

**ESTUDIO TEORICO DE LAS ORBITAS DE LOS CUERPOS CELESTES E
IMPLEMENTACIÓN DE UN PROGRAMA DE COMPUTACIÓN COMO
APLICACIÓN**

**FELIX ANDERSON MELO MORA
FRANCISCO RICARDO MUÑOZ MUÑOZ**

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE FÍSICA
SAN JUAN DE PASTO
2004**

**ESTUDIO TEORICO DE LAS ORBITAS DE LOS CUERPOS CELESTES E
IMPLEMENTACIÓN DE UN PROGRAMA DE COMPUTACIÓN COMO
APLICACIÓN**

**FELIX ANDERSON MELO MORA
FRANCISCO RICARDO MUÑOZ MUÑOZ**

**TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARA OPTAR EL
TITULO DE FISICO**

**ASESOR
MSc. ALBERTO QUIJANO VODNIZA**

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE FÍSICA
SAN JUAN DE PASTO
2004**

“Las ideas y conclusiones aportadas en este trabajo de grado, son responsabilidad exclusiva de los autores”.

Artículo primero del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966, emanado del Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de aceptación:

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

San Juan de Pasto, 22 de Junio del 2004.

AGRADECIMIENTOS

Deseamos expresar nuestros agradecimientos:

A mi padre JOSE FELIX MELO y a mi madre BLANCA MORA por estar siempre ahí, en esos momentos donde más los necesito y los necesitare. Su apoyo desinteresado y su incondicional amistad, han forjado en mí los deseos de seguir adelante.

A nuestro asesor: MSc. ALBERTO QUIJANO VODNIZA, por su valiosa colaboración en dirigir este trabajo de grado, con entusiasmo y voluntad.

A todas la personas que de alguna manera intervinieron y colaboraron en la realización de este trabajo.

AGRADECIMIENTOS

Ahora que culmino otra etapa de mi vida quiero, agradecer sinceramente a mis padres y a mi hermano. Sin su apoyo ésto no sería una realidad. Así mismo a toda mi familia, gracias por su confianza en mí.

También expreso mi profundo agradecimiento al asesor de este trabajo, el MSc. ALBERO QUIJANO V. ya que siempre estuvo al frente de cada paso que se dio para poder llevar a feliz termino este trabajo. De la misma manera quiero expresar mi aprecio a mis compañeros de clase, quienes en todo momento estuvieron allí haciendo muy amena la permanencia en la universidad.

DEDICATORIA

Dedico este trabajo con mucho cariño, amor y gratitud a las personas más importantes de mí vida.

A mis padres JOSE FELIX MELO y BLANCA MORA: Ustedes son los gestores que han hecho posible hacer este sueño una realidad. Su incondicional apoyo, su abnegado sacrificio por fin hoy recogerá frutos.

A mis hijos SEBASTIAN MELO y MARIA PAULA MELO, continuar con fortaleza en los momentos críticos de la vida, tienen sentido cuando existen personas que te premian con una sonrisa. Este esfuerzo...es por ustedes.

DEDICATORIA

Dedico este trabajo con mucho cariño:

A mis padres FRANCISCO MUÑOZ Y ROSA I. MUÑOZ por estar siempre a mi lado, apoyándome en todo sentido, y que gracias a su esfuerzo hoy se culmina una etapa más de mi vida.

