

SOLUCIONES MULTISOLITONICAS DE LA ECUACIÓN VECTORIAL NLS

ALEJANDRO PÉREZ RIASCOS

Trabajo presentado como requisito previo
para optar el Título de Físico

Director

Dr. Alvaro Rugeles Pérez

Línea de investigación en Ondas Electromagnéticas

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
SAN JUAN DE PASTO
ABRIL 2006

Resumen

Las soluciones multisolitónicas de la ecuación vectorial no lineal de Schrödinger (ecuación vectorial NLS) juegan un papel muy importante en la descripción de fenómenos físicos no lineales.

En este trabajo se obtiene la solución multisolitónica de la ecuación vectorial NLS en forma analítica aplicando el método de dispersión inversa de los esquemas ZS. Este tipo de soluciones describen la propagación e interacción de N solitones.

Abstract

Multi-soliton solutions of the vector nonlinear Schrödinger equation (vector NLS equation) play an important role in the description of nonlinear phenomena.

In this work the multi-soliton solution of the vector NLS equation is derived in analytic form using the inverse scattering method of ZS schemes. Solutions describe N soliton dynamics.

Contenido

Introducción	VII
Objetivos	IX
1. Esquemas ZS	1
1.1. Operadores Integrales	1
1.2. Operadores Diferenciales	2
2. Esquemas ZS para la ecuación vectorial NLS	6
3. Solución multisolitónica de la ecuación vectorial NLS	11
4. Multisolitones brillantes de la ecuación vectorial NLS	17
4.1. Ecuación unidimensional NLS	19
4.1.1. Solución solitónica de la ecuación NLS	20
4.1.2. Solución multisolitónica cuando $ t \rightarrow \infty$	20
4.1.3. Solución con dos Solitones	21
4.1.4. Solución con tres Solitones	29
4.2. Multisolitones brillantes de la ecuación vectorial NLS para medios isótropos	34
4.2.1. Solución Solitónica	35
4.2.2. Solución multisolitónica cuando $ t \rightarrow \infty$	36
4.2.3. Solución con dos solitones de la ecuación acoplada no lineal de Schrödinger de tipo Manakov	36
Conclusiones	41
Recomendaciones	42
Bibliografía	43

Anexos	44
Anexo A	44
Anexo B	47

Lista de tablas

Datos para un caso particular de la solución con dos solitones de la ecuación NLS.	21
Datos para un caso particular de la solución con dos solitones de la ecuación NLS.	21
Datos para un caso particular de la solución con dos solitones de la ecuación NLS.	22
Datos para un caso particular de la solución con tres solitones de la ecuación NLS.	29
Datos para un caso particular de la solución con tres solitones de la ecuación NLS.	29
Datos para un caso particular de la solución con dos solitones de la ecuación vectorial NLS.	37

Lista de Figuras

4.1.	Grafica de $ q $ en función de x, t para dos solitones. En este caso interaccionan un soliton que se propaga en la dirección positiva del eje x con un soliton de igual amplitud y fase pero con velocidad nula.	23
4.2.	Grafica que muestra la interacción ilustrada en la Figura 4.1 desde otro punto de observación.	24
4.3.	Grafica de $ q $ en función de x, t para dos solitones. En este caso interaccionan dos solitones de igual amplitud y fase que se propagan en direcciones contrarias.	25
4.4.	Grafica que muestra la interacción ilustrada en la Figura 4.3 desde otro punto de observación.	26
4.5.	Grafica de $ q $ en función de x, t para dos solitones. En este caso interaccionan dos solitones con diferente amplitud, velocidad y fase que se propagan en la dirección positiva del eje x	27
4.6.	Grafica que muestra la interacción ilustrada en la Figura 4.5 desde otro punto de observación.	28
4.7.	Grafica de $ q $ en función de x, t para tres solitones. En este caso interaccionan tres solitones de igual amplitud y fase. Dos de ellos se propagan con velocidades contrarias y el otro posee velocidad nula.	30
4.8.	Grafica que muestra la interacción ilustrada en la Figura 4.7 desde otro punto de observación.	31
4.9.	Grafica de $ q $ en función de x, t para tres solitones. En este caso interaccionan tres solitones diferentes. Dos de ellos se propagan en la dirección positiva del eje x , el otro soliton viaja en dirección contraria.	32
4.10.	Grafica que muestra la interacción ilustrada en la Figura 4.9 desde otro punto de observación.	33
4.11.	Solución con dos solitones de la de la ecuación acoplada no lineal de Schrödinger de tipo Manakov.	38
4.12.	Solución con dos solitones de la de la ecuación acoplada no lineal de Schrödinger de tipo Manakov.	39
4.13.	Solución con dos solitones de la de la ecuación acoplada no lineal de Schrödinger de tipo Manakov.	40

Introducción

Desde un punto de vista matemático el termino **soliton** hace referencia a un tipo de soluciones de ecuaciones diferenciales que describen simultáneamente fenómenos dispersivos y no lineales. Las soluciones solitónicas son pulsos localizados que surgen cuando se compensan efectos dispersivos y no lineales. Los solitones se pueden propagar grandes distancias sin experimentar una distorsión significativa. Durante los últimos 30 años se han encontrado solitones en campos tan diversos como la física de partículas, biología molecular, mecánica cuántica, meteorología, oceanografía, astrofísica, cosmología entre otros [3], [4].

Uno de los campos más activos de investigación en solitones se presenta en el estudio de solitones ópticos, donde la meta es usar este tipo de pulsos como portadores de "bits" de información en fibras ópticas.

Una señal de información contiene componentes en un amplio rango de frecuencias. Debido a que la velocidad de propagación de cada componente es dependiente de la frecuencia, las señales transmitidas sufren una dispersión. Desde la aparición de las fibras ópticas se ha buscado la forma de evitar estos efectos dispersivos que limitan la eficiencia de sistemas de comunicación óptica. En un intento por resolver esta dificultad, Akira Hasegawa y Fred Tapper proponen en 1973 que un índice de refracción dependiente de la intensidad de luz puede ser utilizado para compensar la dispersión. En esencia la luz tiende a concentrarse en regiones de mayor índice de refracción. De esta manera en un material no lineal los efectos dispersivos y de no linealidad se pueden compensar produciendo un pulso que se propaga en forma estable.

En medios ópticos con no linealidad débil, los solitones surgen como pulsos localizados que evolucionan mediante una compensación entre los efectos producidos por un índice de refracción dependiente de la intensidad de luz y la dispersión del pulso (en el caso de solitones temporales) o la difracción del mismo (en el caso de solitones espaciales). En estos medios la ecuación vectorial no lineal de Schrödinger (ecuación vectorial NLS)

$$iq_{jt} + \chi q_{jxx} + 2\mu q_j \sum_{l=1}^M |q_l|^2 = 0 \quad j = 1, 2, \dots, M,$$

describe adecuadamente la evolución del pulso de luz en una fibra óptica no lineal.

La solución de la ecuación vectorial NLS puede deducirse en forma analítica por medio de un método de transformada de dispersión inversa [3], [10]. Debido a que las expresiones re-

sultantes son excesivamente complicadas, se prefiere un análisis de la ecuación por métodos numéricos [4], [7].

Teniendo en cuenta la importancia de los solitones en óptica no lineal, resulta importante investigar las soluciones solitónicas en forma analítica. Esto contribuye al desarrollo de la teoría y al entendimiento de los solitones y sus interacciones.

Objetivos

Objetivos Generales

Obtener la solución multisolitónica de la ecuación vectorial NLS en forma analítica utilizando el método de esquemas ZS.

Objetivos Específicos

A partir de la formulación de esquemas ZS para la ecuación vectorial NLS obtener la solución multisolitónica para el caso de solitones oscuros y brillantes.

Para la solución con solitones brillantes se estudian los siguientes casos particulares:

- Solución de la ecuación unidimensional no lineal de Schrödinger.
- Solución de la ecuación vectorial NLS para medios isótropos.
- Solución con dos solitones de la ecuación acoplada no lineal de Schrödinger de tipo Manakov
- Forma asintótica de las soluciones.
- Interacción entre solitones solución de los casos anteriores

Capítulo 1

Esquemas ZS

En 1974 Zakharov & Shabat publicaron un método general que permite establecer la transformada de dispersión inversa para diversas ecuaciones relacionadas con la teoría de solitones. Este formalismo es denominado esquemas ZS.

En este capítulo se da una descripción general del método de esquemas ZS con el fin de presentar definiciones y notación útiles en el desarrollo de los capítulos posteriores [3].

Con el fin de estudiar ecuaciones de evolución no lineal el método de esquemas ZS introduce operadores integrales y diferenciales que satisfacen ciertas relaciones de conmutación. A continuación se describen este tipo de operadores

1.1. Operadores Integrales

Sean $F(x, z)$, $K_+(x, z)$, $K_-(x, z)$ matrices de orden $N \times N$, con

$$K_+(x, z) = 0 \quad \text{si } z < x, \quad (1.1)$$

$$K_-(x, z) = 0 \quad \text{si } z > x, \quad (1.2)$$

y sea $\psi(x)$ un vector de orden N .

Los operadores integrales J_F , J_+ , J_- que actúan sobre ψ se encuentran definidos por

$$J_F[\psi] = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, z)\psi(z)dz, \quad (1.3)$$

para todos los ψ donde la integral definida converge. En forma similar

$$J_{\pm}[\psi] = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\pm}(x, z)\psi(z)dz. \quad (1.4)$$

En consecuencia

$$J_+ = \int_x^{\infty} dz K_+(x, z) \quad \text{y} \quad J_- = \int_{-\infty}^x dz K_-(x, z).$$

Estos operadores se relacionan por medio de la expresión

$$(I + J_+)(I + J_F) = I + J_-, \quad (1.5)$$

donde I es una matriz unitaria de orden $N \times N$. Asumiendo que $I + J_+$ es invertible se obtiene

$$I + J_F = (I + J_+)^{-1}(I + J_-),$$

como consecuencia el operador $I + J_F$ es factorizable.

La identidad (1.5) sobre ψ puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \int_x^\infty K_+(x, z)\psi(z)dz + \int_{-\infty}^\infty F(x, z)\psi(z)dz \\ + \int_x^\infty K_+(x, z) \left(\int_{-\infty}^\infty F(z, y)\psi(y)dy \right) dz = \int_{-\infty}^x K_-(x, z)\psi(z)dz. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Si se opera cuando $z > x$, el lado derecho de esta expresión es nulo. Además, la integral doble puede ser expresada como

$$\int_{-\infty}^\infty \int_x^\infty K_+(x, y)F(y, z)\psi(z)dydz$$

y la ecuación (1.6) se convierte en

$$\int_{-\infty}^\infty \left[K_+(x, z) + F(x, z) + \int_x^\infty K_+(x, y)F(y, z)dy \right] \psi(z)dz = 0.$$

para cualquier $\psi(z)$ este resultado requiere

$$K_+(x, z) + F(x, z) + \int_x^\infty K_+(x, y)F(y, z)dy = 0 \quad \text{para } z > x. \quad (1.7)$$

La expresión (1.7) es la ecuación de Marchenko para la matriz $K_+(x, z)$. En forma similar si se considera $z < x$ en la ecuación (1.6), se puede establecer

$$K_-(x, z) = F(x, z) + \int_x^\infty K_+(x, y)F(y, z)dy \quad \text{para } z < x. \quad (1.8)$$

Esta relación define K_- en términos de K_+ y F .

1.2. Operadores Diferenciales

En esta sección se amplían las definiciones de los operadores F , K_+ , K_- y del vector ψ de tal manera que puedan depender de dos parámetros auxiliares t , y . La evolución de F con respecto a estos parámetros se relaciona con ecuaciones diferenciales no lineales que pueden

ser tratadas por el método de los esquemas ZS.

Se define un operador matricial diferencial Δ_0 de orden $N \times N$ que actúa sobre $\psi(x; t)$. Δ_0 conmuta con el operador integral J_F , como consecuencia

$$[\Delta_0, J_F] = \Delta_0 J_F - J_F \Delta_0 = 0. \quad (1.9)$$

Cuando $J_F \Delta_0$ actúa sobre $\psi(x; t)$, el operador J_F se aplica al vector $\Delta_0 \psi(x; t)$ evaluado en $x = z$.

El operador diferencial Δ , asociado a Δ_0 , se define por medio de la identidad

$$\Delta(I + J_+) = (I + J_+) \Delta_0. \quad (1.10)$$

Antes de continuar con el desarrollo general del método, se considera un caso particular de operador Δ_0 que será útil en el siguiente capítulo. Sea

$$\Delta_0 = I \left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right),$$

donde I es una matriz unitaria de orden $N \times N$ y α es un escalar constante. Aplicando (1.9) sobre $\psi(x; t)$ se obtiene

$$\left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} F(x, z; t) \psi(z; t) dz - \int_{-\infty}^{\infty} F(x, z; t) \left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(z; t) dz = 0. \quad (1.11)$$

Si ψ es dos veces diferenciable y $\psi, \psi_z \rightarrow 0$ cuando $|z| \rightarrow \infty$, integrando por partes se puede mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} F \psi_{zz} dz = \int_{-\infty}^{\infty} F_{zz} \psi dz,$$

y la ecuación (1.11) se escribe como

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\alpha F_t - F_{xx} + F_{zz}) \psi dz = 0.$$

Este resultado, obtenido a partir de la relación de conmutación (1.9), es válido únicamente si la matriz $F(x, z; t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\alpha F_t + F_{zz} - F_{xx} = 0. \quad (1.12)$$

El operador asociado Δ es obtenido aplicando (1.10) a $\psi(x; t)$, esto es

$$\begin{aligned} \Delta \left\{ \psi(x; t) + \int_x^{\infty} K_+(x, z; t) \psi(z; t) dz \right\} \\ = \alpha \psi_t - \psi_{xx} + \int_x^{\infty} K_+(x, z; t) \left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(z; t) dz. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Integrando por partes y asumiendo que $K_+, K_{+z} \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow +\infty$ se encuentra

$$\int_x^\infty K_+ \psi_{zz} dz = -\hat{K}_+ \psi_x + \hat{K}_{+z} \psi + \int_x^\infty K_{+zz} \psi dz,$$

donde $\hat{K}_+ = K_+(x, x; t)$. Tomando $\Delta = \Delta_0 + \Delta_1$, (1.13) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \Delta_1 \left(\psi + \int_x^\infty K_+ \psi dz \right) + \alpha \int_x^\infty (K_{+t} \psi + K_+ \psi_t) dz + \psi \frac{d}{dx} \hat{K}_+ \\ + \hat{K}_+ \psi_x + \hat{K}_{+x} \psi - \int_x^\infty K_{+xx} \psi dz \\ = \alpha \int_x^\infty K_+ \psi_t dz + \hat{K}_+ \psi_x - \hat{K}_{+z} \psi - \int_x^\infty K_{+zz} \psi dz \end{aligned}$$

o

$$\left(\Delta_1 + 2 \frac{d}{dx} \hat{K}_+ \right) \psi + \Delta_1 \int_x^\infty K_+ \psi dz + \int_x^\infty (\alpha K_{+t} - K_{+xx} + K_{+zz}) \psi dz = 0,$$

en esta expresión $d\hat{K}_+/dx = \hat{K}_{+x} + \hat{K}_{+z}$ denota la derivada total en x . Si esta ecuación es válida para todo ψ continuo, entonces

$$\Delta_1 = -2 \frac{d}{dx} \hat{K}_+ = -2(\hat{K}_{+x} + \hat{K}_{+z}), \quad (1.14)$$

y $K_+(x, z; t)$ satisface

$$\alpha K_{+t} + K_{+zz} - K_{+xx} + \Delta_1 K_+ = 0. \quad (1.15)$$

De vuelta al desarrollo principal, se describe un paso importante en el método de los esquemas ZS. Se introducen **dos** pares de operadores Δ_0 y Δ . Por lo general se elige

$$\begin{aligned} \Delta_0^{(1)} &= I\alpha \frac{\partial}{\partial t} - M_0; & \Delta_0^{(2)} &= I\beta \frac{\partial}{\partial y} + L_0, \\ \Delta^{(1)} &= I\alpha \frac{\partial}{\partial t} - M; & \Delta^{(2)} &= I\beta \frac{\partial}{\partial y} + L, \end{aligned} \quad (1.16)$$

donde α y β son constantes, M_0, L_0, M y L son operadores diferenciales en x . Los operadores M_0 y L_0 están formados por coeficientes constantes de tal manera que $\Delta_0^{(1)}, \Delta_0^{(2)}$ conmutan. Además, cada $\Delta_0^{(1)}$ y $\Delta_0^{(2)}$ conmuta con el operador J_F , esto es

$$[\Delta_0^{(1)}, J_F] = 0 \quad \text{y} \quad [\Delta_0^{(2)}, J_F] = 0. \quad (1.17)$$

Los operadores $\Delta^{(i)}$ se definen según lo establecido en la expresión (1.10)

$$\Delta^{(i)}(I + J_+) = (I + J_+)\Delta_0^{(i)}, \quad i = 1, 2. \quad (1.18)$$

A partir de las definiciones anteriores, resulta conveniente examinar el operador

$$P = \Delta^{(1)}\Delta^{(2)}(I + J_+) - \Delta^{(2)}\Delta^{(1)}(I + J_+). \quad (1.19)$$

Aplicando la definicion (1.18) se obtiene

$$\begin{aligned} P &= \Delta^{(1)}(I + J_+)\Delta_0^{(2)} - \Delta^{(2)}(I + J_+)\Delta_0^{(1)} \\ &= (I + J_+)\Delta_0^{(1)}\Delta_0^{(2)} - (I + J_+)\Delta_0^{(2)}\Delta_0^{(1)} \\ &= (I + J_+)[\Delta_0^{(1)}, \Delta_0^{(2)}]. \end{aligned}$$

Como $\Delta_0^{(1)}$ y $\Delta_0^{(2)}$ conmutan, entonces

$$P = [\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}](I + J_+) = 0.$$

Ya que $I + J_F$ es invertible, se obtiene

$$[\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}] = 0. \quad (1.20)$$

Al introducir en (1.20) los operadores definidos en (1.16), se establece

$$\left(I\alpha \frac{\partial}{\partial t} - M \right) \left(I\beta \frac{\partial}{\partial y} + L \right) - \left(I\beta \frac{\partial}{\partial y} + L \right) \left(I\alpha \frac{\partial}{\partial t} - M \right) = 0.$$

Esta expresión se simplifica a

$$\alpha \frac{\partial L}{\partial t} + \beta \frac{\partial M}{\partial y} + [L, M] = 0. \quad (1.21)$$

La ecuación (1.21) es una relación matricial que define un sistema de ecuaciones de evolución no lineal que pueden ser resueltas por el método de los esquemas ZS.

