$$

Remplazando C , y considerando que la presión en cualquier punto de la recta es cero, se obtiene la ecuación de la línea recta:

$$p = 0 = -\frac{\gamma}{g}(a_x)x - \gamma y + \gamma(0,92m + h) \quad (3.93)$$

$$0 = -\frac{1}{g}(a_x)x - y + (0,92m + h) \quad (3.94)$$

$$0 = -\frac{a_x}{g}x - y + 0,92m + h \quad (3.95)$$

Se despeja el valor de y en función de x , la cual representa la ecuación de la línea recta, ($y = b + mx$), con m como la pendiente y b como el intercepto y de la superficie del líquido.

$$y = (+0,92m + h) - \frac{a_x}{g}x \quad (3.96)$$

Se halla el valor de h , usando condición de frontera para $x = (6,1 \text{ m}/2)$, $y = 0,92 \text{ m}$, por lo tanto, reemplazando se tiene:

$$0,92m = +0,92m + h - \frac{2,45m/s^2}{9,81m/s^2} \frac{6,1m}{2} \quad (3.97)$$

Se obtiene que el valor de $h = 0,76 \text{ m}$; con este valor se halla $d = 0,92 \text{ m} - 0,76 \text{ m} = 0,16 \text{ m}$ y se calcula la presión en cada una de las caras del depósito.

En el extremo A-B:

$$p = \left[-\frac{1}{g}(a_x)x - y + 1,68 \right] \gamma \quad (3.98)$$

Para $x = 0,0$ y para $y = \bar{h} = (0,76 \text{ m} + 0,92 \text{ m})/2 = 0,84 \text{ m}$. (el valor de y se coloca como el centroide \bar{h} de una superficie vertical). **Nota:** Obsérvese que la presión hidrostática en las paredes se puede calcular como $p = \gamma \bar{h}$, como si fuera una superficie plana vertical sumergida. Con base en lo anterior, se tiene que:

$$p_{AB} = \left[-\bar{h} + 1,68 \right] \gamma = (-0,84 \text{ m} + 1,68 \text{ m}) 9810 \text{ N} / \text{m}^3 = 8240,4 \text{ N} / \text{m}^2 \quad (3.99)$$

En el extremo **C-D**:

$$p = \left[-\frac{1}{g}(a_x)x - y + 1,68 \right] \gamma \quad (3.100)$$

Con $x = 6,1 \text{ m}$ y con, $y = \bar{h} = (0,16 \text{ m})/2 = 0,08 \text{ m}$ se tiene:

$$p_{CD} = \left[-\frac{1}{9,81 \text{ m} / \text{s}^2} (2,45 \text{ m} / \text{s}^2) 6,1 \text{ m} - 0,08 \text{ m} + 1,68 \text{ m} \right] 9810 \text{ N} / \text{m}^3 = 784,8 \text{ N} / \text{m}^2 \quad (3.101)$$

Lo que es igual calcular la presión hidrostática de la cara CD, como $p = \gamma \bar{h} = 9810 \text{ N} / \text{m}^3 * (0,16 \text{ m} / 2)$.

b) Una vez se tiene las presiones en cada cara, se calcula la fuerza como el producto de la presión por el área, $F = p \cdot A$, para cada una de ellas.

La fuerza no equilibrada debe ser igual a la masa por aceleración en x , $F_{AB} + F_{CD} = ma_x$. $m = \rho \cdot V = 1000 \text{ kg} / \text{m}^3 * (6,1 \text{ m} \times 2,14 \text{ m} \times 0,92 \text{ m}) = 12010 \text{ kg}$. $ma_x = (12010 \text{ kg}) \times (2,45 \text{ m} / \text{s}^2) = \mathbf{29,4 \text{ kN}}$.

Por otro lado, la suma de las fuerzas con su respectiva dirección, $F_{AB} + F_{CD} = F_{AB} + F_{AB} = -(8240,4 \text{ N} / \text{m}^2) (1,68 \text{ m}) (2,14 \text{ m}) + (784,8 \text{ N} / \text{m}^2) (0,16 \text{ m}) (2,14 \text{ m}) = -29,626 \text{ kN} + 0,269 \text{ kN} = \mathbf{29,4 \text{ kN}}$.

Obsérvese que la diferencia de fuerzas no equilibradas para ambos casos, es de **29,4 kN**, lo cual comprueba lo solicitado en el problema.

3.14.4 Movimiento vertical

El ejemplo típico de este caso es cuando se coloca una cubeta de agua en un ascensor, el cual se puede mover hacia arriba y hacia abajo.

Para el movimiento vertical, con $a_x = 0$, de la ecuación general se tiene:

$$p = -\frac{\gamma}{g}(a_y + g)y + C \quad (3.102)$$

Dependiendo la dirección de la aceleración, a_y , la presión se incrementa o disminuye (\pm), siendo (+) hacia arriba y (-) hacia abajo.

$$p = -\gamma \left(1 \pm \frac{a_y}{g} \right) y + C \quad (3.103)$$

Por condición de frontera, si se toma el origen en la superficie del agua con (h) positivo hacia abajo, reemplazando $y = -h$, entonces si $h = 0$, $p = 0$ y $C = 0$, según la **Figura 3-39** se tiene:

$$p = -\gamma \left(1 \pm \frac{a_y}{g} \right) y \quad (3.104)$$

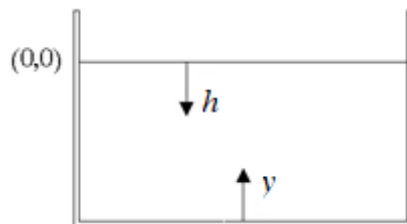


Figura 3-39.- Esquema de cambio de coordenada.

En el fondo $y = -h$, por lo tanto:

$$p = \gamma h \left(1 \pm \frac{\vec{a}_y}{g} \right) \quad (3.105)$$

Ejemplo 3.17. Adaptado de (Medina, 2009, p.21). Un tanque de agua sufre una caída libre. Encuentre la diferencia de presión entre dos puntos separados por una distancia vertical Δh . Ver **Figura 3-40**.

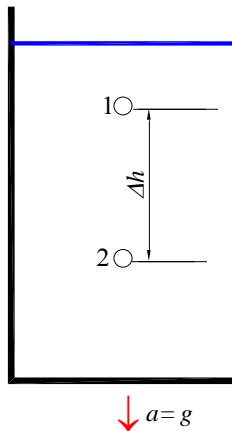


Figura 3-40.- Esquema del depósito en caída libre.

Solución. La diferencia de presión entre dos puntos separados por una distancia vertical Δh de un fluido que se mueve verticalmente hacia abajo con aceleración a_y , es $p = \gamma h \left(1 - \frac{\vec{a}_y}{g} \right)$; como la aceleración es igual que la gravedad, entonces $p = 0$, por lo tanto, $p_2 = p_1$, lo que indica que los puntos dentro del fluido están a la misma presión dentro de un tanque de agua que sufre una caída libre.

3.15 Rotación de masas líquidas

3.15.1 Ecuación del paraboloides de revolución

Tomando como base la **Figura 3-41**, se tiene:

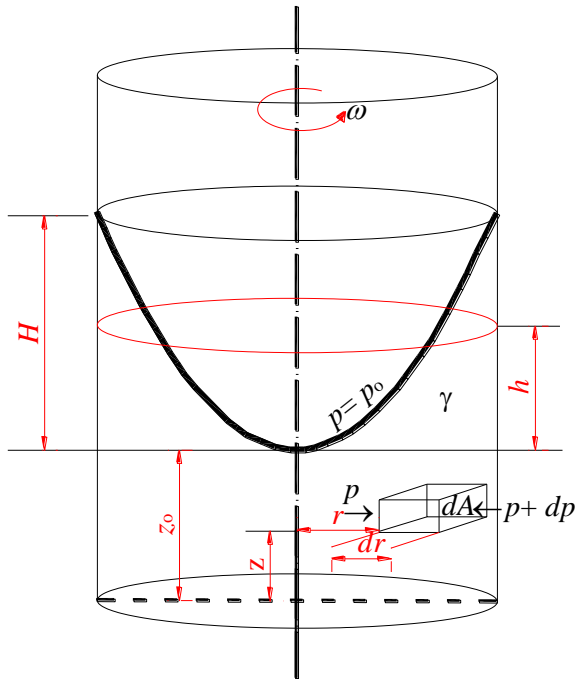


Figura 3-41.- Esquema de rotación de un fluido. Fuente: Adaptada de Mayori (2015).

Por definición, la derivada total de la presión en coordenadas cilíndricas es dada como:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (3.106)$$

Para el elemento diferencial, la suma de las fuerzas horizontales (dirección angular θ) es igual a cero:

$$\sum \vec{F}_H = 0 \quad (3.107)$$

En sentido radial, se tiene que:

$$pdA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial r} dr \right) dA = -ma_n \quad (3.108)$$

El signo (-) es debido a que se trata de la aceleración radial ($a_n = \omega^2 r$) dirigida hacia el eje de rotación, en sentido contrario del radio (Niño y Duarte, 2007, pp. 2–34).

$$pdA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial r} dr \right) dA = -\frac{\gamma}{g} (dA dr) \omega^2 r \quad (3.109)$$

Simplificando se tiene:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \quad (3.110)$$

Repetiendo el mismo procedimiento para el eje z, se obtiene:

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = \gamma \quad (3.111)$$

Para el eje θ se tiene que:

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (3.112)$$

Remplazando en la derivada total,

$$dp = \frac{\gamma}{g} \omega^2 r dr - \gamma dz \quad (3.113)$$

Integrando la anterior ecuación:

$$p = \int dp = \frac{\gamma}{g} \omega^2 \int r dr - \gamma \int dz = \frac{\gamma}{2g} \omega^2 r^2 - \gamma z + C \quad (3.114)$$

Solucionando para el vértice de la parábola, donde $r=0$, $z=z_0$ y $p=p_0$, se tiene que:

$$p_o + \gamma z_o = C \quad (3.115)$$

$$p = \frac{\gamma}{2g} \omega^2 r^2 - \gamma z + p_o + \gamma z_o \quad (3.116)$$

Factorizando la ecuación (3.116) se tiene que:

$$p = p_o + \frac{\gamma}{2g} \omega^2 r^2 + \gamma(z_o - z) \quad (3.117)$$

En la superficie libre del fluido con $p = p_o$ se obtiene la ecuación de la forma de la superficie y de la forma de las superficies de igual presión, o ecuación del paraboloide.

$$p_o = p_o + \frac{\gamma}{2g} \omega^2 r^2 + \gamma(z_o - z) \quad (3.118)$$

Se encuentra entonces la ecuación del paraboloide de revolución. Las superficies de igual presión son paraboloides de revolución. Al despejar el valor de z , se obtiene:

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + z_o \quad (3.119)$$

En la **Figura 3-42a**, se indica el significado gráfico de la superficie de revolución y sus variables. Como $z = z_o + h$, entonces la altura $h = z - z_o$, medida desde el vértice es, $h = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$, esta ecuación proporciona la geometría del paraboloide de revolución, el cual corresponde al mostrado en la **Figura 3-42b**.

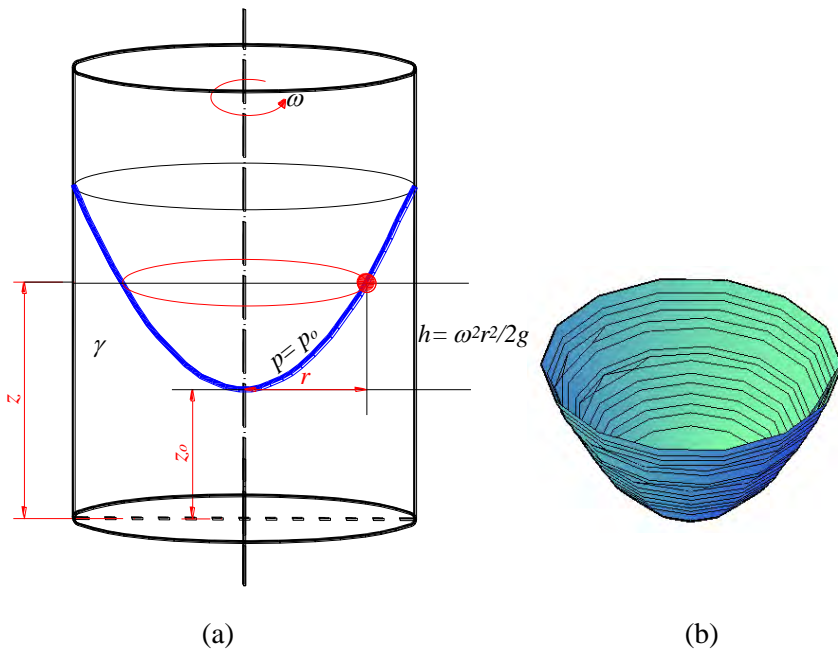


Figura 3-42.- Geometría del depósito. (a) Esquema de superficie de revolución. (b) paraboloides de revolución.

Ejemplo 3.18.

Un depósito de forma cilíndrica de 4 m de altura y 2 m de radio (R), contiene aceite hasta 3,2 m de altura. ¿A cuántas revoluciones por minuto (rpm) debe girar el recipiente alrededor de su eje para que el aceite alcance el borde superior?.

Solución:

Gráficamente el problema es como se muestra en la **Figura 3-43**.

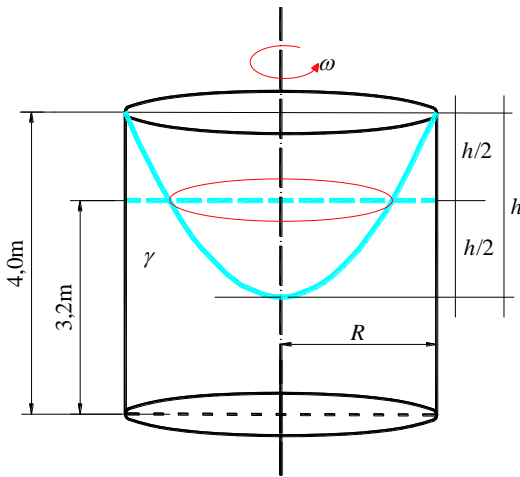


Figura 3-43.- Esquema del depósito de forma cilíndrica.

A partir del nivel del agua en reposo, el agua sube igual distancia que la que desciende la parábola, por lo tanto, la altura total del paraboloide es de 2 veces 0,8 m. Si se mide h desde el vértice de la parábola hasta el borde del tanque, $h = 1,6$ m.

$$h = \frac{\omega^2 R^2}{2g} \quad (1)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2gh}{R^2}} = \frac{\sqrt{2gh}}{R} \quad (2)$$

Se obtiene:

$$\omega = \frac{\sqrt{2(9,81 \text{ m/s}^2)(1,6 \text{ m})}}{2,0 \text{ m}} = 2,8 \text{ rad/s} = (2,8 \text{ rad/s}) \frac{60}{2\pi} = 26,75 \text{ rpm} \quad (3)$$

Ejemplo 3.19.

Un líquido, con gravedad específica $G_s = 1,2$, rota a una velocidad angular $\omega = 200$ rpm alrededor de un eje vertical dentro de un tanque cilíndrico. En un punto A del fluido localizado a 1,0 m del eje, la presión es de 70 kPa. ¿Cuál es la presión en un punto B en pascales, que se

encuentra a 2,0 m por encima de A y a 1,5 m del eje?, como se muestra en **Figura 3-44** (Streeter et al., 2000, p. 76)

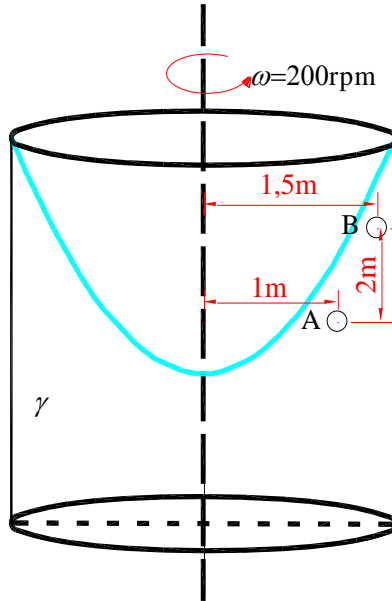


Figura 3-44.- Esquema del tanque cilíndrico.

Solución:

$$p_A = p_o + \frac{\gamma}{2g} \omega^2 r_A^2 + \gamma(z_o - z_A) \quad (1)$$

$$p_B = p_o + \frac{\gamma}{2g} \omega^2 r_B^2 + \gamma(z_o - z_B) \quad (2)$$

Al restar las dos ecuaciones se tiene:

$$p_A - p_B = \left[p_o + \frac{\gamma}{2g} \omega^2 r_A^2 + \gamma(z_o - z_A) \right] - \left[p_o + \frac{\gamma}{2g} \omega^2 r_B^2 + \gamma(z_o - z_B) \right] \quad (3)$$

$$p_A - p_B = \left[\frac{\gamma}{2g} \omega^2 (r_A^2 - r_B^2) \right] + \left[\gamma(z_B - z_A) \right] \quad (4)$$

Como $Z_B = Z_A + 2$, $Z_B - Z_A = Z_A + 2 - Z_A = 2$.

$$p_A - p_B = \frac{\gamma}{2g} \omega^2 (r_A^2 - r_B^2) + 2\gamma \quad (5)$$

$$p_B = -\frac{\gamma}{2g} \omega^2 (r_A^2 - r_B^2) - 2\gamma + p_A \quad (6)$$

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$p_B = -\frac{1,2(9810N/m^3)}{2(9,81m/s^2)} (200 * 2\pi / 60)^2 (1^2 - 1,5^2) - 2(1,2 * 9810n/m^3) + 70000N/m^2 \quad (7)$$

$$p_B = 328987Pa - 23544Pa + 70000Pa = 375443Pa \quad (8)$$

3.16 Tensiones en recipientes de pared delgada

3.16.1 Tensión circunferencial o tangencial

Las tensiones se presentan en una tubería circular de pared delgada bajo la acción de una presión interna de un fluido, las paredes están en tensión tal como se observa en la **Figura 3-45a**. Se considera una sección de tubería de longitud unitaria, o sea, el anillo entre dos planos ortogonales al eje longitudinal y separados una unidad de longitud. Si la mitad de este anillo se toma como cuerpo libre, como lo muestra la **Figura 3-45b**, la componente de la fuerza actúa en este caso vertical y pasa por el centroide del área proyectada, teniendo un valor de $F_p = p \cdot D = (2r)p$, en donde p es la presión y r es el radio interno de la tubería (Streeter et al., 2000, p. 63).

Si la fuerza por unidad de longitud de circunferencia es p , y el radio del anillo es r , la fuerza que actúa en un elemento del anillo es $dF = pr \cdot d\phi$. La longitud de arco es $(r\phi)$ y su diferencial será $rd\phi$. Sumando las componentes verticales (multiplicando por seno (ϕ)) de todas las fuerzas que actúan sobre el anillo semicircular $dF_v = pr \cdot d\phi \text{ seno } (\phi)$, se

obtiene la ecuación de equilibrio (Salazar, 2006). La tensión tangencial produce una rotura longitudinal como se muestra en la **Figura 3-45c**.

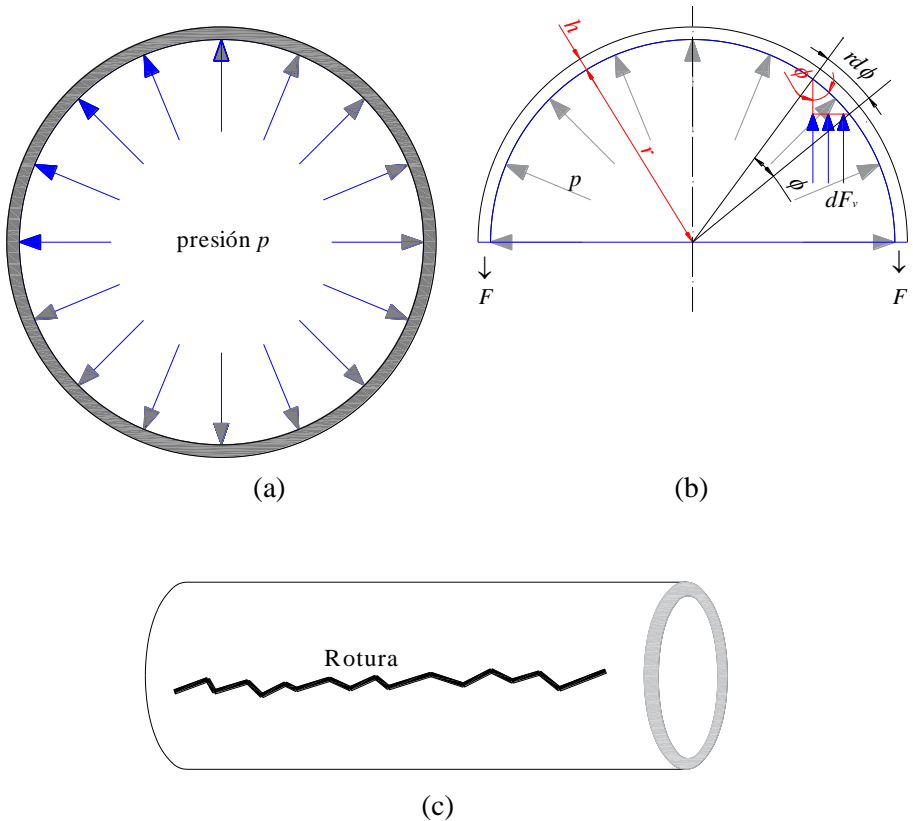


Figura 3-45.- Tensiones radiales y anulares en un anillo delgado. (a) acción de la presión. (b) cuerpo libre. (c) dirección de la rotura. Fuente: Adaptada de (Salazar, 2006, p. 181).

Realizando la igualdad entre las fuerzas F y la fuerza debido a la presión del fluido, se tiene:

$$2F = \int_0^\pi (p \cdot r \cdot \text{sen}(\phi))(d\phi) = 2p \cdot r \quad (3.120)$$

O también:

$$F = p \cdot r \quad (3.121)$$

La tensión unitaria o esfuerzo unitario en la pared de la tubería σ , puede obtenerse dividiendo la fuerza F por el área a de la sección recta del anillo o área del borde longitudinal de la tubería.

$$\sigma_T = \frac{p \cdot r}{a} \quad (3.122)$$

Si se considera que el anillo es una sección de longitud unitaria constante de un recipiente cilíndrico de espesor de pared h sujeto a una presión interna p , con $a = h \cdot 1$, la tensión anular σ_T en el recipiente cilíndrico es:

$$\sigma_T = \frac{p \cdot r}{h} \quad (3.123)$$

3.16.2 Tensión longitudinal

La tensión longitudinal (o tensión meridiana) puede calcularse, igualando la presión total ejercida contra el extremo del cilindro con las fuerzas longitudinales que actúan en una sección transversal de dicho cilindro, como se indica en la **Figura 3-46**.

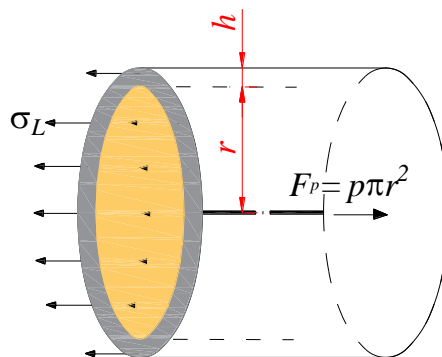


Figura 3-46.- Tensión longitudinal en un cilindro. Fuente: Adaptada de (Salazar, 2006, p.182).

El área del espesor del cilindro es la longitud del círculo por el espesor h , $A_\phi = (2\pi r) h$. La fuerza F_p ejercida por la presión, será la presión p por el área de la sección transversal A_t , $F_p = p \cdot A_t = p (\pi r^2)$, ésta debe ser igual a la fuerza que debe resistir la pared del cilindro, la cual será igual al esfuerzo σ_L por el área A_ϕ ; al hacer la igualdad ($\sigma_L = F_p$) se puede despejar σ_L . La tensión longitudinal produce una rotura transversal del conducto.

$$\sigma_L \cdot h \cdot 2\pi \cdot r = p \cdot \pi r^2 \Rightarrow \sigma_L = \frac{p \cdot r}{2 \cdot h} \quad (3.124)$$

Nótese que el esfuerzo longitudinal σ_L es la mitad del esfuerzo circunferencial tangencial σ_T .

$$\sigma_L = \frac{p \cdot r}{2h}, \sigma_T = \frac{p \cdot r}{h} \Rightarrow \sigma_L = \frac{\sigma_T}{2} \quad (3.125)$$

Como se conoce la resistencia del material σ , es posible diseñar la tubería para que soporte la fuerza producida por la presión.

Ejemplo 3.20. Adaptado de (Giles et al., 1994, p. 55).

Se tiene un barril de madera de forma cilíndrica de diámetro externo de $D = 6,0\text{m}$, cinchado con platinas metálicas de acero de $5,0\text{ cm}$ de ancho por $6,0\text{ mm}$ de espesor, con un esfuerzo de fluencia de $F_y = 11,0\text{ kp/mm}^2$, conteniendo un líquido de gravedad específica $G_s = 1,06$ a una presión $p = 7,20\text{ m.c.a.}$ Encontrar la separación (y) de las platinas de metal para que el cilindro no falle, como se muestra en la **Figura 3-47**.

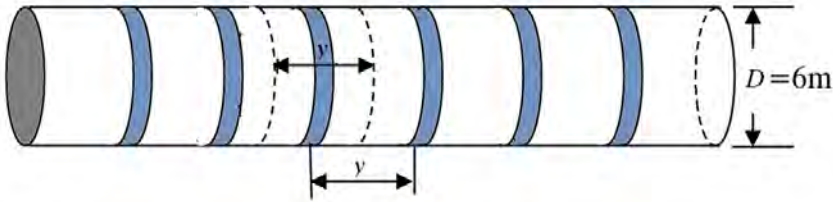


Figura 3-47.- Esquema del cilindro cinchado con platinas metálicas.

Solución:

La fuerza estará soportada solamente por las platinas de acero, por lo tanto, a cada platina le corresponde soportar la presión aplicada por una franja de $D \cdot y$.

Se transforma de unidades de presión en (m.c.a.) en (kp/m^2) .

$$p_{[\text{kp}/\text{m}^2]} = p_{[\text{mca}]} G s \gamma = 7,2 \text{mca} (1,06) 1000 \text{kp} / \text{m}^3 = 7632 \text{kp} / \text{m}^2 \quad (1)$$

La fuerza soportada por ambos extremos de la platina será:

$$F = 11 \cdot 10^6 \text{kp}/\text{m}^2 \cdot (0,05\text{m} \cdot 0,006\text{m}) \cdot 2 \text{Extremo} = 6600 \text{kp} \quad (2)$$

La fuerza aplicada por la presión en un área de longitud (y) por diámetro D , será:

$$F = 7632 \text{kp} / \text{m}^2 (6\text{m} \cdot y) = 45792(y) \quad (3)$$

Al igualar las dos fuerzas, se tiene

$$45792y = 6600 \text{kp} \Rightarrow y = 0,144 \text{m} \quad (4)$$

Se deben entonces colocar las platinascada 0,144 metros a lo largo del cilindro para evitar el fallo.

Ejemplo 3.21.

Se tiene un depósito cilíndrico de acero, de diámetro $D = 3,0$ m, lleno de agua con peso específico de 1000 kp/m^3 , con esfuerzo admisible de 11 kp/mm^2 y sometido a una presión de 6 m.c.a. Encontrar el espesor de las paredes necesario para que soporte la presión ejercida en el fondo, según se muestra en la **Figura 3-48**.

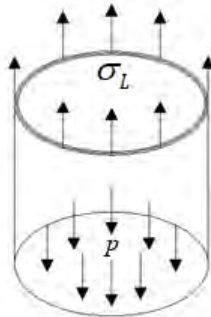


Figura 3-48.- Esquema del cilindro lleno de agua.

Solución:

$$\sigma_L = \frac{p \cdot r}{2h} \tag{1}$$

Se despeja el valor del espesor,

$$h = \frac{p \cdot r}{2\sigma_L} = \frac{(6m \cdot 1000kp / m^3) 1,5m}{2(11E6kp / m^2)} = 0,00041m = 0,41mm \tag{2}$$

El espesor de la pared del depósito cilíndrico de acero deberá ser de 0,41 mm.

3.17 Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.17.1.

Un carro tanque transporta un fluido de densidad relativa 0,70, se mueve horizontalmente con una aceleración de 3 m/s^2 ; la longitud del tanque es de 20 m y la altura de 2 m. ¿Cuál es la sobrepresión máxima y mínima, que soportan las paredes delantera y trasera del tanque?. Se conoce que la línea de presión cero desciende 0,30 m en la pared delantera. $g = 9,80 \text{ m/s}^2$.

Respuesta: $p_{\max} = 5670 \text{ kp/m}^2$, $p_{\min} = 210 \text{ kp/m}^2$. Ver **Figura 3-49**. (Niño y Duarte, 2007, pp. 2–31).

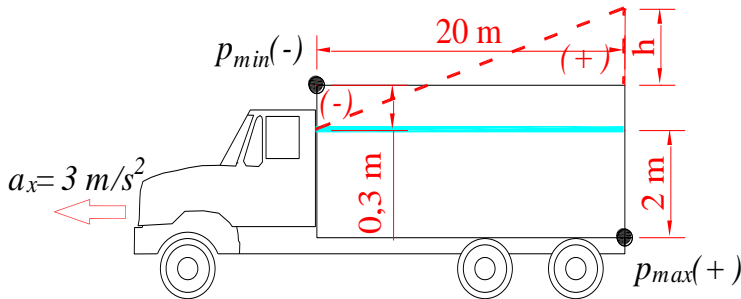


Figura 3-49.- Esquema del carrotanque.

Ejercicio 3.17.2.

Una tubería de hierro que contiene agua está sometida a 20 kg/cm^2 de presión, si la tubería tiene un diámetro de 30 cm, cuál debe ser el espesor de la pared del tubo (h), para que no exceda la resistencia del material de 210 kg/cm^2 .

Respuesta: $h = 1,2 \text{ cm}$.

Ejercicio 3.17.3.

El tanque de un compresor de aire está sometido a una presión $p = 31,5 \text{ kg/cm}^2$, con un diámetro $D = 50 \text{ cm}$, calcular el espesor de la pared (h), si el material con el cual está construido el compresor tiene un límite de fluencia longitudinal $\sigma_L = 2700 \text{ kg/cm}^2$, para que no sufra falla en la sección transversal.

Respuesta: $h = 0,15 \text{ cm}$.

Ejercicio 3.17.4. (Fernández, 2001, p. 110).

A qué velocidad angular (ω) en rad/s y rpm, debe girar un depósito cilíndrico de 1,20 m de diámetro y 1,80 m de altura, lleno de agua, para que la profundidad en el centro sea nula. Ver **Figura 3-50**.

Respuesta: $\omega = 9,9 \text{ rad/s} = 94,5 \text{ rpm}$.

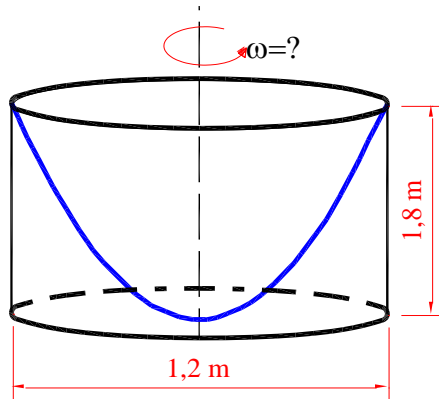


Figura 3-50.- Esquema del depósito cilíndrico sometido a velocidad angular.

Ejercicio 3.17.5. (Fernández, 2001, p. 109).

Una fuerza vertical no equilibrada y dirigida hacia arriba de módulo 30 kp, acelera un volumen de 45 litros de agua. Si el agua ocupa una profundidad de 90 cm en un depósito cilíndrico, ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre el fondo del depósito?

Respuesta: 74,91 kp.

4. Capítulo 4: Cinemática

4.1 Conceptos generales

La **cinemática de fluidos** trata del movimiento de sus partículas, sin considerar la masa ni las fuerzas que actúan sobre las mismas, con base en el conocimiento de las magnitudes cinemáticas: velocidad, aceleración y rotación (Streeter et al., 2000), (Niño y Duarte, 2007).

Se presenta a continuación, a partir de lo establecido por Spiegel (2011), algunos conceptos generales y definiciones básicas que normalmente se usan en cinemática, así como conceptos de análisis vectorial.

4.1.1 Unidades cinemáticas

Teniendo en cuenta la definición de cinemática de fluidos, las dimensiones que se consideran son la longitud (L) y el tiempo (T), cuyas unidades se encuentran definidas de acuerdo a lo abordado en el capítulo relacionado con sistemas de unidades.

4.1.2 Variables

Las variables cinemáticas comúnmente estudiadas son la velocidad (\vec{V}), la aceleración (\vec{a}), la velocidad angular (omega: ω) y el caudal (Q).

4.1.3 Escalar

Un escalar se encuentra definido solamente por la magnitud de la cantidad física, como presión (p), área (A), longitud (**L**), tiempo (**T**) o masa (**M**). El escalar se lo representa letra griega (fi) como una función $\phi(x, y, z)$, lo que indica que la función ϕ varía en el espacio definido por (x, y, z) . Los escalares teóricos más conocidos son la divergencia y el operador laplaciano.

4.1.4 Vector

Es una cantidad que tiene una **magnitud**, **dirección** y **sentido**, como la velocidad (\vec{V}), la aceleración (\vec{a}) y la fuerza (\vec{F}). La **magnitud** es su largo, el **sentido** es la punta de flecha y la **dirección** es la pendiente de la misma. Para que dos vectores sean considerados iguales, deben tener

igual módulo, dirección y sentido. En la **Figura 4-1**, se muestra las propiedades del vector \vec{A} : la dirección como el ángulo α en grados, la magnitud representada como $|\vec{A}|$ y el sentido positivo o negativo, en la dirección de la línea soporte imaginaria en la que se encuentra el vector, solo con dos opciones.

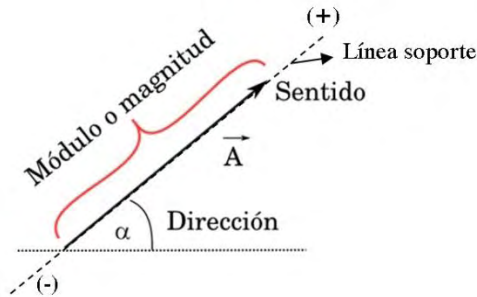


Figura 4-1.- Magnitud, dirección y sentido de un vector.

Las operaciones de vectores más utilizadas son el **producto punto** y el **producto cruz**, entre dos vectores. Estas operaciones se usarán posteriormente en la derivación de las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos, especialmente en el teorema de transporte de Reynolds, el cual incluye términos matemáticos con dichos productos. Estas operaciones son debidamente explicadas en textos de análisis vectorial, tales como Spiegel (2011) o Zill y Wright (2011).

- **Producto punto**

Si se tiene dos vectores \vec{A} y \vec{B} , su producto punto es dado como: $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$, que consiste en una manera de convertir dos vectores en sus magnitudes escalares, si se conoce el ángulo θ que forman entre ambos.

- **Producto cruz**

Si se tiene dos vectores \vec{A} y \vec{B} , su producto cruz es dado como: $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{n} |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$, donde \vec{n} es un vector unitario ortogonal al plano donde se localizan los vectores \vec{A} y \vec{B} .

4.1.5 Operadores

Existen dos operadores importantes que se utilizan con frecuencia en el estudio de los fluidos, uno es el operador *nabla* ($\vec{\nabla}$) y el operador *laplaciano* ($\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$). El primero, $\vec{\nabla}$, es un **vector** mientras que ∇^2 , es un **escalar**. Estos operadores se aplican tanto a vectores como a escalares.

4.1.6 Campos

En el estudio de fluidos se presentan el **campo escalar**, el **campo vectorial**, el **campo potencial** y el **flujo de campo vectorial**. La integral de superficie de un campo vectorial puede interpretarse como el flujo del campo a través de la superficie. Intuitivamente, el flujo de un campo de vectores a través de una superficie es la parte de dicho campo que atraviesa la superficie. Se interpreta como el flujo de dicho vector a través de una superficie. Matemáticamente, es común encontrar la integral cerrada de superficie de un producto punto de dos vectores, por ejemplo el vector velocidad y el vector área, dado como: $\oint_A \vec{v} d\vec{A}$, donde \vec{v} es el vector velocidad y $d\vec{A}$ es el vector elemental de área. Se emplea la notación $\oint_A ()$ para indicar una integración sobre la superficie cerrada A (Spiegel, 2011, p. 100).

4.1.7 Derivada material

Es una medida de la rapidez de variación con respecto al tiempo de cualquier propiedad (escalar, vectorial o tensorial) referida a una partícula material específica. La derivada material es útil para evaluar dicha rapidez (Xavier y Miquel, 2012, p. 32).

Al operador derivada total **d/dt** se le da el nombre especial de **derivada material**; algunos autores le asignan una notación especial, D/Dt , para hacer resaltar que se forma cuando sigue una partícula de fluido a medida que se mueve por el campo de flujo. Otros nombres para la derivada material son: **derivada total**, **de partícula**, **Lagrangiana**,

Euleriana y sustancial (Çengel y Cimbala, 2006, p. 127), (Kundu, 1990, p. 52).

La derivada sustancial se puede usar con otras variables dependientes; por ejemplo, DT/Dt representaría la rapidez de cambio de la temperatura (T) de una partícula de fluido a medida que se la sigue (Potter et al., 2015, p. 93).

La derivada material del vector de posición (r) de una partícula es la velocidad, $D\mathbf{r}/Dt = \vec{V}$ (Xavier y Miquel, 2012, p. 32).

4.2 Vectores de uso frecuente

Los vectores de mayor interés en cinemática son:

- Vector unitario
- Vector operador nabla
- Vector gradiente
- Vector rotacional
- Vector posición
- Vector velocidad
- Vector aceleración

A continuación se detallará cada uno de dichos vectores:

4.2.1 Vector unitario

La idea de vector unitario refiere al vector cuyo módulo es igual a uno (1). Un conjunto importante de vectores unitarios, denotados por i , j y k , son aquellos que tienen las direcciones de los ejes x , y y z , respectivamente, de un sistema de coordenadas rectangulares de tres dimensiones (Spiegel, 2011, p. 3). El producto punto de vectores unitarios iguales, es siempre uno (1), y cero (0) si son diferentes. Ejemplo: $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$, por su parte: $i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$.

El producto cruz de vectores unitarios es igual a su tercero. Ejemplo: $i \times j = k$, $j \times k = i$, $k \times i = j$, $j \times i = -k$.

Por ejemplo se puede tener un vector unitario \vec{n} , el cual se utiliza para notar otro vector con la siguiente equivalencia: si $d\vec{A}$ es un vector diferencial de área, se puede también escribir como $d\vec{A} = \vec{n}dA$, donde \vec{n} es un vector unitario en el mismo sentido del vector $d\vec{A}$ y dA su magnitud (Rogan y Muñoz, 2010).

4.2.2 Vector operador nabla

Si se considera la notación $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ como las componentes de un

vector simbólico, representado por la letra griega **nabla** $\vec{\nabla}$, el operador nabla se expresa como:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k \quad (4.1)$$

De acuerdo con Niño and Duarte (2007), el operador nabla ($\vec{\nabla}$) se utiliza como vector simbólico. Este operador puede combinarse con otros vectores mediante operaciones conocidas para obtener otros vectores o escalares (UNNE, 2015).

4.2.3 Vector gradiente

El gradiente es el resultado de aplicar el producto punto entre el vector operador nabla a una función escalar $\phi(x, y, z)$, dada como:

$$\vec{\nabla} \cdot \phi = \left[\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k \right] \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}i + \frac{\partial \phi}{\partial y}j + \frac{\partial \phi}{\partial z}k \quad (4.2)$$

Otra notación, es la siguiente:

$$\vec{\nabla} \cdot \phi = \phi_x i + \phi_y j + \phi_z k \quad (4.3)$$

Si existe una función escalar tal que, la velocidad es igual al gradiente de dicha función, entonces se puede afirmar que existe un campo potencial (Niño y Duarte, 2007).

4.2.4 Vector rotacional

El rotacional del vector \vec{A} ($\text{rot } \vec{A}$), es el producto cruz entre $(\vec{v} \times \vec{A})$, a partir del cual se obtiene:

$$\vec{v} \times \vec{A} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right] i - \left[\frac{\partial a_3}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial z} \right] j + \left[\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right] k = \text{rot}(A) \quad (4.4)$$

Si el rotacional del vector velocidad es cero, se considera que un flujo es **irrotacional** si $(\vec{v} \times \vec{A}) = 0$, y se considera que los dos vectores son **colineales**; y es **rotacional** si $(\vec{v} \times \vec{A}) \neq 0$. En el estado del arte se presenta el significado físico del rotacional en un flujo (Çengel y Cimbala, 2006, p. 147).

4.2.5 Vector de posición

Posición: La posición x de una partícula fluida se puede relacionar con el tiempo t mediante una función $x = f(t)$.

Desplazamiento: Si se supone que en el tiempo t , la partícula fluida se encuentra en posición x ; y más tarde, en el instante t' dicha partícula se encontrará en la posición x' . Se dice que la partícula se ha desplazado $Dx = x' - x$ en el intervalo de tiempo $Dt = t' - t$, medido desde el instante t al instante t' (Spiegel, 2011, p. 45).

Según Gastón (1988), el movimiento de una partícula fluida se puede describir de dos maneras: a) conociendo el vector de posición de la partícula, b) conociendo su trayectoria. En el primer caso se debe conocer el vector posición $r(t)$, en función del tiempo,

$$\vec{r}(t) = (xi + yj + zk) \quad (4.5)$$

Donde las ecuaciones paramétricas también dependen del tiempo:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (4.6)$$

Las diferentes posiciones de la partícula definen la curva espacial en el sistema rectangular.

4.2.6 Vector velocidad

El vector velocidad de una partícula fluida es definido como la variación de su vector de posición con respecto al tiempo (Spiegel, 2011, p. 45).

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(xi + yj + zk) = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k \quad (4.7)$$

De este modo, la velocidad es función de sus componentes rectangulares:

$$\vec{V} = V_x i + V_y j + V_z k \quad (4.8)$$

Donde cada componente rectangular de la velocidad es función de (x, y, z, t) . La magnitud del vector velocidad está dada como:

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad (4.9)$$

4.2.7 Vector aceleración

Una partícula acelera cuando cambia su velocidad con respecto al tiempo (Spiegel, 2011, p. 45).

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(xi + yj + zk) \quad (4.10)$$

La aceleración es función de sus componentes rectangulares:

$$\vec{a} = \frac{dV_x}{dt}i + \frac{dV_y}{dt}j + \frac{dV_z}{dt}k = a_x i + a_y j + a_z k \quad (4.11)$$

Donde cada componente de la aceleración es función de (x,y,z,t) . La magnitud del vector aceleración está dada por:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_x i)^2 + (a_y j)^2 + (a_z k)^2} \quad (4.12)$$

Por su parte, la dirección del vector aceleración está dada por el ángulo alfa α :

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{a_y}{a_x} \right) \quad (4.13)$$

Partiendo del vector velocidad, al cual se le aplica la derivada total ($d\vec{V}$), se puede encontrar su **componente local y convectiva** para la aceleración. Por definición la derivada total es dada como:

$$d\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt \quad (4.14)$$

Si se aplica cada una de las componentes de velocidad, se tiene lo siguiente:

- Para componente de velocidad en x .

$$dV_x = \frac{\partial V_x}{\partial x} dx + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy + \frac{\partial V_x}{\partial z} dz + \frac{\partial V_x}{\partial t} dt \quad (4.15)$$

Si se divide toda la anterior expresión por delta de tiempo, dt .

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{\partial V_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial V_x}{\partial t} \quad (4.16)$$

Como los valores de dx , dy y dz , divididos por el delta de tiempo dan una velocidad, se tiene:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_x}{\partial t} \quad (4.17)$$

- Para las direcciones restantes (y, z), se tiene que:

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_y}{\partial t} \quad (4.18)$$

$$a_z = \frac{dV_z}{dt} = V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial t} \quad (4.19)$$

Como las tres ecuaciones anteriores, corresponden a la aceleración en cada dirección, se obtiene:

$$\vec{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (4.20)$$

Al sustituir los valores de la aceleración en cada componente, se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{a} = & \left(V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_x}{\partial t} \right) \mathbf{i} + \\ & \left(V_y \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_y}{\partial t} \right) \mathbf{j} + \\ & \left(V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial t} \right) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Al multiplicar la anterior expresión por el correspondiente vector unitario, entonces:

$$\begin{aligned}
 \vec{a} = & \left(V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} i + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} i + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} i + \frac{\partial V_x}{\partial t} i \right) + \\
 & \dots \left(V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} j + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} j + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} j + \frac{\partial V_y}{\partial t} j \right) + \\
 & \dots \left(V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} k + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} k + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} k + \frac{\partial V_z}{\partial t} k \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.22}$$

Luego, al factorizar los términos comunes $V_x \frac{\partial}{\partial x}, V_y \frac{\partial}{\partial y}, V_z \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}$, los cuales corresponden a cada columna, se tiene:

$$\vec{a} = V_x \frac{\partial}{\partial x} (V_x i + V_y j + V_z k) + V_y \frac{\partial}{\partial y} (V_x i + V_y j + V_z k) + V_z \frac{\partial}{\partial z} (V_x i + V_y j + V_z k) + \frac{\partial}{\partial t} (V_x i + V_y j + V_z k) \tag{4.23}$$

Como $\vec{V} = V_x i + V_y j + V_z k$, la ecuación se simplifica de la siguiente manera:

$$\vec{a} = V_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \tag{4.24}$$

Los primeros tres términos del lado derecho de la ecuación (4.24), corresponden a la **aceleración convectiva** \vec{a}_c dada como:

$$\vec{a}_c = V_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \tag{4.25}$$

El cuarto término del lado derecho corresponde a la **aceleración local** \vec{a}_L dada como:

$$\vec{a}_L = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \tag{4.26}$$

La **aceleración convectiva** o **de transporte** es para un tiempo constante ($t = \text{constante}$), y corresponde a la aceleración debida al cambio de posición.

En la **Figura 4-2** y se presenta gráficamente la aceleración convectiva entre dos puntos.

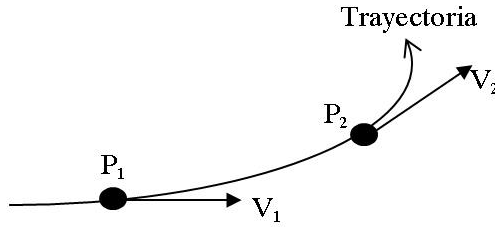


Figura 4-2.- Aceleración convectiva entre los puntos P_1 y P_2 para el mismo instante.

La **aceleración local** es la obtenida debido al cambio del tiempo, o a la variación de la velocidad en un punto al pasar el tiempo (Gastón, 1988), (Niño y Duarte, 2007). En la **Figura 4-3** se ilustra la representación gráfica de la aceleración local.

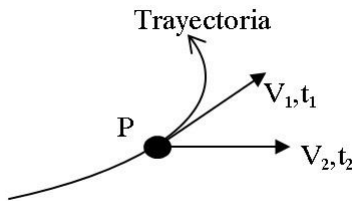


Figura 4-3. -Aceleración local en el punto P

Ejemplo 4.1.

Dado un campo de velocidades $\vec{V} = (6+2xy+t^2) i - (xy^2+10t) j + 25k$, hallar: (a) la aceleración para cualquier punto (x, y, z, t) . (b) Hallar la aceleración en magnitud y dirección para el punto $(3, 0, 2, 1s)$.

Solución:

Se deriva el vector velocidad $\vec{v} = (6+2xy+t^2)i-(xy^2+10t)j+25k$ con respecto a la posición y el tiempo.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = (2y)i - (y^2)j; \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} = (2x)i - (2xy)j; \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = 0; \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = (2t)i - 10j \quad (1)$$

Reemplazando en la ecuación de la aceleración:

$$\vec{a} = V_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\vec{a} = (6+2xy+t^2) \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} - (xy^2+10t) \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + (25) \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{a} = (6+2xy+t^2)[(2y)i - (y^2)j] - (xy^2+10t)[(2x)i - (2xy)j] + (25)[0] + [(2t)i - 10j] \quad (4)$$

Como se pide la aceleración para el punto (3, 0, 2,1s), se simplifica entonces para valores de $y = 0$.

$$\vec{a} = (6+t^2)[(0)i - (0)j] - (0+10t)[(2x)i - (0)j] + (25)[0] + [(2t)i - 10j] \quad (5)$$

$$\vec{a} = 0 - (20tx)i + 2ti - 10j \quad (6)$$

$$\vec{a} = (2t - 20tx)i - 10j \quad (7)$$

Reemplazando $x = 3$ y $t = 1$, se tiene:

$$\vec{a} = (2-60)i - 10j \quad (8)$$

$$\vec{a} = -(58)i - 10j \quad (9)$$

La magnitud de la aceleración es dada como:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-58i)^2 + (-10j)^2} = 58,86m/s^2 \quad (10)$$

La dirección del vector velocidad viene dada por:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{-10}{-58}\right) = 9,782^\circ \quad (11)$$

Como ambas componentes de aceleración son negativas, el vector se encuentra en el tercer cuadrante, tal y como se muestra en la **Figura 4-4**.

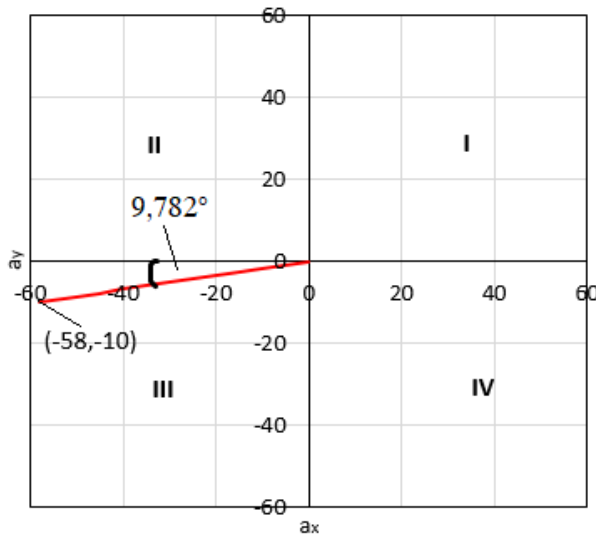


Figura 4-4. -Localización del vector aceleración en el sistema rectangular de coordenadas.

4.3 Operador Laplaciano

El Operador Laplaciano es dado como el producto punto del operador diferencial n-ésimo.

$$\nabla^2 = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \quad (4.27)$$

$$\nabla^2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \quad (4.28)$$

Los vectores unitarios se eliminan debido a las propiedades del producto punto entre ellos.

- *Operador Laplaciano a un escalar:* Este producto es un escalar.

$$\nabla^2 \phi = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \cdot \phi \quad (4.29)$$

$$\nabla^2 \phi = \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] \quad (4.30)$$

- *Operador Laplaciano a un vector:* Su producto es un vector.

Si se aplica a un vector como la velocidad se tiene:

$$\nabla^2 \vec{V} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \cdot (V_x i + V_y j + V_z k) \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{V} = & \left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right] i + \\ & \left[\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right] j + \\ & \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] k \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\nabla^2 \vec{V} = [\nabla^2 V_x] i + [\nabla^2 V_y] j + [\nabla^2 V_z] k \quad (4.33)$$

4.4 Escalares

4.4.1 Divergencia

La divergencia se obtiene multiplicando escalarmente el vector $\vec{\nabla}$ por un vector \vec{A} de componentes (a_1, a_2, a_3) funciones de (x, y, z) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} = a_{1x} + a_{2y} + a_{3z} = \text{div}(A) \quad (4.34)$$

Si la divergencia es cero, entonces el vector \vec{A} es **solenoidal** ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$).

4.5 Métodos de descripción de un flujo

Su objetivo es conocer el estado de movimiento de un flujo en cada instante, lo que equivale a estudiar las relaciones entre la posición de la partícula de fluido y el tiempo; para ello existen varios métodos, pero los más conocidos son el método de Lagrange y el método de Euler (Niño y Duarte, 2007, pp. 3–4).

Para entender estos dos métodos se hace la analogía con el control de tránsito por exceso de velocidad: el policía de tránsito tiene dos opciones, una es quedarse en el sitio y rastrear la posición de un automóvil usando un dispositivo (por ejemplo, una cámara) que le proporcione su localización y velocidad; la otra es usar la patrulla o la motocicleta y seguir paralelamente al automóvil para determinar su posición y velocidad. En este sentido, en la analogía, el primer método es el euleriano y el segundo es el lagrangiano. La descripción lagrangiana consiste en hacer un seguimiento de las partículas fluidas, mientras que la descripción euleriana consiste en medir lo que pasa en puntos fijos del espacio.

Otra analogía más visual la representa el caso de las carreras de fórmula uno. En el método lagrangiano, se puede conocer algunas propiedades de un solo auto (velocidad, marcha, revoluciones, posición exacta del vehículo, etc.). En el método euleriano, por su parte, se fija la atención sobre un punto o región en la pista de carreras y se describe lo que sucede en dicha región o punto a lo largo del tiempo, como es el caso

de un aficionado viendo la carrera desde las graderías, el cual ve cuantos autos pasan por un sector de la pista. La diferencia entre los dos métodos radica en ver una sola partícula o todas a la vez.

En términos de fluidos, como se muestra en la **Figura 4-5**, se puede estudiar el movimiento de un río de dos maneras, donde la figura (a) corresponde al método lagrangiano y la (b) al método euleriano. Una manera que el río puede ser visualizado por un observador sentado en un bote es ir a la deriva por el río, lo cual corresponde al método lagrangiano; otra, es que puede ser visualizado por un observador sentado en la orilla del río y ver el paso del agua desde su ubicación fija, que corresponde al método euleriano.



Figura 4-5.- Representación gráfica de los métodos de descripción de un flujo. a) método lagrangiano. B) euleriano.

La descripción Euleriana se utiliza en la mayoría de los problemas de flujos de fluidos; la descripción Lagrangiana se usa ocasionalmente cuando existe interés en encontrar la trayectoria de partículas (Kundu, 1990, p. 51).

4.5.1 Método de Lagrange

Recibió su nombre en honor del matemático francés J. L. De Lagrange, 1736-1813. El método consiste en estudiar una partícula siguiéndola a través de su movimiento en el flujo. Este enfoque es ampliamente usado en la mecánica de partículas y/o de cuerpos sólidos (Niño y Duarte, 2007, pp. 3–4).

La posición de la partícula es una función del tiempo y por consiguiente, cada una de sus coordenadas, es una función de su posición y del tiempo. Si se fija la posición inicial en un instante de tiempo $t = t_0$ dando valores a los parámetros que fijan dicha posición (a, b, c) que equivale a la posición del vector r_0 , para otro tiempo diferente a t_0 , las coordenadas para cada una de las partículas se pueden dar como: $x = x(a, b, c, t)$; $y = y(a, b, c, t)$; $z = z(a, b, c, t)$ (Niño y Duarte, 2007). Sólo basta con variar el tiempo (t) para conseguir varias posiciones, según la **Figura 4-6**.

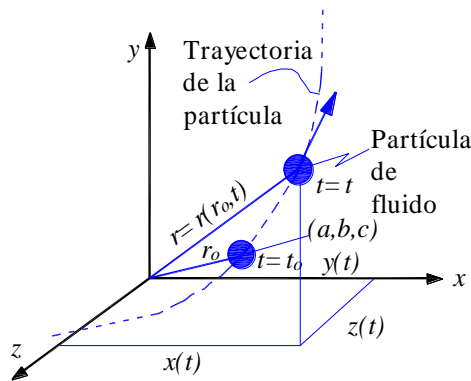


Figura 4-6. -Movimiento de una partícula según el método de Lagrange.

Con base en lo representado en la Figura 4-6, el vector r en el tiempo t estará dado por la siguiente expresión:

$$\vec{r} = \vec{r}(a, b, c, t) = \vec{r}(\vec{r}_0, t) \tag{4.35}$$

Así se obtiene que para la posición inicial:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(a, b, c) = ai + bj + ck \tag{4.36}$$

$$\vec{r} = x(a, b, c, t)i + y(a, b, c, t)j + z(a, b, c, t)k \tag{4.37}$$

Las variables dependientes son: x, y, z y las variables independientes son: a, b, c, t (Loayza, 2005).

En este enfoque, cada partícula queda identificada por las coordenadas del punto que ocupa inicialmente (también denominadas coordenadas materiales) $x = x(a, b, c, t)$; $y = y(a, b, c, t)$; $z = z(a, b, c, t)$ que se toman como variables independientes. En un enfoque Lagrangiano se denomina trayectoria de una partícula a la curva espacial definida por $r(r_0, t)$ y es el lugar geométrico de todas las posiciones ocupadas por una misma partícula a lo largo del tiempo. (Xavier y Miquel, 2012, p. 31).

El método lagrangiano no es muy útil si se estudia gran número de partículas de fluido, o si las partículas se desplazan grandes distancias. Por lo general, es útil en el estudio de sólidos rígidos o trayectorias cortas. Por ello, la descripción lagrangiana no es muy usada en Mecánica de Fluidos; sin embargo, si se usa en Mecánica de Fluidos computacional (Computational Fluid Dynamics: CFD) para el estudio de flujos bifásicos fluido-sólido, donde las partículas sólidas (como arena) se mueven dentro del fluido, pero solo para concentraciones volumétricas de partículas menores a 10%, por el gran esfuerzo computacional que requiere estudiar muchas partículas en trayectorias largas (Gómez-Zambrano, 2017), (Vegendla et al., 2011), (Subramaniam, 2013).

4.5.2 Método de Euler

Es denominado de esa manera en honor de matemático suizo L. Euler, 1707-1783. En este método, como se muestra en la **Figura 4-7**, se observan las partículas que pasan por un punto o una región del espacio “ventana” a través del tiempo (Niño y Duarte, 2007, pp. 3–4). Aquí, el interés se concentra en lo que está ocurriendo en un cierto punto del espacio y en un cierto instante de tiempo, en lugar de preocuparse por lo que le ocurra a una determinada partícula fluida (Jiménez, 2015a).

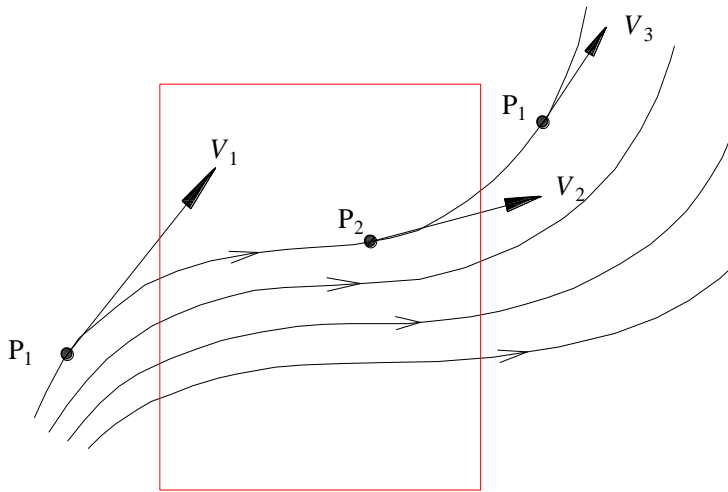


Figura 4-7.- Movimiento de una partícula según el método de Euler.

Este método selecciona un punto en el espacio (x_o, y_o, z_o) , a manera de *volumen de control finito*, para estudiar el comportamiento global del escurrimiento y se describe el movimiento de la partícula que lo ocupa en los diferentes instantes (t) . Así, el campo se escribirá $V = V(x_o, y_o, z_o, t)$ que es una función vectorial que indica cual es el valor de la velocidad en un punto fijo en el espacio (x_o, y_o, z_o) a medida que las partículas pasan por allí. Con base en ello, el vector velocidad se puede expresar como:

$$\vec{V} = V_x(x, y, z, t)\vec{i} + V_y(x, y, z, t)\vec{j} + V_z(x, y, z, t)\vec{k} \tag{4.38}$$

Como (x, y, z) son las componentes del vector posición r , se tiene que:

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t) \Rightarrow \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{4.39}$$

Las variables dependientes son: V_x, V_y, V_z y las variables independientes son: x, y, z, t (Loayza, 2005). Para la aceleración (\vec{a}) , dada como la variación de la velocidad en función del tiempo, se tiene:

$$\vec{a} = V_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad (4.40)$$

Como la identificación de puntos fijos (o regiones) en el espacio generalmente es más fácil que identificar piezas individuales de fluido, la descripción euleriana se emplea con mucha frecuencia en la Mecánica de Fluidos (Jiménez, 2015b).

Ejemplo 4.2. Adaptado de Kleinstreuer (2003).

Dado un campo de velocidades en un marco de coordenadas fijo Euleriano, descrito por la siguiente expresión:

$$v(x) = v_0 + \Delta v(1 - \exp(-kx)) \quad (1)$$

Encontrar una expresión para la velocidad en el modelo lagrangiano.

Solución:

En la expresión dada para $x = 0$, se tiene que la superficie del agua se mueve a una velocidad v_0 , y cuando x tiende a ser muy grande, se acelera aguas abajo en Δv , resultando $v(x \rightarrow \infty) = v_0 + \Delta v$. Por lo tanto, al derivar la ecuación $v = v(v_0, t)$ se encuentra la expresión para la velocidad en el marco lagrangiano.

En vista que la velocidad está definida como:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2)$$

En este caso se tiene solo la dirección en x de la siguiente manera.

$$v(x) = \frac{dx}{dt} = v_0 + \Delta v(1 - \exp(-kx)) \quad (3)$$

Como es una ecuación diferencial en x y t , se usa el método de separación de variables para la integración.

$$\frac{dx}{v_0 + \Delta v(1 - \exp(-kx))} = dt \quad (4)$$

$$\int_0^x \frac{dx}{v_0 + \Delta v(1 - \exp(-kx))} = \int_0^t dt \quad (5)$$

$$x + \frac{1}{k} \ln \left[1 + \frac{\Delta v}{v_0} (1 - \exp(-kx)) \right] = (v_0 + \Delta v)t \quad (6)$$

Sustituyendo los dos términos de x , usando la expresión de $v(x)$ se tiene:

$$x = -\frac{1}{k} \ln \left[1 - \frac{v - v_0}{\Delta v} \right] \quad (7)$$

Al aplicar exponencial en ambos lados y solucionar para la velocidad, se tiene:

$$\exp(-kx) = 1 - \frac{v - v_0}{\Delta v} \quad (8)$$

Reemplazando estos valores, se puede expresar la velocidad en el marco lagrangiano.

$$v(t) = \frac{v_0(\Delta v + v_0)}{v_0 + \Delta v \exp[-k(\Delta v + v_0)t]} \quad (9)$$

Al graficar la velocidad en el marco euleriano y lagrangiano, optando por valores de $k = 1$, $k = 2$, $\Delta v = 1,0$ m/s y $v_0 = 1,0$ m/s, se obtienen las gráficas que se muestran a continuación en la **Figura 4-8**:

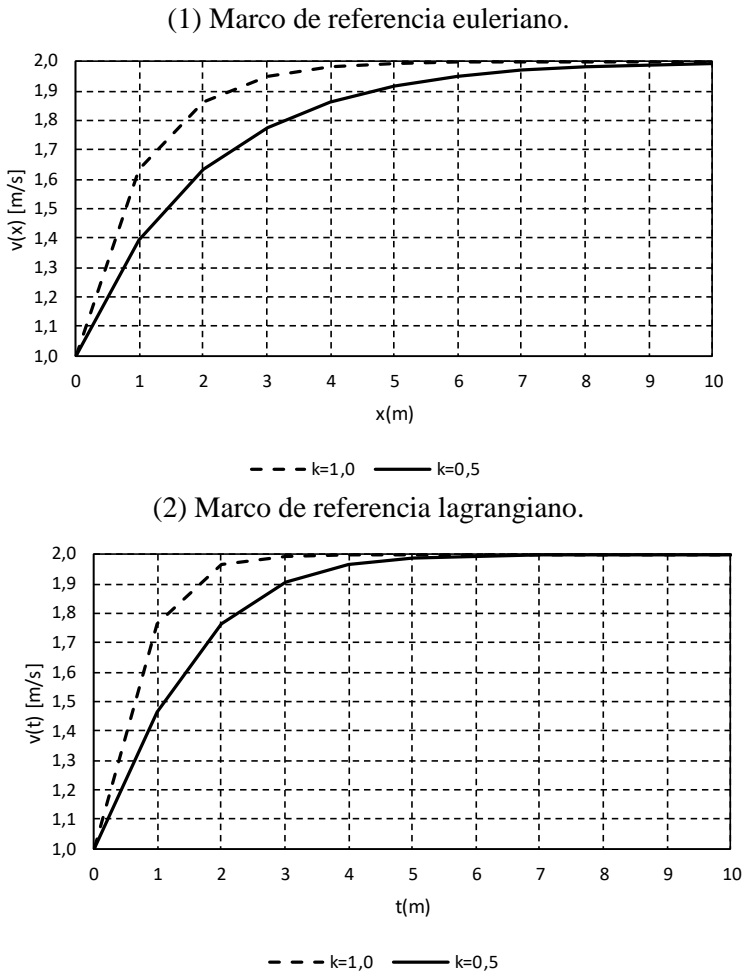


Figura 4-8.- Variación de la velocidad en los marcos: (1) euleriano y (2) lagrangiano.

De este modo se transforma la velocidad en función del espacio en el marco euleriano, a la velocidad en función del tiempo en el marco lagrangiano.

4.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.6.1. (Niño y Duarte, 2007, pp. 3–2).

Hallar el vector unitario normal a la superficie dada como $x^2y+2xz = 4$ en el punto $(2,-2,3)$

Ejercicio 4.6.2. (Gastón, 1944, p.20).

Dado el vector velocidad de un fluido por $V = (x+3y)i + (y-2z)j + (x+az)k$. Hallar la constante (a) de tal manera que V sea solenoidal.

Ejercicio 4.6.3. (Gastón, 1944, p.44)

Demostrar que el flujo cuyo campo de velocidades es dado como $V = (2x+y+z)i+(x-2y+z)j+(x+y)k$, es un flujo irrotacional

Ejercicio 4.6.4. (Spiegel, 2011, p. 46).

Suponga que una partícula P se mueve a lo largo de una curva cuyas ecuaciones paramétricas, en las que t representa al tiempo, son las siguientes: $x = 40t^2 + 4t$, $y = 2 \cos 3t$ y $z = 2 \sin 3t$. a) Determine su velocidad y aceleración en cualquier momento. b) Encuentre las magnitudes de la velocidad y la aceleración en $t = 0$.

Ejercicio 4.6.5. (Spiegel, 2011, p. 75).

Encuentre el vector unitario normal a la superficie $-x^2yz^2 + 2xy^2z = 1$ en el punto $P (1, 1, 1)$.

Ejercicio 4.6.6. (Çengel y Cimbala, 2006, p. 154).

Se coloca una sonda estacionaria en el flujo de un fluido y se mide la presión y la temperatura como funciones del tiempo en un lugar del flujo. ¿Esta es una medición lagrangiana o una euleriana? Explique su respuesta.

Ejercicio 4.6.7. (White, 2004, p. 227).

Dado el campo de velocidades euleriano $V = 3ti+xzj+ty2k$, determine la aceleración total de una partícula.

Respuesta: $3i+(3tx+txy^2)j+(y2+2txyz)k$.

4.7 Clasificación de flujos

Los flujos se clasifican de acuerdo a varios criterios, algunos de los cuales se detallan en la **Tabla 4-1**.

Tabla 4-1.- Clasificación de flujos de interés en la Mecánica de Fluidos

CRITERIO DE CLASIFICACIÓN DE FLUJOS	Tiempo	Permanente (<i>steady state</i>) No permanente (<i>transient</i>)
	Espacio	Uniforme No uniforme
	Espacio-Tiempo	Uniforme - permanente Uniforme - no permanente No uniforme - permanente No uniforme no permanente
	Dimensión Espacial	Unidimensional (1D) Bidimensional (2D) Tridimensional (3D)
	Densidad	Incompresible Compresible
	Viscosidad	Laminar Transición Turbulento
	Rotación	Rotacional Irrotacional
	Régimen	Supercrítico Crítico Subcrítico

A continuación se realiza una descripción de cada uno de dichos flujos, con base en varios textos de mecánica de fluidos, tales como Streeter et al. (2000), Niño y Duarte (2007), Loayza (2005) y Gastón (1988).

4.7.1 Criterio temporal

Esta clasificación obedece a la utilización del tiempo (t) como criterio.

- **Flujo permanente**

El flujo es permanente, si las propiedades del fluido y las condiciones del movimiento en un punto (o una sección), no cambian con respecto al tiempo; o bien, si las variaciones en ella son muy pequeñas con respecto a sus valores medios y estos no varían con el tiempo (Loayza, 2005). Dichas propiedades incluyen: la velocidad V , la presión P , la

densidad ρ , la temperatura T , y la tasa de flujo de masa Q_m (caudal másico), entre otras. Matemáticamente, se puede expresar como:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0; \frac{\partial p}{\partial t} = 0; \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.41)$$

Como ejemplo ilustrativo, este flujo se presenta cuando existe flujo a través de un orificio en un tanque dotado de rebose, lo que garantiza una altura del agua constante (H_{cte}), como se muestra en la **Figura 4-9a**.

- **Flujo no permanente**

Como caso contrario al anterior, si las propiedades del fluido en una sección (velocidad V , presión P , densidad ρ , etcétera) cambian con respecto al tiempo, se considera un flujo no permanente. Matemáticamente, dicho flujo se puede expresar como:

$$\frac{\partial V}{\partial t} \neq 0; \frac{\partial p}{\partial t} \neq 0; \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0 \quad (4.42)$$

Como ejemplo se tiene el flujo a través de un orificio perforado en un tanque, sin entrada de caudal, en consecuencia, la altura del agua será variable (H_{var}), como se ilustra en la **Figura 4-9b**.

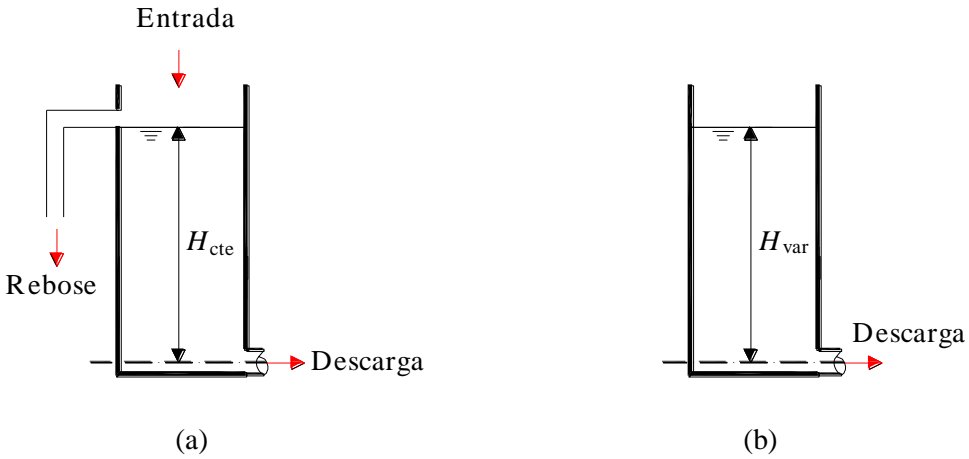


Figura 4-9.- Clasificación de flujos: (a) flujo permanente; (b) flujo no permanente.

4.7.2 Criterio espacial

Esta clasificación obedece a la utilización del espacio como criterio.

- **Flujo uniforme**

El flujo es uniforme si las características hidráulicas del flujo en una sección (velocidad V , presión P , densidad ρ , entre otras) no cambian con respecto al espacio. Matemáticamente, se puede expresar como:

$$\frac{\partial V}{\partial s} = 0; \frac{\partial p}{\partial s} = 0; \frac{\partial \rho}{\partial s} = 0 \quad (4.43)$$

Como ejemplo ilustrativo, se tiene el flujo a través de un tubo conectado en un tanque, y la sección de dicho tubo se mantiene constante, como se muestra en la **Figura 4-10a**.

- **Flujo no uniforme**

Como caso contrario al anterior, si las características hidráulicas del flujo en una sección (velocidad V , presión P , densidad ρ , etcétera) cambian con respecto al espacio, se considera un flujo no uniforme. Matemáticamente, se puede expresar como:

$$\frac{\partial V}{\partial s} \neq 0; \frac{\partial p}{\partial s} \neq 0; \frac{\partial \rho}{\partial s} \neq 0 \quad (4.44)$$

Un ejemplo práctico se puede apreciar cuando se tiene flujo a través de un tubo de sección variable conectado a un tanque, donde la velocidad cambia con la longitud del tubo, como se muestra en la **Figura 4-10b**.

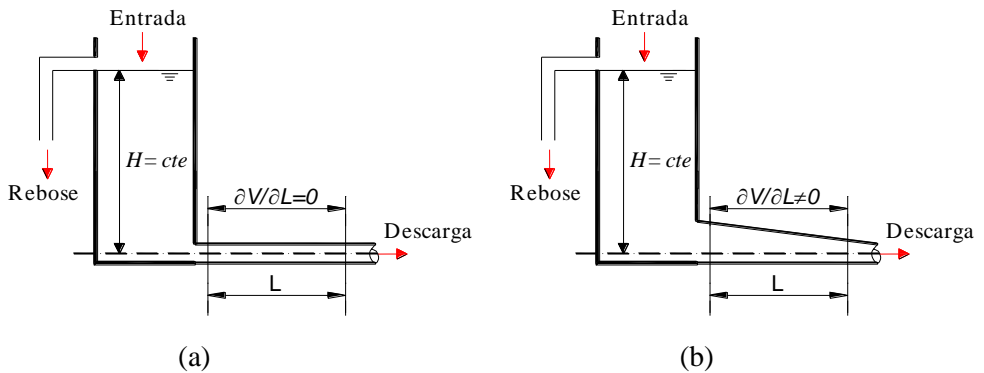


Figura 4-10.- Clasificación de flujos: (a) Flujo uniforme. (b) Flujo no uniforme.

NOTA: Se debe tener en cuenta que el criterio espacial y el criterio temporal se pueden combinar, generando flujos permanente-uniforme y permanente-no uniforme, flujos no permanente- uniforme y flujo no permanente- no uniforme.

4.7.3 Criterio dimensional

Esta clasificación obedece a la utilización, como criterio, de las dimensiones espaciales, una dimensión (1D), dos dimensiones (2D) y tres dimensiones (3D).

- **Flujo tridimensional**

Estrictamente hablando, el flujo en la naturaleza es siempre tridimensional; es decir, cuando sus características hidráulicas o variables hidráulicas, cambian en el espacio, o sea que los gradientes del flujo existen en las tres direcciones (x,y,z) (Loayza, 2005). Por

ejemplo el flujo de agua en un río con curvatura, el cual presenta componentes de velocidad con magnitudes importantes en cada dirección (r , t , z), como se muestra en la **Figura 4-11**.

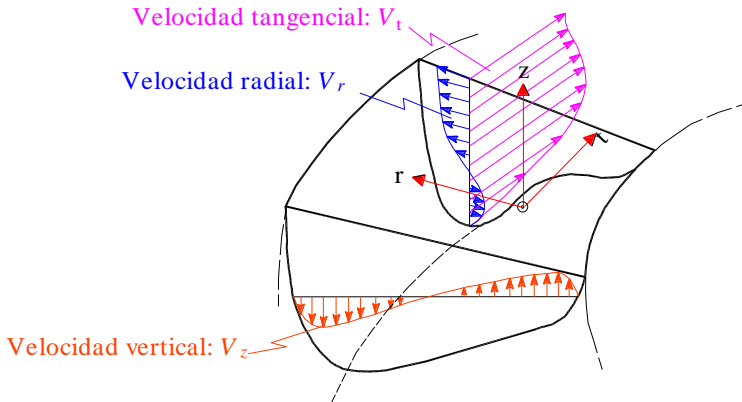


Figura 4-11. -Flujo tridimensional de un río en una curvatura. Fuente: Adaptado de (Gómez-Zambrano, 2017).