A mi hermano OSCAR MUÑOZ, pues es una persona muy importante en mi vida, a quien le deseo todo lo mejor en sus proyectos.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCION	
1. OBJETIVOS	18
1.1 OBJETIVO GENERAL	18
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	18
2. EL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS	19
2.1 INTRODUCCIÓN	19
2.2 LA IMPORTANCIA DEL CENTRO DE MASA	19
2.3 LEYES DE KEPLER	21
2.3.1 Primera ley o ley de las cónicas y la ecuación de trayectoria	22
2.3.2 Ley de las áreas	27
2.3.3 La ley de los periodos	28
2.4 LA ECUACIÓN VIS-VIVA	30
2.5 EL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS POR INTEGRACIÓN NUMÉRICA	32
2.5.1 Las series f y g	32
2.5.2 Las series de Taylor	35
2.5.3 El método Runge-Kutta	38
2.5.3.1 Métodos Runge-Kutta de segundo orden	38
2.5.3.2 Métodos Runge-Kutta de quinto orden	39
3. LA GEOMETRÍA DE LAS ORBITAS	43
3.1 INTRODUCCIÓN	43
3.2 SISTEMA DE COORDENADAS	43
3.2.1 Sistema horizontal	43
3.2.2 Sistema ecuatorial horario	44
3.2.3 Sistema ecuatorial absoluto	45
3.2.4 Sistema eclíptico	45
3.2.5 Sistema geocéntrico del observador	46
3.2.6 Sistema geodésico	47
3.2.7 Coordenadas geográficas o astronómicas	48
3.3 TRANSFORMACIONES ENTRE LOS SISTEMAS DE COORDENADAS	48
3.3.1 Paso de horizontales a ecuatoriales horarias y viceversa	48
3.3.2 De ecuatoriales horarias a ecuatoriales absolutas	50
3.3.3 De ecuatoriales absolutas a eclípticas y viceversa	51
3.4 RELACIONES BÁSICAS	53
3.4.1 Definición del vector excentricidad	54
3.4.2 Relación entre momento angular y velocidad angular	57

3.4.3	Relación entre momento angular y anomalía verdadera	57
3.4.4	Relación entre anomalía verdadera y el parámetro D	57
3.4.5	Relación entre excentricidad, semiparámetro y el parámetro D	58
3.5	GEOMETRÍA Y TIEMPO	59
3.5.1	Formulación elíptica	59
3.5.2	Formulación hiperbólica	63
3.5.3	Formulación parabólica	65
3.6	ELEMENTOS ORBITALES	67
3.7	POSICIÓN Y VELOCIDAD A PARTIR DE LOS ELEMENTOS CLÁSICOS	69
3.7.1	Posición en la órbita	69
3.7.2	Velocidad en la órbita	70
3.7.3	La ubicación de astro con respecto a la Tierra	73
3.7.4	La posición de un astro con respecto a las coordenadas topocéntricas	75
3.8	PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS	80
3.8.1	Condiciones para órbitas circulares	85
3.8.2	Solución para el sistema en forma de un triángulo equilátero	87
3.8.3	Solución para una configuración el línea recta	87
3.8.4	Propiedades dinámicas de la solución	88
3.8.5	Solución para secciones cónicas	89
3.9	PERTURBACIONES	93
3.9.1	El método Cowell	94
3.9.2	El método Encke	98
3.9.3	Teoría de perturbaciones al problema de los dos cuerpos	97
3.9.4	Variación de parámetros	99
4.	APLICACIÓN DE LA RELATIVIDAD AL CÁLCULO DE ÓRBITAS	103
4.1	INTRODUCCIÓN	103
4.2	ÓRBITAS PLANETARIAS	103
4.2.1	La ecuación de movimiento en un campo Schwarzschild	103
4.2.2	Precesión del perihelio	107
5.	PROGRAMAS MODELO	112
5.1	INTRODUCCIÓN	112
5.2	PROGRAMA TG	112
5.3	PROGRAMA F Y G	112
5.4	PROGRAMA CLASELL	112
5.5	PROGRAMA POSVEL1	113
5.6	PROGRAMA VALOR INICIAL PARA UN MOVIMIENTO ELÍPTICO	113
6.	CONCLUSIONES	114
7.	RECOMENDACIONES	115
8.	BIBLIOGRAFÍA	116