Los coeficientes variables que forman parte de los operadores L y M constituyen las funciones del sistema de ecuaciones de evolución. Estas funciones son conocidas en términos de K_+ (mediante una expresión similar a (1.14)), donde K_+ es una solución de la ecuación integral lineal (1.7). En esta ecuación integral se requiere el operador F que se obtiene a partir de un par de ecuaciones (mediante expresiones similares a (1.12)) definidas por las condiciones de conmutación (1.17).

El siguiente capítulo describe un caso particular en el cual (1.21) permite obtener la ecuación vectorial NLS. Estos resultados permitirán en el capítulo tres encontrar la solución multisolitónica de esta ecuación.

Capítulo 2

Esquemas ZS para la ecuación vectorial NLS

En este capítulo se aplica el método de los esquemas ZS al estudio de la ecuación vectorial no lineal de Schrödinger. Mediante una elección apropiada de los operadores introducidos en el capítulo anterior se relaciona la ecuación de evolución (1.21) con la ecuación vectorial NLS [10], [11].

Se inicia considerando los operadores

$$\Delta_0^{(1)} = I \left(i\alpha \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right), \quad (2.1)$$

$$\Delta_0^{(2)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_M \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.2)$$

donde I es una matriz unitaria de orden $(M+1) \times (M+1)$ y $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M$ son constantes reales arbitrarias. El operador asociado $\Delta^{(1)}$ se deduce por medio de la relación (1.14),

$$\Delta^{(1)} = I \left(i\alpha \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + U(x, t), \quad (2.3)$$

donde

$$U(x, t) = -2 \frac{d\hat{K}_+}{dx}. \quad (2.4)$$

Para obtener $\Delta^{(2)}$ se toma $\Delta^{(2)} = \Delta_0^{(2)} + V(x, t)$. Con esta elección la condición (1.18) requiere

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_M \end{pmatrix} \left(\psi_x - \hat{K}_+ \psi + \int_x^\infty K_{+x} \psi dz \right) + V \left(\psi + \int_x^\infty K_+ \psi dz \right) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_M \end{pmatrix} \psi_x + \int_x^\infty K_+ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_M \end{pmatrix} \psi dz. \end{aligned}$$

La integración por partes del ultimo termino en esta expresión permite establecer

$$\begin{aligned} & \left\{ V - \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_M \end{pmatrix} \hat{K}_+ + \hat{K}_+ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_M \end{pmatrix} \right\} \psi \\ & + \int_x^\infty \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_M \end{pmatrix} K_{+x} + K_{+z} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_M \end{pmatrix} + V K_+ \right\} \psi dz = 0. \end{aligned}$$

Si en la relación anterior se escoge

$$V = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_M \end{pmatrix} \hat{K}_+ - \hat{K}_+ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_M \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

entonces K_+ satisfice

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_M \end{pmatrix} K_{+x} + K_{+z} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_M \end{pmatrix} + V K_+ = 0. \quad (2.6)$$

La matriz $K_+(x, z; t)$ de orden $(M + 1) \times (M + 1)$ se escribe de la siguiente manera

$$K_+(x, z; t) = \begin{pmatrix} a(x, z; t) & b_1(x, z; t) & b_2(x, z; t) & \dots & b_M(x, z; t) \\ c_1(x, z; t) & d_{11}(x, z; t) & d_{12}(x, z; t) & \dots & d_{1M}(x, z; t) \\ c_2(x, z; t) & d_{21}(x, z; t) & d_{22}(x, z; t) & \dots & d_{2M}(x, z; t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_M(x, z; t) & d_{M1}(x, z; t) & d_{M2}(x, z; t) & \dots & d_{MM}(x, z; t) \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Evaluando K_+ en $z = x$ se obtiene \hat{K}_+

$$\hat{K}_+ = \begin{pmatrix} A & B_1 & B_2 & \dots & B_M \\ C_1 & D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1M} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_M & D_{M1} & D_{M2} & \dots & D_{MM} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

donde $A = a(x, x; t)$, $B_l = b_l(x, x; t)$, $C_l = c_l(x, x; t)$, $D_{lj} = d_{lj}(x, x; t)$ para $l, j = 1, 2, \dots, M$.

Considerando (2.7) y (2.8), a partir de (2.5) se establece

$$V(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & (\alpha - \alpha_1)B_1 & (\alpha - \alpha_2)B_2 & \dots & (\alpha - \alpha_M)B_M \\ (\alpha_1 - \alpha)C_1 & 0 & (\alpha_1 - \alpha_2)D_{12} & \dots & (\alpha_1 - \alpha_M)D_{1M} \\ (\alpha_2 - \alpha)C_2 & (\alpha_2 - \alpha_1)D_{21} & 0 & \dots & (\alpha_2 - \alpha_M)D_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\alpha_M - \alpha)C_M & (\alpha_M - \alpha_1)D_{M1} & (\alpha_M - \alpha_2)D_{M2} & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Para hallar $U(x, t)$ en (2.4) es necesario conocer $A_x, B_{j_x}, C_{j_x}, D_{lj_x}$ con $j, l = 1, 2, \dots, M$. Con este fin se evalua (2.6) en $z = x$. Se obtiene que los elementos A y D_{lj} satisfacen las relaciones

$$\alpha A_x + \sum_{l=1}^M (\alpha - \alpha_l) B_l C_l = 0,$$

$$\alpha_l \hat{d}_{lj_x} + \alpha_j \hat{d}_{lj_z} + (\alpha_l - \alpha) B_j C_l + \sum_{s=1}^M (\alpha_l - \alpha_s) D_{ls} D_{sj} = 0,$$

donde \hat{d}_{lj_x} y \hat{d}_{lj_z} denotan respectivamente a d_{lj_x} y d_{lj_z} evaluados en $z = x$.

El formalismo para el estudio de la ecuación vectorial NLS desarrollado hasta ahora es muy general [10], [11]. En estas expresiones resulta conveniente escoger $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_M = \delta$ con $\alpha \neq \delta \neq -\delta$, $B_j = q_j(x, t)$ y $C_j = \pm q_j^*(x, t)$ (q_j^* denota el complejo conjugado de q_j), de tal manera que $B_j C_j = \pm |q_j|^2$. De acuerdo con esta elección

$$A_x = \mp \frac{(\alpha - \delta)}{\alpha} \sum_{l=1}^M |q_l|^2, \quad (2.10)$$

$$D_{lj_x} = \pm \frac{(\alpha - \delta)}{\delta} q_l^* q_j. \quad (2.11)$$

En (2.11) se tiene en cuenta que $D_{lj_x} = \hat{d}_{lj_x} + \hat{d}_{lj_z}$.

Introduciendo (2.10) y (2.11) en (2.4) se obtiene

$$U(x, t) = -2 \begin{pmatrix} \mp \frac{(\alpha-\delta)}{\alpha} \sum_{l=1}^M |q_l|^2 & q_{1x} & q_{2x} & \dots & q_{Mx} \\ \pm q_{1x}^* & \pm \frac{(\alpha-\delta)}{\delta} |q_1|^2 & \pm \frac{(\alpha-\delta)}{\delta} q_1^* q_2 & \dots & \pm \frac{(\alpha-\delta)}{\delta} q_1^* q_M \\ \pm q_{2x}^* & \pm \frac{(\alpha-\delta)}{\delta} q_2^* q_1 & \pm \frac{(\alpha-\delta)}{\delta} |q_2|^2 & \dots & \pm \frac{(\alpha-\delta)}{\delta} q_2^* q_M \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pm q_{Mx}^* & \pm \frac{(\alpha-\delta)}{\delta} q_M^* q_1 & \pm \frac{(\alpha-\delta)}{\delta} q_M^* q_2 & \dots & \pm \frac{(\alpha-\delta)}{\delta} |q_M|^2 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Los resultados (2.9) y (2.11) permiten establecer

$$\Delta^{(1)} = I \left(i\alpha \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - 2 \begin{pmatrix} \mp \frac{(\alpha-\delta)}{\alpha} \sum_{l=1}^M |q_l|^2 & q_{1x} & q_{2x} & \dots & q_{Mx} \\ \pm q_{1x}^* & \pm \frac{(\alpha-\delta)}{\delta} |q_1|^2 & \pm \frac{(\alpha-\delta)}{\delta} q_1^* q_2 & \dots & \pm \frac{(\alpha-\delta)}{\delta} q_1^* q_M \\ \pm q_{2x}^* & \pm \frac{(\alpha-\delta)}{\delta} q_2^* q_1 & \pm \frac{(\alpha-\delta)}{\delta} |q_2|^2 & \dots & \pm \frac{(\alpha-\delta)}{\delta} q_2^* q_M \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pm q_{Mx}^* & \pm \frac{(\alpha-\delta)}{\delta} q_M^* q_1 & \pm \frac{(\alpha-\delta)}{\delta} q_M^* q_2 & \dots & \pm \frac{(\alpha-\delta)}{\delta} |q_M|^2 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

y

$$\Delta^{(2)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \delta \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha - \delta) \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 & \dots & q_M \\ \mp q_1^* & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mp q_2^* & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mp q_M^* & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

La ecuación vectorial NLS se puede obtener a partir de la ecuación de Lax (1.21) o mediante la relación de conmutación $[\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}]=0$. El cumplimiento de esta última condición requiere que $q_j(x, t)$ cumpla simultáneamente las ecuaciones

$$i\alpha(\alpha - \delta)q_{jt} - (\alpha - \delta)q_{jxx} + 2\alpha q_{jxx} \pm 2 \left[\frac{(\alpha - \delta)^2}{\alpha} q_j \sum_{l=1}^M |q_l|^2 + \frac{(\alpha - \delta)^2}{\delta} q_j \sum_{l=1}^M |q_l|^2 \right] = 0, \quad (2.15)$$

$$-i\alpha(\alpha - \delta)q_{jt}^* + (\alpha - \delta)q_{jxx}^* + 2\delta q_{jxx}^* \pm 2 \left[\frac{(\alpha - \delta)^2}{\alpha} q_j^* \sum_{l=1}^M |q_l|^2 + \frac{(\alpha - \delta)^2}{\delta} q_j^* \sum_{l=1}^M |q_l|^2 \right] = 0. \quad (2.16)$$

Simplificando

$$i\alpha(\alpha - \delta)q_{jt} + (\alpha + \delta)q_{jxx} \pm 2 \frac{(\alpha - \delta)^2(\alpha + \delta)}{\alpha\delta} q_j \sum_{l=1}^M |q_l|^2 = 0,$$

$$-i\alpha(\alpha - \delta)q_{jt}^* + (\alpha + \delta)q_{jxx}^* \pm 2 \frac{(\alpha - \delta)^2(\alpha + \delta)}{\alpha\delta} q_j^* \sum_{l=1}^M |q_l|^2 = 0.$$

Como $\alpha \neq \delta \neq -\delta \neq 0$, entonces

$$iq_{jt} + \frac{(\alpha + \delta)}{\alpha(\alpha - \delta)} q_{jxx} \pm 2 \frac{(\alpha^2 - \delta^2)}{\alpha^2\delta} q_j \sum_{l=1}^M |q_l|^2 = 0. \quad (2.17)$$

$$-iq_{jt}^* + \frac{(\alpha + \delta)}{\alpha(\alpha - \delta)}q_{jxx}^* \pm 2\frac{(\alpha^2 - \delta^2)}{\alpha^2\delta}q_j^* \sum_{l=1}^M |q_l|^2 = 0. \quad (2.18)$$

Definiendo las constantes

$$\mu = \pm \frac{(\alpha^2 - \delta^2)}{\alpha^2\delta}, \quad (2.19)$$

$$\chi = \frac{(\alpha + \delta)}{\alpha(\alpha - \delta)}, \quad (2.20)$$

la ecuación (2.17) adopta la forma de la ecuación vectorial NLS

$$iq_{jt} + \chi q_{jxx} + 2\mu q_j \sum_{l=1}^M |q_l|^2 = 0. \quad (2.21)$$

La ecuación (2.18) es el complejo conjugado de (2.21).

En este capítulo se analizó un caso particular del método de esquemas ZS aplicado al estudio de la ecuación vectorial NLS. En el siguiente capítulo se escoge un operador F particular. La evolución de K_+ y F permitirá obtener la solución con N solitones de la ecuación vectorial NLS.

Capítulo 3

Solución multisolitónica de la ecuación vectorial NLS

A partir de los operadores y las condiciones de conmutación introducidos en los capítulos anteriores se estudia la solución multisolitónica de la ecuación vectorial no lineal de Schrödinger

$$iq_{jt} + \chi q_{jxx} + 2\mu q_j \sum_{l=1}^M |q_l|^2 = 0 \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (3.1)$$

donde M es un natural finito y los parámetros μ, χ son constantes reales arbitrarias que pueden escribirse como

$$\mu = \pm \frac{(\alpha^2 - \delta^2)}{\alpha^2 \delta}, \quad (3.2)$$

$$\chi = \frac{(\alpha + \delta)}{\alpha(\alpha - \delta)}, \quad (3.3)$$

con $\alpha \neq \delta \neq -\delta \neq 0$.

La solución multisolitónica requiere el estudio de la evolución de la matriz F con respecto a x, z, t . De acuerdo con el método de esquemas ZS expuesto en el capítulo 1, la evolución del operador F se determina a partir de las condiciones de conmutación (1.17). Al introducir el operador (2.1) en $[\Delta_0^{(1)}, J_F] = 0$ se obtiene

$$I \left(i\alpha \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} F \psi dz - \int_{-\infty}^{\infty} F I \left(i\alpha \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi dz = 0. \quad (3.4)$$

Considerando la igualdad

$$\int_{-\infty}^{\infty} F \psi_{zz} dz = \int_{-\infty}^{\infty} F_{zz} \psi dz,$$

válida cuando ψ es dos veces diferenciable y $\psi, \psi_z \rightarrow 0$ cuando $|z| \rightarrow \infty$, la ecuación (3.4) se reduce a

$$\int_{-\infty}^{\infty} (i\alpha F_t - F_{xx} + F_{zz}) \psi dz = 0.$$

Esta relación se cumple si $F(x, z; t)$ satisface la ecuación

$$i\alpha F_t + F_{zz} - F_{xx} = 0. \quad (3.5)$$

En forma similar, el cumplimiento de la condición $[\Delta_0^{(2)}, J_F] = 0$ requiere que

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \delta \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} F \psi dz - \int_{-\infty}^{\infty} F \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \delta \end{pmatrix} \psi dz = 0. \quad (3.6)$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} F \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \delta \end{pmatrix} \psi dz = - \int_{-\infty}^{\infty} F_z \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \delta \end{pmatrix} \psi dz,$$

la ecuación (3.6) se escribe como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \delta \end{pmatrix} F_x + F_z \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \delta \end{pmatrix} \right\} \psi dz = 0.$$

Esta relación se cumple si $F(x, z; t)$ satisface

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \delta \end{pmatrix} F_x + F_z \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \delta \end{pmatrix} = 0. \quad (3.7)$$

De acuerdo con estos resultados, $F(x, z; t)$ cumple en forma simultanea las condiciones (3.5) y (3.7) que determinan su evolución con respecto a x,z,t.