- **Flujo bidimensional**

El flujo es bidimensional, cuando sus características son idénticas sobre una familia de planos paralelos, no habiendo componentes en dirección perpendicular a dicho plano, o bien cuando esas características permanecen constantes; es decir, que el flujo tiene gradiente de velocidad o de presión (o tiene ambos) en dos direcciones exclusivamente. Es un flujo en el que el vector velocidad sólo depende de dos variables espaciales. Un ejemplo de este flujo es el que sucede bajo una presa de longitud unitaria, donde el agua se mueve solamente en dos direcciones (x , z), y no existe flujo en la dirección y , tal como se muestra en la **Figura 4-12**.

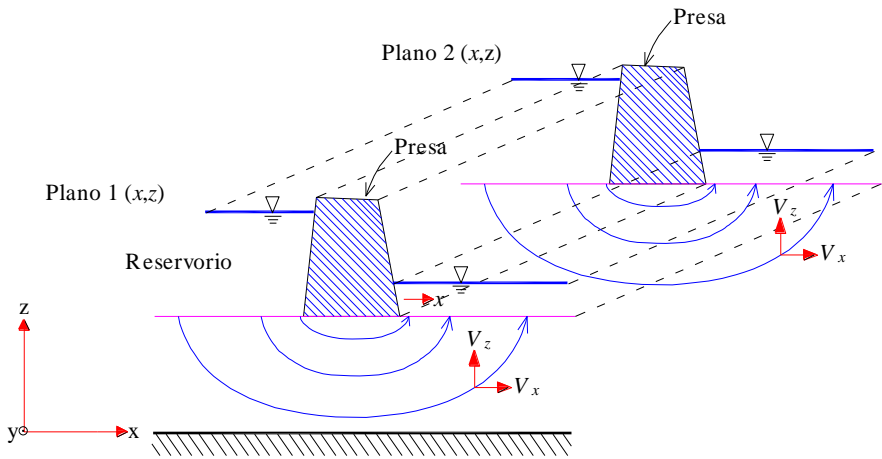


Figura 4-12.- Flujo bidimensional bajo una presa.

- **Flujo unidimensional**

El flujo es unidimensional, cuando sus características varían como funciones del tiempo y de una coordenada curvilínea en el espacio. Usualmente, la distancia medida a lo largo del eje de la conducción, se puede tomar como ejemplo aproximado del flujo en una tubería, en el cual solo se toman valores medios en la sección transversal, tal y como se ilustra en la **Figura 4-13**.

Este flujo no tiene en cuenta las variaciones o cambios en la velocidad, la presión, entre otras variables, en un plano transversal a la dirección principal del flujo (Streeter et al., 2000, p. 109).

En numerosos problemas que se encuentran en ingeniería, el análisis unidimensional sirve para proporcionar soluciones aproximadas adecuadas.

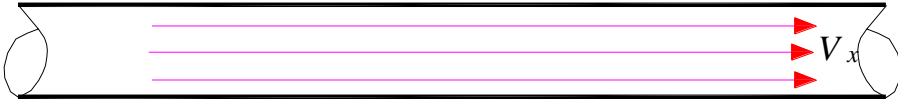


Figura 4-13.- Flujo unidimensional en una tubería.

En general un **flujo es siempre tridimensional**. Sin embargo, cuando en el flujo prevalece una dirección es considerado unidimensional, como ocurre con los conductos de tuberías y de canales (Loayza, 2005, p. 76).

4.7.4 Criterio de densidad

Esta clasificación obedece a la utilización de la densidad como criterio.

- **Flujo incompresible**

Corresponde a la condición en la cual los cambios de densidad del fluido no son importantes tanto en el espacio como en el tiempo, $\partial\rho/\partial t = 0$. Un ejemplo de ello es el flujo del agua en una tubería, la cual se considera incompresible.

- **Flujo compresible**

Cuando los cambios de densidad del fluido son importantes $\partial\rho/\partial t \neq 0$. Como ejemplo de dicha situación se puede considerar el flujo de un gas en una tubería (aire, gas metano, propano, etcétera), los cuales se consideran compresibles.

4.7.5 Criterio de viscosidad

En este caso, el criterio de clasificación es la viscosidad del fluido.

- **Flujo laminar**

Es un flujo característico de velocidades bajas, de trayectorias ordenadas, rectilíneas y paralelas (Loayza, 2005), como se muestra en la **Figura 4-14**.

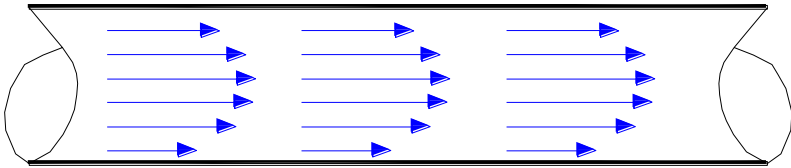


Figura 4-14.- Flujo laminar en una tubería.

- **Flujo turbulento**

Flujo característico de velocidades ordinarias (altas), de trayectorias erráticas o desordenadas. Existen pequeñas componentes de velocidad en direcciones transversales al movimiento principal, las cuales no son constantes, si no que fluctúan con el tiempo, de acuerdo con una ley aleatoria, aun cuando el flujo en general sea permanente. Las componentes transversales de la velocidad en cada punto originan un mezclado intenso de las partículas, lo que consume parte de la energía del movimiento por efecto de la fricción interna y que también en cierto modo, es resultado de los efectos viscosos del fluido (Loayza, 2005). Gráficamente se presenta dicho tipo de flujo en la **Figura 4-15**.

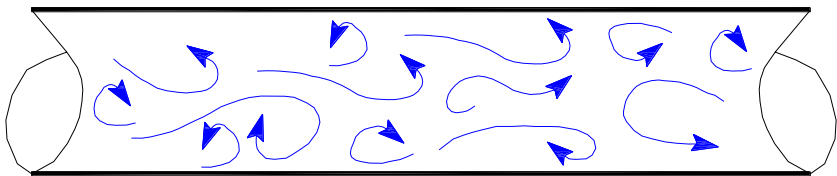


Figura 4-15.- Flujo turbulento en una tubería.

- **Número de Reynolds**

Para clasificar estos dos tipos de flujos se recurre a un número adimensional muy importante en la mecánica de fluidos, denominado Número de Reynolds (R_e), el cual físicamente representa la relación

entre las fuerzas de inercia (F_i) y las fuerzas de viscosidad (F_v). (F_i) = ma , donde (m) es la masa y (a) es la aceleración.

$$R_e = \frac{F_i}{F_v} = \frac{ma}{A\tau} = \frac{ma}{A\mu \frac{dV}{dy}} \quad (4.45)$$

Si se reemplazan las dimensiones básicas de algunas variables se tiene:

$$R_e = \frac{\rho L^3 (L/T^2)}{L^2 \mu \frac{V}{L}} = \frac{\rho L^2 (L^2/T^2)}{L\mu V} = \frac{\rho LV^2}{\mu V} = \frac{\rho LV}{\mu} = \frac{LV}{\nu} \quad (4.46)$$

El R_e se ha constituido como un número adimensional relevante en el estudio de flujos en conductos a presión. L es una longitud característica, que en tubos circulares es dada como el diámetro del tubo D , para conductos de sección no circular es dada como $L= 4R_H$, donde R_H es el radio hidráulico de la sección transversal mojada, $R_H= A/P$, donde A es el área de la sección transversal y P es el perímetro mojado, μ es la viscosidad absoluta o dinámica del fluido, ν es la viscosidad cinemática del mismo, ρ es la densidad y V es la velocidad media del fluido.

El número de Reynolds es utilizado para clasificar el flujo en:

- **Laminar**, para **Re** <2000
- **Turbulento**, para **Re** >4000.
- **De transición**, Si el valor de **Re** se encuentra entre 2000 y 4000.

4.7.6 Criterio rotacional

Esta clasificación obedece a la utilización de la rotación del flujo en el espacio como criterio.

- **Flujo rotacional**

Un flujo es rotacional, si en su interior el campo $rot \mathbf{V}$ ($\vec{\nabla} \times \vec{V} \neq \mathbf{0}$) adquiere valores distintos de cero para cualquier instante (Loayza, 2005). Físicamente, se entiende como si se colocase un cuadrado y con el flujo éste se deformase por rotación debido a la diferencia o gradiente de velocidades, como se muestra en la **Figura 4-16a**. Según Gastón (1988, p. 43), si al introducir una hélice dentro de un fluido en movimiento ésta tiende a girar, se dice en general que el flujo es rotacional en ese sitio.

- **Flujo irrotacional**

El flujo es irrotacional por el contrario, si en su interior del campo de flujo, el vector rotacional de la velocidad $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \mathbf{0}$ es igual a cero para cualquier punto e instante (Loayza, 2005). Al colocar un cuadrado, éste no se deforma por efecto del flujo, como se muestra en la **Figura 4-16b**. De acuerdo con Gastón (1988, p. 43), si al introducir una hélice dentro de un fluido ésta permanece estática, se refiere a un flujo irrotacional.

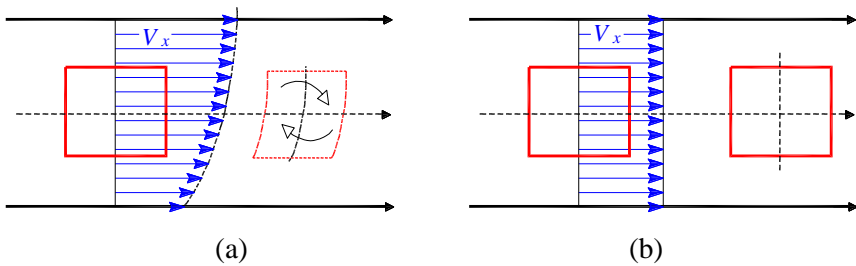


Figura 4-16.- Clasificación de flujos: (a) rotacional. (b) irrotacional.

Los autores Çengel y Cimbala (2006, p. 147) proporcionan en su obra ejemplos y analogías prácticas para entender el flujo rotacional e irrotacional.

4.7.7 Criterio de estabilidad

Esta clasificación obedece a la utilización del régimen del flujo como criterio usando el número de Froude (F).

- **Número de Froude**

El número de Froude se ha constituido como un número adimensional relevante en el estudio de flujos en conductos a superficie libre o conocidos comúnmente como “canales”. Dicho número se puede definir como la raíz cuadrada de la relación que existe entre las fuerzas de inercia (F_i) y las fuerzas de gravedad, (F_g).

$$F_R^2 = \frac{F_i}{F_g} = \frac{ma}{mg} \quad (4.47)$$

Si se reemplazan las dimensiones básicas de algunas variables se tiene:

$$F_R^2 = \frac{\rho L^3 (L/T^2)}{\rho L^3 g} = \frac{L^2 (L^2/T^2)}{L^3 g} = \frac{V^2}{Lg} \quad (4.48)$$

$$F_R = \frac{V}{\sqrt{Lg}} \quad (4.49)$$

L es una longitud característica, que en canales es igual a la profundidad hidráulica $L = P_H$, donde P_H es la profundidad hidráulica de la sección transversal mojada; $P_H = A/T$, donde A es el área de la sección transversal y T es el ancho hidráulico. g es la aceleración debido a la gravedad de la Tierra y V es la velocidad media del fluido.

El número de Froude es utilizado para clasificar el flujo:

- Si $F_R < 1$, es un flujo **subcrítico**.
- Si $F_R > 1$ es un flujo **supercrítico**.
- Si $F_R = 1$ es un flujo **crítico**.

Dichos flujos son característicos de flujos a superficie abierta.

4.8 Ejemplos de aplicación

Ejemplo 4.3. Dado el flujo con el siguiente campo de velocidades:

$$\vec{V} = (2x + y + z)ti + (x - 2y + z)tj + (x + y)tk \quad (1)$$

Verificar si es un flujo rotacional o irrotacional.

Solución:

Se parte de la definición de que para que el flujo sea rotacional se debe cumplir que $\vec{\nabla} \times \vec{V} \neq 0$, y para que el flujo sea irrotacional $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$. Con base en lo anterior, es necesario hallar el producto cruz de los dos vectores.

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left[\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right] i - \left[\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z} \right] j + \left[\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right] k = \text{rot}(\vec{V}) \quad (2)$$

Al obtener las derivadas parciales de cada componente de velocidad, se tiene que:

$$V_x = (2x + y + z)t; V_y = (x - 2y + z)t; V_z = (x + y)t \quad (3)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial y} = t; \frac{\partial V_y}{\partial z} = t; \frac{\partial V_z}{\partial x} = t; \frac{\partial V_x}{\partial z} = t; \frac{\partial V_y}{\partial x} = t; \frac{\partial V_x}{\partial y} = t \quad (4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = [t - t]i - [t - t]j + [t - t]k = 0 \quad (5)$$

Como $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$, se concluye que el flujo es **irrotacional**, es decir se trata de un fluido ideal.

Ejemplo 4.4.

Un tubo circular de diámetro 3 pulg, transporta agua a una temperatura de 15 °C y a una velocidad de 5 m/s; clasifique el flujo según el Número de Reynolds.

$$\text{Re} = \frac{VL}{\nu}, L = D$$

$$\text{Re} = \frac{(5\text{m/s})(3\text{pulg.} \cdot 0,0254\text{m/pulg.})}{1,1 \cdot 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}} = 346364[-] \quad (1)$$

$$\text{Unidades: } \frac{\text{m/s} \cdot \text{m}}{\text{m}^2/\text{s}} = [-]_{\text{adimensional}}$$

Como $\text{Re} > 4000$ se trata de un flujo turbulento.

4.9 Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.9.1.

Un canal rectangular con un área mojada definida por una base de 20 cm y una altura de 25 cm. El canal transporta agua a una velocidad de 2,8 m/s. Clasifique el flujo según el Número de Froude.

Ejercicio 4.9.2. (Streeter et al., 2000, p. 109).

De entre las opciones señaladas, señale la respuesta correcta:

Un flujo unidimensional es:

- (a) un flujo uniforme permanente;
- (b) un flujo uniforme,
- (c) un flujo que no tiene en cuenta cambios en un plano transversal a la dirección del flujo,
- (d) un flujo restringido a una línea recta,
- (e) ninguna de las anteriores

Ejercicio 4.9.3.

Dado el campo de velocidades como $\vec{v} = (6+2xy+t^2)\mathbf{i} - (xy^2+10t)\mathbf{j} + 25\mathbf{k}$ que describen un flujo, determinar si dicho flujo es permanente o no permanente.

Ejercicio 4.9.4. (Chereque, 1987, p. 51).

Según el concepto de flujo rotacional ($\text{rot}\vec{v}$) demostrar que el rotor de la velocidad en un movimiento de rotación alrededor de un eje es igual al doble del vector velocidad angular ω

Como la velocidad tangencial es $\vec{v} = \omega \times dr$, donde $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$, por lo tanto halle primero el producto cruz de $\omega \times dr$, luego el $(\text{rot } \vec{v}) = \text{rot}(\omega \times dr)$.

Ejercicio 4.9.5.

Un campo de velocidades viene dado por $V = (8tx)\vec{i} - (4t^2y)\vec{j} + (8xz)\vec{k}$.
 a) ¿Es el flujo estacionario o no estacionario?, b) ¿Es bidimensional o tridimensional?, c) Calcule, en el punto $(x,y,z) = (-1,1,0)$, el vector aceleración.

4.10 Descripción de un flujo

Para describir el movimiento de un fluido es necesario conocer la posición de cada partícula en cada instante; de esta forma es posible determinar las características cinemáticas del movimiento. Para estudiar el movimiento de las partículas se utilizará el método euleriano, usado preferencialmente en el estudio de la Mecánica de Fluidos (Gastón, 1988, p. 45).

Acá, previamente, es necesario conocer algunos conceptos relacionados con el movimiento de los fluidos, tales como el flujo volumétrico y el flujo másico, las líneas de corriente y las trayectorias de flujo.

4.10.1 Flujo volumétrico y flujo másico

En términos generales el flujo es la medida de la masa (caudal másico) o volumen (caudal volumétrico) que atraviesa un área definida por unidad de tiempo. Normalmente, dicha área coincide con la sección transversal de un tubo de corriente (Gálviz, 2011, p. 6 de 24).

- **Flujo volumétrico**

El flujo volumétrico que pasa a través de una superficie imaginaria del campo de flujo (o caudal, Q) es una de las propiedades cinemáticas más relevantes en el estudio del movimiento de un fluido. El caudal se define como el paso de un fluido a través de un diferencial de área dA , con una velocidad \vec{v} , que puede formar un cierto ángulo con el vector unitario \vec{n} normal a dA . Al pasar un tiempo dt dicho caudal genera un volumen de

fluido $d\forall$ como se muestra en la **Figura 4-17** (Niño y Duarte, 2007, pp. 3–8).

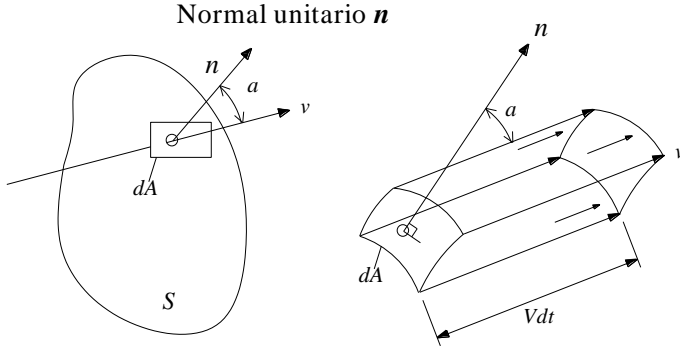


Figura 4-17.- Esquema para el análisis del flujo volumétrico. Fuente: Adaptada de (Gálviz, 2011, p. 6 de 24).

Matemáticamente, se puede expresar como:

$$\partial\forall = (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA dt = v dA \cos \alpha dt \quad (4.50)$$

Esto debido a que el producto punto de $\vec{v} \cdot \vec{n}$ es dado como $|\vec{v}| |\vec{n}| \cos \alpha = v \cos \alpha$, y la magnitud del vector \vec{n} como uno (1,0). Como el caudal es el diferencial de volumen por unidad de tiempo, se tiene:

$$dQ = \frac{\partial\forall}{dt} = (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA \quad (4.51)$$

Al integrar en ambos lados se tiene:

$$Q = \int_A dQ = \int_A (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \int_A \vec{v} \vec{d}\vec{A} \quad (4.52)$$

Un vector $d\vec{A}$ se puede expresar con el vector unitario \vec{n} como $d\vec{A} = \vec{n} dA$. Para efectos prácticos en la ingeniería, la velocidad siempre es normal al área, lo que implica que el ángulo α es igual a cero grados, con $\cos(0^\circ) = 1$, se tiene:

$$Q = \int_A v_n dA \tag{4.53}$$

Donde V_n es la velocidad del flujo ortogonal al área, lo que equivale a que el ángulo α sea cero (0°) o 180° , ($\cos \alpha = 1$). Cuando $\alpha = 0^\circ$, el flujo sale de la superficie; si $\alpha = 180^\circ$, el flujo ingresa a la superficie, como se ilustra en la **Figura 4-18**.

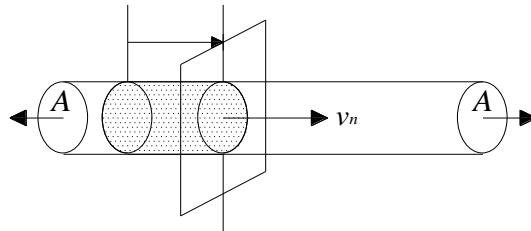


Figura 4-18.- Esquema cuando el vector velocidad es paralelo al vector área.

Si se integra con una velocidad constante $v_n = \bar{V}$, con \bar{V} como la velocidad media, sobre un área A se tiene:

$$Q = \bar{V} \int_A dA = \bar{V} A \tag{4.54}$$

Si se conoce el caudal es posible determinar la velocidad media.

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{1}{A} \int_A v d\bar{A} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{N_A} (\bar{V}_i A_i) \tag{4.55}$$

Al tomar un área discreta, N_A es el número de áreas en que se divide el área total A .

- **Flujo másico**

El flujo másico (Q_m) se define como el flujo de masa por unidad de tiempo, en este sentido si se multiplica el caudal volumétrico por la densidad se tiene:

$$\int_A dQ_m = \int_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_A \rho v \cos(\alpha) dA \quad (4.56)$$

Para una velocidad ortogonal al área, $\cos(\alpha) = 1$.

$$Q_m = \int_A \rho v_n dA = \rho \bar{V} A \quad (4.57)$$

Para flujos incompresibles la densidad es constante y por ello puede salir de la integral.

4.10.2 Línea de corriente

Una línea de corriente se define como toda línea trazada idealmente donde el vector velocidad de cada partícula que ocupa un punto en la línea de corriente es tangente a la línea de corriente (Loayza, 2005, p. 80), (Potter et al., 2015, p. 91). Gráficamente se muestra el concepto en la **Figura 4-19**.

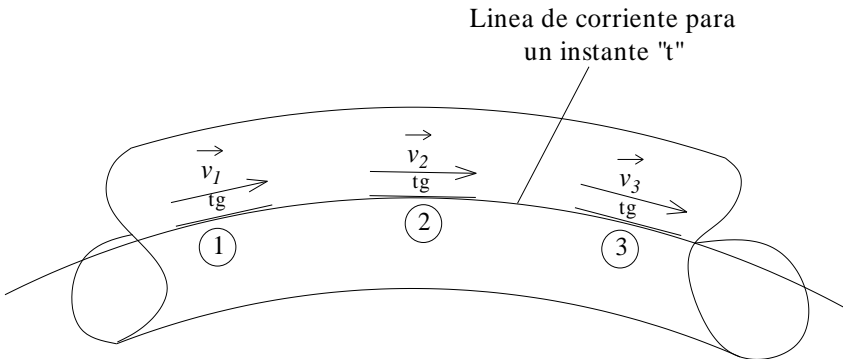


Figura 4-19.- Línea de corriente en el instante t_0 . ($tg =$ tangente). Fuente: Adaptada de (Loayza, 2005, p. 80)

Retomando lo presentado por Gastón (1988), supóngase que en un campo de flujo variable, se toma una fotografía en el instante t_0 , luego se selecciona varios puntos correspondientes a un “tubo de flujo” y a cada uno se le asigna su vector velocidad \vec{V} ; se puede trazar entonces, una línea ideal dentro del flujo, de tal manera que la tangente en cada uno de sus puntos proporcione la dirección del vector velocidad en cada

punto. Al tomar otra fotografía del campo de flujo en otro instante t , se obtendrá otra línea de corriente distinta a la anterior.

Dado que la línea de corriente es tangente al vector velocidad, ninguno de ellos la atraviesa por lo que la misma se dice que es “*impermeable*” (Gálviz, 2011, p. 5 de 24). No existe posibilidad de que dos líneas de corriente tengan un punto común, pues ello significaría que en el punto de intersección existieran dos vectores de velocidad \vec{v} distintos (Loayza, 2005).

Para el análisis matemático se toma como base la **Figura 4-20**, en la cual se muestran dos puntos infinitamente cercanos, definidos por los vectores r_1 y r_2 , por lo tanto, se puede considerar que $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}$. Como \vec{v} y $d\vec{r}$ son vectores paralelos (tienden a ser colineales).

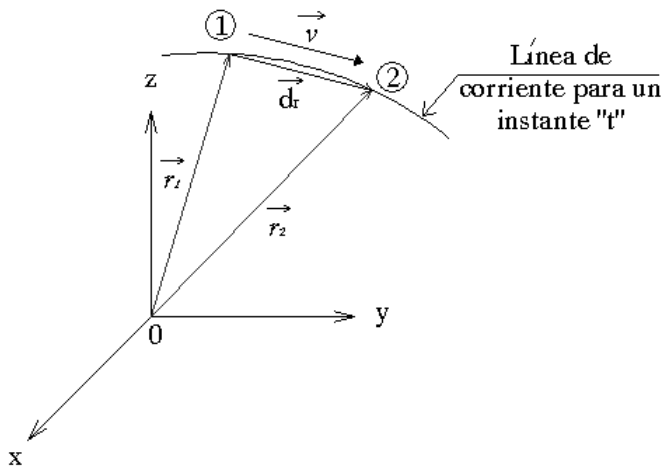


Figura 4-20.- Línea de corriente en el instante t . Fuente: Adaptada de (Loayza, 2005, p. 80).

Lo que implica que el producto cruz de los dos vectores es igual a cero.

$$\vec{v} \times d\vec{r} = 0 \tag{4.58}$$

$$\vec{v} \times d\vec{r} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ v_x & v_y & v_z \\ dx & dy & dz \end{bmatrix} = 0 \quad (4.59)$$

$$[v_y dz - v_z dy]i - [v_x dz - v_z dx]j + [v_x dy - v_y dx]k = 0 \quad (4.60)$$

Para que esto se cumpla, también se debe cumplir que:

$$[v_y dz = v_z dy], [v_x dz = v_z dx], [v_x dy = v_y dx] \quad (4.61)$$

De lo cual se obtiene:

$$\left[\frac{v_y}{dy} = \frac{v_z}{dz} \right], \left[\frac{v_x}{dx} = \frac{v_z}{dz} \right], \left[\frac{v_x}{dx} = \frac{v_y}{dy} \right] \quad (4.62)$$

De este sistema de ecuaciones diferenciales se obtiene para un instante considerado t_0 :

$$\frac{v_{x(x,y,z,t_0)}}{dx} = \frac{v_{y(x,y,z,t_0)}}{dy} = \frac{v_{z(x,y,z,t_0)}}{dz} \quad (4.63)$$

Esta última expresión constituye la **ecuación analítica o ecuación rectangular** de la **línea de corriente** para un instante considerado $t = t_0$ y es designada por la letra griega ψ (psi). Cabe recordar que v_x , v_y , v_z son función de (x, y, z, t_0) . Al conocerse la velocidad en cada punto y en cada instante, es posible obtener la configuración instantánea de las líneas de corriente (Niño y Duarte, 2007). De acuerdo con Gastón (1988, p. 47), la línea de corriente es una curva espacial que está constituida en realidad por dos ecuaciones y no por tres.

4.10.3 Trayectoria de una partícula

Es la curva que une las trayectorias de una partícula (a) en cada instante t , esta curva indica la posición de la partícula a lo largo del tiempo

(Gálviz, 2011, p. 5 de 24). Dicha situación se muestra gráficamente en la **Figura 4-21**.

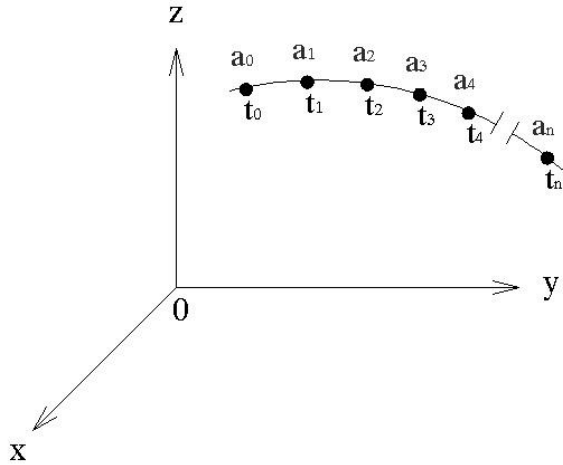


Figura 4-21.- Trayectoria de la partícula a . Fuente: Adaptada de (Loayza, 2005, p. 82)

Para la deducción matemática se parte de lo ilustrado en la **Figura 4-22**.

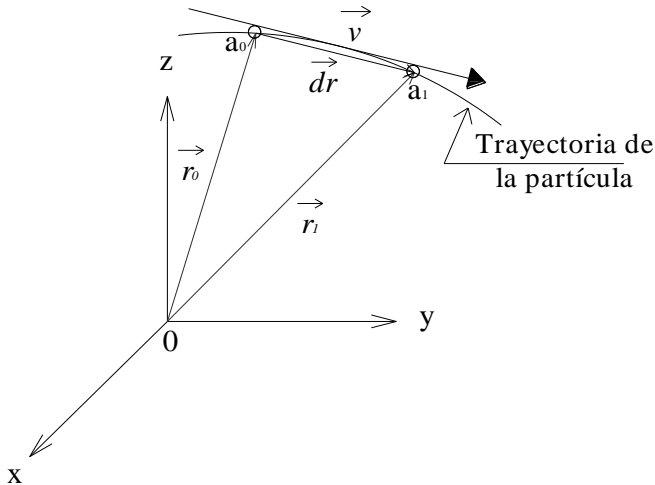


Figura 4-22.- Trayectoria de la partícula a . Fuente: Adaptada de (Loayza, 2005, p. 82).

Como se había comentado anteriormente, el vector de velocidad \vec{v} es el cambio del vector $\vec{r}(t)$ con respecto al tiempo t .

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (4.64)$$

Despejando se tiene:

$$d\vec{r} = \vec{v}dt \quad (4.65)$$

Por otro lado se tiene que:

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \quad (4.66)$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \quad (4.67)$$

Haciendo la sustitución de las ecuaciones (4.66) y (4.67) en la ecuación (4.65), se obtiene:

$$dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = (v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k})dt \quad (4.68)$$

$$dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = (v_x dt\vec{i} + v_y dt\vec{j} + v_z dt\vec{k}) \quad (4.69)$$

Con base en lo anterior, se obtiene la siguiente igualdad:

$$dx = v_x dt, dy = v_y dt, dz = v_z dt \quad (4.70)$$

Al despejar el diferencial del tiempo de cada una, se tiene:

$$dt = \frac{v_x}{dx}, dt = \frac{v_y}{dy}, dt = \frac{v_z}{dz} \quad (4.71)$$

Se considera que si dt es igual, también lo es $1/dt$. Como el dt es el mismo para las tres igualdades se puede establecer que:

$$\frac{v_{x(x,y,z,t)}}{dx} = \frac{v_{y(x,y,z,t)}}{dy} = \frac{v_{z(x,y,z,t)}}{dz} \quad (4.72)$$

La expresión anterior constituye la ecuación analítica de la trayectoria para un instante $t = t$ variable. Donde cada una de las velocidades (v_x , v_y y v_z) son funciones de (x, y, z, t) . Al comparar la línea de corriente y la trayectoria, si el flujo es no permanente estas son líneas distintas, pero si el flujo es permanente significan lo mismo. La razón está en que, en el flujo permanente, el campo de velocidad no cambia con el tiempo. Toda partícula que pase por “ a_0 ” sigue la misma trayectoria. En cada punto a_0, a_1, \dots, a_n el vector velocidad permanece igual. Todas las partículas que pasen por a_0 tienen velocidad v_0 , las que pasen por a_1 tienen velocidad v_1 , y las que pasen por a_n tienen velocidad v_n (Loayza, 2005). Si se toma varias fotografías al campo de flujo permanente y se hace el trazado de la curva que une los puntos, se obtendrá la misma línea de corriente, que a la vez será la trayectoria de la partícula.

La descripción y visualización de las líneas de corriente, se realiza en un dispositivo que permite colocar diferentes geometrías para su estudio, con un sistema de inyección de tinta o agua coloreada, como se muestra en la **Figura 4-23**, conocido como la celda de Hele-Shaw.

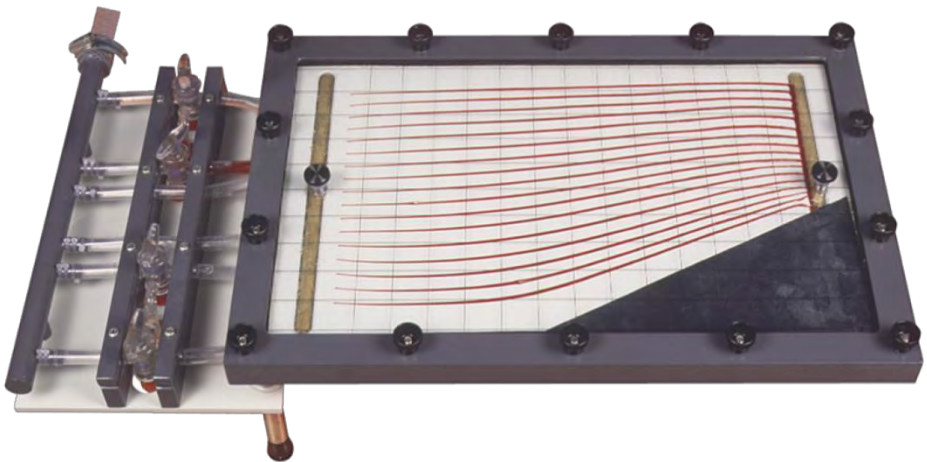


Figura 4-23.- Dispositivo experimental para visualizar las líneas de flujo.

Fuente: (Tecquipment, s/f).

En la **Figura 4-23**, se presenta dos fotografías de las líneas de corriente obtenidas experimentalmente en una celda de Hele-Shaw.

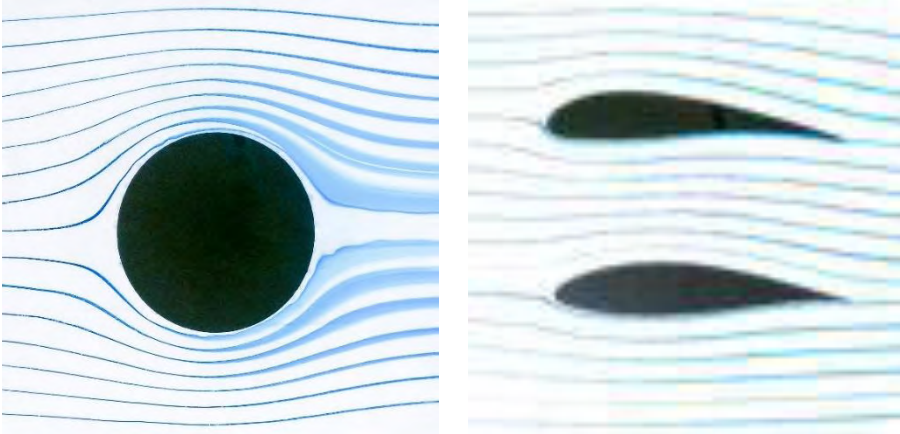


Figura 4-23.- Fotografías de líneas de corriente y trayectorias en flujo permanente obtenidas experimentalmente. Fuente: (Armfield, s/f).

4.10.4 Superficie de flujo, tubo de corriente y vena líquida.

Si al trazar una curva C dentro de un flujo, ésta corta varias líneas de corriente, la superficie así formada se llama superficie de corriente. Si la curva C se cierra de manera que forme un tubo, sin que haya cruce de las líneas de corriente, la superficie cerrada se llama tubo de flujo o tubo de corriente y el volumen encerrado en dicho tubo se llama vena líquida (Loayza, 2005, p. 83). La razón para que las líneas de corriente no se corten es que no existe posibilidad de que dos líneas de corriente tengan un punto común, pues ello significaría que en el punto de intersección existieran dos vectores de velocidad \vec{v} distintos, lo cual no puede ocurrir por la definición misma de línea de corriente (Gastón, 1988, p. 47).

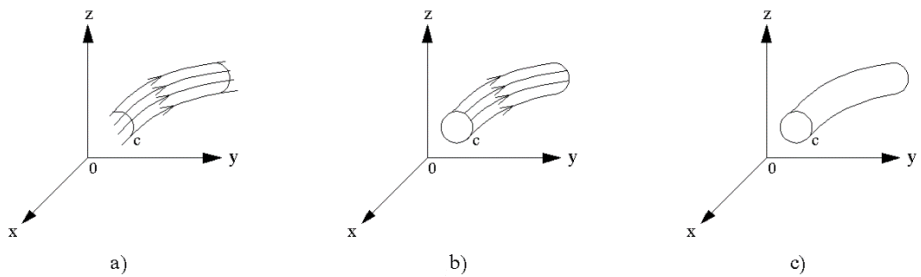


Figura 4-24.- (a) superficie de flujo. (b) tubo de corriente. (c) vena líquida.

4.10.5 Función de corriente

Según Niño y Duarte (2007), la función de corriente es otra función escalar que solamente es válida para flujo en dos dimensiones (2D), y su aplicación sirve para calcular el caudal a través de superficies conociendo las componentes de velocidad. Se representa con la letra griega ψ (psi), pudiéndose dar en dos ecuaciones:

A partir de la ecuación de línea de corriente o ecuación de Lagrange (Gastón, 1988, p. 58):

$$\frac{v_x}{dx} = \frac{v_y}{dy} \Rightarrow v_x dy - v_y dx = d\psi \tag{4.73}$$

Por otro lado, según la definición de diferencial exacta, se tiene:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \tag{4.74}$$

Al comparar las dos expresiones anteriores, se obtiene que:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{4.75}$$

La función de corriente ψ es una constante ya que debe cumplir que $d\psi = 0$. $\Delta \psi = 0$, $\psi_2 - \psi_1 = 0 \therefore \psi_2 = \psi_1 = \text{constante}$. La función de corriente constante $\psi = 0$, se utiliza para calcular descargas a través de superficies (Gastón, 1988, p 59). Lo que confirma que la función de corriente ψ

tiene un valor constante diferente para cada línea de corriente (Loayza, 2005, p. 90).

La función de corriente ψ satisface la ecuación de Laplace en dos dimensiones (2D), cuando se trata de un flujo irrotacional, lo que implica que $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$.

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0i - 0j + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) k = 0 \quad (4.76)$$

Reemplazando v_x, v_y , por la función de corriente ψ , se tiene:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{\partial(-\partial\psi/\partial x)}{\partial x} - \frac{\partial(\partial\psi/\partial y)}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.77)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \right) = 0 = \nabla^2\psi \quad (4.78)$$

La anterior expresión es la **ecuación de Laplace** en dos dimensiones $\nabla^2\psi = 0$ (Gastón, 1988; p. 59). Se puede considerar que la función de corriente es una ecuación que describe una familia de líneas de corriente, donde cada valor constante de ψ genera una línea de corriente (Loayza, 2005, p. 88).

4.10.6 Ejemplos de aplicación

- **Caudal y velocidad**

Ejemplo 4.5.

Una masa de aire que tiene una densidad de $1,225 \text{ kg/m}^3$ a 15°C y a una atmósfera normal fluye por un tubo con un diámetro de 20 cm a un flujo másico de $5,3 \text{ kg/s}$ ¿Cuál es el flujo volumétrico y la velocidad media del flujo en el tubo?.

Solución:

Como el caudal másico es $Q_m = \rho \bar{v} A = \rho Q$, entonces $Q = Q_m / \rho = (5,3 \text{ kg/s}) / (1,225 \text{ kg/m}^3) = 4,327 \text{ m}^3/\text{s}$. La velocidad media fue definida como $\bar{V} = Q / A$, entonces:

$$\bar{V} = (4,327 \text{ m}^3 / \text{s}) / (\pi(0,2\text{m})^2 / 4) = 137,71 \text{ m/s} \tag{1}$$

Ejemplo 4.6.

La velocidad del agua en el canal mostrado en la **Figura 4-25** tiene una distribución a través de la sección vertical igual a $v_x = V_{\text{max}} (y/d)^{1/2}$. ¿Cuál es el caudal en la sección si ésta tiene 2 m de profundidad ($d = 2 \text{ m}$) y 5 m de ancho (ortogonal a la página o a la pantalla del lector del presente texto), y la velocidad máxima es de $V_{\text{max}} = 3 \text{ m/s}$? Encontrar, además, la velocidad media.

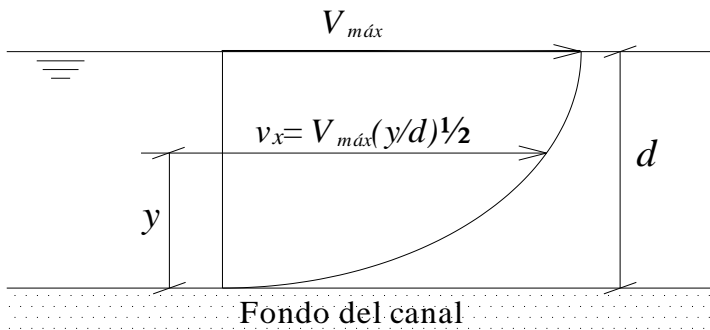


Figura 4-25.- Distribución de velocidad del flujo en el canal.

Solución:

El flujo volumétrico fue dado como:

$$Q = \int_A v_x d\bar{A} \tag{1}$$

Si se llama al ancho b , con $b = 5\text{m}$.

$$Q = \int_0^d V_{\text{max}} (y/d)^{1/2} (b \cdot dy) \tag{2}$$

Integrando para dy , se obtiene:

$$Q = \frac{bV_{\max}}{d^{1/2}} \int_0^d (y)^{1/2} dy \quad (3)$$

$$Q = \frac{bV_{\max}}{d^{1/2}} \left[\frac{2}{3} y^{3/2} \right]_0^d = \frac{bV_{\max}}{3} 2d = \frac{2}{3} bV_{\max} d \quad (4)$$

Sustituyendo los valores, se tiene.

$$Q = \frac{(5m)(3m/s)}{3} 2(2m) = 20m^3 / s \quad (5)$$

La velocidad media se calcula con el siguiente procedimiento.

$$\bar{V} = \frac{1}{A} \int_A v_x d\bar{A} \quad (6)$$

$$\bar{V} = \frac{1}{A} \int_0^d V_{\max} (y/d)^{1/2} (b \cdot dy) \quad (7)$$

$$\bar{V} = \frac{1}{A} \frac{bV_{\max}}{d^{1/2}} \frac{2}{3} y^{3/2} \Big|_0^d = \frac{2}{3} \frac{bdV_{\max}}{A} \quad (8)$$

Como $A = bd$, en este caso el área se elimina, resultando:

$$\bar{V} = \frac{2}{3} V_{\max} \quad (9)$$

$$\bar{V} = \frac{2}{3} (3 m/s) = 2 m/s \quad (10)$$

- **Línea de corriente**

Ejemplo 4.7.

El campo de velocidades de un flujo bidimensional viene dado por $\vec{v} = (V_0/L)(4xi-4yj)$, donde V_0 y L son constantes. Determinar las líneas de corriente para $(x,y) \geq 0$.

Solución:

Si separan las componentes del vector velocidad \vec{v} , en sus componentes rectangulares, $v_x = (V_0/L)(4x)$; $v_y = -(V_0/L)(4y)$; se plantea la ecuación de la línea de corriente en el plano (x, y) , dada como:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \quad (1)$$

Reemplazando las velocidades, se tiene:

$$\int \frac{dx}{(V_0/L)x} = \int \frac{dy}{-(V_0/L)y} \quad (2)$$

Como (V_0/L) es constante, se eliminan de la ecuación.

$$\int \left(\frac{dx}{x} \right) = - \int \left(\frac{dy}{y} \right) \quad (3)$$

Al integrar cada término y colocando la constante de integración (Cte), se tiene:

$$\ln(x) = -\ln(y) + \text{Cte} \quad (4)$$

Según propiedades de logaritmo:

$$\ln(x) + \ln(y) = \text{Cte} \quad (5)$$

$$\ln(xy) = \text{Cte} \quad (6)$$

Si $\ln(xy) = \text{Cte}$, el valor de xy también debe ser una constante ya que $e^{\text{Cte}} = \text{cte}$, por lo tanto, se puede expresar que:

$$xy = e^{\text{cte}} = C \quad (7)$$

Esta ecuación, que describe las líneas de corriente, es denominada la función de corriente $\psi = xy$; dando valores a la función $\psi = 0, 1, 3$ y 6 se obtiene la representación gráfica, de la **Figura 4-26**, de las líneas de corriente. En el caso de que $\psi = 0, y = 0$ para todo x .

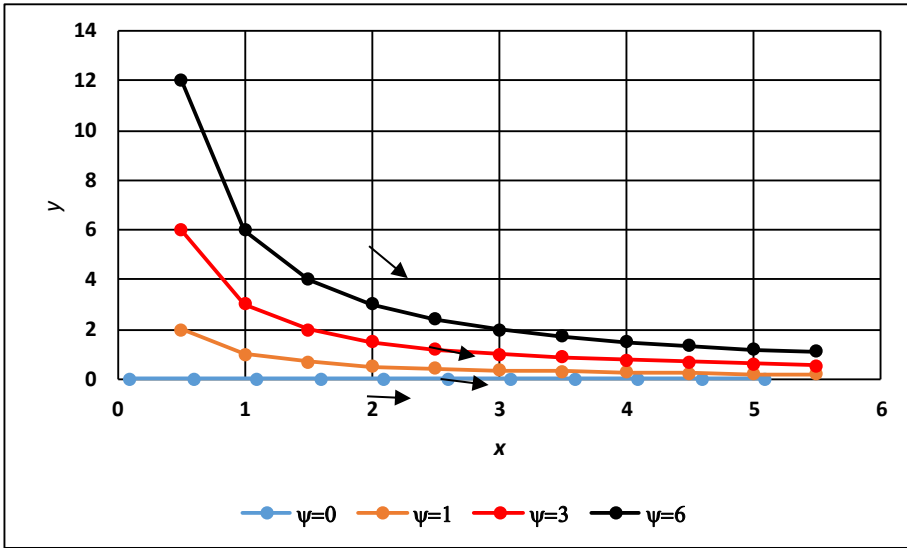


Figura 4-26.- Líneas de corriente de la función $\psi = xy$. Fuente: elaboración propia.

- **Función de corriente**

Ejemplo 4.8. (Gastón, 1988; p. 63).

Determinar la función de corriente del flujo bidimensional dado por $\vec{v} = 3xi - 3yj$. Hallar el caudal que fluye entre las dos líneas de corriente que pasan por los puntos A(2,2) y B(3,3).

Solución:

$$3x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; -3y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1)$$

Se aplica el método de separación de variables y se integra:

$$\partial \psi = 3x \partial y \quad (2)$$

$$\int \partial \psi = \int 3x \partial y \quad (3)$$

$$\psi = 3xy + C \quad (4)$$

$$\psi = 3xy + C; \psi = 3yx + C \quad (5)$$

En este caso las ecuaciones son iguales, así que se toma cualquiera de las dos; de lo contrario, se adicionan los términos diferentes de cada una, si los hubiere. De esta manera, la función de corriente ψ se expresa como:

$$\psi = 3xy + C \quad (6)$$

Es la ecuación de la familia de líneas de corriente. Para hallar el caudal se considera que la diferencia de las dos funciones que pasan por A y B son iguales al caudal.

$$Q = \psi_B - \psi_A \quad (7)$$

$$Q = [3(3)(3) + C] - [3(2)(2) + C] = 15 \text{ Unidades de caudal} \quad (8)$$

Ejemplo 4.9. (Gastón, 1988, p. 59).

Una familia de líneas de corriente, cada una de las cuales representa un valor constante de la función de corriente ψ , se puede suponer que las constantes van aumentando uniformemente, como se muestra en la **Figura 4-27**. Demostrar que el caudal por unidad de ancho q , es el mismo que atraviesa el área AB y el área CA.

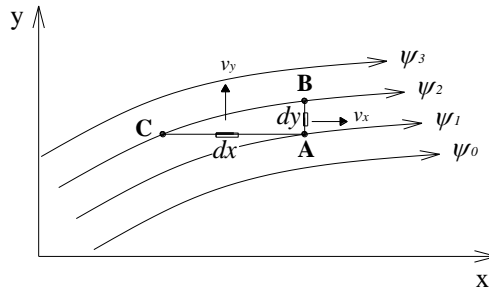


Figura 4-27.- Familia de líneas de corriente.

Solución:

El flujo entre dos líneas de corriente ψ_1 y ψ_2 , es decir, el flujo que circula en la franja $\psi_1 - \psi_2$, con profundidad unitaria, se puede hallar integrando v_x :

$$Q = \int_A \vec{v} d\vec{A}; \text{-----} > dA = (1)dy \quad (1)$$

$$q_{AB} = \int_A^B v_x (1)dy = \int_A^B \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = \int_A^B \partial \psi = \psi_B - \psi_A = \psi_2 - \psi_1 \quad (2)$$

$$q_{CA} = \int_C^A v_y (1)dx = \int_C^A -\frac{\partial \psi}{\partial x} dx = -\int_C^A \partial \psi = \psi_C - \psi_A = \psi_2 - \psi_1 \quad (3)$$

De lo cual se concluye que el caudal $q_{AB} = q_{CA}$.

4.11 Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.11.1. (Vennard y Street, 1979, p. 150), (Fernández, 2001, pp. 119-123).

Calcular las velocidades promedio para los perfiles bidimensionales de velocidad mostrados en la **Figura 4-28**, si el valor de la velocidad $v_c = 4$ m/s localizada a la mitad de la separación de la profundidad $D = 2$ m.

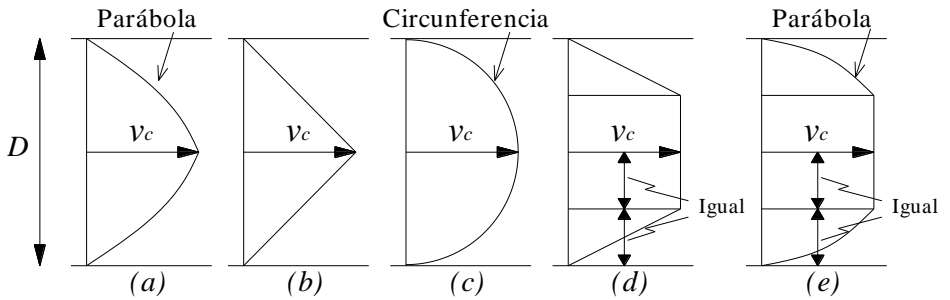


Figura 4-28.- Esquema del Ejercicio 4.12. Adaptada de (Vennard y Street, 1979, p. 150)

Ejercicio 4.11.2. (Potter et al., 2015, p. 98).

El campo de velocidad está dado por $V = 2xi + y tj$ m/s, donde x y y están en metros y t en segundos. Encuentre la ecuación de la línea de corriente que pasa por el punto $(2, -1)$ y un vector unitario normal a la línea de corriente en el punto $(2, -1)$ cuando $t = 5$ s.

Ejercicio 4.11.3. (Fernández, 2001, p. 136).

La boquilla que se muestra en la **Figura 4-29**, de 8 cm de diámetro en la base, 3 cm en el otro extremo y longitud L , descarga 1300 L/min. Determinar la expresión para la variación de velocidad del fluido a lo largo del eje de la boquilla. Medir la distancia x a lo largo del eje, a partir del plano de mayor diámetro.

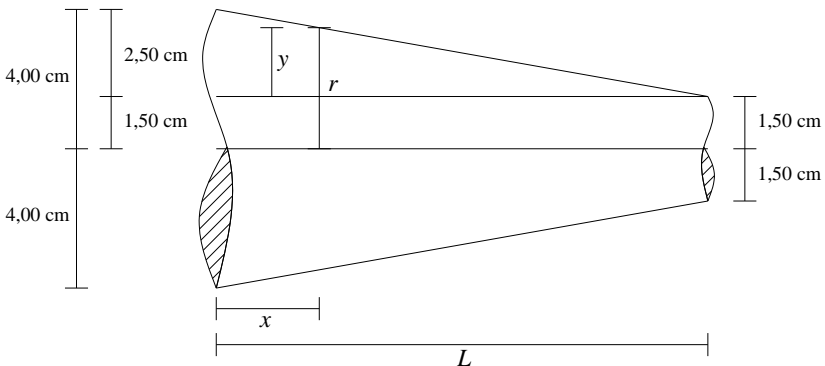


Figura 4-29.- Esquema del Ejercicio 4.14. Fuente: Adaptada de (Fernández, 2001, p. 136).

Ejercicio 4.11.4. (Chereque, 1987, p. 59).

Determinar la ecuación de las L.C. de un flujo permanente, plano, simétrico respecto del eje y , dirigido hacia abajo, que choca contra una placa horizontal, cuyo campo de velocidades está definido por las componentes: $v_x = 2x$, $v_y = -2y$.

Ejercicio 4.11.5. (Sotelo, 2005, p. 102).

El campo de velocidades de un flujo está definido como: $v_x = x+y$, $v_y = -y+t$. Determinar la ecuación de la línea de corriente para $t = 0$, y el punto $(-1,-1)$. La trayectoria de la partícula que en el instante $t = 0$, se encuentra en la posición $(-1,-1)$.

Ejercicio 4.11.6. (Franzini y Finnemore, 1999, p. 70)

Un flujo de aire, a 100°F y sometido a una presión de 50 psi abs, fluye dentro de un conducto de ventilación de 10 pulg de diámetro, a una velocidad media de 30 pies/s. Calcule el flujo másico.

Ejercicio 4.11.7. (Streeter et al., 2000, p. 112).

En un flujo bidimensional alrededor de un cilindro, las líneas de corriente se encuentran separadas 2 pulg, a una distancia del cilindro donde la velocidad es de 100 pies/s. En un punto cerca al cilindro, las líneas de corriente se encuentran separadas 1,5 pulg; ¿Cuál es la velocidad promedio en este sitio? Suponer caudal constante entre dos líneas de corriente. Seleccione la respuesta:

- (a) 75 pies/s.
- (b) 133 pies/s.
- (c) 150 pies/s.
- (d) 200 pies/s.
- (e) 300 pies/s.

4.12 Flujo potencial

Un **campo potencial** es aquel en el que existe una función (fi) $\phi(x,y,z)$ de tal manera que el vector velocidad (\vec{v}) sea igual al producto punto entre el operador nabla ($\vec{\nabla}$) y la función escalar ϕ (Gastón, 1988), (Niño y Duarte, 2007, p. 3).

La presencia de un flujo irrotacional ($\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$) implica la existencia de un **potencial de velocidades**. En el caso de flujo con potencial se restringe prácticamente al flujo ideal o perfecto, esto es, aquel que se comporta como incompresible y no viscoso. **El concepto de potencial es básicamente una cantidad matemática abstracta y, consecuentemente, no tiene un significado físico inherente** (Gastón, 1988). En el flujo de fluidos el potencial se denota con la letra ϕ (fi).

Para plasmar el concepto de flujo con potencial en la realidad, se resalta lo siguiente: usualmente, el análisis de un proceso físico que involucre **flujo** requiere la identificación de un **gradiente potencial**, y se puede presentar en varias áreas del conocimiento. Por ejemplo, es bien sabido que el calor fluye a través de sólidos desde alta hacia más baja temperatura. Asimismo, la corriente eléctrica fluye a través de circuitos eléctricos de alto a más bajo voltaje. Para estos procesos, la temperatura y el voltaje son cantidades potenciales y las velocidades o los ritmos de flujo de calor y de electricidad son proporcionales a estos gradientes potenciales. En el estudio **de gravedad entre masas**, el valor de la **gravedad** “g” se toma como el potencial. En Mecánica de Fluidos el ejemplo más relevante es el gradiente potencial, correspondiente a las alturas piezométricas, que controla el flujo laminar de agua a través de un medio poroso (Gastón, 1988).

Uno de los usos del **flujo potencial** es el estudio del flujo mediante las **redes de flujo**, para ello es necesario conocer la relación entre la **función de corriente** ψ (Psi) (x,y) y la **función de potencial** ϕ (fi) (x,y,z) (Gastón, 1988), (Streeter et al., 2000), (Sotelo, 2005), (Niño y Duarte, 2006).

4.12.1 Función potencial

Matemáticamente, el flujo potencial se define como:

$$\vec{V} = \nabla \cdot \phi = \text{grad}(\phi) \quad (4.79)$$

$$\vec{V} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k} \quad (4.80)$$

Como el vector velocidad (\vec{v}) es dado como:

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} \quad (4.81)$$

Entonces, se pueden obtener las ecuaciones paramétricas para la velocidad (Gastón, 1988), (Sotelo, 2005).

$$V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}; V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}; V_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (4.82)$$

Un caso típico de flujo con potencial es cuando se analiza el flujo a través de una muestra porosa, como lo ilustra la **Figura 4-30**; en este caso, es posible determinar el potencial de velocidades (Gastón, 1988).

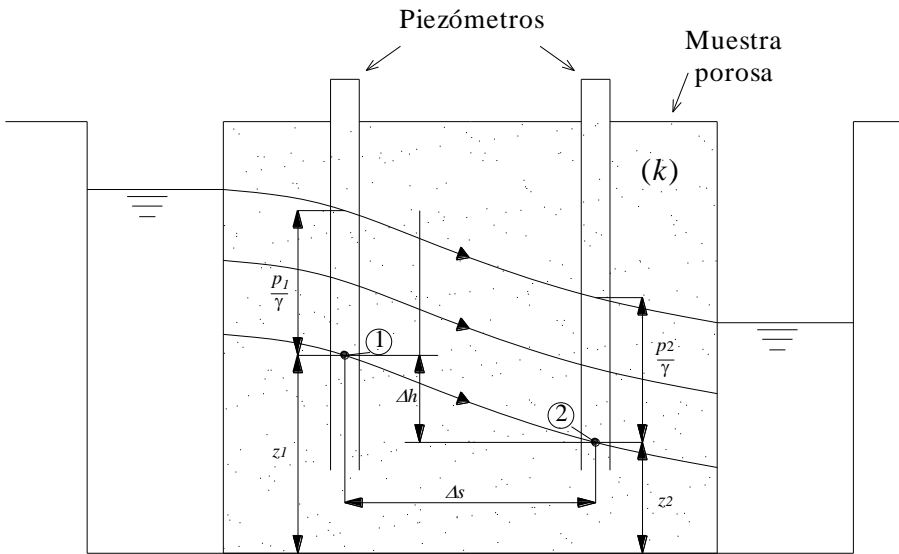


Figura 4-30.- Flujo a través de una muestra permeable.

Los niveles de agua en los piezómetros ascienden hasta el nivel freático. Darcy demostró que la velocidad media en el medio poroso es $V = -k (\Delta h / \Delta s)$, donde k es el coeficiente de permeabilidad, dado en cm/s; Δs es la distancia recorrida entre los puntos 1 y 2; Δh es la diferencia de

alturas entre los puntos 1 y 2; el signo negativo (-) indica que el nivel Δh desciende a medida que Δs se incrementa.

Si se establece la relación de la función potencial con la velocidad, para cada dirección se tiene:

$$V_x = -k_x \frac{\partial h}{\partial x}; V_y = -k_y \frac{\partial h}{\partial y}; V_z = -k_z \frac{\partial h}{\partial z} \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -k_x \frac{\partial h}{\partial x}; \frac{\partial \phi}{\partial y} = -k_y \frac{\partial h}{\partial y}; \frac{\partial \phi}{\partial z} = -k_z \frac{\partial h}{\partial z} \quad (4.84)$$

$$\partial \phi = -k_x \partial h; \partial \phi = -k_y \partial h; \partial \phi = -k_z \partial h \quad (4.85)$$

Asumiendo las constantes de integración como cero.

$$\phi = -k_x h; \phi = -k_y h; \phi = -k_z h \quad (4.86)$$

El valor único de ϕ está dado por la combinación de las tres ecuaciones sin repetir términos.

$$\phi = -k_x h - k_y h - k_z h = -(k_x + k_y + k_z) h \quad (4.87)$$

Si el medio poroso es homogéneo e isotrópico entonces, a partir de los valores de k_x , k_y y k_z , se toma el valor medio, en las tres direcciones, y se obtiene que el potencial de velocidades para medio poroso está dado como:

$$\phi = -kh \quad (4.88)$$

4.12.2 Condiciones que debe satisfacer el flujo con potencial

El flujo con potencial debe cumplir las siguientes condiciones:

- Condición de Cauchy-Reamann.
- La ecuación de Laplace. Fluido incompresible (flujo solenoidal), la divergencia del vector velocidad debe ser cero, $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$.

- Flujo irrotacional, $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$.
- Fluido ideal (no viscoso).
- Movimiento bidimensional; aunque es válida para tres dimensiones, en estudio de redes de flujo se considera en 2D.

A continuación se amplían los conceptos de estas condiciones.

4.12.3 Condiciones de Cauchy-Reamann

Dichas condiciones establecen que las líneas equipotenciales ϕ ($\phi = \text{constante}$) y las líneas de corriente ($\psi = \text{constante}$), deben ser ortogonales en los puntos de corte. Como se observa en la **Figura 4-31**, en la cual se describen las líneas de corriente y equipotenciales en el cambio brusco en la frontera.

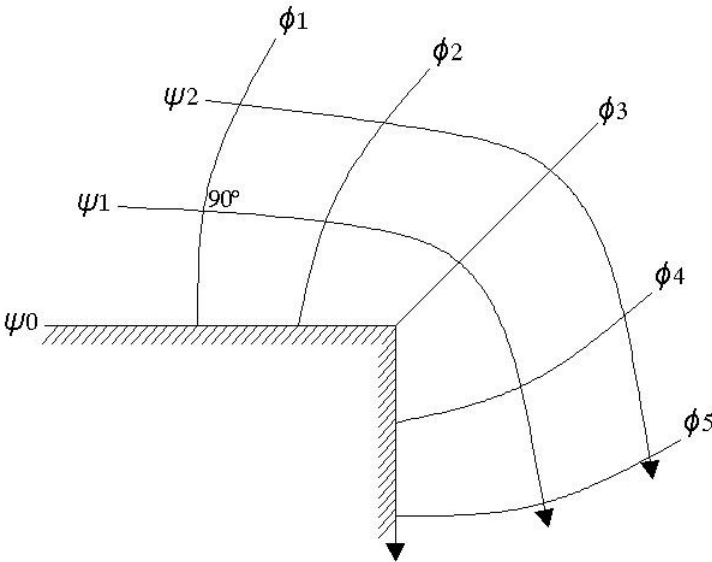


Figura 4-31.- Línea de corriente y potenciales ortogonales entre sí.

Fuente: Adaptada de (Sotelo, 2005, p. 417).

El conjunto de líneas formadas con (ϕ, ψ) , que se intersecan unas con otras formando siempre un ángulo recto, genera una malla llamada **red de flujo**. Por ejemplo, el flujo que sucede bajo una presa o un dique, como se puede observar en la **Figura 4-32**.

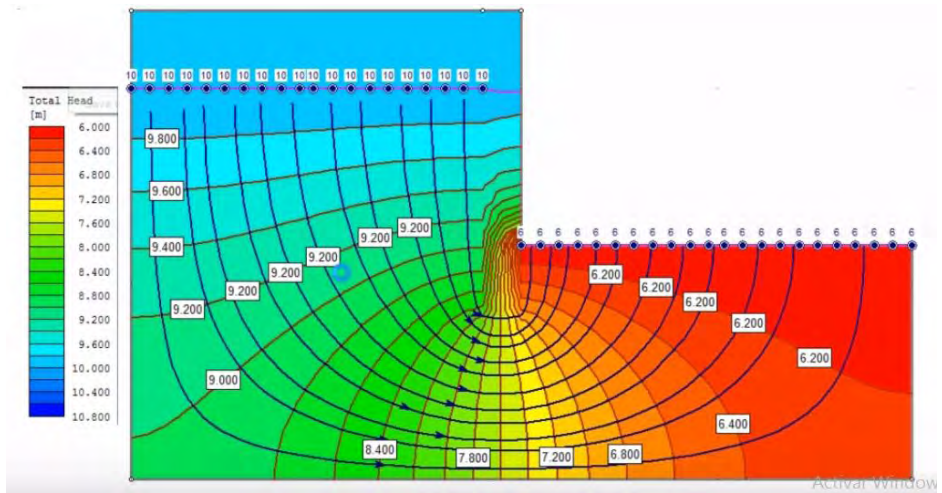


Figura 4-32.- Línea de corriente y potenciales bajo una presa (realizada con el software SLIDE mediante solución numérica con elementos finitos).

Fuente: (Bernal, 2017).

4.12.4 Ecuación de Laplace

Debe cumplir con la ecuación de Laplace. Partiendo de la ecuación de continuidad para un fluido incompresible en movimiento permanente, que es la divergencia de \vec{V} , $\text{div}(\vec{V}) = \nabla \cdot \vec{V}$, se tiene:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \left[\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right] [V_x i + V_y j + V_z k] \quad (4.89)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (4.90)$$

Sustituyendo los valores de la velocidad en función de ϕ , se tiene:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.91)$$

Por lo tanto, el flujo potencial en estado permanente e incompresible cumple con la *ecuación de Laplace*, por lo que se considera que ϕ es

armónica. Si se conocen las condiciones de frontera, se puede encontrar soluciones prácticas para problemas de ingeniería (Niño y Duarte, 2007, pp. 3–21).

Tal como lo expresan Darby y Chhabra, (2001, p. 398), la solución de la ecuación de Laplace, junto con las condiciones de contorno adecuadas, determina la distribución de potencial (por ejemplo, la presión) dentro del medio. Las derivadas de este potencial luego determinan la distribución de velocidades en el medio. Por tanto, la *ecuación de Laplace* gobierna el flujo tridimensional (potencial) de un fluido no viscoso.

4.12.5 Flujo irrotacional

El flujo potencial debe cumplir que sea irrotacional. Para el caso bidimensional (x, y) se tiene:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.92)$$

4.12.6 Condición de flujo ideal

El concepto de flujo ideal se expresa como sigue:

El movimiento de los fluidos perfectos (no viscosos) se describe mediante la ecuación de Euler $du/dt = g - \nabla p/\rho$. Este tipo de flujos es muy importante, pues en muchas situaciones de interés práctico, los efectos de la viscosidad de los fluidos reales quedan limitados a las regiones del espacio (muchas veces pequeñas) donde tienen lugar fuertes gradientes de la velocidad (capas límite, o regiones donde el flujo es turbulento), mientras que en la mayor parte del flujo los efectos de la viscosidad son despreciables y el fluido se puede suponer ideal (Gratton, 2002, p.79).

4.12.7 Condición de flujo bidimensional

A pesar de que la función potencial se puede expresar en tres dimensiones, la función de corriente es una función escalar que sólo se puede aplicar a flujos bidimensionales (Niño y Duarte, 2007).

Muchos flujos de interés son esencialmente bidimensionales, es decir, una de las tres coordenadas espaciales se puede despreciar y la correspondiente componente de la velocidad es nula (o una constante). Los flujos planos y los flujos con simetría axial son ejemplos de esta clase de flujos. Al considerar los flujos planos, es habitual elegir z como la coordenada a ignorar, de modo que se puede suponer que la velocidad en dirección del eje z es cero y que el flujo se desarrolla en el plano (x, y) (Gratton, 2002, p.82).

4.12.8 Relación entre función de corriente y función potencial

Como se conoce la relación entre las velocidades y cada una de las funciones de corriente y potencial, es posible entonces establecer una relación entre ψ y ϕ .

De la función de corriente se obtiene:

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.93)$$

Por su parte, de la función de potencial:

$$V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}; V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (4.94)$$

Igualando velocidades se tiene:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (4.95)$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (4.96)$$

Las ecuaciones identificadas con los números (4.95) y (4.96), se conocen como las ecuaciones de **Cauchy – Reamann** (Niño y Duarte, 2006).

4.12.9 Solución para flujos con potencial

Para encontrar los valores de las líneas equipotenciales y las líneas de corriente, se solucionan simultáneamente las ecuaciones de Laplace, para flujo bidimensional, dadas como:

$$\nabla^2\phi = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (4.97)$$

$$\nabla^2\psi = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (4.98)$$

Para la solución existen varios métodos que se nombran a continuación:

4.12.10 Métodos analíticos

Entre los métodos analíticos se encuentran:

- Método de solución directa (Gastón, 1988, p. 167), (Sotelo, 2005, p. 440).
- Método de solución indirecta (Sotelo, 2005, p. 449).
- Superposición de flujos (Gastón, 1988, p. 177).
- Variable compleja (Gastón, 1988, p. 193).

4.12.11 Métodos numéricos

Entre los métodos numéricos se pueden mencionar:

- Diferencias finitas (Gastón, 1988, p. 157), (Sotelo, 2005, p. 424).
- Relajaciones (Gastón, 1988, p. 163), (Sotelo, 2005, p. 426).
- Matricial (Sotelo, 2005, p. 430).
- Elementos finitos (Sotelo, 2005, p. 431).

4.12.12 Método gráfico

Para aplicar este método, se debe conocer primero los contornos o fronteras del dominio (sistema) a estudiar. Se construyen una serie de líneas que describan la naturaleza del flujo, trazando primero las líneas de corriente y luego las equipotenciales, formando una malla, que debe cumplir con los siguientes requisitos:

- Las líneas de corriente y las equipotenciales, deberán ser ortogonales, y uniformemente espaciadas.
- Cada celda de la malla debe ser lo más cuadrada posible.
- Cada celda debe contener justamente un círculo inscrito con tangente en sus cuatro lados. (Gastón, 1988, p. 149), (Sotelo, 2005, p. 415).

4.12.13 Aplicación de los métodos de solución

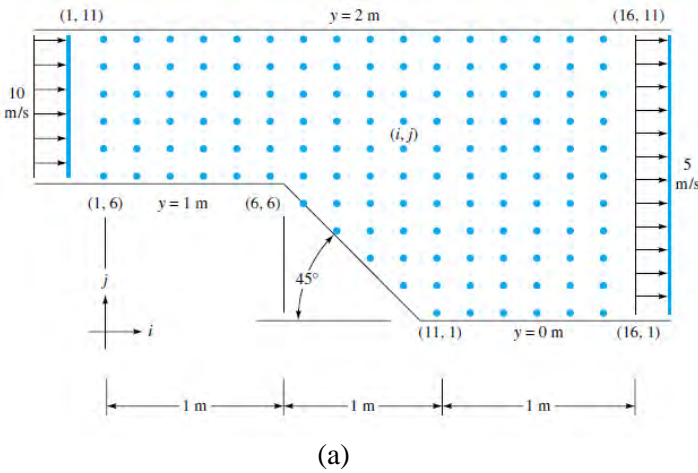
Ya que el alcance del presente texto, no incluye el abordaje de la solución del flujo con potencial, el desarrollo de dicha temática se presenta en textos altamente reconocidos, como Sotelo (2005), autor que dedica un capítulo completo al estudio de flujo con potencial en el que desarrolla, con amplios detalles, las soluciones de este flujo; adicionalmente, Gastón (1988) presenta en detalle los conceptos teóricos del flujo con potencial y propone varios métodos para su solución. Por su parte White (2004), presenta un estudio de caso para ilustrar el procedimiento de análisis por el método de diferencias finitas. Otro de los textos reconocidos es el de Shames (1995), el cual proporciona la metodología para solucionar la ecuación de Laplace por diferencias finitas con ejemplos prácticos.

Los autores, usando diferencias finitas con la herramienta Solver de Excel, han solucionado la ecuación de Laplace para las líneas de corriente, de la geometría que se presenta en la**(b)**

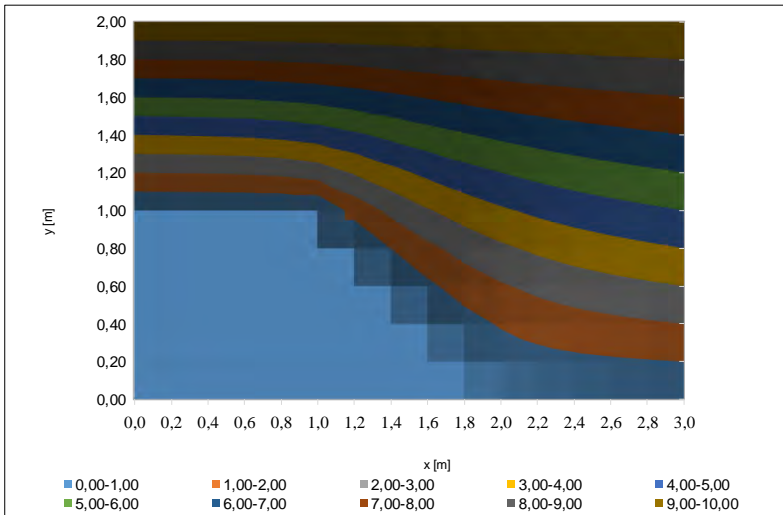
Figura 4-33a. En ésta, se tiene las condiciones de contorno, entrada, salida y geometría de las superficies sólidas. Luego, se divide el dominio contenido entre las fronteras, en pequeñas celdas, entre más pequeñas sean estas celdas, mayor será la precisión de las líneas de

corriente. Seguidamente, se aplica el método de diferencias finitas a cada celda, para obtener en cada coordenada (i,j) los valores de ψ , similar a un plano topográfico, se interpolan las líneas de corriente de igual valor, como si fueran curvas de nivel (x,y,h) , en este caso son (i,j,ψ) ; así se logró la red de flujo con las líneas de corriente que se muestra en la (b)

Figura 4-33b. Se procede con la misma metodología para encontrar las líneas equipotenciales.



(a)



(b)

Figura 4-33.- Geometría de la expansión. (a) Condiciones de contorno. Fuente: (White, 2004, p. 544). (b) Solución de las líneas de corriente usando Excel. Fuente: elaboración propia.

4.12.14 Ejemplos de potencial y función de corriente

Se presentan algunos ejemplos para complementar los conceptos teóricos de flujo con potencial y función de corriente.

Ejemplo 4.10. (Niño y Duarte, 2007, pp. 3–24).

La función de corriente de un flujo en dos dimensiones está dada por:

$$\psi = 9 + 6x - 4y + 7xy \quad (1)$$

Hallar la función de potencial ϕ de la velocidad para dicho flujo.

Solución:

Se parte de las ecuaciones de **Cauchy – Reamann**, que relacionan ϕ y ψ .

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -4 + 7x$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -4 + 7x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3)$$

$$\int \partial \phi = \int (-4 + 7x) \partial x$$

$$\phi = \left(-4x + \frac{7x^2}{2} \right) + f(y)$$

La constante de integración depende de y , toda vez que ϕ depende de y . Posteriormente, se debe encontrar el valor de $f(y)$, se utiliza la segunda igualdad de ϕ y ψ .

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-4x + \frac{7x^2}{2} + f(y) \right) = f'(y) \quad (4)$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = -6 - 7y \quad (5)$$

Sustituyendo en la igualdad:

$$f'(y) = \frac{df}{dy} = -6 - 7y; df = [-6 - 7y]dy; f(y) = -6y - \frac{7y^2}{2} + C \quad (6)$$

Al sustituir $f(y)$ en ϕ se obtiene:

$$\phi = \left(-4x + \frac{7x^2}{2} \right) - 6y - \frac{7y^2}{2} + C \quad (7)$$

$$\phi = -4x + \frac{7x^2}{2} - 6y - \frac{7y^2}{2} + C \quad (8)$$

Así se ha obtenido el valor de la función de potencial a partir de la función de corriente. La constante C se halla conociendo las condiciones de contorno.

Ejemplo 4.11. (Niño y Duarte, 2007, pp. 3–23)

Un campo de flujo se caracteriza por la función de corriente $\psi = xy$. ¿Es el flujo irrotacional?

Solución:

$$\bar{\nabla} \times \bar{V} = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{array} \right| \mathbf{k} = 0 \quad (1)$$

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial(xy)}{\partial y} = x \quad (2)$$

$$V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial(xy)}{\partial x} = -y \quad (3)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = |0 - 0| \mathbf{k} = 0 \mathbf{k} \quad (6)$$

Como el producto cruz es cero, entonces el flujo es irrotacional.

Ejemplo 4.12. (Niño y Duarte, 2007, pp. 3–24).

Un campo de flujo está dado por la función de corriente $\psi = 3x^2y - y^3$; verificar si el flujo es irrotacional y dibujar la línea de corriente para $\psi = 5$.

Solución:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left| \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right| \mathbf{k} = 0 \quad (1)$$

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2y - y^3)}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \quad (2)$$

$$V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial(3x^2y - y^3)}{\partial x} = -6xy \quad (3)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial x} = -6y \quad (4)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = -6y \quad (5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = |-6y - (-6y)| \mathbf{k} = 0 \quad (6)$$

Como el producto cruz es cero, entonces el flujo es irrotacional. Se dibuja la línea de corriente para $\psi = 5$, para lo cual se integra la ecuación:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \quad (7)$$

$$\psi = 3x^2y - 3\frac{y^3}{3} \quad (8)$$

Despejando x con $\psi = 5$.

$$(3x^2y - y^3) = 5 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{5 + y^3}{3y}} \quad (9)$$

Dando valores a y , se hallan los valores de x , y se dibuja en plano (x, y) , obteniéndose la curva que se presenta a continuación en la **Figura 4-34**.

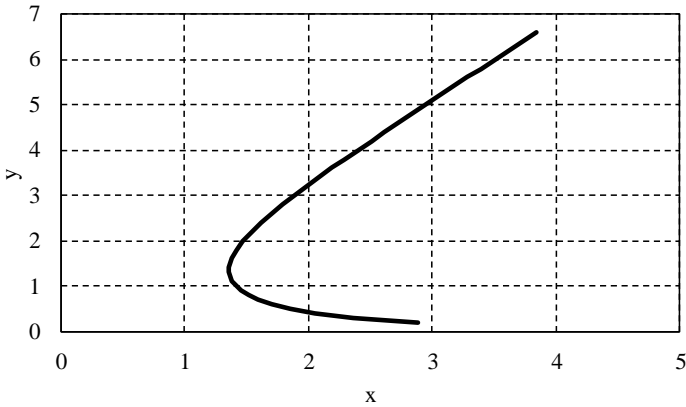


Figura 4-34.- Línea de corriente para función $\psi = 5$. Fuente: elaboración propia.