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Sistema de referencia inercial para dos masas	20
Figura 2. Definición de cónica	25
Figura 3. Bajo fuerzas centrales, el vector posición barre áreas iguales en tiempos iguales.	28
Figura 4. Cuerpo situado en el perifoco	31
Figura 5. Sistema de coordenadas horizontales	44
Figura 6. Coordenadas ecuatoriales horarias	44
Figura 7. Coordenadas ecuatoriales absolutas	45
Figura 8. Coordenadas eclípticas	46
Figura 9. Coordenadas geocéntricas del observador	47
Figura 10. Latitud geodésica	48
Figura 11. Latitud geográfica del observador	48
Figura 12. Relación entre coordenadas horizontales y ecuatoriales horarias	49
Figura 13. Relación entre α, H y TSL	51
Figura 14. Relación entre coordenadas ecuatoriales absolutas y eclípticas	51
Figura 15. Plano de la órbita	53
Figura 16. La excentricidad en el plano de la órbita.	56
Figura 17. Círculo auxiliar para la formulación elíptica	60
Figura 18. Hipérbola auxiliar para la formulación hiperbólica	63
Figura 19. Los elementos orbitales	67
Figura 20. Definición de los vectores unitarios \hat{P}, \hat{Q}	69
Figura 21. Relación de los vectores unitarios $\hat{u}_\theta, \hat{u}_r$ con los \hat{P}, \hat{Q}	70
Figura 22. Rotación alrededor de eje x	74
Figura 23. Relación entre coordenadas ecuatoriales y las (ξ, η, ζ)	75
Figura 24. Determinación del vector topocéntrico	76
Figura 25. Relación entre las coordenadas geocéntricas y las nuevas coordenadas	77
Figura 26. Sistema inercial de los tres cuerpos con origen en uno de ellos	84

LISTA DE APENDICES

	pág.
APENDICE A: EL TIEMPO EN ASTRONOMÍA.	118
APENDICE B: CALCULOS EN RELATIVIDAD.	124

RESUMEN

Se hace un estudio general de las órbitas de cuerpos celestes empezando con los conceptos básicos manejados clásicamente para luego ser tratados desde el punto de vista relativista. A partir de dicho estudio se presentan unos programas modelo en el lenguaje BASIC. Dichos programas son un complemento y a la vez una aplicación del estudio.

ABSTRACT

A general study about the celestial bodies' orbits is made, beginning with the basic concepts used classically, so then they'll be treated from the relativistic point of view. Starting from this study some model programs in BASIC language are presented. Such programs are in as an application from the study.

INTRODUCCIÓN

El estudio teórico de las órbitas de cuerpos celestes es un tema que ha ido de la mano de los adelantos científicos: las telecomunicaciones, la exploración del universo. Al principio dicho estudio se relacionaba con hechos mitológicos pero con el paso del tiempo se le dio la verdadera importancia dejando atrás las ideas mitológicas y pasando al plano científico.

Esta monografía pretende ser una exposición clara y objetiva del tema de órbitas de cuerpos celestes, teniendo al final algunas muestras ejemplo de cómo desarrollar programas que faciliten los cálculos que hace un tiempo era muy difícil de realizar, tales como integraciones numéricas a mano y otros desarrollos matemáticos tediosos. Pensando en esto se presenta este trabajo, pues se pretende dar luces a estudiantes interesados en desarrollar investigaciones en astrofísica donde el estudio de órbitas es imprescindible. Para poder desarrollarlo se debe de partir de conceptos básicos de física, los cuales son familiares para todo aquel que ha tomado un curso de mecánica clásica; luego se introduce conceptos de la teoría general de la relatividad que llevan a explicaciones más correctas.

El proceso de desarrollo del trabajo se basa en la recolección de información sobre el tema, luego se presentan unos programas modelo en el lenguaje GW BASIC, los cuales se dejan a consideración del lector para su ejecución o si se desea hacer algunos cambios, pues el desarrollo de los programas de computación no son una camisa de fuerza. En los programas presentados, por lo general se asumen conocidos algunos datos, los cuales se incluyen en los programas mismos, a manera de DATA. Algunos datos se han tomado del libro "The Astronomical Almanac". Otra manera de presentar los programas es hacerlo de manera que el programa que se presenta pida los datos. Por lo tanto definir una manera de desarrollar un programa sería coartar la imaginación de quien desee investigar aspectos relacionados con órbitas, y este no es el caso, pues se desea permitir que el lector sea libre y se tome esa libertad, como lo sugiere Oppenheimer.