Definiendo el operador [10]

$$F = \begin{pmatrix} 0 & r_1(x, z; t) & r_2(x, z; t) & \dots & r_M(x, z; t) \\ s_1(x, z; t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_2(x, z; t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_M(x, z; t) & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

la ecuación (3.7) requiere que

$$\alpha r_{j_x} + \delta r_{j_z} = 0 \quad \text{y} \quad \delta s_{j_x} + \alpha s_{j_z} = 0,$$

para $j = 1, 2, \dots, M$. Como consecuencia la forma de las funciones escalares r_j, s_j es

$$r_j = r_j(\delta x - \alpha z; t) \quad \text{y} \quad s_j = s_j(\alpha x - \delta z; t). \quad (3.9)$$

Introduciendo (3.9) en (3.5), la solución mas general para r_j y s_j esta dada por

$$r_j(x, z; t) = \sum_{k=1}^N (r_0)_{jk} e^{\rho_{jk}(\delta x - \alpha z) + i\rho_{jk}^2(\alpha^2 - \delta^2)t/\alpha} \quad (3.10)$$

y

$$s_j(x, z; t) = \sum_{k=1}^N (s_0)_{jk} e^{\sigma_{jk}(\alpha x - \delta z) + i\sigma_{jk}^2(\delta^2 - \alpha^2)t/\alpha}, \quad (3.11)$$

donde N es un natural finito y $(r_0)_{jk}, (s_0)_{jk}, \rho_{jk}, \sigma_{jk}$ con $j = 1, 2, \dots, M, k = 1, 2, \dots, N$ son constantes complejas arbitrarias.

La matriz K_+ esta relacionada con F por medio de la ecuación integral de Marchenko (1.7)

$$K_+(x, z; t) + F(x, z; t) + \int_x^\infty K_+(x, y; t)F(y, z; t)dy = 0.$$

Incorporando las definiciones (2.7) y (3.8) en esta expresión se obtiene

$$\begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 & \dots & b_M \\ c_1 & d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1M} \\ c_2 & d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_M & d_{M1} & d_{M2} & \dots & d_{MM} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & r_1 & r_2 & \dots & r_M \\ s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_M & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \int_x^\infty \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 & \dots & b_M \\ c_1 & d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1M} \\ c_2 & d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_M & d_{M1} & d_{M2} & \dots & d_{MM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & r_1 & r_2 & \dots & r_M \\ s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_M & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} dy = 0 \quad (3.12)$$

En (3.12) se han omitido los argumentos de la funciones. Los elementos de la primera fila de la ecuación (3.12) forman el siguiente sistema de ecuaciones integrales escalares para las funciones $a(x, z; t)$ y $b_j(x, z; t)$

$$a(x, z; t) + \int_x^\infty \sum_{l=1}^M b_l(x, y; t)s_l(y, z; t)dy = 0, \quad (3.13)$$

$$b_j(x, z; t) + r_j(x, z; t) + \int_x^\infty a(x, y; t)r_j(y, z; t)dy = 0 \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (3.14)$$

En el anexo A se considera el resto de elementos de (3.12), los cuales establecen un sistema de ecuaciones (A.1) y (A.2) para las funciones $c_j(x, z; t)$ y $d_{jl}(x, z; t)$. Esto permite obtener un sistema de ecuaciones (A.1) y (A.2) para $c_j(x, z; t)$ y $d_{jl}(x, z; t)$ similar al obtenido en (3.13) y (3.14).

La solución de (3.1) requiere encontrar cada $b_j(x, z; t)$. Combinando (3.13) y (3.14) se obtiene

$$b_j(x, z; t) + r_j(x, z; t) - \int_x^\infty \left[\int_x^\infty \sum_{l=1}^M b_l(x, y'; t)s_l(y', y; t)dy' \right] r_j(y, z; t)dy = 0. \quad (3.15)$$

Introduciendo (3.10) y (3.11) en (3.15) se establece

$$\begin{aligned} b_j(x, z; t) + \sum_{k=1}^N (r_0)_{jk} e^{\rho_{jk}(\delta x - \alpha z) + i\rho_{jk}^2(\alpha^2 - \delta^2)t/\alpha} \\ - \int_x^\infty \left[\int_x^\infty \sum_{l=1}^M b_l(x, y'; t) \sum_{n=1}^N (s_0)_{ln} e^{\sigma_{ln}(\alpha y' - \delta y) + i\sigma_{ln}^2(\delta^2 - \alpha^2)t/\alpha} dy' \right] \\ \times \sum_{k=1}^N (r_0)_{jk} e^{\rho_{jk}(\delta y - \alpha z) + i\rho_{jk}^2(\alpha^2 - \delta^2)t/\alpha} dy = 0. \quad (3.16) \end{aligned}$$

Por las características de (3.16) es conveniente buscar una solución de la forma

$$b_j(x, z; t) = \sum_{k=1}^N M_{jk}(x, t) e^{-\alpha\rho_{jk}z}. \quad (3.17)$$

La ecuación (3.16) requiere que las funciones $M_{jk}(x, t)$ con $j = 1, 2, \dots, M, k = 1, 2, \dots, N$, siendo M y N naturales finitos, sean solución del siguiente sistema de ecuaciones de orden $(MN) \times (MN)$

$$\begin{aligned} M_{jk}(x, t) + (r_0)_{jk} e^{i\rho_{jk}^2(\alpha^2 - \delta^2)t/\alpha + \delta\rho_{jk}x} \\ - \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N M_{lm}(x, t) (r_0)_{jk} (s_0)_{ln} e^{i(\alpha^2 - \delta^2)(\rho_{jk}^2 - \sigma_{ln}^2)t/\alpha} \\ \times \int_x^\infty e^{-\alpha(\rho_{lm} - \sigma_{ln})y'} dy' \int_x^\infty e^{\delta(\rho_{jk} - \sigma_{ln})y} dy = 0. \quad (3.18) \end{aligned}$$

Las integrales en (3.18) se encuentran definidas si se cumple la condición

$$Re[\alpha(\rho_{jm} - \sigma_{ln})] > 0 \quad \text{y} \quad Re[\delta(\rho_{jm} - \sigma_{ln})] < 0, \quad (3.19)$$

para todo $j, l = 1, 2, \dots, M$ y $k, m, n = 1, 2, \dots, N$.

Si la condición (3.19) se cumple, (3.18) toma la forma

$$M_{jk}(x, t) + (r_0)_{jk} e^{i\rho_{jk}^2(\alpha^2 - \delta^2)t/\alpha + \delta\rho_{jk}x} + \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N M_{lm}(x, t) (r_0)_{jk} (s_0)_{ln} e^{i(\alpha^2 - \delta^2)(\rho_{jk}^2 - \sigma_{ln}^2)t/\alpha} \frac{e^{-\alpha(\rho_{lm} - \sigma_{ln})x}}{\alpha(\rho_{lm} - \sigma_{ln})} \frac{e^{\delta(\rho_{jk} - \sigma_{ln})x}}{\delta(\rho_{jk} - \sigma_{ln})} = 0. \quad (3.20)$$

Teniendo en cuenta que $b_j(x, x; t) = B_j(x, t) = q_j(x, t)$, de (3.15) se obtiene

$$q_j(x, t) = \sum_{k=1}^N M_{jk}(x, t) e^{-\alpha\rho_{jk}x} = \sum_{k=1}^N L_{jk}(x, t). \quad (3.21)$$

De acuerdo con (3.20), los L_{jk} satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones $(MN) \times (MN)$

$$L_{jk} + \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N L_{lm} \frac{(r_0)_{jk} (s_0)_{ln}}{\alpha\delta(\rho_{lm} - \sigma_{ln})(\rho_{jk} - \sigma_{ln})} e^{i(\alpha^2 - \delta^2)(\rho_{jk}^2 - \sigma_{ln}^2)t/\alpha} e^{-(\alpha - \delta)(\rho_{jk} - \sigma_{ln})x} = -(r_0)_{jk} e^{i\rho_{jk}^2(\alpha^2 - \delta^2)t/\alpha - (\alpha - \delta)\rho_{jk}x} \quad (3.22)$$

La constante compleja ρ_{jk} se puede representar en la forma

$$\rho_{jk} = \kappa_{jk} + i\lambda_{jk}, \quad (3.23)$$

donde $\kappa_{jk}, \lambda_{jk}$ para $j = 1, 2, \dots, M, k = 1, 2, \dots, N$ son constantes reales.

En el anexo A se demuestran las relaciones (A.11) y (A.12). (A.11) establece que $\rho_{jk}^* = -\sigma_{jk}$, teniendo en cuenta (3.23) se obtiene

$$\sigma_{jk} = -\kappa_{jk} + i\lambda_{jk}. \quad (3.24)$$

La relación (A.12) establece que $(s_0)_{jk}^* = \pm(r_0)_{jk}$, introducir (3.23), (3.24) y (A.12) en (3.22) permite obtener

$$L_{jk} + \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N L_{lm} \eta_{jklmn} e^{\beta_{jk} + \beta_{ln}^*} = -(r_0)_{jk} e^{\beta_{jk}}, \quad (3.25)$$

donde se utiliza la notación

$$\eta_{jklmn} = \frac{\pm(r_0)_{jk} (r_0)_{ln}^*}{\alpha\delta[(\kappa_{lm} + \kappa_{ln}) + i(\lambda_{lm} - \lambda_{ln})][(\kappa_{jk} + \kappa_{ln}) + i(\lambda_{jk} - \lambda_{ln})]}, \quad (3.26)$$

$$\beta_{jk} = i(\alpha - \delta) \left\{ \frac{[\kappa_{jk}^2 - \lambda_{jk}^2](\alpha + \delta)t}{\alpha} - \lambda_{jk}x \right\} - c_{jk}, \quad (3.27)$$

$$c_{jk} = (\alpha - \delta) \left[x + \frac{2\lambda_{jk}(\alpha + \delta)t}{\alpha} \right], \quad (3.28)$$

para $j, l = 1, 2, \dots, M$; $k, m, n = 1, 2, \dots, N$.

Teniendo en cuenta (3.23) y (3.24), la condición (3.19) requiere que

$$\alpha(\kappa_{jk} + \kappa_{lm}) > 0 \quad \text{y} \quad \delta(\kappa_{jk} + \kappa_{lm}) < 0 \quad \text{para todo } j, k, l, m. \quad (3.29)$$

Esta condición se cumple cuando los κ_{jk} tienen el mismo signo y el producto $\alpha\delta$ es negativo. Teniendo en cuenta lo anterior se analiza el producto $\chi\mu$. Esta cantidad permite establecer si (3.1) es una ecuación de evolución para solitones oscuros o solitones brillantes. Teniendo en cuenta (3.2) y (3.3) se obtiene

$$\chi\mu = \pm \left[\frac{\alpha^2 - \delta^2}{\alpha^2\delta} \right] \left[\frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha - \delta)} \right] = \pm \frac{(\alpha + \delta)^2}{\alpha^3\delta}. \quad (3.30)$$

Ya que $\alpha\delta < 0$, si en (3.26) se considera el signo $+$ se obtiene $\chi\mu < 0$. En consecuencia se encuentra una solución con solitones oscuros. Si se utiliza el signo $-$ se obtiene $\chi\mu > 0$. En este último caso se obtiene una solución con solitones brillantes.

Las ecuaciones (3.21), (3.25)-(3.26) definen la solución multisolitónica de la ecuación vectorial NLS. En el siguiente capítulo se identifican algunas características de la solución en contexto de la teoría de solitones.

Capítulo 4

Multisolitones brillantes de la ecuación vectorial NLS

El capítulo anterior permite obtener las soluciones multisolitónicas brillantes y oscuras de la ecuación vectorial NLS. En este capítulo se estudian algunas características de la solución multisolitónica para el caso de solitones brillantes. Se encuentran rasgos similares cuando se tratan solitones oscuros.

De acuerdo con los resultados del capítulo 3, se puede establecer que la solución con N solitones brillantes de la ecuación vectorial NLS

$$iq_{jt} + \chi q_{jxx} + 2\mu q_j \sum_{l=1}^M |q_l|^2 = 0 \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (4.1)$$

con

$$\mu = -\frac{(\alpha^2 - \delta^2)}{\alpha^2 \delta}, \quad (4.2)$$

$$\chi = \frac{(\alpha + \delta)}{\alpha(\alpha - \delta)}, \quad (4.3)$$

para $\alpha \neq \delta \neq -\delta \neq 0$, $\alpha\delta < 0$, esta dada por

$$q_j(x, t) = \sum_{k=1}^N L_{jk}(x, t), \quad (4.4)$$

donde las funciones $L_{jk}(x, t)$ satisfacen el sistema de ecuaciones algebraicas de orden $(MN) \times (MN)$

$$L_{jk}(x, t) + \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \eta_{jklmn} L_{lm}(x, t) e^{\beta_{jk} + \beta_{ln}^*} = -(r_0)_{jk} e^{\beta_{jk}}, \quad (4.5)$$

en (4.5) se ha utilizado la notación

$$\eta_{jklmn} = \frac{-(r_0)_{jk} (r_0)_{ln}^*}{\alpha\delta[(\kappa_{lm} + \kappa_{ln}) + i(\lambda_{lm} - \lambda_{ln})][(\kappa_{jk} + \kappa_{ln}) + i(\lambda_{jk} - \lambda_{ln})]}, \quad (4.6)$$

$$\beta_{jk} = i(\alpha - \delta) \left\{ \frac{[\kappa_{jk}^2 - \lambda_{jk}^2](\alpha + \delta)t}{\alpha} - \lambda_{jk}x \right\} - c_{jk}, \quad (4.7)$$

$$c_{jk} = (\alpha - \delta)\kappa_{jk} \left[x + \frac{2\lambda_{jk}(\alpha + \delta)t}{\alpha} \right], \quad (4.8)$$

y $j, l = 1, 2, \dots, M$; $k, m, n = 1, 2, \dots, N$.

En (4.5)-(4.8) los $(r_0)_{jk}$ son constantes complejas arbitrarias, y los κ_{jk} y λ_{jk} son constantes reales arbitrarias que cumplen la condición

$$\alpha(\kappa_{jk} + \kappa_{lm}) > 0 \quad \text{y} \quad \delta(\kappa_{jk} + \kappa_{lm}) < 0 \quad (4.9)$$

para todo j, k, l, m .

Los resultados anteriores se obtuvieron con base a un formalismo estrictamente matemático. En este capítulo se determinan algunas características de la solución en el contexto de la teoría de solitones. Para ello se estudian casos particulares que permiten establecer el significado físico de las constantes $(r_0)_{jk}$, κ_{jk} y λ_{jk} . Además se examina la propagación e interacción de solitones brillantes.

4.1. Ecuación unidimensional NLS

En esta sección se estudia la ecuación (4.1) cuando $M = 1$. Este caso particular de (4.1) es la ecuación unidimensional no lineal de Schrödinger o ecuación NLS

$$iq_t + \chi q_{xx} + 2\mu q|q|^2 = 0 \quad (4.10)$$

con

$$\mu = -\frac{(\alpha^2 - \delta^2)}{\alpha^2 \delta}, \quad (4.11)$$

$$\chi = \frac{(\alpha + \delta)}{\alpha(\alpha - \delta)}, \quad (4.12)$$

y $\alpha \neq \delta \neq -\delta \neq 0$, $\alpha\delta < 0$.

La solución multisolitónica de (4.10) se obtiene a partir de las ecuaciones (4.4)-(4.9). De acuerdo con estos resultados, la solución de (4.10) con N solitones brillantes esta dada por

$$q(x, t) = \sum_{k=1}^N L_k(x, t), \quad (4.13)$$

donde las funciones $L_k(x, t)$ satisfacen el sistema de ecuaciones $N \times N$

$$L_k(x, t) + \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \eta_{kmn} L_m(x, t) e^{\beta_k + \beta_n^*} = -(r_0)_k e^{\beta_k}. \quad (4.14)$$

En esta ecuación se utiliza la notación

$$\eta_{kmn} = \frac{-(r_0)_k (r_0)_n^*}{\alpha \delta [(\kappa_m + \kappa_n) + i(\lambda_m - \lambda_n)] [(\kappa_k + \kappa_n) + i(\lambda_k - \lambda_n)]}, \quad (4.15)$$

$$\beta_k = i(\alpha - \delta) \left\{ \frac{[\kappa_k^2 - \lambda_k^2](\alpha + \delta)t}{\alpha} - \lambda_k x \right\} - c_k, \quad (4.16)$$

$$c_k = (\alpha - \delta) \kappa_k \left[x + \frac{2\lambda_k(\alpha + \delta)t}{\alpha} \right], \quad (4.17)$$

para $k, m, n = 1, 2, \dots, N$.

En las expresiones anteriores $(r_0)_k$ son constantes complejas arbitrarias y los κ_k , λ_k son constantes reales arbitrarias que cumplen la condición

$$\alpha(\kappa_k + \kappa_m) > 0 \quad \text{y} \quad \delta(\kappa_k + \kappa_m) < 0 \quad (4.18)$$

para todo k, m .