Dicha situación indica que la curva es la línea de corriente para ψ constante.

Ejemplo 4.13. (Tamburino, 2020). Dibujar la red de flujo resultante de considerar un flujo uniforme paralelo al eje x con velocidad $V_x = V_\alpha$ y sin velocidad en el eje y .

Solución:

Con base en lo anterior, la función de corriente está dada por:

$$V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = V_\alpha; V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Al integrar la primera ecuación, se tiene:

$$\phi(x, y) = V_\alpha x + C \quad (2)$$

La constante de integración es arbitraria, y por simplicidad se puede elegir $f = 0$ para $x = 0$. La línea de corriente estará dada por:

$$V_x = V_\alpha = \frac{\partial \psi}{\partial y}; V_y = 0 = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \Rightarrow \psi(x, y) = V_\alpha y \quad (3)$$

Para efectos de la solución del problema, se impuso que en $y = 0$, $V_y = 0$. La función f varía *solo* con el eje x , y la función ψ varía solo con el eje y . Si se otorga un valor a la velocidad $V_\alpha = 2$ m/s, se puede obtener una red de flujo como la que se ilustra a continuación en la **Figura 4-35**.

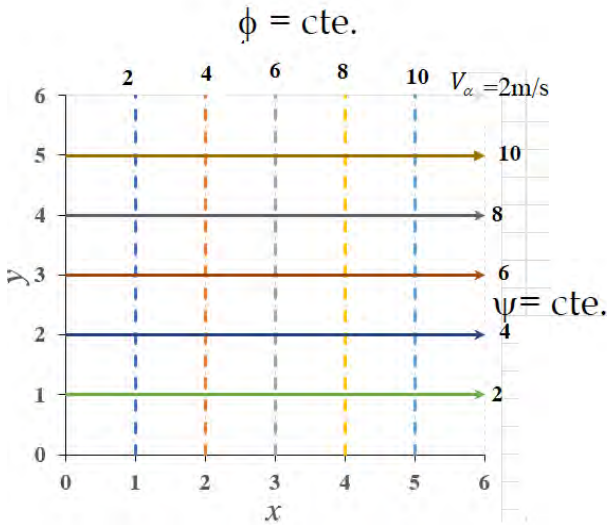


Figura 4-35.- Red de flujo para flujo uniforme y paralelo. Fuente: elaboración propia.

4.13 Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.17.1. Adaptado de (Niño y Duarte, 2006, pp. 3–25).

Dibujar la red de flujo para el siguiente campo de velocidades: $V_x = -U$ y $V_y = 0$, $V_z = 0$.

Ejercicio 4.17.2. Adaptado de (White, 2004, p. 241).

¿Existe una función de corriente para el campo de velocidades siguiente?. $u = c(x^2 - y^2)$, $v = -2cxy$, $w = 0$. Si es así, determínala, dibújela e interprétela.

Ejercicio 4.17.3. (Munson et al., 1990, p. 285).

La **Figura 4-36** ilustra el flujo bidimensional de un fluido incompresible no viscoso en la vecindad de la esquina a 90° , dicho flujo se encuentra descrito mediante la función de corriente $\psi(r, \theta) = 2r^2 \sin(2\theta)$, donde ψ está en unidades de m^2/s cuando (r) está en metros. Dibujar la red de flujo, suponer que la densidad del fluido es 10^3 kg/m^3 y el

plano $x - y$ es horizontal, es decir, no hay diferencia de elevación entre los puntos (1) y (2).

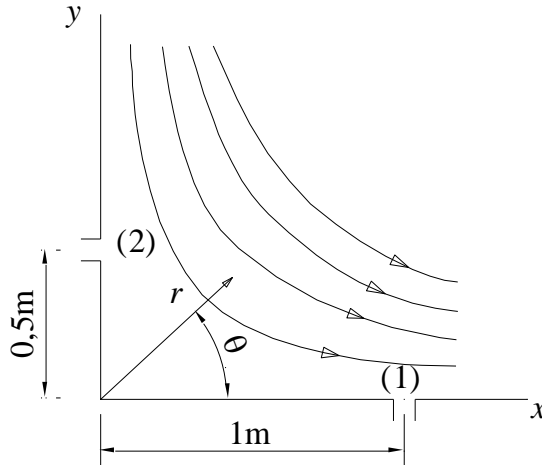


Figura 4-36.- Esquema de la geometría del flujo. Fuente: adaptado de (Munson et al., 1990, p. 285).

Ejercicio 4.17.4. (Munson et al., 1990, p. 298).

Dibujar las líneas de corriente y líneas equipotenciales alrededor del óvulo de Rankine, usando algún método matemático para su elaboración. Investigue la solución.

Ejercicio 4.17.5. (White, 2004, p. 257).

El fondo de un río tiene una protuberancia de 4 m de altura que se aproxima a un medio cuerpo del óvulo de Rankine, como se muestra en la **Figura 4-37**. La presión en el punto B en el fondo es de 130 kPa y la velocidad del río es de 2,5 m/s. Utilice la teoría de flujo con potencial para estimar la presión del agua en el punto A de la protuberancia, que está 2 m por encima del punto B. La temperatura del agua es de 20°C

Respuesta: 109200 Pa.

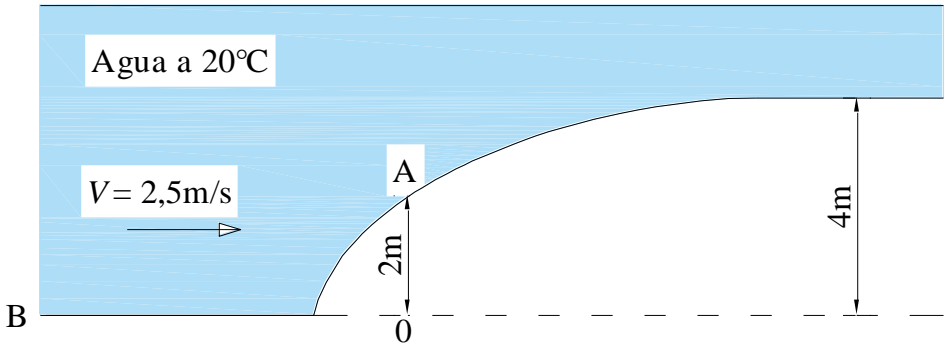


Figura 4-37.- Esquema de la geometría del río.

5. Capítulo 5: Ecuaciones Fundamentales de la Mecánica de Fluidos

5.1 Introducción

Las *Ecuaciones Fundamentales* son la formulación matemática de las Leyes Fundamentales, las cuales rigen el movimiento de un fluido. En la Mecánica de Fluidos se conocen tres ecuaciones fundamentales, como son:

- **Ecuación de conservación de masa (Ecuación de continuidad).**
- **Ecuación de conservación de energía.**
- **Ecuación de cantidad de movimiento.**

Donde la tercera se divide en cantidad de movimiento **lineal** y **angular**, quizá por ello White (2004, p. 129) menciona que son cuatro ecuaciones fundamentales.

La deducción de estas expresiones se puede realizar usando la **segunda ley de Newton**, el **teorema de transporte de Reynolds** para un enfoque de sistema o el **volumen de control**. Estas ecuaciones se consideran como parte de la **dinámica de fluidos**, la cual **trata del movimiento de sus partículas, considerando las fuerzas que actúan sobre las mismas** (Streeter et al., 2000), (Niño y Duarte, 2007), (Gastón, 1988). Para tal fin, en el presente texto se toma como base el libro de Shames (1995), que desde su primera edición utilizó la ecuación del transporte de Reynolds para la deducción eficiente de las leyes básicas.

Las ecuaciones fundamentales se deducen de las tres leyes básicas de conservación para cualquier medio continuo, las cuales son:

- Conservación de la materia (ecuación de conservación de la masa).
- Conservación de energía (ecuación de energía).
- Segunda ley de Newton (ecuaciones de cantidad de movimiento).

5.2 Sistema y volumen de control

En primera instancia, se procederá a realizar la definición de lo que es un sistema desde la óptica del presente texto.

5.2.1 Sistema

Las leyes básicas de conservación, así como los modelos de transporte, se aplican a un **sistema** (también llamado sistema cerrado), que se define como **una cantidad de materia de masa fija** (Çengel y Cimbala, 2006, p. 147). **El sistema** no es realmente el volumen en sí, sino el material dentro de una región definida (Darby y Chhabra, 2001, p. 148). Este concepto se ilustra en la Figura 5.1a.

5.2.2 El volumen de control

En la dinámica de fluidos es común que se trabaje con un **volumen de control** (VC) (también conocido como un **sistema abierto**), el cual se define como **una región en el espacio elegida para su estudio**; en un VC, se permite que la masa entre o salga a través de sus límites, los cuales se conocen como **superficies de control** (SC). Un volumen de control también puede moverse y deformarse durante un proceso, pero numerosas aplicaciones del mundo real se relacionan con volúmenes de control fijos e indeformables (Çengel y Cimbala, 2006, p. 148).

Se define también el VC no deformable (pues también existe VC deformable), como un volumen fijo en el espacio, relacionado a un sistema de ejes coordenados, que puede estar en movimiento, respecto a un sistema absoluto (Loayza, 2005).

En la **Figura 5.1b** se ilustra el esquema de un VC de una tobera, donde la línea punteada es la SC, que rodea o limita el VC, la SC cercana a las paredes es frontera real y la que corresponde a la entrada y a la salida es frontera imaginaria. Un VC puede tener más de una entrada y salida.

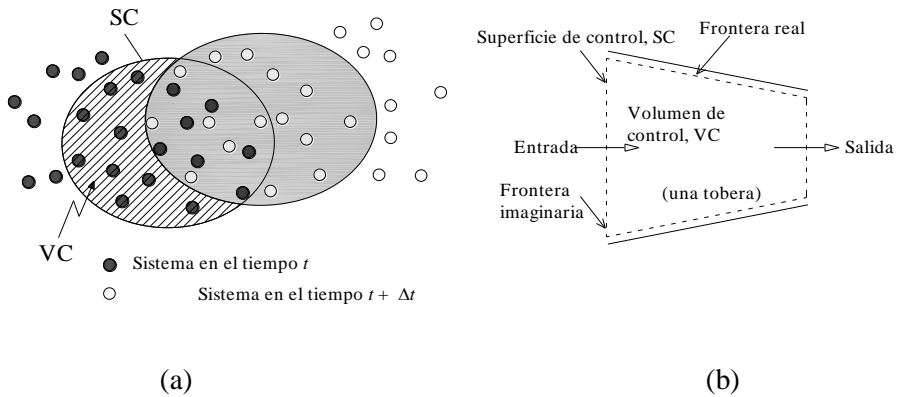


Figura 5-1.- Ejemplo gráfico de un volumen de control. (a) Sistema y volumen de control. (b) Volumen de control.

5.3 Teorema del transporte de Reynolds

Para deducir este teorema, siguiendo a Chereque (1987), se emplea el método de Euler, que consiste en lo siguiente:

- Adoptar una porción fija del espacio dentro del interior de un fluido de forma y tamaño constantes. Esta porción de espacio se llama **volumen de control** y su delimitación se llama **superficie de control**.
- Escoger una porción de masa fluida de modo que en un instante dado coincida con el volumen de control. Esta porción de masa se llama **sistema** y su delimitación se llama **contorno**.
- Considerar la coincidencia en un instante t , luego el sistema desplazado en un dt y aplicarle los principios de la mecánica a dicho sistema.

La **cantidad** y la **identidad** de la materia en el VC puede cambiar con el tiempo, pero la forma de volumen de control permanece fija. El VC, por ser una región finita del espacio está estrechamente relacionada con el punto de vista **euleriano** (Shames, 1995).

El volumen de control permite estudiar los cambios en el tiempo que presentan las propiedades. Dichas propiedades pueden ser **extensivas** e

intensivas, las primeras cuya medida depende de la cantidad de sustancia presente, y las segundas son aquellas propiedades cuya medida es independiente de la cantidad de sustancia presente medida en cantidad de masa. Entre las propiedades **extensivas**, que se denotan por la letra (N), están el momentum (o cantidad de movimiento), el volumen y la energía. Las **propiedades intensivas** se definen como las **propiedades extensivas** por unidad de masa (m) y se denotan con la letra griega *eta* (η); así se tendrá volumen por unidad de masa, energía por unidad de masa, momentum por unidad de masa (Shames, 1995), (Niño y Duarte, 2007), (Munson et al., 1990) y (Streeter et al., 2000). Las dos propiedades se relacionan con la siguiente expresión:

$$N = \int \eta dm = \int \eta \rho d\forall \tag{5.1}$$

Donde N representa la propiedad extensiva y η es la propiedad intensiva; ρ es la densidad, dm es el diferencial de masa y $d\forall$ es el diferencial de volumen.

Usando el volumen de control, se puede analizar las características y propiedades del flujo. Siguiendo lo expuesto por (Munson et al., 1990), (Çengel y Cimbala, 2006) y (Streeter et al., 2000), y con base en la Figura 5-2, se tiene:

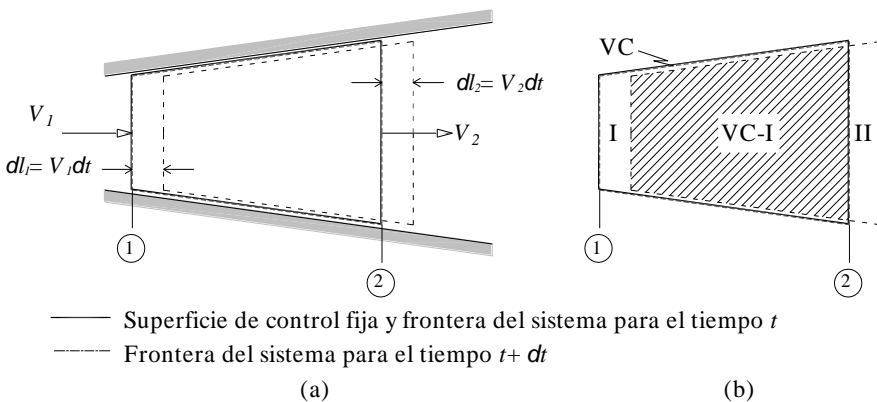


Figura 5-2.- Sistema con volumen de control. (a) Diagrama del sistema de volumen de control. (b) Variación del volumen de control con el tiempo.

Fuente: Adaptado de (Munson et al., 1990, p. 170).

Es posible obtener fácilmente una versión simple del teorema de transporte de Reynolds que relaciona los conceptos del **sistema** con los conceptos de **volumen de control** para el flujo unidimensional a través de un volumen de control fijo, como la sección del conducto de área variable o expansión. Se considera que el **volumen de control** es el volumen estacionario dentro del conducto entre las secciones (1) y (2) como se indica en la **Figura 5-2a**. Para dicho caso particular, el sistema que se considera es el fluido que ocupa el volumen de control en algún momento inicial t . Poco tiempo después, correspondiente al momento $t+\delta t$, el sistema se desplazó ligeramente hacia la derecha. Las partículas de fluido que coincidieron con la sección (2) de la superficie de control en el tiempo t , se han movido una distancia $\delta l_2 = V_2 \delta t$ hacia la derecha, donde V_2 es la velocidad del fluido al pasar por la sección en mención. De manera similar, el fluido que inicialmente se encontraba en la sección (1) se ha movido una distancia $\delta l_1 = V_1 \delta t$ donde V_1 es la velocidad del fluido en dicha sección. Se supone que el fluido fluye a través de las secciones (1) y (2) en una dirección normal a tales superficies y V_1 y V_2 son constantes a través de las secciones (1) y (2).

Como se muestra en la **Figura 5-2b**, el flujo de salida desde el volumen de control a partir del tiempo t hasta $t+\delta t$ se denota como volumen II, el flujo de entrada se denota como volumen I, y el volumen de control como VC. Por lo tanto, el sistema en el tiempo t consiste en el fluido en la sección VC; es decir, “sis = VC”, (sis=sistema), en el tiempo t . En el tiempo $t+\delta t$ el sistema consiste en el mismo fluido que ahora ocupa secciones (VC-I)+II; es decir, “sis = VC- I+ II”, en el tiempo $t+\delta t$. El volumen de control permanece como sección VC por todo el tiempo.

Lo comentado en el anterior párrafo se escribe matemáticamente analizando el valor que toma la propiedad extensiva en un tiempo t y en un tiempo $t+\delta t$.

Para tiempo t .

En este instante el fluido dentro del volumen de control coincide con el sistema.

$$N_{sis} = N_{vc}(t) \quad (5.2)$$

Para tiempo $t+\delta t$.

El VC es el volumen inicial, del cual se “desprenden” los volúmenes I, VC-I. Para el tiempo $t+\delta t$ el VC está conformado por (área limitada con línea discontinua más oscura de la **Figura 5-2b**) (VC-I) +II. El volumen (VC-I) se entiende como el fluido que aún permanece dentro del VC para el tiempo t (o VC inicial) y los volúmenes I y II serán los que cambiaron de posición.

$$\begin{aligned}
 (N_{sis} = N_{VC} - N_I + N_{II})_{t+\delta t} \\
 N_{sis}(t + \delta t) = N_{VC}(t + \delta t) - N_I(t + \delta t) + N_{II}(t + \delta t)
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

Cuando se resta la ecuación (5.2) de la ecuación (5.3), que corresponde al cambio en la propiedad extensiva N en el sistema en el intervalo de tiempo δt , se obtiene el siguiente término:

$$N_{sis}(t + \delta t) - N_{sis}(t) = [N_{VC}(t + \delta t) - N_I(t + \delta t) + N_{II}(t + \delta t)] - [N_{VC}(t)]
 \tag{5.4}$$

Si se divide ambos términos entre δt , lo que corresponde a un diferencial de la propiedad extensiva N , por unidad de tiempo, se obtiene:

$$\frac{N_{sis}(t + \delta t) - N_{sis}(t)}{\delta t} = \frac{[N_{VC}(t + \delta t) - N_I(t + \delta t) + N_{II}(t + \delta t)] - [N_{VC}(t)]}{\delta t}
 \tag{5.5}$$

La forma de la ecuación anterior, es similar a la definición de derivada en **diferencias finitas** en el tiempo. Agrupando términos según N_{VC} , N_I y N_{II} se tiene:

$$\frac{N_{sis}(t + \delta t) - N_{sis}(t)}{\delta t} = \frac{N_{VC}(t + \delta t) - N_{VC}(t)}{\delta t} - \frac{N_I(t + \delta t)}{\delta t} + \frac{N_{II}(t + \delta t)}{\delta t}
 \tag{5.6}$$

.....(1).....(2).....(3).....(4)

El **Término (1)** de la ecuación anterior usando la definición de límite, cuando $\delta t \rightarrow 0$, representa la tasa de cambio de la propiedad extensiva

N , asociada con el sistema (una porción dada de fluido) a medida que avanza. Cuando δt se aproxima a cero, se convierte en una derivada, representada por DN_{sis}/Dt , también conocida como la **derivada material**, dado como:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{N_{sis}(t + \delta t) - N_{sis}(t)}{\delta t} = \frac{DN_{sis}}{Dt} \quad (5.7)$$

El **Término (2)** y tomando el límite cuando $\delta t \rightarrow 0$, se convierte en la derivada y corresponde a la tasa de cambio temporal de la propiedad extensiva N dentro del volumen de control, (que es la definición de derivada); reemplazando N se tiene:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{N_{vc}(t + \delta t) - N_{vc}(t)}{\delta t} = \frac{\partial N_{vc}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{vc} \eta \rho dV \right) \quad (5.8)$$

El **Tercer y cuarto términos** de la ecuación (5.6), corresponden al flujo de la propiedad extensiva N , que atraviesa la superficie de control SC (o también conocido como flujo neto de N a través de SC). Para superficies de control discretas N se la puede expresar en forma de sumatoria, que entra y que sale. En el límite $\delta t \rightarrow 0$, según Çengel y Cimbala (2006, p. 150), se puede demostrar que los términos (3) y (4), son iguales a:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{N_{II}(t + \delta t) - N_I(t + \delta t)}{\delta t} \right] = \oint_{SC} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (5.9)$$

Al reemplazar todos los términos anteriormente analizados en la ecuación (5.6), se obtiene:

$$\frac{DN_{sis}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{vc} \eta \rho dV \right) + \oint_{SC} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (5.10a)$$

Esta ecuación se denomina **teorema de transporte de Reynolds**, y es de gran importancia en la mecánica de fluidos. Según Gastón (1988, p. 69):

1) *el primer término del lado derecho de la Ec. (5.10a) es el cambio de la propiedad N dentro del volumen de control.*

2) *el segundo término del lado derecho es la tasa neta de la propiedad N a través de la superficie de control.* Es de recordar que el término $\vec{V} \cdot d\vec{A}$ se lo puede expresar introduciendo un vector unitario n siempre ortogonal a la superficie; por lo tanto, se tiene $\vec{V} \cdot d\vec{A} = \vec{V} \cdot \vec{n} dA$, que es el producto punto entre dos vectores.

El segundo término del lado derecho es una integral cerrada de superficie, o integral de un campo vectorial sobre una superficie cerrada. Por propiedad de las integrales de superficie, esta integral cerrada es igual a la suma de las integrales de superficie de cada una de las áreas que conforman la superficie cerrada, como se ilustra en la **Figura 5-3**.

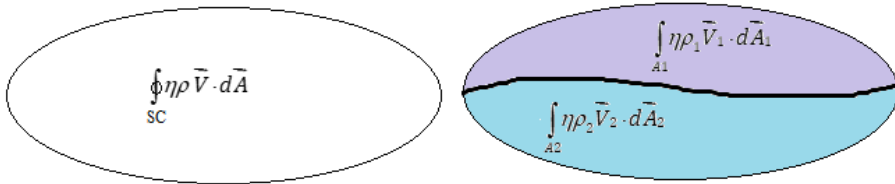


Figura 5-3.- Representación gráfica de la integral cerrada de superficie.

Fuente: elaboración propia.

Las áreas A_1, A_2, \dots, A_n son subregiones de SC que no se traslapan (Zill y Wright, 2011). De esta manera se obtiene la siguiente expresión.:

$$\oint_{SC} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \eta \rho_1 \vec{V}_1 \cdot d\vec{A}_1 + \int_{A_2} \eta \rho_2 \vec{V}_2 \cdot d\vec{A}_2 + \dots + \int_{A_n} \eta \rho_n \vec{V}_n \cdot d\vec{A}_n \quad (5.10b)$$

Si el vector de velocidad y el vector de área son paralelos, por propiedad del producto punto, la suma vectorial se convierte en una suma escalar con velocidad media V , por lo tanto los términos del lado derecho de esta última ecuación (5.10b), se pueden sustituir por una sumatoria -

Suma de Riemann- (Zill y Wright, 2011), mientras que la ecuación del teorema de transporte de Reynolds (5.10a), se expresa también como:

$$\frac{DN_{sis}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{vc} \eta \rho d\forall \right) + \sum_{sc} \eta \rho VA \quad (5.10c)$$

La interpretación física del teorema de transporte de Reynolds se encuentra planteada en Munson et al. (1990, p. 173). Por su parte, Çengel y Cimbala (2006, p. 147), proporcionan un concepto similar al desarrollado acá sobre el transporte de Reynolds y presentan una deducción alterna del teorema del transporte de Reynolds, mediante el uso del teorema de Leibnitz (Kundu, 1990).

Para flujo permanente el primer término de lado derecho de la ecuación (5.10c), se desprecia, y se presenta como:

$$\frac{DN_{sis}}{Dt} = \sum_{sc} \eta \rho VA \quad (5.10d)$$

5.4 Ecuación de conservación de la masa

Esta ecuación es también conocida como “Ecuación de continuidad” y, como ya se expuso anteriormente, se fundamenta en la ley de conservación de la masa. Para su deducción se utiliza el *teorema de transporte de Reynolds*. Se hacen las siguientes consideraciones (Shames, 1995):

1. La propiedad extensiva N corresponde a la masa de un sistema fluido (M).
2. La cantidad η o propiedad intensiva es igual a la unidad, ya que $\eta = M/M$.

Al realizar el reemplazo de $N = M$ y $\eta = 1$, se tiene:

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{vc} \rho d\forall \right) + \sum_{sc} \rho VA \quad (5.11)$$

Como la masa M de cualquier sistema es constante, el cambio de la masa con respecto al tiempo debe ser cero; es decir, $DM/Dt = 0$, la anterior ecuación se simplifica como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{vc} \rho dV \right) + \sum_{sc} \rho VA = 0 \quad (5.12)$$

.....(1).....(2)

Esta ecuación indica, **que la tasa neta de flujo de salida (Término 2) de masa a través de la superficie de control, es igual a la tasa de disminución de masa dentro del volumen de control (Término 1)**. En esta forma se tiene en cuenta la masa que entra o sale de cualquier volumen escogido en el flujo en cualquier instante. La ecuación (5.12) y sus formas simplificadas se conocen como **ecuaciones de continuidad** (Shames, 1995).

5.4.1 Simplificaciones a la ecuación de continuidad

- **Flujo Permanente**

Si el flujo es **permanente** con respecto a una referencia fija relacionada con el volumen de control, todas las propiedades del fluido, incluida la densidad, en cualquier posición fija de la referencia, deben permanecer constantes en el tiempo (Shames, 1995). Debido a que se está trabajando con volúmenes de control de forma fija, el término (1) de la anterior ecuación se anula, por lo tanto el término (2) puede escribirse como:

$$\sum_{sc} \rho VA = 0 \quad (5.13)$$

Por lo tanto, puede establecerse que **cualquier flujo permanente** en el que intervengan uno o varios fluidos debe satisfacer dicha ecuación (Shames, 1995). En las Ingenierías Civil, Sanitaria, Ambiental y de Producción Acuícola esta última ecuación es la más usada ya que la mayoría de los diseños hidráulicos se realizan con flujo permanente.

- **Flujo Incompresible**

Al considerar el caso de **flujo incompresible** se tiene como condición que interviene solamente una *especie única* de fluido en el volumen de control. En este caso ρ es constante en todos los puntos en el dominio y para todo tiempo, aun si el campo de velocidad es no permanente (Shames, 1995). En el término (2) de Ec. (5.12) se puede extraer la densidad ρ de la sumatoria, obteniéndose la siguiente expresión:

$$\sum_{SC} VA = 0 \tag{5.14}$$

Lo que implica que, para cualquier flujo incompresible en el que interviene sólo un fluido, la conservación de la masa se reduce a la conservación del volumen. Para efectos prácticos, el flujo que entra debe ser igual al flujo que sale de un volumen de control (Shames, 1995).

Para entender mejor el concepto, se plantea un caso citado por Shames (1995), en el que propone una situación bastante común: un fluido incompresible entra a algún aparato por una tubería y sale de éste por una segunda tubería, como se muestra esquemáticamente en la **Figura 5-4**.

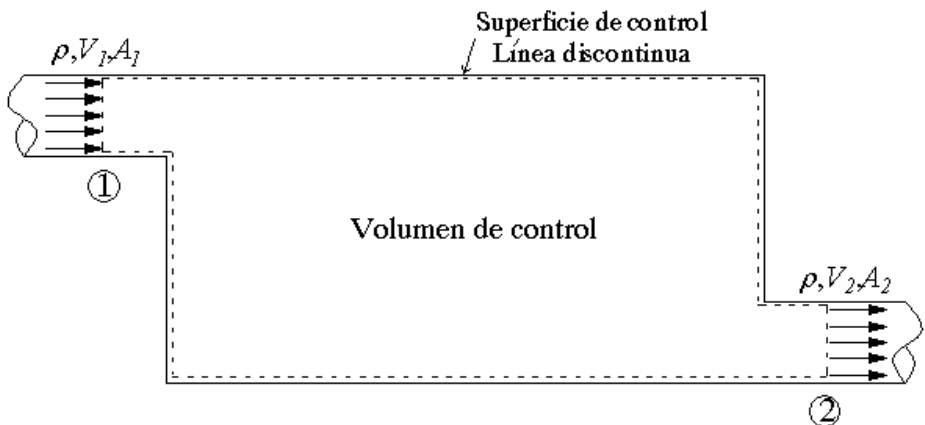


Figura 5-4.- Sistema con volumen de control de entrada y salida unidimensional. Fuente: adaptado de (Shames, 1995, p. 208).

La superficie de control escogida se indica mediante una línea discontinua. Se supone que el flujo es permanente con relación al volumen de control y que los flujos de entrada y de salida son **unidimensionales**. Aplicando la ecuación (5.14), se obtiene:

$$\sum_{SC} VA = (VA)_{salida} - (VA)_{entrada} = 0 \quad (5.15a)$$

$$(VA)_{entrada} = (VA)_{salida} \Rightarrow (Q)_{entrada} = (Q)_{salida} \quad (5.15b)$$

Retomando la definición de caudal, obsérvese que el término (VA) es el caudal volumétrico Q , el cual se considera constante en el flujo a través de un conducto. Por lo tanto, equivale a decir que el caudal que ingresa al VC, es igual al caudal que sale.

5.4.2 Ecuación diferencial de continuidad

Como lo manifiestan Niño y Duarte (2007), en algunos problemas de Mecánica de Fluidos e hidráulica es necesario estudiar el principio de continuidad en un punto. Según la **Figura 5-5**, se hace el planteamiento matemático para la derivación de la ecuación diferencial de continuidad, partiendo de un volumen de control de tamaño infinitesimal.

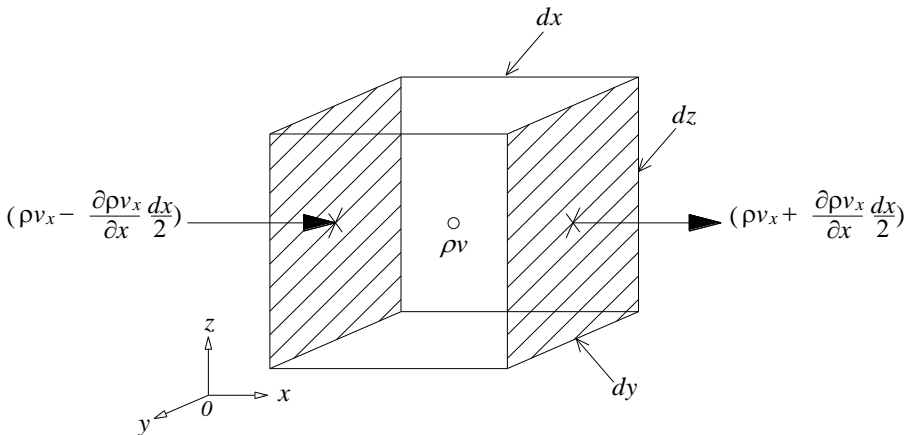


Figura 5-5.- Esquema del volumen infinitesimal para la derivación de la ecuación de continuidad. Fuente: Adaptada de (Sotelo, 2005, p. 115)

Con base al **principio de conservación de la masa**, el cual dice: **“La cantidad de masa que atraviesa la superficie de frontera del volumen en la unidad de tiempo, debe ser igual, a la rapidez de variación de la masa contenida en el volumen”** (Sotelo, 2005) es de notar que la definición cumple el teorema de transporte de Reynolds con masa constante en el sistema.

La **primera parte del principio de continuidad** está dado como:

La función $\rho\vec{V}$, se incrementa y decrementa en la misma cantidad, al pasar las caras del elemento, en el eje x , como:

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \tag{5.16}$$

Al sumar y restar, se tiene la cantidad neta de masa que atraviesa dichas caras.

$$\left(\rho v_x + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} \frac{dx}{2}\right)dA_x - \left(\rho v_x - \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} \frac{dx}{2}\right)dA_x = \left(\frac{\partial \rho v_x}{\partial x}\right)dx dA_x \tag{5.17}$$

Donde $dA_x = dz \cdot dy$ y ρ es la densidad. Si se realiza el mismo análisis para las otras dos dimensiones se tiene que:

$$\left(\rho v_y + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} \frac{dy}{2}\right)dA_y - \left(\rho v_y - \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} \frac{dy}{2}\right)dA_y = \left(\frac{\partial \rho v_y}{\partial y}\right)dy dA_y \tag{5.18}$$

$$\left(\rho v_z + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \frac{dz}{2}\right)dA_z - \left(\rho v_z - \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \frac{dz}{2}\right)dA_z = \left(\frac{\partial \rho v_z}{\partial z}\right)dz dA_z \tag{5.19}$$

Donde $dA_y = dx \cdot dz$, y $dA_z = dx \cdot dy$.

La **segunda parte del principio de continuidad** se expresa como:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial(\rho dx dy dz)}{\partial t} \tag{5.20}$$

Siendo m la masa. Igualando las ecuaciones (5.17), (5.18) y (5.19) a la ecuación (5.20), se obtiene la ecuación de continuidad diferencial.

$$\left(\frac{\partial \rho v_x}{\partial x}\right) dx dA_x + \left(\frac{\partial \rho v_y}{\partial y}\right) dy dA_y + \left(\frac{\partial \rho v_z}{\partial z}\right) dz dA_z + \frac{\partial(\rho dx dy dz)}{\partial t} = 0 \quad (5.21)$$

Como todos los términos están multiplicados por el diferencial de volumen $d\forall = dx \cdot dy \cdot dz$, se simplifica de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (5.22)$$

En forma vectorial se expresa como:

$$\nabla(\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (5.23)$$

$$\text{div}(\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (5.24)$$

Esta última es la ecuación diferencial de continuidad válida para un punto p cualquiera y para cualquier tipo de flujo, sea permanente, no permanente, compresible o incompresible. Para flujos permanentes e incompresibles, dicha ecuación se reduce a $\nabla \cdot v = 0$, lo que indica que la divergencia del vector velocidad es cero (Niño y Duarte, 2007).

5.4.3 Ecuación de continuidad para una vena líquida

Como en ingeniería gran parte de los flujos se mueven en una trayectoria formando una vena líquida, como se muestra en la **Figura 5-6**, lo que equivale a movimiento unidimensional, se toma uno de los ejes, por ejemplo, $x = s$, se tiene la ecuación de continuidad diferencial para dicha trayectoria. La vena líquida está conformada por tres superficies: la que la rodea; y dos secciones transversales, la anterior y la posterior, del elemento diferencial ds .

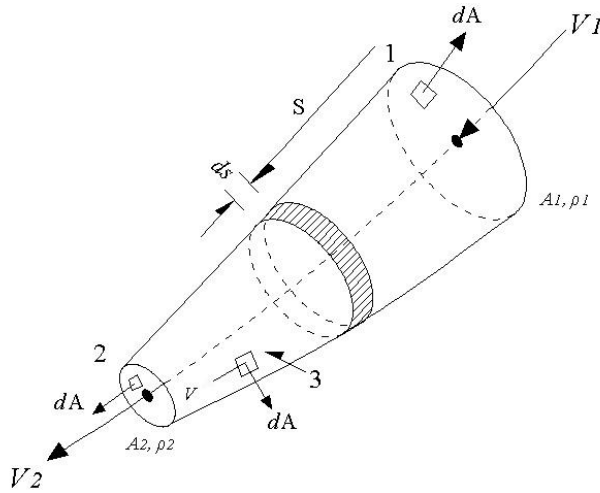


Figura 5-6.-Esquema de una vena líquida. Adaptada de (Sotelo, 2005, p. 118)

La cantidad neta de masa que atraviesa la superficie de frontera del volumen elemental en estudio, es:

$$(\rho V_s + \frac{\partial \rho V_s}{\partial s} \frac{ds}{2})A - (\rho V_s - \frac{\partial \rho V_s}{\partial s} \frac{ds}{2})A = \left(\frac{\partial \rho V_s}{\partial s} \right) dsA \tag{5.25}$$

Esto si se considera que el área A en las dos caras transversales es igual, considerando también que ds es muy pequeño.

La rapidez con que varía la masa dentro del volumen elemental, es:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial(\rho dsA)}{\partial t} \tag{5.26}$$

Reemplazando estos dos términos y aplicando el principio de conservación de la masa, se tiene que:

$$\left(\frac{\partial \rho V_s}{\partial s} \right) dsA + \frac{\partial(\rho dsA)}{\partial t} = 0 \tag{5.27}$$

En la mayoría de los problemas se acepta que el diferencial ds no varía con el tiempo y se lo puede excluir de la ecuación.

$$\left(\frac{\partial \rho V_s}{\partial s}\right)A + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} = 0 \quad (5.28)$$

Como (ρ, V_s, A) son funciones de $(t \text{ y } s)$, se desarrollan las derivadas parciales de la anterior ecuación:

$$\rho V_s \left(\frac{\partial A}{\partial s}\right) + \rho A \left(\frac{\partial V_s}{\partial s}\right) + A V_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right) + A \frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \rho \frac{\partial(A)}{\partial t} = 0 \quad (5.29)$$

Como $V_s = ds/dt$, se reemplaza dicha equivalencia en la ecuación (5.29) y se tiene:

$$\rho \frac{ds}{dt} \left(\frac{\partial A}{\partial s}\right) + \rho A \left(\frac{\partial V_s}{\partial s}\right) + A \frac{ds}{dt} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right) + A \frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \rho \frac{\partial(A)}{\partial t} = 0 \quad (5.30)$$

Agrupando términos según ρ y A , se tiene la siguiente expresión:

$$\rho A \left(\frac{\partial V_s}{\partial s}\right) + \rho \frac{ds}{dt} \left(\frac{\partial A}{\partial s}\right) + \rho \frac{\partial(A)}{\partial t} + A \frac{ds}{dt} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right) + A \frac{\partial(\rho)}{\partial t} = 0 \quad (5.31)$$

$$\rho A \left(\frac{\partial V_s}{\partial s}\right) + \rho \left[\frac{ds}{dt} \left(\frac{\partial A}{\partial s}\right) + \frac{\partial(A)}{\partial t} \right] + A \left[\frac{ds}{dt} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right) + \frac{\partial(\rho)}{\partial t} \right] = 0 \quad (5.32)$$

En donde el segundo término entre corchetes $[\]$ es la derivada total del área, y el tercer término entre corchetes corresponde a la derivada total de la densidad; haciendo el reemplazo:

$$\rho A \left(\frac{\partial V_s}{\partial s} \right) + \rho \left[\frac{dA}{dt} \right] + A \left[\frac{d\rho}{dt} \right] = 0 \quad (5.33)$$

Dividiendo la anterior ecuación por el producto ρA , se tiene finalmente:

$$\left(\frac{\partial V_s}{\partial s} \right) + \frac{1}{A} \left[\frac{dA}{dt} \right] + \frac{1}{\rho} \left[\frac{d\rho}{dt} \right] = 0 \quad (5.34)$$

Dicha expresión es la **ecuación diferencial** de continuidad para una vena líquida con flujo no permanente y compresible.

Al igual que para la ecuación diferencial de continuidad para un punto en el espacio, se pueden hacer algunas simplificaciones:

Para un flujo permanente el término con respecto al tiempo se anula, y se tiene:

$$\frac{\partial(\rho VA)}{\partial s} = 0 \quad (5.35)$$

Por lo tanto, para que se cumpla la igualdad, el argumento ρVA debe ser constante, $(\rho VA) = \text{Cte}$.

Para fluido **permanente e incompresible**, la densidad es constante y sale de la ecuación, se cumple que VA debe ser constante. Lo que significa es que el caudal que circula por una vena líquida es constante. Si se tienen dos secciones, una de entrada y otra de salida, se cumple que:

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad (5.36)$$

Para efectos prácticos en ingeniería, la ecuación (5.36), es la fórmula que se utiliza para solucionar gran cantidad de problemas de la hidráulica. En este sentido se llega a las mismas expresiones encontradas a partir del Teorema de Reynolds.

5.5 Ejemplos de aplicación

Ejemplo 5.1.

Flujo incompresible. Sotelo (2005, p. 169),

Por el interior de un conducto circular de 0,3 m de diámetro fluye agua con velocidades que siguen la distribución señalada en la **Figura 5-7**, según la ley $v = 0,0225 - r^2$ (en m/s). Determinar la velocidad media con que el agua sale por las tuberías de 0,05 m de diámetro.

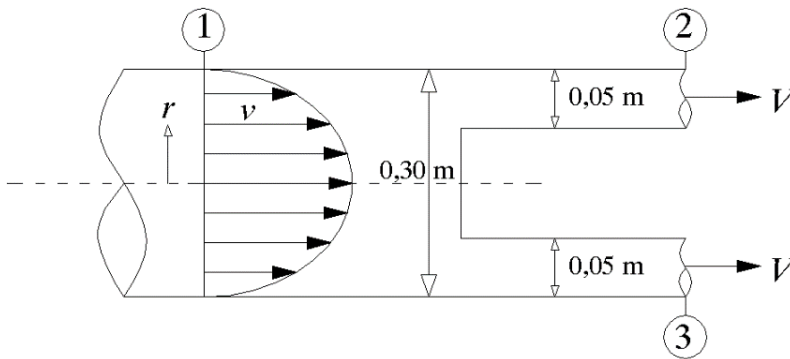


Figura 5-7.- Esquema del Ejemplo 5.1. Fuente: Adaptada de Sotelo (2005, p. 169).

Solución:

Se calcula el caudal, integrando para ello el perfil de velocidades en el área circular. Luego se aplica ecuación de continuidad entre la entrada y las dos salidas; finalmente, se despeja la velocidad en la salida.

Respuesta: $\bar{v} = 0,2024$ m/s.

- Se calcula la velocidad media en la sección de entrada (Sección 1).

$$\bar{V} = \frac{1}{A} \int_A v dA \quad (1)$$

- El diferencial de área dA , será igual a la longitud del círculo a un radio r , $2\pi r$; por su espesor dr , como se observa en la **Figura 5-8**. De este modo el $dA=2\pi r \cdot dr$

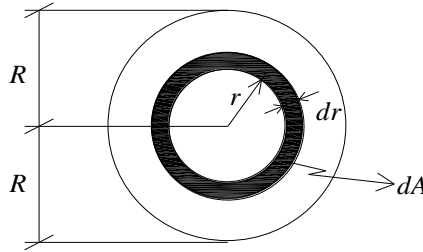


Figura 5-8.- Esquema del diferencial de área circular. Fuente: elaboración propia.

Por ejemplo, para entender la integral, si se integra este diferencial de área entre radio cero y radio R , se obtiene el área del círculo, dada como:

$$A = \int_A 2\pi r dr = \int_0^R 2\pi r dr = 2\pi \int_0^R r dr = 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2 \tag{1}$$

- Al reemplazar estos términos y solucionando la integral, se tiene:

$$\bar{V} = \frac{1}{A} \int_0^R (0,0225 - r^2) 2\pi r dr \tag{2}$$

$$\bar{V} = \frac{2\pi}{A} \int_0^R (0,0225r - r^3) dr \tag{3}$$

$$\bar{V} = \frac{2\pi}{A} \left[0,0225 \frac{r^2}{2} \Big|_0^R - \frac{r^4}{4} \Big|_0^R \right] \tag{4}$$

$$\bar{V} = \frac{2\pi}{A} \left[0,0225 \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right] \tag{8}$$

- Reemplazando los valores de $R = 0,15$ m y de $A = \pi R^2$,

$$\bar{V} = \left[0,0225 - \frac{R^2}{2} \right] = 0,01125 \text{ m/s} \quad (6)$$

- Aplicando ecuación de continuidad en la entrada y salida se tiene:

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 + V_3 A_3 \quad (7)$$

- Como el diámetro en ambas salidas es igual a 0,05 m, entonces $A_3 V_3 = A_2 V_2$.

$$Q = V_1 A_1 = 2V_2 A_2 \Rightarrow V_2 = \frac{V_1 A_1}{2A_2} \quad (8)$$

$$V_2 = \frac{V_1 D_1^2}{2 D_2^2} = \frac{0,01125 \text{ m/s} * 0,3 \text{ m}^2}{(0,05 \text{ m}^2)} = 0,2025 \text{ m/s} \quad (9)$$

Ejemplo 5.2: Sobre Flujo compresible. Gastón (1988, p. 71).

Un flujo de aire circula a través de una boquilla. Si se trata de un flujo permanente en proceso Isoentrópico (adiabático pero reversible), hallar la velocidad de salida para los siguientes datos: $p_1 = 100$ lb/in² (abs), $p_2 = 60$ lb/in² (abs), $D_1 = 3$ in, $D_2 = 1,5$ in, $\rho_1 = 0,05$ lbf/ft³, $V_1 = 100$ ft/s. (in = pulgada, lb= libra fuerza, ft = pie), según el esquema de la **Figura 5-9**.

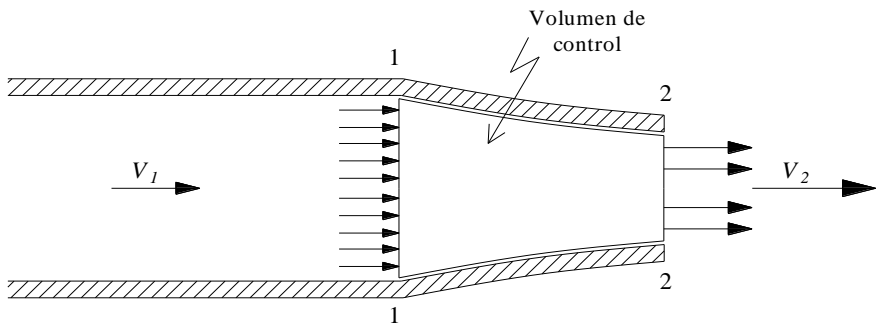


Figura 5-9.- Esquema del Ejemplo 5.2. Fuente: Adaptada de (Gastón, 1988, p. 71)

Solución:

Se plantea ecuación de proceso adiabático, como es aire se considera también flujo incompresible, donde la densidad no es constante.

- Ecuaciones para el proceso Isoentrópico:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \tag{1}$$

$$p_1 \nabla_1^k = p_2 \nabla_2^k \tag{2}$$

- Se transforma la ecuación (2) en densidad.

$$p_1 \left(\frac{m}{\rho_1} \right)^k = p_2 \left(\frac{m}{\rho_2} \right)^k \tag{3}$$

Como la masa es constante, entonces:

$$p_1 \left(\frac{1}{\rho_1} \right)^k = p_2 \left(\frac{1}{\rho_2} \right)^k \tag{3}$$

- Se despeja la relación de densidades \$\rho_1/\rho_2\$:

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/k} \quad (4)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{100\text{psi}}{60\text{psi}}\right)^{1/1.4} = 1,4403 \quad (5)$$

- Se plantea la ecuación de continuidad para flujo másico permanente y compresible Q_m .

$$Q_m = \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \quad (6)$$

- De despeja la velocidad V_2 .

$$V_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{A_1}{A_2} V_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{D_1^2}{D_2^2} V_1 = \quad (7)$$

$$V_2 = 1,4403 \left(\frac{3\text{in}}{1,5\text{in}}\right)^2 100\text{ft/s} = 576,13\text{ft/s}$$

En este sentido, se obtiene que la densidad del aire es diferente en la entrada con respecto a la salida y que, además, la velocidad a la salida es mucho mayor que en la entrada.

5.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.8.1. (Alberro et al., 2011, p. 70).

Por un conducto fluye aire; en su sección A, el diámetro es de 100 mm, la temperatura 15° C, la presión 3 kg/cm² y la velocidad es de 25 m/s; en la sección B, por su parte, el diámetro es de 200 mm, la temperatura -5 °C y la presión 1,5 kg/cm². Se pide calcular: **(a)** Velocidad en la sección B. **(b)** Caudal en peso o caudal másico.

Dato: Constante universal del aire = 287,14 m.N/kg K; se recomienda usar la ecuación de gases ideales.

Respuestas:

- a) $Q_m = 9,29 \text{ kg/s}$.
 b) $V_B = 9,25 \text{ m/s}$.

Ejercicio 5.8.2. (Alberro et al., 2011, p. 71).

Por la pieza en forma de **Y** que se muestra en la **Figura 5-10**, circula agua a 20°C ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$); El flujo másico (entrante) en la sección 1 es de 5300 N/s , y la velocidad en la sección 3 es de 5 m/s . Calcular: (a) Velocidad en la sección 1. (b) Flujo másico saliente en la sección 3. (c) Velocidad en la sección 3. (d) Flujo volumétrico en la sección 2, (Q_2).

Respuestas:

- (a) $V_1 = 3,4 \text{ m/s}$.
 (b) $Q_{m3} = 157,08 \text{ kg/s}$
 (c) $V_2 = 5,429 \text{ m/s}$
 (d) $Q_2 = 0,3838 \text{ m}^3/\text{s}$

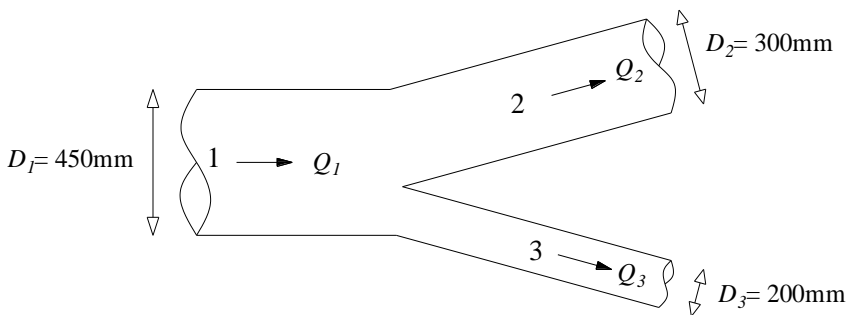


Figura 5-10.- Esquema del Ejercicio 5.8.2. Fuente: Adaptada de (Alberro et al., 2011, p. 70).

Ejercicio 5.8.3. (Alberro et al., 2011, p. 83).

En una sección de una tubería que conduce agua, la velocidad es $1,25 \text{ m/s}$ y su diámetro 50 cm ; el mismo flujo circula por otra sección de 60 cm de diámetro. Se pide calcular: (a) El caudal; (b) la velocidad en esta última sección.

Respuestas:

- (a) 246 L/s ;

(b) 0,87 m/s.

Ejercicio 5.8.4. (Alberro et al., 2011, p. 84).

Un flujo permanente de agua circula por el depósito de la **Figura 5-11**. La sección 1 tiene un diámetro de 75 mm y es atravesada por un caudal de 27 L/s. La sección 2 tiene un diámetro de 50 mm y la velocidad del flujo alcanza los 9 m/s. La sección 3 posee un diámetro de 25 mm. Se pide:

(a) Velocidad y (b) caudal, con su sentido, en la sección 3.

Respuestas:

(a) 19,1 m/s.

(b) 9,36 L/s.

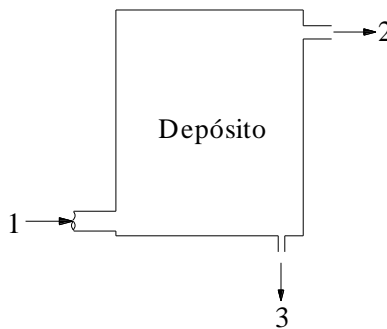


Figura 5-11.- Esquema del Ejercicio 5.4. Fuente: Adaptada de (Alberro et al., 2011, p. 84).

Ejercicio 5.8.5. (Çengel y Cimbala, 2006, p. 2018).

Se usa una manguera de jardín que tiene una boquilla para llenar una cubeta de 20 gal. El diámetro interior de la manguera es de 1 pulg. y se reduce hasta 0,5 pulg. a la salida de la boquilla. Si la velocidad promedio en la manguera es de 8 ft/s, determine: (a) los gastos, volumétrico y de masa, del agua que pasa por la manguera, (b) cuánto tardará en llenarse la cubeta con el agua y (c) la velocidad promedio del agua a la salida de la boquilla.

Ejercicio 5.8.6. (Çengel & Cimbala, 2006, p. 2018).

Entra aire de manera estacionaria a una tobera (boquilla) a $2,21 \text{ kg/m}^3$ y 30 m/s , y sale a $0,762 \text{ kg/m}^3$ y 180 m/s . Si el área de la entrada de la tobera es de 80 cm^2 , determine: **(a)** el flujo de masa que pasa por la tobera, **(b)** el área de salida de ésta.

Respuestas:

(a) $0,0530 \text{ kg/s}$.

(b) $38,7 \text{ cm}^2$.

Ejercicio 5.8.7. (Loayza, 2005, p. 100).

Se tiene un fluido cuyas partículas en movimiento están gobernadas por los siguientes campos: Campo escalar de densidades $\rho = 4xyzt$; y el campo vectorial de velocidades $\mathbf{v} = 6x/t \mathbf{i} - 13y/(4t)\mathbf{j} - 13z/(4t)\mathbf{k}$. Demostrar que cumple la ecuación de continuidad.

5.9 Ecuación de energía

La ecuación de energía es una ecuación escalar y toma en cuenta los cambios internos de energía y no las fuerzas totales ni condiciones externas. Para su deducción, se parte del principio de conservación de energía.

5.9.1 Deducción de la ecuación de energía

Para derivar la ecuación de energía, también conocida como **Ecuación de Bernoulli**, se puede recurrir a varios métodos:

- 1) aplicando la segunda ley de Newton a un elemento diferencial en una línea de corriente (Niño y Duarte, 2006).
- 2) Usando el teorema de transporte de Reynolds (Streeter et al., 2000), (Gastón, 1988).
- 3) Solucionando la ecuación de Navier–Stokes para una línea de corriente (Niño y Duarte, 2006), (Streeter et al., 2000).
- 4) Aplicando la primera Ley de la Termodinámica (Shames, 1995).

Para realizar el planteamiento matemático aplicando la segunda ley de Newton para la derivación de la **ecuación de Bernoulli**, se toma como base la **Figura 5-12**.

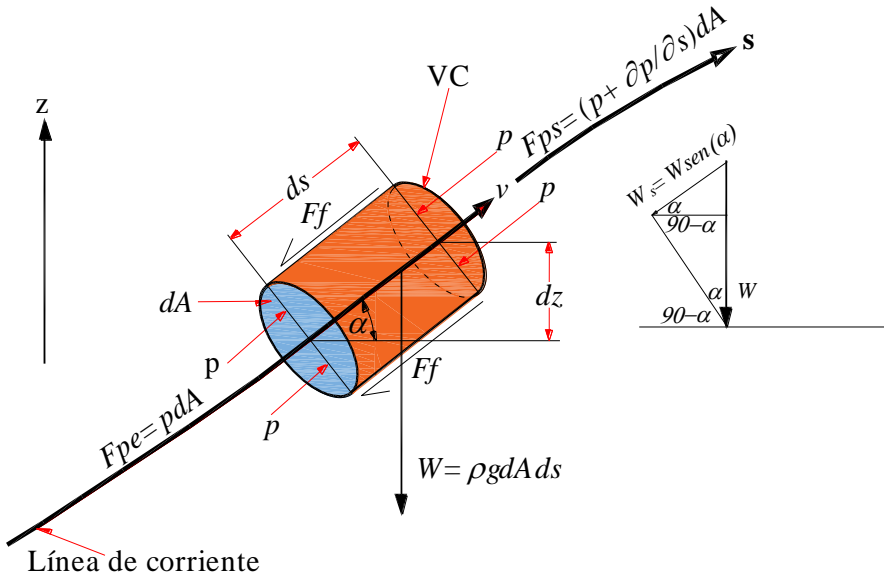


Figura 5-12.- Esquema del volumen de control para la derivación de la ecuación de energía. Fuente: Adaptada de (Nakayama et al., 1998, p. 58)

Con base en la segunda ley de Newton aplicada sobre un volumen de control, se tiene que sobre el volumen de control (VC) actúan tres fuerzas:

- Fuerzas debido a la presión en los extremos de entrada y salida, (F_{pe} , F_{ps})
- Fuerzas debido al peso del volumen de control por acción de la gravedad (g), (W)
- Fuerzas de fricción entre partículas vecinas a las fronteras del volumen de control (F_f)

Por la segunda Ley de Newton, se tiene que la sumatoria de fuerzas en la dirección s (F_s) es igual al diferencial de masa dm por la aceleración a :

$$\sum F_s = (dm)a \quad (5.37)$$

Para dicha ecuación, las fuerzas están dadas como:

$$F_{pe} = p dA, F_{ps} = \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds\right) dA, W = ds dA \gamma, dm = \rho dA ds \quad (5.38)$$

Donde p es la presión en la cara del elemento, dA el diferencial de área, ρ la densidad del fluido. Sustituyendo las fuerzas en la ecuación de la segunda ley de Newton, se tiene:

$$F_{pe} - F_{ps} - W \text{sen}(\alpha) - F_f = \rho dA ds (a) \quad (5.39)$$

La aceleración a es dada como el cambio de la velocidad dV con respecto al tiempo dt ; sustituyendo en la ecuación (5.3) se tiene que:

$$p dA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds\right) dA - \gamma ds dA \text{sen}(\alpha) - F_f = \rho (ds dA) (dV / dt) \quad (5.40)$$

Simplificando las presiones en el término de la izquierda se obtiene:

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right) (ds dA) - \gamma \text{sen}(\alpha) (ds dA) - F_f = \rho (ds dA) (dV / dt) \quad (5.41)$$

Dividiendo por el volumen $ds dA$, y sustituyendo la derivada parcial por la derivada total de la presión, por ser unidireccional en s , se tiene que:

$$-\frac{dp}{ds} - \gamma \text{sen}(\alpha) - \frac{F_f}{ds dA} = (\rho) (dV / dt) \quad (5.42)$$

Sustituyendo $\text{sen}(\alpha) = dz/ds$, y $\rho = \gamma/g$, la ecuación se expresa de la siguiente manera:

$$-\frac{dp}{ds} - \gamma \frac{dz}{ds} - \frac{F_f}{ds dA} = \left(\frac{\gamma}{g}\right) (dV / dt) \quad (5.43)$$

Multiplicando y dividiendo el término a la derecha por ds :

$$-\frac{dp}{ds} - \gamma \frac{dz}{ds} - \frac{Ff}{dsdA} = \left(\frac{\gamma}{g}\right) \frac{ds}{ds} \frac{dV}{dt} \quad (5.44)$$

Se obtiene la velocidad V , dada como $V = ds/dt$.

$$-\frac{dp}{ds} - \gamma \frac{dz}{ds} - \frac{Ff}{dsdA} = \left(\frac{\gamma}{g}\right) V \frac{dV}{ds} \quad (5.45)$$

Eliminando ds en el denominador de ambos lados de la ecuación, se tiene:

$$-dp - \gamma dz - \frac{Ff}{dA} - \left(\frac{\gamma}{g}\right) V dV = 0 \quad (5.46)$$

Dividiendo sobre el peso específico:

$$-\frac{dp}{\gamma} - dz - \frac{Ff}{\gamma dA} - \frac{V dV}{g} = 0 \quad (5.47)$$

Si se desprecia la fuerza de fricción Ff para un fluido ideal, sobre una línea de corriente, obsérvese que esta fuerza de fricción se convierte en energía por unidad de peso si se multiplica por ds/ds . De esta manera se obtiene la ecuación diferencial de **Bernoulli** o también conocida como ecuación de **Euler**.

$$\frac{dp}{\gamma} + dz + \frac{V dV}{g} = 0 \quad (5.48)$$

5.10 Solución de la ecuación de Euler

Esta ecuación se soluciona para un flujo compresible, por ejemplo, flujo de gases y aire; y para flujos incompresibles como flujo de agua, aceite, petróleo.

5.10.1 Flujo compresible

Para la solución, se debe tener en cuenta el proceso térmico imperante, por ejemplo, para el caso de un proceso **isotérmico** se cumple:

$$\begin{aligned}
 p_1 \nabla_1 &= p_2 \nabla_2 \\
 p_1 \frac{m}{\rho_1} &= p_2 \frac{m}{\rho_2} \\
 \frac{p_1}{\rho_1} &= \frac{p_2}{\rho_2} \\
 \frac{p_1}{g\rho_1} &= \frac{p_2}{g\rho_2} \\
 \frac{p_1}{\gamma_1} &= \frac{p_2}{\gamma_2}
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

En las Ecuaciones (5.49), ∇ es el volumen, m es la masa, p es la presión del gas, g es la gravedad, ρ es la densidad del gas y γ es el peso específico del gas. Como volumen es igual a masa sobre densidad, con masa constante se obtiene:

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_2}{\rho_2} \tag{5.50}$$

Si se divide por la gravedad, ambos términos de la anterior ecuación, se tiene:

$$\frac{p_1}{\gamma_1} = \frac{p_2}{\gamma_2} \tag{5.51}$$

Asumiendo el estado final (correspondiente al subíndice 2) como la incógnita, se obtiene:

$$\frac{p_1}{\gamma_1} \frac{1}{p} = \frac{1}{\gamma} \tag{5.52}$$

Luego, reemplazando el peso específico en la ecuación de Euler:

$$\frac{p_1}{\gamma_1} \frac{dp}{p} + dz + \frac{VdV}{g} = 0 \quad (5.53)$$

Finalmente, integrando entre los puntos (1 y 2), se tiene:

$$\frac{p_1}{\gamma_1} \int_1^2 \frac{dp}{p} + \int_1^2 dz + \int_1^2 \frac{VdV}{g} = 0 \quad (5.54)$$

$$\frac{p_1}{\gamma_1} \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + (z_2 - z_1) + \frac{1}{2g}(V_2^2 - V_1^2) = 0 \quad (5.55)$$

Se puede obtener expresiones similares para los demás procesos térmicos. Se propone como ejercicio para el lector, la deducción de expresiones para los procesos: isoentrópico y adiabático.

5.10.2 Flujo incompresible

Para el flujo incompresible, integrando la ecuación de Euler se tiene:

$$\frac{dp}{\gamma} + dz + \frac{VdV}{g} = 0 \Rightarrow \int_1^2 \frac{dp}{\gamma} + \int_1^2 dz + \int_1^2 \frac{VdV}{g} = 0 \quad (5.56)$$

$$\left(\frac{p_2 - p_1}{\gamma}\right) + (z_2 - z_1) + \frac{1}{2g}(V_2^2 - V_1^2) = 0 \quad (5.57)$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} = Cte \quad (5.58)$$

Cabe tener en cuenta que V se considera como una velocidad media. Ello indica que la energía de un flujo ideal es igual entre dos puntos dentro del mismo. La ecuación representa la energía del flujo por unidad de peso válida para una línea de corriente. A lo largo de

cualquier línea de corriente, la suma de la altura cinética ($V^2/2g$), piezométrica (p/γ) y potencial (z) es constante. La ecuación identificada con el número (5.58) es conocida como **Ecuación de Bernoulli**.

5.11 Significado de los términos de la ecuación de energía

La interpretación de cada uno de los términos de la ecuación de Bernoulli, es presentada en varios libros de Mecánica de Fluidos; tales conceptos se pueden consultar en textos como Chereque (1987), Loayza (2005) y Niño y Duarte (2006).

- **Término z** : Energía potencial del fluido por unidad de peso medida a partir de un nivel arbitrario llamado plano de referencia o datum.
- **Término $V^2/2g$** : Energía cinética del fluido por unidad de peso o carga de velocidad.
- **Término p/γ** : Energía de presión del fluido por unidad de peso.

Estos términos se representan gráficamente a continuación en la **Figura 5-13**.

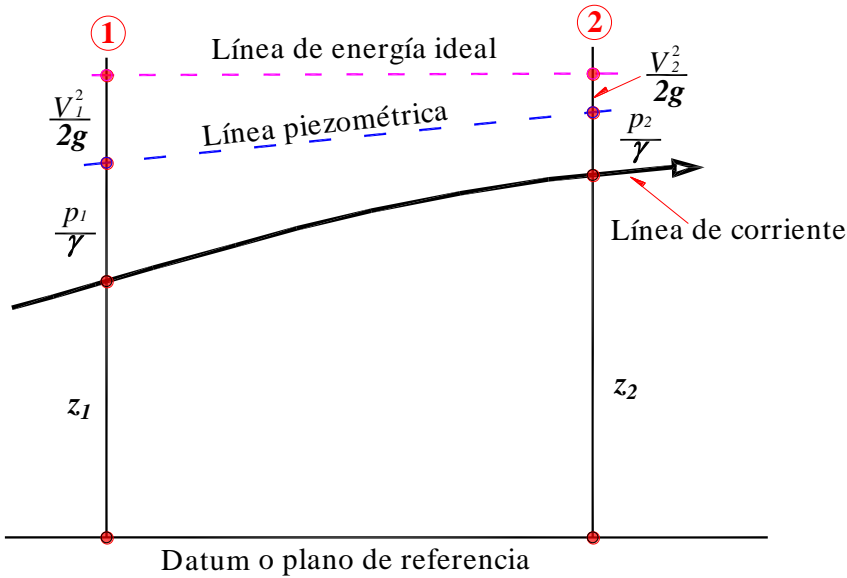


Figura 5-13.- Representación gráfica de la ecuación de Bernoulli sin pérdidas.

En realidad, lo que interesa son las diferencias de energía por unidad de peso entre dos puntos, de tal manera que no importa la ubicación del plano de referencia, ni tampoco el origen de medición de las presiones (Chereque, 1987). A continuación se demuestra que cada término se expresa como energía por unidad de peso (Niño y Duarte, 2006).

5.11.1 Término (z)

Este término es una cota, o sea la distancia vertical de un cuerpo con relación a un plano de referencia (PR). Si se considera que el cuerpo tiene una masa M y un peso W por su localización respecto al PR, este cuerpo puede desarrollar un trabajo al descender de su posición de reposo hasta dicho plano, como se muestra en la **Figura 5-14**.

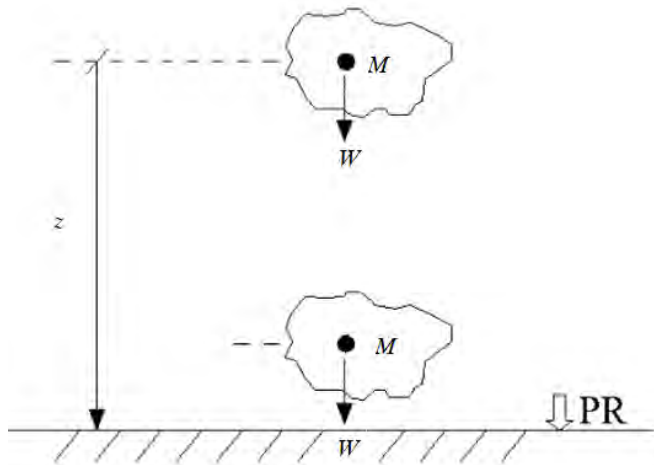


Figura 5-14.- Representación gráfica de la energía potencial por unidad de peso.

Siendo la energía de posición (o energía potencial E_p) la cantidad de trabajo que puede dar un cuerpo al pasar de una posición a otra, en una altura z , se tiene:

$$E_p = Wz \tag{5.59}$$

Si se divide la ecuación anterior por el peso W en ambos lados, se tiene entonces la **energía potencial por unidad de peso**.

$$\frac{E_p}{W} = \frac{Wz}{W} = z \tag{5.60}$$

5.11.2 Término (p/γ)

El trabajo es el producto de una fuerza por una distancia. En este caso la fuerza es originada por la presión p actuando sobre un área dA , la cual desplaza el fluido una cierta distancia ds , como sucede en el flujo en un conducto cerrado a presión, como el que se ilustra a continuación en la **Figura 5-15:**

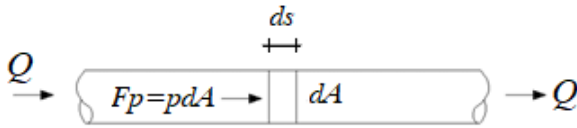


Figura 5-15.- Representación gráfica de la energía de presión por unidad de peso.

El trabajo elemental (T) realizado por el flujo, se encuentra expresado como:

$$T = Fp \cdot ds = p \cdot dA \cdot ds \quad (5.61)$$

Si se divide este trabajo por el peso del volumen elemental de fluido se tiene:

$$\frac{T}{W} = \frac{p \cdot dA \cdot ds}{W} = \frac{p \cdot dA \cdot ds}{\gamma \cdot ds \cdot dA} = \frac{p}{\gamma} \quad (5.62)$$

Con lo anterior se demuestra que el tercer término es energía o trabajo por unidad de peso.

5.11.3 Término ($V^2/2g$)

Si se considera que una partícula fluida cuyo peso es W y con masa m , es movida por una velocidad V que se desplaza sin fricción, como se muestra en la **Figura 5-16**:

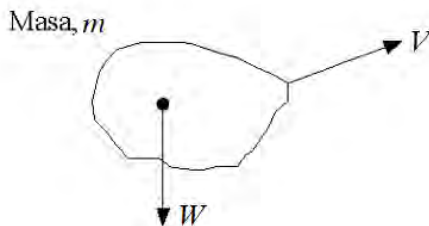


Figura 5-16.- Representación gráfica de la energía cinética por unidad de peso.

Por el principio de inercia se conoce que si ninguna fuerza interviene, la partícula de fluido continúa indefinidamente su movimiento; entonces, la **energía cinética** E_c , o sea la capacidad que tiene la partícula para generar trabajo, estará dada por la relación:

$$E_c = m \frac{V^2}{2} \quad (5.63)$$

Si se divide ambos términos de la anterior ecuación por el peso W , se tiene:

$$\frac{E_c}{W} = \frac{m}{W} \frac{V^2}{2} \quad (5.64)$$

Al reemplazar la masa $m = \rho \forall$ y el peso $W = \gamma \forall$ la ecuación será:

$$\frac{E_c}{W} = \frac{\rho \forall}{\gamma \forall} \frac{V^2}{2} = \frac{\rho}{\gamma} \frac{V^2}{2} = \frac{V^2}{2g} \quad (5.65)$$

Con base en ello, se demuestra que este término de la **Ecuación de Bernoulli** representa la energía cinética por unidad de peso, conocida también como carga de velocidad.

5.12 Corrección a la ecuación de energía

5.12.1 Corrección por distribución de velocidad

Introduciendo el **coeficiente de Coriolis**, (α), el cual corrige el efecto de la distribución de velocidades, puesto que la ecuación de Bernoulli se dedujo para una línea de corriente con velocidad media, se tiene que:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} \quad (5.66)$$

El coeficiente de Coriolis, es dado como:

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{V} \right)^3 dA \quad (5.67)$$

Cabe mencionar que para su cálculo, se hace necesario conocer la expresión que describe la distribución de velocidades v .

Análisis recientes han indicado que el coeficiente de Coriolis depende también de la rugosidad del conducto y sus dimensiones.

5.12.2 Corrección por pérdidas

Ya que la ecuación de Bernoulli se dedujo para un fluido ideal sin pérdidas de energía se hace la corrección incluyendo dichas pérdidas en la ecuación. El término de pérdidas de energía que sucede entre dos puntos, incluye:

- Pérdidas por fricción del fluido con superficies sólidas (h_{fs}).
- Pérdidas por fricción dentro de la misma masa (fluido-fluido) (h_{ff}).
- Pérdidas por accesorios o denominadas pérdidas locales (h_L).

Por lo tanto, la ecuación de Bernoulli con pérdidas para flujo incompresible entre dos puntos, queda expresada como:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_{fs} + \sum h_{ff} + \sum h_L \quad (5.68)$$

Como en la práctica es difícil separar las dos primeras pérdidas, se evalúan en una sola, como pérdidas por fricción:

$$\sum h_f = \sum h_{fs} + \sum h_{ff} \quad (5.69)$$

Se obtiene:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_f + \sum h_L \quad (5.70)$$

Agrupando las pérdidas en un solo término, se tiene:

$$\sum h = \sum h_f + \sum h_L \quad (5.71)$$

Finalmente, se obtiene la ecuación general de Bernoulli para un fluido real:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_{1-2} \quad (5.72)$$

Las pérdidas se evalúan con ecuaciones empíricas ya que no existe un desarrollo matemático para su deducción. Como el objetivo de esta parte del texto no es profundizar sobre la evaluación de pérdidas por fricción, las mismas se expresarán como pérdidas totales en función de la carga de velocidad, como:

$$\sum h = K \frac{V^2}{2g} \quad (5.73)$$

Siendo K el coeficiente de pérdidas, valor que suele ser conocido según el tipo de problema a resolver.

5.13 Línea de energía y línea piezométrica

En la **Figura 5-17**, se muestra gráficamente el significado de la línea piezométrica y la línea de energía.

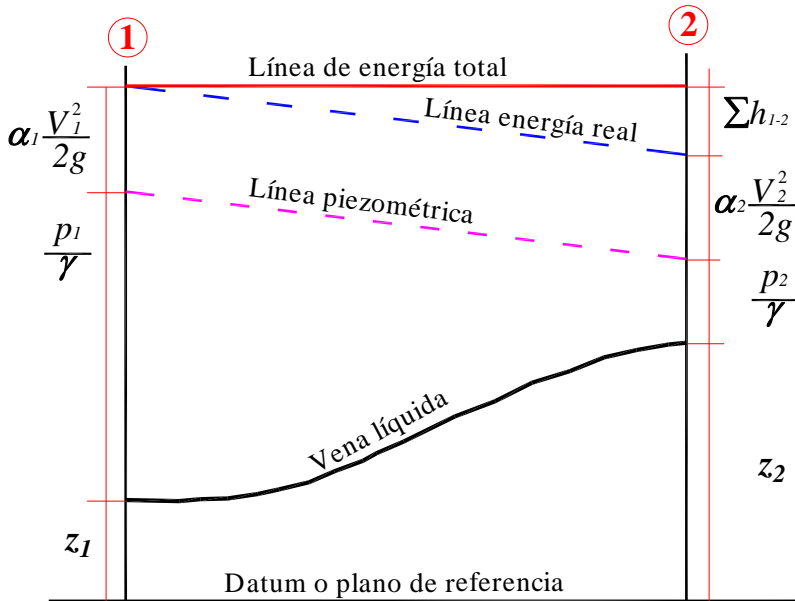


Figura 5-17.-Concepto gráfico de línea de energía y línea piezométrica con pérdidas.

5.13.1 Línea de energía

La línea de energía (L.E.) es una línea imaginaria que une los puntos de energía total por unidad de peso en cada sección; se representa por H y está dada como:

$$H = \frac{p}{\gamma} + z + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (5.74)$$

En la **Figura 5-17**, La variable s_e correspondería a la pendiente de la línea de energía o pérdida de energía por unidad de longitud.

5.13.2 Línea piezométrica

La línea piezométrica (L.P.) es una línea imaginaria que une los puntos correspondientes a la carga por presión y carga por posición, en cada sección con respecto a un plano de referencia y está dada como:

$$L.P. = \frac{p}{\gamma} + z \tag{5.75}$$

La pendiente de la línea piezométrica (s_0) se conoce como **gradiente hidráulico**.

Si se traza la L.P. y L.E. en una instalación con tuberías de diferente diámetro, como la que se muestra en la **Figura 5-18**, se observa que la L.E. siempre disminuye a medida que el fluido se mueve entre los tanques 1 y 2; pero la L.P. no necesariamente disminuye a lo largo de la instalación, en el tramo central aumenta; esto se debe a que la energía total no puede cambiar en un punto ni la carga de posición. Si cambia la velocidad, el único término a compensar este cambio es la carga de presión. Las pérdidas de energía en los cambios de diámetro del tubo se pueden suponer verticales por la corta longitud de los empalmes. Las alturas h_1 , h_2 y h_3 son las pérdidas de energía hasta dicho punto, medidas desde el plano de energía ideal o superficie del agua en el tanque 1.

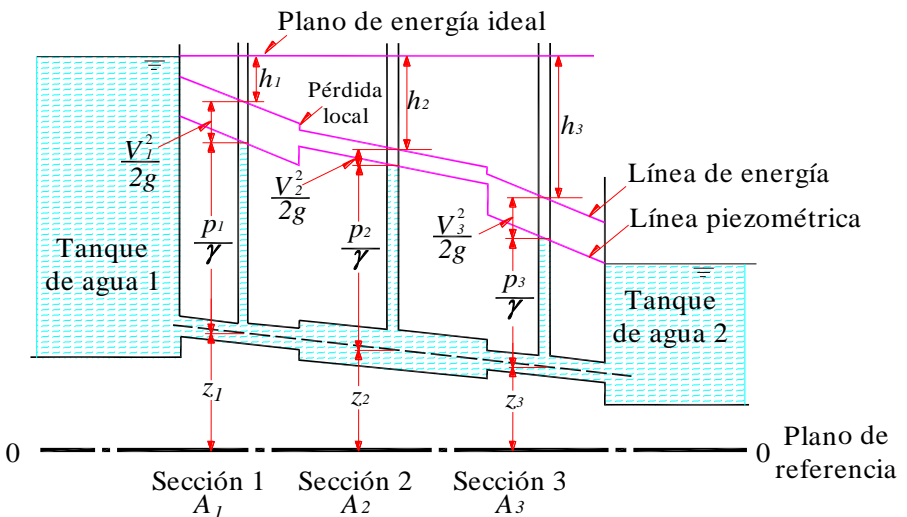


Figura 5-18.- Concepto gráfico de línea de energía y línea piezométrica con pérdidas de fricción y locales.