1. OBJETIVOS

1.1 OBJETIVO GENERAL

Realizar un estudio detenido del aspecto teórico que está involucrado en el cálculo de órbitas de cuerpos celestes y aplicar esto al lenguaje GWBASIC para facilitar los cálculos.

1.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS

- ◆ Recolectar información existente sobre el tema de órbitas con el fin de desarrollar un trabajo lo más completo posible.
- ◆ Hacer un análisis sobre el estudio del cálculo de órbitas, sintetizando y aplicando los conceptos básicos para una mayor comprensión al desarrollo de los diferentes temas que se estudien.
- ◆ Describir los principios fundamentales de la mecánica celeste, para poder aplicarlos (en trabajos posteriores) a la determinación de las órbitas de planetas, cometas, y satélites terrestres.
- ◆ Elaborar un programa en GWBASIC a fin de facilitar los desarrollos matemáticos que involucra el estudio de órbitas de cuerpos celestes.

2. EL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS

2.1 INTRODUCCIÓN

Este es el problema fundamental para empezar el estudio del cálculo de órbitas, donde se considera un sistema aislado, en el cual sólo se hace presente la fuerza gravitacional. ¿Qué es un sistema aislado? Es un sistema que está constituido por dos partículas o cuerpos de masas m_1 y m_2 separados una distancia r , que se encuentran completamente aisladas de las demás masas del universo y están separadas a distancias tan enormes de ellas comparadas con r y al mismo tiempo, si existiesen cuerpos cercanos, éstos poseen masas tan diminutas comparadas con m_1 y m_2 , que la fuerza gravitacional ejercida sobre éstas es completamente despreciable.

De igual manera en el problema de los dos cuerpos no se tienen en cuenta las fuerzas externas porque se consideran totalmente despreciables, como por ejemplo, las fuerzas: electromagnéticas, de repulsión, de sustentación, o de propulsión [1].

2.2 LA IMPORTANCIA DEL CENTRO DE MASA

Se elige un punto arbitrario O cualesquiera del espacio que va a representar el sistema de referencia inercial, en el cual se considera dos cuerpos de masas m_1 y m_2 . Los vectores de posición con respecto a este sistema son \vec{r}_1 y \vec{r}_2 . El radio vector \vec{r} ($r = |\vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$) une los dos cuerpos en cuestión, además existe otro vector muy importante en nuestro sistema, a saber, el radio vector \vec{R} correspondiente al centro de masa, que reduce el sistema de dos cuerpos a uno sólo.

De acuerdo con la ley newtoniana, la fuerza que experimenta los cuerpos de masas m_1 y m_2 debido a la presencia de la otra son:

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -f(r) \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.1)$$

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \frac{Gm_1 m_2}{r^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = f(r) \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.2)$$

estas ecuaciones, deben resolverse para determinar la trayectoria que describen los cuerpos y las cantidades que se conservan en este sistema.

Sumando las ecuaciones (2.1) y (2.2) se obtiene:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

Si se define el vector centro de masa dado por

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \quad (2.4)$$

la ecuación (2.3) queda:

$$M \ddot{\vec{R}} = \mathbf{0} \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

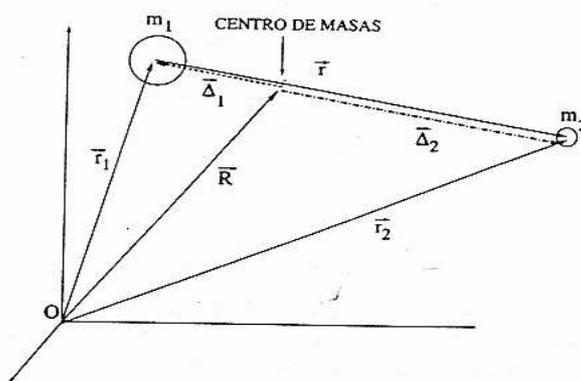
El momentum total del sistema es:

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = M \dot{\vec{R}} \quad (2.6)$$

Esta ecuación indica el momento del centro de masa. De acuerdo con la ecuación (2.5) $\dot{\vec{R}} = \text{constante}$. esto indica que el centro de masa se mueve con velocidad constante.