Con el fin de encontrar el significado físico de $(r_0)_n$, κ_k , λ_k se estudian los siguientes casos

4.1.1. Solución solitónica de la ecuación NLS

La solución solitónica de (4.10) se obtiene en el caso particular $N = 1$. Haciendo $(r_0)_1 = r_0$, $\kappa_1 = \kappa$, $\lambda_1 = \lambda$, $\eta_{111} = \eta$, $\beta_1 = \beta$, $c_1 = c$, $L_1 = L$ de (4.15)-(4.17) se obtiene

$$\eta = \frac{r_0 r_0^*}{4|\alpha\delta|\kappa^2}, \quad (4.19)$$

$$\beta = i(\alpha - \delta) \left\{ \frac{[\kappa^2 - \lambda^2](\alpha + \delta)t}{\alpha} - \lambda x \right\} - c, \quad (4.20)$$

con

$$c = (\alpha - \delta)\kappa \left[x + \frac{2\lambda(\alpha + \delta)t}{\alpha} \right]. \quad (4.21)$$

De acuerdo con (4.14), L satisface la ecuación

$$L(x, t) + \eta L(x, t)e^{\beta + \beta^*} = -r_0 e^\beta. \quad (4.22)$$

En (4.19) $\eta > 0$, por lo tanto se puede introducir una constante φ tal que $\eta = e^{-2\varphi}$. Entonces (4.22) se puede escribir como

$$L(x, t) = -\frac{r_0}{2} e^{\beta + c + \varphi} \operatorname{sech}(c + \varphi).$$

En consecuencia (4.13) establece que la solución solitónica de la ecuación NLS (4.10) está dada por:

$$q(x, t) = -\frac{\kappa r_0}{\sqrt{\frac{r_0 r_0^*}{|\alpha\delta|}}} e^{i(\alpha - \delta) \left\{ \frac{[\kappa^2 - \lambda^2](\alpha + \delta)t}{\alpha} - \lambda x \right\}} \operatorname{sech} \left\{ (\alpha - \delta)\kappa \left[x + \frac{2\lambda(\alpha + \delta)t}{\alpha} \right] + \varphi \right\}. \quad (4.23)$$

Este resultado muestra que las constantes r_0 , λ , κ se encuentran relacionadas con la amplitud, la velocidad de propagación y la fase de $|q|$ respectivamente.

4.1.2. Solución multisolitónica cuando $|t| \rightarrow \infty$

En esta sección se estudia la forma de la solución multisolitónica de la ecuación NLS cuando $|t| \rightarrow \infty$ con x finito. En el anexo B se demuestra que en este caso el sistema de ecuaciones (4.14) adquiere la forma

$$L_k(x, t) + \eta_{kkk} L_k(x, t)e^{\beta_k + \beta_k^*} \simeq -(r_0)_k e^{\beta_k},$$

que es similar a (4.22). Introduciendo una constante φ_k tal que $\eta_{kkk} = e^{-2\varphi_k}$, se tiene

$$L_k(x, t) \simeq -\frac{(r_0)_k}{2} e^{\beta_k + c_k + \varphi_k} \operatorname{sech}(c_k + \varphi_k) \quad \text{cuando } |t| \rightarrow \infty.$$

De acuerdo con (4.15)-(4.17) se puede establecer

$$L_k(x, t) \simeq -\frac{\kappa_k(r_0)_k}{\sqrt{\frac{(r_0)_k(r_0)_k^*}{|\alpha\delta|}}} e^{i(\alpha-\delta)\left\{\frac{[\kappa_k^2-\lambda_k^2](\alpha+\delta)t}{\alpha}-\lambda_k x\right\}} \times \operatorname{sech}\left\{(\alpha-\delta)\kappa_k\left[x+\frac{2\lambda_k(\alpha+\delta)t}{\alpha}\right]+\varphi_k\right\}. \quad (4.24)$$

Introduciendo (4.24) en (4.13) se encuentra que la solución multisolitonica de la ecuación NLS (4.10) cuando $|t| \rightarrow \infty$ esta dada por

$$q(x, t) \simeq \sum_{k=1}^N -\frac{\kappa_k(r_0)_k}{\sqrt{\frac{(r_0)_k(r_0)_k^*}{|\alpha\delta|}}} e^{i(\alpha-\delta)\left\{\frac{[\kappa_k^2-\lambda_k^2](\alpha+\delta)t}{\alpha}-\lambda_k x\right\}} \times \operatorname{sech}\left\{(\alpha-\delta)\kappa_k\left[x+\frac{2\lambda_k(\alpha+\delta)t}{\alpha}\right]+\varphi_k\right\}. \quad (4.25)$$

Comparando (4.23) (4.25) se infiere que cuando $|t| \rightarrow \infty$ con x finito la solución multisolitonica de la ecuación NLS es aproximadamente igual al la suma de N solitones que se propagan en forma independiente.

4.1.3. Solución con dos Solitones

Con el fin de ilustrar la interacción entre dos solitones se estudia el caso particular $N = 2$. La solución $q(x, t)$ se obtiene a partir del sistema de ecuaciones 2×2 definido por las ecuaciones (4.14)-(4.17). De este resultado se grafica $|q|$ en función de x, t para diferentes valores de $(r_0)_1, (r_0)_2, \kappa_1, \kappa_2, \lambda_1, \lambda_2$ que caracterizan a cada uno de los solitones.

Las figuras 4.1 y 4.2 corresponden a los siguientes valores

$\alpha = 2$	$\delta = -1$		
Soliton I	$(r_0)_1 = -3$	$\kappa_1 = 2$	$\lambda_1 = 0$
Soliton II	$(r_0)_2 = -3$	$\kappa_2 = 2$	$\lambda_2 = -2$

En este caso interaccionan un soliton que se propaga en la direccion $+x$ con un soliton de igual amplitud y fase pero con velocidad nula.

Las figuras 4.3 y 4.4 son se obtienen con los siguientes valores

$\alpha = 2$	$\delta = -1$		
Soliton I	$(r_0)_1 = -3$	$\kappa_1 = 2$	$\lambda_1 = -2$
Soliton II	$(r_0)_2 = -3$	$\kappa_2 = 2$	$\lambda_2 = 2$

En este caso interaccionan dos solitones de igual amplitud y fase que se propagan en direcciones contrarias.

Las figuras 4.5 y 4.6 se corresponden a los siguientes datos

$\alpha = 2$	$\delta = -1$		
Soliton I	$(r_0)_1 = -3$	$\kappa_1 = 3$	$\lambda_1 = -1$
Soliton II	$(r_0)_2 = -2$	$\kappa_2 = 2$	$\lambda_2 = -2$

En este caso interaccionan dos solitones diferentes que se propagan en la direccion $+x$.

En todos estos casos se puede observar desfases cuando ocurre la interacción. Esta característica es común en interacciones entre solitones. En los casos anteriormente examinados se observan desfases durante la interacción. Este fenómeno es característico en las interacciones entre solitones.

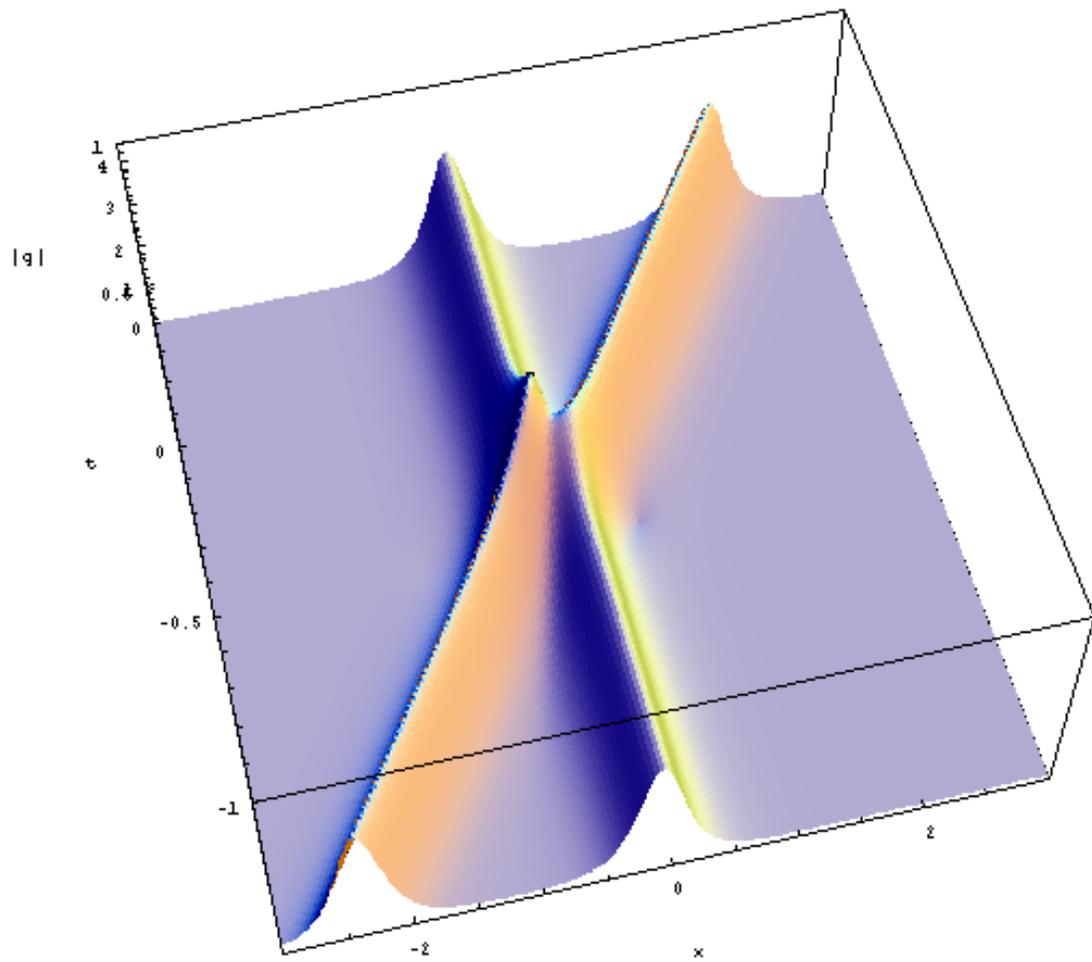


Figura 4.1: Grafica de $|q|$ en función de x, t para dos solitones. En este caso interaccionan un soliton que se propaga en la dirección positiva del eje x con un soliton de igual amplitud y fase pero con velocidad nula.

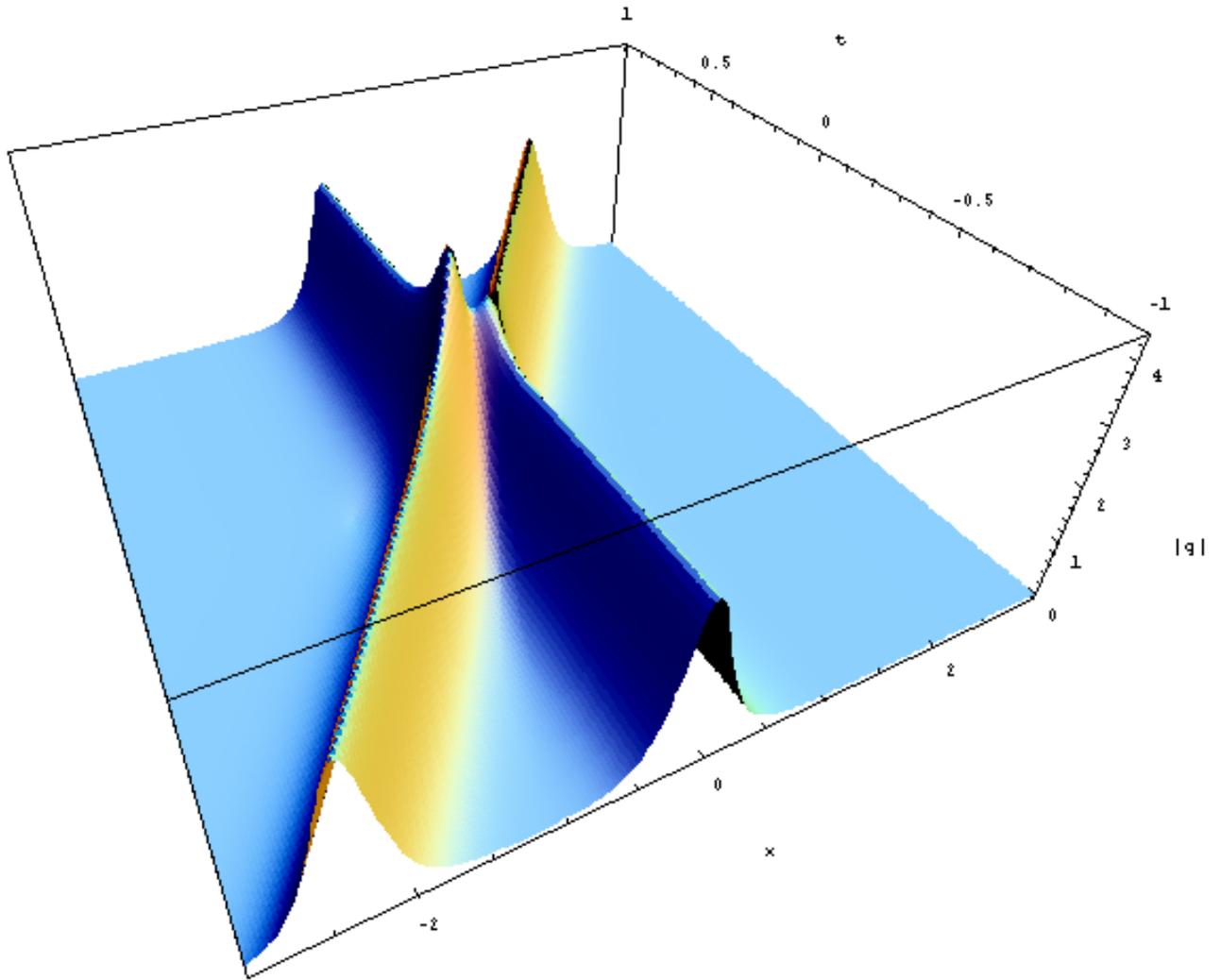


Figura 4.2: Grafica que muestra la interacción ilustrada en la Figura 4.1 desde otro punto de observación.

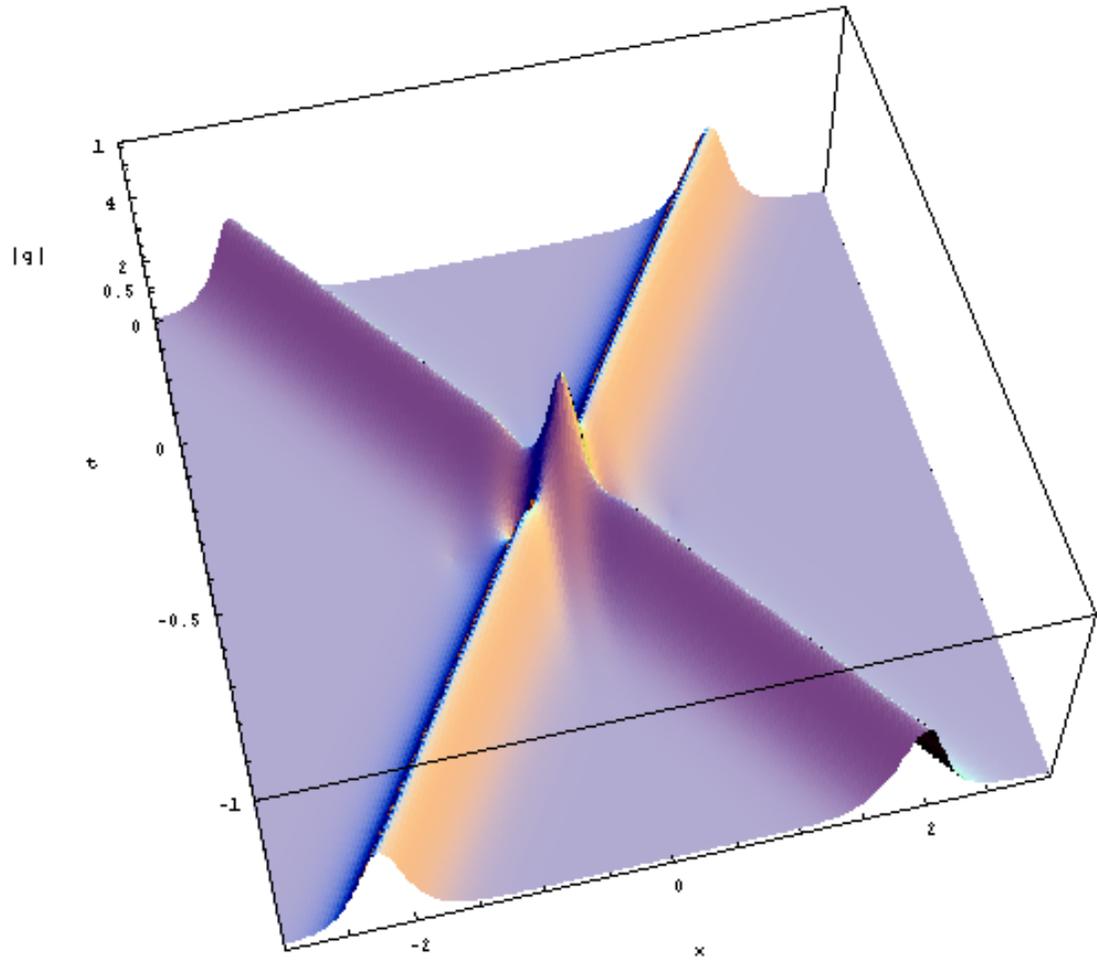


Figura 4.3: Grafica de $|q|$ en función de x, t para dos solitones. En este caso interactúan dos solitones de igual amplitud y fase que se propagan en direcciones contrarias.