5.14 Concepto de potencia hidráulica

Para abordar el concepto de potencia hidráulica se considera que la altura H es igual a la energía por unidad de peso:

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (5.76)$$

Lo que es equivalente a trabajo por unidad de peso W . Como el Trabajo (T) es dado como:

$$T = HW \Rightarrow H = \frac{T}{W} \quad (5.77)$$

Por otro lado la potencia (P) es dada como trabajo por unidad de tiempo, se tiene:

$$P = \frac{T}{t} = \frac{HW}{t} \quad (5.78)$$

El peso W es igual al volumen multiplicado por el peso específico ($W = \forall \cdot \gamma$):

$$P = \frac{H\forall\gamma}{t} = H \frac{\forall}{t} \gamma \quad (5.79)$$

Como \forall/t es el caudal volumétrico Q , se obtiene la potencia hidráulica,

$$P = HQ\gamma \quad (5.80)$$

Las unidades se dan en el Sistema Internacional (SI) de la siguiente manera:

$$\text{Potencia} = H[m]Q[m^3/s]\gamma[N/m^3] \quad (5.81)$$

$$\text{Potencia} = \left[\frac{N \cdot m}{s} \right] = \left[\frac{J}{s} \right] = [W] \quad (5.82)$$

N es igual a Newton, J es Julios y W corresponde a vatios. Otras unidades usuales son el caballo de potencia (HP) y el caballo de vapor (CV). $1\text{HP} = 76\text{kp}\cdot\text{m}/\text{s} = 550\text{ lbf}\cdot\text{pie}/\text{s}$ y un $1\text{ CV} = 75\text{kp}\cdot\text{m}/\text{s}$. $1\text{kW} = 1,34102\text{ HP}$, donde el kp es el kilopondio, que es equivalente a kilogramos fuerza.

5.15 Ejemplos de aplicación

5.15.1 Flujo sin pérdidas

Ejemplo 5.3.

Según la instalación y datos de la **Figura 5-19**, en la cual hay un fluido en movimiento con peso específico de $9810\text{ N}/\text{m}^3$, en un flujo ideal, encontrar: **(a)** El caudal que circula por la instalación en m^3/s . **(b)** La presión en el punto **B** en m.c.a. (m.c.a. = metros de columna de agua). **(c)** La presión en el punto **A** en m.c.a. **(d)** La potencia en el punto **A**, con respecto al plano de referencia que pasa por A, en kW. **(e)** Calcular y dibujar la línea de energía y línea piezométrica.

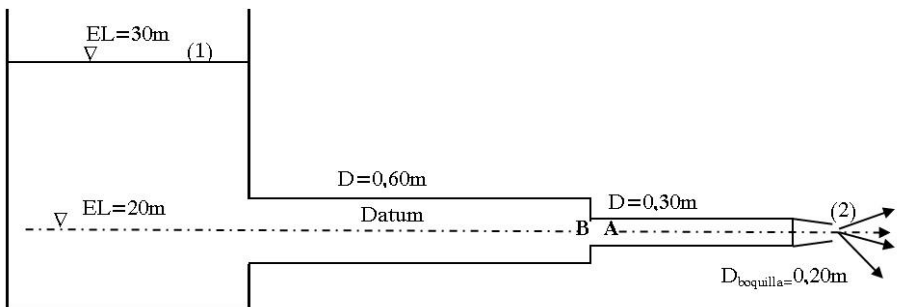


Figura 5-19.- Esquema de la instalación del sistema de tuberías.

Recomendaciones. La presión en los contactos del líquido con la atmósfera es cero y las velocidades del líquido en tanques grandes se aproximan a cero.

Solución:

(a). Lo más recomendable es escoger dos puntos de la instalación que tengan el menor número de incógnitas de la ecuación de energía. En

este caso se seleccionan los puntos 1 y 2 y se aplica la ecuación de energía entre los mismos.

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad (1)$$

Se eliminan los términos con base en los criterios relativos a la presión en contacto con el aire, y donde la velocidad adquiera un valor muy pequeño.

$$\frac{p_1}{\gamma} = 0, \quad \frac{V_1^2}{2g} \approx 0, \quad \frac{p_2}{\gamma} = 0 \quad (2)$$

Por lo tanto, la ecuación (1) se simplifica quedando de la siguiente manera:

$$z_1 = z_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad (3)$$

Como las alturas de posición son conocidas, se puede despejar la velocidad en (2):

$$V_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)} \quad (4)$$

Aplicando la ecuación de continuidad para hallar el caudal, se tiene que:

$$Q = A_2 V_2 = A_2 \sqrt{2g(z_1 - z_2)} \quad (5)$$

Cabe recordar que el caudal es constante a lo largo de la instalación. Reemplazando los valores disponibles se tiene:

$$Q = \frac{\pi(0,2m)^2}{4} \sqrt{2(9,81m/s^2)(30m - 20m)} = 0,44m^3/s \quad (6)$$

$$V_2 = \sqrt{2(9,81m/s^2)(30m - 20m)} = 14,007m/s \quad (7)$$

(b) Para las presiones se aplica la ecuación de energía entre el punto de interés y otro punto del que se conozca el mayor número de datos. En este caso, se puede aplicar entre 1 y B o entre B y 2, se debe llegar al mismo resultado. Realizando el análisis entre 1 y B, se tiene:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_B}{\gamma} + z_B + \frac{V_B^2}{2g} \quad (8)$$

$$+z_1 = \frac{p_B}{\gamma} + z_B + \frac{V_B^2}{2g} \quad (9)$$

Se tienen dos incógnitas que son la presión en B y la velocidad en B, pero la velocidad en B se puede hallar por medio de la ecuación de continuidad:

$$A_B V_B = A_2 V_2 \Rightarrow V_B = \frac{A_2}{A_B} V_2 = \left(\frac{D_2}{D_B} \right)^2 V_2 \quad (10)$$

Se procede a determinar la cabeza de velocidad en B:

$$\frac{V_B^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left(\frac{D_2}{D_B} \right)^4 V_2^2 = \frac{1}{2(9,81m/s^2)} \left(\frac{0,2m}{0,6m} \right)^4 (14m/s)^2 \quad (11)$$

$$\frac{V_B^2}{2g} = 0,123m \quad (12)$$

Se sustituye este valor, para hallar presión en B:

$$\frac{p_B}{\gamma} = (z_1 - z_B) - \frac{V_B^2}{2g} = 10m - 0,123m = 9,877mca \quad (13)$$

(c) Para determinar la presión en A, se realiza el mismo procedimiento que para la presión en B. Aplicando la ecuación de energía entre los puntos A y 2, se tiene:

$$\frac{p_A}{\gamma} + z_A + \frac{V_A^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad (14)$$

Al simplificar términos, $z_A = z_2$, y $p_2/\gamma = 0$ se tiene:

$$\frac{p_A}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_A^2}{2g} \quad (15)$$

Se tienen tres incógnitas a saber: la presión en A, la velocidad en A y la velocidad en 2, pero la velocidad en A se puede conocer por medio de la ecuación de continuidad, ya que velocidad en 2 es conocida:

$$A_A V_A = A_2 V_2 \Rightarrow V_A = \frac{A_2}{A_A} V_2 = \left(\frac{D_2}{D_A} \right)^2 V_2 \quad (16)$$

Se procede a determinar la cabeza de velocidad en A de la siguiente manera:

$$\frac{V_A^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left(\frac{D_2}{D_A} \right)^4 V_2^2 = \frac{1}{2(9,81m/s^2)} \left(\frac{0,2m}{0,3m} \right)^4 (14m/s)^2 \quad (17)$$

$$\frac{V_A^2}{2g} = 1,973m \quad (18)$$

La cabeza de velocidad en 2 es conocida, la cual está dada como:

$$\frac{V_2^2}{2g} = \frac{(14,007m/s)^2}{2(9,81m/s^2)} = 10,0m \quad (19)$$

Se sustituye este valor, para hallar presión en A.

$$\frac{p_A}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_A^2}{2g} = 10,0m - 1,973m = 8,027mca \quad (20)$$

(d) La potencia hidráulica está dada como:

$$P_{HA} = H_A Q \gamma \quad (21)$$

Se encuentra la altura total de energía con referencia al punto A, donde $z_A = 0$:

$$H_A = \frac{p_A}{\gamma} + z_A + \frac{V_A^2}{2g} = 8,027 + 0,0m + 1,973 = 10,0mca \quad (22)$$

$$P_{HA} = 10,0m(0,440m^3/s)(9810N/m^3) = 43168W = 43kW \quad (23)$$

(e) Se calculan las líneas de alturas piezométricas y de energía entre los puntos 1, **B**, **A** y 2, y se dibujan sobre la instalación.

La línea de energía (L.E.) es constante para todo el sistema y tiene un valor de $H = 30$ m, esto debido a que no se consideran pérdidas de energía. Obsérvese que al aplicar la ecuación de energía en cualquier punto, esta debe ser igual a 30,0 m.

La línea piezométrica (L.P) es la suma de la cabeza de posición y la cabeza de presión, como se definió anteriormente:

$$L.P._{(1)} = \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = 0 + 30m = 30m \quad (24)$$

$$L.P._{(B)} = \frac{p_B}{\gamma} + z_B = 9,877m + 20m = 29,877m \quad (25)$$

$$L.P._{(A)} = \frac{p_A}{\gamma} + z_A = 8,027m + 20m = 28,027m \tag{26}$$

$$L.P._{(2)} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = 0,0m + 20,0m = 20,0m \tag{27}$$

En la **Figura 5-20** se indica gráficamente la L.E. y la L.P. para el problema

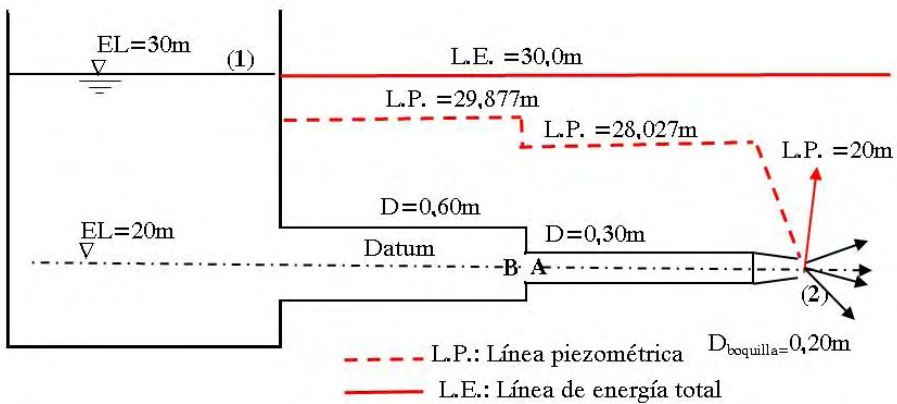


Figura 5-20.- Línea de energía y línea piezométrica para flujo ideal.

5.16 Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.16.1. (Munson et al., 1990, p. 99).

Considere el flujo de aire alrededor de un ciclista que se mueve a través del aire en reposo con la velocidad que se muestra en la **Figura 5-21**. Determinar la diferencia de presión entre puntos (1) y (2).

Respuesta: $\Delta p = \rho V_0^2/2$.

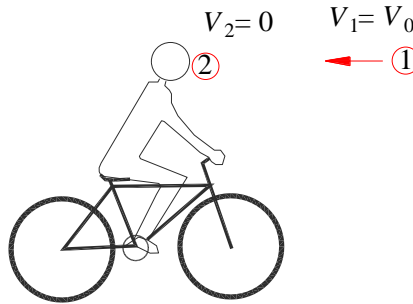


Figura 5-21.- Esquema del flujo de aire alrededor de un ciclista.

Ejercicio 5.16.2. Adaptado de (Niño y Duarte, 2007, pp. 4–11).

Se tiene una tubería, como se muestra en la **Figura 5-22**, por la cual circula petróleo crudo y la velocidad de este flujo es de 2,4 m/s en el punto A. ¿Cuál sería la altura en el piezómetro en el punto C? Asumir el coeficiente de Coriolis en A y B como uno bajo la hipótesis de flujo ideal o lo que sería aplicar ecuación de Bernoulli sin pérdidas.

Respuesta: $p_B/\gamma = 1,5$ m.c.a.

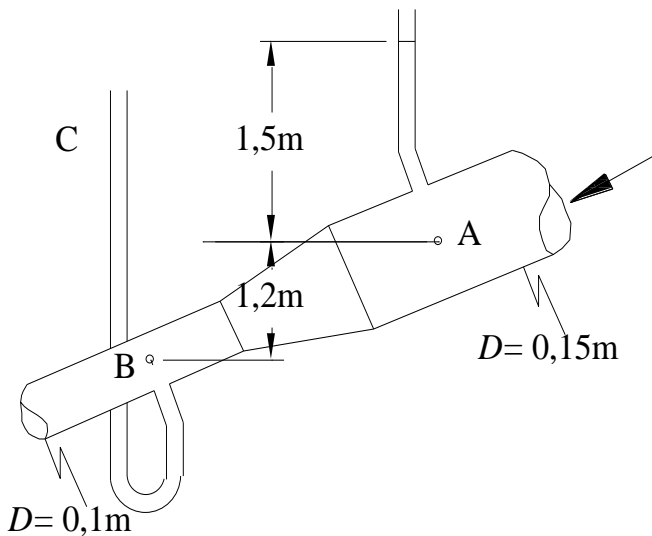


Figura 5-22.- Esquema de la tubería con reducción.

Ejercicio 5.16.3. (Munson et al., 1990, p. 113)

El aire fluye de manera constante desde un tanque, a través de una manguera de diámetro $D = 30\text{mm}$ y sale a la atmósfera desde una boquilla de diámetro $d = 10\text{mm}$ como se muestra en la **Figura 5-23**. La presión en el tanque permanece constante a $3,0\text{ kPa}$ manométrica, y las condiciones atmosféricas son temperatura y presión estándar. Determine el caudal y la presión en la manguera.

Respuesta: $Q = 5,42\text{ L/s}$; $p_2 = 2963\text{ N/m}^2$.

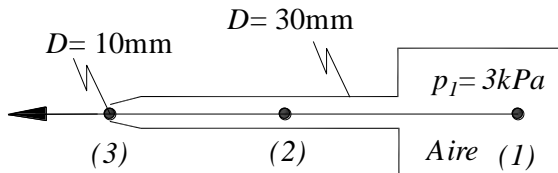


Figura 5-23.- Esquema del tanque y tubería.

Ejercicio 5.16.4. (Munson et al., 1990, p. 113)

El agua fluye a través de una reducción de tubería, tal y como se muestra en la **Figura 5-24**. Las presiones estáticas en (1) y (2) se miden mediante el manómetro de tubo en U invertido que contiene aceite de gravedad específica, G_s , inferior a uno. Determine la lectura del manómetro, h .

Respuesta:
$$h = \frac{1 - \left(\frac{D^2}{D^1}\right)^2}{2g(1 - G_s)} \left(\frac{Q}{A^2}\right)^2$$

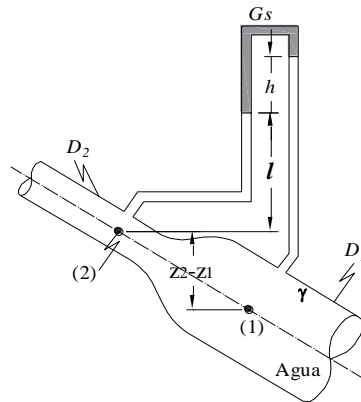


Figura 5-24.- Esquema del tubo y su respectiva reducción.

Ejercicio 5.16.5.

Con los datos del Ejemplo 5.3, encontrar el caudal que circula por la instalación en L/s, teniendo en cuenta las pérdidas de energía. Asumir las pérdidas por fricción en el tramo 1-B como $h_{f1-B} = 1,0(V_{1-B})^2/2g$, en el tramo A-2 como $h_{fA-2} = 0,2(V_{A-2})^2/2g$ y las pérdidas locales, $h_{L1-2} = 0,1(V_s)^2/2g$. V_s es la velocidad en la boquilla de salida.

5.17 Aplicación de ecuación de energía a turbo máquinas

Las máquinas hidráulicas más comunes en la práctica de la Ingeniería son las **bombas hidráulicas** y las **turbinas**. Esta temática es abordada en la mayoría de libros de Mecánica de Fluidos e Hidráulica tales como: (Niño y Duarte, 2007), (Giles et al., 1994), (White, 2004), (Streeter et al., 2000), (Potter et al., 2015), entre otros. A continuación, se aplicará la ecuación de energía, tanto para bombas como para turbinas, con desarrollo de ejemplos prácticos.

5.17.1 Bombas hidráulicas

Las bombas hidráulicas son máquinas hidráulicas cuya finalidad es **suministrar energía** a un fluido para **producir flujo**.

Para realizar el planteamiento de la ecuación de Bernoulli se toma como base la **Figura 5-25**.

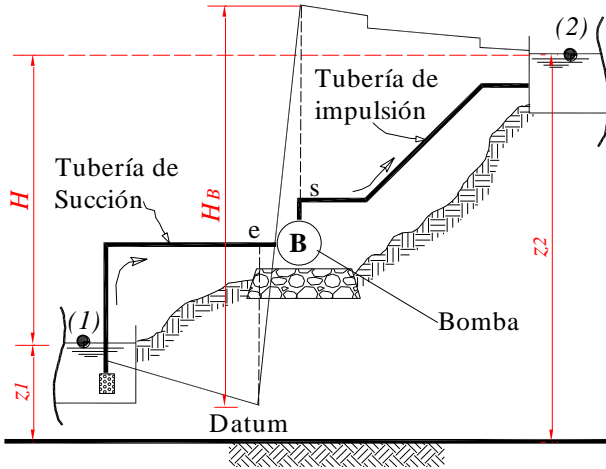


Figura 5-25.- Esquema de una estación de bombeo (*e* es entrada, *s* es salida, *H* es cabeza estática total, *H_B* es cabeza dinámica total). Fuente: Adaptada de (Loayza, 2005, p. 147).

Al aplicar ecuación de Bernoulli entre los depósitos (1) y (2), se tiene:

$$E_1 + H_B = E_2 + \sum h_{1-2} \tag{5.83}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + H_B = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_{1-2} \tag{5.84}$$

La relación entre la potencia mecánica P_M y la potencia hidráulica P_{util} , suministrada por la bomba, se encuentra definida por la eficiencia de la bomba η_B , la cual se expresa de la siguiente manera:

$$\eta_B = \frac{P_{util}}{P_M} = \frac{\gamma Q H_B}{P_M} \Rightarrow P_M = \frac{\gamma Q H_B}{\eta_B} \tag{5.85}$$

5.17.2 Turbinas

Son máquinas hidráulicas cuya finalidad es **extraer energía** de un flujo para convertirla en un **par-motor**. Para realizar el planteamiento de la ecuación de Bernoulli para turbinas se toma como base la **Figura 5-26**.

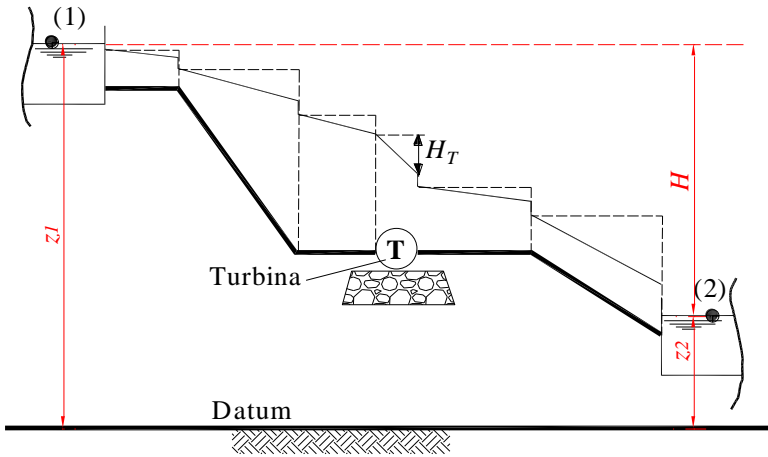


Figura 5-26.- Esquema de un sistema para una hidroeléctrica. Fuente: Adaptada de (Loayza, 2005, p. 149).

Al aplicar ecuación de Bernoulli entre los depósitos (1) y (2), se tiene:

$$E_1 - H_T = E_2 + \sum h_{1-2} \tag{5.86}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} - H_T = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_{1-2} \tag{5.87}$$

La relación entre la potencia del generador P_G y la potencia hidráulica o teórica P_H , corresponde a la eficiencia de la turbina η_T , dada como:

$$\eta_T = \frac{P_G}{P_H} = \frac{P_G}{\gamma Q H_T} \tag{5.88}$$

5.18 Ejemplos de aplicación

5.18.1 Bomba hidráulica

Ejemplo 5.4.

A partir de los datos de la **Figura 5-27**, en la cual se ilustra un flujo de agua desde un tanque presurizado impulsado por una bomba, con peso específico del agua de 9810 N/m^3 , las pérdidas de energía entre los puntos 1 y 2, son iguales a dos veces la cabeza de velocidad en el tubo de diámetro $0,15 \text{ m}$, con una boquilla $0,075 \text{ m}$ de diámetro. Suponer que no hay pérdida de energía a lo largo del chorro de agua. Se solicita encontrar: **(a)** El caudal que circula por la instalación en m^3/s . **(b)** La potencia de la bomba en kilovatios (kW) si la eficiencia del sistema motor-bomba η_B es de 70% .

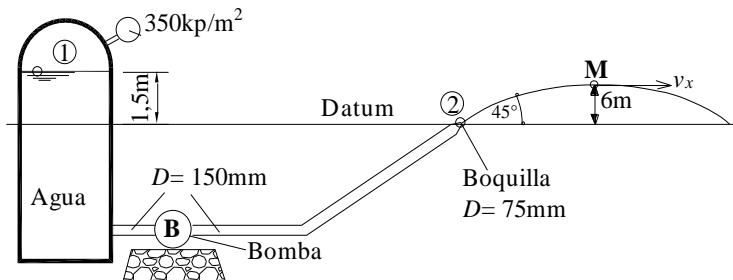


Figura 5-27.- Esquema de la instalación del Ejemplo 5.4.

Recomendaciones.

Para efectos de facilitar la solución del problema se recomienda considerar que:

- La presión en los contactos del líquido con la atmósfera es cero.
- Las velocidades de descenso del agua en tanques grandes se aproximan a cero.
- Seleccionar dos puntos en el sistema tal que las incógnitas en la ecuación de energía, en lo posible, se reduzcan a una sola.

Solución:

a. Se busca dos puntos en el sistema tal que las incógnitas en la ecuación de energía se reduzcan a una sola. Si se aplica la ecuación de energía en

el chorro entre los puntos 2 y M, suponiendo que la pérdida es despreciable, se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} = \frac{p_M}{\gamma} + z_M + \frac{V_M^2}{2g} \quad (1)$$

Se elimina los términos según el criterio de la presión en contacto con el aire y donde la velocidad se aproxime a cero.

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_M}{\gamma} = 0, z_2 = 0 \quad (2)$$

Por lo tanto, la ecuación (1) se simplifica de la siguiente manera:

$$\frac{V_2^2}{2g} = z_M + \frac{V_M^2}{2g} \quad (3)$$

En el punto M, la velocidad posee una trayectoria horizontal v_x , la cual se relaciona con V_2 por medio del $\cos 45^\circ$:

$$V_M = v_x = V_2 \cos 45^\circ \quad (4)$$

El movimiento vertical en (y) es uniformemente acelerado con v_y variable y el movimiento en (x) es horizontal con v_x constante, propiedades inherentes al movimiento parabólico. Sustituyendo $V_M = v_x$, se tiene que:

$$\frac{V_2^2}{2g} = z_M + \frac{V_2^2}{2g} \cos^2 45^\circ \quad (5)$$

Ahora, de la ecuación (5) se puede despejar V_2 :

$$\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g} \cos^2 45^\circ = z_M \quad (6)$$

$$\frac{V_2^2}{2g}(1 - \cos^2 45^\circ) = z_M \quad (7)$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2gz_M}{(1 - \cos^2(45^\circ))}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \text{ m/s} \cdot 6 \text{ m}}{(1 - \cos^2(45^\circ))}} = 15,344 \text{ m/s} \quad (8)$$

Por ecuación de continuidad, se calcula el caudal Q .

$$Q = V_2 A_2 = V_2 \frac{\pi D_b^2}{4} = 15,344 \text{ m/s} \left(\frac{\pi \cdot (0,075 \text{ m})^2}{4} \right) = 0,068 \text{ m}^3 / \text{s} \quad (9)$$

(b) Se aplica la ecuación de la energía considerando pérdidas entre los puntos 1 y 2.

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + H_B = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_{1-2} \quad (10)$$

Se simplifica la velocidad en 1 que es ≈ 0 ; adicionalmente, se simplifica la presión en 2 que es cero, $z_2 = 0$.

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + H_B = + \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_{1-2} \quad (11)$$

Como el objetivo es hallar H_B , es necesario calcular la cabeza de velocidad en el tubo de diámetro 0,15 m, por medio de la ecuación de continuidad.

$$Q = V_2 \frac{\pi D_b^2}{4} = V_{0,15} \left(\frac{\pi \cdot (D_{0,15})^2}{4} \right) \quad (12)$$

$$V_{0,15} = V_2 \frac{D_b^2}{(D_{0,15})^2} = 15,344 \left(\frac{(0,075 \text{ m})^2}{(0,015 \text{ m})^2} \right) = 3,836 \text{ m/s} \quad (13)$$

Conociendo la velocidad en el tubo, se calculan las pérdidas de energía:

$$\sum h_{1-2} = 2 \frac{V_{0,15}^2}{2g} = 2 \left(\frac{(3,836 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} \right) = 1,5 \text{ m} \quad (14)$$

$$\frac{V_2^2}{2g} = \frac{(15,344 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} = 12,0 \text{ m} \quad (15)$$

$$H_B = \frac{V_2^2}{2g} + \sum h - \frac{p_1}{\gamma} - z_1 \quad (16)$$

Reemplazando los valores ya conocidos se tiene:

$$H_B = 12,0 \text{ m} + 1,5 \text{ m} - \frac{350 \text{ kp/m}^2}{1000 \text{ kp/m}^3} - 1,5 \text{ m} = 11,65 \text{ m} \quad (17)$$

Por lo tanto, la potencia del motor de la bomba se expresa como:

$$P_M = \frac{\gamma Q H_B}{\eta_B} \quad (18)$$

$$P_M = \frac{9810 \text{ N/m}^3 \cdot 0,068 \text{ m}^3/\text{s} \cdot 11,65 \text{ m}}{0,70} = 11102 \text{ W} = 11 \text{ kW} \quad (19)$$

5.18.2 Turbina

Ejemplo 5.5.

Con base en las convenciones de la **Figura 5-26**, se tiene que la elevación del punto (1) es de 150 m, la elevación del punto (2) es de 10 m, el diámetro del tubo igual es a 2,5 m y las pérdidas del sistema son 30 veces la cabeza de velocidad ($30V^2/2g$) en el tubo con diámetro 2,5 m. Determine la **potencia máxima** (PG_{\max}) que se puede generar, dada en caballos de potencia HP, si la eficiencia de la turbina es del 70%.

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} - H_T = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_{1-2} \quad (1)$$

Ya que los puntos (1) y (2) se encuentran expuestos a la atmósfera, la diferencia de presiones se considera despreciable, y dicho valor se asume para efectos de análisis del problema como 0; adicionalmente, se considera que la velocidad del flujo en tales puntos es 0 por tratarse de grandes tanques. La anterior ecuación (1), se puede simplificar haciendo:

$$\frac{p_1}{\gamma} = 0, \frac{p_2}{\gamma} = 0, \frac{V_1^2}{2g} = 0, \frac{V_2^2}{2g} = 0 \quad (2)$$

Por lo tanto, la expresión se reduce a:

$$H_T = +(z_1 - z_2) - 30 \frac{V_{2.5}^2}{2g} \quad (3)$$

El término $V_{2.5}$ es la velocidad en el diámetro de 2,5 m. Ahora se expresa el término de carga de velocidad en función del caudal de la siguiente manera:

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{Q^2}{A^2 2g} = \frac{Q^2}{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2 2g} = \frac{16Q^2}{(\pi D^2)^2 2g} = \frac{8Q^2}{\pi^2 D^4 g} \quad (4)$$

Por medio de la ecuación de continuidad se expresa la pérdida en función del caudal Q.

$$H_T = (z_1 - z_2) - 30 \frac{8}{\pi^2 g D^4} \quad (5)$$

Para simplificar la ecuación, se hace,

$$k = 30 \frac{8}{\pi^2 g D^4} = \frac{240}{\pi^2 (9,81 \text{ m/s}^2) (2,5 \text{ m})^4} = 0,06346 \quad (6)$$

Como se tienen dos incógnitas a saber, H_T y Q , se usa la ecuación de la eficiencia, como segunda ecuación.

$$\eta_T = \frac{PG}{\gamma Q H_T} \Rightarrow H_T = \frac{PG}{\gamma Q \eta_T} \quad (7)$$

Igualando las ecuaciones (5) y (7), en función de H_T , se tiene:

$$\Delta z - kQ^2 = \frac{PG}{\gamma Q \eta_T} \quad (8)$$

Para encontrar la potencia máxima generada (PG), debe haber un caudal para el cual la potencia sea máxima; dicha situación se puede observar al graficar la potencia contra el caudal. Despejando la potencia generada se tiene:

$$PG = (\Delta z - kQ^2) \gamma Q \eta_T \quad (9)$$

$$PG = \Delta z \gamma \eta_T Q - k \gamma \eta_T Q^3 \quad (10)$$

Si se reemplazan los valores ya conocidos se tiene entonces que:

$$\Delta z = 140 \text{ m}, \gamma = 9810 \text{ N/m}^3, \eta_T = 0,7, k = 0,0635 \quad (11)$$

$$PG = 961380Q - 435,77982Q^3 \quad (12)$$

Con P_G expresado en Watts, al graficar P_G contra el caudal Q se obtiene la **Figura 5-28**, en donde se observa un evidente valor máximo de la

potencia, de la cual se puede interpolar encontrando un valor de potencia de $P_{G\max} = 17379805,8 \text{ W}$, correspondiente a un caudal de $27 \text{ m}^3/\text{s}$.

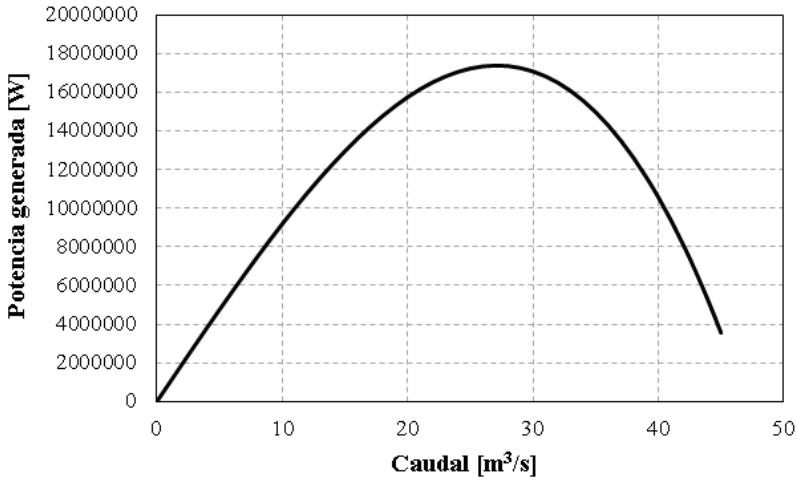


Figura 5-28.- Variación de potencia generada contra caudal. Fuente: elaboración propia.

Para realizar el proceso de manera analítica se hace necesario derivar la potencia generada P_G con respecto al caudal, cuyo resultado es:

$$\frac{d(P_G)}{dQ} = 961380 - (3)435,77982Q^2 \quad (13)$$

Al igualar a cero esta derivada, se encuentra el caudal Q que genera el punto máximo de P_G .

$$961380 - (3)435,77982Q^2 = 0 \quad (14)$$

$$Q = \sqrt{\frac{961380}{1307,3395}} = 27,118 \text{ m}^3 / \text{s} \quad (15)$$

Al sustituir dicho valor de caudal en la ecuación de potencia, se obtiene:

$$PG(27,118m^3/s)(27,118m^3/s)^3_{max} \tag{16}$$

Dicho valor es más exacto que el valor gráfico anteriormente obtenido. Al convertir watts a HP se tiene: $W = 0,00134102 \text{ HP}$, por lo tanto, la $P_{G \text{ max}} = 23307 \text{ HP}$.

5.19 Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.19.1.

Se desea abastecer de agua a un edificio por el método tanque bajo – bomba – tanque elevado, tal como se ilustra en la **Figura 5-29**, la cual se elaboró a partir del diseño arquitectónico. Los diámetros de las tuberías de succión e impulsión son 16” y 12” respectivamente, obteniéndose una descarga en el tanque elevado de $0,10 \text{ m}^3/\text{s}$. ¿Cuál sería la potencia de la bomba y la presión en los puntos (b) y (c)? (Loayza, 2005, p. 151).

Nota: Considere una eficiencia de la bomba, $\eta_B = 0,8$ y la potencia P en HP.

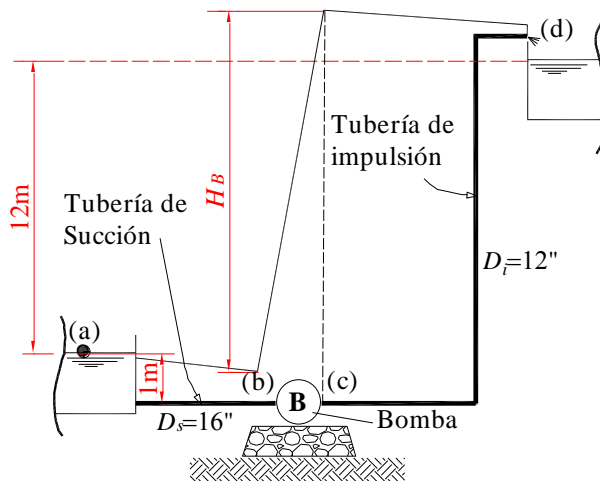


Figura 5-29.- Esquema de la estación de bombeo. Fuente: adaptada de (Loayza, 2005, p. 151).

La pérdida de energía entre a (a) y (b) es equivalente a cuatro veces la carga de velocidad. La pérdida de energía entre (c) y (d) es igual a 5 m.c.a.

Respuesta: $V_b = 0,77$ m/s, $V_d = 1,37$ m/s, $H_B = 17,18$ m.c.a., $P = 28,63$ HP, $p_b = 848,75$ kp/m², $p_c = 18000,0$ kp/m².

Ejercicio 5.19.2. (Fernández, 2001, p. 164).

En la bomba de prueba de la Figura 5-30, circula un caudal de agua de 100 L/s.

Determinar la potencia hidráulica en caballos de potencia (HP) teórica de la bomba.

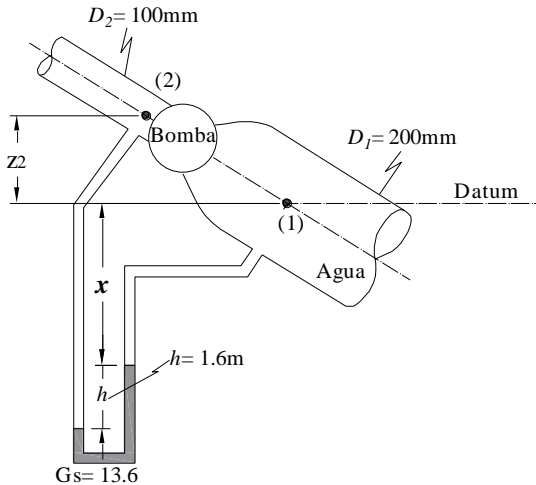


Figura 5-30.- Esquema de la bomba de prueba.

Ejercicio 5.19.3. (Fernández, 2001, p. 169).

Determinar el caudal que está fluyendo a través de la turbina que se muestra en **Figura 5-31**, si se extrae de la corriente de agua una potencia de 60 CV y las presiones en los puntos 1 y 2 son 1,50 kg/cm² y 0,35 kg/cm², respectivamente. $D_1 = 300$ mm y $D_2 = 600$ mm.

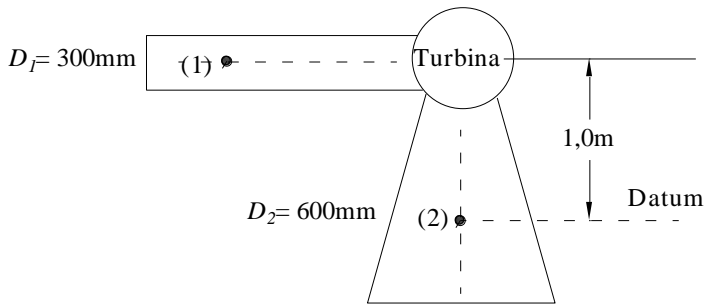


Figura 5-31.- Esquema de la instalación de la tubería y la turbina.

Ejercicio 5.19.4. (Fernández, 2001, p. 170).

Calcular la altura H , como se muestra en la **Figura 5-32**, que produce un caudal de 100 L/s y una potencia de 10 CV; despreciar todas las pérdidas de energía, salvo las producidas en la turbina. Dibujar la línea de energía y la línea de altura piezométrica.

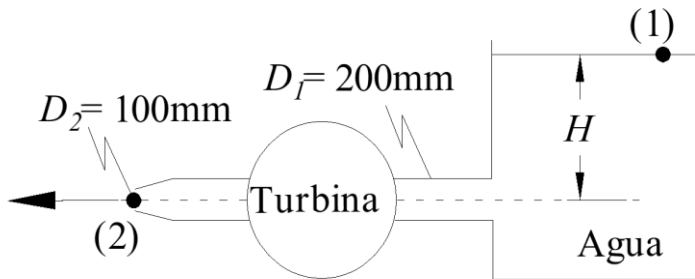


Figura 5-32.- Esquema de la instalación del tanque y la turbina.

Ejercicio 5.19.5. (Fernández, 2001, p. 170).

Calcular la diferencia de altura H entre las columnas del mercurio de densidad, $\rho = 1386 \text{ UTM/m}^3$ bajo las condiciones de un flujo permanente de agua de 550 L/s y establecer, con base a la **Figura 5-33**, si el lado derecho o el izquierdo de la columna de mercurio es el más alto. La potencia desarrollada por la turbina es de 75 CV.

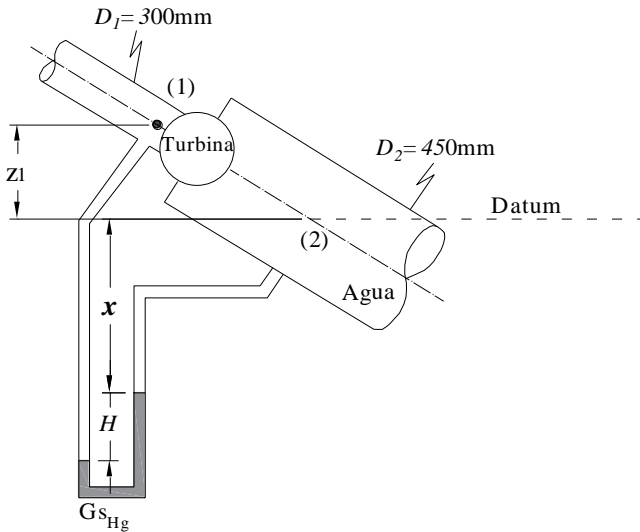


Figura 5-33.- Esquema de la instalación de la tubería, el manómetro y la turbina.

5.20 Aplicación de la ecuación de energía a medidores de caudal

Los medidores de caudal más conocidos son los orificios, el tubo de Pitot, el tubo Vénturi y el sifón.

5.20.1 Orificios con flujo permanente

Los orificios son la herramienta más simple y básica para medir caudales; los hay, desde perforados en un recipiente, hasta orificios construidos de manera industrial. Un orificio consiste en una abertura practicada en una pared de un depósito, puede ser lateral o de fondo; o en una placa colocada dentro de una tubería ortogonal al flujo. Dicha abertura puede tener diferente geometría, pero la circular es la más común. En la **Figura 5-34**, se ilustra la geometría básica de un orificio.

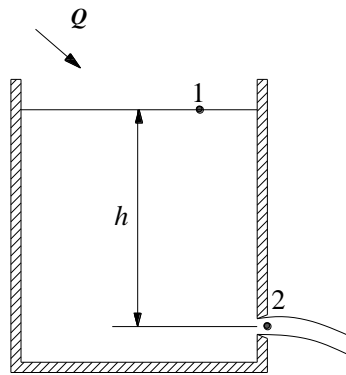


Figura 5-34.- Esquema de un orificio lateral sobre un depósito.

Lo que interesa es encontrar el caudal Q que atraviesa el orificio, para ello se aplica la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2, se hacen las simplificaciones respectivas y se despeja el caudal. El punto 1 localizado en la superficie del agua y el 2 justo aguas abajo del orificio en el punto donde la vena líquida sufre mayor contracción, según esto, se tiene:

$$E_1 = E_2 + \sum h_{1-2} \tag{5.89}$$

Inicialmente se desprecian las pérdidas de energía, cuyo efecto se compensa luego con algunos coeficientes.

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} \tag{5.90}$$

Al aplicar simplificaciones con los siguientes criterios:

$$\frac{p_1}{\gamma} = 0, \frac{V_1^2}{2g} = 0, \frac{p_2}{\gamma} = 0, (z_1 - z_2) = h \tag{5.91}$$

La ecuación (5.2) se reduce a:

$$\frac{V_2^2}{2g} = h \tag{5.92}$$

Al despejar la velocidad de dicha expresión se tiene:

$$V_2 = \sqrt{2gh} \quad (5.93)$$

La anterior es la ecuación de velocidad más escrita en Mecánica de Fluidos, y es la velocidad en la vena contracta del chorro. Como se despreciaron los efectos de la fricción y otras pérdidas, esta velocidad es teórica, donde la velocidad real es un poco menor. Se introduce un coeficiente de velocidad C_v , el cual relaciona la velocidad real sobre la velocidad teórica como lo indica la siguiente ecuación:

$$C_v = \frac{V_{real}}{V_{teórica}} = \frac{V_r}{V_t} \quad (5.94)$$

Introduciendo este coeficiente en la velocidad V_2 se obtiene la velocidad real en el punto 2, V_{r2} .

$$V_{r2} = C_v \sqrt{2gh} \quad (5.95)$$

Por otro lado, como el punto 2 se encuentra en la vena contracta y generalmente su diámetro es desconocido, se relaciona esta dimensión con el tamaño del orificio introduciendo un coeficiente de contracción C_o , el cual relaciona el área de la contracción A_c con el área del orificio A_o como se observa en la siguiente ecuación:

$$C_o = \frac{A_{contracta}}{A_{orificio}} = \frac{A_c}{A_o} \quad (5.96)$$

Según la ecuación de continuidad, el caudal teórico es:

$$Q_t = A_c V_{r2} = A_c C_v \sqrt{2gh} \quad (5.97)$$

Al sustituir el área $A_c = C_o A_o$, se obtiene el caudal real Q_r :

$$Q_r = C_v C_o A_o \sqrt{2gh} \quad (5.98)$$

Como es difícil determinar los coeficientes C_v y C_o por separado, los mismos son sustituidos por un solo coeficiente, denominado **coeficiente de gasto** C_d , obteniéndose una ecuación general para el caudal real que atraviesa el orificio.

$$Q_r = C_d A_o \sqrt{2gh} \quad (5.99)$$

El valor de C_d se determina experimentalmente. Por su parte, el valor recomendado para orificios circulares de pared delgada es $C_d = 0,62$.

5.20.2 Orificio en una tubería

Es común en la industria usar orificios perforados en una placa, por lo general delgada, para medir el caudal en una tubería con flujo a presión, la cual se inserta con algún mecanismo práctico. En la **Figura 5-35a** se muestra un orificio de tipo industrial, cuya perforación se realiza sobre una paleta que por lo general es metálica, regularmente consta de un disco con un orificio en el centro del mismo que se coloca perpendicular a la tubería. En la **Figura 5-35b** se ilustra el esquema del orificio dentro de la tubería y la estructura del flujo, el cual sufre una fuerte contracción a la salida del orificio. Se tiene un diámetro del tubo D , un diámetro del orificio d_o y un diámetro de la vena contracta D_c . Para medir la presión en los puntos 1 y 2 se suelen colocar manómetros en **U** con mercurio, ya que las presiones suelen ser muy altas, obteniéndose una diferencia de presión entre los dos puntos $\Delta p = p_1 - p_2$, que se expresan en unidades de columna de agua mediante la ecuación $\Delta p / \gamma = h$ (Chereque, 1987, p. 75), (Niño y Duarte, 2007, pp. 4–20).

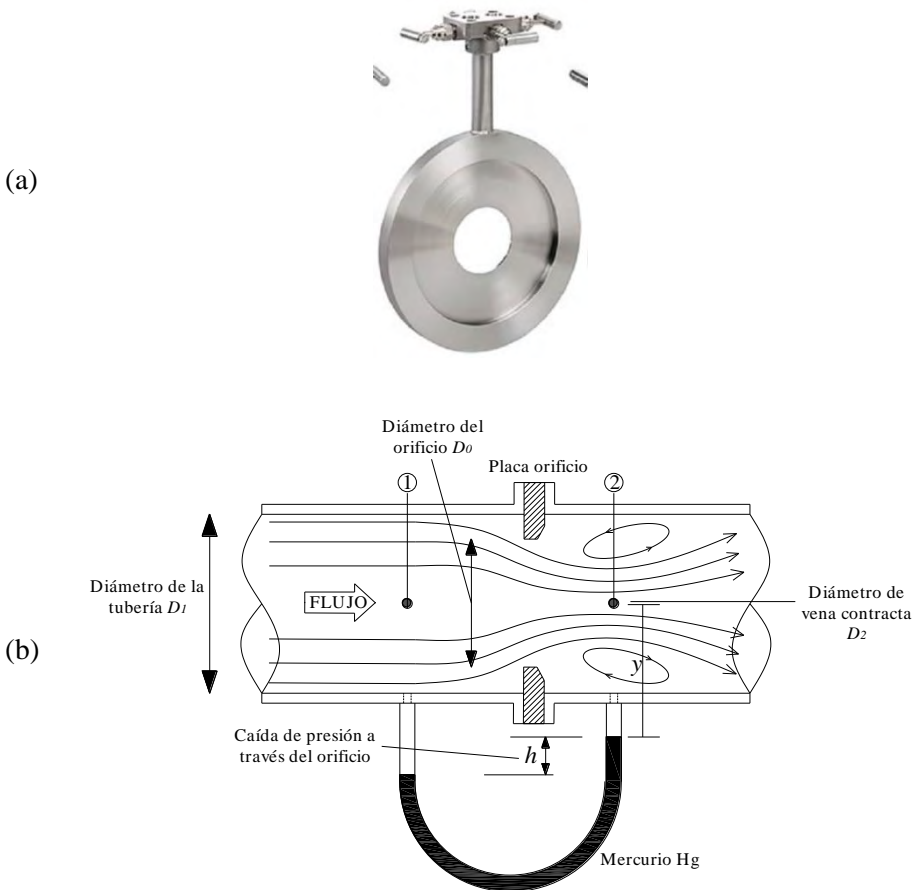


Figura 5-35.- Orificios dentro de tuberías. (a) Placa industrial. (b) esquema interno del orificio.

Como en el caso del orificio en un tanque, se aplica la ecuación de Bernoulli antes y después del orificio.

$$E_1 = E_2 + \sum h_{1-2} \quad (5.100)$$

Inicialmente se desprecian las pérdidas de energía, cuyo efecto se compensa con algunos coeficientes, como se verá más adelante. Así:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad (5.101)$$

En este problema cabe resaltar que ni las presiones ni las velocidades se pueden despreciar, únicamente la carga de posición en la que $z_1 = z_2$, ya que ambos puntos se encuentran en la misma cota. Con base en lo anterior, se tiene que:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad (5.102)$$

Por ecuación de continuidad, se encuentra la velocidad V_1 en función de V_2 .

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 \Rightarrow V_1 = \frac{A_2}{A_1} V_2 = V_2 \frac{D_2^2}{D_1^2} \quad (5.103)$$

Si se aplica un artificio, y se multiplica y divide por la relación A_0/A_0 , entonces se obtiene:

$$V_1 = \frac{A_2}{A_1} \left(\frac{A_0}{A_0} \right) V_2 = V_2 \frac{D_2^2}{D_1^2} \frac{D_0^2}{D_0^2} = V_2 \frac{D_2^2}{D_0^2} \frac{D_0^2}{D_1^2} \quad (5.104)$$

Pero como la relación de A_2/A_0 es el coeficiente de contracción C_o se tiene:

$$V_1 = V_2 C_o \frac{D_0^2}{D_1^2} \Rightarrow \frac{V_1^2}{2g} = C_o^2 \frac{D_0^4}{D_1^4} \frac{V_2^2}{2g} \quad (5.105)$$

Se sustituye V_1 en la ecuación de energía:

$$\frac{p_1}{\gamma} + C_o^2 \frac{D_0^4}{D_1^4} \frac{V_2^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad (5.106)$$

Se despeja V_2 :

$$C_o^2 \frac{D_o^4}{D_1^4} \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} \quad (5.107)$$

A través del análisis del manómetro en U se tiene que:

$$p_1 + \gamma \frac{D}{2} + \gamma h - \gamma_{HG} h - \gamma \frac{D}{2} = p_2 \quad (5.108)$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + h - \frac{\gamma_{HG}}{\gamma} h = \frac{p_2}{\gamma} \Rightarrow \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = h \left(\frac{\gamma_{HG}}{\gamma} - 1 \right) \quad (5.109)$$

$$\frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} = -h \left(\frac{\gamma_{HG}}{\gamma} - 1 \right) \quad (5.110)$$

Igualando el resultado de la ecuación de energía y la ecuación del manómetro diferencial, se tiene:

$$\frac{V_2^2}{2g} \left[C_o^2 \frac{D_o^4}{D_1^4} - 1 \right] = -h \left(\frac{\gamma_{HG}}{\gamma} - 1 \right) \quad (5.111)$$

Se intercambian términos para eliminar el signo (-) de la siguiente manera:

$$-\frac{V_2^2}{2g} \left[1 - C_o^2 \frac{D_o^4}{D_1^4} \right] = -h \left(\frac{\gamma_{HG}}{\gamma} - 1 \right) \quad (5.112)$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2gh \left(\frac{\gamma_{HG}}{\gamma} - 1 \right)}{1 - C_o^2 \left(\frac{D_o}{D_1} \right)^4}} \quad (5.113)$$

Acá, es necesario introducir el coeficiente C_v para encontrar la velocidad real:

$$V_{r2} = C_v \sqrt{\frac{2gh \left(\frac{\gamma_{HG}}{\gamma} - 1 \right)}{1 - C_o^2 \left(\frac{D_o}{D_1} \right)^4}} \quad (5.114)$$

Pero se puede relacionar la velocidad en el orificio con la velocidad en la vena contracta, según la ecuación de continuidad de la siguiente manera:

$$V_o A_o = V_{r2} A_2 \Rightarrow V_o = V_{r2} \frac{D_2^2}{D_o^2} = C_o V_{r2} \quad (5.115)$$

Por ecuación de continuidad, el caudal que pasa por el orificio estará dado por:

$$Q = V_o A_o = C_o A_o V_{r2} = C_o C_v A_o \sqrt{\frac{2gh \left(\frac{\gamma_{HG}}{\gamma} - 1 \right)}{1 - C_o^2 \left(\frac{D_o}{D_1} \right)^4}} \quad (5.116)$$

Se introduce el **coeficiente de gasto** $C_d = C_v \cdot C_o$ (Sotelo, 2005), obteniéndose una ecuación general para el caudal real que atraviesa el orificio:

$$Q = C_d A_o \sqrt{\frac{2gh \left(\frac{\gamma_{HG}}{\gamma} - 1 \right)}{1 - C_o^2 \left(\frac{D_o}{D_1} \right)^4}} \quad (5.117)$$

El valor de C_d y C_o se determinan experimentalmente. Se pueden usar otros dispositivos de medición de la presión antes y después de la placa con orificio, que en términos de columna de agua se puede expresar la

diferencia de presión como Δh ; por lo tanto, generalizando la ecuación se tiene:

$$Q = C_d A_o \sqrt{2g\Delta h} \quad (5.118)$$

Para números de Reynolds grandes (mayores a 100.000), los coeficientes se vuelven constantes, dando valores de $C_v = 0,99$, $C_o = 0,605$ y $C_d = 0,60$, tomados de la información gráfica presentada por Sotelo (2005). Por ejemplo, si se adquiriese una paleta con orificio comercial, el fabricante suministra los valores de los coeficientes; sin embargo, si se construyese el dispositivo, el mismo se debería calibrar a nivel de laboratorio. Shames (1995), proporciona una ecuación para hallar C_d para boquillas, en función del número de Reynolds, y la relación entre el diámetro de la boquilla y el diámetro de la tubería.

5.20.3 Orificio en descarga libre

Este es un orificio muy similar al anterior, pero en este caso se localiza al final de una tubería para efectos de medir el caudal, tal y como se muestra en la **Figura 5-36**, en la cual se observa que el punto 2 está en contacto con la atmósfera, por lo tanto, la presión en ese punto es cero. Realizando un procedimiento similar al abordado para el orificio dentro de una tubería, se tiene:

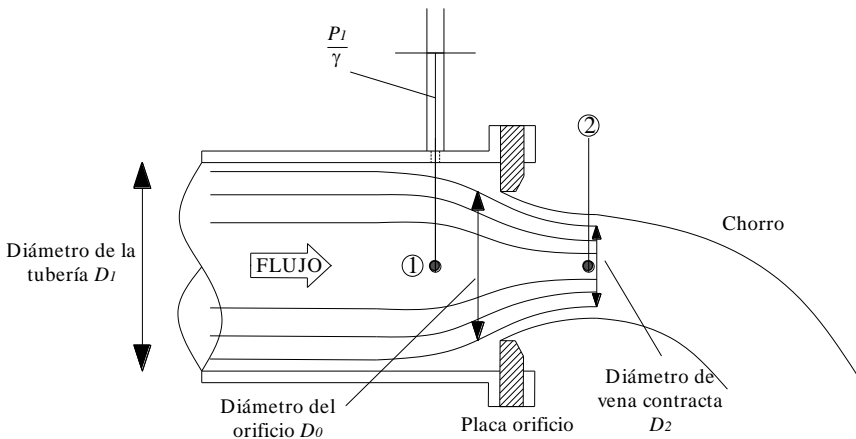


Figura 5-36.- Orificio al final de la tubería con descarga libre.

Inicialmente se desprecian las pérdidas de energía, cuyo efecto se compensará más adelante con algunos coeficientes.

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad (5.119)$$

Como la carga de posición $z_1 = z_2$ y $p_1/\gamma = p_2/\gamma$, entonces se tiene que:

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g} \quad (5.120)$$

Por ecuación de continuidad, se encuentra la velocidad V_1 en función de V_2 .

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 \Rightarrow V_1 = \frac{A_2}{A_1} V_2 = V_2 \frac{D_2^2}{D_1^2} \quad (5.121)$$

Si se introduce el coeficiente de contracción $C_0 = A_2/A_0$ se tiene:

$$V_1 = \frac{A_2}{A_1} \left(\frac{A_0}{A_0} \right) V_2 = \frac{A_0}{A_1} \left(\frac{A_2}{A_0} \right) V_2 = V_2 C_0 \frac{D_0^2}{D_1^2} \quad (5.122)$$

Pero la relación de A_2/A_0 es igual al coeficiente de contracción C_0 , entonces:

$$V_1 = V_2 C_0 \frac{D_0^2}{D_1^2} \Rightarrow \frac{V_1^2}{2g} = C_0^2 \frac{D_0^4}{D_1^4} \frac{V_2^2}{2g} \quad (5.123)$$

Se sustituye V_1 en la ecuación de energía:

$$\frac{p_1}{\gamma} + C_0^2 \frac{D_0^4}{D_1^4} \frac{V_2^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g} \quad (5.124)$$

Luego, se despeja V_2 :

$$C_o^2 \frac{D_o^4}{D_1^4} \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g} = -\frac{p_1}{\gamma} \quad (5.125)$$

$$\frac{V_2^2}{2g} \left[C_o^2 \frac{D_o^4}{D_1^4} - 1 \right] = -\frac{p_1}{\gamma} \quad (5.126)$$

Se intercambian términos para eliminar el signo negativo (-):

$$-\frac{V_2^2}{2g} \left[1 - C_o^2 \frac{D_o^4}{D_1^4} \right] = -\frac{p_1}{\gamma} \quad (5.127)$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2g \frac{p_1}{\gamma}}{1 - C_o^2 \left(\frac{D_o}{D_1} \right)^4}} \quad (5.128)$$

Para encontrar la velocidad real, se hace necesario introducir el coeficiente C_v :

$$V_{r2} = C_v \sqrt{\frac{2g \frac{p_1}{\gamma}}{1 - C_o^2 \left(\frac{D_o}{D_1} \right)^4}} \quad (5.129)$$

Pero se puede relacionar la velocidad en el orificio con la velocidad en la vena contracta.

$$V_o A_o = V_{r2} A_2 \Rightarrow V_o = V_{r2} \frac{D_2^2}{D_o^2} = C_o V_{r2} \quad (5.130)$$

Por continuidad, el caudal que pasa por el orificio es dado por:

$$Q = V_o A_o = C_o A_o V_{r2} = C_o A_o C_v \sqrt{\frac{2g \frac{p_1}{\gamma}}{1 - C_o^2 \left(\frac{D_o}{D_1}\right)^4}} \tag{5.131}$$

Los coeficientes C_d , C_v y C_o , se determinan de manera experimental. En este caso, se despeja el coeficiente de velocidad C_v y se miden las otras variables. Incluso, se puede medir el diámetro del chorro en la contracción y calcular C_o . Para una primera aproximación, se pueden tomar los mismos valores de C_d , C_v y C_o , que se usan para orificios en un depósito.

$$C_v = \frac{Q}{C_o A_o \sqrt{\frac{2g \frac{p_1}{\gamma}}{1 - C_o^2 \left(\frac{D_o}{D_1}\right)^4}}} \tag{5.132}$$

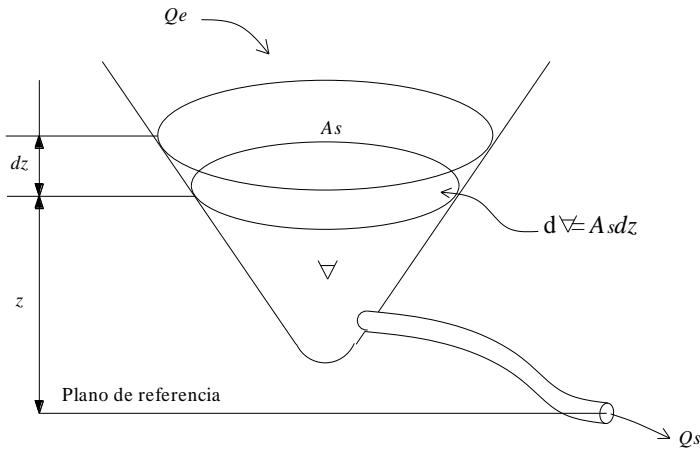
5.20.4 Orificio con flujo no permanente

Este tipo de flujo se presenta cuando se desocupa un tanque por medio de un orificio, como se muestra en la la **Figura 5-37a**, cuando el nivel en el tanque no es constante. A medida que el nivel del agua en el tanque (carga de posición) disminuye, el flujo a través del orificio también disminuye.

Con base en la **Figura 5-37b**, donde (∇) representa el volumen de líquido contenido en el depósito en un momento determinado, hay un caudal de entrada (Q_e) y un caudal de salida (Q_s), la variación de volumen durante un pequeño intervalo de tiempo (dt) se puede expresar como:

$$d\nabla = Q_e dt - Q_s dt \tag{5.133}$$

(a)



(b)



Figura 5-37.- (a) Descarga con altura variable en un depósito. (b) Fotografía de un orificio descargando agua de un tanque, (Montaje Laboratorio de Hidráulica, Universidad de Nariño).

Si A_s es el área de la superficie libre del líquido y (dz) es la variación del nivel del agua de la superficie, entonces se tiene que:

$$d\forall = A_s dz \quad (5.134)$$

Igualando estas dos expresiones para $(d\forall)$, se obtiene:

$$A_s dz = Q_e dt - Q_s dt \quad (5.135)$$

El caudal de salida (Q_s) normalmente es una función de (z). Como resultado de aplicar la ecuación de Bernoulli, se dedujo la ecuación para el caudal que sale desde el depósito a través de un orificio o conducto de área (A_o) cuando está sometida a una diferencia de altura (z); entonces se tiene:

$$Q_s = C_d A_o \sqrt{2gz} \quad (5.136)$$

Si el fluido rebosa sobre un vertedero rectangular de longitud (L), entonces:

$$Q_s = C_d L h^{3/2} \quad (5.137)$$

Donde (C_d) es un coeficiente numérico de descarga propio del orificio o vertedero, y (z) es la variable o (h).

Para cualquiera de los casos anteriores, el valor de (z) o (h) es la altura variable de la superficie del fluido por encima del plano de referencia (datum) apropiado. La entrada de caudal (Q_e) normalmente varía con el tiempo: sin embargo, se tendrá en cuenta que $Q_e = 0$ o constante. Para ello, despejando dt e integrando la ecuación (5.47), se obtiene la expresión de tiempo (t) para que modifique el nivel del agua de z_1 a z_2 , por lo tanto:

$$dt = \frac{A_s dz}{(Q_e - Q_s)} \Rightarrow t = \int_{z_1}^{z_2} \frac{A_s dz}{Q_e - Q_s} \quad (5.138)$$

La integral solo se resuelve si Q_e es cero o constante y si A_s y Q_s se pueden expresar como funciones de (z). Para el caso de depósitos naturales, el área de la superficie del líquido no se puede expresar como una función matemática de z ; por ello, sus valores se obtendrían a partir de un mapa topográfico o batimétrico.

La ecuación (5.138), se puede resolver gráficamente representando los valores de $A_s / (Q_e - Q_s)$ frente a (z). El área, a una escala dada, comprendida bajo dicha curva es el valor numérico de la integral.

Para el presente texto, se toma la solución dada por Merritt (1999) para un tanque de sección transversal constante, con cabeza variable y salida por medio de un orificio circular.

El tiempo requerido para que cierta cantidad de agua circule desde un depósito puede calcularse al igualar el volumen de agua que circula por el orificio o tubo en el tiempo dt , con la reducción de volumen en el depósito (Merritt. 1999, p. 21-33).

$$Q_s dt = d\forall \Rightarrow C_d A_o \sqrt{2gz} dz = A_s dz \quad (5.139)$$

Despejando dt se tiene:

$$dt = \frac{A_s dz}{C_d A_o \sqrt{2gz}} \quad (5.140)$$

$$t = \int_{h_i}^H \frac{A_s dz}{C_d A_o \sqrt{2gz}} = \frac{A_s}{C_d A_o \sqrt{2g}} \int_{h_i}^H \frac{dz}{\sqrt{z}} \quad (5.141)$$

Como el área superficial del tanque se considera constante, se tiene que:

$$t = \frac{A_s}{C_d A_o \sqrt{2g}} \int_{h_i}^H \frac{dz}{\sqrt{z}} \quad (5.142)$$

$$t = \frac{2A_s}{C_d A_o \sqrt{2g}} (\sqrt{H} - \sqrt{h_i}) \quad (5.143)$$

Donde H es la carga al comienzo, que se puede fijar constante como la altura máxima; h_i es la carga al final y es la que va variando desde H hasta cero en el eje del orificio de salida; y t es el tiempo para que el nivel del agua descienda desde H hasta h_i .

5.20.5 Tubo Pitot

- **En flujo a superficie libre**

El tubo Pitot, que se muestra en la **Figura 5-38**, consiste en un tubo generalmente de vidrio de diámetro pequeño (≈ 5 mm) doblado en L, donde el extremo inferior se coloca dentro del fluido en contra de la corriente y el otro extremo va libre hacia la atmósfera. Este dispositivo no mide directamente el caudal: lo que permite medir es la velocidad del flujo en un punto.

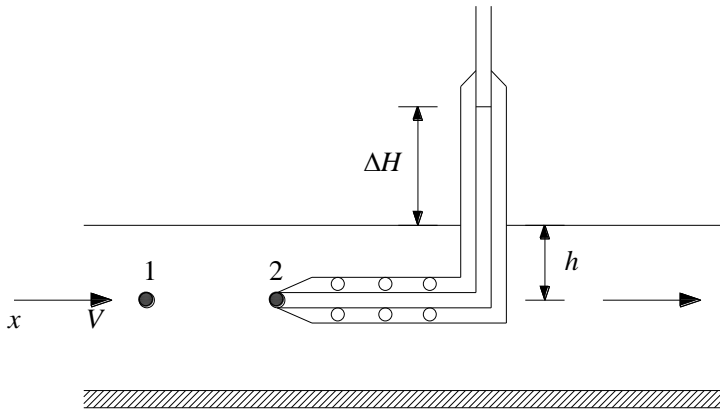


Figura 5-38.- Esquema de un tubo Pitot colocado en un flujo a superficie libre.

Para estimar la velocidad, se selecciona un punto (1) aguas arriba de la boca del tubo Pitot, y otro punto (2) justo en la boca del tubo, y se plantea la ecuación de Bernoulli sobre una línea de corriente horizontal entre estos dos puntos, sin considerar pérdidas. Así:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad (5.144)$$

En este caso se considera que la velocidad en 2 es nula, ya que las partículas al chocar con la columna inmóvil de fluido pierden su velocidad; adicionalmente, las cargas de posición son iguales $z_1 = z_2$.

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} \quad (5.145)$$

La presión en el punto 2, debe ser igual a la columna de agua dentro del tubo Pitot:

$$\frac{p_2}{\gamma} = h + \Delta H \quad (5.146)$$

La presión en el punto 1 será la columna de agua por encima del mismo:

$$\frac{p_1}{\gamma} = h \quad (5.147)$$

$$h + \frac{V_1^2}{2g} = (h + \Delta H) \Rightarrow V_1 = \sqrt{2g\Delta H} \quad (5.148)$$

- **En flujo a presión**

Para flujo a presión se coloca el tubo Pitot como se indica en la **Figura 5 39**, acoplado con un manómetro en U que posee un fluido indicador de peso específico γ_m .

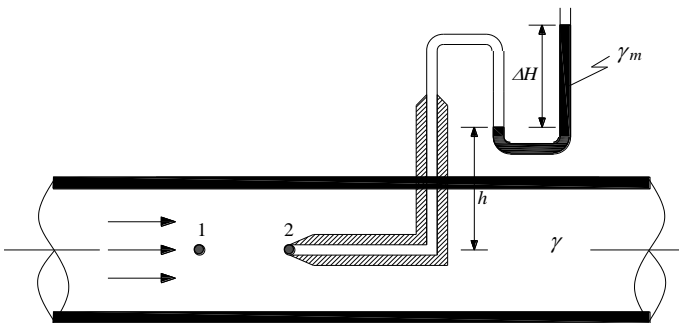


Figura 5-39.- Tubo Pitot colocado en un flujo a presión.

Para estimar la velocidad se selecciona un punto (1) aguas arriba de la boca del tubo Pitot, y otro punto (2) justo en la boca del tubo, y se plantea la ecuación de Bernoulli sobre una línea de corriente horizontal entre estos dos puntos, sin considerar pérdidas. Así, se tiene que:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad (5.149)$$

En este caso se considera que la velocidad en 2 es nula, puesto que las partículas al chocar con la columna inmóvil de fluido, pierden su velocidad; adicionalmente, las cargas de posición son iguales $z_1 = z_2$.

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} \quad (5.150)$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2 - p_1}{\gamma} \quad (5.151)$$

A partir de la lectura del manómetro se sabe, que:

$$p_2 = \gamma_m \Delta H + h\gamma \quad (5.152)$$

Para medir la presión en 1 o presión no perturbada, se coloca un tubo Pitot modificado con más orificios, en este sentido, el texto de Shames (1995, p. 445) proporciona detalles acerca de su medición.

5.20.6 Tubo Venturi

En la **Figura 5-40** se muestra la geometría del tubo Venturi. Este dispositivo se utiliza para medir el caudal en una tubería. El tubo Venturi es una sección de tubería insertada en el tubo en el que se necesita hacer la medición. El tubo Venturi se asemeja a una boquilla insertada dentro del tubo como orificio, en el sentido de que tiene una porción convergente desde el diámetro interno de la tubería hasta una

garganta, seguida nuevamente por una sección divergente desde la garganta hacia el diámetro interno de la tubería. Se utiliza un manómetro diferencial en U con el cual se calcula la diferencia de presiones entre las posiciones 1 y 2.

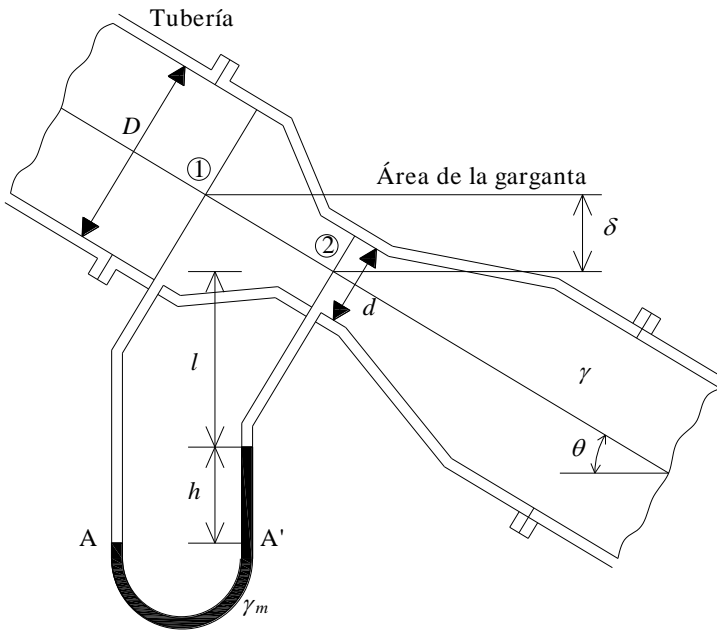


Figura 5-40.-Tubo Venturi colocado en un flujo a presión. Fuente: Adaptada de (Shames, 1995, p. 787).

Como en el caso del orificio, se aplica ecuación de Bernoulli antes y después del orificio:

$$E_1 = E_2 + \sum h_{1-2} \quad (5.153)$$

Inicialmente se desprecian las pérdidas de energía.

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad (5.154)$$

Es de notar que en este caso no se puede despreciar ningún término. Agrupando se tiene:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + (z_1 - z_2) = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} \quad (5.155)$$

Se aplica la ecuación del manómetro, igualando presiones en los puntos A-A'.

$$P_A = P_1 + [h + \delta + (z_1 - z_2)]\gamma \quad (5.156)$$

$$P_{A'} = P_2 + \delta\gamma + h\gamma_m \quad (5.157)$$

Igualando en A-A', se obtiene:

$$P_1 + [h + \delta + (z_1 - z_2)]\gamma = P_2 + \delta\gamma + h\gamma_m \quad (5.158)$$

$$P_1 - P_2 + (z_1 - z_2)\gamma + h\gamma + \delta\gamma = \delta\gamma + h\gamma_m \quad (5.159)$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} + (z_1 - z_2) = h \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right) \quad (5.160)$$

Al igualar la ecuación de Bernoulli y la del manómetro, se tiene que:

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = h \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right) \quad (5.161)$$

Por continuidad, se encuentra la velocidad V_1 en función de V_2 :

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 \Rightarrow V_1 = \frac{A_2}{A_1} V_2 = V_2 \frac{D_2^2}{D_1^2} \quad (5.162)$$

Sustituyendo en la ecuación (5.161) se tiene:

$$\frac{V_2^2 - V_2^2 \left(\frac{D_2^2}{D_1^2} \right)^2}{2g} = h \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right) \quad (5.163)$$

$$\frac{V_2^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^4 \right] = h \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right) \quad (5.164)$$

Introduciendo el parámetro adimensional de densidad:

$$\Delta = \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right) \quad (5.165)$$

Despejando V_2 se tiene:

$$V_2 = \frac{\sqrt{2gh\Delta}}{\sqrt{1 - \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^4}} \quad (5.166)$$

Acá es necesario introducir el coeficiente C_v para encontrar la velocidad real, ya que no se consideraron las pérdidas de energía entre los puntos 1 y 2.

$$V_2 = C_v \frac{\sqrt{2gh\Delta}}{\sqrt{1 - \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^4}} \quad (5.167)$$

Por ecuación de continuidad, el caudal que pasa por el orificio, es dado como:

$$Q = V_2 A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} C_v \sqrt{\frac{2gh\Delta}{1 - \left(\frac{D_o}{D_1}\right)^4}} \tag{5.168}$$

Así, el valor del coeficiente de velocidad C_v es de aproximadamente 0,985 para tubos Venturi nuevos y de 0,98 para tubos Venturi viejos. Chereque (1987, p. 78) proporciona valores de un coeficiente similar a C_v , en función del número de Reynolds y la relación entre el diámetro de la contracción y el diámetro de la tubería.

5.20.7 Sifón

El sifón es un dispositivo que sirve para aforar el caudal cuando se descarga un líquido por encima de un obstáculo que se encuentra a una cota mayor que el nivel del líquido del contenedor. El objeto es calcular la velocidad en el tubo sifón y la presión en el punto más alto. Su geometría básica se ilustra en la **Figura 5-41**.

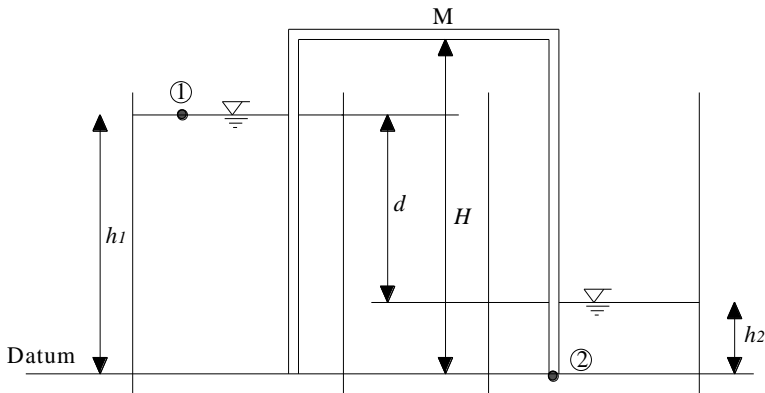


Figura 5-41.- Geometría general de un sifón.

Se aplica la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2.

$$E_1 = E_2 + \sum h_{1-2} \tag{5.169}$$

Inicialmente se desprecian las pérdidas de energía.

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad (5.170)$$

Es de tener en cuenta que la presión en 1 es p_{atm} y la presión en el punto 2 es: $p_2 = p_{atm} + z_2\gamma$, el valor de la carga de posición en 2, $z_2 = 0$. La velocidad en 1, V_1 , se considera muy pequeña comparada con V_2 .

$$\frac{p_{atm}}{\gamma} + h_1 + 0 = \frac{p_{atm} + \gamma h_2}{\gamma} + 0 + \frac{V_2^2}{2g} \quad (5.171)$$

Como la presión atmosférica p_{atm} se cancela, entonces se tiene que:

$$h_1 = h_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad (5.172)$$

$$\frac{V_2^2}{2g} = (h_1 - h_2) = d \quad (5.173)$$

Al despejar la velocidad, se obtiene:

$$V_2 = \sqrt{2gd} \quad (5.174)$$

El caudal viene dado por la ecuación de continuidad.

$$Q = A_s \sqrt{2gd} \quad (5.175)$$

A_s es el área del tubo del sifón.

La presión en el punto M, se halla aplicando la ecuación de energía entre el punto 1 y el punto M.