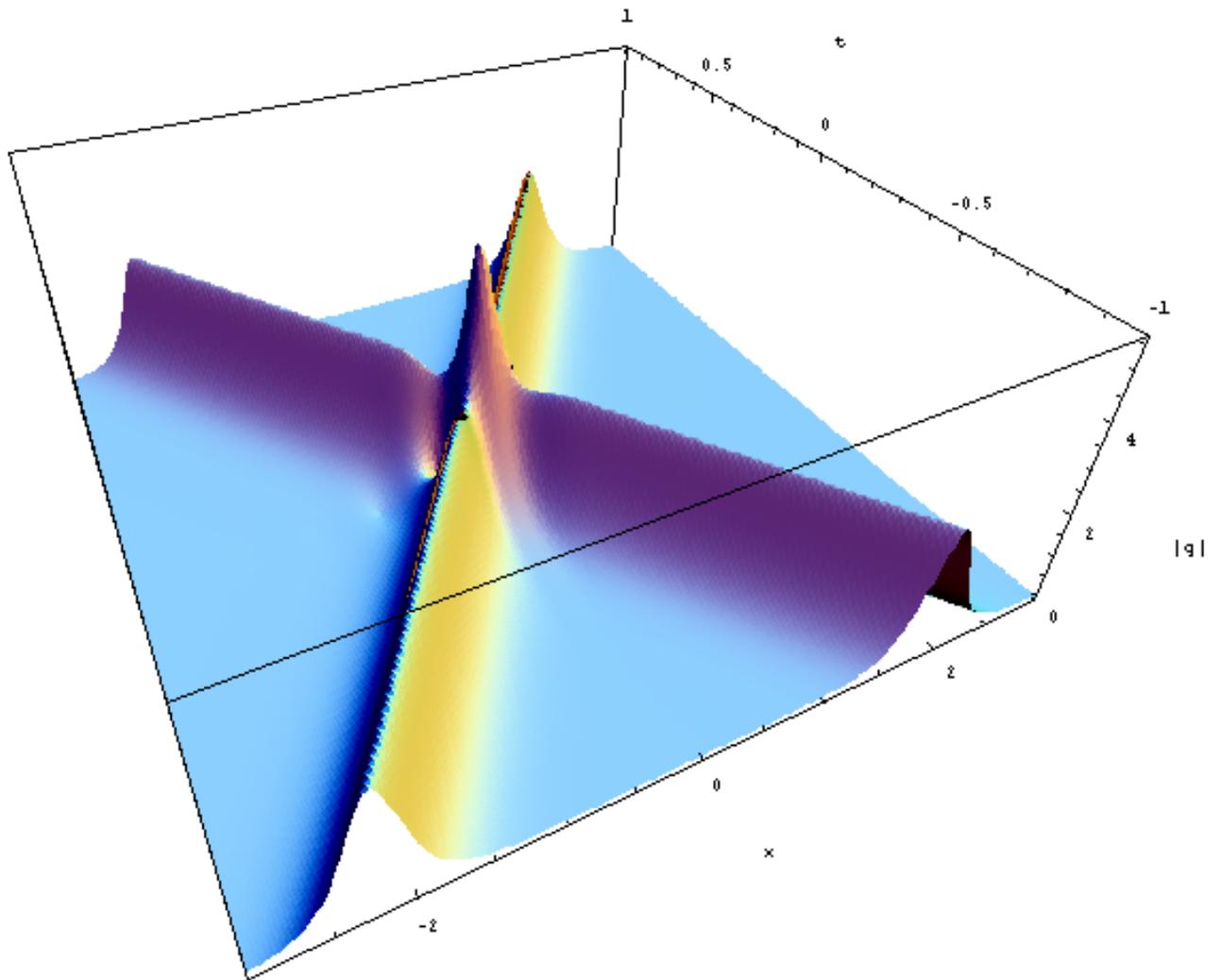


Figura 4.4: Grafica que muestra la interacción ilustrada en la Figura 4.3 desde otro punto de observación.

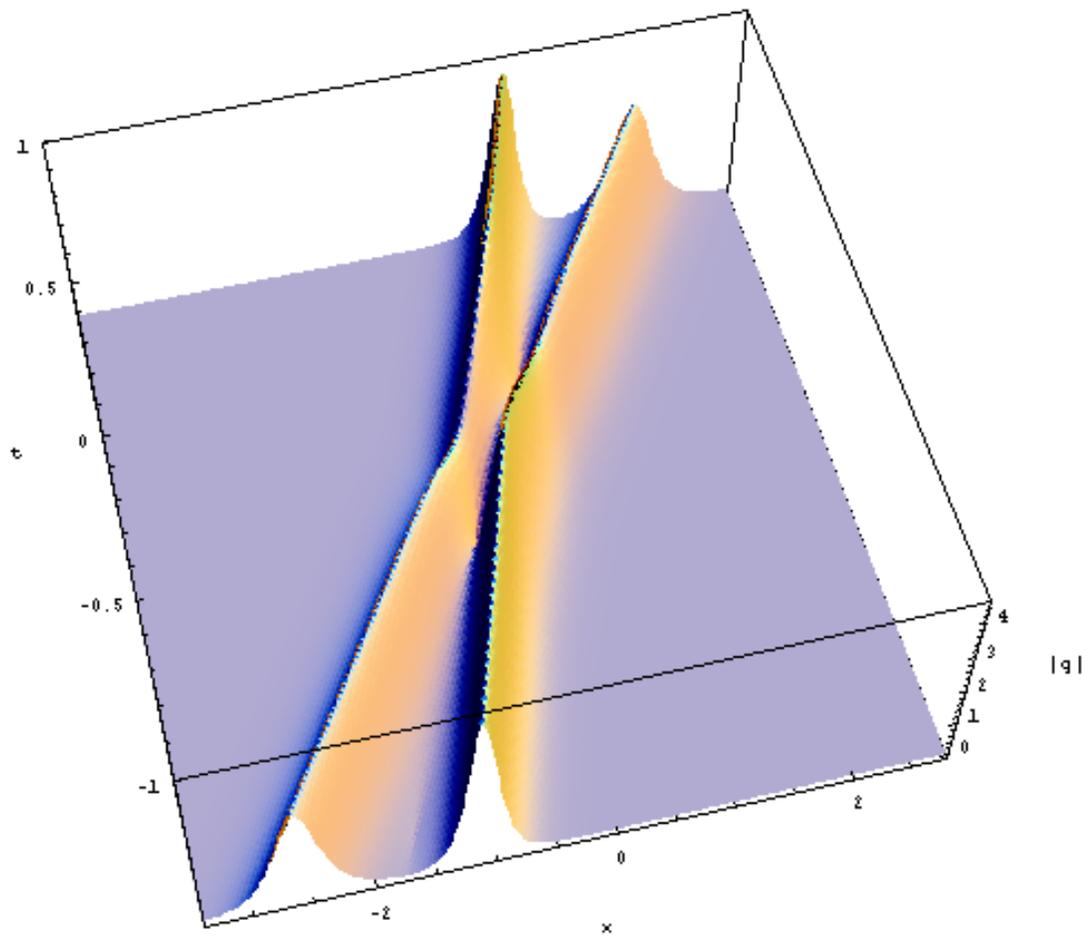


Figura 4.5: Grafica de $|q|$ en función de x, t para dos solitones. En este caso interaccionan dos solitones con diferente amplitud, velocidad y fase que se propagan en la dirección positiva del eje x .

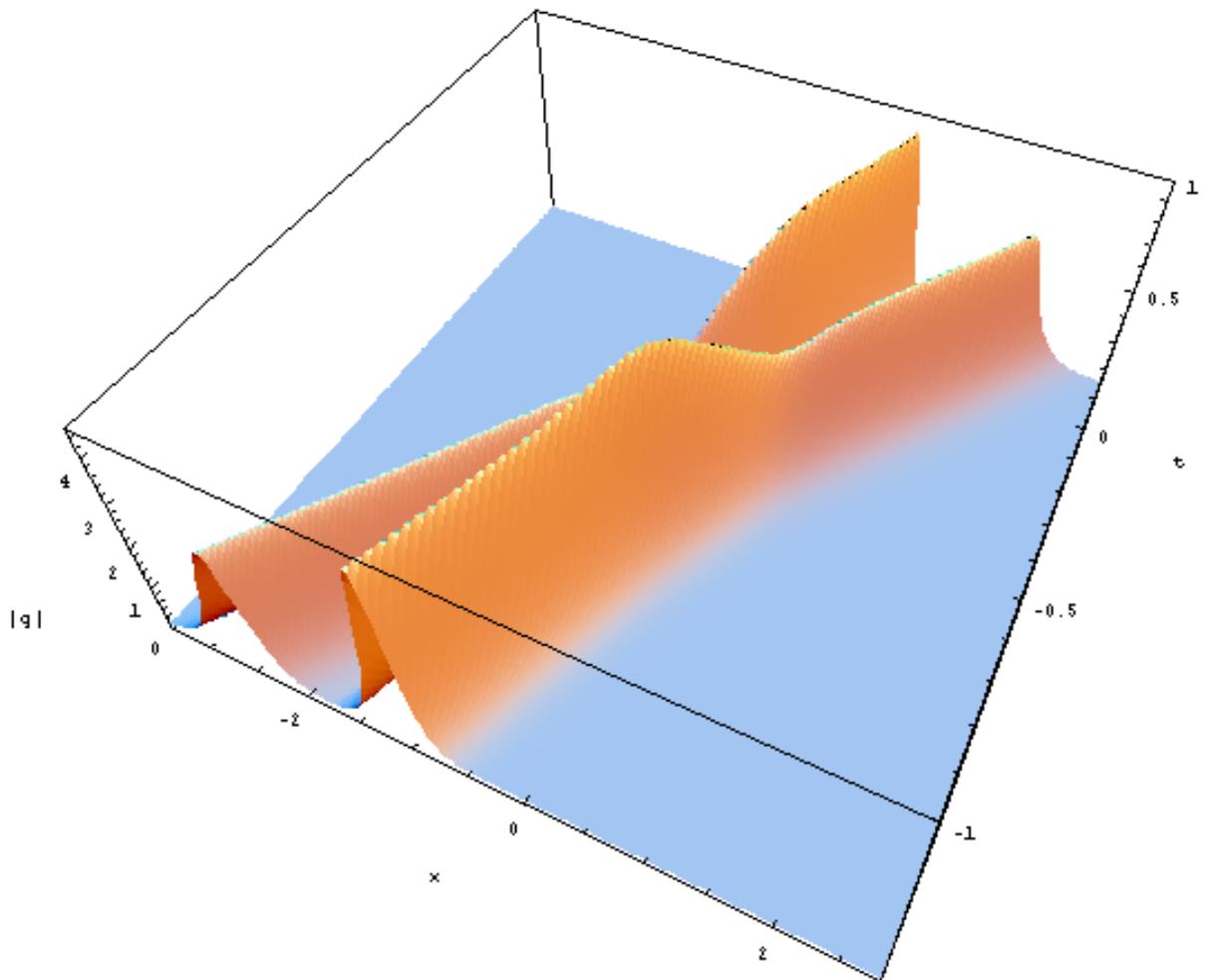


Figura 4.6: Grafica que muestra la interacción ilustrada en la Figura 4.5 desde otro punto de observación.

4.1.4. Solución con tres Solitones

Ahora se ilustra la solución con tres solitones de la ecuación NLS. Para ello se estudia el caso particular $N = 3$ de las ecuaciones (4.14)-(4.17). En forma similar a la sección 4.1.3 se grafica $|q|$ en función de x, t para diferentes valores de $(r_0)_1, (r_0)_2, (r_0)_3, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Las figuras 4.7 y 4.8 son obtenidas utilizando los siguientes datos:

$\alpha = 2$	$\delta = -1$		
Soliton I	$(r_0)_1 = -3$	$\kappa_1 = 3$	$\lambda_1 = -2$
Soliton II	$(r_0)_2 = -3$	$\kappa_2 = 3$	$\lambda_2 = 0$
Soliton III	$(r_0)_3 = -3$	$\kappa_3 = 3$	$\lambda_3 = 2$

En este caso interaccionan tres solitones de igual amplitud y fase. Dos de ellos se propagan con velocidades contrarias y otro posee velocidad nula.

Las figuras 4.9 y 4.10 son obtenidas utilizando los siguientes datos:

$\alpha = 2$	$\delta = -1$		
Soliton I	$(r_0)_1 = -3$	$\kappa_1 = 3$	$\lambda_1 = -2$
Soliton II	$(r_0)_2 = -2$	$\kappa_2 = 2$	$\lambda_2 = -1$
Soliton III	$(r_0)_3 = -3$	$\kappa_3 = 3$	$\lambda_3 = 2,5$

En este caso interaccionan tres solitones diferentes. Dos de ellos se propagan en la dirección positiva del eje x, el otro soliton viaja en dirección contraria.

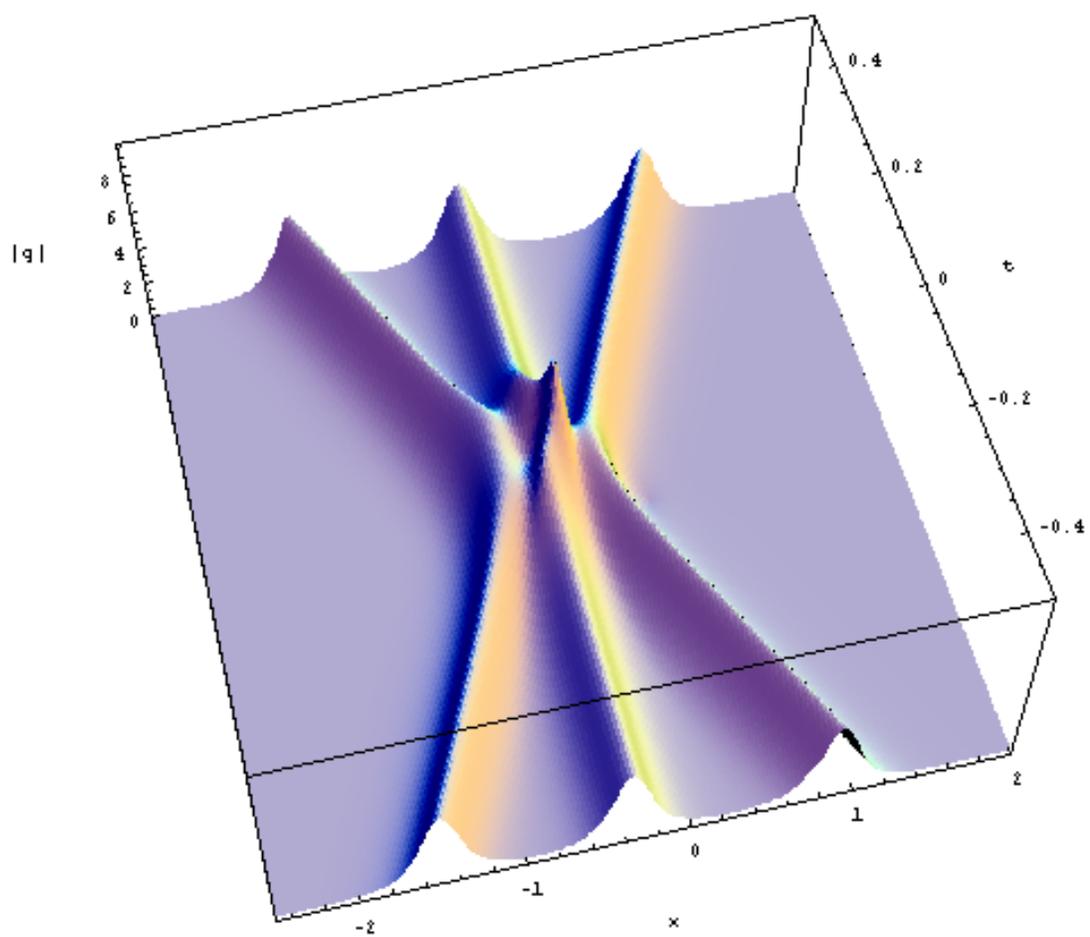


Figura 4.7: Grafica de $|q|$ en función de x, t para tres solitones. En este caso interaccionan tres solitones de igual amplitud y fase. Dos de ellos se propagan con velocidades contrarias y el otro posee velocidad nula.