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_M}{\gamma} + z_M + \frac{V_M^2}{2g} \quad (5.176)$$

Al aplicar simplificaciones para presión y velocidad en el punto 1 se tiene:

$$\frac{p_1}{\gamma} = 0, \frac{V_1^2}{2g} \approx 0 \quad (5.177)$$

$$\frac{p_M}{\gamma} = (h_1 - H) - \frac{V_2^2}{2g} \quad (5.178)$$

Como,

$$\frac{V_2^2}{2g} = d \quad (5.179)$$

Entonces, al sustituir, se tiene que:

$$\frac{p_M}{\gamma} = (h_1 - H) - d \quad (5.180)$$

O también, como,

$$\frac{p_M}{\gamma} = (h_1 - H) - (h_1 - h_2) = -(H - h_2) \quad (5.181)$$

$$p_M = \gamma h_2 - \gamma H \quad (5.182)$$

Lo que indica que la presión en el punto M es la presión en el lado derecho reducida en la altura γH . El valor de p_M/γ , podrá descender hasta el vacío absoluto, que para el agua es aproximadamente -10 m.c.a.; si p_M/γ descende hasta la presión de vapor del fluido, se producirá el fenómeno de cavitación (Niño y Duarte, 2007, pp. 4–18). Mientras que, si $p_M/\gamma < -10$ m.c.a., el sifón cortará el flujo.

Para que el flujo quede establecido, es necesario extraer previamente el aire de la tubería, de un modo similar a cuando se desea extraer gasolina del tanque de un vehículo. Por otro lado, la presión de vapor por del agua (p_v) a la temperatura ambiente ($\approx 20^\circ\text{C}$) es de 0,25 m.c.a. en unidades absolutas o -10,08 m.c.a. en unidades relativas o manométricas, por lo que es de esperar un flujo normal sin formación de burbujas de aire ($P_M > p_v$) (Chereque, 1987, p. 84).

En un sifón, el caudal que fluye depende solamente de la diferencia de niveles entre z_1 y z_2 , o la altura (d), y fluirá hasta que la altura H del punto M no sobrepase el valor de la presión atmosférica o no alcance el vacío absoluto.

Un análisis detallado del funcionamiento del sifón también se puede consultar en Munson et al. (1990, p. 117).

5.21 Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.21.1. (Alberro et al., 2011, p. 77).

A partir de un depósito presurizado, representado gráficamente en la **Figura 5-42**, circula un aceite de densidad relativa 0,85 a través de un orificio de 8 cm de diámetro y a razón de 24 L/s. El diámetro del chorro a la salida es de 5,85 cm; el nivel del aceite es de 7,5 m por encima del orificio; la presión del aire en la parte superior del depósito es de -200 Torr (1/760 de una atmósfera estándar). Se pide encontrar los coeficientes de velocidad, contracción y gasto del orificio.

Respuesta:

$C_o = 0,534$, $C_v = 0,97$, $C_d = 0,571$.

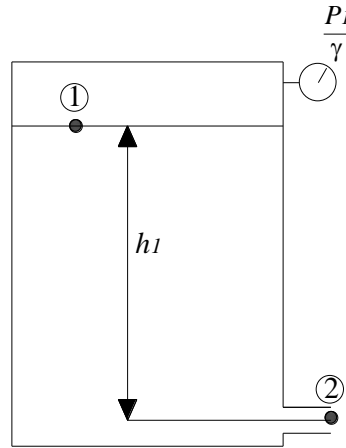


Figura 5-42.- Geometría del depósito con orificio.

Ejercicio 5.21.2. (Almandoz, 2010, p. 43).

En el sistema mostrado en la **Figura 5-43**, despreciando las pérdidas, se pide: **(a)** El caudal circulante. **(b)** Valores de R_1 y R_2 .

Respuesta:

(a) 7,78 L/s.

(b) 0,67 y 0,492 m.

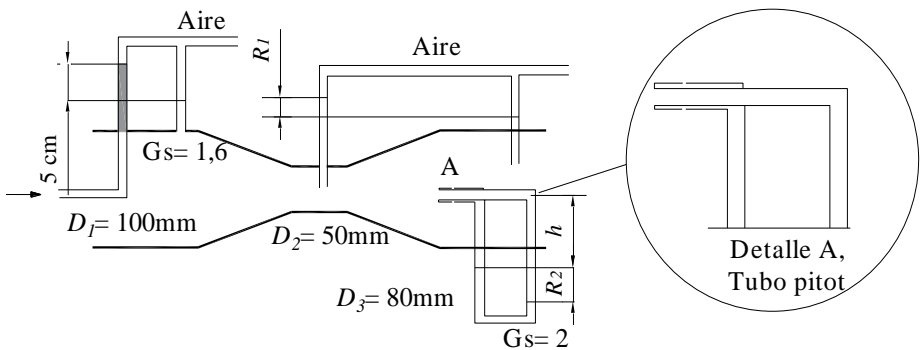


Figura 5-43.- Esquema de la instalación.

Ejercicio 5.21.3. (Almandoz, 2010, p. 45).

Un diafragma de 50 mm de diámetro sirve para medir el caudal de agua que circula por una tubería horizontal de 80 mm de diámetro. Se desea

calibrar el diafragma mediante un piezómetro abierto, un Pitot y un manómetro diferencial de mercurio. Para un valor del flujo determinado las lecturas son las siguientes: Piezómetro -1.960 mm; Pitot - 2.700 mm; manómetro - 900 mm. Se pide: **(a)** Coeficiente de gasto del diafragma en tales condiciones. **(b)** Número de Reynolds.
 Dato: Viscosidad del agua = 1 cSt (centistokes).

Respuestas:

(a) 0,65

(b) 304800.

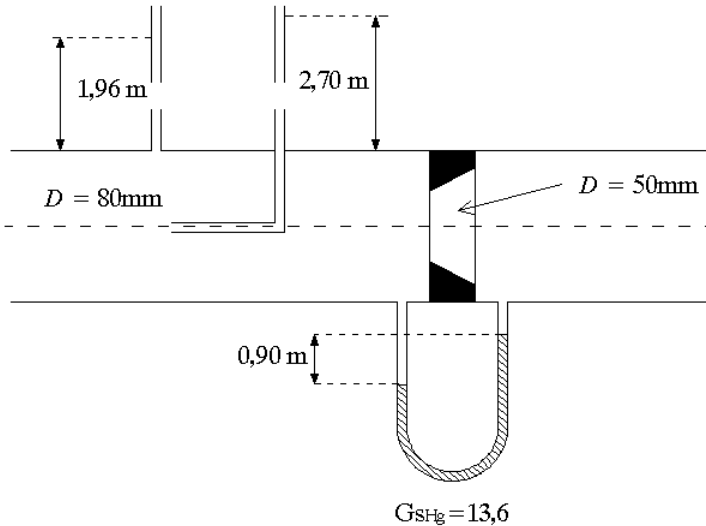


Figura 5-44.- Detalle de la instalación.

Ejercicio 5.21.4. (Chereque, 1987, p. 84).

Según la **Figura 5-45** de un sifón para un diámetro de tubería de $0,2\text{ m}$ y un caudal de $0,10\text{ m}^3/\text{s}$, se solicita: **(a)** Encontrar las pérdidas de energía entre los puntos (1) y (3). **(b)** Calcular la presión en el punto 2, suponiendo que entre 1 y 2 ocurren los $2/3$ de la pérdida total de energía en el sifón.

Respuestas:

(a) $\sum h_{1-3} = 0,68\text{ m}$.

(b) $P_2 = -0,337 \text{ kg/cm}^2$, existe vacío parcial.

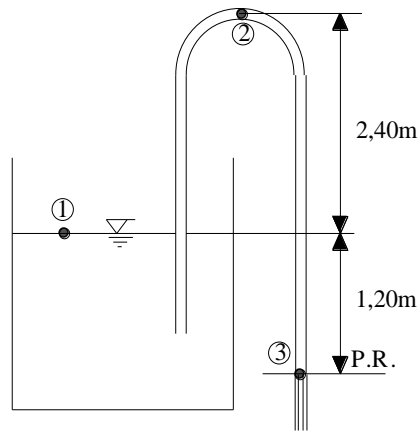


Figura 5-45.- Geometría del sifón.

Ejercicio 5.21.5. (Almandoz, 2010, p. 31).

Un sifón que permite la salida del agua de un recipiente de grandes dimensiones, está constituido por un tubo de 10 cm de diámetro, en el cual la línea central superior se encuentra 4 m por encima de la superficie libre del depósito. Se pide: (a) Caudal máximo que puede esperarse obtener con este dispositivo sin que se produzca cavitación. (b) Cota de salida del sifón con relación al nivel superior del depósito. Dato: Tensión de vapor del agua = 1 m.c.a. (presión absoluta). $P_{atm} = 1 \text{ atm}$. Nota: La cavitación teórica se produce en aquel punto en que su presión es equivalente a la tensión de vapor máxima del líquido que fluye.

Respuestas:

(a) 80,3 L/s.

(b) -5,3 m.

5.22 Aplicación de ecuación de energía a canales abiertos

La energía en canales abiertos está compuesta por la energía cinética y la energía potencial; la energía potencial se compone de dos partes, una debida a la posición de la partícula y la otra debida a la energía de presión en el punto considerado. La energía potencial se puede transformar en cinética y viceversa, y una parte de la energía se pierde

en forma de calor, produciendo lo que se conoce como pérdida de energía. Las causas de las pérdidas de energía son las mismas que se contemplan para flujo en conductos a presión (Cano, 2002, pp. 27–29).

5.22.1 Planteamiento de ecuación de Bernoulli

Se considera un canal abierto cuando la superficie del líquido se encuentra sometida a la presión atmosférica. Además, se asume que existe presión hidrostática, por considerar que las líneas de corriente son paralelas. Para aplicar la ecuación de Bernoulli se toma como referencia el fondo del canal, o se aplica entre dos puntos localizados en el fondo del mismo. En la **Figura 5-46**, se muestra la geometría básica del canal abierto, donde: P.E.I. representa el plano de energía ideal; L.E. es la línea de energía; S.F. es la superficie del fluido; S_e es la pendiente de la línea de energía; S_w es la pendiente de la superficie de fluido; S_o es la pendiente del fondo del canal; $V^2/2g$ es la altura (o cabeza) de velocidad; h es la altura de presión generada sobre el fondo; V es la velocidad media del flujo; z es la altura de posición, donde $V^2/2g + h$ es lo que se conoce como energía específica; finalmente, h_v es la pérdida de energía del flujo entre las dos secciones que se consideran para el análisis.

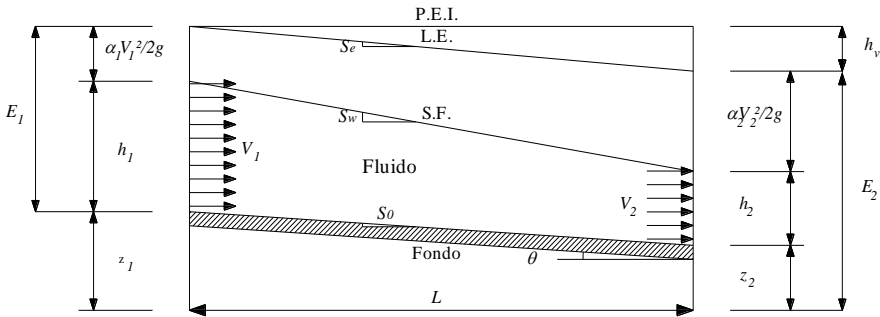


Figura 5-46.- Flujo en un canal abierto.

Cuando se estudia el flujo uniforme en canales, este tiene unas propiedades inherentes, como: la altura h permanece constante, la superficie del agua es paralela al fondo, la velocidad V es constante, la pendiente de la línea de energía S_e es igual a la pendiente del fondo S_o , las pérdidas por fricción son compensadas por la pendiente del fondo.

Al aplicar la ecuación de Bernoulli entre las secciones 1 y 2, sobre puntos localizados en el fondo, se tiene:

$$E_1 = E_2 + h_v \quad (5.183)$$

$$z_1 + h_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + h_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_v \quad (5.184)$$

Inicialmente se desprecian las pérdidas de energía.

Para flujo normal se aplica que $h_1 = h_2$, por lo tanto, $h_v = z_1 - z_2$. La energía específica la conforman el término de carga de velocidad y la carga de presión, igual a la profundidad del flujo en la sección para inclinación del fondo con bajas pendientes; es decir, para ángulos pequeños ($\theta \leq 3^\circ$), es dada como:

$$E_1 = h_1 + \frac{V_1^2}{2g}, E_2 = h_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad (5.185)$$

5.22.2 Aplicación sobre una compuerta

Una compuerta es una estructura hidráulica colocada en un canal para controlar el flujo; si se conoce su geometría, se puede encontrar el flujo que circula. Las compuertas son similares a los orificios y se pueden usar como medidores de caudal. En la **Figura 5-47** se ilustra la geometría de una compuerta, donde el flujo pasa por la parte inferior. Cabe mencionar que la altura m es la altura de la abertura bajo la compuerta y h_2 es la profundidad del líquido justo en su mayor contracción o en la denominada “vena contracta” (Munson et al., 1990, p. 121).

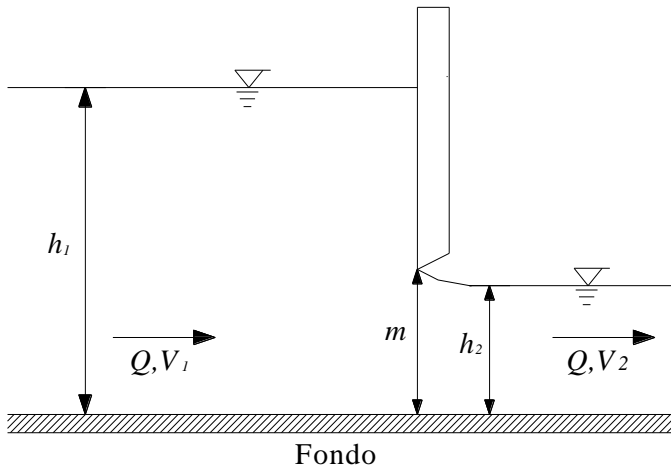


Figura 5-47.- Geometría de una compuerta instalada en un canal.

Al aplicar la ecuación de Bernoulli entre las secciones 1 y 2 sobre el fondo del canal, se tiene:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = h_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad (5.186)$$

$$\frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} = h_2 - h_1 \quad (5.187)$$

Combinado dicha expresión con la ecuación de continuidad se tiene:

$$V_1 = V_2 \frac{A_2}{A_1} \quad (5.188)$$

Si se considera un ancho del canal constante y una sección transversal rectangular, se tendrá que $A_1 = B \cdot h_1$ y $A_2 = B \cdot h_2$; con base en lo anterior se tiene:

$$V_1 = V_2 \frac{h_2}{h_1} \quad (5.189)$$

Sustituyendo en la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{\left(V_2 \frac{h_2}{h_1}\right)^2 - V_2^2}{2g} = h_2 - h_1 \quad (5.190)$$

$$\frac{V_2^2}{2g} \left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 - 1 \right] = h_2 - h_1 \quad (5.191)$$

Realizando el procedimiento algebraico se tiene que:

$$\frac{V_2^2}{2g} \left[\frac{h_2^2 - h_1^2}{h_1^2} \right] = h_2 - h_1 \quad (5.192)$$

$$\frac{V_2^2}{2g} (h_2 - h_1)(h_2 + h_1) = (h_2 - h_1)h_1^2 \quad (5.193)$$

$$\frac{V_2^2}{2g} = \frac{h_1^2}{(h_2 + h_1)} \quad (5.194)$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2gh_1^2}{(h_2 + h_1)}} \quad (5.195)$$

Si se introduce el coeficiente de velocidad $C_v = V_{r2}/V_2$, para obtener la velocidad real, V_r , se obtiene:

$$V_{r2} = C_v \sqrt{\frac{2gh_1^2}{(h_2 + h_1)}} \quad (5.196)$$

$$V_{r2} = C_v \frac{1}{\sqrt{\frac{(h_2 + h_1)}{h_1}}} \sqrt{2gh_1} \quad (5.197)$$

$$V_{r2} = C_v \frac{1}{\sqrt{\frac{h_2}{h_1} + 1}} \sqrt{2gh_1} \quad (5.198)$$

Si se introduce el coeficiente de contracción $h_2 = mC_c$, entonces se tiene que:

$$V_{r2} = C_v \frac{1}{\sqrt{\frac{mC_c}{h_1} + 1}} \sqrt{2gh_1} \quad (5.199)$$

Usando la ecuación de continuidad para el caudal,

$$Q_r = \frac{Bh_2C_v\sqrt{2gh_1}}{\sqrt{\frac{mC_c}{h_1} + 1}} \quad (5.200)$$

Como el área bajo la compuerta es $A_c = mB$, entonces:

$$Q_r = \frac{C_cC_v}{\sqrt{\frac{mC_c}{h_1} + 1}} A_c \sqrt{2gh_1} \quad (5.201)$$

Como el valor del coeficiente C_d es definido como,

$$C_d = \frac{C_cC_v}{\sqrt{\frac{mC_c}{h_1} + 1}} \quad (5.202)$$

El caudal real puede expresarse como:

$$Q_r = C_d A_c \sqrt{2gh_1} \quad (5.203)$$

El valor de C_d para compuertas planas verticales está dado en la literatura en forma gráfica por Rouse (1951); en dicha literatura, se puede corroborar que para ese tipo de compuertas, con un valor de $h_1/m > 10$, el valor de C_d tiende a ser constante e igual a 0,61.

5.22.3 Aplicación en canales con cambio de pendiente

Conociendo los datos aguas arriba de un punto, se necesita conocer las condiciones del flujo aguas abajo, como se muestra en la **Figura 5-48**.

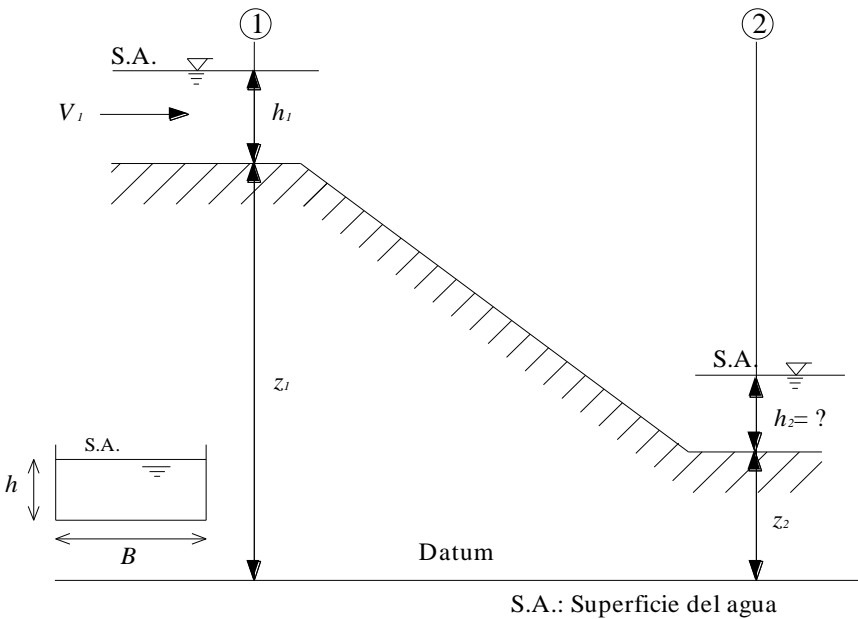


Figura 5-48.- Esquema del flujo de un canal.

Se parte del hecho de que se conocen las pérdidas de energía h_v .

$$z_1 + h_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + h_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_v \tag{5.204}$$

Por ecuación de continuidad, se tiene:

$$V_2 = V_1 \frac{h_1}{h_2} \quad (5.205)$$

$$z_1 + h_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + h_2 + \alpha_2 \frac{V_1^2}{2g} \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 + h_v \quad (5.206)$$

Como el objetivo es hallar la profundidad h_2 se reorganiza la ecuación así:

$$(z_1 - z_2) + h_1 - h_v + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = h_2 + \alpha_2 \frac{V_1^2}{2g} h_1^2 h_2^{-2} \quad (5.207)$$

Se parte del hecho de que es conocida la siguiente expresión:

$$k = (z_1 - z_2) + h_1 - h_v + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} \quad (5.208)$$

Sustituyendo k en la ecuación (5.206) se tiene:

$$k = h_2 + \alpha_2 \frac{V_1^2}{2g} h_1^2 h_2^{-2} \quad (5.209)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por h_2^2 , se obtiene:

$$h_2^3 + \alpha_2 \frac{V_1^2}{2g} h_1^2 = k h_2^2 \quad (5.210)$$

$$h_2^3 - k h_2^2 + \alpha_2 \frac{V_1^2}{2g} h_1^2 = 0 \quad (5.211)$$

Que corresponde a una ecuación cúbica en h_2 . Al comparar con la forma canónica de la ecuación cúbica:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (5.212)$$

Se tiene:

$$a = 1; b = k; c = 0; d = \alpha_2 \frac{V_1^2}{2g} h_1^2 \quad (5.213)$$

El coeficiente de Coriolis se supone igual a la unidad en ambas secciones. Uno de los tres valores de h_2 es negativo, el cual no tiene significado físico, pero dos soluciones sí son posibles. Una manera de entender estas alturas es usar la curva de energía específica, en la cual se interpreta que para la misma energía existen dos alturas posibles; pero su explicación está fuera del alcance de este texto, ya que dicho tema se trata con mayor profundidad en el estudio de la hidráulica de canales.

5.23 Ejercicios propuestos

Ejemplo 5.23.1. (Niño y Duarte, 2007, pp. 4–16)

Encontrar la profundidad del agua en la sección (2) según el esquema indicado en la **Figura 5-48**, para los siguientes datos: Pérdida de energía entre las secciones 1 y 2 $h_v = 0,46$ m; $h_1 = 1,22$ m; $z_1 = 2,44$ m; $z_2 = 0,0$ m; $V_1 = 4,9$ m/s; ancho del canal $B = 3$ m; $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Respuesta:

$h_2 = 4,3226$ m, $h_2 = 0,6994$ m. Como se expresó anteriormente, se debe solucionar una ecuación cúbica. A continuación, se presenta el código Matlab (u Octave), para encontrar las raíces de un polinomio de tercer grado.

```
function y = raices(x)
    close all;
    clc;
    y = roots(x)
end
```

Se llama como:

>> p= [-1 4.42 0 -1.82;% se escribe los coeficientes según la forma canónica de la ecuación cúbica.

>> raíces (p)

Respuesta:

4,3226

0,6994

-0,6020

Ejercicio 5.23.2.

Encontrar el caudal teórico y real, que pasa a través de la compuerta mostrada en la **Figura 5-47**, con los siguientes datos: $h_1 = 2,0$ m; $h_2 = 0,5$ m; $z_1 = 0$ m; $z_2 = 0,0$ m; $V_1 = 1,4$ m/s; ancho del canal $B = 2$ m; $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $C_d = 0,61$.

Respuesta:

$Q = 5,6$ m³/s, $Q_r = 3,821$ m³/s.

Ejercicio 5.23.3. (Evet y Liu, 1989, p. 178).

Una transición de altura δ se localiza en el lecho de un canal rectangular de ancho uniforme, cuyo perfil se observa en la **Figura 5-49**. La superficie libre del líquido experimenta una depresión d . Si se desprecia la fricción, se puede considerar que se tiene un flujo unidimensional. Calcule el caudal q del canal por unidad de ancho. Este sistema es denominado *canaleta venturi*.

Respuesta:

$$q = hv_1 = \sqrt{\frac{-2gd}{1/h^2 - [1/(h-d-\delta)]^2}}.$$

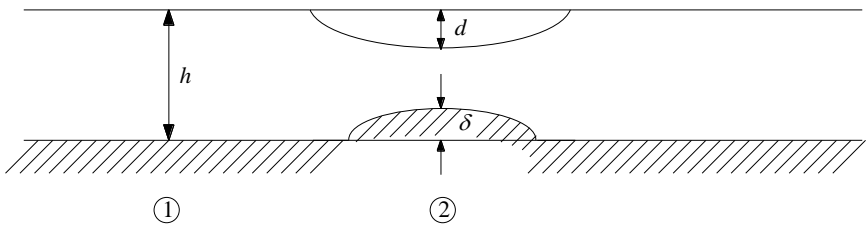


Figura 5-49.- Esquema del Ejercicio 5.23.3.

Ejercicio 5.23.4. (Evelt y Liu, 1989, p. 193).

Un flujo de Agua corre a través de un canal abierto a una profundidad de 2 m y una velocidad de 3 m/s, como se ilustra en la **Figura 5-50**. Si a través de una caída inclinada el líquido pasa hacia otro canal donde la profundidad es de 1 m y la velocidad de 10 m/s, y asumiendo que se trata de un flujo sin fricción, determine las diferencias de elevación entre las soleras de los dos canales.

Respuesta: 3,64 m.

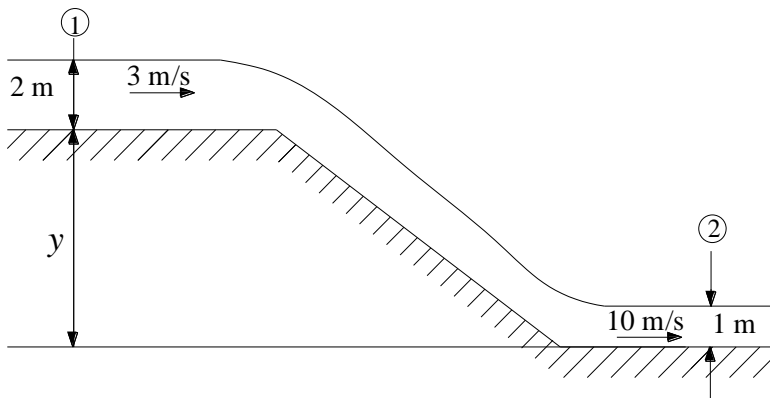


Figura 5-50.- Esquema del Ejercicio 5.23.4.

Ejercicio 5.23.5. (Munson et al., 1990, p. 121)

Dado el flujo bajo una compuerta como se muestra en la **Figura 5-51**, determinar el caudal por unidad de ancho del canal. Suponga flujo sin viscosidad.

Respuesta: 4,83 m³/s/m.

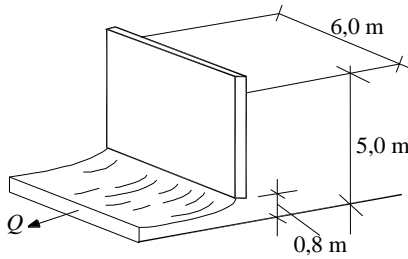


Figura 5-51.- Esquema de la compuerta.

Ejercicio 5.23.6. (Fernández, 2001, p. 163).

Desarrollar una fórmula para calcular el gasto que circula por el vertedero triangular que se muestra en la **Figura 5-52**.

Respuesta: $Q = \frac{8}{15} \sqrt{2g} \tan(\theta) h^{5/2}$.

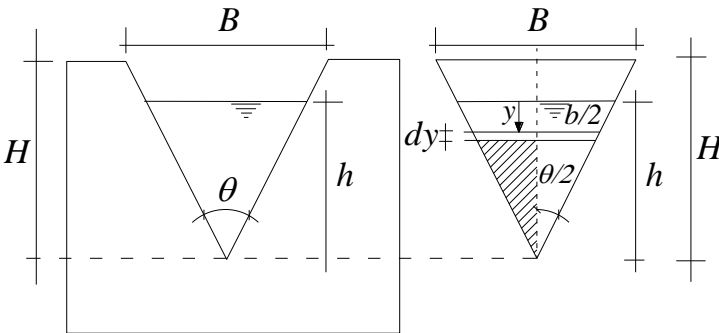


Figura 5-52.- Esquema del vertedero triangular.

5.24 Ecuación de Cantidad de Movimiento (Momento)

La ecuación de cantidad de movimiento es la tercera ecuación fundamental de la Mecánica de Fluidos. La cantidad de movimiento se define como el producto de la masa “*m*” de un cuerpo por su velocidad.

Para la deducción de la ecuación de Cantidad de movimiento (Momento) se utiliza el teorema de transporte de Reynolds (Streeter et

al., 2000, Gastón, 1988) y la segunda ley de Newton. El momento se divide en **momento lineal** y **momento angular** (este último se conoce como **momento de momentum**).

El momento (p) es una magnitud física dada como la masa por su velocidad ($p = m \vec{v}$), m [kg], \vec{v} [m/s], las unidades en el SI de (p) son ($M L T^{-1}$), M: masa, L: longitud y T: tiempo.

La ley fundamental para la deducción de la ecuación de Momento es la denominada ley de la **conservación de la cantidad de movimiento**. De este modo se inicia con la segunda ley de Newton, $F = ma = m d(\vec{v})/dt$, donde m es la masa por ser constante se introduce dentro del paréntesis, $F = d(m\vec{v})/dt$, a es la aceleración y \vec{v} es el vector velocidad. También se puede escribir como $Fdt = d(m\vec{v})$, **lo que indica que el impulso de una fuerza F actúa sobre un fluido de masa m en un intervalo de tiempo pequeño dt , que es igual al cambio de momento $d(m\vec{v})$ en la dirección de la fuerza** (Bansal, 2010, p. 288). Esta es la segunda ley de Newton para una partícula fluida, donde se asume la conservación de la masa.

5.24.1 Planteamiento de la ecuación de Momento

Tomando como base la ecuación del teorema de transporte de Reynolds explicada anteriormente (Streeter et al., 2000), y siguiendo un procedimiento similar al usado para deducir la ecuación de continuidad, se tiene:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} (n\rho dV) \right) + \oint_{SC} (n\rho\vec{v} \cdot d\vec{A}) \tag{5.214}$$

Dónde: dV es el diferencial de volumen, $d\vec{A}$ es el vector diferencial de área, ρ es la densidad del fluido, VC indica volumen de control, SC indica superficie de control, \vec{v} es el vector velocidad; por su parte, N es la propiedad extensiva, correspondiente al momento ($m\vec{v}$), n es una propiedad intensiva, correspondiente a la propiedad extensiva por unidad de masa. Reemplazando el valor de $N = m\vec{v}$, $n = N/m = m\vec{v}/m = \vec{v}$, se tiene:

$$\frac{dm\vec{v}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} (\vec{v}\rho dV) \right) + \oint_{SC} (\vec{v}\rho\vec{v} \cdot d\vec{A}) \quad (5.215)$$

Como el cambio de la masa por velocidad con respecto al tiempo $d(m\vec{v})/dt$ es una fuerza, entonces, con base en la segunda ley de Newton, y al especificar una dirección (por ejemplo x), de tal manera que resulte una suma escalar y no vectorial, siguiendo a Gastón (1988, p. 87), se puede escribir:

$$\sum F_x = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} (V_x\rho dV) \right) + \oint_{SC} (V_x\rho\vec{v} \cdot d\vec{A}) \quad (5.216)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (5.216) es la variación de la cantidad de movimiento con respecto al tiempo dentro del volumen de control. El segundo término es el flujo neto de cantidad de movimiento $(\rho\vec{v})\vec{v}$ sobre la superficie de control, y la integral cerrada \oint_{SC} significa la fuerza que el fluido ejerce sobre las paredes del volumen de control; el VC tiende a desplazarse hacia la derecha según el eje x , lo que indica que debe haber un agente externo que lo mantenga en su sitio para evitar que se desplace, con una fuerza igual a $-F_x$.

Se parte de la configuración de la **Figura 5-53**, la cual muestra un tubo corto, de áreas A_1 y A_2 , el vector elemental de área $d\vec{A}$ ortogonal y saliendo de la superficie y los vectores de velocidad \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , V_{x1} y V_{x2} son las proyecciones del vector velocidad en el eje.

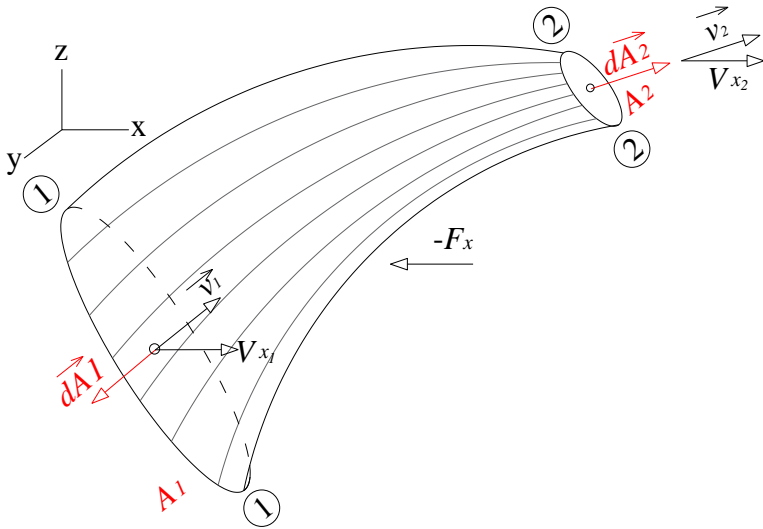


Figura 5-53.- Flujo a través de un tubo corto de sección transversal decreciente.

Para encontrar una solución práctica de la ecuación (5.216), se realizan algunas simplificaciones; así, si se opta por el flujo de interés como permanente, se obtiene:

$$\Sigma F_x = \oint_{SC} (V_x \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}) \tag{5.217}$$

La integral cerrada de superficie es igual a la suma de las integrales abiertas de superficie (A) que componen la superficie cerrada (Gastón, 1988).

$$\oint_{SC} () = \int_{A_1} () + \int_{A_2} () A \tag{5.218}$$

Es de notar que la integral de **entrada** lleva signo negativo, esto debido a que el vector elemental de área y el vector velocidad son paralelos, pero de sentido contrario, que al aplicar producto punto se tiene:

$$\vec{v} \cdot d\vec{A} = V dA \cos(180) = -V dA \tag{5.219}$$

Donde V se convierte en velocidad media. Así, sustituyendo:

$$\sum F_x = - \int_{A_1} V_{1x} \rho_1 V_1 dA_1 + \int_{A_2} V_{2x} \rho_2 V_2 dA_2 \quad (5.220)$$

Al resolver las integrales se tiene:

$$\sum F_x = -V_{1x} \rho_1 V_1 \int_{A_1} dA_1 + V_{2x} \rho_2 V_2 \int_{A_2} dA_2 \quad (5.221)$$

$$\sum F_x = -V_{1x} \rho_1 V_1 A_1 + V_{2x} \rho_2 V_2 A_2 \quad (5.222)$$

Por la ecuación de continuidad, se tiene que $Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$; sustituyendo se tendrá:

$$\sum F_x = -V_{1x} \rho_1 Q + V_{2x} \rho_2 Q \quad (5.223)$$

Si la densidad es constante entre la entrada y la salida, e igual al peso específico sobre la gravedad ($\rho = \gamma/g$), entonces:

$$\sum F_x = \frac{\gamma Q}{g} (-V_{1x} + V_{2x}) \quad (5.224)$$

Por lo general, existe una distribución de velocidades no uniforme a lo largo de la sección transversal del conducto; por ello, se debe incorporar un coeficiente de corrección denominado **coeficiente de Boussinesq** β , el cual corrige el hecho de que se usa la velocidad media.

$$\sum F_x = \frac{\gamma Q}{g} (\beta_2 V_{2x} - \beta_1 V_{1x}) \quad (5.225)$$

Se pueden tener expresiones similares para las direcciones y y z ; para efectos prácticos con flujos turbulentos, $\beta \approx 1,0$. De acuerdo con Gastón (1988), la sumatoria de fuerzas corresponde a la sumatoria de las

siguientes componentes: fuerzas por presión (F_p), fuerzas por gravedad (F_g), fuerzas debido a la viscosidad (F_τ) y fuerzas externas (F_{ext}), según sea el caso de estudio, generalmente en el análisis las fuerzas por fricción se desprecian. De este modo, se obtiene la siguiente expresión:

$$\sum F_x = (\pm F_p \pm F_g \pm F_\tau \pm F_{ext})_x = \frac{\gamma Q}{g} [\bar{V}_{x_salida} - \bar{V}_{x_entrada}] \quad (5.226)$$

El sentido de F_x (+ o -) se elige arbitrariamente, si el resultado da signo contrario, se parte del hecho que actuaría en sentido contrario. Se adopta la misma convención de signos para todas las fuerzas y todas se toman proyectadas sobre el eje que se esté analizando (x, y, z).

5.24.2 Coeficiente de Boussinesq

Este coeficiente se introduce como corrección a la ecuación de momento. Como en cada sección transversal la velocidad no es constante, el flujo de cantidad de movimiento debe ser corregido, similarmente como se corrigieron las cargas de velocidad con el coeficiente de Coriolis. Para ello, se usa el coeficiente de Boussinesq (β) cuyo valor, como el del coeficiente de Coriolis (α), depende únicamente de la distribución de velocidades en la sección. Se calcula, como recomendado por Chereque (1987, p. 88) con la siguiente expresión:

$$\beta = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{\bar{v}}{\bar{V}} \right)^2 dA \quad (5.227)$$

Es posible encontrar la relación entre el coeficiente de Boussinesq (β) y el coeficiente de Coriolis (α), como:

$$\beta \approx 1 + \frac{\alpha - 1}{3} \approx \frac{\alpha + 2}{3} \quad (5.228)$$

De ésta manera, solo será necesario calcular uno de los coeficientes, generalmente α , para hallar el otro.

5.24.3 Ecuación sobre una corriente líquida y Coeficiente de Boussinesq

Con base a la **Figura 5-53**, si se reemplaza en la ecuación de momento para flujo permanente, se tiene que:

$$\sum F = -\int_{A_1} \left[(\bar{v}_1 \rho_1) (\bar{v}_1 \cdot d\bar{A}_1) \right] + \int_{A_2} \left[(\bar{v}_2 \rho_2) (\bar{v}_2 \cdot d\bar{A}_2) \right] \quad (5.229)$$

Que se puede expresar también como:

$$\sum F = -\int_{A_1} \left[\rho_1 (\bar{v}_1^2 \cdot d\bar{A}_1) \right] + \int_{A_2} \left[\rho_2 (\bar{v}_2^2 \cdot d\bar{A}_2) \right] \quad (5.230)$$

Si se introduce la velocidad media, entonces se obtiene:

$$\bar{V}_1^2 A_1 = \bar{V}_1 Q; \quad \bar{V}_2^2 A_2 = \bar{V}_2 Q \quad (5.231)$$

Si la densidad no cambia entre la entrada y la salida y multiplicando el numerador y el denominador por dicha equivalencia, se tendrá la siguiente expresión:

$$\sum F = -\int_{A_1} \rho_1 \frac{\bar{v}_1^2 \cdot d\bar{A}_1}{\bar{V}_1^2 A_1} \bar{V}_1 Q + \int_{A_2} \rho_2 \frac{\bar{v}_2^2 \cdot d\bar{A}_2}{\bar{V}_2^2 A_2} \bar{V}_2 Q \quad (5.232)$$

Se obtiene que las integrales de la relación correspondan al coeficiente de Boussinesq. Como el producto punto de dos vectores paralelos es igual a su producto escalar, ya que el ángulo entre ellos es cero y $\cos(0^\circ) = 1$, entonces:

$$\beta_1 = \int_{A_1} \frac{v_1^2 dA_1}{\bar{V}_1^2 A_1}; \quad \beta_2 = \int_{A_2} \frac{v_2^2 dA_2}{\bar{V}_2^2 A_2} \quad (5.233)$$

$$\sum F = -\int_{A_1} \rho_1 \beta_1 \bar{V}_1 Q + \int_{A_2} \rho_2 \beta_2 \bar{V}_2 Q \quad (5.234)$$

Si la densidad es constante entre la entrada y la salida, e igual al peso específico sobre la gravedad ($\rho = \gamma/g$), se tiene:

$$\sum F = \frac{\gamma Q}{g} (\beta_2 \bar{V}_2 - \beta_1 \bar{V}_1) \quad (5.235)$$

Que corresponde a la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección de la línea de corriente (Chereque, 1987, p. 88).

5.25 Ejemplos de aplicación

Se presenta a continuación algunos ejemplos integradores de la teoría para flujo a presión y flujo superficie libre.

5.25.1 Flujo a presión

Ejemplo 5.9. Cambio de dirección.

Encontrar las fuerzas horizontales y verticales ejercidas sobre los tornillos de anclaje, que sostienen el codo de la **Figura 5-54** en una posición fija. La salida del codo tiene una inclinación de $\theta = 45^\circ$ con la vertical, para un caudal de 3000 L/min, diámetro $D_1 = 200$ mm, diámetro $D_2 = 100$ mm, volumen de control con un valor de VC = 1,0 m³, peso específico del agua $\gamma = 1000$ kp/m³, cota del eje de entrada 105 m, cota del eje de salida 104,5 m. Para efectos de abordar la solución se recomienda despreciar las pérdidas de energía.

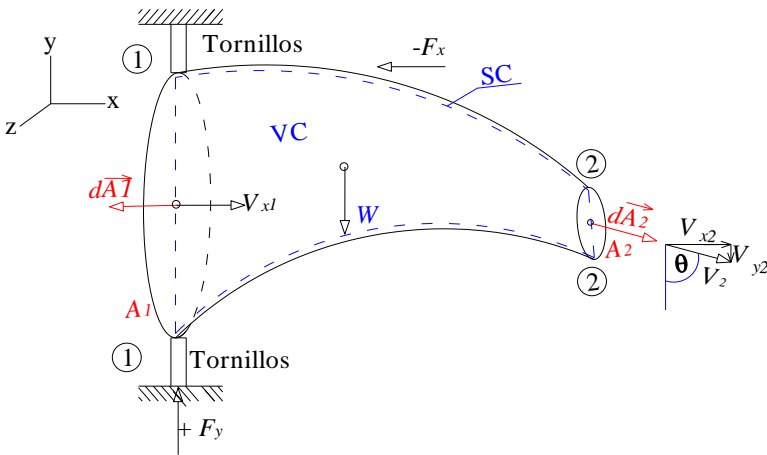


Figura 5-54.- Flujo a través de un codo a 45° del Ejemplo 5.9.

Solución:

Se realiza un diagrama de fuerzas del volumen de control, como se muestra en la **Figura 5-55**.

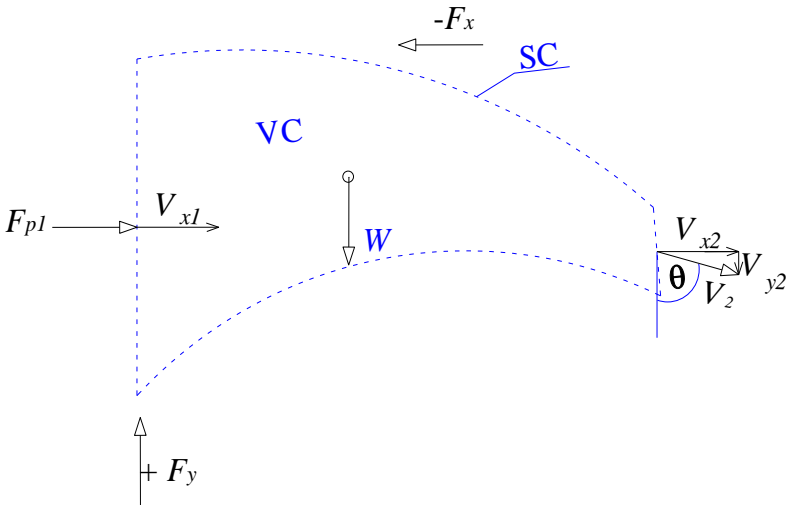


Figura 5-55.- Diagrama de fuerzas del VC.

1) Se usa la ecuación de continuidad para hallar las velocidades con base en el valor del caudal. En la entrada solamente hay velocidad en x ; en la salida, hay en x y y .

$$A_1 V_1 = A_2 V_2; V_1 = V_2 \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 = V_2 \left(\frac{0,1m}{0,2m} \right)^2 = 0,25V_2 \quad (1)$$

$$V_1 = \left(\frac{Q}{A_1} \right) = \left(\frac{0,05m^3/s}{\frac{\pi(0,2m)^2}{4}} \right) = 1,59m/s \quad (2)$$

$$V_2 = 4V_1 = 4(1,59m/s) = 6,36m/s \quad (3)$$

$$V_{2x} = V_2 \text{seno}(45^\circ) = 6,36 \cdot \text{seno}(45^\circ) = 4,50m/s \quad (4)$$

2) Se aplica la ecuación de energía entre las secciones (1) y (2) con el fin de encontrar la presión en (1). Si se desprecian las pérdidas, se tiene:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad (5)$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = (z_2 - z_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} \quad (6)$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = (104,5m - 105m) + \frac{(6,36m/s)^2 - (1,59m/s)^2}{2(9,81m/s^2)} = 1,437m \quad (7)$$

$$p_1 = 1,437m \cdot 1000kp/m^3 = 1437kp/m^2 \quad (8)$$

3) Se calcula la fuerza en la sección (1):

$$Fp_1 = A_1 p_1 = \frac{\pi(0,2m)^2}{4} 1437kp/m^2 = 45,13kp \quad (9)$$

4) Se aplica ecuación de momento en la dirección x:

$$Fp_1 - Fx = \frac{\gamma Q}{g} (V_{x2} - V_{x1}) \quad (10)$$

$$Fx = Fp_1 - \frac{\gamma Q}{g} (V_{x2} - V_{x1}) \quad (11)$$

$$Fx = 45,13kp - \frac{1000 \cdot 0,05}{9,81m/s^2} (4,5m/s - 1,59m/s) = 30,28kp \quad (12)$$

5) Se aplica la ecuación de momento en la dirección **y**:

La componente de velocidad en el eje (y) en la salida va en dirección contraria al eje positivo, por lo tanto esta componente es negativa ($-V_{y2}$).

$$Fy - W = \frac{\gamma Q}{g} (-V_{y2} - V_{y1}) \quad (13)$$

La velocidad en la entrada sólo tiene componente en el eje x, por lo tanto $V_{y1}=0$.

$$Fy = W + \frac{\gamma Q}{g} (-V_{y2}) \quad (14)$$

$$Fy = 1000kp + \frac{1000 \cdot 0,05}{9,81m/s^2} (-4,5m/s) = 977,06kp \quad (15)$$

6) Si se conoce el esfuerzo resistente del tornillo, se puede calcular su diámetro y el número de tornillos necesario para mantener el accesorio en su posición. Por ejemplo si la resistencia de un tornillo es de 25 kp/mm^2 , y si se selecciona un tornillo de diámetro 1/8 pulg., este tornillo puede soportar una fuerza de $(25 \text{ kp/mm}^2) \cdot \pi(1/8 \cdot 25,4)^2/4 = 197,6kp$. El número de tornillos será de $977,06 \text{ kp}/197,06 = 5$ tonillos.

5.25.2 Flujo a superficie libre

Compuertas

Ejemplo 5.10.

Encontrar la fuerza horizontal (F_x) en kilopondios que el flujo ejerce sobre la compuerta de la **Figura 5-56** que posee un ancho $B = 2,0$ m, de fondo plano, altura del agua antes de la compuerta $y_1 = 2,0$ m y altura del agua después de la compuerta $y_2 = 0,5$ m. Asuma un valor de $C_d = 0,61$ para el cálculo del caudal Q .

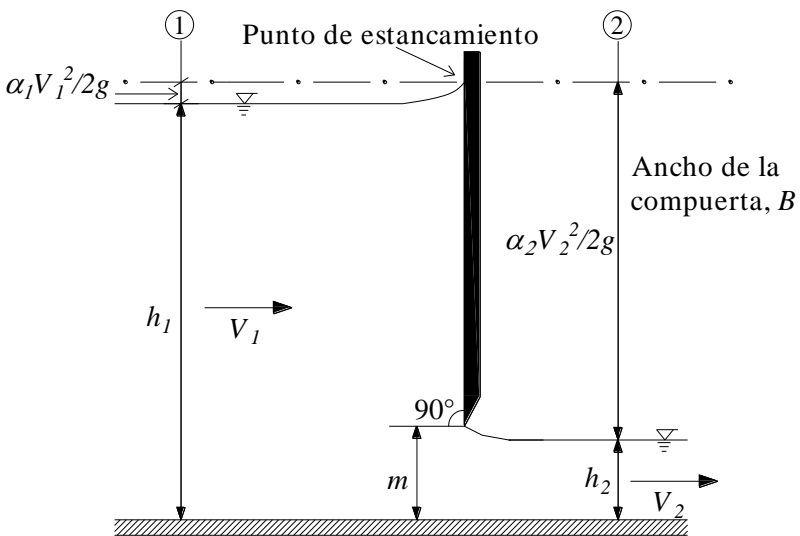


Figura 5-56.- Flujo a través de una compuerta vertical.

- Como es necesario conocer el caudal (Q), se utiliza la ecuación deducida para estimar el caudal bajo una compuerta, en la sección de ecuación de energía en canales abiertos:

$$Q = 0.61(B \cdot m) \sqrt{2(9,81 \text{ m/s}^2)(2,0 \text{ m})} = 3,821 \text{ m}^3 / \text{s} \quad (1)$$

$$V_1 = 3,821 \text{ m}^3 / \text{s} / (2 \text{ m} \cdot 2 \text{ m}) = 0,956 \text{ m/s} \quad (2)$$

$$V_2 = 3,821 \text{ m}^3 / \text{s} / (2 \text{ m} \cdot 0,5 \text{ m}) = 3,821 \text{ m/s} \quad (3)$$

- Se hallan las fuerzas actuantes, en este caso la fuerza de presión en la entrada (F_{p1}) y fuerza de presión en la salida (F_{p2}). Se considera la presión hidrostática en cada sección. Con base al diagrama de fuerzas sobre el volumen de control, mostrado en la **Figura 5-57**, se tiene:

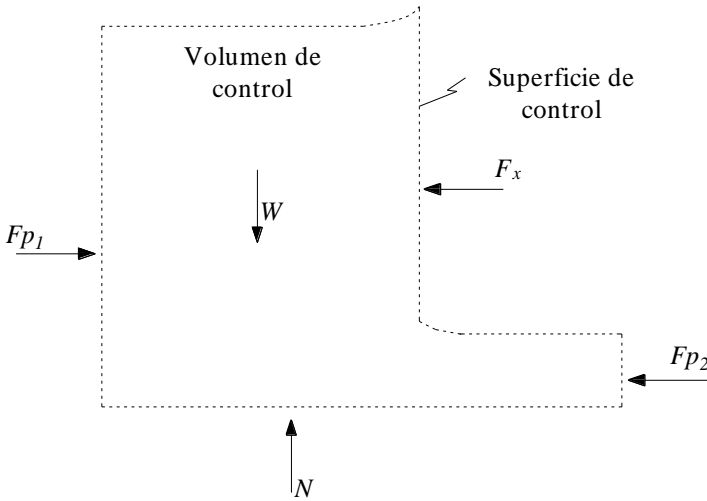


Figura 5-57.- Diagrama de fuerzas que actúan sobre el volumen de control.

$$F_{p1} = \gamma \bar{h}_2 A_1 = \gamma \frac{h_1}{2} B h_1 = B \gamma \frac{h_1^2}{2} = \frac{(2,0m)(1000kp/m^3)(2,0m)^2}{2} = 4000kp \quad (4)$$

$$F_{p2} = \gamma \bar{h}_2 A_2 = \gamma \frac{h_2}{2} B h_2 = B \gamma \frac{h_2^2}{2} = \frac{(2,0m)(1000kp/m^3)(0,5m)^2}{2} = 250kp \quad (5)$$

- Se plantea ecuación de momento:

$$F_{p1} - F_{p2} - F_x = \frac{\gamma Q}{g} (V_{salida} - V_{entrada}) \quad (6)$$

Despejando F_x :

$$F_x = 4000kp - 250kp - \frac{1000kp/m^3 \cdot 3,821m^3/s}{9,81m/s^2} (3,821 - 0,956) \quad (7)$$

Se obtiene un valor de $F_x = 2634,10$ kp hacia la derecha sobre la compuerta.

Nota. Obsérvese que, si se tomasen los valores teóricos de caudal y velocidad, se tendría que:

$$V_1 = V_2 \frac{h_2}{h_1}; \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} = h_2 - h_1 \quad (8)$$

De lo cual se obtiene que $V_1 = 1,40$ m/s, $V_2 = 5,6$ m/s, $Q = 5,6$ m³/s y $F_x = 1352$ kp, con lo cual se subestimaría el valor de la fuerza aplicada de la compuerta.

Ejemplo 5.11.

Calcular el coeficiente de Coriolis α y el coeficiente de Boussinesq β para un tubo de sección circular de diámetro $2R$, con la siguiente distribución de velocidades:

$$\vec{v} = 2\bar{V} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (1)$$

Respuesta:

$\alpha = 2$ y $\beta = 4/3$.

$$\vec{v} = 2\bar{V} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (2)$$

$$\beta = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{\vec{v}}{\bar{V}} \right)^2 dA \quad (3)$$

$$\beta = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{2\bar{V} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]}{\bar{V}} \right)^2 dA \quad (4)$$

$$\beta = \frac{4}{A} \int_A \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^2 dA \quad (5)$$

$$\left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^2 = 1 - 2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \left(\frac{r}{R} \right)^4 = 1 - 2 \frac{1}{R^2} r^2 + \frac{1}{R^4} r^4 \quad (6)$$

$$\beta = \frac{4}{A} \int_A \left(1 - \frac{2}{R^2} r^2 + \frac{1}{R^4} r^4 \right) 2\pi r dr \quad (7)$$

$$\beta = \frac{8\pi}{A} \int_0^R \left(r - \frac{2}{R^2} r^3 + \frac{1}{R^4} r^5 \right) dr \quad (8)$$

$$\beta = \frac{8\pi}{A} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{2}{4R^2} r^4 + \frac{1}{6R^4} r^6 \right)_0^R \quad (9)$$

$$\beta = \frac{8\pi}{A} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{2}{4R^2} r^4 + \frac{1}{6R^4} r^6 \right)_0^R \quad (10)$$

$$\beta = \frac{8\pi}{A} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{2}{4R^2} R^4 + \frac{1}{6R^4} R^6 \right) \quad (11)$$

$$\beta = \frac{8\pi}{A} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{2R^2}{4} + \frac{R^2}{6} \right) \quad (12)$$

$$\beta = \frac{8\pi R^2}{A} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{1}{6} \right) = \frac{8\pi R^2}{\pi R^2} \left(\frac{1}{6} \right) = \left(\frac{8}{6} \right) = \frac{4}{3} \quad (13)$$

5.26 Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.26.1. (Fernández, 2001, p. 173)

Para el esquema mostrado en la **Figura 5-58** y despreciando las pérdidas de energía, determinar la fuerza horizontal y la vertical necesarias para mantener en reposo el codo reductor, si $D_1 = 30$ cm, $D_2 = 15$ cm, $Q = 100$ L/s, $\rho = 102$ UTM/m³ y $\nabla = 95$ L.

Respuesta:

$F_x = 178$ kp, $F_y = 124$ kp.

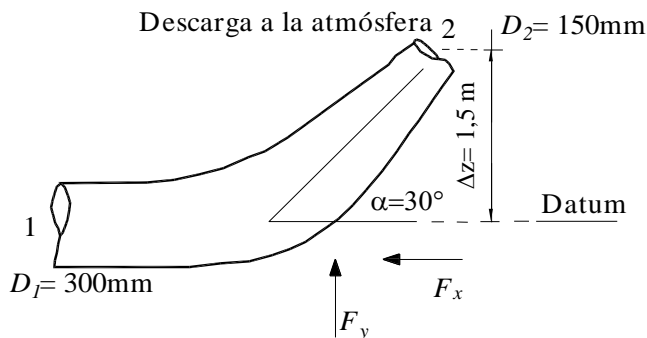


Figura 5-58.- Diagrama del codo y fuerzas F_x y F_y .

Ejercicio 5.26.2. (Fernández, 2001, p. 173)

Por el codo reductor horizontal mostrado en la **Figura 5-59**, circula gasolina de densidad relativa 0,75. El diámetro aguas arriba es de 60 cm y aguas abajo de 30 cm. Si el caudal es de 450 L/s, la presión aguas arriba es de 1,50 kg/cm² y las pérdidas en el codo son $8(V_2 - V_1)^2 / 2g$, determinar la fuerza F_x necesaria para mantenerlo en equilibrio.

Respuesta:

$F_x = 4978$ kp.

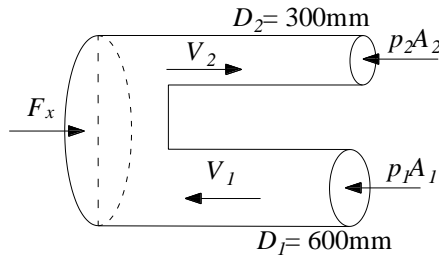


Figura 5-59.- Diagrama del codo a 180° .

Ejercicio 5.26.3. (Fernández, 2001, p. 177)

Despreciando las pérdidas, determinar las componentes según x e y de la fuerza necesaria para mantener en su posición la bifurcación mostrada en la **Figura 5-60**, la cual se encuentra en el plano horizontal.

Respuesta:

$$F_x = 424,0 \text{ kp}, F_y = 908 \text{ kp}.$$

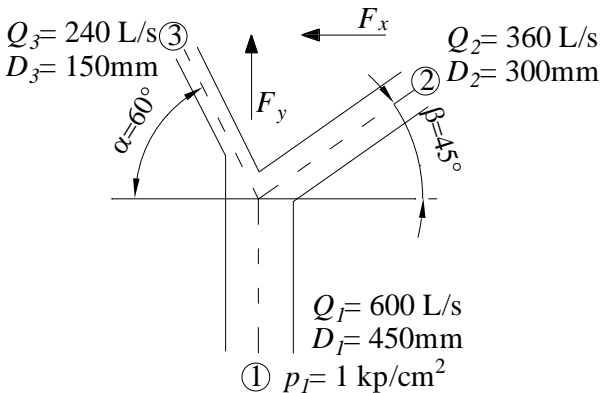


Figura 5-60.- Diagrama de la bifurcación.

Ejercicio 5.26.4. (Fernández, 2001, p. 183)

Suponiendo que no existen pérdidas a través de la compuerta que se muestra en la **Figura 5-61**, determinar: (a) La altura y_2 . (b) La pérdida de energía en el resalto. (c) La fuerza sobre la compuerta por metro de ancho. (d) El caudal por metro de ancho.

Respuestas:

- (a) $y_2 = 3,33 \text{ m.}$
- (b) $\Delta E = 2,53 \text{ m.}$
- (c) $F = 11923 \text{ kp.}$
- (d) $q = 6,21 \text{ m}^3/\text{s/m.}$

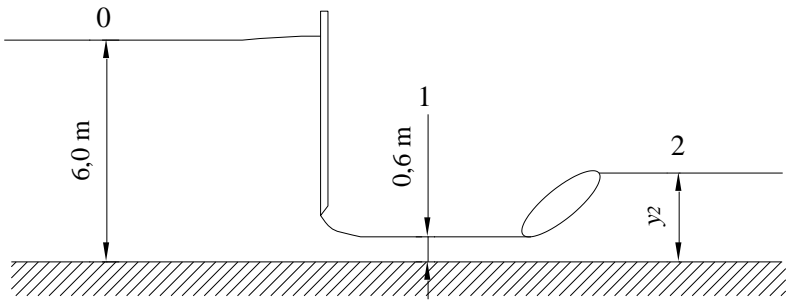
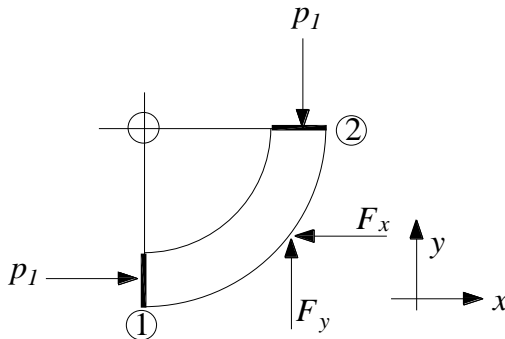


Figura 5-61.- Diagrama de la compuerta.

Ejercicio 5.26.5. (Evet y Liu, 1989, p. 677).

Suponiendo una tubería de 60 cm de diámetro que transporta $0,889 \text{ m}^3/\text{s}$ de un aceite ($G_s = 0,85$), que tiene un codo de 90° en un plano horizontal. La pérdida de carga en el codo es de 1,07 m de aceite y la presión a la entrada de 293 kPa. Determinar la fuerza resultante ejercida por el aceite



sobre el codo de la
Figura 5-62.

z

Respuesta:

$F_x = + 85,2 \text{ kN}$ hacia la izquierda y sobre el aceite; $F_y = + 82,7 \text{ kN}$ hacia abajo y sobre el aceite; $R = 118,7 \text{ kN}$, con dirección $\theta_x = 44,10^\circ$.

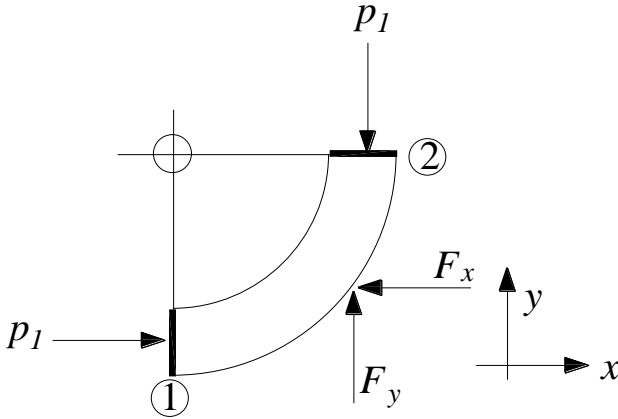
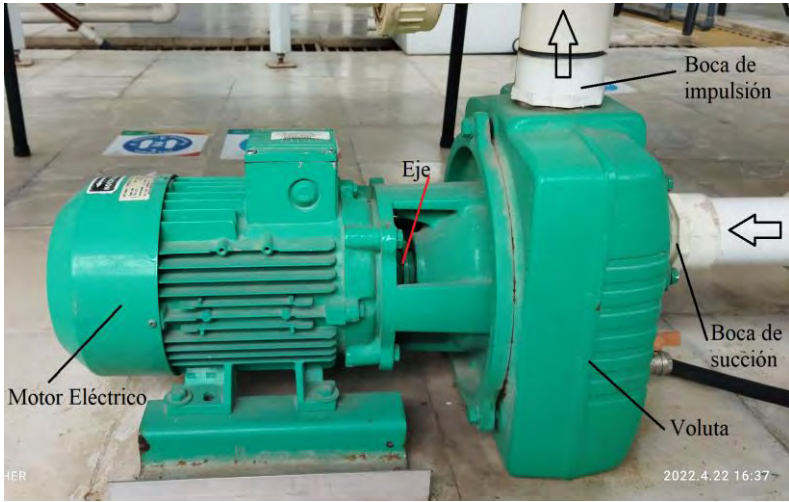


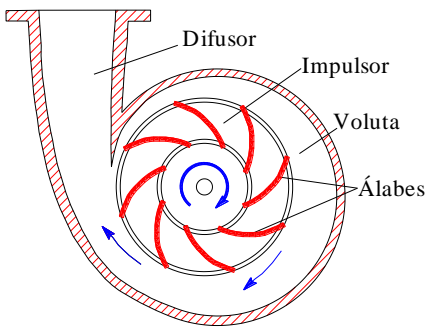
Figura 5-62.- Diagrama del codo a 90°. Fuente: Adaptada de (Evet y Liu, 1989, p. 677)

5.27 Ecuación de momento aplicada a turbomáquinas, álabes y accesorios

Se analizan otras aplicaciones comúnmente manejadas en la ingeniería, relacionadas con la fuerza de un chorro sobre superficies, turbomáquinas, accesorios de tuberías y estructuras en canales. Para ilustrar de manera particular, el caso práctico donde se usan álabes, se incluye la **Figura 5-63**, en la cual se indica la geometría de una bomba hidráulica y sus partes principales como la voluta o carcasa, el rotor y los álabes. Los álabes son estructuras pequeñas que hacen parte de las bombas y las turbinas, y se toman como base para aplicar la ecuación de momento.



a)



b)



c)

Figura 5-63.- Componentes de una bomba hidráulica centrífuga. (a) Fotografía de bomba centrífuga autocebante (Laboratorio de Hidráulica de la Universidad de Nariño). (b) Diagrama del rodete, álabes y carcasa. (c) Fotografía de un rodete abierto (Laboratorio de Hidráulica de la Universidad de Nariño).

5.27.1 Álabes fijos

Para introducir al lector en esta temática, se toma inicialmente un solo álabe fijo, cuyo objetivo es cambiarle la dirección al flujo. La velocidad permanece constante tanto a la entrada como a la salida del deflector, ya que el flujo entra en contacto con el álabe en forma de chorro y la presión sobre todo el chorro es igual a la presión atmosférica. El

objetivo es calcular la fuerza que el chorro ejerce sobre el álabe, lo cual se consigue aplicando la ecuación de momento lineal (Niño & Duarte, 2007).

Ejemplo. 5.12. (Streeter et al., 2000, p. 144).

Un chorro de un fluido choca contra una placa fija, inclinada y lisa, tal y como se muestra en la **Figura 5-64**. Determinar: (a) La distribución de caudales. (b) La fuerza ejercida sobre la placa, despreciando pérdidas debidas al impacto.

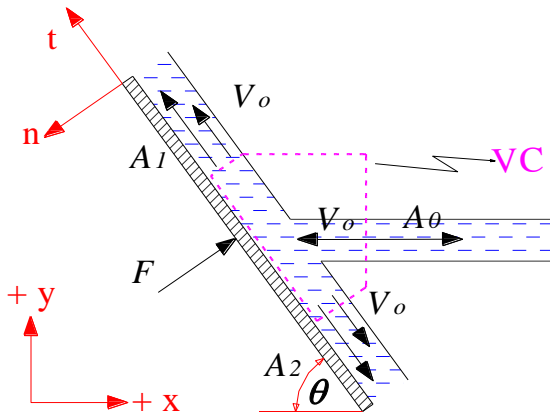


Figura 5-64.- Chorro bidimensional chocando sobre la placa.

Solución:

a) Como en dirección tangencial se desprecia la fricción, entonces no existe fuerza sobre la placa. Al aplicar la ecuación de momento lineal en sentido tangencial de la placa, se tiene:

$$\sum F = \frac{\gamma}{g} [(QV)_{salida} - (QV)_{entrada}] \quad (1)$$

Sustituyendo las variables según el problema, se tiene:

$$\sum F = \frac{\gamma}{g} (Q_1 V_1 + Q_2 (-V_2) - Q_0 V_{0t}) = 0 \quad (2)$$

V_{0t} es la componente de la velocidad de entrada en sentido tangencial.

$$V_{0t} = V_0 \cos(\theta) \quad (3)$$

Teniendo en cuenta que no se consideran cambios de presión ni de altura en las superficies de control, al aplicar la ecuación de Bernoulli entre los puntos 0, 1 y 2, se obtiene que las cargas de velocidad son iguales; por lo tanto, $V_0 = V_1 = V_2$, y a partir de ello se tiene:

$$\frac{\gamma}{g}(Q_1 V_1 + Q_2 (-V_2) - Q_0 V_0 \cos(\theta)) = 0 \quad (4)$$

$$Q_1 - Q_2 - Q_0 \cos(\theta) = 0 \quad (5)$$

$$Q_1 - Q_2 = Q_0 \cos(\theta) \quad (6)$$

Por otro lado, según la ecuación de conservación de masa:

$$Q_1 + Q_2 = Q_0 \quad (7)$$

$$Q_1 = Q_0 - Q_2 \quad (8)$$

Sustituyendo Q_1 en la ecuación (6) se despeja Q_2 :

$$(Q_0 - Q_2) - Q_2 = Q_0 \cos(\theta) \Rightarrow Q_2 = \frac{Q_0}{2}[1 - \cos(\theta)] \quad (9)$$

Con el mismo procedimiento, se obtiene Q_1 :

$$Q_1 - (Q_0 - Q_1) = Q_0 \cos(\theta) \Rightarrow Q_1 = \frac{Q_0}{2}[1 + \cos(\theta)] \quad (10)$$

De este modo se da respuesta al punto (a), consistente en encontrar la distribución de caudales, por cada una de las salidas de la placa

inclinada. Nótese que dicha distribución depende del ángulo de inclinación de la placa, con un valor de Q_0 conocido.

(b) Para hallar la fuerza se aplica la ecuación de momento lineal en dirección normal (n) a la placa.

$$\sum F = \frac{\gamma}{g} [(QV)_{salida} - (QV)_{entrada}] \quad (11)$$

Como no existe flujo en sentido normal a la placa, las componentes de velocidad a la salida se eliminan, $(QV)_{salida} = 0$.

$$\sum F = -F = \frac{\gamma}{g} (0 - Q_0 V_{on}) = 0 \quad (12)$$

V_{on} es la componente de la velocidad de entrada en sentido normal y viene dada por:

$$V_{on} = V_0 \text{sen}(\theta) \quad (13)$$

Sustituyendo V_{on} , con Q_0 y V_0 conocidos, se obtiene la ecuación para calcular la fuerza que el chorro ejerce sobre la placa:

$$F = \frac{\gamma}{g} Q_0 V_0 \text{sen}(\theta) \quad (14)$$

Se observa que si $\theta \uparrow \Rightarrow F \uparrow$, $Q_0 \uparrow \Rightarrow F \uparrow$, $V_0 \uparrow \Rightarrow F \uparrow$; (\uparrow = incrementa).

5.27.2 Álabes móviles

En esta parte del texto se analizarán casos con placa móviles y álabes de turbomáquinas, en donde se involucran velocidades del chorro y velocidades del álabe; para ello, es necesario conocer los conceptos de velocidad relativa y absoluta que se exponen en la mecánica clásica. Cuando se estudian las fuerzas sobre cuerpos en movimiento, debe considerarse el movimiento relativo del fluido respecto del cuerpo (Mott y Untener, 2015).

Velocidad relativa (V_r): Es la velocidad de una partícula fluida (chorro) respecto a un observador localizado en el cuerpo (impulsor) en movimiento. Si la velocidad del cuerpo y la del fluido van en la misma dirección, la velocidad relativa es la diferencia de las dos velocidades ($V_r = V_a - u$); mientras que, si van en sentido contrario, se suman ($V_r = V_a + u$), en donde V_a es la velocidad absoluta del chorro, u es la velocidad tangencial del cuerpo, en este caso del rotor.

Velocidad absoluta (V_a): Es la velocidad de una partícula fluida (chorro) respecto a un observador localizado en la tierra o desde un punto fijo. Si la velocidad del cuerpo y la del fluido van en la misma dirección, la velocidad absoluta es la suma de las dos velocidades ($V_a = V_r + u$); si van en sentido contrario, se restan, ($V_a = V_r - u$).

Velocidad lineal del cuerpo: (u) Es la velocidad tangencial del cuerpo que interactúa con el movimiento del fluido, (puede ser un rotor de una bomba, turbina o ventilador, los brazos de un aspersor, o una superficie en movimiento).

Si se observa el movimiento de un rotor de una bomba, como se muestra en la **Figura 5-65**, tal como lo expresa Mataix se puede identificar la trayectoria relativa de una partícula de fluido en su paso por el rodete y la trayectoria absoluta en su paso por el rodete. La **trayectoria relativa sigue naturalmente el contorno de los álabes**, no así la trayectoria absoluta, porque los álabes del rodete se encuentran en movimiento (Mataix, 1990).

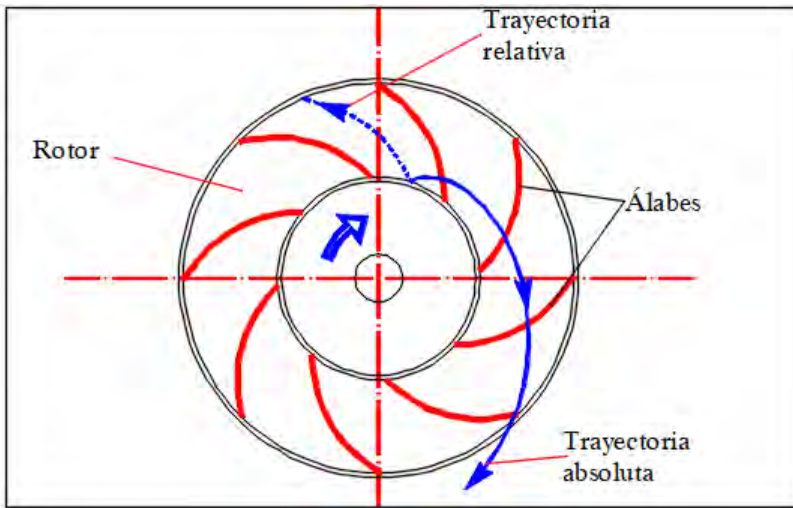


Figura 5-65.- Corte transversal de un rodete de una bomba centrífuga.
Fuente: Adaptada de (Mataix, 1990).

Para ilustrar estos conceptos se plantea el siguiente ejemplo analógico.

Ejemplo 5.13.

Un motociclista viaja a 60 km/h al este, y un automóvil viaja a 80 km/h al oeste sobre la misma carretera. ¿Qué velocidad lleva la motocicleta con respecto al automóvil?; ¿Qué velocidad lleva el automóvil con respecto a la motocicleta? Ver la **Figura 5-66** (A = Auto, M = Motocicleta).

Solución:

Realizando suma vectorial se escribe:

$$\vec{V}_{MA} = \vec{V}_M - \vec{V}_A = 60 \text{ km/h} - (-80 \text{ km/h}) = 140 \text{ km/h} \quad (1)$$

\vec{V}_{MA} Se lee: Velocidad de la motocicleta con respecto al automóvil.

$$\vec{V}_{AM} = \vec{V}_A - \vec{V}_M = -80 \text{ km/h} - (60 \text{ km/h}) = -140 \text{ km/h} \quad (2)$$

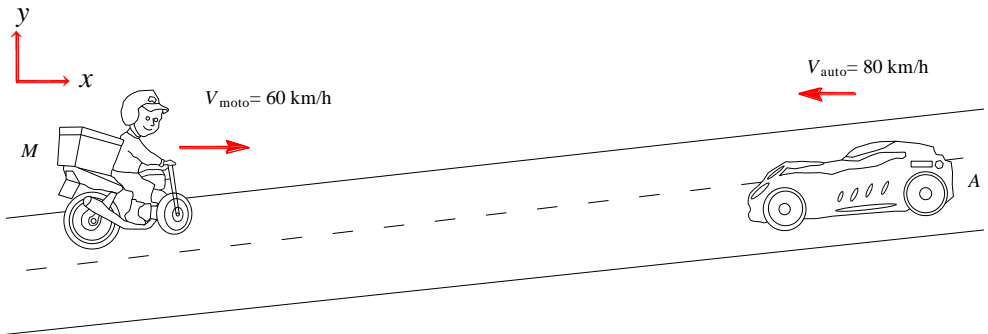


Figura 5-66.- Esquema de la dirección de los móviles.

De acuerdo con Streeter et al. (2000), no se puede hacer ningún trabajo sobre álabes fijos, por lo tanto las turbomáquinas usan el fluido sobre álabes móviles para producir trabajo; los álabes van sujetos a un rotor el cual genera un torque sobre el eje, que es el caso particular de una turbina Pelton como la mostrada en la **Figura 5-67**. Para entender el movimiento básico, se analiza un ejemplo de una placa móvil golpeada por un chorro.



Figura 5-67.- Fotografía de una turbina Pelton. Fuente: (Laboratorio de Hidráulica Universidad de Nariño)

Ejemplo 5.14. (Gastón, 1988, p. 94).

Una placa se mueve con una velocidad u dentro de un chorro, como se muestra en la **Figura 5-68**. ¿Cuál será la fuerza F que el chorro le imprimirá a la placa? Asumir flujo permanente y caudal a la salida como la mitad del caudal a la entrada.

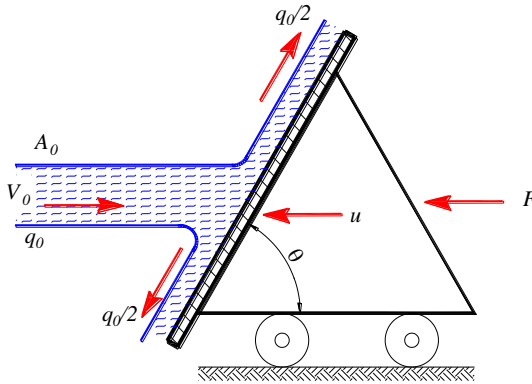


Figura 5-68.- Chorro bidimensional chocando sobre la placa móvil ($\rightarrow x(+)$).

Fuente: Adaptada de (Gastón, 1988, p. 94).

Solución:

Se plantea un diagrama de velocidades y de fuerzas, como se muestra en la **Figura 5-69**.