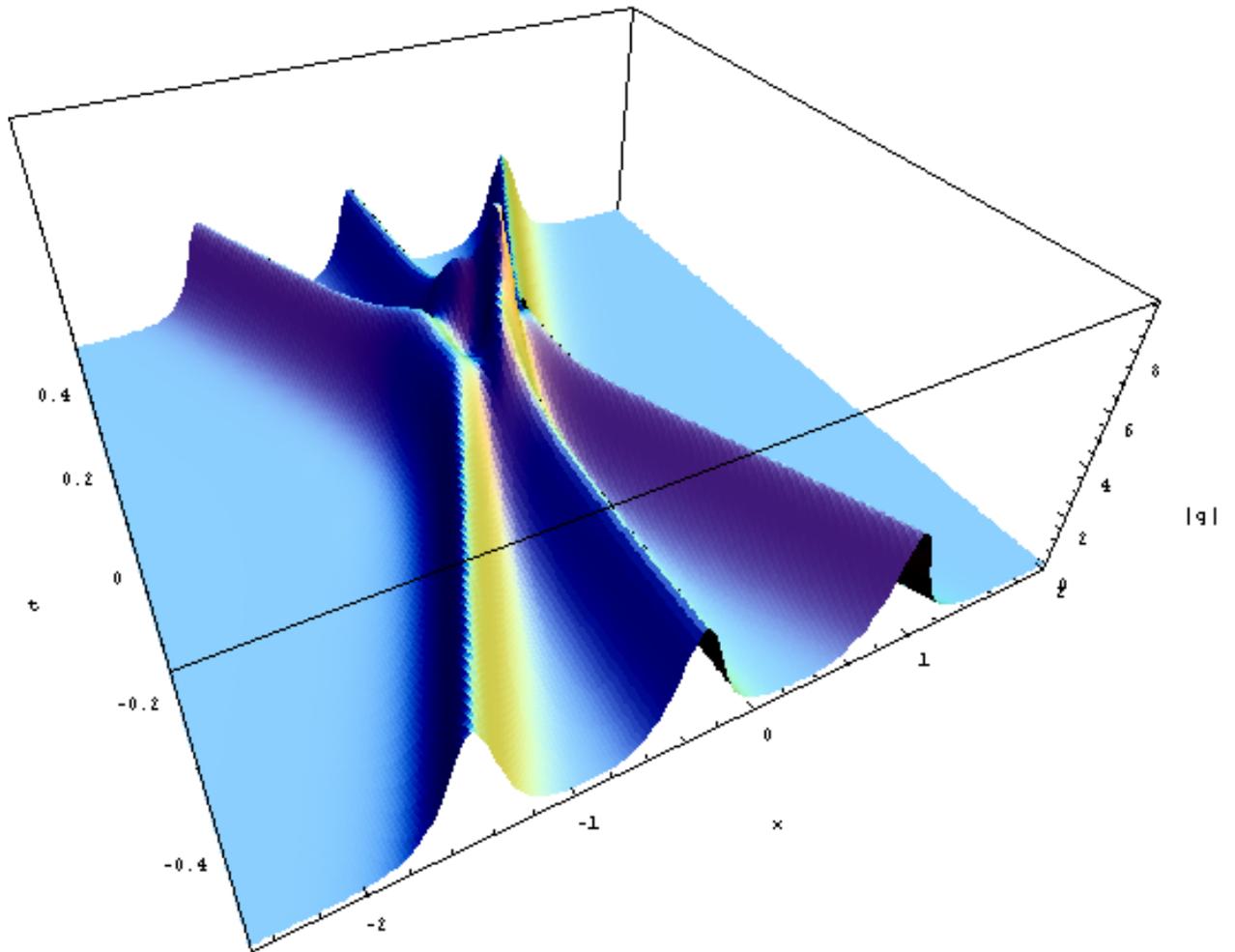


Figura 4.8: Grafica que muestra la interacción ilustrada en la Figura 4.7 desde otro punto de observación.

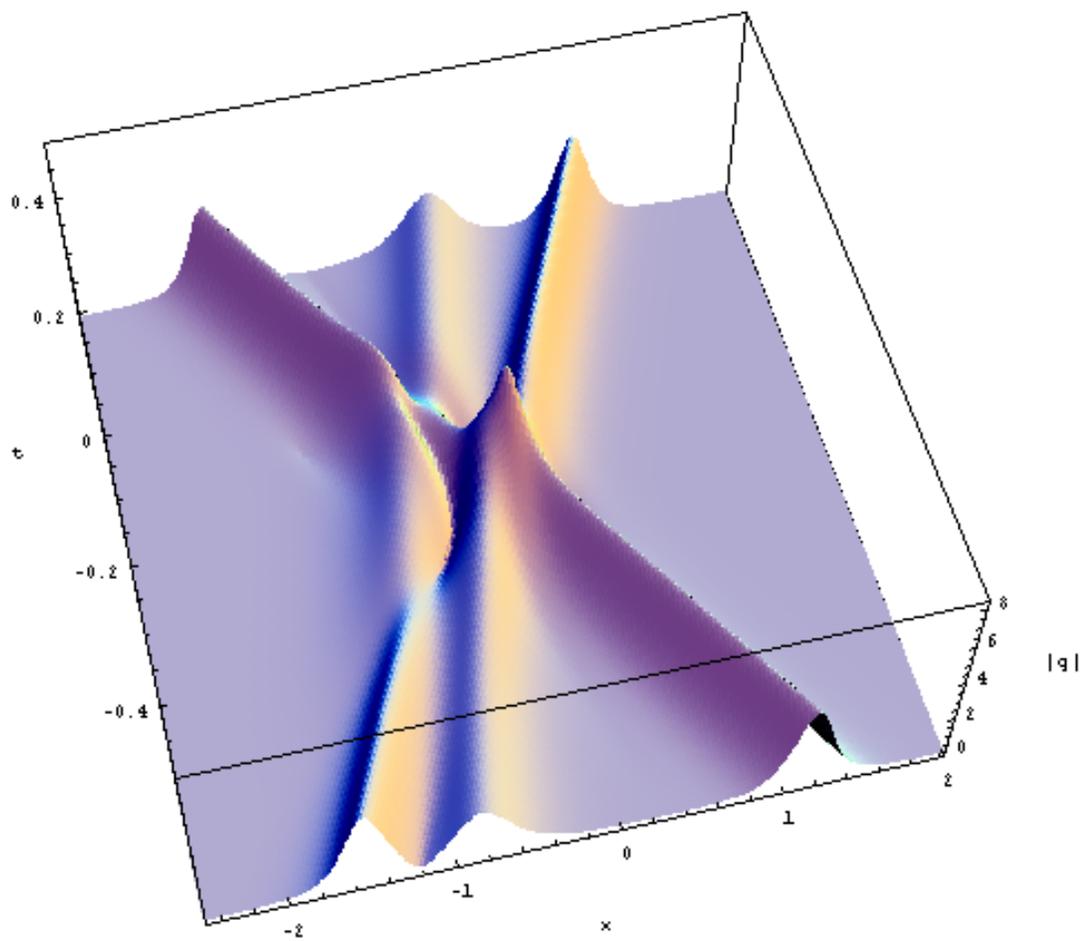


Figura 4.9: Grafica de $|q|$ en función de x, t para tres solitones. En este caso interactúan tres solitones diferentes. Dos de ellos se propagan en la dirección positiva del eje x , el otro soliton viaja en dirección contraria.

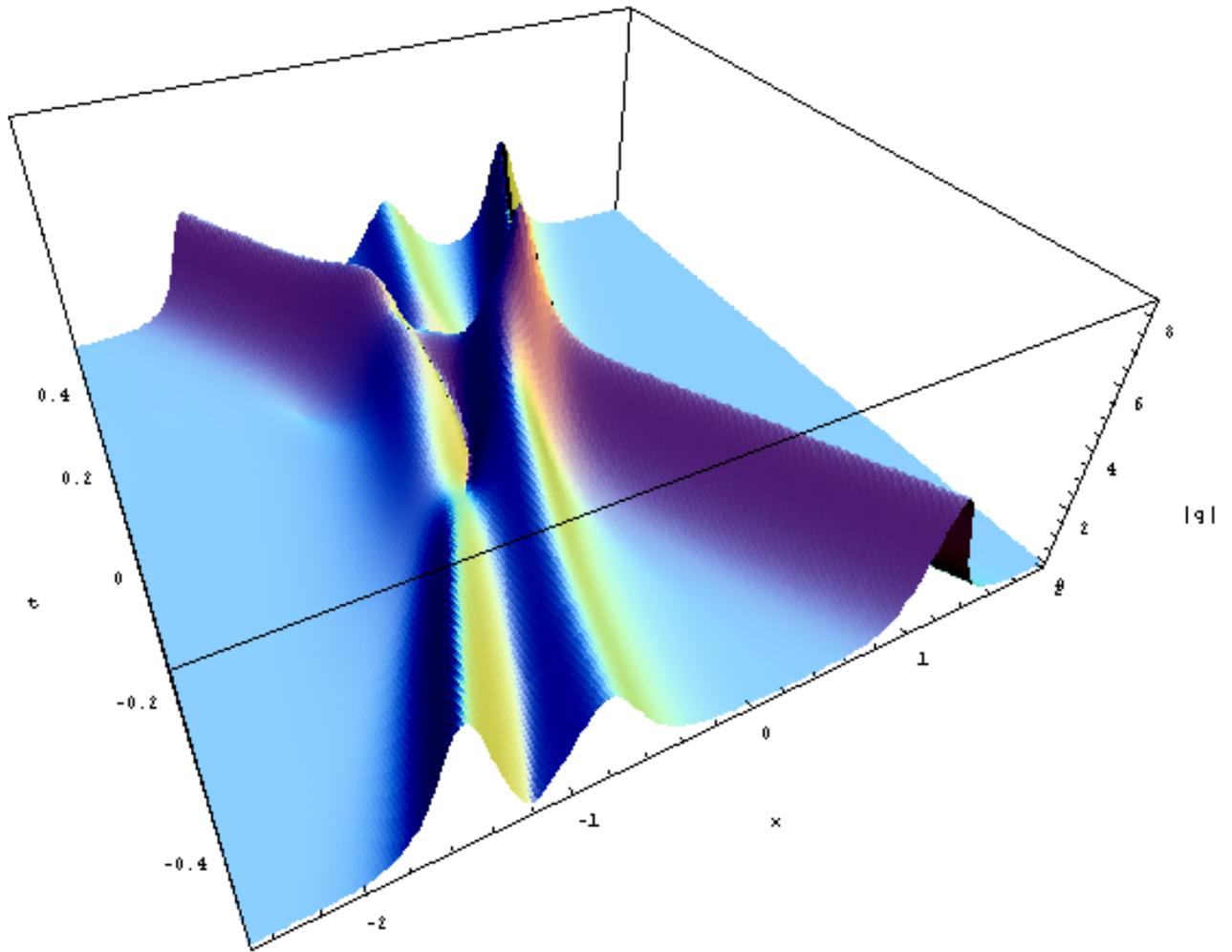


Figura 4.10: Grafica que muestra la interacción ilustrada en la Figura 4.9 desde otro punto de observación.

4.2. Multisolitones brillantes de la ecuación vectorial NLS para medios isótopos

En la sección 4.1.1 se observó que los términos r_0 , κ , λ hacen referencia a características dinámicas del soliton. En la solución multisolitónica de la ecuación vectorial NLS estas constantes intervienen en la forma $(r_0)_{jk}$, κ_{jk} , λ_{jk} con $j = 1, 2, \dots, M$ y $k = 1, 2, \dots, N$. El subíndice k se refiere a cada uno de los solitones y el subíndice j a una dirección en el espacio.

En esta sección se tratará la ecuación vectorial NLS para medios isótopos. En este caso

$$\begin{aligned}\kappa_{jk} &= \kappa_{lk} \equiv \kappa_k \\ \lambda_{jk} &= \lambda_{lk} \equiv \lambda_k\end{aligned}$$

para todo $j, l = 1, 2, \dots, M$. Teniendo en cuenta la notación anterior, la solución multisolitónica de la ecuación vectorial NLS en un medio isótopo está dada por

$$q_j(x, t) = \sum_{k=1}^N L_{jk}(x, t) \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (4.26)$$

donde las funciones L_{jk} satisfacen el sistema de ecuaciones $(MN) \times (MN)$

$$L_{jk}(x, t) + \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \eta_{jklmn} L_{lm}(x, t) e^{\beta_k + \beta_n^*} = -(r_0)_{jk} e^{\beta_k}, \quad (4.27)$$

donde

$$\eta_{jklmn} = \frac{-(r_0)_{jk} (r_0)_{ln}^*}{\alpha \delta [(\kappa_m + \kappa_n) + i(\lambda_m - \lambda_n)] [(\kappa_k + \kappa_n) + i(\lambda_k - \lambda_n)]}, \quad (4.28)$$

$$\beta_k = i(\alpha - \delta) \left\{ \frac{[\kappa_k^2 - \lambda_k^2](\alpha + \delta)t}{\alpha} - \lambda_k x \right\} - c_k, \quad (4.29)$$

con

$$c_k = (\alpha - \delta) \kappa_k \left[x + \frac{2\lambda_k(\alpha + \delta)t}{\alpha} \right], \quad (4.30)$$

para $j, l = 1, 2, \dots, M$, $k, m, n = 1, 2, \dots, N$.

En estas expresiones $(r_0)_{jk}$ son constantes complejas arbitrarias y κ_k , λ_k son constantes reales arbitrarias que cumplen la condición

$$\alpha(\kappa_k + \kappa_m) > 0 \quad \text{y} \quad \delta(\kappa_k + \kappa_m) < 0 \quad (4.31)$$

para todo k, m .

A continuación se analizan casos particulares de la solución dada en (4.26)-(4.31).

4.2.1. Solución Solitónica

La solución solitónica de la ecuación vectorial NLS (4.1) para un medio isótropo se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones (4.27) para el caso particular $N = 1$. Si se utiliza la notación $(r_0)_{j1} = (r_0)_j$, $\kappa_1 = \kappa$, $\lambda_1 = \lambda$, $\eta_{j1l1} = \eta_{jl}$, $\beta_1 = \beta$, $c_1 = c$, $L_{j1} = L_j$, las expresiones (4.28)-(4.30) adquieren la forma

$$\eta_{jl} = \frac{(r_0)_j (r_0)_l^*}{4|\alpha\delta|\kappa^2} \quad j, l = 1, 2, \dots, M, \quad (4.32)$$

$$\beta = i(\alpha - \delta) \left\{ \frac{[\kappa^2 - \lambda^2](\alpha + \delta)t}{\alpha} - \lambda x \right\} - c, \quad (4.33)$$

con

$$c = (\alpha - \delta)\kappa \left[x + \frac{2\lambda(\alpha + \delta)t}{\alpha} \right]. \quad (4.34)$$

De acuerdo con (4.27), L_j satisface el sistema de ecuaciones $M \times M$

$$L_j(x, t) + \sum_{l=1}^M \eta_{jl} L_l(x, t) e^{\beta + \beta^*} = -r_0 e^{\beta} \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (4.35)$$

Resolviendo (4.35) con respecto a $L_j(x, t)$ se obtiene

$$L_j(x, t) = -\frac{(r_0)_j e^{\beta}}{1 + \left[\sum_{l=1}^M \eta_{jl} \right] e^{-2c}}. \quad (4.36)$$

Definiendo una constante φ tal que $\sum_{l=1}^M \eta_{jl} = e^{-2\varphi}$, (4.36) se escribe como

$$L_j(x, t) = -\frac{(r_0)_j}{2} e^{\beta + c + \varphi} \operatorname{sech}(c + \varphi).$$

Por lo tanto (4.13) permite establecer que la solución solitónica de la ecuación vectorial NLS para medios isótropos está dada por:

$$q_j(x, t) = -\frac{\kappa(r_0)_j}{\sqrt{\frac{\sum_{l=1}^M (r_0)_l (r_0)_l^*}{|\alpha\delta|}}} e^{i(\alpha - \delta) \left\{ \frac{[\kappa^2 - \lambda^2](\alpha + \delta)t}{\alpha} - \lambda x \right\}} \operatorname{sech} \left\{ (\alpha - \delta)\kappa \left[x + \frac{2\lambda(\alpha + \delta)t}{\alpha} \right] + \varphi \right\}. \quad (4.37)$$

con $j = 1, 2, \dots, M$.

El resultado (4.37) muestra que la amplitud y la fase de cada una de las componentes vectoriales q_j depende de las constantes $(r_0)_l$ propias de las demás componentes.

4.2.2. Solución multisolitónica cuando $|t| \rightarrow \infty$

En esta sección se analiza la solución multisolitónica de la ecuación vectorial NLS para medios isótropos cuando $|t| \rightarrow \infty$ permaneciendo x finito.

En el anexo B se demuestra que el sistema de ecuaciones (4.27) cuando $|t| \rightarrow \infty$ adquiere la forma

$$L_{jk}(x, t) + \sum_{l=1}^M \eta_{jklkk} L_{lk}(x, t) e^{\beta_k + \beta_k^*} \simeq -(r_0)_{jk} e^{\beta_k}.$$

Este sistema es similar a (4.21). Si se define una constante φ_k tal que $\sum_{l=1}^M \eta_{lklkk} = e^{-2\varphi_k}$, de (4.23) se obtiene

$$L_{jk}(x, t) \simeq -\frac{(r_0)_{jk}}{2} e^{\beta_k + c_k + \varphi_k} \operatorname{sech}(c_k + \varphi_k) \quad \text{cuando } |t| \rightarrow \infty.$$

En consecuencia

$$L_{jk}(x, t) \simeq -\frac{\kappa_k (r_0)_{jk}}{\sqrt{\frac{\sum_{l=1}^M (r_0)_{lk} (r_0)_{lk}^*}{|\alpha\delta|}}} e^{i(\alpha-\delta)\left\{\frac{[\kappa_k^2 - \lambda_k^2](\alpha+\delta)t}{\alpha} - \lambda_k x\right\}} \times \operatorname{sech}\left\{(\alpha - \delta)\kappa_k \left[x + \frac{2\lambda_k(\alpha + \delta)t}{\alpha}\right] + \varphi_k\right\}. \quad (4.38)$$

De (4.26) y (4.38) se deduce que la solución multisolitónica de la ecuación vectorial NLS (4.1) cuando $|t| \rightarrow \infty$ esta dada por

$$q_j(x, t) \simeq \sum_{k=1}^N -\frac{\kappa_k (r_0)_{jk}}{\sqrt{\frac{\sum_{l=1}^M (r_0)_{lk} (r_0)_{lk}^*}{|\alpha\delta|}}} e^{i(\alpha-\delta)\left\{\frac{[\kappa_k^2 - \lambda_k^2](\alpha+\delta)t}{\alpha} - \lambda_k x\right\}} \times \operatorname{sech}\left\{(\alpha - \delta)\kappa_k \left[x + \frac{2\lambda_k(\alpha + \delta)t}{\alpha}\right] + \varphi_k\right\}. \quad (4.39)$$

Comparando (4.39) con (4.37) se infiere que cuando $|t| \rightarrow \infty$ con x finito la solución multisolitónica de la ecuación vectorial NLS para medios isotropos es aproximadamente igual al la suma de N solitones que se propagan en forma independiente.

4.2.3. Solución con dos solitones de la ecuación acoplada no lineal de Schrödinger de tipo Manakov

En esta sección se investiga el caso particular $M = 2$ de la ecuación vectorial NLS (4.1). Esto lleva a establecer el sistema de ecuaciones acopladas no lineales de Schrödinger de tipo

Manakov

$$iq_{1t} + \chi q_{1xx} + 2\mu q_1[|q_1|^2 + |q_2|^2] = 0, \quad (4.40)$$

$$iq_{2t} + \chi q_{2xx} + 2\mu q_2[|q_1|^2 + |q_2|^2] = 0, \quad (4.41)$$

donde χ y μ están definidos por las relaciones (4.2),(4.3).

Para este caso particular son validos los resultados establecidos en el estudio de la ecuación vectorial NLS. En caso de medios isótopos se aplica las relaciones obtenidas en la sección 4.2. De acuerdo con esto se puede establecer que la solución con N solitones brillantes del sistema de ecuaciones no lineales definido por (4.40) y (4.41) cuando $|t| \rightarrow \infty$ esta dada por

$$q_1(x, t) \simeq \sum_{k=1}^N - \frac{\kappa_1(r_0)_{1k}}{\sqrt{\frac{|(r_0)_{1k}|^2 + |(r_0)_{2k}|^2}{|\alpha\delta|}}} e^{i(\alpha-\delta)\left\{\frac{[\kappa_k^2 - \lambda_k^2](\alpha+\delta)t}{\alpha} - \lambda_k x\right\}} \times \operatorname{sech} \left\{ (\alpha - \delta)\kappa_k \left[x + \frac{2\lambda_k(\alpha + \delta)t}{\alpha} \right] + \varphi_k \right\}, \quad (4.42)$$

$$q_2(x, t) \simeq \sum_{k=1}^N - \frac{\kappa_2(r_0)_{2k}}{\sqrt{\frac{|(r_0)_{1k}|^2 + |(r_0)_{2k}|^2}{|\alpha\delta|}}} e^{i(\alpha-\delta)\left\{\frac{[\kappa_k^2 - \lambda_k^2](\alpha+\delta)t}{\alpha} - \lambda_k x\right\}} \times \operatorname{sech} \left\{ (\alpha - \delta)\kappa_k \left[x + \frac{2\lambda_k(\alpha + \delta)t}{\alpha} \right] + \varphi_k \right\}. \quad (4.43)$$

Con el fin de ilustrar la interacción entre dos solitones de las ecuaciones (4.40)-(4.41) se estudia el caso particular $N = 2$. La solución $q_1(x, t)$, $q_2(x, t)$ se obtiene a partir del sistema de ecuaciones 4×4 definido por (4.27)-(4.30) con $M = 2$ y $N = 2$. Se grafica $|q_1|$ y $|q_2|$ en función de x para diferentes valores de t y de los parametros $(r_0)_{11}$, $(r_0)_{12}$, $(r_0)_{21}$, $(r_0)_{22}$, κ_1 , κ_2 , λ_1 , λ_2 que caracterizan a cada uno de los solitones.

Se estudia una solución de dos solitones con los valores

$\alpha = 2$	$\delta = -1$			
SOLITON I	$(r_0)_{11} = -3$	$(r_0)_{21} = -2$	$\kappa_1 = 3$	$\lambda_1 = -2$
SOLITON II	$(r_0)_{12} = -1$	$(r_0)_{22} = -4$	$\kappa_2 = 2$	$\lambda_2 = -1$

En las figuras 4.11-4.13 se muestra la grafica de $|q_1|$ en función de x por medio de la curva de color rojo y la grafica de $|q_2|$ en función de x en color azul. Se presentan las graficas para distintos valores de t , en un intervalo de tiempos donde se da la colisión entre solitones.

La figura 4.11 muestra la solución con valores de t donde la solución se aproxima a dos solitones independientes. En la figura 4.12 se presenta el proceso de interacción entre los solitones de q_1 y q_2 . Para los valores de t en la figura 4.13 la solución recupera el carácter de dos solitones independientes.

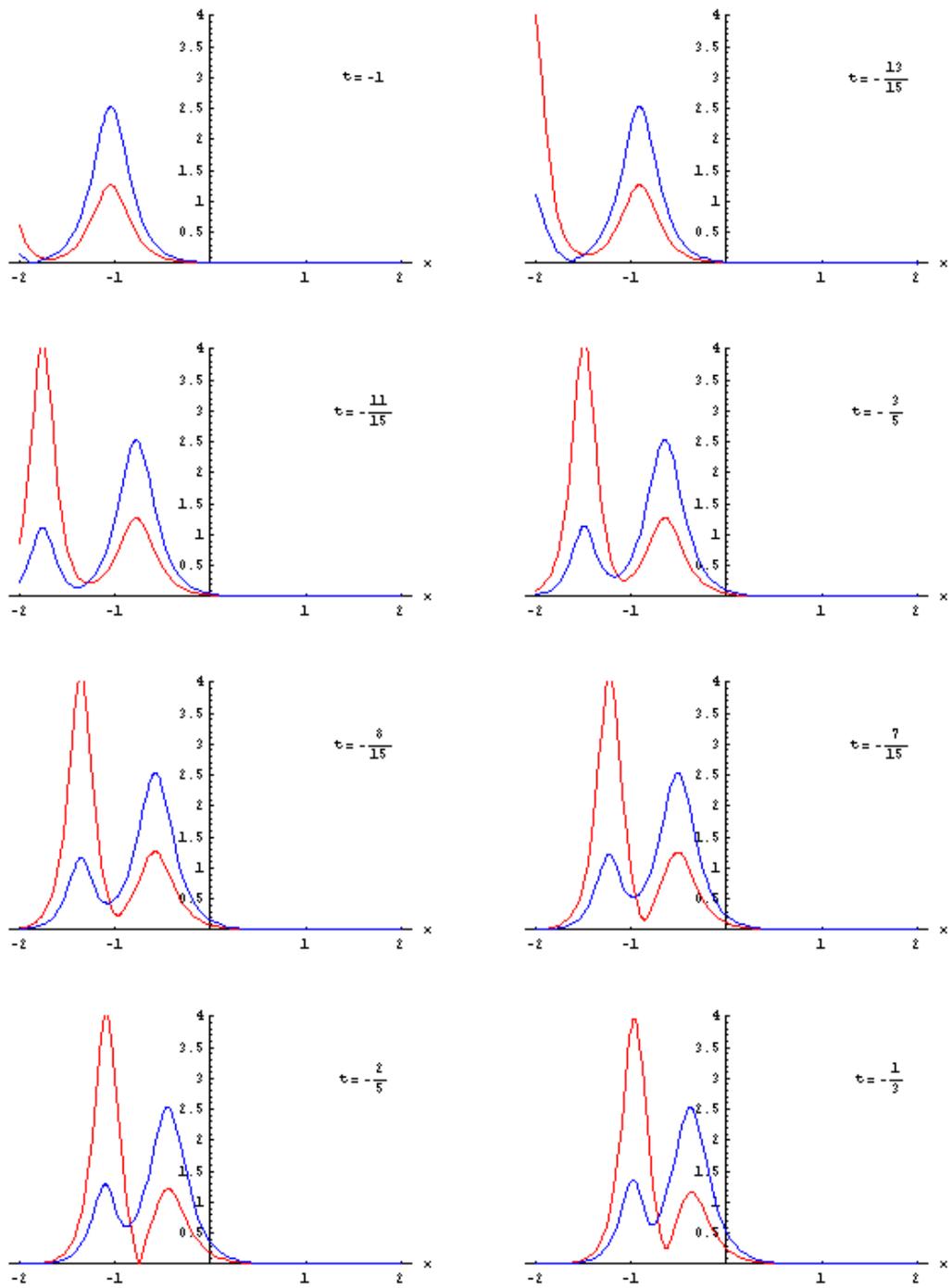


Figura 4.11: Solución con dos solitones de la de la ecuación acoplada no lineal de Schrödinger de tipo Manakov.

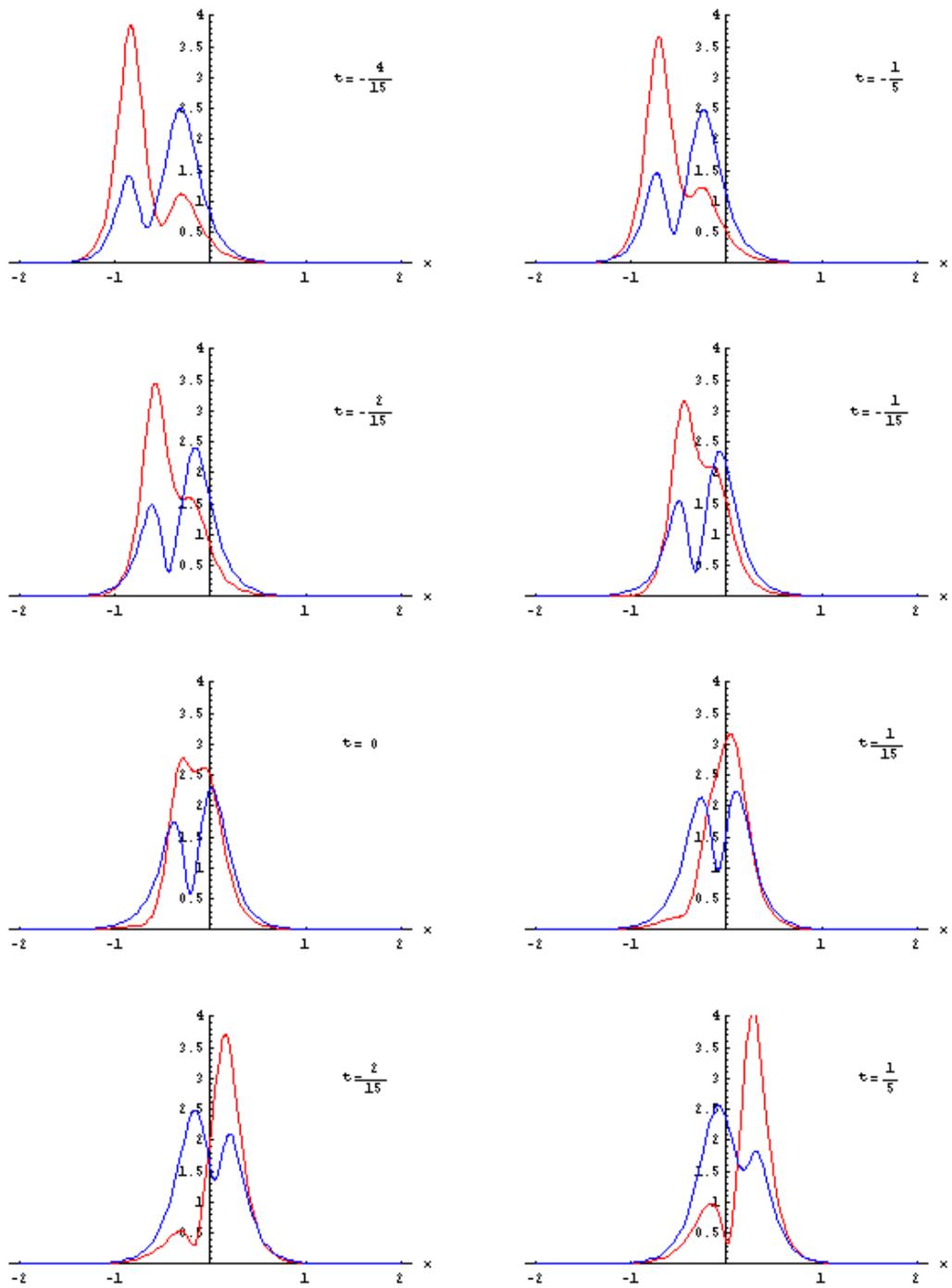


Figura 4.12: Solución con dos solitones de la de la ecuación acoplada no lineal de Schrödinger de tipo Manakov.

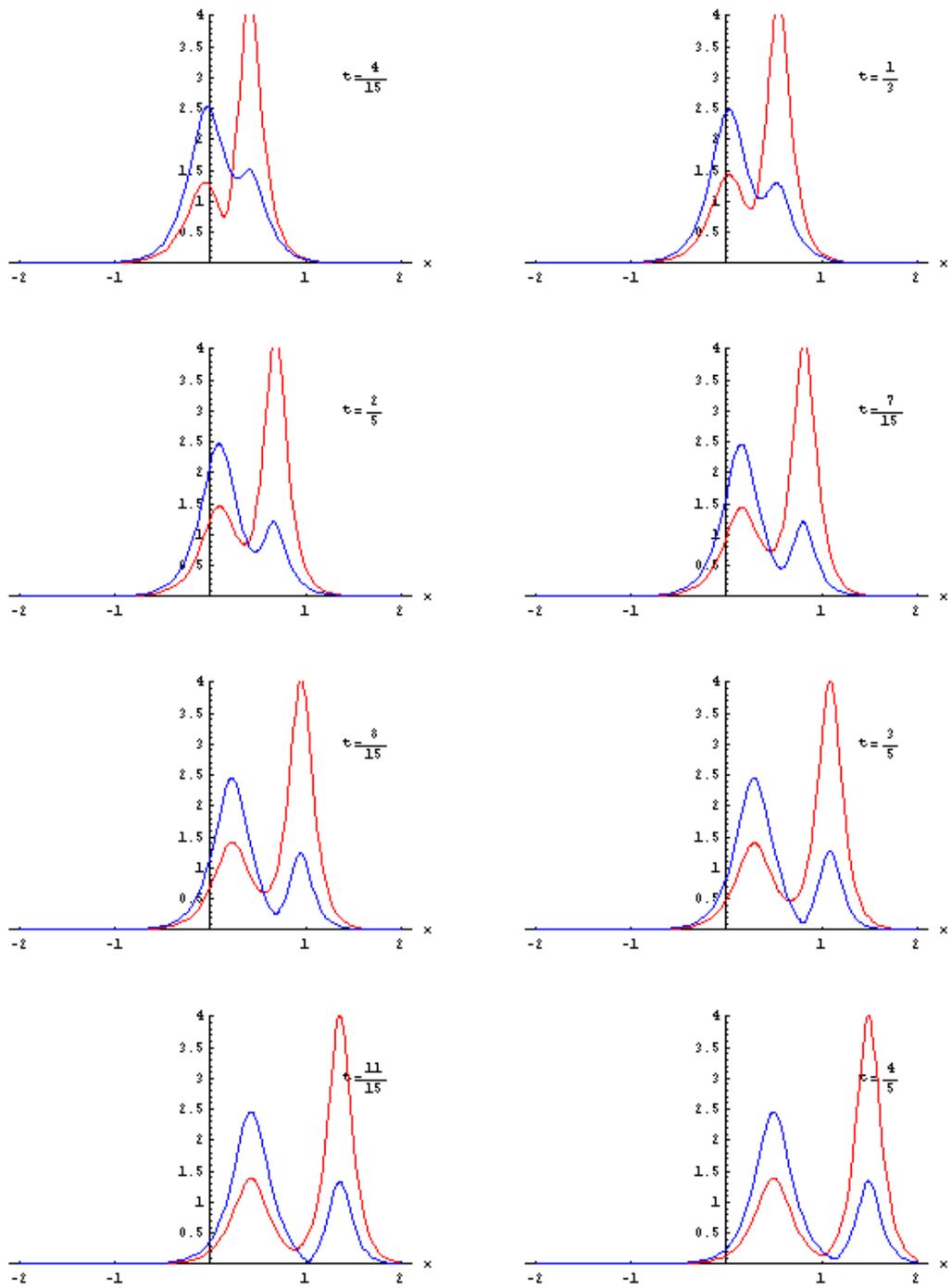


Figura 4.13: Solución con dos solitones de la de la ecuación acoplada no lineal de Schrödinger de tipo Manakov.

Conclusiones

La solución multisolitonica de la ecuación vectorial NLS

$$iq_{jt} + \chi q_{jxx} + 2\mu q_j \sum_{l=1}^M |q_l|^2 = 0 \quad j = 1, 2, \dots, M,$$

se puede deducir en forma analítica por medio del método de esquemas ZS.