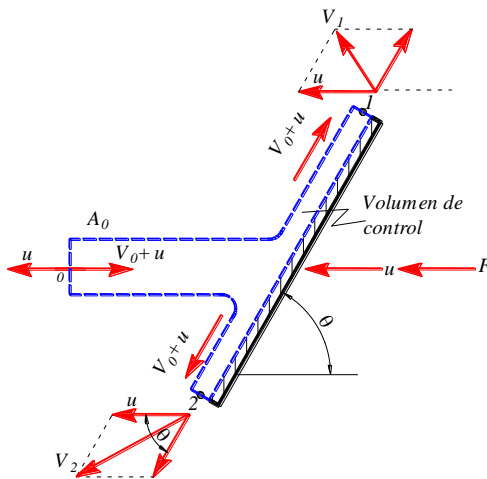


Figura 5-69.- Diagrama de velocidades y fuerzas.

Fuente: Adaptada de (Gastón, 1988, p. 94).

La ecuación general de momento lineal, está dada como:

$$\sum F = \frac{\gamma}{g} [(QV)_{salida} - (QV)_{entrada}] \quad (1)$$

En este caso se introduce la velocidad absoluta V_o , es decir, la velocidad del chorro, pero como un observador externo; como el chorro y la placa se mueven en dirección contraria, V_r es dada como:

$$V_r = V_o - (-u) = V_o + u \quad (2)$$

V_r indica la velocidad relativa del chorro respecto al álabe. La velocidad u del álabe se asume negativa según la convención del eje x . Debido a que la fuerza va en dirección del eje x , **el momento lineal** se aplica en la misma dirección, por lo tanto se halla las componentes de las velocidades relativas en (1) y (2), dadas como:

$$V_{rx1} = (V_o + u) \cos \theta \quad (3)$$

$$V_{rx2} = -(V_o + u) \cos \theta \quad (4)$$

El signo de las velocidades relativas lo proporciona el ángulo θ . Las velocidades absolutas en cada una de las superficies son:

Velocidad a la entrada (0).

$$V_{ax0} = +(V_o + u) - u = V_o \quad (5)$$

Velocidad a la salida (1).

$$V_{ax1} = +(V_o + u) \cos \theta - u \quad (6)$$

Velocidad a la salida (2).

$$V_{ax2} = -(V_o + u) \cos \theta - u \quad (7)$$

La ecuación de momento lineal para este caso es:

$$\sum F = \frac{\gamma}{g} \left((QV_{ax})_1 + (QV_{ax})_2 - (Q_0V_{ax})_0 \right) \quad (8)$$

Sustituyendo las componentes de velocidad y simplificando se tiene:

$$-F = \frac{\gamma}{g} \left(\left(Q((V_o + u)\cos\theta - u) \right)_1 + \left(Q(-(V_o + u)\cos\theta - u) \right)_2 - Q_0V_o \right) \quad (9)$$

$$-F = \frac{\gamma}{g} \left(\left(\frac{q}{2}((V_o + u)\cos\theta - u) \right)_1 + \left(\frac{q}{2}(-(V_o + u)\cos\theta - u) \right)_2 - qV_o \right) \quad (10)$$

$$-F = \frac{\gamma q}{2g} \left(((V_o + u)\cos\theta - u)_1 + (-(V_o + u)\cos\theta - u)_2 - 2V_o \right) \quad (11)$$

$$-F = \frac{\gamma q}{2g} \left((V_o + u)\cos\theta - u - (V_o + u)\cos\theta - u - 2V_o \right) \quad (12)$$

$$-F = \frac{\gamma q}{2g} (-u - u - 2V_o) \quad (13)$$

$$F = \frac{\gamma q}{g} (u + V_o) \quad (14)$$

Pero el caudal $q = (u + V_o) A_0$. Entonces:

$$F = \frac{\gamma}{g} (u + V_o)^2 A_0 \quad (15)$$

O también:

$$F = \frac{\gamma q^2}{g A_0} \quad (16)$$

Ejemplo 5.15. (Evet y Liu, 1989, p. 648), (Streeter et al., 2000, p. 145).

Una rueda Pelton será seleccionada para el funcionamiento de un generador a 600 rpm. El chorro de agua posee 75 mm de diámetro y una velocidad de 100 m/s. Con el ángulo de la pala de la turbina a 170° , la relación de la velocidad de la paleta a la velocidad inicial del chorro es de 0,47; despreciando las pérdidas, determinar (a) El diámetro de la rueda a la línea central, (b) La potencia desarrollada, y (c) La energía cinética por Newton presente en el fluido.

Solución:

En la **Figura 5-70a** se ilustra un álabe móvil con un fluido moviéndose de manera tangencial sobre el mismo. Las fuerzas ejercidas sobre el fluido por el álabe se indican mediante F_x , F_y . Se supone un tipo de flujo permanente. En la **Figura 5-70c** se muestra el **diagrama vectorial polar** para el flujo a través del álabe. Los vectores de velocidad absoluta parten desde el origen (O) y el vector de la velocidad relativa ($V_r = V_0 - u$) se deflecta en la salida con el ángulo θ ; en este caso, la velocidad relativa es la diferencia de V_0 y u , ya que el álabe y el chorro van en la misma dirección, a diferencia del ejemplo anterior (5.14) que van en dirección contraria. V_2 es la velocidad absoluta final a la salida del álabe. La velocidad V_r se mantiene constante en su magnitud a medida que pasa por el álabe (Streeter et al., 2000).

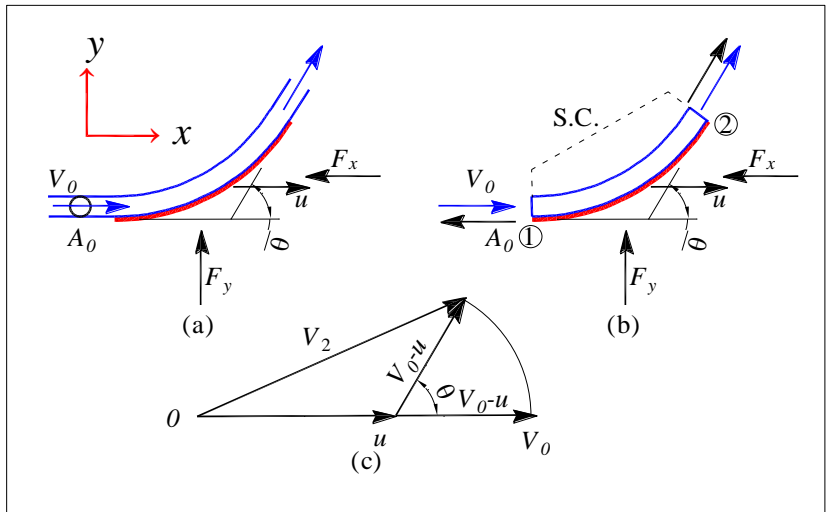


Figura 5-70.- Chorro bidimensional chocando sobre la placa móvil. Fuente: adaptado de (Evet y Liu, 1989, p. 648).

a) Como se conoce que la velocidad tangencial de la rueda es $u = \omega r$, entonces $r = u/\omega$. Por otro lado, el problema proporciona como dato que $u/V_0 = 0,47 \Rightarrow u = 0,47 V_0$. Con base en lo anterior se tiene que el diámetro de la rueda D es:

$$D = 2 \frac{0,47V_0}{\omega} = 2 \frac{0,47(100m/s)}{600rpm \cdot 2\pi/60} = 1,496m \approx 1,5m \quad (1)$$

b) Se tiene que la potencia P es igual a una fuerza F por velocidad u , ($P = F_x u$). Por lo tanto, primero se encuentra la fuerza aplicando ecuación de momento lineal al volumen de control de la **Figura 5-70b**.

$$\sum F = \frac{\gamma}{g} \left[(QV)_{salida} - (QV)_{entrada} \right] \quad (2)$$

Según procedimientos similares reportados en la literatura por autores como Gastón (1988, p. 95), Evett y Liu (1989, p. 648), Darby y Chabra (2001, p. 129) y Munson et al. (1990, p. 676), las velocidades en la entrada y salida de la ecuación (2) son las velocidades absolutas del chorro en cada dirección.

Cálculo de velocidades relativas. V_r es la velocidad relativa del chorro, o como se ve desde el álabe móvil, como los cuerpos van en la misma dirección, la misma está dada como:

$$V_r = V_o - u \quad (3)$$

Las componentes en x de las velocidades relativas en 1 y 2, (ya que la fuerza F_x a calcular está localizada en este eje), son:

$$V_{rx1} = (V_o - u) \cos \theta_1 \quad (4)$$

$$V_{rx2} = +(V_o - u) \cos \theta_2 \quad (5)$$

Cálculo de las velocidades absolutas. A partir de la proyección de la velocidad relativa en la entrada y salida, se halla la velocidad absoluta V_a . En este caso que los cuerpos se mueven en la misma dirección, la velocidad absoluta es igual a la suma de la velocidad relativa más la velocidad del alabe.

Velocidad a la entrada (1).

$$V_{ax1} = +(V_o - u)\cos 0^\circ + u = +V_o \quad (6)$$

En este caso la velocidad absoluta es la velocidad del chorro a la entrada.

Velocidad a la salida (2).

$$V_{ax2} = V_{rx2} + u = +(V_o - u)\cos \theta + u \quad (7)$$

Cálculo de la fuerza F_x . Sustituyendo en la ecuación de momento lineal se tiene:

$$-F_x = \frac{\gamma}{g} ((QV_{ax})_2 - (QV_{ax})_1) \quad (8)$$

Sustituyendo las componentes de velocidad y simplificando:

$$-F_x = \frac{\gamma Q}{g} (V_{ax2} - V_{ax1}) \quad (9)$$

$$-F_x = \frac{\gamma Q}{g} ((V_o - u)\cos \theta + u - V_o) \quad (10)$$

$$F_x = \frac{\gamma Q}{g} (-(V_o - u)\cos \theta - u + V_o) \quad (11)$$

$$F_x = \frac{\gamma Q}{g} (-(V_o - u)\cos \theta + (V_o - u)) \quad (12)$$

$$F_x = \frac{\gamma Q}{g} (V_0 - u)(-\cos\theta + 1) \quad (13)$$

Sustituyendo $Q = V_r A_o = (V_0 - u) \cdot A_o$.

$$F_x = \frac{\gamma}{g} (V_0 - u)^2 A_o (1 - \cos\theta) \quad (14)$$

Como la anterior ecuación es para un álabe único, si se utiliza una serie de álabes, como ocurre en la periferia de una rueda de agua, (ej. turbina Pelton) ordenada de tal manera que uno u otro de los chorros interseca todo el flujo que sale de la boquilla, por lo tanto el conjunto de álabes capturan el caudal de entrada $Q_0 = V_0 \cdot A_0$ (Streeter et al., 2000, p. 146). La fuerza es dada como:

$$F_x = \frac{\gamma}{g} Q_0 (V_0 - u)(1 - \cos\theta) \quad (15)$$

Cálculo de la fuerza F_y . Para hallar esta fuerza realiza el mismo procedimiento que para F_x . La componente de la velocidad relativa en el eje y en el punto (2) es:

$$V_{ry2} = +(V_0 - u)\text{sen}\theta \quad (16)$$

Como no existe velocidad del álabe en dirección y, $u=0$.

$$V_{ay2} = +(V_0 - u)\text{sen}\theta + 0 \quad (17)$$

Además, no existe flujo en la dirección y en la entrada, $V_{ay}=0$.

$$+F_y = \frac{\gamma}{g} Q (V_{ay2} - 0) \quad (18)$$

$$+F_y = \frac{\gamma}{g} Q (V_0 - u)\text{sen}\theta \quad (19)$$

Sustituyendo $Q = V_r A_o = (V_o - u) \cdot A_o$.

$$+F_y = \frac{\gamma}{g} (V_o - u)^2 A_o \text{sen}\theta \quad (20)$$

Para una serie de álabes en toda la rueda de agua, está dada por:

$$+F_y = \frac{\gamma}{g} (V_o - u) Q_o \text{sen}\theta \quad (21)$$

Cálculo de la potencia generada, en este caso para toda la turbina, será:

$$P = F_x u = \frac{\gamma}{g} Q_o u (V_o - u) (1 - \cos\theta) \quad (22)$$

Al reemplazar los valores se tiene:

$$P = \frac{9810 \text{ N} / \text{m}^3}{9,81 \text{ m} / \text{s}^2} \left(100 \text{ m} / \text{s} \frac{\pi (0,075 \text{ m})^2}{4} \right) 47 \text{ m} / \text{s} (100 \text{ m} / \text{s} - 47 \text{ m} / \text{s}) (1 - \cos 170^\circ) \quad (23)$$

$$P = 1000 \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{m}^3 \cdot \text{m}} (0,1406 \text{ m}^3 / \text{s}) (47 \text{ m} / \text{s}) (53 \text{ m} / \text{s}) (1 + 0,9848) \quad (24)$$

$$P = 1000 \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{m}^3 \cdot \text{m}} (0,4417 \text{ m}^3 / \text{s}) 47 \text{ m} / \text{s} (53 \text{ m} / \text{s}) (1,9848) = 2184 \text{ W} \quad (25)$$

c) Para hallar la energía cinética se utiliza la velocidad absoluta saliendo en (2) en x y y , dadas como:

$$V_{ax} = V_{rx} - u = (V_o - u) \cos\theta - u \quad (26)$$

$$V_{ax} = (100 \text{ m} / \text{s} - 47 \text{ m} / \text{s}) \cos 170^\circ - 47 \text{ m} / \text{s} = -52,1948 \text{ m} / \text{s} - 47 \text{ m} / \text{s} = -5,2194 \text{ m} / \text{s} \quad (27)$$

$$V_{ay} = V_{ry} - u = (V_o - u) \text{sen}\theta = (100\text{m/s} - 47\text{m/s}) \cos 170^\circ = 9,2033\text{m/s} \tag{28}$$

La energía cinética restante en el chorro E_K es dada como:

$$E_K = \frac{V_{ax}^2 + V_{ay}^2}{2g} = \frac{(-5,2194\text{m/s})^2 + (9,2033\text{m/s})^2}{2(9,81\text{m/s}^2)} = 5,70\text{m} \tag{29}$$

Como son 5,7 m de energía por unidad de peso. Si se multiplica arriba y abajo por Newton, se tiene, Julios sobre Newtons.

$$E_K = 5.70\text{mN} / \text{N} = 5,70\text{J} / \text{N} \tag{30}$$

Ejemplo 5.16: (Giles et al., 1994, p. 328).

Un chorro de 75 mm de diámetro y a una velocidad de $V_o = 33,5 \text{ m/s}$, incide sobre un álabe móvil, que lleva una velocidad de $u = 21,3 \text{ m/s}$ en la misma dirección del chorro. La dirección de salida del álabe forma un ángulo de $\theta = 150^\circ$ con la dirección de la entrada. Suponiendo que no existe rozamiento, calcular las componentes en las direcciones x y y de la fuerza que ejerce el agua sobre el álabe. Tomar el peso específico del agua como 9790 N/m^3 . Véase la **Figura 5-71a**.

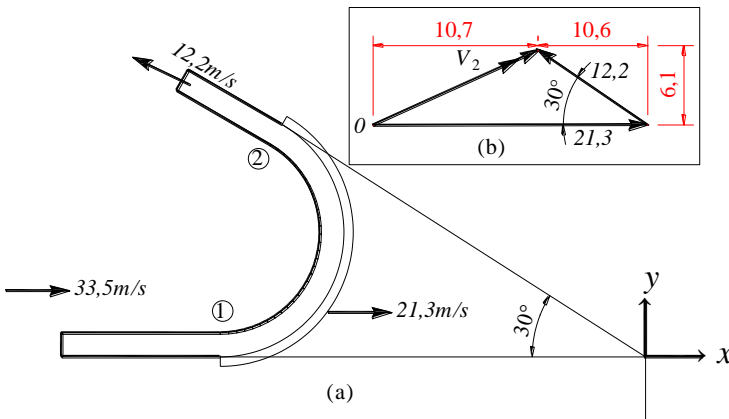


Figura 5-71.- Chorro bidimensional chocando sobre un álabe móvil deflactado 150° Fuente: Adaptado de (Giles et al., 1994, p. 328).

Aplicando un procedimiento similar que el ejemplo anterior, pero teniendo en cuenta que la proyección de la velocidad de salida en (2) es negativa. Esto se corrige tomando como θ siempre el ángulo de deflexión, ya que $\cos(150^\circ) = -0,8660$, generando un valor de V_{rx2} negativo. V_2 de la **Figura 5-71b** es la velocidad absoluta en 2 y su componente horizontal es igual a V_{ax2} , dada como $V_{ax2} = V_{rx2} + u = +(V_o - u)\cos\theta + u$, con $\theta = 150^\circ$, que es el valor que se representa como 10,7 m/s.

Fuerza F_x .

$$F_x = \frac{\gamma}{g} (V_o - u)^2 A_0 (1 - \cos\theta) \tag{1}$$

$$F_x = \frac{9790 \text{ N/m}^3}{9,81 \text{ m/s}^2} \left(\frac{\pi(0,075 \text{ m})^2}{4} \right) (33,5 - 21,3)^2 (1 - \cos 150^\circ) \tag{2}$$

$$F_x = 997,96(0,0044)(12,2)^2 (1 - \cos 150^\circ) = 1219 \text{ N} \tag{3}$$

Fuerza F_y .

$$+F_y = \frac{\gamma}{g} (V_o - u)^2 A_0 \text{sen}\theta \tag{4}$$

$$F_y = \frac{9790 \text{ N/m}^3}{9,81 \text{ m/s}^2} \left(\frac{\pi(0,075 \text{ m})^2}{4} \right) (33,5 - 21,3)^2 (\text{sen} 150^\circ) = 327 \text{ N} \tag{5}$$

Ya que ambas fuerzas son positivas, es un indicador de que actúan en la dirección supuesta inicialmente sobre el volumen de control (VC), pero las componentes de la fuerza ejercida por el agua sobre el álabe son 1219 N hacia la derecha y 327 N hacia abajo.

Si se realiza un análisis de la variación de la F_x y de la potencia P , con respecto al ángulo de deflexión, se obtiene la variación indicada en la **Figura 5-72**.

La potencia de la serie de álabes es dada como $P = F_x u$, pero F_x tomando todo el conjunto de álabes.

$$P = \frac{\gamma}{g} V_0 A_0 (V_0 - u)(1 - \cos\theta)u \quad (6)$$

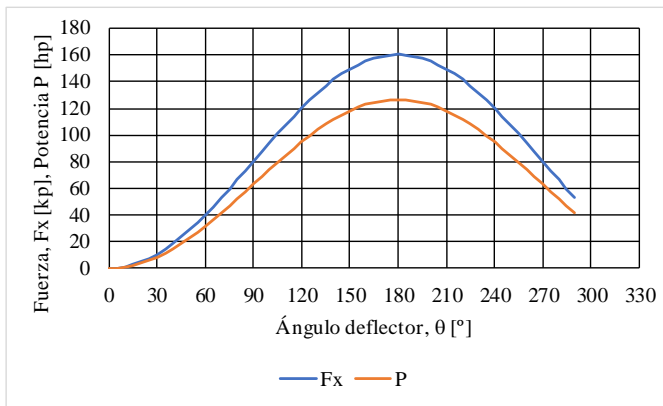


Figura 5-72.- Variación de la fuerza F_x y la potencia generada P en función del ángulo de deflexión. Fuente: elaboración propia.

Obsérvese que la máxima potencia ocurre para $\theta = 180^\circ$, por lo general este ángulo no puede conseguirse en la práctica, se suele usar un ángulo de 170° como adecuado, la reducción de la potencia es pequeña en tanto por ciento.

5.28 Aplicaciones a flujo en tuberías

5.28.1 Contracción

Ejemplo 5.17.

Determine la fuerza que ejerce la boquilla sobre la tubería según el esquema que se ilustra en la **Figura 5-73a**. Si la gravedad específica del fluido es 0,85, $D_1 = 75$ mm, $D_2 = 25$ mm, presión $p_1 = 6$ kg/cm². Se recomienda despreciar las pérdidas.

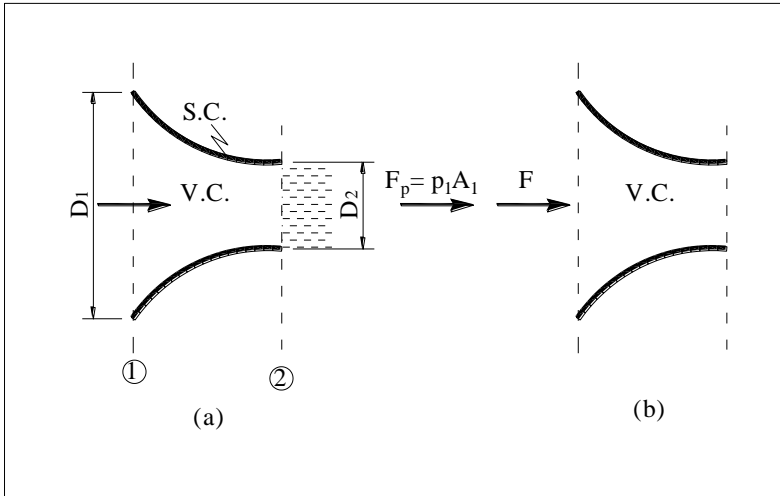


Figura 5-73 .- Esquema de la boquilla. (a) Geometría de la reducción. (b) Diagrama de fuerzas sobre el VC.

Solución:

En este caso existen fuerzas externas como la generada por la presión en la sección (1), F_p y la fuerza F que ejerce la boquilla sobre el tubo, según se aprecia en la **Figura 5-73b**. Se aplica la ecuación de momento lineal entre las secciones (1) y (2).

$$+F + p_1 A_1 = \frac{\gamma}{g} [(QV)_2 - (QV)_1] \tag{1}$$

Como no se conoce el caudal, se utiliza la ecuación de energía y de conservación de masa, entre las secciones (1) y (2) de la siguiente manera:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} \tag{2}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g} \tag{3}$$

$$V_1^2 - V_2^2 = -2g \frac{p_1}{\gamma} \quad (4)$$

Por la ecuación de continuidad se tiene que:

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \Rightarrow V_2 = V_1 (D_1 / D_2)^2 \quad (5)$$

$$V_1^2 - V_1^2 (D_1 / D_2)^4 = -2g \frac{p_1}{\gamma} \quad (6)$$

$$V_1^2 (1 - (D_1 / D_2)^4) = -2g \frac{p_1}{\gamma} \quad (7)$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2gp_1}{((D_1 / D_2)^4 - 1)\gamma}} \quad (8)$$

Reemplazando valores se tiene:

$$V_1 = \sqrt{\frac{2(9,81m/s^2)(60000kp/m^2)}{((75/25)^4 - 1)850kp/m^3}} = 4,161m/s \quad (9)$$

$$Q = A_1 V_1 = \frac{\pi(0,075m)^2}{4} 4,161m/s = 0,0184m^3/s \quad (10)$$

$$V_2 = \frac{0,0184m^3/s}{\frac{\pi(0,025m)^2}{4}} = 37,449m/s \quad (11)$$

$$+F + p_1 A_1 = \frac{\gamma Q}{g} [V_2 - V_1] \quad (12)$$

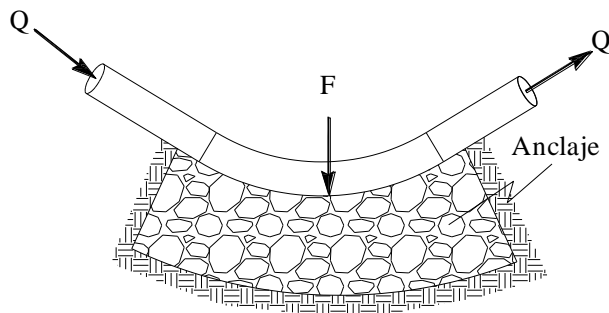
$$+F = \frac{850kp/m^3(0.0184m^3/s)}{9,81m/s^2} [37,449m/s - 4,161m/s] - 60000kp/m^2 \frac{\pi(0,075m)^2}{4} \quad (13)$$

$$+F = 53,070kp - 265,071kp = -212kp \quad (14)$$

Como el signo de la fuerza F es negativo, el sentido es inverso sobre el volumen de control; es decir, irá de derecha a izquierda. Sin embargo, la fuerza que ejerce la boquilla sobre el tubo es de izquierda a derecha.

5.28.2 Cambios de dirección

En la ingeniería práctica es común el uso de anclajes para asegurar conductos, es el caso de un tubo que cambia de dirección tanto en el sentido horizontal como vertical, eso hace que se genere una fuerza dinámica sobre el anclaje como se muestra en la **Figura 5-74**, debido al flujo Q . Es necesario determinar el valor de dicha fuerza para efectos de diseñar estructuralmente el apoyo o anclaje respectivo.



Vista en planta

Figura 5-74.- Apoyo en el cambio de dirección horizontal de una tubería.

Ejemplo 5.18.

Hallar la fuerza resultante F como se ilustra en la **Figura 5-75**. Utilizar como datos de la siguiente información: $D = 0,60$ m, $Q = 0,9$ m³/s; $G_s = 0,85$; pérdida = 1,10 m de líquido; $p_1 = 30.000$ kg/m².

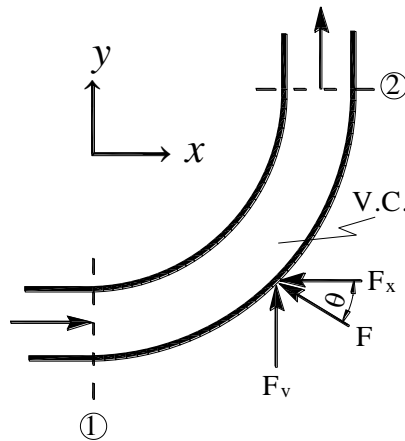


Figura 5-75.- Geometría del cambio de dirección.

Solución:

Se necesita conocer la presión en la sección (2), para ello se aplica la ecuación de Bernoulli entre (1) y (2) considerando las pérdidas:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_{1-2} \quad (1)$$

Como las cargas de posición (z_1, z_2) son cero debido a que la posición del codo es horizontal y las cargas de velocidad son iguales se tiene que:

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} - \sum h_{1-2} = \frac{30000 \text{kp/m}^2}{850 \text{kp/m}^2} - 1,10 \text{m} = 34,194 \text{mca}$$

$$p_2 = 34,194 \text{mca} (850 \text{kp/m}^3) = 29065 \text{kp} \quad (2)$$

Fuerza en dirección x.

En este caso existen fuerzas externas como la generada por presión en la sección (1), F_p y la fuerza F_x que ejerce la curva sobre el VC, como se muestra en la **Figura 5-75**. Se aplica la ecuación de momento lineal entre las secciones (1) y (2).

$$-F_x + p_1 A_1 = \frac{\gamma}{g} [(QV)_2 - (QV)_1] \quad (3)$$

Como no existe salida en la dirección x, se tiene:

$$-F_x + p_1 A_1 = \frac{\gamma}{g} [-(QV)_1] \quad (4)$$

Como se conoce el caudal y el diámetro de la tubería se puede calcular las velocidades, donde $V_1 = V_2 = Q/A$.

$$V = \frac{0,9 \text{ m}^3 / \text{s}}{\pi(0,6 \text{ m})^2 / 4} = 3,183 \text{ lm/s} \quad (5)$$

$$-F_x + p_1 A_1 = -\frac{\gamma}{g} QV_1 \quad (6)$$

$$F_x = \frac{\gamma}{g} QV_1 + p_1 A_1 \quad (7)$$

$$F_x = \left[\frac{850 \text{ kp/m}^3}{9,8 \text{ lm/s}^2} (0,9 \text{ m}^3 / \text{s})^2 3,18 \text{ m/s} \right] + \left[30000 \text{ kp/m}^2 \frac{\pi(0,6 \text{ m})^2}{4} \right] = 8730,3 \text{ kp} \quad (8)$$

Fuerza en dirección y.

En este caso, existen fuerzas externas como la generada por presión en la sección (1), F_p y la fuerza F_y que ejerce la curva sobre el VC, como se muestra en la **Figura 5-75**. Se aplica la ecuación de momento lineal entre las secciones (1) y (2). No existe flujo de entrada en la dirección y.

$$F_y - p_2 A_2 = \frac{\gamma}{g} [(QV)_2 - (QV)_1] \quad (9)$$

Como no existe flujo de entrada en la dirección y , se tiene:

$$F_y - p_2 A_2 = \frac{\gamma}{g} Q V_2 \quad (10)$$

$$F_y = \frac{\gamma}{g} Q V_2 + p_2 A_2 \quad (11)$$

$$F_x = \frac{850 \text{kp} / \text{m}^3}{9,81 \text{m} / \text{s}^2} (0,9 \text{m}^3 / \text{s})^2 3,18 \text{m} / \text{s} + 29065 \text{kp} / \text{m}^2 \frac{\pi(0,6 \text{m})^2}{4} = 8466,0 \text{kp} \quad (12)$$

Resultante F .

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(8466 \text{kp})^2 + (8730 \text{kp})^2} = 12161 \text{kp} \quad (13)$$

Dirección de F .

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{F_y}{F_x} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{8730,0 \text{kp}}{8466,0 \text{kp}} \right] = 44,12^\circ \quad (14)$$

Sobre el apoyo o anclaje las fuerzas actuarán al contario de aquellas aplicadas al volumen de control.

Ejemplos recomendados.

Se recomienda al lector revisar los siguientes ejemplos:

- Evett and Liu (1989), problema 681, p. 669.
- Bansal (2010), problema 630, p. 285; problema 638 p. 300.

5.29 Ejercicios propuestos

Ejercicio. 5.29.1. (Nakayama, 1998, p. 78).

(a) Encuentre las velocidades de flujo v_1 , v_2 y v_3 en el conducto que se ilustra en la **Figura 5-76**. El caudal que circula a través del sistema es $Q = 800 \text{ L/min}$ y los diámetros d_1 , d_2 y d_3 , en las secciones 1, 2 y 3 son

50 mm, 60 mm y 100 mm respectivamente. **(b)** Si la presión p_1 en la sección 1 es de 24,5 kPa, ¿Cuáles serán las presiones p_2 , y p_3 , en las secciones 2 y 3 respectivamente?

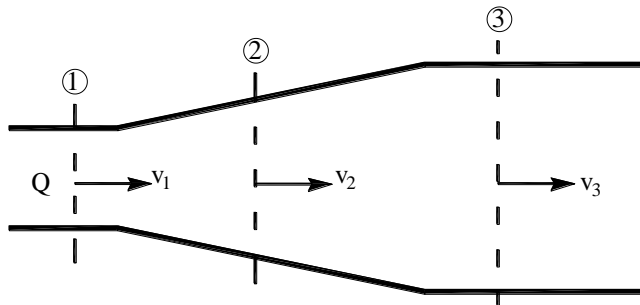


Figura 5-76 .- Geometría de la expansión.

Ejercicio. 5.29.2. (Nakayama, 1998, p. 80).

Tal como se ilustra en la **Figura 5-77**, un chorro de agua con un caudal Q y con diámetro d golpea la placa estacionaria con un ángulo de incidencia θ . Calcule la fuerza en la placa estacionaria y su dirección. Adicionalmente, si $\theta = 60^\circ$, $d = 25$ mm y $Q = 0,12$ m³/s, obtenga los valores de Q_1 , Q_2 y F .

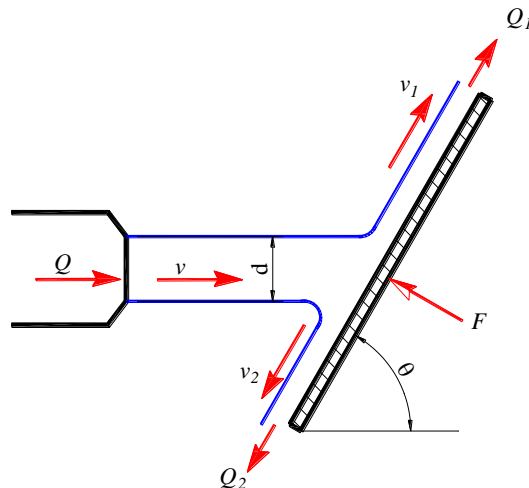


Figura 5-77 .- Geometría de la placa.

Ejercicio. 5.29.3.

¿Cuál debe ser la velocidad del flujo de agua de una boquilla de 2 pulgadas de diámetro, para ejercer una fuerza de 300 lb sobre una pared plana?

Ejercicio. 5.29.4.

Según la instalación de la turbina que se ilustra en la **Figura 5-78**, en la cual se tienen las siguientes características: diámetro del chorro desde la boquilla de $D_0 = 50$ mm; velocidad del flujo de $V_0 = 20$ m/s; radio del rotor $r = 2$ m; velocidad de los álabes, $u = 8$ m/s. El ángulo de deflexión del álabe es $\theta = 180^\circ$. Se solicita encontrar:

- La fuerza del chorro sobre el álabe inmóvil.
- La contribución al par de arranque del álabe.
- La fuerza del chorro sobre el álabe en movimiento.
- La potencia con la cual contribuye el álabe a la turbina.
- La potencia generada de toda la turbina debido a la serie de álabes.
- La eficiencia de la turbina si se desprecia la carga de posición y de presión.

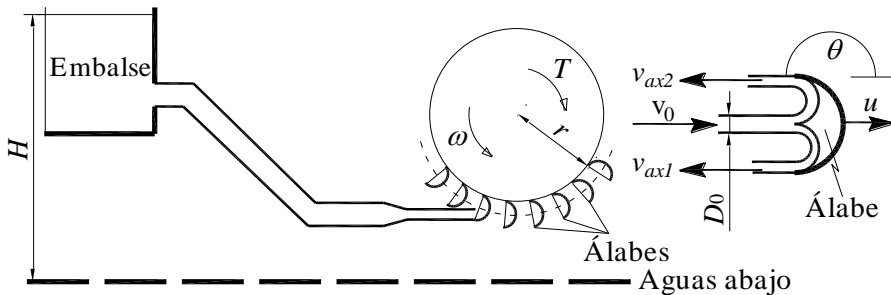


Figura 5-78 .- Esquema de la instalación de una turbina. Fuente: Adaptada de (Smits, 2019, p. 246)

Ejercicio. 5.29.5. (Sotelo, 2005, p. 176).

Se solicita calcular la fuerza que produce el flujo de agua sobre la curva y la boquilla del chiflón, mostrados en la **Figura 5-79**; el agua abandona la boquilla como un chorro libre. El volumen

interior del conjunto del codo y de la boquilla es de 115 litros y todo el conjunto está contenido en un plano horizontal.

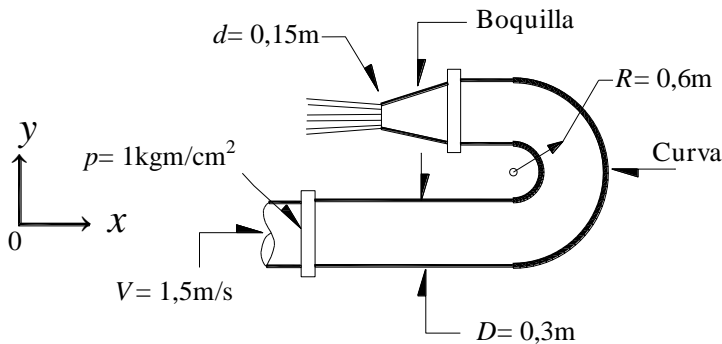


Figura 5-79.- Geometría de la curva y boquilla del Ejercicio 18.4. Fuente: Adaptada de (Sotelo, 2005, p. 176).

Ejercicio. 5.29.6. (Darby y Chhabra, 2001, p. 143).

Considere el “tanque sobre ruedas” que se muestra en la **Figura 5-80**. En el tanque, el agua es drenada a través de un orificio lateral del tanque abierto a un flujo de 10 gpm. Si el diámetro del tanque es de 2 pies y el diámetro del orificio es de 2 pulgadas, determine la magnitud y la dirección de la fuerza transmitida del agua al tanque.

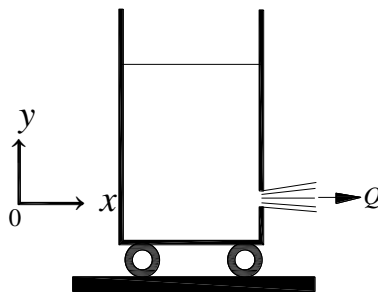


Figura 5-80.- Esquema del tanque móvil.

5.30 Ecuación de Cantidad de Movimiento Angular

También conocida como ecuación de *Momento de Momentum* o *Ecuación del momento de la cantidad de movimiento* y es derivada del principio de cantidad de movimiento angular el cual establece que el

torque resultante de un fluido en rotación es igual a la tasa (variación con el tiempo) de cambio del momento de momentum (Potter et al., 2015, p. 130), (Bansal, 2010, p. 298). En esta sección del texto se analizan otras aplicaciones comúnmente utilizadas en ingeniería, relacionadas con turbo máquinas, ventiladores, aspersores y accesorios.

5.30.1 Concepto de Torque

El torque $\vec{\Gamma}$ que genera una fuerza \vec{F} por una distancia \vec{r} alrededor de un punto determinado, se define como el **producto cruz** entre estos dos vectores, dado como:

$$\vec{\Gamma} = \vec{F} \times \vec{r} \quad (5.236)$$

El producto cruz de dos vectores es un vector ortogonal al plano definido por los dos primeros vectores y con magnitud de $Frsen(\theta)$, la cual es la distancia más corta entre la línea de acción de la fuerza F y el punto cero (0) (Streeter et al., 2000). Como se muestra en la **Figura 5-81**, la fuerza F tiende a causar rotación alrededor del punto 0, en dirección de las manecillas del reloj, que por convención de la mano derecha se obtiene un vector negativo entrando ortogonal a la página o “pantalla” del lector. Si el sentido o signo de $\vec{\Gamma}$ ese **horario**, el momento se considera **negativo**; y si el giro es **anti horario**, el momento se considera **positivo**.

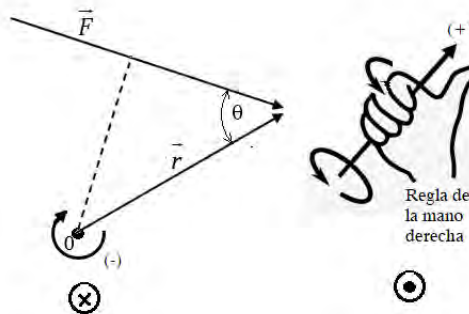


Figura 5-81.- Convención para el momento de un vector. \otimes : Vector entrando. \odot : Vector saliendo del papel.

5.30.2 Planteamiento de ecuación de momento angular

El **momento angular** se define como el producto del vector de momento lineal $m\vec{v}$ por unidad de tiempo que actúa sobre el volumen de control (VC) y el vector de posición \vec{r} de la partícula de masa Δm . También se puede denominar como el **momento de la cantidad de movimiento (Figura 5-82)**. El VC en análisis, se debe considerar como un **sistema inercial** (que esté en reposo o en movimiento con velocidad constante).

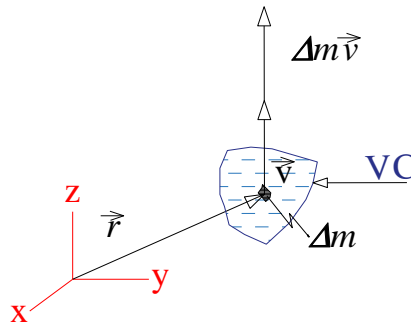


Figura 5-82.- Vectores del momento angular. Fuente: Adaptado de (Gastón, 1988, p. 102).

Al aplicar la definición se tiene:

$$\frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt} = \Gamma \tag{5.237}$$

El cambio con el tiempo del momento angular es el **torque Γ** , en forma análoga al cambio de momento en el tiempo que es la **fuerza** (Bar–Meir, 2013, p. 65). Como la cantidad de movimiento lineal fue definida como:

$$\frac{dm\vec{v}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} (\int_{VC} (\vec{v}\rho dV)) + \oint_{SC} (\vec{v}\rho\vec{v} \cdot d\vec{A}) \tag{5.238}$$

Al multiplicar todos los términos por el vector \vec{r} se tiene que:

$$\Gamma = \frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} \rho(\vec{r} \times \vec{v}) dV \right) + \oint_{SC} \rho(\vec{r} \times \vec{v})(\vec{v} \cdot d\vec{A}) \quad (5.239)$$

El primer término del lado derecho es la variación con el tiempo del momento de la cantidad de movimiento dentro del VC. **El segundo término** del lado derecho es el flujo saliente neto del momento de la cantidad de movimiento a partir del VC (Chereque, 1987, p. 100).

La anterior es una ecuación útil para estudiar fluidos a través de mecanismos rotatorios tales como rotores de bombas, ventiladores, álabes de turbinas, aspersores y otras estructuras que tienden a rotar sobre algún punto.

Si se opta por flujo permanente, para una bomba centrífuga, con entrada y salida, para la aplicación de esta ecuación en el plano (sólo convierten a módulos de los vectores o las magnitudes) se tiene:

El producto punto con $\theta = 0^\circ$:

$$\vec{v} \cdot d\vec{A} = VdA \cos(\theta) = VdA \quad (5.240)$$

El producto cruz con $\theta = 90^\circ$:

$$\vec{r} \times \vec{v} = rV \sin(\theta) = rV \quad (5.241)$$

En la **Figura 5-83** se ilustra el diagrama vectorial de dos vectores, con radios (r) y velocidades (V). El producto cruz de los vectores de posición y de velocidad se representa de la siguiente manera: $\vec{r} \times \vec{v} = |r||V|\sin(\theta)$, pero como $h = r \cdot \sin(\theta)$, entonces se tiene que $\vec{r} \times \vec{v} = hV$

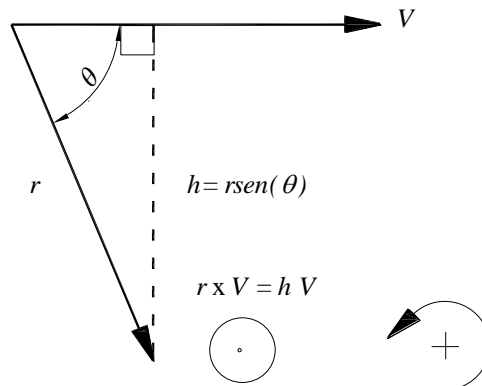


Figura 5-83.- Diagrama vectorial. Fuente: Adaptada de White (2004, p. 160).

Simplificando la ecuación de momento de momentum para flujo permanente, se obtiene:

$$\Gamma = \oint_{SC} \rho(\vec{r} \times \vec{v})(\vec{v} \cdot d\vec{A}) \tag{5.242}$$

Al reemplazar por las magnitudes escalares de los vectores:

$$\Gamma = \oint_{SC} \rho(rV)(VdA) \tag{5.243}$$

Recordando que la integral cerrada de superficie es igual a la suma de las integrales sobre las áreas discretas que la componen.

$$\Gamma = \oint_{SC} \rho(rV)(VdA) = \int_{A_1} ()_1 + \int_{A_2} ()_2 \tag{5.244}$$

Se debe tener en cuenta el signo negativo del término de entrada (1), el cual se debe al producto punto de $\vec{v} \cdot d\vec{A}$, ya que los dos vectores son paralelos pero en sentido opuesto, con el vector de área ortogonal a la superficie y siempre saliendo, donde $\cos(180^\circ) = -1$.

5.30.3 Ecuación de Euler para turbo máquinas

Las turbomáquinas son dispositivos mecánicos que manejan fluidos, tal como **bombas, turbinas, ventiladores** o **compresores**. Si el fluido cambia sensiblemente el valor de su densidad a su paso por la máquina, se denominan máquinas térmicas, por ejemplo, los turbocompresores, las turbinas de gas y las turbinas de vapor (García, 2011, p. 1).

Según la **Figura 5-84** se tiene una bomba o ventilador con entrada desde el centro hacia la periferia. En ella se tiene que V_1 y V_2 son velocidades absolutas, que sería la velocidad con la que saldría el chorro si no hubiera álabe; v_1, v_2 son velocidades relativas, $v = V - u$; por su parte u_1, u_2 son velocidades tangenciales del rotor iguales a ωr , $u_1 = \omega r_1$, $u_2 = \omega r_2$; donde α_1, α_2 son los ángulos que forman las velocidades absolutas con la dirección tangencial; β_1, β_2 son los ángulos que forman las velocidades relativas con la dirección tangencial, o el ángulo del álabe con la tangente en el punto de entrada o salida; A_1, A_2 son las áreas de salida y entrada del volumen de control que encierra al rotor; r_1, r_2 son los radios interno y externo del volumen de control que encierra al rotor; ω es la velocidad angular del rotor de la turbo máquina.

Varios autores presentan la derivación de la ecuación de Euler para aplicación a máquinas hidráulicas, entre ellos se encuentran: Dayli y Harleman (1975), Streeter et al., (2000), Nakayama et al., (1998), Giles et al., (1994), Smits (2019), García (2011) y Spurk y Aksel (2008).

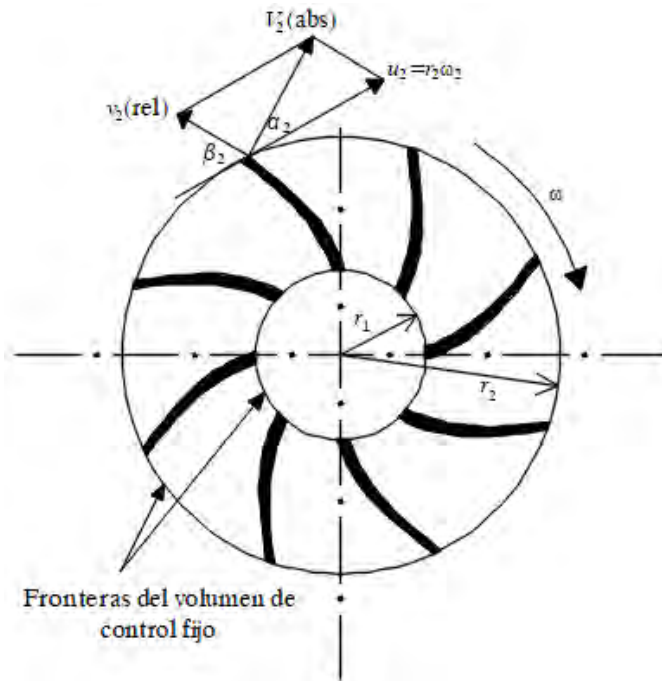


Figura 5-84.-Notación y volumen de control para una turbo máquina (Dayli y Harleman, 1975, p. 107)

Al aplicar la ecuación de momento de momentum, entre la entrada y la salida se tiene:

$$\Gamma = - \int_{A_1} r_1 V_{t1} \rho_1 V_{n1} dA_1 + \int_{A_2} r_2 V_{t2} \rho_2 V_{n2} dA_2 \tag{5.245}$$

V_{t1} , V_{t2} son las proyecciones de la velocidad absoluta sobre la tangente, como se puede observar en la

Figura 5-85, se tiene:

$$V_{t1} = V_1 \text{Cos}(\alpha_1); V_{t2} = V_2 \text{Cos}(\alpha_2) \tag{5.246}$$

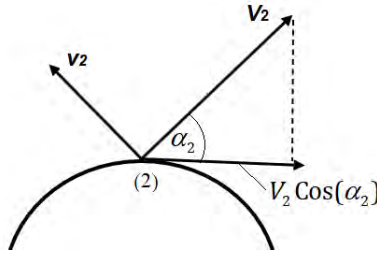


Figura 5-85.- Proyección de la velocidad absoluta V_2

$$\Gamma = - \int_{A_1} r_1 V_1 \cos(\alpha_1) \rho_1 V_{n1} dA_1 + \int_{A_2} r_2 V_2 \cos(\alpha_2) \rho_2 V_{n2} dA_2 \tag{5.247}$$

Si se introduce la velocidad tangencial u_1, u_2 , sustituyendo el radio en 1 y 2, como:

$$r_1 = \frac{u_1}{\omega}; r_2 = \frac{u_2}{\omega} \tag{5.248}$$

$$\Gamma = - \int_{A_1} \frac{u_1}{\omega} V_1 \cos(\alpha_1) \rho_1 V_{n1} dA_1 + \int_{A_2} \frac{u_2}{\omega} V_2 \cos(\alpha_2) \rho_2 V_{n2} dA_2 \tag{5.249}$$

Solucionando la integral y dando $\rho = \gamma/g$ y $Q = V_n A$, se obtiene la ecuación del torque.

$$\Gamma = - \frac{u_1}{\omega} V_1 \cos(\alpha_1) \frac{\gamma_1}{g} Q + \frac{u_2}{\omega} V_2 \cos(\alpha_2) \frac{\gamma_2}{g} Q \tag{5.250}$$

Factorizando algunos términos, se obtiene la ecuación general.

$$\Gamma = \frac{\gamma}{g\omega} Q (V_2 \cos(\alpha_2) u_2 - V_1 \cos(\alpha_1) u_1) \tag{5.251}$$

Definiendo la potencia como, $P = \Gamma \cdot \omega$ se tiene:

$$P = \Gamma \omega = \frac{\gamma}{g} Q (V_2 \cos(\alpha_2) u_2 - V_1 \cos(\alpha_1) u_1) \quad (5.252)$$

Como la potencia hidráulica se había definido como:

$$P = \gamma Q H_{maquina} \quad (5.253)$$

Al igualar las dos ecuaciones de potencia, se obtiene:

$$P = \gamma Q H_{maquina} = \frac{\gamma}{g} Q (V_2 \cos(\alpha_2) u_2 - V_1 \cos(\alpha_1) u_1) \quad (5.254)$$

Se despeja la cabeza de la máquina:

$$H_{maquina} = \frac{1}{g} (V_2 \cos(\alpha_2) u_2 - V_1 \cos(\alpha_1) u_1) \quad (5.255)$$

Que es la conocida **ecuación de Euler** para turbomáquinas. Los valores de $V_1 \cos(\alpha_1) = V_{t1}$ y $V_2 \cos(\alpha_2) = V_{t2}$, corresponden a las velocidades tangenciales del fluido en movimiento en los puntos 1 y 2, respectivamente. Al comparar los términos dentro del paréntesis de esta ecuación de Euler (5.255), se puede determinar si es una bomba o una turbina, como se muestra a continuación:

$$V_2 \cos(\alpha_2) u_2 > V_1 \cos(\alpha_1) u_1 \Rightarrow es_turbina \quad (5.256)$$

$$V_2 \cos(\alpha_2) u_2 < V_1 \cos(\alpha_1) u_1 \Rightarrow es_bomba \quad (5.257)$$

Cuanto Γ es positivo (+), el momento de momentum del fluido aumenta dentro del volumen de control, tal como sucede en una **bomba**. Para Γ negativo (-), el momento de momentum del fluido disminuye dentro del volumen de control, tal como sucede en el rotor de una **turbina**. Si Γ es

cero (0), será en sectores donde no existen álabes, y el valor de $rV\cos(\alpha)$ = constante (Streeter et al., 2000).

5.31 Aplicaciones a turbo máquinas

5.31.1 Turbinas

Ejemplo 5.19. (Chereque, 1987, p. 101), (Streeter et al., 2000, p. 157)
Se va a diseñar una turbina hidráulica de modo que para el $Q = 10,0$ m^3/s , se ejerza un par de 1000 kp-m sobre el rodete que gira a una velocidad angular $\omega = 200$ rpm y absorbe todo el **momento de la cantidad de movimiento**. Si en la periferia exterior del rodete el radio es 0,90 m, ¿Cuál debe ser la componente tangencial (V_t) de la velocidad en este lugar?.

Solución:

En las turbinas, el agua entra por su parte externa y sale por el centro, como se ilustra en la **Figura 5-86**.

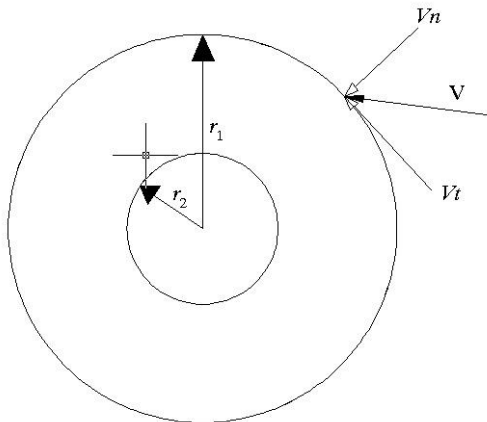


Figura 5-86.- Esquema de la turbina.

Se plantea nuevamente la :

$$\Gamma = - \int_{A_1} r_1 V_{t1} \rho_1 V_{n1} dA_1 + \int_{A_2} r_2 V_{t2} \rho_2 V_{n2} dA_2 \quad (1)$$

Como la entrada o parte externa absorbe todo el momento de momentum, el segundo término de la ecuación será cero; o, dicho de otra manera, no hay momento de momentum en la salida.

$$\Gamma = - \int_{A_1} r_1 V_{t1} \rho_1 V_{n1} dA_1 \quad (2)$$

Solucionando la integral y teniendo en cuenta que Γ en la anterior ecuación representa lo que el agua recibe, pero en este caso el agua entrega ($-\Gamma$), motivo por el cual se elimina el signo (-) (Chereque, 1987, p. 101). O dicho de otra manera para Γ negativo (-) se tiene que el momento de momentum del fluido disminuye dentro del volumen de control, comportamiento típico en el rotor de una **turbina**. Solucionando para la velocidad tangencia V_{t1} , se obtiene:

$$\Gamma = r_1 V_{t1} \rho_1 V_{n1} \int_{A_1} dA_1 = r_1 V_{t1} \rho_1 V_{n1} A_1 = r_1 V_{t1} \rho_1 Q = \frac{\gamma}{g} r_1 V_{t1} Q \quad (3)$$

$$V_{t1} = \frac{g\Gamma}{r_1 \gamma Q} = \frac{(9,81m/s^2)1000kp - m}{(0,9m)(1000kp/m^3)(10m^3/s)} = 1,09m/s \quad (4)$$

Como complemento al ejemplo, comparar con la solución que plantean Chereque (1987, p. 101) y Streeter et al. (2000, p. 157).

5.31.2 Bombas

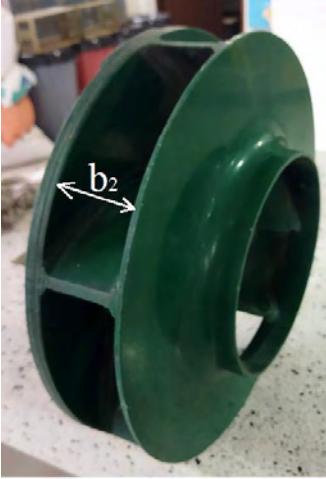
Ejemplo 5.20.

Se pide encontrar la cabeza máxima de una bomba (H_{max}), con los siguientes datos: Velocidad angular, $\omega = 1800$ rpm; radio interno del rotor, $r_1 = 63$ mm, radio externo del rotor, $r_2 = 114$ mm; ángulo $\beta_1 = 30^\circ$; ángulo $\beta_2 = 45^\circ$; ancho del rodete interno, $b_1 = 0,35$ m, ancho del rodete externo $b_2 = 0,19$ m. El valor de H_{max} se obtiene cuando $V_1 \cos \alpha_{1U1} = 0$.

Solución:

Un rotor de una bomba, usualmente, es como el que se ilustra en la **Figura 5-87** a,b; consta de una serie de álabes entre dos placas, donde la separación de las mismas es el ancho b .

a)



b)

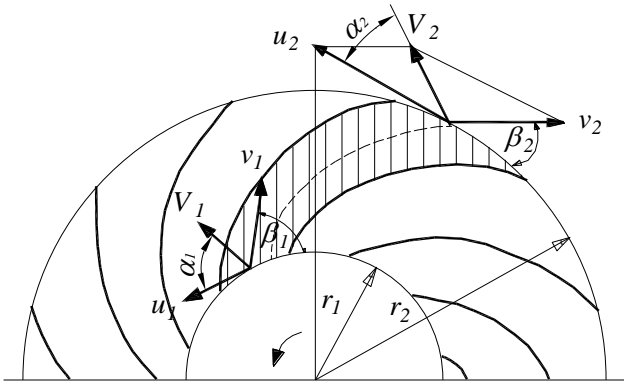


Figura 5-87 a) Fotografía de un rodete de bomba centrífuga (Laboratorio de Hidráulica de la Universidad de Nariño. b) Esquema del rodete de una bomba. Fuente: Adaptada de (Nakayama et al., 1998, p. 78).

1) Se realiza el planteamiento de la ecuación de Euler.

$$H_{maquina} = \frac{1}{g} (V_2 \cos(\alpha_2) u_2 - V_1 \cos(\alpha_1) u_1) \quad (5)$$

Para hallar H_{max} ,

$$V_1 \cos(\alpha_1) u_1 = 0 \tag{6}$$

Lo que indica que $\cos(\alpha_1) = 0$, y $\alpha_1 = 90^\circ$.

$$H_{B_{\max}} = \frac{1}{g} (V_2 \cos(\alpha_2) u_2) \tag{7}$$

$$H_{B_{\max}} = \frac{1}{g} (V_2 \cos(\alpha_2) \omega r_2) \tag{8}$$

No se conoce la velocidad tangencial del chorro en 2, $V_2 \cos(\alpha_2) = V_{t_2}$.

2) Se realiza un diagrama vectorial en el punto 1 con $\alpha_1 = 90^\circ$, como se ilustra en la **Figura 5-88**. En el diagrama se indica que la velocidad absoluta V_1 , es ortogonal a la superficie de entrada e igual a la velocidad en sentido radial V_{r1} .

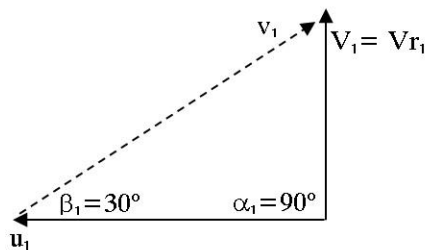


Figura 5-88.- Diagrama vectorial en el punto 1.

Si se hace el análisis para $\tan(\beta_1)$ y se tiene que:

$$\tan(30^\circ) = \frac{V_{r1}}{u_1} \Rightarrow V_{r1} = u_1 \tan(30^\circ) = \omega r_1 \tan(30^\circ) \tag{9}$$

3) Con V_{r1} conocida, se puede calcular el caudal de entrada Q , ya que se conoce la superficie de entrada del rotor; es decir:

$$Q = V_{r1} A_1 = V_{r1} (2\pi r_1 b_1) \tag{10}$$

4) Se calcula la velocidad radial de salida, usando la ecuación de continuidad de la siguiente manera:

$$Q = V_{r1}A_1 = V_{r2}A_2 \Rightarrow V_{r2} = Q / A_2 = \frac{Q}{2\pi r_2 b_2} \quad (11)$$

5) Se hace un diagrama vectorial en el punto 2, para encontrar el término $V_2 \cos(\alpha_2)$ tal como se indica en la **Figura 5-89**.

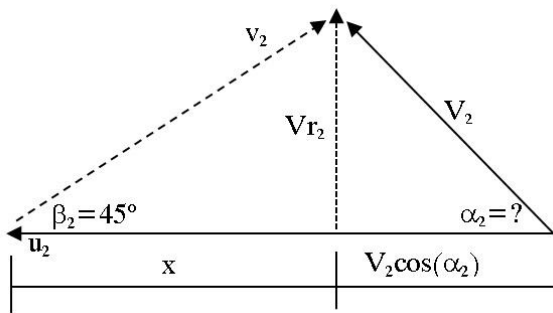


Figura 5-89.- Diagrama vectorial en el punto 2.

El valor de x , se lo obtiene de la siguiente manera:

$$x = u_2 - V_2 \cos(\alpha_2) \quad (12)$$

Por otro lado se tiene que x es:

$$\tan(\beta_2) = \frac{V_{r2}}{x} \Rightarrow x = \frac{V_{r2}}{\tan(\beta_2)} \quad (13)$$

Al igualar estas dos últimas ecuaciones se tiene:

$$x = u_2 - V_2 \cos(\alpha_2) = \frac{V_{r2}}{\tan(\beta_2)} \Rightarrow V_2 \cos(\alpha_2) = u_2 - \frac{V_{r2}}{\tan(\beta_2)} \quad (14)$$

6) Con lo cual se puede sustituir en la ecuación de Euler:

$$H_{B_{\max}} = \frac{1}{g} (V_2 \cos(\alpha_2) \omega r_2) \quad (15)$$

$$H_{B_{\max}} = \frac{\omega r_2}{g} \left(u_2 - \frac{V_{r2}}{\tan(\beta_2)} \right) \quad (16)$$

Sustituyendo V_{r2} y u_2 en la anterior expresión se tiene que:

$$H_{B_{\max}} = \frac{\omega r_2}{g} \left(\omega r_2 - \frac{Q}{2\pi r_2 b_2} \right) \quad (17)$$

Sustituyendo Q :

$$H_{B_{\max}} = \frac{\omega r_2}{g} \left(\omega r_2 - \frac{V_{r1} (2\pi r_1 b_1)}{2\pi r_2 b_2} \right) \quad (18)$$

$$H_{B_{\max}} = \frac{\omega r_2}{g} \left(\omega r_2 - \frac{V_{r1} (r_1 b_1)}{r_2 b_2} \right) \quad (19)$$

Sustituyendo V_{r1} se tiene:

$$H_{B_{\max}} = \frac{\omega r_2}{g} \left(\omega r_2 - \frac{\omega r_1 \tan(\beta_1) (r_1 b_1)}{r_2 b_2} \right) \quad (20)$$

Con $\tan(\beta_2) = \tan(45^\circ) = 1$.

$$H_{B_{\max}} = \frac{\omega r_2}{g} \left(\omega r_2 - \frac{\omega r_1 \tan(\beta_1)(r_1 b_1)}{r_2 b_2} \right) \quad (21)$$

Cabe mencionar que $H_{B_{\max}}$ depende de los ángulos de entrada y salida de los álabes (β). Con base en lo anterior, reemplazando valores y haciendo los cálculos se tiene que:

$$\omega r_1 = 1800 \frac{2\pi}{60} 0,063m = 11,88m/s \quad (22)$$

$$\omega r_2 = 1800 \frac{2\pi}{60} \cdot 0,114m = 21,49m/s \quad (23)$$

$$\tan(\beta_1)(r_1 b_1) = 0,5773(0,063m \cdot 0,35m) = 0,0127m^2 \quad (24)$$

$$(r_2 b_2) = (0,114m \cdot 0,19m) = 0,0217m^2 \quad (25)$$

$$H_{B_{\max}} = \frac{21,49m/s}{9,81m/s^2} \left(21,49m/s - \frac{11,88m/s \tan(0,0127m^2)}{0,0217m^2} \right) \quad (26)$$

$$H_{B_{\max}} = \frac{21,49m/s}{9,81m/s^2} \left(21,49m/s - \frac{(11,88m/s)(0,0127m^2)}{0,0217m^2} \right) \quad (27)$$

$$H_{B_{\max}} = 31,85m \quad (28)$$

Obsérvese que al reemplazar las unidades y simplificar términos comunes, las unidades resultantes son coherentes, en este caso metros para H_{\max} . Es conveniente que este tipo de problemas, en los cuales se puede generalizar la ecuación, el lector los programe en un software para realizar estudios más detallados.

5.32 Aplicaciones a tuberías

5.32.1 Tubo con cambio de dirección

Ejemplo 5.21. (White, 2004, p. 159).

Según se muestra en la **Figura 5-90**, la curva de un tubo se está soportada en el punto A y se encuentra conectada a un sistema de flujo por uniones flexibles en las secciones 1 y 2. El fluido transportado es incompresible, y la presión ambiente p_a es cero. **(a)** Encuentre una expresión para el torque Γ que deberá ser resistido por el soporte en A en (lb_F-ft), en términos de las propiedades del flujo, en las secciones 1 y 2 y las distancias h_1 y h_2 . **(b)** Determine el valor del torque si $D_1 = D_2 = 3$ pulgadas, $p_1 = 100$ lbf/in² manométrica, $p_2 = 80$ lbf/in² manométrica, $V_1 = 40$ pies/s, $h_1 = 2$ pulgadas, $h_2 = 10$ pulgadas, y $\rho = 1.94$ slugs/pie³.

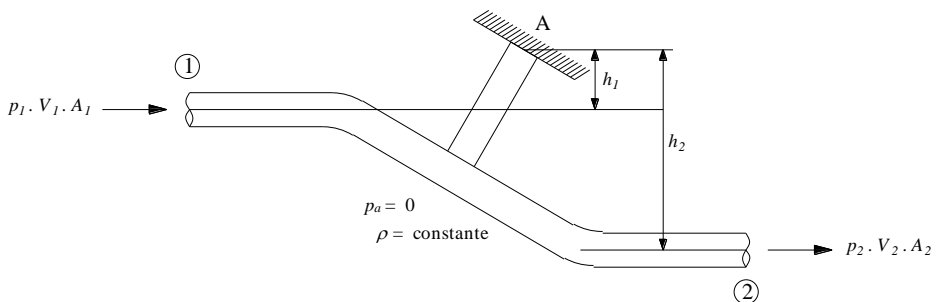


Figura 5-90.- Esquema de la instalación del Ejemplo 5.21. Fuente: Adaptada de (White, 2004, p. 159).

Solución:

a. Expresión para el torque

- 1) Se plantea la ecuación de momento de momentum entre las secciones (1) y (2) para flujo permanente.

$$\Gamma = \oint_{SC} \rho(\vec{r} \times \vec{v})(\vec{v} \cdot d\vec{A}) \tag{1}$$

Se debe tener en cuenta el signo del torque generado por las velocidades, el cual toma la misma convención de la mano derecha; en

este caso, según las direcciones de las velocidades, ambos torques son positivos.

$$\Gamma = \int_{A1} \left[\rho (\vec{r} \times \vec{v}) (\vec{v} \cdot d\vec{A}) \right]_1 + \int_{A2} \left[\rho (\vec{r} \times \vec{v}) (\vec{v} \cdot d\vec{A}) \right]_2 \tag{2}$$

Se realiza un diagrama de fuerzas sobre el VC, como el mostrado en la **Figura 5-91**.

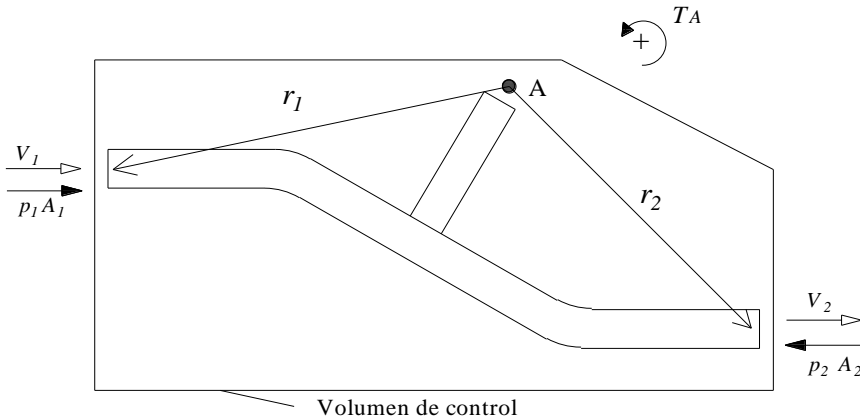


Figura 5-91.- Diagrama de cuerpo libre del volumen de control. Fuente: Adaptada de (White, 2004, p. 159).

Como se considera que el producto punto del vector velocidad por el vector área son paralelos, entonces es negativo (-) en la entrada $\vec{v} \cdot d\vec{A} = VdA \cos(0) = VdA$ y positivo (+) en la salida $\vec{v} \cdot d\vec{A} = VdA \cos(180) = -VdA$, ya que el vector área siempre sale del volumen de control o es ortogonal a la superficie de control, siempre saliendo. El producto cruz de los vectores de posición y de velocidad se representa de la siguiente manera: $\vec{r} \times \vec{v} = rV \text{sen}(\theta)$, pero como $h = r \cdot \text{sen}(\theta)$, entonces se tiene que $\vec{r} \times \vec{v} = hV$, para el caudal, por ecuación de continuidad, se tiene: $Q = VA$.

$$\Gamma = \int_{A1} \left[\rho (rV \text{sen}(\theta)) (\vec{v} \cdot d\vec{A}) \right]_1 + \int_{A2} \left[\rho (rV \text{sen}(\theta)) (\vec{v} \cdot d\vec{A}) \right]_2 \tag{3}$$

$$\Gamma = \int_{A1} \left[\rho (hV) (\vec{v} \cdot d\vec{A}) \right]_1 + \int_{A2} \left[\rho (hV) (\vec{v} \cdot d\vec{A}) \right]_2 \tag{4}$$

$$\Gamma = \int_{A1} [\rho(hV)(VdA\cos(180))] + \int_{A2} [\rho(hV)(VdA\cos(0))] \quad (5)$$

$$\Gamma = - \int_{A1} [\rho(hV)(VdA)] + \int_{A2} [\rho(hV)(VdA)] \quad (6)$$

$$\Gamma = - [\rho(hV)(VA)]_1 + [\rho(hV)(VA)]_2 \quad (7)$$

$$\Gamma = - [\rho(hV)Q]_1 + [\rho(hV)Q]_2 \quad (8)$$

El signo de los momentos debido al flujo sigue la misma convención de la regla de la mano derecha; en este caso ambos son positivos (+) h_1V_2 y (+) h_2V_2 . Para flujo con densidad constante $\rho = \text{cte.}$ se tiene:

$$\Gamma = \frac{\gamma Q}{g} (h_2V_2 - h_1V_1) = \sum M_A \quad (9)$$

El torque que produce el flujo debe ser igual a la sumatoria de momentos externos sobre el volumen de control. Los momentos generados por las fuerzas debido a las presiones en las secciones 1 y 2, están dados como: $p_1A_1h_1$, que es un momento positivo; y por $p_2A_2h_2$, que es un momento negativo. El torque en A, Γ_A se lo asume inicialmente como positivo, si después del cálculo se obtiene signo contrario, significa que era negativo.

$$\sum M_A = (+)\Gamma_A + p_1A_1h_1 - p_2A_2h_2 \quad (10)$$

Igualando las ecuaciones y despejando Γ_A se tiene:

$$\Gamma_A = p_2A_2h_2 - p_1A_1h_1 + \frac{\gamma Q}{g} (h_2V_2 - h_1V_1) \quad (11)$$

b. Valor del torque

2) Se sustituyen los valores dados del problema en la ecuación (6).

- Se halla el caudal y se tiene que $V_2 = V_1$, por tratarse del mismo diámetro del tubo $A_2 = A_1$.

$$Q = V_1 A_1 = V_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = 40 \text{ pie} / \text{s} \frac{\pi (3'' / 12')^2}{4} = 1,9635 \text{ pie}^3 / \text{s} \quad (12)$$

- El torque debido a la presión en la sección 1 es:

$$p_1 A_1 h_1 = \left[100 \text{ psi} \frac{\pi (3 \text{ pulg.})^3}{4} \right] \frac{2 \text{ pulg.}}{12 \text{ pulg.}} = 117,81 \text{ lb. pie} \quad (13)$$

- El torque debido a la presión en la sección 2 es:

$$p_2 A_2 h_2 = \left[80 \text{ psi} \frac{\pi (3'')^2}{4} \right] \frac{10''}{12'} = 471,24 \text{ lb} - \text{pie} \quad (14)$$

$$\Gamma_A = 471,24 \text{ lb. pie} - 117,81 \text{ lb. pie} + \frac{62,4 \text{ lb} / \text{pie}^3 (1,9635 \text{ pie}^3 / \text{s})}{32,2 \text{ pie} / \text{s}^2} 40 \text{ pie} / \text{s} \left(\frac{10 \text{ pulg.}}{12 \text{ pulg.}} - \frac{2 \text{ pulg.}}{12 \text{ pulg.}} \right) \quad (15)$$

$$\Gamma_A = 353,43 \text{ lb. pie} + 152,20 \text{ lb} \left(\frac{8 \text{ pulg.}}{12 \text{ pulg.}} \right) = 454,9 \text{ lb. pie} \quad (16)$$

Como se obtuvo un torque con signo positivo, indica que el sentido supuesto inicialmente estaba correcto, y es un torque positivo según la regla de la mano derecha (en contra de las manecillas del reloj). Pero el momento aplicado al soporte tiene dirección contraria.

5.33 Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.33.1. (Bar–Meir, 2013, p. 191)

Una bomba centrífuga bombea $600 \text{ m}^3/\text{h}$. El espesor del impulsor h es 2 cm y el diámetro de salida es de $0,40 \text{ m}$. La velocidad angular es de

1200 r.p.m. Asumir esa velocidad angular que sale del impulsor es de 125° . Estimar cuál es la energía mínima requerido por la bomba.

Ejercicio 5.33.2. (Franzini y Finnemore, 1999, p. 444).

Considere una turbina con diámetro de paso de 10,0 pie y un ángulo de cuchara de β_2 de 160° . Si la velocidad del chorro V_1 es de 200 pie/s, el diámetro de chorro es 2,0 pulg. y la velocidad de giro 240 rpm, encuentre: **(a)** la fuerza en las cucharas, **(b)** el par en el rodete y **(c)** la potencia en caballos trasferida al rodete. Suponga que la velocidad relativa al álabe no varía (es decir, suponga que $v_1 = v_2$), según la **Figura 5-92**.

Respuestas:

(a) 1220 lb.

(b) 6100 lf.pie.

(c) 278,5 CV.

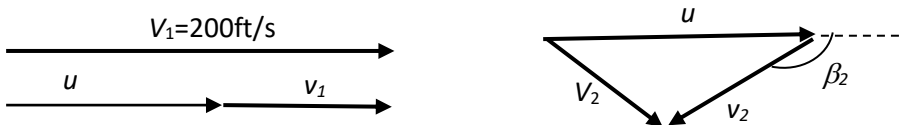


Figura 5-92.- Diagrama vectorial.

Ejercicio 5.33.3. (Franzini y Finnemore, 1999, p. 444).

Repita el anterior Ejercicio (5.33.2), si $v_2 = 0,90v_1$ y calcule el error porcentual originado al suponer que $v_1 = v_2$ del ejercicio anterior; con respecto a la potencia de este ejercicio. 265,4 CV; error = 5%.

Ejercicio 5.33.4. (Potter et al., 2015, p. 177)

Un aspersor tiene cuatro brazos de 500 mm de largo con boquillas a ángulos rectos con los brazos y a 45° con el suelo. Si el caudal total es de 10 L/s y el diámetro de salida de una boquilla es de 12 mm, encuentre la velocidad rotacional ω del rociador como se muestra en la **Figura 5-93**. Desprecie la fricción.

Respuesta:

31,25 rad/s.

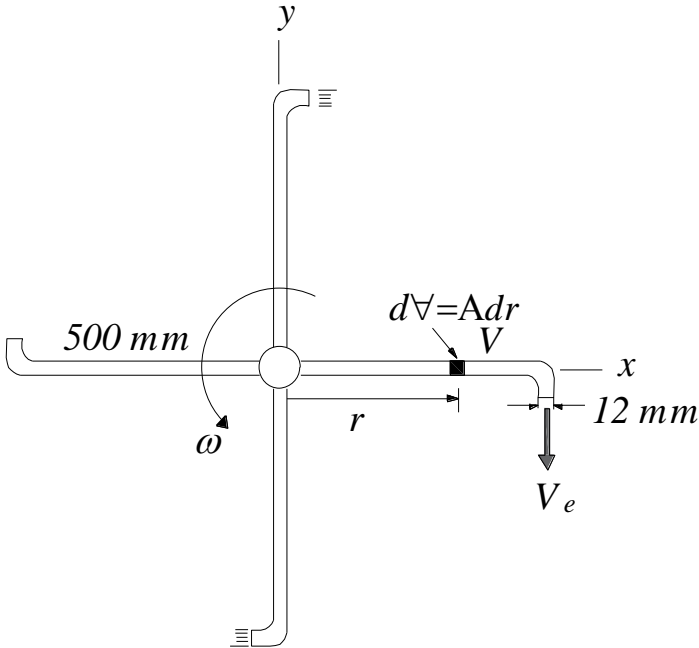


Figura 5-93.- Geometría del aspersor de cuatro brazos.

Ejercicio 5.33.4 (Potter et al., 2015, p. 178)

Las boquillas del ejercicio anterior (5.33.4) forman un ángulo de 0° con el suelo y 90° con los brazos. La llave del agua se abre de repente en $t = 0$ con el aspersor estático. Determine la velocidad angular $\omega(t)$ resultante si el diámetro del brazo es de 24 mm. Desprecie la fricción.