La solución con N solitones requiere resolver un sistema de ecuaciones algebraicas de orden $(NM) \times (NM)$ definido por (4.5).

Aplicando la solución al estudio de medios isótropos, se obtiene que la forma de la solución cuando $|t| \rightarrow \infty$ manteniendo x finito es aproximadamente igual a la suma de N solitones que se propagan en forma independiente. Este resultado se predice teóricamente en [8] y puede interpretarse como una condición inicial para la solución multisolitonica de la ecuación vectorial NLS.

Para tiempos finitos se da un proceso de interacción entre solitones y la solución multisolitonica tiene una forma muy extensa que se obtiene a partir del sistema de ecuaciones (4.27). En este trabajo se presentan graficas de las soluciones obtenidas para algunos casos particulares de M y N .

Todos los resultados obtenidos muestran que la solución multisolitonica de la ecuación vectorial NLS planteada en los artículos [10] y [11] solo describen la forma de las soluciones cuando $|t| \rightarrow \infty$ sin tener en cuenta los procesos de interacción entre solitones.

Recomendaciones

Los resultados establecidos en este trabajo requieren que se solucione un sistema de ecuaciones algebraicas de orden $(NM) \times (NM)$. Para soluciones con muchos solitones este sistema de ecuaciones lleva a expresiones matemáticas muy extensas que presentan gran dificultad para ser graficadas por medio de un software matemático. Por esta razón se recomienda hacer un estudio del sistema de ecuaciones (4.5) con el fin de efectuar aproximaciones que simplifiquen la solución.

También se recomienda utilizar la teoría de perturbaciones y los resultados de este trabajo para analizar ecuaciones diferenciales no lineales que difieren por términos infinitesimales de la ecuación vectorial NLS.

Bibliografía

- [1] **AKHMEDIEV**, Nail. General theory of solitons; Kluwer Academic Publishers. 2001.
- [2] **DORREN**, H.I.S. On the integrability of nonlinear partial differential equations; arXiv:solv-int/9807007v1 22Jul1998.
- [3] **DRAZIN**, P.G. **JOHNSON**, R.S. Solitons: an Introduction; Cambridge University Press. 1992.
- [4] **INFELD**, E. **ROWLANDS**, G. Nonlinear waves, solitons and chaos; Cambridge University Press. 1990.
- [5] **KIVSHAR**, Yuri S. **LUTHER-DAVIES**, Barry. Dark optical solitons: physics and applications; Elsevier Science B.V. 1998.
- [6] **KIVSHAR**, Yuri S. **STEGEMAN**, George I. Spatial Optical Solitons; Optics&Photonics News. February 2002.
- [7] **NEWELL**, A.C. **MOLONEY**, J.V. Nonlinear Optics ; Addison-Wesley Publishing Company. 1992.
- [8] **PERELMAN**, Galina. Asymptotic stability of multi-soliton solutions for nonlinear Schrödinger equations; arXiv:math-ph/0309021 v1 9Sep2003.
- [9] **VALDMAN**, David. Soliton Solutions of the Nonlinear Schrödinger Equation with application to Bose-Einstein Condensation; http://www.cims.nyu.edu/vigrenew/waves/projects/valdman/Valdman_report.doc
- [10] **ZEN**, Freddy P. **ELIM**, Hendry I. Lax Pair Formulation and Multi-soliton Solution of the Integrable Vector Nonlinear Schrödinger Equation; arXiv: solv-int/9902010 v2 19 Feb 1999.
- [11] **ZEN**, Freddy P. **ELIM**, Hendry I. Multi-soliton Solution of the Integrable Coupled Nonlinear Schrödinger Equation of Manakov Type; arXiv: hep-th/9812215.

Anexos

Anexo A

En este anexo se estudia la ecuación integral matricial de Marchenko (3.12) con el fin de obtener las relaciones $(r_0)_{jk}^* = \pm(s_0)_{jk}$, $\rho_{jk}^* = -\sigma_{jk}$ utilizadas en el capítulo tres.

A partir de (3.12) se establece las ecuaciones integrales escalares

$$d_{jl}(x, z; t) + \int_x^\infty c_j(x, y; t)r_l(y, z; t)dy = 0 \quad (\text{A.1})$$

y

$$c_j(x, z; t) + s_j(x, z; t) + \int_x^\infty \sum_{l=1}^M d_{jl}(x, y; t)s_l(y, z; t)dy = 0, \quad (\text{A.2})$$

para $j, l = 1, 2, \dots, M$.

En forma similar al estudio de (3.13) y (3.14) se debe encontrar cada $c_j(x, z; t)$. Combinando (A.1) y (A.2) se obtiene

$$c_j(x, z; t) + s_j(x, z; t) - \int_x^\infty \sum_{l=1}^M \left[\int_x^\infty c_j(x, y'; t)r_l(y', y; t)dy' \right] s_l(y, z; t)dy = 0. \quad (\text{A.3})$$

Introducir los resultados (3.10), (3.11) en esta ecuación integral permite establecer

$$\begin{aligned} c_j(x, z; t) + \sum_{k=1}^N (s_0)_{jk} e^{\sigma_{jk}(\alpha x - \delta z) - i\sigma_{jk}^2(\alpha^2 - \delta^2)t/\alpha} \\ - \int_x^\infty \sum_{l=1}^M \left[\int_x^\infty c_j(x, y'; t) \sum_{n=1}^N (r_0)_{ln} e^{\rho_{ln}(\delta y' - \alpha y) + i\rho_{ln}^2(\alpha^2 - \delta^2)t/\alpha} dy' \right] \\ \times \sum_{k=1}^N (s_0)_{lk} e^{\sigma_{lk}(\alpha y - \delta z) + i\sigma_{lk}^2(\delta^2 - \alpha^2)t/\alpha} dy = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Por las características de (A.4) resulta conveniente buscar una solución de la forma

$$c_j(x, z; t) = \sum_{k=1}^N H_{jk}(x, t) e^{-\delta\sigma_{jk}z}. \quad (\text{A.5})$$

La ecuación (A.4) requiere que el conjunto de $H_{jk}(x, t)$ con $j = 1, 2, \dots, M$, $k = 1, 2, \dots, N$ (donde M y N son naturales finitos) debe satisfacer el sistema de ecuaciones de orden $(MN) \times (MN)$ definido por

$$H_{jk}(x, t)e^{-\delta\sigma_{jk}z} + (s_0)_{jk}e^{-i\sigma_{jk}^2(\alpha^2-\delta^2)t/\alpha+\sigma_{jk}(\alpha x-\delta z)} - \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N H_{jm}(x, t)(r_0)_{ln}(s_0)_{lk}e^{i(\alpha^2-\delta^2)(\rho_{ln}^2-\sigma_{lk}^2)t/\alpha} \times \int_x^\infty e^{\delta(\rho_{ln}-\sigma_{jm})y'} dy' \int_x^\infty e^{-\alpha(\rho_{ln}-\sigma_{lk})y} dy \cdot e^{-\delta\sigma_{lk}z} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Si la condición (3.19) es satisfecha, (A.6) toma la forma

$$H_{jk}(x, t)e^{-\delta\sigma_{jk}z} + (s_0)_{jk}e^{-i\sigma_{jk}^2(\alpha^2-\delta^2)t/\alpha+\sigma_{jk}(\alpha x-\delta z)} + \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N H_{jm}(x, t)(r_0)_{ln}(s_0)_{lk}e^{i(\alpha^2-\delta^2)(\rho_{ln}^2-\sigma_{lk}^2)t/\alpha} \times \frac{e^{-\alpha(\rho_{ln}-\sigma_{lk})x}}{\alpha(\rho_{ln}-\sigma_{lk})} \frac{e^{\delta(\rho_{ln}-\sigma_{jm})x}}{\delta(\rho_{ln}-\sigma_{jm})} e^{-\delta\sigma_{lk}z} = 0. \quad (\text{A.7})$$

Teniendo en cuenta que $c_j(x, x; t) = C_j(x, t) = \pm q_j^*(x, t)$ la expresión (A.7) permite establecer

$$\pm q_j^*(x, t) = \sum_{k=1}^N H_{jk}(x, t)e^{-\delta\sigma_{jk}x} = \sum_{k=1}^N F_{jk}(x, t). \quad (\text{A.8})$$

Evaluando (A.7) en $z = x$ se obtiene

$$F_{jk} + \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N F_{jm} \frac{(r_0)_{ln}(s_0)_{lk}}{\alpha\delta(\rho_{ln}-\sigma_{lk})(\rho_{ln}-\sigma_{jm})} e^{i(\alpha^2-\delta^2)(\rho_{ln}^2-\sigma_{lk}^2)t/\alpha} e^{-(\alpha-\delta)(\rho_{ln}-\sigma_{lk})x} = -(s_0)_{jk}e^{-i\sigma_{jk}^2(\alpha^2-\delta^2)t/\alpha+(\alpha-\delta)\sigma_{jk}x} \quad (\text{A.9})$$

En (3.21) se establece que $q_j(x, t) = \sum_{k=1}^N L_{jk}(x, t)$. Como consecuencia $L_{jk} = \pm F_{jk}^*$. Introduciendo este resultado en (A.9) se encuentra

$$L_{jk} + \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N L_{jm} \frac{(r_0)_{ln}^*(s_0)_{lk}^*}{\alpha\delta(\rho_{ln}^*-\sigma_{lk}^*)(\rho_{ln}^*-\sigma_{jm}^*)} e^{-i(\alpha^2-\delta^2)(\rho_{ln}^{*2}-\sigma_{lk}^{*2})t/\alpha} e^{-(\alpha-\delta)(\rho_{ln}^*-\sigma_{lk}^*)x} = -[\pm(s_0)_{jk}^*]e^{i\sigma_{jk}^{*2}(\alpha^2-\delta^2)t/\alpha+(\alpha-\delta)\sigma_{jk}^*x}. \quad (\text{A.10})$$

Comparar (A.10) con (3.22) permite establecer

$$\rho_{jk} = -\sigma_{jk}^*, \quad (\text{A.11})$$

$$(r_0)_{jk} = \pm (s_0)_{jk}^*, \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} & L_{jm} \frac{(r_0)_{lk}}{(\rho_{lk} - \sigma_{ln})(\rho_{jm} - \sigma_{ln})} e^{i(\alpha^2 - \delta^2)\rho_{lk}^2 t/\alpha} e^{-(\alpha - \delta)\rho_{lk} x} \\ = & L_{lm} \frac{(r_0)_{jk}}{(\rho_{lm} - \sigma_{ln})(\rho_{jk} - \sigma_{ln})} e^{i(\alpha^2 - \delta^2)\rho_{jk}^2 t/\alpha} e^{-(\alpha - \delta)\rho_{jk} x}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Anexo B

En este anexo se estudia el sistema de ecuaciones (4.27) cuando $|t| \rightarrow \infty$ manteniendo x finito. Al efectuar este limite resulta mas cómodo trabajar con la expresión (A.10) para medios isótropos

$$L_{jk} + \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \Lambda_{klmn} L_{jm} e^{\beta_k + \beta_n^*} = -(r_0)_{jk} e^{\beta_k}, \quad (\text{B.1})$$

donde

$$\Lambda_{klmn} = \frac{\pm (r_0)_{ik} (r_0)_{ln}^*}{\alpha \delta [(\kappa_k + \kappa_n) + i(\lambda_k - \lambda_n)] [(\kappa_m + \kappa_n) + i(\lambda_m - \lambda_n)]}, \quad (\text{B.2})$$

y los β_k son definidos por las relaciones (4.29)-(4.30).

En el siguiente calculo se supone que todos los coeficientes $\frac{\lambda_k \kappa_k (\alpha^2 - \delta^2)}{\alpha}$ de t en cada uno de los c_k definidos en (4.30) son negativos.

Primero se estudia el limite cuando $t \rightarrow \infty$. La ecuación (B.1) se puede escribir como

$$L_{jk} + \sum_{l=1}^M \Lambda_{klkk} L_{jk} e^{\beta_k + \beta_k^*} + \sum_{l=1}^M \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^N \Lambda_{klkn} L_{jk} e^{\beta_k + \beta_n^*} + \sum_{l=1}^M \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^N \sum_{n=1}^N \Lambda_{klmn} L_{jm} e^{\beta_k + \beta_n^*} = -(r_0)_{jk} e^{\beta_k}. \quad (\text{B.3})$$

Si $t \rightarrow -\infty$ cada $c_k \rightarrow \infty$, por lo tanto $e^{\beta_k} \rightarrow 0$. Para este caso (B.3) permite establecer

$$L_{jk} + \sum_{l=1}^M \Lambda_{klkk} L_{jk} e^{\beta_k + \beta_k^*} \simeq -(r_0)_{jk} e^{\beta_k} \quad \text{cuando } t \rightarrow -\infty.$$

esto es

$$L_{jk} \left[1 + \left(\sum_{l=1}^M \Lambda_{klkk} \right) e^{\beta_k + \beta_k^*} \right] \simeq -(r_0)_{jk} e^{\beta_k} \quad \text{cuando } t \rightarrow -\infty. \quad (\text{B.4})$$

Para evaluar el limite cuando $t \rightarrow \infty$ primero se multiplica (B.1) por $e^{-\beta_k} \prod_{p=1}^N e^{-\beta_p^*}$. Se obtiene

$$L_{jk} e^{-2\beta_k} \prod_{p=1}^N e^{-\beta_p^*} + \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \Lambda_{klmn} L_{jm} e^{-\beta_k} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq n}}^N e^{-\beta_p^*} = -(r_0)_{jk} e^{-\beta_k} \prod_{p=1}^N e^{-\beta_p^*}. \quad (\text{B.5})$$

Esta ecuación se puede escribir como

$$\begin{aligned}
L_{jk}e^{-2\beta_k} \prod_{p=1}^N e^{-\beta_p^*} + \sum_{l=1}^M \Lambda_{klkk} L_{jk} e^{-\beta_k} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^N e^{-\beta_p^*} + \sum_{l=1}^M \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^N \Lambda_{klkn} L_{jk} e^{-\beta_k} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq n}}^N e^{-\beta_p^*} \\
+ \sum_{l=1}^M \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^N \sum_{n=1}^N \Lambda_{klmn} L_{jm} e^{-\beta_k} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq n}}^N e^{-\beta_p^*} = -(r_0)_{jk} e^{-\beta_k} \prod_{p=1}^N e^{-\beta_p^*}. \quad (\text{B.6})
\end{aligned}$$

Si $t \rightarrow \infty$ cada $c_k \rightarrow -\infty$, por lo tanto $e^{-\beta_k} \rightarrow 0$. Para este caso (B.6) permite establecer

$$L_{jk}e^{-2\beta_k} \prod_{p=1}^N e^{-\beta_p^*} + \sum_{l=1}^M \Lambda_{klkk} L_{jk} e^{-\beta_k} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^N e^{-\beta_p^*} \simeq -(r_0)_{jk} e^{-\beta_k} \prod_{p=1}^N e^{-\beta_p^*} \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Esto es

$$L_{jk} \left[1 + \left(\sum_{l=1}^M \Lambda_{klkk} \right) e^{\beta_k + \beta_k^*} \right] \simeq -(r_0)_{jk} e^{\beta_k} \quad \text{cuando } t \rightarrow -\infty. \quad (\text{B.7})$$

Los resultados (B.3), (B.5) y la expresión (B.2) permiten establecer que cuando $|t| \rightarrow \infty$

$$L_{jk} \left[1 + \left(\sum_{l=1}^M \frac{(r_0)_{kk} (r_0)_{lk}^*}{4|\alpha\delta|\kappa_k^2} \right) e^{\beta_k + \beta_k^*} \right] \simeq -(r_0)_{jk} e^{\beta_k}. \quad (\text{B.9})$$

Se puede aplicar un procedimiento similar para demostrar que (B.9) es valido cuando los coeficientes $\frac{\lambda_k \kappa_k (\alpha^2 - \delta^2)}{\alpha}$ toman cualquier valor finito.

También existe un razonamiento físico que permite encontrar (B.9) sin rigurosidad matemática. Sea el sistema de ecuaciones (4.27)

$$L_{jk}(x, t) + \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \eta_{jklmn} L_{lm}(x, t) e^{\beta_k + \beta_n^*} = -(r_0)_{jk} e^{\beta_k}. \quad (\text{B.10})$$

Si todos los coeficientes $\frac{\lambda_k \kappa_k (\alpha^2 - \delta^2)}{\alpha}$ son diferentes, cuando $|t| \rightarrow \infty$ cada soliton se encontrara muy alejado de los otros, en consecuencia L_{jk} en (B.10) solo se vera afectado por el k -ésimo soliton por lo tanto las sumas con respecto a n y m en (B.1) solo corren para $n = m = k$. En este caso se obtiene

$$L_{jk}(x, t) + \sum_{l=1}^M \eta_{jklkk} L_{lk}(x, t) e^{\beta_k + \beta_k^*} \simeq -(r_0)_{jk} e^{\beta_k} \quad \text{cuando } |t| \rightarrow \infty. \quad (\text{B.11})$$

Este resultado lleva a establecer la ecuación (B.9).