Respuesta:

$$\omega(t) = 44,2(1 - e^{-132,6t}), \text{ con } \omega(t) \text{ en rad/s.}$$

5.34 Aplicaciones a turbo máquinas y accesorios

5.34.1 Turbinas

Ejemplo 5.22. (Evet y Liu, 1989, pp. 638–639).

Un flujo radial tiene las siguientes dimensiones: $r_1 = 1,6$ ft, $r_2 = 1,0$ ft, $\beta_1 = 80^\circ$, $\alpha_2 = 90^\circ$. El ancho de la turbina es de 0,8 ft, el caudal que circula es de 120 cfs a 300 rpm. Encontrar: (a) ¿Cuál es el ángulo del álabe β_2 tal que el agua sale de la turbina en dirección radial?. (b) El torque ejercido por el agua sobre el rodete en lb.ft y su potencia desarrollada en lb.ft/s. (c) La carga utilizada por el rodete y la potencia resultante. Se recomienda ver la **Figura 5-94**, en la cual v_1 y v_2 son velocidades relativas del chorro; V_1 y V_2 son velocidades absolutas del chorro y u_1 y u_2 son velocidades tangenciales del rodete.

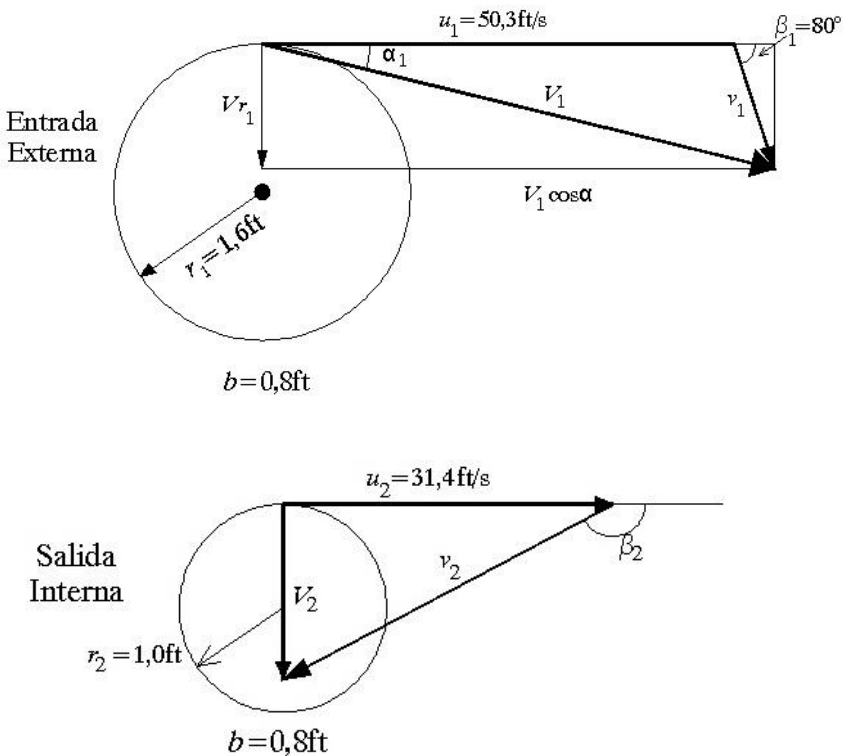


Figura 5-94 .- Suma vectorial en la entrada y salida del rotor.

Solución:

Realizando algunos cálculos previos se tiene que:

En el exterior del rodete $r_1 = 1,6$ ft: la velocidad tangencial $u_1 = \omega r_1 = (2\pi/60 \cdot 300s^{-1}) \cdot 1,6$ ft = 50,3 fps.

Por la ecuación de continuidad se tiene que: $Q = A_{L1} V_{r1} = 2\pi(1,6$ ft) (0,8 ft) V_{r1} , por lo tanto: $V_{r1} = 120$ ft³/s / $2\pi(1,6$ ft) (0,8 ft) = 14,92 ft/s;

$v_1 \text{sen} \beta_1 = v_1 \text{sen} (80^\circ) = V_{r1}$; $v_1 = 14,2$ ft/s / $\text{sen} (80^\circ) = 15,15$ ft/s;

$v_1 \text{cos} (80^\circ) = (15,15) (0,1736) = 2,63$ fps, $V_1 \text{cos} (\alpha_1) = u_1 + v_1 \text{cos} (\beta_1) = 50,3 + 2,6 = 52,9$ fps.

En la parte interna del rodete, $r_2 = 1$ ft, $u_2 = \omega r_2 = (2\pi/60 \cdot 300s^{-1}) \cdot 1,0$ ft = 31,4 fps.

$V_{r2} = V_{r1} (r_1/r_2) = 14,92(1,6/1,0) = 23,9$ fps.

a) Para encontrar el valor de β_2 , es necesario analizar el diagrama vectorial en el punto (2). Ya que el agua sale de la turbina en dirección radial entonces $\alpha_2 = 90^\circ$, y $V_2 = V_{r2}$; de la relación de triángulos se tiene que: $\tan (180 - \beta_2) = V_2/u_2 = 23,9/31,4 = 0,76$. Por lo tanto, $\beta_2 = 180^\circ - 37,2^\circ = 142,8^\circ$.

b) Se reemplaza en la ecuación del Torque para turbina.

$$\Gamma = \frac{\gamma}{g\omega} Q (V_2 \text{Cos}(\alpha_2)u_2 - V_1 \text{Cos}(\alpha_1)u_1) \quad (1)$$

Como $\alpha_2 = 90^\circ$, $\text{Cos} (90^\circ) = 0$.

$$\Gamma = \frac{\gamma}{g\omega} Q (-V_1 \text{Cos}(\alpha_1)u_1) \quad (2)$$

Que representa un valor negativo para una turbina, como lo estipula Streeter et al. (2000). Para Γ negativo (-) se tiene que el momento de momentum del fluido disminuye dentro del volumen de control, tal como sucede en el rotor de una **turbina**.

$$\Gamma = \frac{62.4 \text{ lb} / \text{ft}^3}{32.2 \text{ ft} / \text{s}^2 (2\pi / 60 \cdot 300 \text{ rpm})} 120 \text{ cfs} (-52.9 \text{ fps} \cdot 50.3 \text{ fps}) \quad (3)$$

Con base en lo anterior se obtiene un valor de $\Gamma = \mathbf{19696 \text{ lb}\cdot\text{ft}}$.

La potencia está dada como $P = \Gamma\omega = 19696 \text{ lb}\cdot\text{ft} \cdot (300 \text{ rpm} \cdot 2\pi / 60) = \mathbf{618768 \text{ ft}\cdot\text{lb}/\text{s}} = 1125 \text{ hp}$.

c) Se reemplaza en la ecuación de Euler, y con la ecuación de H_{turbina} se calcula la potencia:

$$H_{\text{turbina}} = \frac{1}{g} (V_2 \text{Cos}(\alpha_2) u_2 - V_1 \text{Cos}(\alpha_1) u_1) \quad (4)$$

$$H_{\text{turbina}} = \frac{1}{g} (V_1 \text{Cos}(\alpha_1) u_1) \quad (5)$$

$$H_{\text{turbina}} = \frac{1}{32.2 \text{ ft} / \text{s}^2} (52.9 \text{ fps}) 50.3 \text{ fps} = 82.64 \text{ ft} \quad (6)$$

La potencia hidráulica se calcula como:

$$P_{HT} = \gamma Q H_{\text{turbina}} = (62.4 \text{ lb} / \text{ft}^3) 120 \text{ cfs} (82.64 \text{ ft}) = 618808 \text{ lb}\cdot\text{ft} / \text{s} \quad (7)$$

Cálculos adicionales indican que la velocidad absoluta del agua es $V_1 = 55.0 \text{ fps}$ en la entrada, $V_2 = 23.9 \text{ fps}$ en la salida, mientras que la velocidad relativa del agua en los álabes cambia de $v_1 = 15.5 \text{ fps}$ en la entrada, a $v_2 = 39.5 \text{ fps}$ en la salida.

5.34.2 Bombas

Ejemplo 5.23. (White, 2004, p. 161).

La **Figura 5-95** muestra el esquema de una bomba centrífuga. El fluido entra axialmente y pasa a través de los álabes de la bomba, los cuales

rotan a una velocidad angular ω ; la velocidad del fluido cambia de V_1 a V_2 y su presión de p_1 a p_2 . (a) Encuentre una expresión para el torque T_O que deberá ser aplicado a dichos álabes para mantener el flujo. (b) La potencia suministrada a la bomba deberá ser $P = \omega T_O$. Para ilustrar numéricamente, suponga $r_1 = 0,2$ m, $r_2 = 0,5$ m, y $b = 0,15$ m. Adopte que la bomba rota a 600 rpm y descarga un caudal de $2,5$ m³/s con una densidad de 1000 kg/m³. Determine el torque idealizado y la potencia suministrada.

Solución.

a). Para la aplicación de la ecuación de *momento de momentum* en el plano sólo se emplean módulos de los vectores o las magnitudes, ya que para dos vectores ortogonales $\theta = 90^\circ$, el $\cos(90^\circ) = 0$ y para vectores paralelos $\theta = 0^\circ$, el $\sin(0^\circ) = 0$, θ es el ángulo entre dos vectores.

El producto punto será:

$$\vec{v} \cdot d\vec{A} = V_n dA \sin(0^\circ) = V_n dA \quad (1)$$

Por su parte el producto cruz será:

$$\vec{r} \times \vec{v} = rV_t \cos(90^\circ) = rV_t \quad (2)$$

En la **Figura 5-95a** y **b**, se muestra la geometría de una bomba centrífuga, con radios (r), velocidades (v) y volumen de control entre las secciones (1) y (2).

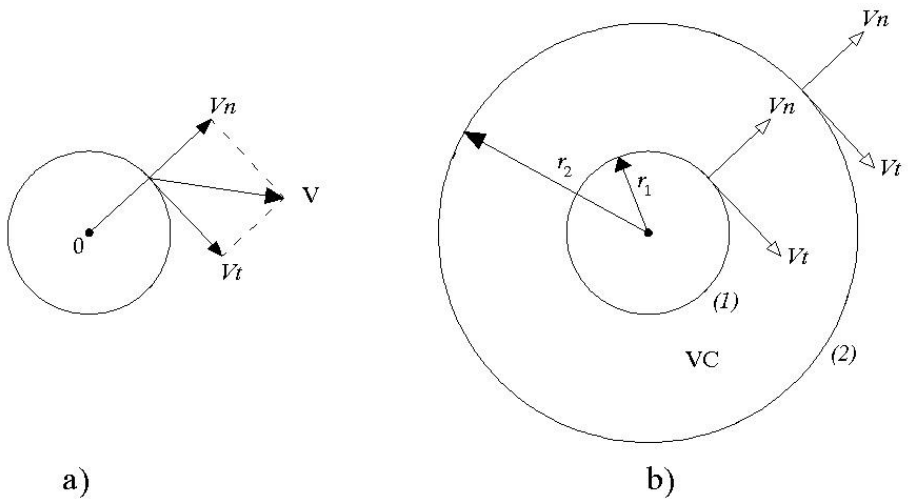


Figura 5-95 a) Plano de vectores b) esquema de bomba centrífuga. Fuente: Adaptado de (Chereque, 1987, p. 101), (Streeter et al., 2000, p. 156).

Simplificando la ecuación de momento de momentum para flujo permanente, se obtiene:

$$\Gamma = \oint_{SC} \rho(\vec{r} \times \vec{v})(\vec{v} \cdot d\vec{A}) \tag{3}$$

$$\Gamma = \oint_{SC} \rho(rV)(VdA) = \int_{A_1} ()_1 + \int_{A_2} ()_2 \tag{4}$$

Al reemplazar las cantidades de la sección 1 y 2 se tiene.

$$T_o = - \int_{A_1} r_1 V_{t1} \rho_1 V_{n1} dA_1 + \int_{A_2} r_2 V_{t2} \rho_2 V_{n2} dA_2 \tag{5}$$

El signo negativo del término de entrada (1), se debe al producto punto de $\vec{v} \cdot d\vec{A}$, ya que los dos vectores son paralelos pero en sentido opuesto, con el vector de área ortogonal a la superficie y siempre saliendo, donde $\text{sen}(180^\circ) = -1$; V_t es la velocidad tangencial y V_n es la velocidad normal a la superficie.

$$T_o = - \int_{A_1} r_1 V_{t1} \rho_1 V_{n1} dA_1 + \int_{A_2} r_2 V_{t2} \rho_2 V_{n2} dA_2 \tag{6}$$

Al solucionar la integral y por la ecuación de continuidad $Q = V_n A$ se tiene:

$$T_o = r_2 V_{t2} \rho_2 Q - r_1 V_{t1} \rho_1 Q \quad (7)$$

Con flujo incompresible, $\rho = \text{cte}$.

$$T_o = \rho Q (r_2 V_{t2} - r_1 V_{t1}) \quad (8)$$

Con, $\rho = \gamma/g$:

$$T_o = \frac{\gamma Q}{g} (r_2 V_{t2} - r_1 V_{t1}) \quad (9)$$

Esta relación es la llamada fórmula de *Euler* para una bomba idealizada, donde los ángulos α_1 y α_2 son iguales a cero. En una bomba idealizada, la velocidad tangencial en la entrada y la salida coincidiría con las velocidades de rotación del álabe $V_{t1} = \omega r_1$ y $V_{t2} = \omega r_2$. Entonces, la fórmula para el par suministrado se convierte en:

$$T_o = \frac{\gamma Q \omega}{g} (r_2^2 - r_1^2) \quad (10)$$

b). Con los datos del problema se reemplaza en la ecuación deducida para el torque.

$$T_o = \frac{(1000 \text{kp} / \text{m}^3) 2,5 \text{m}^3 / \text{s} (2\pi / 60 \cdot 600 \text{rpm})}{9,81 \text{m} / \text{s}^2} (0,5 \text{m}^2 - 0,2 \text{m}^2) \quad (11)$$

Se obtiene un torque, $T_o = 3362,6 \text{kp-m} = 32987 \text{N-m}$.

La potencia requerida, $P_r = T_o \omega$.

$$P_r = \frac{\gamma Q \omega^2}{g} (r_2^2 - r_1^2) \quad (12)$$

$$P_r = \frac{(1000 \text{kp} / \text{m}^3) 2,5 \text{m}^3 / \text{s} (2\pi / 60 \cdot 600 \text{rpm})^2}{9,81 \text{m} / \text{s}^2} (0,5 \text{m}^2 - 0,2 \text{m}^2) \quad (13)$$

Se obtiene $P_r = 2072634 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{s}$ ($\text{N}\cdot\text{m}/\text{s} = \text{W}$) = 2,07 MW. En la práctica real, las velocidades tangenciales son considerablemente menores que las velocidades de la punta del impulsor, y los requisitos de potencia de diseño para esta bomba pueden ser de solo 1,0 MW (White, 2004, p. 161). Cabe mencionar que se hubiera podido partir de la ecuación de Euler ya deducida, con $\alpha_1 = \alpha_2 = 0^\circ$.

5.34.3 Ventiladores

Ejemplo 5.24. (Munson et al., 1990, p. 221).

Un ventilador de aire tiene un rotor de paletas de con diámetro externo de 12 pg (in) y un diámetro interno de 10 pg, como se puede apreciar en la **Figura 5-96a**, b y c. La altura de cada álabe del rotor es constante y con un valor de 1 pg, desde su entrada hasta la respectiva salida. El flujo de aire es estable, con un valor promedio de $230 \text{ ft}^3/\text{min}$ y la velocidad absoluta del aire en la entrada del álabe, V_1 , es radial. El ángulo de descarga es 30° desde la dirección tangencial. El rotor gira a una velocidad constante de 1725 rpm. $1 \text{ slug} = 32,174 \text{ lb}_m$, para resolver el problema adoptar como densidad del aire $\rho_{\text{aire}} = 0,00238 \text{ slug}/\text{ft}^3$. Se solicita estimar la potencia requerida para hacer funcionar el ventilador, en caballos de potencia hp.

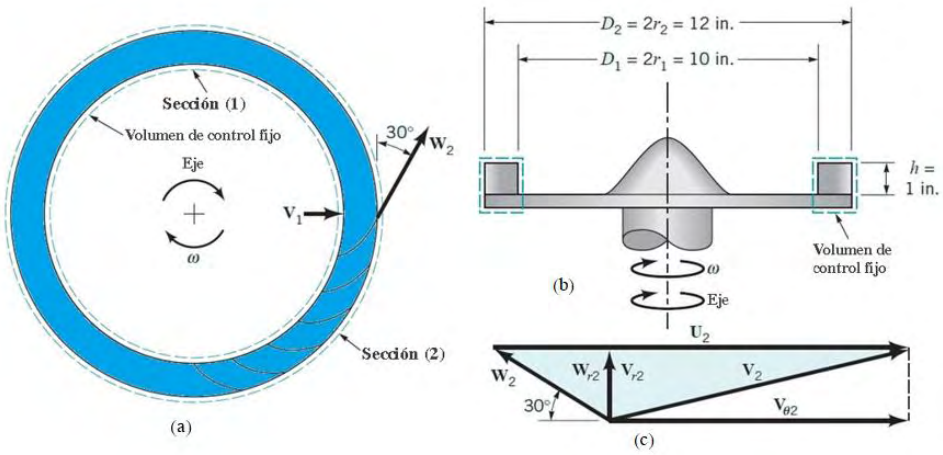


Figura 5-96 .- (a) Esquema general del ventilador. (b) Rotor del ventilador. (c) diagrama vectorial. Fuente: Adaptada de (Munson et al., 1990, p. 221)

Solución.

Para el ejemplo, la velocidad W es la velocidad relativa igual a la denominada v en ejemplos anteriores. Partiendo de la ecuación de Euler para calcular la carga de altura propuesta en la lección anterior, se tiene que:

$$H_{maquina} = \frac{1}{g} (V_2 \cos(\alpha_2) u_2 - V_1 \cos(\alpha_1) u_1) \tag{1}$$

Como la velocidad absoluta V_1 de entrada es radial, entonces $\alpha_1 = 90^\circ$ y $\cos(90^\circ) = 0$.

$$H_{vent} = \frac{1}{g} (V_2 \cos(\alpha_2) u_2) \tag{2}$$

Con $V_2 \cos(\alpha_2) = V_{\theta 2}$

$$H_{vent} = \frac{1}{g} (V_{\theta 2} u_2) \tag{3}$$

Por lo tanto se debe hallar las dos velocidades $V_{\theta 2}$ y u_2 .

u_2 es la velocidad tangencial, la cual estará dada como:

$$u_2 = r_2 \omega = \frac{(6 \text{ in})}{(12 \text{ in} / \text{ft})} \frac{(1725 \text{ rpm})(2\pi \text{ rad} / \text{rev})}{60 \text{ s} / \text{min}} = 90,3207 \text{ ft} / \text{s} \quad (4)$$

Según la suma vectorial de la **Figura 5-96c**, se tiene que: $V_2 = U_2 + W_2$ y $V_{\theta 2} = u_2 - W_2 \cos(30^\circ)$, si se toma la proyección vertical de W , se tiene $W \sin(30^\circ) = V_{r2}$. Pero como V_{r2} se la puede calcular con el caudal y el área de la siguiente manera:

$$V_{r2} = \frac{Q}{A_{L2}} = \frac{Q}{2\pi r_2 h} = \frac{230 \text{ ft}^3 / \text{min} / (60 \text{ s} / \text{min})}{2\pi(6 \text{ in} / 12 \text{ ft})(1 \text{ in} / 12 \text{ ft})} = 14,642 \text{ fps} \quad (5)$$

$$W_2 = \frac{V_{r2}}{\sin(30^\circ)} = \frac{73,212 \text{ fps}}{0,5} = 29,285 \text{ fps} \quad (6)$$

$$V_{\theta 2} = U_2 - W_2 \cos(30^\circ) = 90,3207 \text{ fps} - 29,2845 \text{ fps} \cos(30^\circ) = 64,970 \text{ fps} \quad (7)$$

$$H_{\text{vent}} = \frac{1}{32,2 \text{ ft} / \text{s}^2} (64,9697 \text{ fps}) 90,3207 \text{ fps} = 182,2342 \text{ ft} \quad (8)$$

Se halla el peso específico del aire $\gamma_{\text{aire}} = \rho g = 0,00238 \text{ slug} / \text{ft}^3$ ($32,174 \text{ ft} / \text{s}^2$), como $1 \text{ slug} = \text{lb}_f \cdot \text{s}^2 / \text{ft}$, por lo tanto $\gamma_{\text{aire}} = 0,0766 \text{ lb}_f \cdot \text{s}^2 / \text{ft}^3$. $\text{ft} / \text{s}^2 = 0,0766 \text{ lb}_f / \text{ft}^3$.

$$P = \gamma Q H_{\text{vent}} = (0,0766 \text{ lb}_f / \text{ft}^3) (230 \text{ ft}^3 / \text{min} / (60 \text{ s} / \text{min})) 182,23 \text{ ft} \quad (9)$$

$P = 53,51 \text{ lb}_f / \text{ft}^3 \cdot \text{ft}^3 / \text{s} \cdot \text{ft} = 53,51 \text{ lb}_f \cdot \text{ft} / \text{s}$. Como un caballo de fuerza, $1 \text{ hp} = 550 \text{ lb}_f \cdot \text{ft} / \text{s}$, entonces $P = 0,097 \text{ hp}$.

Cabe anotar que el símbolo positivo "+" se utilizó con el producto $U_2 V_{\theta 2}$ porque U_2 y $V_{\theta 2}$ están en la misma dirección. Este resultado de $P = 0,097$ hp, es la potencia que necesita ser entregada a través del eje del ventilador para las condiciones dadas. Idealmente, toda ésta potencia iría al aire que fluye. Sin embargo, debido a la fricción del fluido, solo parte de la misma producirá efectos útiles (por ejemplo, movimiento y aumento de presión) en el aire. La cantidad de efecto útil depende de la eficiencia de la transferencia de energía entre las aspas del ventilador y el fluido.

5.35 Aplicaciones a tuberías

5.35.1 Aspersores

Un aspersor es un accesorio hidráulico que utiliza las propiedades del flujo para producir un giro y realizar aspersión del fluido, tal como se muestra a continuación en la **Figura 5-97**.

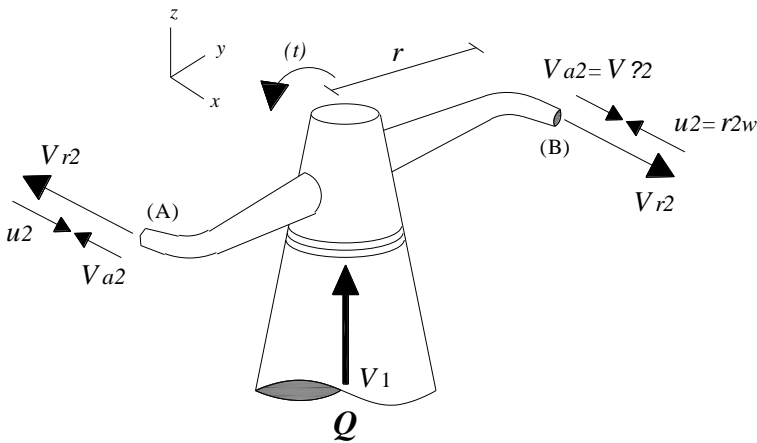


Figura 5-97.- Geometría general de un aspersor. Fuente: Adaptado de (Munson et al., 1990, p. 219).

La velocidad media del flujo con relación a una superficie de control fija es una **velocidad absoluta**, V_a , que es una velocidad desconocida. La velocidad tangencial del flujo de **salida de la boquilla** (chorro), como se ve desde la boquilla, se llama **velocidad relativa**, V_r , que es

igual al caudal que sale por cada boquilla sobre el área de la boquilla ($V_r = Q_b/A_b$); y la velocidad tangencial de las boquillas del aspersor se denomina u .

Las velocidades absolutas, relativa y del aspersor V_a , V_r y u , están relacionadas por la relación vectorial, donde $V_r = V_a + u$, se lee como velocidad del chorro con respecto a la boquilla del aspersor, se suman ya que los dos cuerpos en este caso, la boquilla del aspersor y el chorro, se mueven con velocidad en dirección contraria. Al despejar la velocidad absoluta del chorro, $V_a = V_r - u$, como $u = \omega r$, $V_a = V_r - \omega r$.

Es importante tener en cuenta que todas estas velocidades son tangenciales, y si el chorro se desvía del volumen de control un ángulo θ , se debe encontrar la componente de la velocidad del chorro V_{chorr} sobre la tangente, $V_{r\theta} = V_{chorr} \text{sen}(\theta)$. **Para ampliar este concepto se puede revisar el** concepto de velocidad relativa de un aspersor explicado por Evett y Liu (1989, p. 648) mediante un diagrama vectorial polar de las velocidades.

Ejemplo 5.25.

El aspersor simétrico de la **Figura 5-98** tiene un caudal total de $Q_o = 14$ gpm y no tiene fricción. Determinar la velocidad angular (ω) en rpm, si el diámetro de las boquillas es de $\frac{1}{4}$ " , con una inclinación de salida de 45° y radios de 8 ".

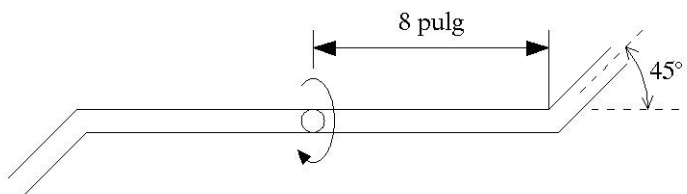


Figura 5-98.- Geometría general de un aspersor.

Solución:

Simplificando la ecuación de momento de momentum para flujo permanente, se obtiene:

$$\Gamma = \oint_{SC} \rho (\vec{r} \times \vec{v}) (\vec{v} \cdot d\vec{A}) \quad (1)$$

El término $\int_{SC} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{A})$ se considera igual al caudal másico $Q_m = \rho Q = \rho V_r A_b$.

$$\Gamma = \oint_{SC} \rho (rV) (V dA) = \int_{A_1} ()_1 + \int_{A_2} ()_2 \quad (2)$$

Al reemplazar las cantidades de las secciones 1 y 2 se tiene:

$$\Gamma = - \int_{A_1} r_1 V_{a1} \rho_1 V_{chorr1} dA_1 + \int_{A_2} r_2 V_{a2} \rho_2 V_{chorr2} dA_2 \quad (3)$$

Teniendo en cuenta que no existe entrada en el plano (x, y) , se anula el primer término, por lo tanto la expresión se reduce a:

$$\Gamma = \int_{A_2} r_2 V_{a2} \rho_2 V_{chorr2} dA_2 \quad (4)$$

Al solucionar la integral y por ecuación de continuidad se tiene, $Q = V_{chorr} A_b$.

$$\Gamma = r_2 V_{a2} \rho_2 Q \quad (5)$$

Como existen dos salidas del líquido:

$$\Gamma = (r_2 V_{a2} \rho_2 Q)_A + (r_2 V_{a2} \rho_2 Q)_B \quad (6)$$

Con flujo incompresible; con $\rho = \text{cte.}$; y como se sobreentiende que es la salida del fluido, se suprime el subíndice (2).

$$\Gamma = \rho [(rV_a Q)_A + (rV_a Q)_B] \quad (7)$$

Con, $\rho = \gamma/g$.

$$\Gamma = \frac{\gamma}{g} \left[(rV_a Q)_A + (rV_a Q)_B \right] \quad (8)$$

Al reemplazar la velocidad absoluta del chorro se tiene:

$$\Gamma = \frac{\gamma}{g} \left[r_A (V_{rA} - \omega r_A) Q_A + r_B (V_{rB} - \omega r_B) Q_B \right] \quad (9)$$

Según la regla de la mano derecha este torque es negativo, según Munson et al. (1990, p. 218) si las velocidades V_2 y u son contrarias, siempre genera un torque negativo. A pesar que en la realidad existe un torque externo por efectos mecánicos que frena el giro del aspersor, dicho torque suele ser despreciado; o sea $\Gamma = 0$.

$$\frac{\gamma}{g} \left[r_A (V_{rB} - \omega r_A) Q_A + r_B (V_{rB} - \omega r_B) Q_B \right] = 0 \quad (10)$$

Se despeja el valor de la velocidad angular ω . Cabe anotar que dicha velocidad angular es la misma para cualquier punto situado en los brazos del aspersor.

$$\left[(r_A V_{rA} Q_A - \omega r_A^2 Q_A) + (r_B V_{rB} Q_B - \omega r_B^2 Q_B) \right] = 0 \quad (11)$$

$$-\omega (Q_A r_A^2 + Q_B r_B^2) + Q_B r_B V_{rB} + Q_A r_A V_{rA} = 0 \quad (12)$$

$$\omega = \frac{r_B V_{rB} Q_B + r_A V_{rA} Q_A}{(Q_A r_A^2 + Q_B r_B^2)} \quad (13)$$

Según la forma de la anterior expresión, se puede generalizar una ecuación para aspersores con varios orificios en cada brazo de la siguiente manera:

$$\omega = \frac{\sum_{i=1}^{No} r_i V_{ri} Q_i}{\sum_{i=1}^{No} Q_i r_i^2} \quad (14)$$

Donde No es el número total de orificios en el aspersor. Nótese que se sumaría el efecto en valor absoluto de cada orificio a la velocidad angular. Para el ejemplo en cuestión, el caudal Q es igual en los dos orificios, por tal razón dicha variable sale de la ecuación.

$$\omega = \frac{r_B V_{rB} + r_A V_{rA}}{(r_A^2 + r_B^2)} \quad (15)$$

Como la distancia de la boquilla en cada brazo es igual, se factoriza el radio:

$$\omega = \frac{V_{rB} + V_{rA}}{2r} \quad (16)$$

Ya que el diámetro de la boquilla es igual en ambas salidas, entonces $V_{rA} = V_{rB}$, por lo tanto:

$$\omega = \frac{V_r}{r} \quad (17)$$

Como la velocidad relativa V_r es siempre tangencial, en este caso la velocidad del chorro sale con un ángulo de 45° con respecto a la tangente, $V_r = V_{chorr} \cdot \text{sen}(\theta)$ se tiene que:

$$\omega = \frac{V_{chorr} \cdot \text{sen}(\theta)}{r} = \frac{(Q/2) / A_b \text{sen}(\theta)}{r} = \frac{(Q/2) \text{sen}(\theta)}{\frac{\pi D_b^2}{4} r} \quad (18)$$

Si se convierten los datos disponibles al SI:

Caudal por cada orificio $Q = 14 \text{ gpm}$ ($3,785 \text{ L/gal}/60\text{s}/\text{min}$) ($0,001 \text{ L}/\text{m}^3$) = $0,00088 \text{ m}^3/\text{s}$. $D_b = 1/4 \text{ pulg} * 0,0254 \text{ m}/\text{pulg.} = 0,00635 \text{ m}$; $r = 8 \text{ pulg.}$ ($0,254 \text{ m}/\text{pulg.}$) = $0,2032 \text{ m}$. Al reemplazar los valores se tiene que:

$$\omega = \frac{(0,00088 \text{ m}^3 / \text{s}) / 2 \frac{\text{sen}(45)}{0,2032 \text{ m}}}{\frac{\pi(0,00635 \text{ m})^2}{4}} = 48,35 \text{ rad} / \text{s} \tag{19}$$

$$\omega = (48,35 \text{ rad} / \text{s})(60 \text{ s} / \text{min}) / (2\pi \text{ rad} / \text{rev}) = 462 \text{ rev} / \text{min}(\text{rpm}) \tag{20}$$

De otra manera: $2\pi \text{ rad} = 1 \text{ rev}$ y $1 \text{ s} = (1/60) \text{ min}$, se reemplaza los rad, así como s.

$$\omega = (48,35) \frac{1 \text{ rev}}{2\pi} \frac{1}{(1/60) \text{ min}} = (48,35) \frac{1 \text{ rev}}{2\pi} \frac{60}{\text{min}} = 462 \text{ rpm} \tag{21}$$

Ejemplo 5.26. (Streeter et al., 2000, p. 158).

El aspersor de la **Figura 5-99** descarga $0,01 \text{ pies}^3/\text{s}$ a través de cada boquilla, sin tener en cuenta la fricción. Si el área de salida de cada boquilla es $0,001 \text{ pie}^2$, hallar la velocidad de giro (ω) en rpm.

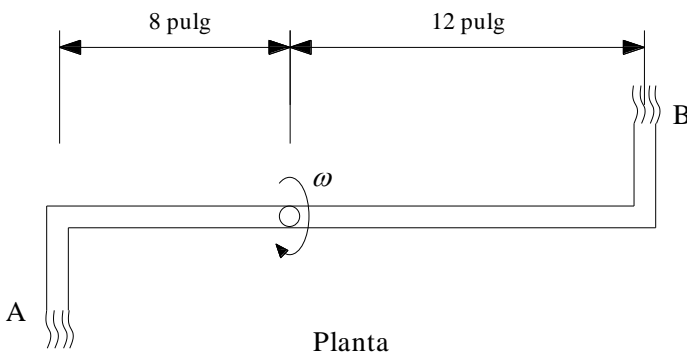


Figura 5-99.- Geometría general de un aspersor.

Si se parte de la ecuación general del aspersor para dos orificios, deducida en el ejemplo 5.25, se tiene que:

$$\omega = \frac{r_B V_{rB} Q_B + r_A V_{rA} Q_A}{(Q_A r_A^2 + Q_B r_B^2)} \quad (1)$$

Ya que el caudal es constante para cada orificio, se lo elimina de la ecuación:

$$\omega = \frac{r_B V_{rB} + r_A V_{rA}}{(r_A^2 + r_B^2)} \quad (2)$$

Como el diámetro de la boquilla es igual en ambas salidas, entonces $V_{rA} = V_{rB}$; así:

$$\omega = V_r \frac{(r_B + r_A)}{(r_A^2 + r_B^2)} \quad (3)$$

Ya que la velocidad del chorro, en este caso, es tangencial al volumen de control, $V_r = V_{\text{chorr}}$ se tiene que:

$$\omega = \frac{Q}{A_b} \frac{(r_B + r_A)}{(r_A^2 + r_B^2)} \quad (4)$$

Sustituyendo valores:

$$\omega = \frac{0,01 \text{pie}^3 / \text{s}}{0,001 \text{pie}^2} \frac{(8 \text{pulg} / 12 \text{pie} + 1 \text{pie})}{(8 \text{pulg} / 12 \text{pie})^2 + (1 \text{pie})^2} = 11,538 \text{rad} / \text{s} \quad (5)$$

Como $2\pi \text{ rad} = 1 \text{ rev}$ y $1 \text{ s} = (1/60) \text{ min}$, se reemplaza los respectivos rad y s:

$$\omega = (11,538) \frac{1 \text{ rev}}{2\pi} \frac{1}{(1/60) \text{ min}} = (11,538) \frac{1 \text{ rev}}{2\pi} \frac{60}{\text{min}} = 110,2 \text{ rpm} \quad (6)$$

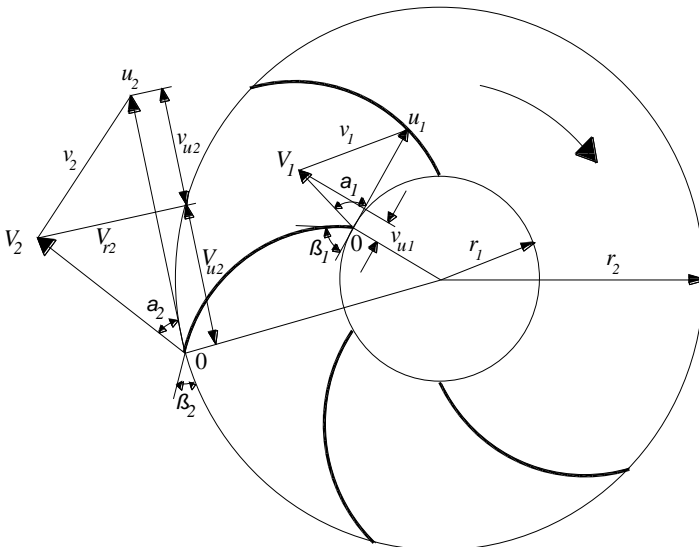
5.36 Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.36.1. (Bar–Meir, 2013, p. 191).

Una bomba centrífuga se encuentra bombeando un caudal de agua de $600 \text{ m}^3/\text{h}$. El espesor del impulsor es de 2 cm y el diámetro del tubo de salida es $0,40 \text{ m}$. La velocidad angular es 1200 r.p.m. Se solicita estimar la energía mínima requerida por la bomba. Asumir que el ángulo con el cual el líquido abandona el impulsor es de 125° .

Ejercicio. 5.36.2. (Evet y Liu, 1989, pp. 611–612).

Una bomba centrífuga para el bombeo de agua posee un impulsor con las características descritas en la **Figura 5-100**, con $r_2 = 12 \text{ pulg.}$, $r_1 = 4 \text{ pulg.}$, $\beta_1 = 20^\circ$. El impulsor posee un radio $r_1 = 2 \text{ pulg.}$ y un radio $r_2 = 3/4 \text{ pulg.}$ Para una velocidad de rotación de 1800 rpm desprecie las pérdidas y el espesor de los álabes. Se solicita determinar: **(a)** El caudal que ingresa a la bomba cuando $\alpha_1 = 90^\circ$. **(b)** El valor de α_2 y la cabeza teórica H , **(c)** La potencia requerida en hp, y **(d)** La presión adicionada por el impulsor.



(a)

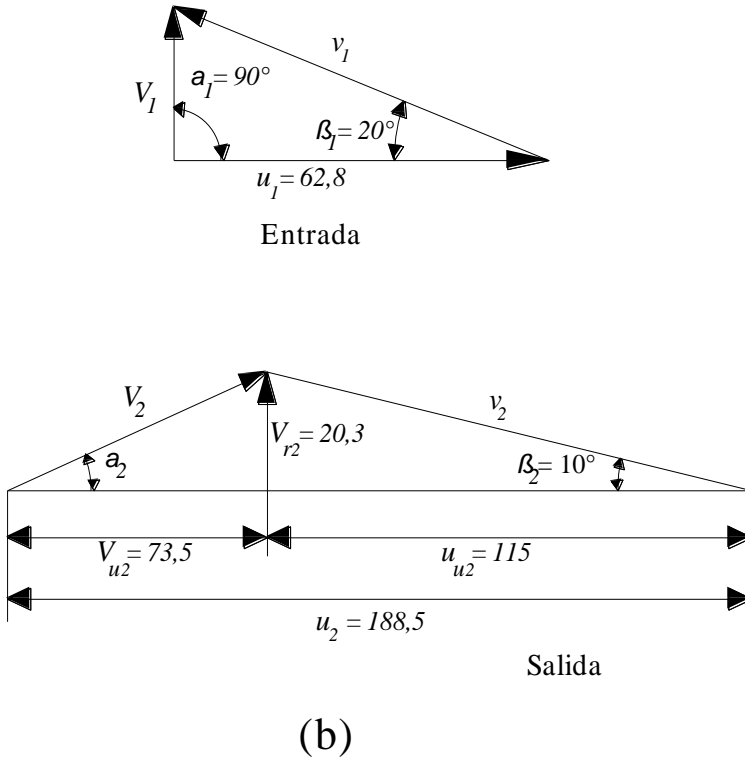


Figura 5-100.- Rotor de la bomba centrífuga y suma vectorial

Ejercicio. 5.36.3. (Streeter et al., 2000, p. 181).

Para un torque resistente de $0,01 \omega^2$ en el eje de un aspersor que posee las siguientes características: Caudal total de 14 gpm; funcionamiento sin fricción; diámetro de boquillas de $\frac{1}{4}$ pulg.; radios de giro de 8 pg en cada uno y ángulo $\theta = 45^\circ$. Se solicita determinar la velocidad de rotación del aspersor basándose en las informaciones de la **Figura 5-101**.

(Nota: En este caso el torque no es cero, por lo tanto, la ecuación (14) del Ejemplo 5.25 no se puede utilizar, y es necesario deducir la ecuación desde el inicio).

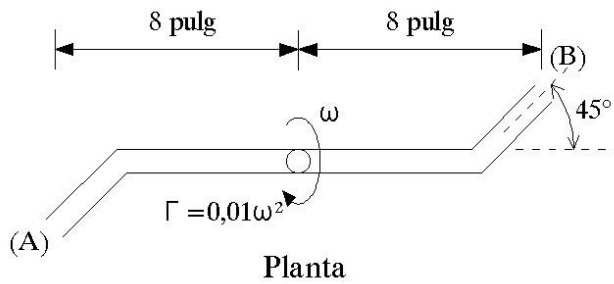


Figura 5-101.- Esquema del aspersor

Ejercicio. 5.36.4. (Nakayama, 1998, p. 80).

La **Figura 5-102** ilustra un aspersor de jardín. Si la salida del aspersor posee un diámetro de 5 mm y la velocidad del flujo a través del mismo es de 5 m/s, a) ¿Cuál será la tasa de rotación (frecuencia)? B) Cuál es el torque requerido para mantener el aspersor en condición estacionaria? Asuma que no hay fricción.

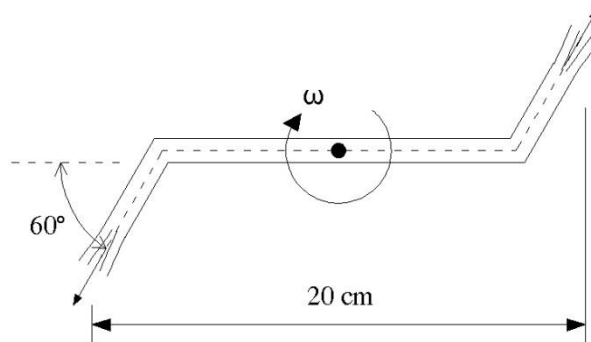


Figura 5-102.- Esquema del aspersor.

Ejercicio. 5.36.5. (Bansal, 2010, p. 298)

Un aspersor como el que se muestra en la **Figura 5-102**, tiene 8 mm de diámetro de la boquilla la final de cada brazo, y descarga agua a una velocidad de 10 m/s. Determine el torque requerido a mantener la rotación constante. También determine la velocidad angular si rota libremente.

Respuesta:

2,26 N-m; 43,9 rad/s.

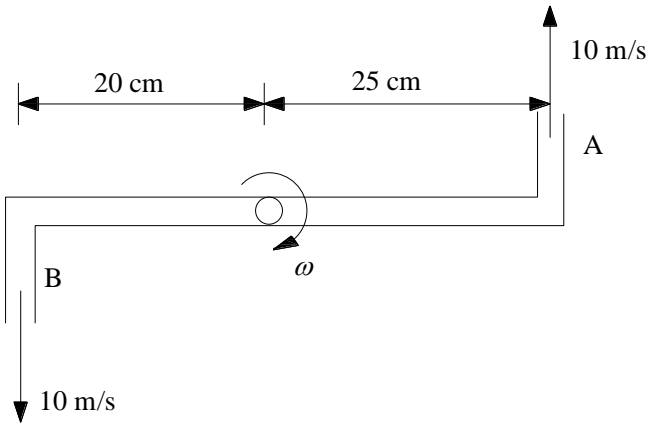


Figura 5-103.- Esquema del aspersor.

6. Capítulo 6: Análisis dimensional y similitud dinámica

6.1 Generalidades

El *análisis dimensional* es una técnica matemática que hace uso del estudio de las dimensiones de las cantidades físicas, permitiendo de manera teórica conocer los factores o variables que pueden influir en un fenómeno físico. A continuación, se presentan las definiciones de algunos conceptos importantes en el análisis dimensional con base en lo reportado por Niño y Duarte (2007).

La similitud dinámica aplica a los modelos físicos. Un modelo es un sistema cuyo funcionamiento puede utilizarse para predecir las características de un sistema similar o prototipo, por lo general más complejo o construido a una escala mayor Sotelo (2005). Los modelos se han constituido en una herramienta valiosa de los científicos en mecánica de fluidos, a partir de los cuales se ha obtenido una valiosa información.

En la **Figura 6-1** se ilustra el prototipo de una presa y el modelo a escala de la misma. Cuando no es posible explicar plenamente el comportamiento de un fenómeno físico, se recurre a realizar observaciones en un modelo por lo general a escala reducida. Por ejemplo, en el diseño de una presa de dimensiones reales, como aún no se ha construido no es posible predecir el comportamiento del flujo sobre ella; así, si se quiere evaluar la fuerza dinámica (F), que imprime el flujo sobre la presa, se recurre entonces a medirla en un modelo a escala y luego por un procedimiento ya establecido, se pasa la magnitud al prototipo.

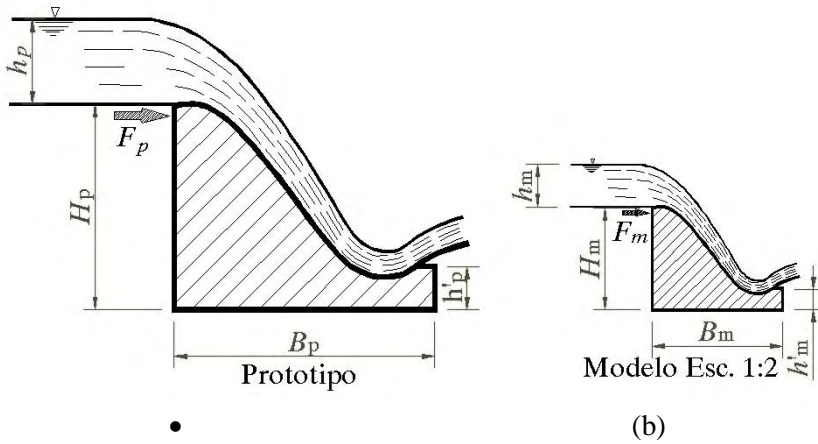


Figura 6-1.- Geometría de la presa. (a) prototipo. (b) modelo a escala.

En la **Figura 6-1**, se tienen las siguientes convenciones: Subíndices: p = prototipo; m = modelo; B es el ancho de la presa, H es la altura de la presa, h es la profundidad del agua sobre la presa, h' es la altura de la presa aguas abajo.

6.2 Definiciones

6.2.1 Parámetro dimensional

Un parámetro dimensional es una cantidad física que posee unidades, como la velocidad V , que tiene unidades de espacio sobre tiempo (L/T), el caudal Q , que posee unidades longitud al cubo por unidad de tiempo (L^3/T), entre otros.

6.2.2 Parámetro adimensional

Un **parámetro adimensional** es un conjunto de parámetros dimensionales, donde las unidades entre sí se anulan, por ejemplo, el Número de Reynolds Re y El Número de Froude Fr . Estos parámetros se denotan por la letra pi mayúscula (Π); de este modo, si se tiene el parámetro Π conformado por la relación de Velocidad (V), el Diámetro (D) y la viscosidad cinemática (ν), al sustituir sus dimensiones básicas

de longitud y tiempo (L, T), estas se eliminan entre sí, conformando una cantidad adimensional, como se muestra en la siguiente relación:

$$\Pi = \frac{VD}{v} = \frac{[L/T][L]}{[L^2/T]} = \frac{[L^2/T]}{[L^2/T]} = [-] \quad (6.1)$$

6.2.3 Ecuación dimensionalmente homogénea

Una ecuación es dimensionalmente homogénea cuando las dimensiones físicas de las variables a la izquierda de la igualdad de la ecuación son idénticas a las dimensiones de los términos a la derecha de la misma. Por ejemplo, la ecuación del caudal Q :

$$Q = VA \quad (6.2)$$

Donde, V es la velocidad con dimensiones $[LT^{-1}]$, longitud por tiempo elevado a la -1; A es el área con dimensiones de longitud al cuadrado $[L^2]$; y Q con dimensiones de longitud al cubo por tiempo elevado a la -1 $[L^3T^{-1}]$. Al remplazar en la ecuación 6.1, se tiene.

$$[L^3T^{-1}] = [LT^{-1}] \cdot [L^2] \quad (6.3)$$

$$[L^3T^{-1}] = [L^3T^{-1}] \quad (6.4)$$

Lo anterior demuestra que la ecuación del caudal es dimensionalmente homogénea. Por lo general en el estudio de los fluidos es común encontrar ecuaciones dimensionalmente *no homogéneas*, por ejemplo las ecuaciones empíricas. En la **Tabla 6-1**, se indican las dimensiones de las cantidades físicas más comunes.

Tabla 6-1.- Dimensiones de cantidades físicas comunes.

Cantidad	Símbolo	Dimensiones	
		Fuerza-Longitud- Tiempo	Masa-Longitud- Tiempo
Longitud	L	L	L
Masa	M	-	M
Tiempo	T	T	T
Fuerza	F	F	MLT ⁻²
Área	A	L ²	L ²
Volumen	∇	L ³	L ³
Velocidad	V	LT ⁻¹	LT ⁻¹
Aceleración	a	LT ⁻²	LT ⁻²
Velocidad Angular	ω	T ⁻¹	T ⁻¹
Presión	p	FL ⁻²	ML ⁻¹ T ⁻²
Viscosidad Dinámica	μ	FL ⁻² T	ML ⁻¹ T ⁻¹
Viscosidad Cinemática	ν	L ² T ⁻¹	L ² T ⁻¹
Potencia	P	FLT ⁻¹	ML ⁻² T ⁻³
Par o Torque	Γ	FL	ML ² T ⁻²
Caudal	Q	L ³ T ⁻¹	L ³ T ⁻¹
Esfuerzo Tangencial y Normal	τ,σ	FL ⁻²	ML ⁻¹ T ⁻²
Flujo Másico	Q _m	FT ⁻¹	MLT ⁻³
Gravedad	g	LT ⁻²	LT ⁻²
Densidad	ρ	FL ⁻⁴ T ⁻²	ML ⁻³
Peso Específico	γ	FL ⁻³	ML ⁻² T ⁻²

6.3 Teorema de π (pi) de Vaschy-Buckingham

Este teorema proporciona un método de construcción de parámetros adimensionales, a partir de cantidades físicas con dimensiones, incluso cuando la forma de la ecuación es desconocida. De todas formas, la elección de parámetros adimensionales no es única y el teorema no elige cuáles tienen significado físico (Gerhart et al., 1995). En otras palabras, este teorema sirve para transformar un conjunto de variables con dimensiones, en parámetros adimensionales.

El teorema π es el teorema fundamental del análisis dimensional. Establece que en un fenómeno físico en el cual intervienen *n* cantidades físicas con *r* dimensiones fundamentales en su conjunto (Masa, Longitud y Tiempo), se pueden obtener la cantidad de *NP* parámetros adimensionales independientes, $NP=n - r$. (Streeter et al., 2000, p. 228).

Se presenta a continuación un ejemplo para detallar el procedimiento algebraico.

Ejemplo 6.1. (Fernández, 2001, p. 204).

La variación Δp de la presión en un líquido en reposo depende del peso específico γ y de la diferencia de altura Δh . Determinar por razonamiento dimensional la forma del parámetro adimensional generado-

1- Se listan las variables indicando el nombre, símbolo y las dimensiones fundamentales, como se muestra en la **Tabla 6-2**

Tabla 6-2. - Cantidades físicas y dimensiones del problema.

Cantidad	Símbolo	Dimensiones
		Masa-Longitud-Tiempo
Variación de la presión	Δp	$ML^{-1}T^{-2}$
Diferencia de altura	Δh	L
Peso específico	γ	$ML^{-2}T^{-2}$

2- Se obtiene la siguiente relación funcional dimensional.

$$(\Delta h, \gamma, \Delta p) = 0 \tag{6.5}$$

3- Para la conformación y deducción de los grupos Π , se realiza el siguiente procedimiento:

- Se iguala el parámetro Π_1 a las variables elevadas a un exponente (a, b...etc.), donde sólo una variable (por lo general la dependiente o de interés) se eleva al exponente 1, obteniéndose la siguiente expresión:

$$\Pi_1 = [\Delta h]^a [\gamma]^b [\Delta p]^1 \tag{6.6}$$

- Se reemplazan las dimensiones básicas de cada variable y se iguala a las dimensiones básicas elevadas al exponente cero.

$$\Pi_1 = [L]^a [ML^{-2}T^{-2}]^b [ML^{-1}T^{-2}]^1 = [M^0 L^0 T^0] \tag{6.7}$$

- Se igualan los exponentes de cada dimensión básica, de la anterior ecuación, obteniéndose un sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} \text{Para M} &\Rightarrow 0 + b + 1 = 0 \\ \text{Para L} &\Rightarrow a - 2b - 1 = 0 \\ \text{Para T} &\Rightarrow 0 - 2b - 2 = 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Simplificando se tiene:

$$\begin{aligned} 0 + b &= -1 \\ a - 2b &= +1 \\ 0 - 2b &= +2 \end{aligned} \quad (6.9)$$

El sistema de ecuaciones anterior se resume a dos ecuaciones con dos variables.

- Se resuelve el sistema de ecuaciones. De la primera ecuación para M se despeja $b = -1$, y de la segunda se halla $a = -1$. Cuyos valores de (a, b) satisfacen las tres ecuaciones.
- Se sustituye el valor de los exponentes, en la ecuación para Π_1 , de lo cual se obtiene:

$$\Pi_1 = \Delta h^{-1} \gamma^{-1} \Delta p^1 \quad (6.10)$$

Reagrupando términos, se obtiene la forma final para el parámetro Π_1 .

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p}{\Delta h \cdot \gamma} \quad (6.11)$$

De este modo se logra establecer un solo parámetro adimensional a partir de un conjunto de tres variables. Lo que significa es que se puede reducir tres variables a un solo parámetro.

6.3.1 Pasos para la aplicación del teorema PI

A continuación, se presentan los pasos para aplicar el teorema PI.

1- Se realiza una reflexión o análisis sobre las cantidades físicas que pueden intervenir en el fenómeno físico a estudiar y se organiza un listado de dichas cantidades, indicando el nombre, símbolo y las dimensiones fundamentales, como las que se indicó en la **Tabla 6-1**; se clasifican las cantidades físicas en geométricas, cinemáticas y dinámicas. Si solo tienen Longitud son geométricas; si tienen Longitud y Tiempo son cinemáticas; y si se incluye la Masa son dinámicas. Por ejemplo, un Diámetro D es una cantidad geométrica, la velocidad V es una cantidad cinemática y la densidad ρ es una cantidad dinámica.

2- Se seleccionan las *variables repetitivas*, en el caso de que el número de variables sea mayor al número de dimensiones involucradas, se recomienda seleccionar, una geométrica, una cinemática y una dinámica. El número de estas variables coincide con el número de dimensiones básicas; por ejemplo, si el conjunto de las cantidades físicas solo contiene L y T , se seleccionan 2 variables repetitivas. No se deben seleccionar como variables repetitivas las variables dependientes de interés en el estudio.

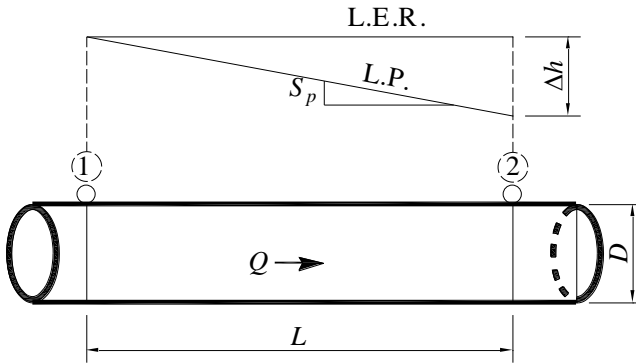
3- Cálculo del número de parámetros adimensionales (NP) que se obtendrá, como $NP = (n - r)$.

4- Conformación y deducción de los grupos adimensionales o grupos Π (PI), usando el teorema PI.

6.3.2 Ejemplos de aplicación

Ejemplo 6.2.

En un problema de flujo de agua en una tubería lisa intervienen las magnitudes caudal Q , diámetro D , gradiente hidráulico $S_p = \Delta h/L$, densidad ρ , viscosidad dinámica μ y gravedad g ; las cuales se representan gráficamente en la **Figura 6-2**. Encontrar los parámetros adimensionales involucrados en este fenómeno físico.



L.E.R.: Línea de energía real

Figura 6-2.-Flujo en un tubo horizontal

1- Las variables que describen el fenómeno físico a estudiar son las que se muestran en la **Tabla 6-3**.

Tabla 6-3.- Cantidades físicas y dimensiones del problema

Cantidad	Símbolo	Dimensiones
		Masa-Longitud-Tiempo
Gradiente Hidráulico	$S_p = \Delta h / L$	Adimensional
Caudal	Q	$L^3 T^{-1}$
Densidad	ρ	ML^{-3}
Diámetro	D	L
Viscosidad Dinámica	μ	$ML^{-1} T^{-1}$
Gravedad	g	LT^{-2}

2- Las variables se clasifican según sus dimensiones tal como se indica a continuación en la **Tabla 6-4**.

Tabla 6-4 Cantidades físicas y dimensiones del problema.

Cantidad	Tipo de cantidad física
Gradiente Hidráulico	$[-]$
Caudal Volumétrico	Cinemática
Densidad	Dinámica
Diámetro	Geométrica
Viscosidad Dinámica	Dinámica
Gravedad	Cinemática

3- Variables repetitivas, Inicialmente se seleccionan tres variables, una geométrica (D), una cinemática (Q) y una dinámica (ρ), obteniéndose la siguiente relación funcional dimensional a satisfacer.

$$f(Q, \rho, D, \mu, g) = 0 \tag{1}$$

4- Se calcula el número de parámetros, NP . Como se tiene $r = 3$ dimensiones básicas involucradas en el conjunto de variables, y $n = 5$ variables dimensionales, se obtiene $NP = 5-3 = 2$ parámetros adimensionales que se podrían obtener. Es de anotar que $\Delta h/L$, ya es un parámetro adimensional por sí solo, y no se tiene en cuenta en este paso, el cual simplemente se adiciona al final.

5- Para la conformación y deducción de los grupos adimensionales o grupos Π (PI), se adopta el siguiente procedimiento.

- Se conforma los parámetros adimensionales, igualando el parámetro Π a las variables repetitivas elevadas a un exponente (a, b, c) y la cuarta no repetitiva al exponente uno (1), obteniéndose la siguiente expresión:

$$\Pi_1 = \rho^{a_1} Q^{b_1} D^{c_1} \mu^1 \tag{2}$$

$$\Pi_2 = \rho^{a_2} Q^{b_2} D^{c_2} g^1 \tag{3}$$

- Se reemplazan las dimensiones básicas de cada variable y se iguala a las dimensiones básicas involucradas elevadas al exponente cero.

$$\Pi_1 = [ML^{-3}]^{a_1} [L^3T^{-1}]^{b_1} [L]^{c_1} [ML^{-1}T^{-1}]^1 = [M^0L^0T^0] \tag{4}$$

$$\Pi_2 = [ML^{-3}]^{a_2} [L^3T^{-1}]^{b_2} [L]^{c_2} [LT^{-2}]^1 = [M^0L^0T^0] \tag{5}$$

- Se igualan los exponentes de cada dimensión básica, de las anteriores ecuaciones, obteniéndose un sistema de ecuaciones lineales.

Para Π_1 :

$$\begin{aligned} \text{Para M} &\Rightarrow +a_1 + 1 = 0 \rightarrow a_1 = -1 \\ \text{Para T} &\Rightarrow -b_1 - 1 = 0 \rightarrow b_1 = -1 \\ \text{Para L} &\Rightarrow -3a_1 + 3b_1 + c_1 - 1 = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Para Π_2 :

$$\begin{aligned} \text{Para M} &\Rightarrow +a_2 = 0 \rightarrow a_2 = 0 \\ \text{Para L} &\Rightarrow -3a_2 + 3b_2 + c_2 + 1 = 0 \\ \text{Para T} &\Rightarrow -b_2 - 2 = 0 \rightarrow b_2 = -2 \end{aligned} \quad (7)$$

- Se resuelven los sistemas de ecuaciones, para cada parámetro Π . Sustituyendo $a_1 = -1$ y $b_1 = -1$ en el sistema de ecuaciones, se obtiene que $c_1 = +1$. Sustituyendo $a_2 = 0$, y $b_2 = -2$ en el sistema de ecuaciones, se obtiene que $c_2 = +5$.
- Se sustituye el valor de los exponentes en la ecuación de los parámetros Π , de los cuales se obtiene:

$$\Pi_1 = \rho^{-1} Q^{-1} D^{+1} \mu^1 \quad (8)$$

$$\Pi_2 = \rho^0 Q^{-2} D^5 g^1 \quad (9)$$

- Se obtiene la relación funcional adimensional, como:

$$f\left(\frac{\Delta h}{L}, \frac{\mu D}{\rho Q}, \frac{D^5 g}{Q^2}\right) = 0 \quad (10)$$

- Verificar que se cumpla la dimensionalidad en cada parámetro.

Los parámetros cumplen con propiedades de multiplicación, división y exponencial, lo que indica, por ejemplo, que dos parámetros se pueden multiplicar para obtener un tercero. Esto es todo lo que puede aportar el análisis dimensional, luego se debe recurrir a la experimentación física o numérica, para establecer una ecuación práctica entre $\Delta h/L$ y los parámetros Π_1 y Π_2 , pero la ventaja es que reduce el costo experimental

ya que se ha reducido 5 variables independientes a tan solo dos parámetros. Al despejar el gradiente hidráulico, se obtiene:

$$\frac{\Delta h}{L} = S_p = f\left(\frac{\mu D}{\rho Q}, \frac{D^5 g}{Q^2}\right) = f\left(\text{Re}, \frac{1}{D} \frac{Q^2}{g D^4}\right) \quad (11)$$

Obsérvese que Re es el número de Reynolds.

6.4 Parámetros adimensionales comunes

A través del desarrollo del análisis dimensional para el estudio de diversos fenómenos físicos, se ha venido encontrando ciertos parámetros útiles en cada uno de dichos fenómenos, y que se han convertido en números clásicos dentro de la Mecánica de Fluidos. A continuación se describen los más relevantes.

6.4.1 Número de Reynolds: Re

Este número se puede definir como la relación que existe entre fuerzas de inercia (F_i) y fuerzas de viscosidad, (F_v). (F_i) = m.a, Donde (m) es la masa y (a) es la aceleración.

$$\text{Re} = \frac{F_i}{F_v} = \frac{ma}{A\tau} = \frac{ma}{A\mu \frac{dV}{dy}} \quad (6.12)$$

Si se reemplazan las dimensiones básicas de algunas variables se tiene:

$$\text{Re} = \frac{\rho L^3 (L/T^2)}{L^2 \mu \frac{V}{L}} = \frac{\rho L^2 (L^2/T^2)}{L\mu V} = \frac{\rho LV^2}{\mu V} = \frac{\rho LV}{\mu} = \frac{LV}{\nu} \quad (6.13)$$

El cual se ha constituido como un número adimensional relevante en el estudio de flujos en conductos a presión. L es una longitud característica que en tubos circulares es dada como el diámetro del tubo D, mientras que para conductos de sección no circular es dada como $L = 4R_H$, donde R_H es el radio hidráulico de la sección transversal mojada, $R_H = A/P$; donde a su vez, A es el área de la sección transversal y P es el perímetro

mojado. μ es la viscosidad absoluta o dinámica del fluido, ν es la viscosidad cinemática del fluido, ρ es la densidad y V es la velocidad media del fluido.

El número de Reynolds es utilizado para clasificar el flujo en laminar para $\mathbf{R}_e < 2000$ y en turbulento para $\mathbf{R}_e > 4000$.

6.4.2 Número de Froude: \mathbf{F}_R

Este número se puede definir como la raíz cuadrada de la relación que existe entre fuerzas de inercia (F_i) y las fuerzas de gravedad, (F_g):

$$\mathbf{F}_R^2 = \frac{F_i}{F_g} = \frac{ma}{mg} \quad (6.14)$$

Si se reemplazan las dimensiones básicas de algunas variables se tiene que:

$$\mathbf{F}_R^2 = \frac{\rho L^3 (L/T^2)}{\rho L^3 g} = \frac{L^2 (L^2/T^2)}{L^3 g} = \frac{V^2}{Lg} \quad (6.15)$$

$$\mathbf{F}_R = \frac{V}{\sqrt{Lg}} \quad (6.16)$$

El número de Froude se ha constituido en un numero adimensional relevante en el estudio de flujos en conductos a superficie libre. L es una longitud característica, que en canales es igual a la profundidad hidráulica $L = P_H$, donde P_H es la profundidad hidráulica de la sección transversal mojada, $P_H = A/T$; a su vez, A es el área de la sección transversal y T es el ancho hidráulico; g es la aceleración debido a la gravedad de la Tierra y V es la velocidad media del fluido.

El número de Froude es utilizado para clasificar el flujo de la siguiente manera: si $\mathbf{F}_R < 1$, es flujo subcrítico; si $\mathbf{F}_R > 1$ es flujo supercrítico y si $\mathbf{F}_R = 1$ es un flujo crítico. Estos flujos son característicos de flujo a superficie abierta.

6.4.3 Número de Mach: M_A

Este número se puede definir como la raíz cuadrada de la relación que existe entre fuerzas de inercia (F_i) y las fuerzas elásticas, (F_e).

$$M_A^2 = \frac{F_i}{F_e} = \frac{ma}{EA} \quad (6.17)$$

Si se reemplazan las dimensiones básicas de algunas variables se tiene:

$$M_A^2 = \frac{\rho L^3 (L/T^2)}{EL^2} = \frac{\rho L^2 (L^2/T^2)}{EL^2} = \frac{\rho V^2}{E} \quad (6.18)$$

$$M_A = \frac{V}{\sqrt{E/\rho}} \quad (6.19)$$

El número de Match, junto con el número de Reynolds, es importante en el estudio de la aerodinámica y de modelos con aire o gases. E es el módulo de elasticidad volumétrico. Si $M_A < 1$ se trata de un flujo subsónico, si $M_A = 1$ es flujo sónico y si $M_A > 1$ es un flujo supersónico.

6.4.4 Número de Weber: W_e

Este número se puede definir como la relación que existe entre fuerzas de inercia (F_i) y las fuerzas de tensión superficial, (F_t).

$$W_e = \frac{F_i}{F_t} = \frac{ma}{\sigma L} \quad (6.20)$$

Al reemplazar las dimensiones básicas de algunas variables se tiene:

$$W_e = \frac{\rho L^3 (L/T^2)}{\sigma L} = \frac{\rho L^2 (L^2/T^2)}{\sigma L} = \frac{\rho LV^2}{\sigma} \quad (6.21)$$

Según Merrit (1999), este número es importante para el estudio de las olas, de la formación de gotas y burbujas y para analizar el arrastre de aire en el agua.

6.4.5 Número de Euler: E_u

Este número se puede definir como la relación que existe entre fuerzas de inercia (F_i) y las fuerzas de presión, (F_p).

$$E_u = \frac{F_i}{F_p} = \frac{ma}{PA} \quad (6.22)$$

Si se reemplaza las dimensiones básicas de algunas variables se tiene:

$$E_u = \frac{\rho L^3 (L/T^2)}{PL^2} = \frac{\rho L^2 (L^2/T^2)}{PL^2} = \frac{\rho V^2}{P} \quad (6.23)$$

Este parámetro es importante en el estudio del fenómeno de cavitación. También es útil en el estudio de pérdida de presión en accesorios ya que, si se conoce el valor de E_u en función de las propiedades geométricas del accesorio, es posible despejar la presión. Como $\rho = \gamma/g$, además dividiendo y multiplicando por dos, se tiene:

$$\frac{P}{\gamma} = \frac{2}{E_u} \frac{V^2}{2g} \quad (6.24)$$

Donde el coeficiente de pérdidas de accesorios K , queda expresado como:

$$K = \frac{2}{E_u} \quad (6.25)$$

6.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 6.5.1. (Streeter et al, 2000, p. 254).

Utilizando las variables Q , D , $\Delta H/l$, ρ , μ y g como las variables pertinentes en el flujo, en una tubería lisa, ordenarlas en parámetros adimensionales con Q , ρ y μ como las variables repetitivas.

Ejercicio 6.5.2. (Fernández, 2001, p. 214)

En un canal abierto se coloca un vertedero triangular con ángulo ϕ por el que fluye el líquido represado por el vertedero. El caudal Q es una función de la elevación H de la superficie libre del líquido aguas arriba por encima del vértice del ángulo ϕ , depende de la gravedad y de la velocidad de aproximación, V_0 del líquido al vertedero. Determinar la forma de la ecuación para expresar el caudal.

Respuesta:

$$Q = V_0 H^2 \sqrt{g} \cdot f\left(\phi, \frac{V_0}{\sqrt{Hg}}\right)$$

Ejercicio 6.5.3. (Streeter et al, 2000, p. 254).

Se sabe que la variación de presión Δp en líquidos estáticos depende del peso específico γ y de la diferencia de elevación Δz . Mediante razonamiento adimensional, determinar la forma de la ley hidrostática de variación de la presión.

Ejercicio 6.5.4. (Fernández, 2001, p. 211)

Un barco que tiene una longitud L , se mueve a una velocidad V , a través de un líquido de viscosidad μ , densidad ρ y tensión superficial σ . Encontrar por medio del análisis dimensional una expresión para la fuerza de arrastre F del barco, la cual se compara fácilmente con la ecuación estándar para el arrastre. Nota: Tome como variables a repetir V, L, ρ .

Respuesta:

$$F = \rho V^2 L^2 f(\mathbf{W}; \mathbf{R}).$$

\mathbf{W} = número de Weber,

\mathbf{R} = número de Reynolds.

Ejercicio 6.5.5. (Fernández, 2001, p. 219)

Por una tubería que mide 5 cm de diámetro, fluye agua a 20°C y a una velocidad de 0,90 m/s. ¿Qué velocidad será necesaria para que una tubería de 15 cm de diámetro por la que fluye glicerina a 30°C sea dinámicamente semejante a la anterior?

Respuesta:

$$V_m = 63,16 \text{ m/s.}$$

6.6 Fuerzas que actúan en los modelos

Si se quiere conocer los valores cuantitativos exactos de las fuerzas que actúan en los modelos, se debe conocer las leyes que rigen los fenómenos. Las fuerzas que actuarán sobre el modelo deben ser proporcionales a las fuerzas en el prototipo. Se conoce que las fuerzas que actúan son cuatro: **La fuerza de inercia, la fuerza de viscosidad, la fuerza de gravedad y la fuerza debida a la tensión superficial.**

Por lo general, es muy difícil reproducir las cuatro fuerzas *simultáneamente* en igual valor en el modelo y el prototipo, por lo general se recomienda escoger solo dos fuerzas, una es la fuerza de inercia y la otra se toma de las restantes, dependiendo del fenómeno a ser estudiado.

6.6.1 Fuerzas de inercia sobre fuerzas de gravedad

Según Merritt (1999), para estructuras hidráulicas como vertederos, donde el perfil de la superficie cambia con rapidez, y en general en el flujo a superficie libre, las dos fuerzas predominantes son la fuerza de inercia y la fuerza de gravedad; con base en ello se debe tomar el número de Froude igual en el modelo que en el prototipo.

$$F_{Rm} = F_{Rp} \quad (6.26)$$

Donde, el subíndice (*m*) indica modelo, el subíndice (*p*) indica prototipo, F_{Rm} es el número de Froude en el modelo y F_{Rp} es el número de Froude en el prototipo. Sustituyendo las variables, se tiene:

$$\left(\frac{V}{\sqrt{Lg}} \right)_m = \left(\frac{V}{\sqrt{Lg}} \right)_p \quad (6.27)$$

$$\left(\frac{V_m}{\sqrt{L_m g}} \right) = \left(\frac{V_p}{\sqrt{L_p g}} \right) \quad (6.28)$$

Teniendo en cuenta que no es posible modificar la gravedad g , para tener una gravedad diferente en el modelo y en el prototipo, esta será igual en ambos sistemas. Al realizar las relaciones se obtiene:

$$\left(\frac{V_m}{V_p} \right) = \left(\frac{\sqrt{L_m}}{\sqrt{L_p}} \right) \quad (6.29)$$

$$(V_r) = (\sqrt{L_r}) \quad (6.30)$$

Donde V_r indica la relación de velocidades y L_r la relación de longitudes, esto indica la escala de las variables. Si se hace el modelo a escala geométrica de 1:2, o sea que se reduce a la mitad del tamaño, la velocidad no se reduce a la mitad si no se reducirá en la proporción de raíz cuadrada de L_r . Tomando las escalas para las demás variables se obtiene:

Caudal: Q_r .

$$Q_r = A_r V_r = A_r (\sqrt{L_r}) \quad (6.31)$$

$$Q_r = L_r^2 (\sqrt{L_r}) = L_r^2 L_r^{1/2} = L_r^{5/2} \quad (6.32)$$

Tiempo: t_r .

$$t_r = \frac{L_r}{V_r} = \frac{L_r}{L_r^{1/2}} = L_r^{1/2} \quad (6.33)$$

Fuerza: F_r .

$$F_r = m_r a_r = \rho_r \forall_r a_r = \gamma_r L_r^3 \quad (6.34)$$

Donde, A_r es la relación de áreas, L_r es la relación de longitudes, Q_r es la relación de caudales, t_r es la relación de tiempos, m_r es la relación de masas, ∇_r es la relación de volúmenes, a_r es la relación de aceleraciones, γ_r es la relación de pesos específicos, y ρ_r es la relación de densidades.

En resumen se tiene:

Escala de velocidades: $V_r = L_r^{1/2}$

Escala de caudal : $Q_r = L_r^{5/2}$

Escala de tiempo : $t_r = L_r^{1/2}$

Escala de fuerza : $F_r = ma = \gamma_r L_r^3$

Escala de aceleración : $a_r = g_r = 1$

6.2.2 Fuerzas de inercia sobre fuerzas de viscosidad

En el flujo en conductos a presión predominan las fuerzas de inercia y las fuerzas de viscosidad, lo que se traduce en un número de Reynolds. Igualando el número de Reynolds en el modelo y en el prototipo, y realizando el mismo procedimiento que para el número de Froude, se tiene que:

Velocidad: V_r .

$$\left(\frac{VL}{\nu} \right)_m = \left(\frac{VL}{\nu} \right)_p \quad (6.35)$$

$$\frac{V_m}{V_p} \frac{L_m}{L_p} = \frac{\nu_m}{\nu_p} \quad (6.36)$$

$$V_r L_r = \nu_r \quad (6.37)$$

$$V_r = \frac{\nu_r}{L_r} \quad (6.38)$$

Caudal: Q_r .

$$Q_r = A_r V_r = A_r \frac{V_r}{L_r} \quad (6.39)$$

$$Q_r = L_r^2 \frac{V_r}{L_r} = L_r v_r \quad (6.40)$$

Tiempo: t_r .

$$t_r = \frac{L_r}{V_r} = \frac{L_r}{\frac{v_r}{L_r}} = \frac{L_r^2}{v_r} \quad (6.41)$$

Fuerza: F_r .

$$F_r = m_r a_r = \rho_r \forall_r \frac{V_r}{t_r} = \rho_r L_r^3 \frac{V_r}{\frac{L_r}{V_r}} = \rho_r L_r^2 V_r^2 = \rho_r L_r^2 \frac{v_r^2}{L_r^2} = \rho_r v_r^2 \quad (6.42)$$

$$F_r = \rho_r v_r^2 = \rho_r \left(\frac{\mu_r}{\rho_r} \right)^2 = \frac{\mu_r^2}{\rho_r} \quad (6.43)$$

Presión: p_r .

$$p_r = \frac{F_r}{A_r} = \frac{\rho_r v_r^2}{L_r^2} \quad (6.44)$$

$$p_r = \frac{F_r}{A_r} = \frac{\frac{\mu_r^2}{\rho_r}}{L_r^2} = \frac{\mu_r^2}{L_r^2 \rho_r} \quad (6.45)$$

Aceleraciones: a_r .

$$a_r = \frac{V_r}{t_r} = \frac{v_r^2}{L_r^3} = \frac{\mu_r^2}{\rho_r^2} \frac{1}{L_r^3} = \frac{\mu_r^2}{\rho_r^2 L_r^3} \quad (6.46)$$

Energía o Trabajo: E_r .

$$E_r = F_r L_r = \frac{L_r \mu_r^2}{\rho_r} \quad (6.47)$$

Potencia: P_r .

$$P_r = \frac{E_r}{t_r} = \frac{L_r \mu_r^2}{\rho_r} \left(\frac{L_r^2}{v_r} \right)^{-1} = \frac{L_r \mu_r^2}{\rho_r} \left(\frac{\mu_r}{\rho_r L_r^2} \right) = \frac{\mu_r^3}{\rho_r^2 L_r} \quad (6.48)$$

$$P_r = \frac{E_r}{t_r} = \frac{L_r \rho_r^2 v_r^2}{\rho_r} \left(\frac{v_r}{L_r^2} \right) = \frac{\rho_r v_r^3}{L_r} \quad (6.49)$$

En resumen, se tiene:

Escala de velocidad : $V_r = v_r/L_r$

Escala de tiempo : $t_r = L_r/V_r = L_r^2/v_r$

Escala de caudal : $Q_r = v_r L_r$

Escala de fuerza : $F_r = m_r a_r = \rho_r L_r^2 V_r^2 = \mu_r^2/\rho_r = \rho_r v_r^2$

Escala de fuerza : $p_r = F_r/A_r = \mu_r^2/(L_r^2 \rho_r) = \rho_r v_r^2/L_r^2$

Escala de aceleración : $a_r = v_r^2/L_r^3$

Escala de Energía : $E_r = L_r \mu_r^2/\rho_r$

Escala de Potencia : $P_r = \mu_r^3/\rho_r^2 L_r = \rho_r v_r^3/L_r$

Donde, μ_r es la relación de viscosidades dinámicas, v_r es la relación de viscosidades cinemáticas, p_r es la relación de presiones, P_r es la relación de potencias, y E_r es la relación de energías.

6.6.3 Fuerzas de inercia sobre fuerzas de tensión superficial

En el estudio de olas, formación de gotas y burbujas y en el arrastre de aire en agua, predominan las fuerzas de inercia y las fuerzas de tensión superficial, lo que equivale a usar el número de Weber. Igualando el

número de Weber en el modelo y prototipo, y realizando el mismo procedimiento que para el número de Froude, se tiene:

Escala de velocidad:

$$V_r^2 = \sigma_r / (\rho_r L_r) \quad (6.50)$$

6.7 Ejemplos de Aplicación

6.7.1 Flujo a presión

Ejemplo 6.3. Sotelo (2005)

Un dispositivo de investigación se encuentra sostenido por una barra cilíndrica de 0,15 m de diámetro, la cual a su vez está sujeta a una lancha y sumergida en aguas profundas a 15°C, donde la velocidad, por el movimiento de la lancha, alcanza 3,0 m/s; se desea determinar la fuerza de resistencia en la barra, (inducida por el movimiento), con un modelo geoméricamente similar el cual contiene la barra con diámetro de 0,03 m, en un túnel de viento de presión variable donde es posible lograr velocidades hasta de 30 m/s a una temperatura de 15°C.

Comentario: Este modelo se hace ya que medir la fuerza sobre la barra en la realidad es muy difícil, por lo tanto se opta por mantener la barra estática y suministrar la fuerza de la corriente a través de flujo de aire en un túnel de viento, que es mucho más fácil de medir. En la **Figura 6-3**, se muestra el diagrama conceptual del problema.

Datos del prototipo:

- Diámetro de la barra: 0,15 m
- Velocidad: 3 m/s
- Temperatura: 15°C

Datos en el modelo:

- Diámetro de la barra: 0,03 m
- Velocidad: 30 m/s
- Temperatura: 15°C

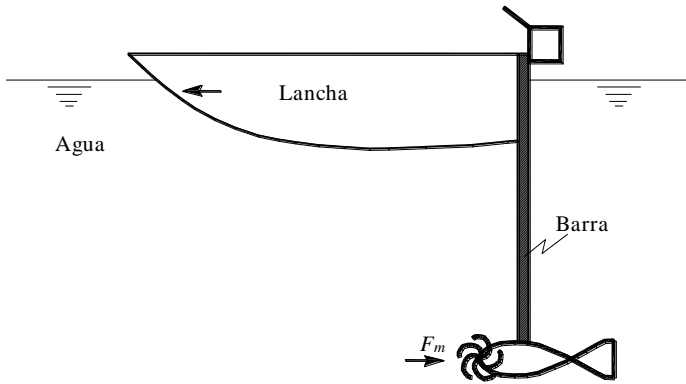


Figura 6-3.- Geometría de la lancha y el dispositivo de medición.

Como el túnel de viento es un flujo a presión se puede usar la escala del número de Reynolds. $Re_m = Re_p$.

Pasos:

1- Escala del modelo: $Esc = [1: L_p/L_m] = [1: (0,15m)/(0,03m)] = [1: 5]$
 $= [1 \text{ a } 5]$

2- Viscosidad dinámica del agua a 15°C. $\mu_p = 1,18 \cdot 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s}$.

3- Viscosidad dinámica del aire a 15°C. $\mu_m = 2,0 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}\cdot\text{s}$.

4- Densidad del agua a 15°C. $\rho_p = 101,87 \text{ (kp}\cdot\text{s}^2)/\text{m}^4$.

5- Relación de viscosidades: $\mu_r = \mu_m/\mu_p = 0,016948$.

6- Relación de velocidades: $V_r = V_m/V_p = (30\text{m/s})/(3\text{m/s}) = 10$.

7- Relación de longitudes: $L_r = L_m/L_p = (0,03\text{m})/(0,15\text{m}) = 0,20$.

8- Relación de densidades: $\rho_r = \mu_r / (V_r \cdot L_r) = (0,016948)/(10 \cdot 0,20) = 8,4745 \cdot 10^{-3}$

9- Cálculo de la densidad en el modelo: $\rho_m = \rho_r \cdot \rho_p = (8,4745 \cdot 10^{-3}) \cdot 101,87 \text{ (kp} \cdot \text{s}^2/\text{m}^4) = 0,8632 \text{ (kp} \cdot \text{s}^2/\text{m}^4)$.

10- Cálculo de la relación de fuerzas: $F_r = \mu_r^2 / \rho_r = (0,016948)^2 / 8,4745 \cdot 10^{-3} = 0,03389$.

11- Fuerza en el prototipo: $F_p = F_m / F_r = F_m / 0,03389 = 29,5 F_m$, lo que significa que para hallar la fuerza en el prototipo sobre la barra es necesario multiplicar por 29,5 veces la fuerza medida en el modelo.

6.7.2 Flujo a superficie libre

Ejemplo 6.4. Sotelo (2005).

Determinar las escalas de velocidad, de caudal y fuerzas, para un modelo construido a escala 1:100, de un vertedero de excesos, que evacua un caudal de $100.000 \text{ m}^3/\text{s}$. Se usará agua como fluido en el modelo y en el prototipo.

Como el vertedero es una estructura hidráulica a flujo libre, se utiliza la modelación con el número de Froude, F_R . El diagrama conceptual se muestra en la **Figura 6-4**.

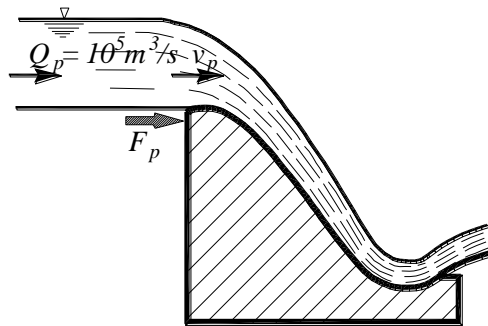


Figura 6-4.- Geometría del vertedero.

Datos del prototipo:

- Caudal evacuado: $100.000 \text{ m}^3/\text{s}$

Pasos:

1- Escala del modelo: $Esc = 1 : 100$

2- Escala de velocidades: $V_r = L_r^{1/2} = (1/100)^{1/2} = 0,10$.

3- Escala de caudales: $Q_r = L_r^{5/2} = (1/100)^{5/2} = 10^{-5}$

4- Escala de densidades: $\rho_r = \rho_p = 1$.

5- Cálculo de relación de fuerzas: $F_r = \gamma_r L_r^3 = 1(1/100)^3 = 10^{-6}$

6- Fuerza en el prototipo: $F_p = F_m/F_r = F_m/10^{-6} = 10^6 F_m$, lo que significa que para hallar la fuerza en el prototipo es necesario multiplicar por un millón de veces la fuerza medida en el modelo.

7- Velocidad en el prototipo: $V_p = V_m/V_r = 10 V_m$, quiere decir que para hallar la velocidad en el prototipo es necesario multiplicar por 10 veces la velocidad medida en el modelo.

8- Caudal en el modelo: $Q_m = Q_p Q_r = 10^{-5} Q_p = 10^{-5} * 100000 \text{ m}^3/\text{s} = 1 \text{ m}^3/\text{s}$.

6.8 Ejercicios propuestos

Ejercicio 6.8.1. (Sotelo, 2005).

El flujo de agua en un tubo de 19 mm de diámetro se vuelve turbulento a la velocidad de 0,116 m/s. Determinar la velocidad máxima para la cual el flujo de aire sería laminar en un tubo de 38 mm de diámetro, de construcción similar. Considerar 10°C para el agua y 20°C para el aire.

Ejercicio 6.8.2. (Sotelo, 2005).

Una pila rectangular de un puente sobre un río tiene un espesor de 1,20 m, 3,65 m de ancho para un tirante medio en el río de 2,75 m. Un modelo a escala 1:16 se ha probado con una velocidad de 0,76 m/s, obteniéndose una fuerza que actúa sobre la pila de 0,409 kg.

a) Determinar los valores correspondientes a la velocidad y fuerza en el prototipo

- b) En el modelo se observó una onda estacionaria de 4,9 cm de altura al frente de la pila y se desea conocer la altura que tendrá en el prototipo
- c) De acuerdo con la definición de coeficiente de arrastre: $CD = D/(\frac{1}{2}\rho v_0^2 d)$ determinar el mismo para la pila en el modelo y el prototipo

Ejercicio 6.8.3. (Streeter et al., 2000, p. 257).

Se desea probar un modelo a escala 1:5 de un sistema de tuberías de una estación de bombeo de agua para determinar las pérdidas de cabeza. Se encuentra disponible aire a 25°C y 1 atm. Para una velocidad del prototipo de 500 mm/s en una sección de 4 m de diámetro con agua a 15°C, determinar la velocidad y la cantidad de aire necesarias, y cómo se convertirían las pérdidas determinadas en el modelo a pérdidas en el prototipo.

Ejercicio 6.8.4. (Streeter et al., 2000, p. 257).

Se van a hacer pruebas a escala completa en un túnel de viento para la sustentación y el arrastre sobre los hidropatines de un barco. El barco viajará a 55 km/h a través de agua a 15°C. ¿Qué velocidad de aire ($p = 200$ kPa abs y $T = 32^\circ\text{C}$) se requiere para determinar la sustentación y el arrastre? *Nota:* El coeficiente de sustentación e , es adimensional. Sustentación = $C_L A \rho V^2 / 2$.

7. Capítulo 7: Introducción al flujo real

7.1 Generalidades

En el presente capítulo se analizan las consideraciones teóricas sobre el flujo real o con viscosidad, o flujo de fluido viscoso; para ello se toman como base varios textos conocidos, como Nakayama et al. (1998), Dayli y Harleman (1975), Franzini y Finnemore (1999), Smits (2019), Shames (1995), Çengel y Cimbala (2006), Bergadà (2015).

En términos generales, se puede afirmar que todo fluido es viscoso, sin embargo, si se observa que el efecto de la viscosidad es muy pequeño, el flujo se puede tratar como un flujo ideal; de lo contrario siempre se trata como fluido viscoso (Nakayama et al., 1998). Para su estudio es necesario solucionar simultáneamente la ecuación de *conservación de la masa* y las ecuaciones de *Navier–Stokes*. Estas ecuaciones, también llamadas de *conservación del momento* o *segunda ley de Newton*, son ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden, que no tienen una solución analítica general tridimensional, y las soluciones que se han desarrollado corresponden a casos particulares (Mott y Untener, 2015), (Franzini y Finnemore, 1999).

7.2 Ecuación de conservación de la masa

Recordando el procedimiento seguido en el Capítulo Cinco de este texto, la ecuación de conservación de la masa, se obtiene de la forma expuesta a continuación, complementando con lo expresado por Nakayama et al. (1998). Según la **Figura 7-1**, se hace el planteamiento matemático para la derivación de la ecuación diferencial de continuidad, partiendo de un volumen de control de tamaño infinitesimal. Las velocidades en las direcciones x , y , y z , son v_x, v_y y v_z , respectivamente.

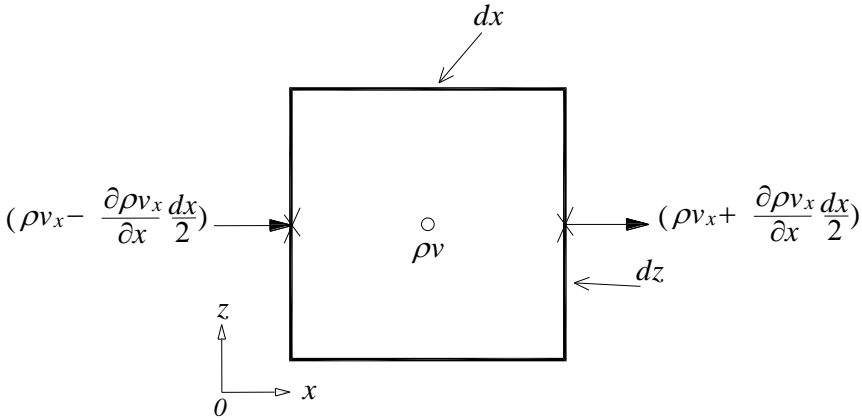


Figura 7-1.- Esquema del volumen infinitesimal para la derivación de la ecuación de continuidad. Fuente: Adaptada de (Sotelo, 2005, p. 115)

Con base en el **principio de conservación de la masa**, que según Sotelo (2005) dice:

<p><i>La cantidad de masa que atraviesa la superficie de frontera del volumen en la unidad de tiempo</i></p>	=	<p><i>A la rapidez de variación de la masa contenida en el volumen</i></p>
--	---	--

- La **primera parte del principio de continuidad** está dado como:

La función ρv , se incrementa y decrementa en la misma cantidad, al pasar las caras del elemento, en el eje x, como:

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \tag{7.1}$$

Al sumar y restar, se tiene la cantidad neta de masa que atraviesa dichas caras:

$$\left(\rho v_x + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} \frac{dx}{2}\right)dA_x - \left(\rho v_x - \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} \frac{dx}{2}\right)dA_x = \left(\frac{\partial \rho v_x}{\partial x}\right) dx dA_x \tag{7.2}$$

Donde $dA_x = dz \cdot dy$ y ρ es la densidad. Si se realiza el mismo análisis para las otras dos dimensiones (y, z) se tiene:

$$(\rho v_y + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} \frac{dy}{2})dA_y - (\rho v_y - \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} \frac{dy}{2})dA_y = \left(\frac{\partial \rho v_y}{\partial y} \right) dy dA_y \quad (7.3)$$

$$(\rho v_z + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \frac{dz}{2})dA_z - (\rho v_z - \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \frac{dz}{2})dA_z = \left(\frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \right) dz dA_z \quad (7.4)$$

Donde $dA_y = dx \cdot dz$, y $dA_z = dx \cdot dy$.

- La **segunda parte del principio de continuidad** se expresa como:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial(\rho d\forall)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho dx dy dz)}{\partial t} \quad (7.5)$$

Siendo m la masa y \forall es el volumen.

- Igualando las ecuaciones según el principio de continuidad, se obtiene la ecuación diferencial de continuidad.

$$\left(\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} \right) dx dA_x + \left(\frac{\partial \rho v_y}{\partial y} \right) dy dA_y + \left(\frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \right) dz dA_z + \frac{\partial(\rho dx dy dz)}{\partial t} = 0 \quad (7.6)$$

Como todos los términos están multiplicado por el diferencial de volumen $d\forall = dx \cdot dy \cdot dz$, se simplifica de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (7.7)$$

En forma vectorial se expresa como:

$$\nabla(\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (7.8)$$

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (7.9)$$

Esta es la ecuación diferencial de continuidad válida para un punto p cualquiera y cualquier tipo de flujo, sea permanente, no permanente, compresible o incompresible. Para flujo permanente e incompresible, dicha ecuación se reduce a $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, lo que indica que la divergencia del vector velocidad es cero (Niño y Duarte, 2007).

Para un sistema bidimensional en (x, y) , la ecuación de *conservación de la masa* es dada como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0 \quad (7.10)$$

En caso de flujo permanente, el término $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, y la ecuación de continuidad se simplifica de la siguiente manera:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0 \quad (7.11)$$

Para flujo incompresible, la densidad es constante, por lo tanto, se tiene:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (7.12)$$

Esta ecuación es aplicable tanto para flujo permanente como no permanente.

7.3 Ecuación de conservación de Navier-Stokes

Para facilitar la comprensión de la deducción, se considera un rectángulo de fluido en un espacio bidimensional (\mathbf{x}, \mathbf{y}) de dimensiones dx, dy y espesor e , como se muestra en la

Figura 7-2 y para un fluido incompresible, donde se puede identificar que las fuerzas actuantes sobre el elemento son $F(F_x, F_y)$.

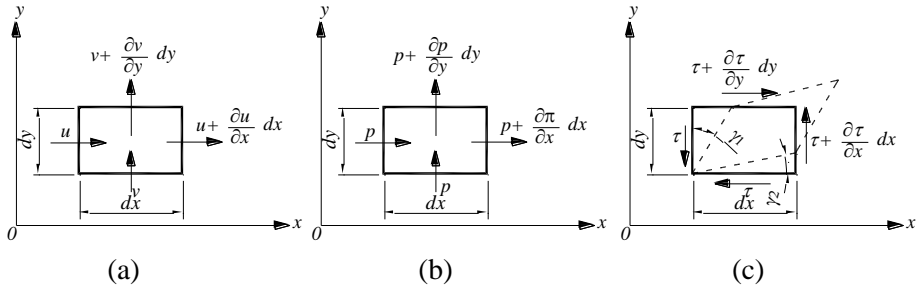


Figura 7-2.- Balance de fuerzas sobre un elemento de fluido: (a) velocidad; (b) presión; (c) deformación angular. Fuente: Adaptada de (Nakayama et al., 1998, p. 84).

Las cuales corresponden a la fuerza inercial dada como el producto de la masa por la aceleración, $F = m \cdot a$. Reemplazando valores en cada dirección se tiene:

$$F_x = (\rho \nabla) \left(\frac{dv_x}{dt} \right) \tag{7.13}$$

$$F_y = (\rho \nabla) \left(\frac{dv_y}{dt} \right) \tag{7.14}$$

Donde el volumen $\nabla = dx \cdot dy \cdot e$.

El cambio de las velocidades con respecto al tiempo, es expresado de la siguiente manera:

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} dt + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy \tag{7.15}$$

Al dividir por dt , se tiene:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (7.16)$$

Para la dirección y ,

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (7.17)$$

Substituyendo, en las ecuaciones de fuerzas, se tiene:

$$F_x = (\rho dx dy e) \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (7.18)$$

$$F_y = (\rho dx dy e) \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \quad (7.19)$$

Estas fuerzas de inercia son equilibradas con las fuerzas de cuerpo $F_B(B_x, B_y)$, de presión $F_P(P_x, P_y)$ y viscosas $F_S(S_x, S_y)$, lo que corresponde a la segunda ley de Newton.

$$(\rho dx dy e) \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = B_x + P_x + S_x \quad (7.20)$$

$$(\rho dx dy e) \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = B_y + P_y + S_y \quad (7.21)$$

Según Dayli y Harleman (1795), "Aunque las ecuaciones de Navier-Stokes no pueden resolverse rápida y fácilmente en su forma general, son sin embargo de gran valor en muchos problemas de flujos viscosos,

en los cuales ciertos términos son nulos o despreciables” (Dayli y Harleman, 1975, p. 138).

7.3.1 Fuerzas de cuerpo $F_B(B_x, B_y)$

Estas fuerzas de cuerpo corresponden a la fuerza de gravedad, fuerza centrífuga, fuerza electromagnética, etc., y actúan directamente a través de la masa. Si se coloca como A y B a tales fuerzas en las componentes (x, y) , respectivamente; se obtiene:

$$B_x = A\rho edxdy \quad (7.22)$$

$$B_y = B\rho edxdy \quad (7.23)$$

Si se establece una fuerza gravitacional $A = 0$, y $B = -g$.

7.3.2 Fuerzas de presión $F_p(P_x, P_y)$

Estas fuerzas de presión, se obtienen realizando la sumatoria de fuerzas en las caras del elemento diferencial, en cada eje, tal como se indicó en la

Figura 7-2b:

$$P_x = pedy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) edy = -\frac{\partial p}{\partial x} edxdy \quad (7.24)$$

Realizando el mismo procedimiento para eje y , se obtiene:

$$P_y = -\frac{\partial p}{\partial y} edxdy \quad (7.25)$$

7.3.3 Fuerzas viscosas $F_s(S_x, S_y)$

Estas fuerzas de viscosidad, son producidas por la deformación angular que sufre el fluido, tal y como se indicó en la

Figura 7-2c.

1. *Fuerza en la dirección x, debido a la deformación angular, S_{x1} .*

Colocando la deformación del elemento de fluido como $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, el correspondiente esfuerzo cortante es expresado como:

$$\tau = \mu \frac{\partial \gamma}{\partial t} \quad (7.26)$$

$\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ es la deformación por unidad de tiempo. Este esfuerzo se relaciona con las velocidades en cada eje.

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} \right) = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (7.27)$$

Para la fuerza S_{x1} , se tiene:

$$S_{x1} = \frac{\partial \tau}{\partial y} edxdy = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} \right) edxdy = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right) edxdy \quad (7.28)$$

2. *Fuerza en la dirección x debido a la transformación de elongación, S_{x2} .*

(Nakayama, 1998, p. 84) demuestra que esta fuerza se puede expresar de la siguiente manera:

$$S_{x2} = 2\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} edxdy \quad (7.29)$$

3. *Fuerza en la dirección x debido a S_{x1} y S_{x2} .*

$$S_x = S_{x1} + S_{x2} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right) edxdy + 2\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} edxdy \quad (7.30)$$

$$S_x = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) edxdy \tag{7.31}$$

Con el mismo razonamiento, se obtiene S_y .

$$S_y = \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) edxdy \tag{7.32}$$

Sustituyendo estas fuerzas, en las ecuaciones (7.20) y (7.21), se tiene:

$$(\rho dx dy e) \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = A \rho e dx dy - \frac{\partial p}{\partial x} e dx dy + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) e dx dy \tag{7.33}$$

$$(\rho dx dy e) \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = B \rho e dx dy - \frac{\partial p}{\partial y} e dx dy + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) e dx dy \tag{7.34}$$

Si se divide por el volumen del elemento diferencial ($edxdy$), se obtiene:

$$\underbrace{\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)}_{\text{Término de inercia}} = \underbrace{A \rho}_{\text{Término de fuerzas de cuerpo}} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{Término de presión}} + \underbrace{\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right)}_{\text{Término viscoso}}$$

$$\underbrace{\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)}_{\text{Término de inercia}} = \underbrace{B \rho}_{\text{Término de fuerzas de cuerpo}} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial y}}_{\text{Término de presión}} + \underbrace{\mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right)}_{\text{Término viscoso}} \tag{7.35}$$

Tal como lo expresa White (2004), “estas son las ecuaciones de Navier-Stokes para flujos incompresibles, llamadas así en honor a C. L. M. H. Navier (1785-1836) y sir George G. Stokes (1819-1903), que fueron los primeros en deducirlas. Son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales de segundo orden, y resultan bastante impresionantes”.

Estas ecuaciones involucran el campo de velocidades y de presiones, que si se extienden a 3D, estas tres ecuaciones junto con la de continuidad, forman un sistema de *cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas* (V_x, V_y, V_z, p). Recuérdese que cada término tiene unidades de fuerza por unidad de volumen. Pero este sistema no lineal de ecuaciones no tiene solución analítica para todo flujo en un espacio 3D. Sólo tienen solución para fenómenos específicos, donde se puede suponer la eliminación de ciertos términos de la ecuación. El ejemplo clásico en el que se solucionan estas ecuaciones es el de un fluido moviéndose entre dos placas planas, en flujo laminar.

7.4 Aplicación de las Ecuaciones de Navier -Stokes

7.4.1 Flujo laminar entre dos placas planas

Este caso es tratado en varios textos de Mecánica de Fluidos, aquí se presenta el desarrollo basado en Munson et al. (1990, p. 309), Nakayama et al. (1998, p. 88), Çengel y Cimbala (2006, p. 426) y Bergadà (2015, p. 163).

Se estudia el flujo de un fluido viscoso entre dos placas paralelas como se muestra en la **Figura 7-3**, donde el flujo justamente acaba de pasar la longitud de entrada.

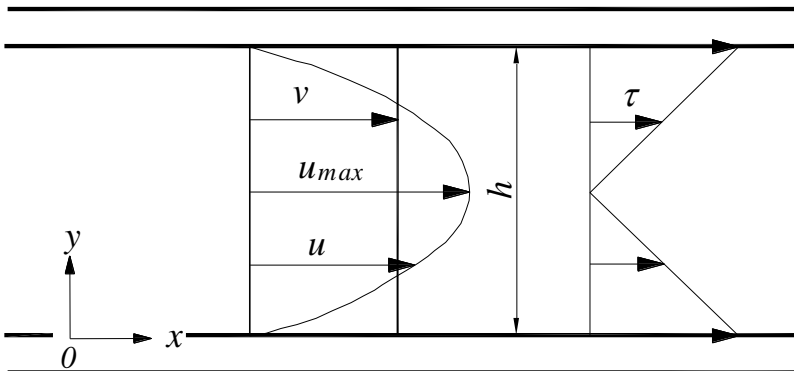


Figura 7-3.- Flujo laminar entre placas planas paralelas. Fuente: Adaptada de (Nakayama et al., 1998, p. 89).

Para la solución se hacen las siguientes simplificaciones:

1. La velocidad solamente existe en la dirección x, dejando v_x .
2. Se considera flujo permanente, por tal motivo v_x no cambia con el tiempo ($\partial v_x / \partial t = 0$).
3. No existen fuerzas de cuerpo, por lo tanto $A\rho = 0$.
4. Se considera flujo uniforme, por ello v_x no cambia con el espacio ($\partial v_x / \partial x = 0$) y ($\partial^2 v_x / \partial x^2 = 0$)
5. Dado que $v_y = 0$, la ecuación inferior de (7.35) simplifica la expresión de la variación de la presión hidrostática y no tiene influencia en la dirección x.

Por lo anterior, la primera ecuación de (7.35), se simplifica de la siguiente manera:

$$\underbrace{-\frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{Término de presión}} + \underbrace{\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right)}_{\text{Término viscoso}} = 0 \tag{7.36}$$

Por otro lado, se considera el equilibrio de fuerzas que actúan sobre las caras respectivas de un volumen pequeño supuesto (dx, dy) (de ancho unitario) en un fluido, tal como se muestra en la **Figura 7-4**.

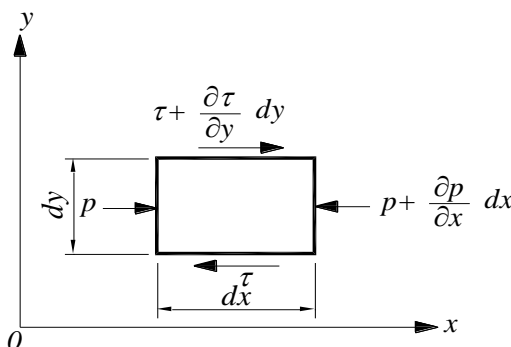


Figura 7-4.- Fuerzas que actúan sobre un pequeño volumen entre placas paralelas. Fuente: Adaptada de Nakayama et al. (1998, p. 89).

Dado que no hay cambio de momento entre las dos caras, la siguiente ecuación es obtenida:

$$pdy - \left(p + \frac{dp}{dx}dx\right)dy - \tau dx + \left(\tau + \frac{d\tau}{dy}dy\right)dx = 0 \quad (7.37)$$

Por lo tanto, se obtiene la relación entre la presión y el esfuerzo cortante.

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\tau}{dy} \quad (7.38)$$

La definición de esfuerzo viscoso, dada como:

$$\tau = \mu \frac{dv_x}{dy} \quad (7.39)$$

Además, de la ecuación (7.35), se obtiene:

$$\mu \frac{d^2v_x}{dy^2} = \frac{dp}{dx} \quad (7.40)$$

Al integrar la ecuación anterior dos veces alrededor de y , la siguiente ecuación es obtenida para v_x :

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (7.41)$$

Por condiciones de frontera, cuando $y = 0$ y $y = h$, $v_x = 0$, obteniéndose el valor de las constantes de integración.

$$0 = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (0)^2 + C_1(0) + C_2 \Rightarrow C_2 = 0 \quad (7.42)$$

$$0 = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h^2 + C_1 h + 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h \quad (7.43)$$

Sustituyendo, se tiene:

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + \left(-\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h \right) y \quad (7.44)$$

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} [y^2 - hy] \quad (7.45)$$

El valor de dp/dx , se considera como la variación de la presión con respecto a la longitud de la placa L , se puede expresar como $dp/dx = \Delta p/L$:

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{L} [y^2 - hy] \quad (7.46)$$

De este modo se obtuvo una ecuación para la velocidad en x , en función de la geometría de la placa y la variación de presión, a partir de la solución de la ecuación de Navier-Stokes simplificada, para este caso específico de flujo entre dos placas planas paralelas.

Una vez conocida la velocidad en cualquier punto, se puede conocer los valores de velocidad media V_m , caudal Q , velocidad máxima V_{max} y esfuerzo cortante viscoso τ .

$$V_m = \frac{1}{A} \int_0^h v_x dy = -\frac{1}{12\mu} \frac{\Delta p}{L} h \quad (7.47)$$

$$Q = \int_0^h v_x dy = -\frac{1}{12\mu} \frac{\Delta p}{L} h^3 \quad (7.48)$$

$$V_{max} = -\frac{1}{8\mu} \frac{\Delta p}{L} h^2 \quad (7.49)$$

$$\tau = \mu \frac{dv_x}{dy} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta p}{L} (h - 2y) \quad (7.50)$$

De este modo, se demuestra la solución de la ecuación de Navier-Stokes, para un caso específico de flujo real o viscoso.

7.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 7.5.1. (Nakayama, 1998, p. 92), (Munson et al., 1990, p. 314) Encontrar una ecuación para el caudal en un tubo circular con flujo laminar, a partir de la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes, en función del diámetro D , la viscosidad dinámica μ , la diferencia de presión Δp y la longitud del tubo L . tomar como base el planteamiento gráfico de la **Figura 7-5**.

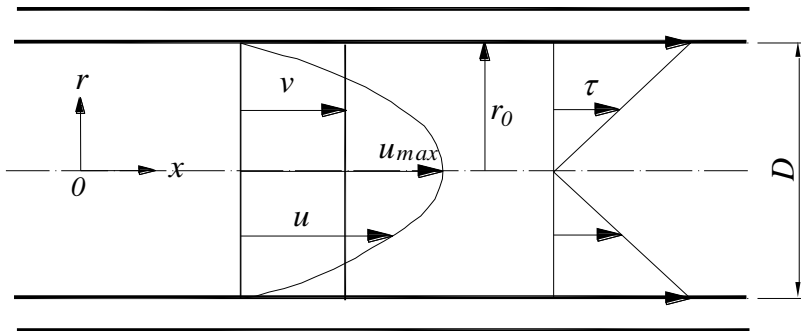


Figura 7-5.- Flujo laminar en un tubo circular. Adaptada de (Nakayama, 1998, p. 92).

Ejercicio 7.5.2. (Bergadà, 2015, p. 360).

Analice el Flujo de Rayleigh, que sucede cuando una placa plana inmersa en un fluido, que partiendo del reposo se acelera hasta alcanzar una velocidad U . Se quiere estudiar el movimiento temporal del fluido en función de la distancia a la placa, como se muestra en la **Figura 7-6**.

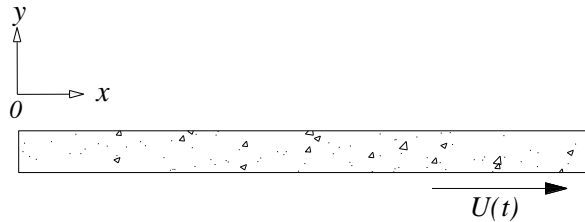


Figura 7-6.- Movimiento de una placa dentro de un fluido. Fuente: Adaptada de ((Bergadà, 2015, p. 361).

Considere las siguientes hipótesis de trabajo:

- Movimiento unidireccional.
- Fluido en reposo.
- La placa está inicialmente a velocidad cero y se acelera hasta alcanzar una velocidad constante U .
- Fluido incompresible.
- Flujo unidireccional $\frac{dv_x}{dx} = 0$
- Régimen transitorio $\frac{dv_x}{dt} \neq 0$
- Gradiente de presión reducida entre extremos de la placa, inexistente $\frac{dp^*}{dx} = 0$. Con $p^* = p + \rho gh$.

Respuesta:

Llamando $v^* = v_x/U$, $v^* = \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) \right] v^*(0)$

Recuérdese que erf es la función estadística de error, η es una variable de semejanza interna o también llamada constante característica del flujo.

Ejercicio 7.5.3. Adaptado de (White, 2004, p. 228).

Tome el campo de velocidades dado como $u = c(x^2 - y^2)$, $v = -2cxy$, $w = 0$ y determine bajo qué condiciones es una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes. Suponga que se dan dichas condiciones y determine la distribución de presiones resultante cuando z se mide «hacia arriba» ($g_x = 0$, $g_y = 0$, $g_z = -g$).

Ejercicio 7.5.4.

Si z es vertical, positiva hacia arriba, demostrar ¿en qué condiciones deben cumplir las constantes k y m para que el campo de velocidades $u = ky$, $v = mx$, $w = 0$ sea una solución exacta de las ecuaciones del movimiento (continuidad y Navier-Stokes) de un fluido incompresible?

Respuesta:

La ecuación de continuidad se cumple para cualquier k y m . El campo de velocidades dado es una solución exacta y es independiente de los valores de k y m .

Los Autores

Hernán Javier Gómez Zambrano

Ingeniero Civil de la Universidad Nacional de Colombia Sede Bogotá (1995); M. Sc. en Recursos Hidráulicos de la Universidad Nacional de Colombia Sede Bogotá (2002); Ph. D. en Ingeniería en el área de Recursos Hidráulicos de la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín (2017). Desde 2006 es Profesor Tiempo Completo del Programa de Ingeniería Civil de la Universidad de Nariño.

Iván Andrés Sánchez Ortiz

Ingeniero Civil de la Universidad de Nariño –UDENAR- (1998), Pasto-Nariño-Colombia; Especialista en Docencia Universitaria (UDENAR, 2000); Especialista en Alta Gerencia (UDENAR, 2002); M. Sc. en Ingeniería Civil, área de concentración en Ingeniería Ambiental y Recursos Hídricos/Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP, 2007), Ilha Solteira/São Paulo-Brasil; Ph. D. en Ingeniería Civil, área de concentración en Saneamiento e Ingeniería Ambiental/Universidade Federal de Viçosa (UFV, 2018). Desde 1998 es profesor en la Universidad de Nariño, actualmente está adscrito al Departamento de Recursos Hidrobiológicos.

Referencias

- Alberro E., G., Almandoz B., X., Jimenez R., R., Mongelos O., B., & Pellejero S., I. (2011). *Colección de problemas de mecánica de fluidos* (Sexta). Unibertsitate Eskola Politeknikoa. <https://docplayer.es/10427996-Coleccion-de-problemas-de-mecanica-de-fluidos-e-hidraulica.html>
- Almandoz, J. B. (2010). *Problemas de hidráulica e hidrología*. Escuela Universitaria Politécnica de Donostia – S. S. <https://es.slideshare.net/JoseManuelPerulero/problemas-hidraulica-hidrologiadonostia>
- Armfield. (s/f). [Comercial]. F1-38 Hele Shaw Apparatus. Recuperado el 17 de noviembre de 2022, de <https://armfield.co.uk/product/f1-38-hele-shaw-apparatus/>
- ASTM. (2013). *ASTM International—Viscosímetros giratorios*, https://www.astm.org/SNEWS/SPANISH/SPND13/e3708_spnd13.html [Accedido 2020-03-09 20:45:51]. https://www.astm.org/SNEWS/SPANISH/SPND13/e3708_spnd13.html
- Azevedo, F. F., De Araujo, R., & Eiji Ito, A. (1998). *Manual de Hidráulica* (Octava). Edgar Blucher Ltda. <https://www.udocz.com/read/manual-de-hidraulica---azevedo-netto>
- Bansal, R. K. (2010). *A Textbook of Fluid Mechanics* (Edition ninth). Firewall Media.
- Bar–Meir, G. (2013). *Basics of Fluid Mechanics* (Last modified: Version 0.3.4.0 March 17, 2013). www.potto.org/downloads.php
- Beltrán, R. (1990). *Introducción a la Mecánica de Fluidos*. McGraw-Hill/Ediciones Universidad de los Andes.
- Bergadà, G. J. m: (2015). *Mecánica de fluidos: Breve introducción teórica con problemas resueltos* (Segunda). Universitat Politècnica de Catalunya. Iniciativa Digital Politècnica. <https://upcommons.upc.edu/handle/2099.3/36885>
- Cano G., R. (2002). *Hidráulica de canales*. Libro impreso. Todográficas LTDA.
- Çengel, Y. A., & Cimbala, J. (2006). *Mecánica de fluidos: Fundamentos y aplicaciones* (2a. ed.). (1era Edición). McGraw-Hill Interamericana.
- Chereque M., W. (1987). *Mecánica de fluidos I. Curso semestral para estudiantes de Ingeniería Civil*. Pontificia Universidad Católica del

- Perú; pdf.
https://www.academia.edu/13708221/Mecanica_de_fluidos_1_Wendor_Chereque_Moran
- CMI. (2020). *Millennium Problems | Clay Mathematics Institute*. [2020-03-09 19:15:39]. <https://www.claymath.org/millennium-problems>
- Darby, R., & Chhabra, R. P. (2001). *Chemical Engineering Fluid Mechanics*. Marcel Dekker AG.
- Dayli, J. W., & Harleman, D. (1975). *Dinámica de los fluidos: Con aplicaciones en la ingeniería*. Trillas.
- Decreto 3464. (1980). *Por el cual se adopta el Sistema Internacional de Unidades, SI. República de Colombia*.
- Evett, J. B., & Liu, C. (1989). *2,500 Solved Problems In Fluid Mechanics and Hydraulics* (Edición: 1). McGraw-Hill.
- Fernández, L. (2001). Problemario para Mecánica de Fluidos [Blog]. *Problemario para Mecánica de Fluidos (Lionel Fernández) | Apuntes Usach*. <http://apuntesusach.blogspot.com/2017/11/problemario-para-mecanica-de-fluidos.html>
- Franzini, J. B., & Finnemore, E. J. (1999). *Mecánica de fluidos: Con aplicaciones en ingeniería*. McGraw-Hill/Interamericana.
- Gálviz, J. (2011). Tema 3: Cinemática de los fluidos. En *Mecánica de los fluidos (petróleo). Mecánica de los fluidos y máquinas hidráulicas (industrial)*. Universidad Nacional de Cuyo, Facultad de Ingeniería. <https://ingenieria.uncuyo.edu.ar/catedras/mecanica-de-los-fluidos-tema-31.pdf>.
- García, J. L. G. (1987). *Sistemas de unidades físicas*. Reverte S.A. Universidad de Murcia. <https://digitum.um.es/jspui/bitstream/10201/4713/1/Sistemas%20de%20Unidades%20F%C3%ADsicas.pdf>.
- García, P. M. A. (2011). *Turbomáquinas–Turbinas Hidráulicas*. <https://es.scribd.com/doc/317069719/If-Garcia-Perez-Fiee>. Accedido [2020-04-22]. Universidad Nacional del Callao
- Gastón, A. (1988). *Mecánica de fluidos avanzada*. Facultad de Ingeniería Publicaciones. Universidad Nacional de Colombia.
- Gerhart, P. M., Gross, R., & Hochstein, J. (1995). *Fundamentos de mecánica de fluidos*. Addison-Wesley Iberoamericana.
- Giles, R. V. (s/f). *Mecánica de los fluidos e hidráulica. Teoría y 75 problemas resueltos*. McGraw-Hill.

- https://www.academia.edu/37922176/Mecanica_de_Fluidos_e_Hidraulica_Teoria_y_75_Problemas_Resueltos_1_ED_Ranald_V_Giles
- Giles, R. V., Evett, J. B., & Liu, C. (1994). *Mecánica de los fluidos e hidráulica. 430 problemas resueltos, perfectamente desarrollados*. McGraw-Hill.
- Gómez-Zambrano, H. J. (2017). *Investigación experimental y numérica del proceso de separación fluido-sólidos usando conductos curvos (Experimental and numerical research of the fluid-solids separation in curved open channels)* [Ph.D Thesis, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, Colombia.]. <http://bdigital.unal.edu.co/57840/>
- Graf, W. H. (1984). *Hydraulics of sediment transport*. Water Resources Publication. http://books.google.com.co/books?hl=es&lr=&id=222b6L4WR-0C&oi=fnd&pg=PA1&dq=hydraulics+of+sediment+transport+graf&ots=esUlnSfIOI&sig=v6bmdBras58HXdutr_n_pgnOXIdg
- Graño, J. M. B. (2006). *Mecánica de fluidos. Problemas resueltos*. Universitat Politècnica de Catalunya. Iniciativa Digital Politècnica.
- Industria Química. (2015, enero 28). *Viscosímetro de bola—Industria Química*. [Htps://www.industriaquimica.es/productos/20150128/viscosimetro-bola#.Xmbx-ahKjIU](https://www.industriaquimica.es/productos/20150128/viscosimetro-bola#.Xmbx-ahKjIU). [Accedido 2020-03-09 20:55:30]. <https://www.industriaquimica.es/productos/20150128/viscosimetro-bola#.Xmbx-ahKjIU>
- Jiménez J., S. I. (2015a). *Enfoque Euleriano del movimiento de los fluidos*. [Htps://www.hidraulicafacil.com/2015/09/Eulerianohidraulica.html](https://www.hidraulicafacil.com/2015/09/Eulerianohidraulica.html) [Accedido: 2020-03-29 16:12:23]. <https://www.hidraulicafacil.com/2015/09/Eulerianohidraulica.html>
- Jiménez J., S. I. (2015b). *Enfoque Lagrangiano del movimiento de los fluidos*. [Htps://www.hidraulicafacil.com/2015/09/Enfoqueshidraulica.html](https://www.hidraulicafacil.com/2015/09/Enfoqueshidraulica.html) [Accedido: 2020-03-29 16:12:23]. <https://www.hidraulicafacil.com/2015/09/Enfoqueshidraulica.html>
- Kleinstreuer, C. (2003). *Two-Phase Flow: Theory and applications*. Taylor & Francis.
- Kundu, P. K. (1990). *Fluid Mechanics*. Academic Press Inc. https://www.amazon.com/Fluid-Mechanics-Pijush-Kundu-1990-09-11/dp/B01K3M0QAI#reader_B01K3M0QAI

- Loayza R, C. A. (2005). *Mecánica de Fluidos I*. <https://pdfslide.net/documents/word-completo-mecanica-de-fluidos-i.html>. [Accedido 2020-03-29 17:53:28] [Pdf]. pdfslide.net. <https://pdfslide.net/documents/word-completo-mecanica-de-fluidos-i.html>
- Mataix, C. (1982). *Mecánica de fluidos y máquinas hidráulicas*. Harla.
- Mataix, C. (1990). "Turbomáquinas hidráulicas," Madrid: ICAI.
- Merritt, F. S. (1999). *Manual del ingeniero civil* (Quinta Edición). McGraw-Hill.
- Mott, R. L., & Untener, J. A. (2015). *Mecánica de fluidos* (Séptima edición). Pearson Educación.
- Munson, B. R., Young, D. F., & Okiishi, T. H. (1990). *Fundamentals of Fluid Mechanics* (Sixth Edition). John Wiley & Sons, Inc.
- Nakayama, Y. (1998). *Introduction to Fluid Mechanics* (Primera). Butterworth-Heinemann.
- Niño, J. R., & Duarte, C. A. (2006). *Introducción a la Mecánica de Fluidos*. Facultad de Ingeniería Publicaciones. Universidad Nacional de Colombia Bogotá. <https://www.udocz.com/read/manual-de-hidraulica---azevedo-netto>
- Niño, J. R., & Duarte, C. A. (2007). *Introducción a la Mecánica de Fluidos*. Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá, Facultad de Ingeniería.
- Oilfield Glossary. (2020). *Viscosímetro de tubo capilar—Schlumberger Oilfield Glossary*. https://www.glossary.oilfield.slb.com/es/Terms/c/capillary_tube_viscosimeter.aspx. [Accedido 2020-03-09 21:07:09]. https://www.glossary.oilfield.slb.com/es/Terms/c/capillary_tube_viscosimeter.aspx
- Potter, M. C., Wiggert, D. C., & Ramadan, B. (2015). *Mecánica de fluidos*. Cengage Learning Editores, S.A. de C.V. <https://www.freelibros.me/ingenieria/mecanica-de-fluidos-4ta-edicion-merle-c-potter>
- Rogan, J. C., & Muñoz G, V. (2010). *Apuntes de un curso de física matemática* (Tercera edición, revisión 080424-10). Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile. https://www.academia.edu/35724831/Apuntes_de_un_curso_de_fisica_matematica

- Rouse, H. (1951). *Hidráulica. Mecánica elemental de fluidos*. Editorial Dossat. <https://www.iberlibro.com/Hidr%C3%A1ulica-Mec%C3%A1nica-elemental-fluidos-Hunter-Rouse/30000374753/bd>
- Salazar, E. (2006). Capacidad de carga de cilindros oleo hidráulicos. Anezo B: Tensiones en un cilindro debidas a la presión hidráulica" [<https://www.tdx.cat/handle/10803/6739#page=1>] [Ph.D. Thesis, Universitat Politècnica de Catalunya]. En *TDX (Tesis Doctorals en Xarxa)*. <https://www.tdx.cat/handle/10803/6739#page=1>
- Shames, I. (1995). *Mecánica de Fluidos* (Ed. Tercera). McGraw-Hill. <https://avdiaz.files.wordpress.com/2008/10/mecanica-de-fluidos-shames.pdf>
- Simon, A. L. (1983). *Hidráulica Básica*. Limusa.
- Smits, A. J. (2019). *A Physical Introduction to Fluid Mechanics* (Edición: 2). Wiley.
- Sotelo, G. Á. (2005). *Hidráulica general: Fundamentos*. Limusa.
- Spiegel, M. R. (2011). *Análisis vectorial y una introducción al análisis tensorial* (2da Edición). McGraw-Hill Interamericana. https://www.academia.edu/8128847/Analisis_Vectorial_2da_Edicion_Schaum_www_Free_Libros_com?auto=download
- Spurk, J., & Aksel, N. (2008). *Fluid Mechanics* (Second Edition). Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-30259-7>
- Streeter, V. L. (2000). *Mecánica de fluidos* (Novena Edición). McGraw-Hill.
- Streeter, V. L., Wylie, E. B., & Bedford, K. W. (2000). *Mecánica de Fluidos* (Ed. Novena). McGraw-Hill.
- Subramaniam, S. (2013). Lagrangian–Eulerian methods for multiphase flows. *Progress in Energy and Combustion Science*, 39(2–3), 215–245. <https://doi.org/10.1016/j.pecs.2012.10.003>
- Tamburrino T., A. (2020). *CI31A – mecánica de fluidos. Flujo potencial bidimensional*. Universidad de Chile CI31A – Mecánica de Fluidos Departamento de Ingeniería Civil.
- Tecquipment*. (s/f). [Comercial]. hele-shaw-apparatus. Recuperado el 17 de noviembre de 2022, de <https://www.tecquipment.com/es/hele-shaw-apparatus>
- Timmons, M. B., & Ebeling, J. M. (2010). *Recirculating Aquaculture Systems* (Edición: 2). Cayuga Aqua Ventures Llc, NRAC Publication No. 401-2010.

- UNNE. (2015). *Cálculo diferencial e integral II*. Universidad Nacional del Nordeste-Corrientes-Argentina.
exa.unne.edu.ar/investigacion/calculo2/public_html/anamat1_doc/tema8.doc
- Vegendla, S. N. P., Heynderickx, G. J., & Marin, G. B. (2011). Comparison of Eulerian–Lagrangian and Eulerian–Eulerian method for dilute gas–solid flow with side inlet. *Computers & Chemical Engineering*, 35(7), 1192–1199. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2010.09.001>
- Vennard, J. K., & Street, R. L. (1979). *Elementos de mecánica de fluidos*: Compañía Editorial Continental S.A.
- White, F. M. (2004). *Fluid Mechanics* (Fourth Edition). McGraw-Hill.
- Xavier, A. G., & Miquel, F. B. (2012). *Mecánica del medio continuo en la ingeniería: Teoría y problemas resueltos*. Universitat Politècnica de Catalunya. Iniciativa Digital Politècnica.
- Yang, C. T. (1995). *Sediment Transport: Theory & Practice*. McGraw-Hill College.
- Zill, D., & Wright, W. (2011). *Matemáticas 3. Cálculo de varias variables*. McGraw-Hill.
https://www.academia.edu/34445902/Calculo_Vectorial-Dennis_G._Zill.pdf

Lista de Figuras

	Pág.
Figura 1-1.- Representación gráfica del esfuerzo cortante.....	21
Figura 1-2. Esquema de clasificación de los sistemas de unidades.....	22
Figura 2-1.- Peso específico del agua pura en función de la temperatura y la presión.....	35
Figura 2-2.- Fuerzas actuando sobre la superficie de un fluido.	42
Figura 2-3.- Diagrama del ascenso capilar. Adaptada de: (Franzini y Finnemore, 1999, p. 24).	43
Figura 2-4.- Ascenso o depresión capilar en tubos circulares de vidrio limpios.....	46
Figura 2-5.- Ascenso o depresión capilar en tubo de vidrio.....	48
Figura 2-6.- Gradiente de velocidad en un fluido en movimiento.	50
Figura 2-7.- Cuadro sinóptico de clasificación de fluidos.....	58
Figura 2-8.- Clasificación de flujos en fluidos newtonianos y no newtonianos. Fuente: Adaptada de (Vennard y Street, 1979, p. 36)	61
Figura 2-9.- Imagen del viscosímetro giratorio. Fuente: (Mott y Untener, 2015, p. 27).....	63
Figura 2-10.- Imagen del viscosímetro de esfera o de bola “Höppler”. Fuente: Industria Química (2020).	64
Figura 2-11.- Imagen del viscosímetro de tubo capilar. Fuente: Adaptado de (Mott y Untener, 2015, p. 28).....	64
Figura 2-12.- Esquema distribución de velocidades correspondiente al Ejemplo 2.3.	65
Figura 2-13.- Esquema del Ejemplo 2.5.....	66
Figura 2-14.- Geometría de la parábola.....	67
Figura 2-15.- Geometría del viscosímetro de cilindros.	69
Figura 2-16.- Geometría del cono. Fuente: Adaptado de (Shames, 1995, pp.30).....	75
Figura 2-17.- Geometría del Ejercicio 2.13.2.....	75
Figura 2-18.- Geometría del bloque.	76
Figura 3-1.- Fuerzas que actúan sobre un elemento infinitesimal que está en reposo en marco de referencia xyz. Fuente: Adaptado de (Potter et al., 2015).	77
Figura 3-2.- Esquema del Ejemplo 3.1.....	82
Figura 3-3.- Esquema del Ejemplo 3.3. (a) estado inicial, (b) estado final.	86

Figura 3-4.- Distribuciones de temperatura y presión de la Atmósfera Estándar.	88
Figura 3-5.- Tipos de presiones. Fuente (Franzini y Finnemore, 1999, p. 34).	93
Figura 3-6.- Geometría de un Piezómetro.	94
Figura 3-7.- Fotografía y diagrama de un manómetro de tubo en U sencillo, donde: (γ_w) indica el peso específico del agua, (γ_{Hg}) indica el peso específico del mercurio, (h) es la longitud vertical de columna de agua y (Δh) es el delta de altura desplazada.	96
Figura 3-8.- Manómetro diferencial cerrado, donde: (γ_1) y (γ_2) indican el peso específico del fluido 1 y 2; (γ_m) indica el peso específico del fluido manométrico; h_1 y h_2 longitud vertical de columna de agua, y (Δh) es la altura desplazada del fluido manométrico.	98
Figura 3-9.- Manómetro diferencial conectado a un tubo.	100
Figura 3-10.- (a). Fotografía de un Manómetro tipo Bourdon, (b). Fotografía de un Vacuómetro. Fuente: Los autores.	101
Figura 3-11.- Esquema para deducir la fuerza resultante y centro de presión en superficies planas sumergidas.	102
Figura 3-12.- Esquema para deducir la fuerza resultante y centro de presión en superficies planas sumergidas.	107
Figura 3-13.- Presiones sobre un superficie curva: (a) Variación de la presión en su configuración general. (b) Diagrama de cuerpo libre de la superficie curva.	108
Figura 3-14.- Compuerta de abanico. (S.A.=superficie del agua).	111
Figura 3-15.- Esquema del tanque y manómetro (Munson et al., 1990, p.52).	112
Figura 3-16.- Esquema del depósito cilíndrico y tubería (Giles et al., 1994, p. 34).	112
Figura 3-17.- Esquema del manómetro diferencial compuesto. Fuente: (Mott y Untener, 2015, p. 60).	113
Figura 3-18.- Esquema de la superficie plana sumergida. Fuente: (Giles et al., 1994, p. 58).	114
Figura 3-19.- Esquema de la compuerta circular. Fuente: (Giles et al., 1994, pp. 60).	114
Figura 3-20.- Esquema de cilindro dique. Fuente: (Giles et al., 1994, pp. 60).	115
Figura 3-21.- Esquema del manómetro diferencial.	116
Figura 3-22.- Esquema del vertedero cilíndrico. Fuente: (Shames, 1995, pp. 89).	116

Figura 3-23.- Esquema del manómetro en U compuesto. Fuente: (Mataix, 1982, pp. 80).....	117
Figura 3-24.- Fuerza de flotación sobre cuerpos flotantes y sumergidos..	118
Figura 3-25.- Componentes de fuerza vertical sobre el elemento del cuerpo.	119
Figura 3-26.- Equilibrio de cuerpo flotante.....	122
Figura 3-27.- Equilibrio Rotacional, cuerpo sumergido. (a) Cuerpo inestable. (b) Cuerpo estable. Fuente: adaptada de (Potter et al., 2015). ...	124
Figura 3-28.- Sección transversal del cuerpo flotante.	125
Figura 3-29.- Diagrama libre de fuerzas actuando sobre el cuerpo.....	127
Figura 3-30.- Sección transversal de la pieza de madera flotante	128
Figura 3-31.- Esquema del problema de la pieza sumergida.....	130
Figura 3-32.- Esquema del Ejemplo 3.15. (a) Dimensiones en planta de la embarcación. (b) Dimensiones en perfil vertical en equilibrio. (c) Dimensiones de la embarcación en perfil con un ángulo de escora de 12° .	132
Figura 3-33.- Esquema balsa flotante. (Mott y Untener, 2015, p. 112)....	135
Figura 3-34.- Esquema de la compuerta giratoria. Fuente: (Munson et al., 1990, p. 90).....	135
Figura 3-35.- Esquema del bloque de madera flotante. Fuente: (Shames, 1995, p. 105).....	136
Figura 3-36.- Esquema de traslación de una masa líquida.	137
Figura 3-37.- Esquema de la acción de fuerzas sobre un elemento diferencial.	138
Figura 3-38.- Esquema del depósito rectangular acelerado.....	141
Figura 3-39.- Esquema de cambio de coordenada.	144
Figura 3-40.- Esquema del depósito en caída libre.	145
Figura 3-41.- Esquema de rotación de un fluido. Fuente: Adaptada de Mayori (2015).	146
Figura 3-42.- Geometría del depósito. (a) Esquema de superficie de revolución. (b) paraboloides de revolución.....	149
Figura 3-43.- Esquema del depósito de forma cilíndrica.	150
Figura 3-44.- Esquema del tanque cilíndrico.	151
Figura 3-45.- Tensiones radiales y anulares en un anillo delgado. (a) acción de la presión. (b) cuerpo libre. (c) dirección de la rotura. Fuente: Adaptada de (Salazar, 2006, p. 181).....	153
Figura 3-46.- Tensión longitudinal en un cilindro. Fuente: Adaptada de (Salazar, 2006, p.182).....	155
Figura 3-47.- Esquema del cilindro cinchado con platinas metálicas.	156

Figura 3-48.- Esquema del cilindro lleno de agua.....	157
Figura 3-49.- Esquema del carrotanque.....	158
Figura 3-50.- Esquema del depósito cilíndrico sometido a velocidad angular.	159
Figura 4-1.- Magnitud, dirección y sentido de un vector.	162
Figura 4-2.- Aceleración convectiva entre los puntos P_1 y P_2 para el mismo instante.....	171
Figura 4-3.- -Aceleración local en el punto P.....	171
Figura 4-4.- -Localización del vector aceleración en el sistema rectangular de coordenadas.	173
Figura 4-5.- Representación gráfica de los métodos de descripción de un flujo. a) método lagrangiano. B) euleriano.	176
Figura 4-6.- -Movimiento de una partícula según el método de Lagrange.	177
Figura 4-7.- -Movimiento de una partícula según el método de Euler.	179
Figura 4-8.- -Variación de la velocidad en los marcos: (1) euleriano y (2) lagrangiano.	182
Figura 4-9.- -Clasificación de flujos: (a) flujo permanente; (b) flujo no permanente.....	186
Figura 4-10.- -Clasificación de flujos: (a) Flujo uniforme. (b) Flujo no uniforme.	187
Figura 4-11.- -Flujo tridimensional de un río en una curvatura. Fuente: Adaptado de (Gómez-Zambrano, 2017).....	188
Figura 4-12.- -Flujo bidimensional bajo una presa.	189
Figura 4-13.- -Flujo unidimensional en una tubería.	190
Figura 4-14.- -Flujo laminar en una tubería.....	191
Figura 4-15.- -Flujo turbulento en una tubería.....	191
Figura 4-16.- -Clasificación de flujos: (a) rotacional. (b) irrotacional.....	193
Figura 4-17.- -Esquema para el análisis del flujo volumétrico. Fuente: Adaptada de (Gálviz, 2011, p. 6 de 24).	198
Figura 4-18.- -Esquema cuando el vector velocidad es paralelo al vector área.	199
Figura 4-19.- -Línea de corriente en el instante t_o . ($tg =$ tangente). Fuente: Adaptada de (Loayza, 2005, p. 80).....	200
Figura 4-20.- -Línea de corriente en el instante t . Fuente: Adaptada de (Loayza, 2005, p. 80).....	201
Figura 4-21.- -Trayectoria de la partícula a . Fuente: Adaptada de (Loayza, 2005, p. 82).....	203

Figura 4-22.- Trayectoria de la partícula a . Fuente: Adaptada de (Loayza, 2005, p. 82).....	203
Figura 4-23.- Fotografías de líneas de corriente y trayectorias en flujo permanente obtenidas experimentalmente. Fuente: (Armfield, s/f).	206
Figura 4-24.- (a) superficie de flujo. (b) tubo de corriente. (c) vena líquida.	207
Figura 4-25.- Distribución de velocidad del flujo en el canal.	209
Figura 4-26.- Líneas de corriente de la función $\psi = xy$. Fuente: elaboración propia.....	212
Figura 4-27.- Familia de líneas de corriente.....	214
Figura 4-28.- Esquema del Ejercicio 4.12. Adaptada de (Vennard y Street, 1979, p. 150).....	215
Figura 4-29.- Esquema del Ejercicio 4.14. Fuente: Adaptada de (Fernández, 2001, p. 136).....	215
Figura 4-30.- Flujo a través de una muestra permeable.	218
Figura 4-31.- Línea de corriente y potenciales ortogonales entre sí.....	220
Figura 4-32.- Línea de corriente y potenciales bajo una presa (realizada con el software SLIDE mediante solución numérica con elementos finitos). Fuente: (Bernal, 2017).....	221
Figura 4-33.- Geometría de la expansión. (a) Condiciones de contorno. Fuente: (White, 2004, p. 544). (b) Solución de las líneas de corriente usando Excel. Fuente: elaboración propia.	227
Figura 4-34.- Línea de corriente para función $\psi = 5$. Fuente: elaboración propia.....	230
Figura 4-35.- Red de flujo para flujo uniforme y paralelo. Fuente: elaboración propia.	232
Figura 4-36.- Esquema de la geometría del flujo. Fuente: adaptado de (Munson et al., 1990, p. 285).	233
Figura 4-37.- Esquema de la geometría del río.	234
Figura 5-1.- Ejemplo gráfico de un volumen de control. (a) Sistema y volumen de control. (b) Volumen de control.	237
Figura 5-2.- Sistema con volumen de control. (a) Diagrama del sistema de volumen de control. (b) Variación del volumen de control con el tiempo. Fuente: Adaptado de (Munson et al., 1990, p. 170).	238
Figura 5-3.- Representación gráfica de la integral cerrada de superficie. Fuente: elaboración propia.	242
Figura 5-4.- Sistema con volumen de control de entrada y salida unidimensional. Fuente: adaptado de (Shames, 1995, p. 208).	245

Figura 5-5.- Esquema del volumen infinitesimal para la derivación de la ecuación de continuidad. Fuente: Adaptada de (Sotelo, 2005, p. 115).....	246
Figura 5-6.- Esquema de una vena líquida. Adaptada de (Sotelo, 2005, p. 118).....	249
Figura 5-7.- Esquema del Ejemplo 5.1. Fuente: Adaptada de Sotelo (2005, p. 169).....	252
Figura 5-8.- Esquema del diferencial de área circular. Fuente: elaboración propia.....	253
Figura 5-9.- Esquema del Ejemplo 5.2. Fuente: Adaptada de (Gastón, 1988, p. 71).....	255
Figura 5-10.- Esquema del Ejercicio 5.8.2. Fuente: Adaptada de (Alberro et al., 2011, p. 70).....	257
Figura 5-11.- Esquema del Ejercicio 5.4. Fuente: Adaptada de (Alberro et al., 2011, p. 84).....	258
Figura 5-12.- Esquema del volumen de control para la derivación de la ecuación de energía. Fuente: Adaptada de (Nakayama et al., 1998, p. 58)	260
Figura 5-13.- Representación gráfica de la ecuación de Bernoulli sin pérdidas.....	266
Figura 5-14.- Representación gráfica de la energía potencial por unidad de peso.....	267
Figura 5-15.- Representación gráfica de la energía de presión por unidad de peso.....	268
Figura 5-16.- Representación gráfica de la energía cinética por unidad de peso.....	268
Figura 5-17.- Concepto gráfico de línea de energía y línea piezométrica con pérdidas.....	272
Figura 5-18.- Concepto gráfico de línea de energía y línea piezométrica con pérdidas de fricción y locales.	273
Figura 5-19.- Esquema de la instalación del sistema de tuberías.	275
Figura 5-20.- Línea de energía y línea piezométrica para flujo ideal.	280
Figura 5-21.- Esquema del flujo de aire alrededor de un ciclista.	281
Figura 5-22.- Esquema de la tubería con reducción.	281
Figura 5-23.- Esquema del tanque y tubería.....	282
Figura 5-24.- Esquema del tubo y su respectiva reducción.	283
Figura 5-25.- Esquema de una estación de bombeo (<i>e</i> es entrada, <i>s</i> es salida, <i>H</i> es cabeza estática total, <i>H_B</i> es cabeza dinámica total). Fuente: Adaptada de (Loayza, 2005, p. 147).....	284
Figura 5-26.- Esquema de un sistema para una hidroeléctrica. Fuente: Adaptada de (Loayza, 2005, p. 149).....	285

Figura 5-27.- Esquema de la instalación del Ejemplo 5.4.	286
Figura 5-28.- Variación de potencia generada contra caudal. Fuente: elaboración propia.	292
Figura 5-29.- Esquema de la estación de bombeo. Fuente: adaptada de (Loayza, 2005, p. 151).	293
Figura 5-30.- Esquema de la bomba de prueba.	294
Figura 5-31.- Esquema de la instalación de la tubería y la turbina.	295
Figura 5-32.- Esquema de la instalación del tanque y la turbina.	295
Figura 5-33.- Esquema de la instalación de la tubería, el manómetro y la turbina.	296
Figura 5-34.- Esquema de un orificio lateral sobre un depósito.	297
Figura 5-35.- Orificios dentro de tuberías. (a) Placa industrial. (b) esquema interno del orificio.	300
Figura 5-36.- Orificio al final de la tubería con descarga libre.	304
Figura 5-37.- (a) Descarga con altura variable en un depósito. (b) Fotografía de un orificio descargando agua de un tanque, (Montaje Laboratorio de Hidráulica, Universidad de Nariño).	308
Figura 5-38.- Esquema de un tubo Pitot colocado en un flujo a superficie libre.	311
Figura 5-39.- Tubo Pitot colocado en un flujo a presión.	312
Figura 5-40.- Tubo Venturi colocado en un flujo a presión. Fuente: Adaptada de (Shames, 1995, p. 787).	314
Figura 5-41.- Geometría general de un sifón.	317
Figura 5-42.- Geometría del depósito con orificio.	321
Figura 5-43.- Esquema de la instalación.	321
Figura 5-44.- Detalle de la instalación.	322
Figura 5-45.- Geometría del sifón.	323
Figura 5-46.- Flujo en un canal abierto.	324
Figura 5-47.- Geometría de una compuerta instalada en un canal.	326
Figura 5-48.- Esquema del flujo de un canal.	329
Figura 5-49.- Esquema del Ejercicio 5.23.3.	333
Figura 5-50.- Esquema del Ejercicio 5.23.4.	333
Figura 5-51.- Esquema de la compuerta.	334
Figura 5-52.- Esquema del vertedero triangular.	334
Figura 5-53.- Flujo a través de un tubo corto de sección transversal decreciente.	337
Figura 5-54.- Flujo a través de un codo a 45° del Ejemplo 5.9.	342
Figura 5-55.- Diagrama de fuerzas del VC.	342

Figura 5-56.- Flujo a través de una compuerta vertical.	345
Figura 5-57.- Diagrama de fuerzas que actúan sobre el volumen de control.	346
Figura 5-58.- Diagrama del codo y fuerzas F_x y F_y	349
Figura 5-59.- Diagrama del codo a 180°	350
Figura 5-60.- Diagrama de la bifurcación.	350
Figura 5-61.- Diagrama de la compuerta.	351
Figura 5-62.- Diagrama del codo a 90° . Fuente: Adaptada de (Evet y Liu, 1989, p. 677).	352
Figura 5-63.- Componentes de una bomba hidráulica centrífuga. (a) Fotografía de bomba centrífuga autocebante (Laboratorio de Hidráulica de la Universidad de Nariño). (b) Diagrama del rodete, álabes y carcasa. (c) Fotografía de un rodete abierto (Laboratorio de Hidráulica de la Universidad de Nariño).	353
Figura 5-64.- Chorro bidimensional chocando sobre la placa.	354
Figura 5-65.- Corte transversal de un rodete de una bomba centrífuga.	358
Figura 5-66.- Esquema de la dirección de los móviles.	359
Figura 5-67.- Fotografía de una turbina Pelton. Fuente: (Laboratorio de Hidráulica Universidad de Nariño).	359
Figura 5-68.- Chorro bidimensional chocando sobre la placa móvil ($\rightarrow x(+)$). Fuente: Adaptada de (Gastón, 1988, p. 94).	360
Figura 5-69.- Diagrama de velocidades y fuerzas.	360
Figura 5-70.- Chorro bidimensional chocando sobre la placa móvil.	363
Figura 5-71.- Chorro bidimensional chocando sobre un álabe móvil deflectado 150° Fuente: Adaptado de (Giles et al., 1994, p. 328).	368
Figura 5-72.- Variación de la fuerza F_x y la potencia generada P en función del ángulo de deflexión. Fuente: elaboración propia.	370
Figura 5-73 .- Esquema de la boquilla. (a) Geometría de la reducción. (b) Diagrama de fuerzas sobre el VC.	371
Figura 5-74.- Apoyo en el cambio de dirección horizontal de una tubería.	373
Figura 5-75.- Geometría del cambio de dirección.	374
Figura 5-76 .- Geometría de la expansión.	377
Figura 5-77 .- Geometría de la placa.	377
Figura 5-78 .- Esquema de la instalación de una turbina. Fuente: Adaptada de (Smits, 2019, p. 246).	378
Figura 5-79.- Geometría de la curva y boquilla del Ejercicio 18.4. Fuente: Adaptada de (Sotelo, 2005, p. 176).	379

Figura 5-80.- Esquema del tanque móvil.	379
Figura 5-81.- Convención para el momento de un vector. \otimes : Vector entrando. \odot : Vector saliendo del papel.	380
Figura 5-82.- Vectores del momento angular. Fuente: Adaptado de (Gastón, 1988, p. 102).	381
Figura 5-83.- Diagrama vectorial. Fuente: Adaptada de White (2004, p. 160).	383
Figura 5-84.- Notación y volumen de control para una turbo máquina (Dayli y Harleman, 1975, p. 107).	385
Figura 5-85.- Proyección de la velocidad absoluta V_2	386
Figura 5-86.- Esquema de la turbina.	388
Figura 5-87 a) Fotografía de un rodete de bomba centrífuga (Laboratorio de Hidráulica de la Universidad de Nariño. b) Esquema del rodete de una bomba. Fuente: Adaptada de (Nakayama et al., 1998, p. 78).	390
Figura 5-88.- Diagrama vectorial en el punto 1.	391
Figura 5-89.- Diagrama vectorial en el punto 2.	392
Figura 5-90.- Esquema de la instalación del Ejemplo 5.21. Fuente: Adaptada de (White, 2004, p. 159).	395
Figura 5-91.- Diagrama de cuerpo libre del volumen de control. Fuente: Adaptada de (White, 2004, p. 159).	396
Figura 5-92.- Diagrama vectorial.	399
Figura 5-93.- Geometría del aspensor de cuatro brazos.	400
Figura 5-94 .- Suma vectorial en la entrada y salida del rotor.	401
Figura 5-95 a) Plano de vectores b) esquema de bomba centrífuga. Fuente: Adaptado de (Chereque, 1987, p. 101), (Streeter et al., 2000, p. 156).	405
Figura 5-96 .- (a) Esquema general del ventilador. (b) Rotor del ventilador. (c) diagrama vectorial. Fuente: Adaptada de (Munson et al., 1990, p. 221)	408
Figura 5-97.- Geometría general de un aspensor. Fuente: Adaptado de (Munson et al., 1990, p. 219).	410
Figura 5-98.- Geometría general de un aspensor.	411
Figura 5-99.- Geometría general de un aspensor.	415
Figura 5-100.- Rotor de la bomba centrífuga y suma vectorial.	418
Figura 5-101.- Esquema del aspensor.	419
Figura 5-102.- Esquema del aspensor.	419
Figura 5-103.- Esquema del aspensor.	420
Figura 6-1.- Geometría de la presa. (a) prototipo. (b) modelo a escala.	422
Figura 6-2.- Flujo en un tubo horizontal	428

Figura 6-3.- Geometría de la lancha y el dispositivo de medición.	442
Figura 6-4.- Geometría del vertedero.	443
Figura 7-1.- Esquema del volumen infinitesimal para la derivación de la ecuación de continuidad. Fuente: Adaptada de (Sotelo, 2005, p. 115).....	448
Figura 7-2.- Balance de fuerzas sobre un elemento de fluido: (a) velocidad; (b) presión; (c) deformación angular. Fuente: Adaptada de (Nakayama et al., 1998, p. 84).....	451
Figura 7-3.- Flujo laminar entre placas planas paralelas. Fuente: Adaptada de (Nakayama et al., 1998, p. 89).....	456
Figura 7-4.- Fuerzas que actúan sobre un pequeño volumen entre placas paralelas. Fuente: Adaptada de Nakayama et al. (1998, p. 89).....	457
Figura 7-5.- Flujo laminar en un tubo circular. Adaptada de (Nakayama, 1998, p. 92).....	460
Figura 7-6.- Movimiento de una placa dentro de un fluido. Fuente: Adaptada de ((Bergadà, 2015, p. 361).....	461

Lista de tablas

	Pág.
Tabla 1-1.- Unidades de las dimensiones básicas.....	24
Tabla 1-2.- Unidades derivadas.....	25
Tabla 1-3.- Prefijos del Sistema Internacional	27
Tabla 1-4.- Datos y cálculos del problema.....	28
Tabla 2-1.- Densidad del agua a diferentes temperaturas.....	32
Tabla 2-2.- Valores de referencia de densidad para agua a 4°C.....	32
Tabla 2-3.- Densidad del aire a diferentes temperaturas.	33
Tabla 2-4.- Valores de referencia del peso específico para agua a 4°C	34
Tabla 2-5.- Peso específico del aire a diferentes temperaturas.....	34
Tabla 2-6.- Peso específico del agua a diferentes temperaturas.	34
Tabla 2-7.- Propiedades de líquidos comunes.	36
Tabla 2-8.- Presión de vapor del agua a diferentes temperaturas.	38
Tabla 2-9.- Módulo de elasticidad volumétrico del agua a diferentes temperaturas.	40
Tabla 2-10.- Tensión superficial del agua a presión atmosférica estándar a nivel del mar.....	46
Tabla 2-11.- Tensión superficial de líquidos comunes a presión atmosférica estándar a nivel del mar y aproximadamente 60 °F a 70 °F (16 °C a 21 °C).	47
Tabla 2-12.- Tensión superficial de contacto entre algunos fluidos.	47
Tabla 2-13.- Unidades de la viscosidad dinámica.	52
Tabla 2-14.- Unidades de la viscosidad cinemática.	53
Tabla 2-15.- Viscosidad cinemática del agua.	55
Tabla 2-16.- Propiedades físicas del aire a presión atmosférica.....	56
Tabla 2-17.- Viscosidad dinámica de líquidos comunes, continuación.....	56
Tabla 2-18.- Densidad y viscosidad cinemática de combustibles a diferentes temperaturas.	57
Tabla 2-19.- Valores de K y n para fluidos pseudoplástico.	60
Tabla 2-20.- Solución del Ejemplo 2.3 con distribución lineal de velocidades.	67
Tabla 2-21.- Solución del Ejemplo 2.3 con distribución parabólica de velocidades.	68
Tabla 3-1.- Áreas, centroides y momentos de inercia de algunas figuras geométricas más conocidas. $\bar{y} = Y_c$, con respecto al eje x'	105

Tabla 3-2.- Áreas, centroides y momentos de inercia de algunas figuras geométricas más conocidas. $\bar{y} = Y_c$, con respecto al eje x'. (continuación) 106

Tabla 4-1.- Clasificación de flujos de interés en la Mecánica de Fluidos .184

Tabla 6-1.- Dimensiones de cantidades físicas comunes..... 424

Tabla 6-2. - Cantidades físicas y dimensiones del problema..... 425

Tabla 6-3.- Cantidades físicas y dimensiones del problema..... 428

Tabla 6-4 Cantidades físicas y dimensiones del problema. 428



Editorial
Universidad de **Nariño**

Año de publicación: 2024
Pasto-Nariño-Colombia

El presente texto surge con la vocación de ser una herramienta con suficientes argumentos teóricos, conceptuales y prácticos para la formación de ingenieros en el área de la Mecánica de Fluidos. Su contenido es el resultado, tanto de muchos años de experiencia de sus autores en el estudio, la docencia y la investigación de los fluidos, como de recopilación de la enseñanza de ingenieros de mayor trayectoria que fueron profesores de los autores durante sus estudios de pregrado y en los diversos niveles de postgrado. Además, se ha respaldado en el conocimiento obtenido de la innumerable bibliografía existente en la actualidad sobre el ámbito de la Mecánica de Fluidos.

El contenido está orientado hacia la formación de estudiantes de pregrado en ingeniería, pero también como libro de consulta para profesionales y como texto didáctico para los docentes. Así, este libro comprende los conceptos básicos de Mecánica de Fluidos, que generalmente se abordan en los contenidos programáticos en los diversos programas de ingeniería a nivel de pregrado.

No obstante, su texto ha sido redactado de tal manera que no solo pueda ser entendido fácilmente por los estudiantes, sino también por otros lectores con poco conocimiento en el tema; con su publicación los autores pretenden ofrecer a través de la Editorial de la Universidad de Nariño un documento de muy buena calidad a un bajo precio, para que pueda ser adquirido por los estudiosos de los fluidos.

Como guía para el ingeniero-docente, el libro se ha dividido en siete capítulos, dentro de los cuales se encontrará un total de veintitrés temáticas, cada una de ellas finalizada con una sección de ejercicios propuestos, equivalente a una clase de aproximadamente dos horas, ello con el fin de proporcionar una herramienta didáctica tanto para estudiantes como para profesores.



**Editorial
Universidad de Nariño**