Esto implica que el sistema inercial O y el centro de masa son sistemas inerciales, por tanto equivalentes. Por lo anterior resulta adecuado estudiar el problema en el sistema centro de masa.

Figura 1. Movimiento en torno al centro de masa



De la figura 1 se puede encontrar por adición de vectores lo siguiente:

$$\begin{aligned} \vec{R} + \vec{A}_1 &= \vec{r}_1 \\ \vec{R} + \vec{A}_2 &= \vec{r}_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

De donde,

$$\begin{aligned}\vec{r}_2 - \vec{r}_1 &= \vec{R} + \vec{\Delta}_2 - \vec{R} - \vec{\Delta}_1 \\ \vec{r}_2 - \vec{r}_1 &= \vec{\Delta}_2 - \vec{\Delta}_1 = \vec{r}\end{aligned}\quad (2.8)$$

de aquí se puede deducir que:

$$\vec{\Delta}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}\quad (2.9)$$

de la misma manera,

$$\vec{\Delta}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}\quad (2.10)$$

Si se reemplaza las ecuaciones (2.9) y (2.10) en las ecuaciones (2.1) y (2.2) se llega a:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{Gm_1 m_2}{M} \ddot{\vec{r}} = -\mu \ddot{\vec{r}} = -f(\vec{r}) = -\frac{Gm_1 m_2}{Mr^3} \vec{r}\quad (2.11)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{Gm_1 m_2}{M} \ddot{\vec{r}} = \mu \ddot{\vec{r}} = f(\vec{r}) = \frac{Gm_1 m_2}{Mr^3} \vec{r}\quad (2.12)$$

O sea

$$\mu \ddot{\vec{r}} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}\quad (2.13)$$

siendo μ la masa reducida del sistema. Así este problema queda reducido a uno unidimensional. De este modo es siempre posible reducir el movimiento de dos cuerpos alrededor de su centro de masa a un problema equivalente a un solo cuerpo [2].

2.3 LEYES DE KEPLER

Por medio de las leyes matemáticas, derivadas empíricamente por Kepler no sólo se puede reproducir los datos observados, sino que se puede predecir en un tiempo dado en qué lugar se encuentra un determinado cuerpo, con qué velocidad se mueve y que tipo de trayectoria describe si obedece estas leyes.

Es así como Kepler [3] después de varios años de trabajo e investigaciones y basado en una ligera modificación de la teoría Copernicana, dedujo las tres leyes, que gobiernan el movimiento de los planetas. Estas representaban los datos

tomados por las observaciones de Brahe satisfactoriamente y con bastante exactitud.

2.3.1 Primera ley o ley de las cónicas y ecuación de la trayectoria. De acuerdo con los resultados de la sección 2.2 será suficiente considerar el problema de una partícula de masa μ por razones ya expuestas. Teniendo en cuenta la ecuación (2.13) se deduce que

$$\nabla \times f(\vec{r}) = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

lo que implica que el sistema es conservativo.

De la definición de vector momento angular dada por

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (2.15)$$

y de momento de fuerza

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.16)$$

se obtiene:

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (2.17)$$

Para el caso que nos corresponde $\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$, por tanto

$$\vec{N} = \vec{r} \times f(r) \frac{\vec{r}}{r} = \mathbf{0} \quad (2.18)$$

obteniéndose finalmente

$$\dot{\vec{L}} = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

por lo que

$$\vec{L} = \text{constante} \quad (2.20)$$

La ecuación (2.20) implica que el vector momento angular es constante tanto en dirección como en módulo. Puesto que \vec{L} es un vector perpendicular a un plano formado por \vec{r} y \vec{p} la única manera de que \vec{L} sea un invariante, para todo tiempo, es que el movimiento se lleve a cabo en un plano.

Dado que el sistema es conservativo por el teorema de la conservación de la energía:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(\vec{r}) \quad (2.21)$$

De la velocidad en coordenadas polares dada por

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad (2.22)$$

el vector momento angular será

$$\vec{L} = m\vec{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = mr^2\dot{\theta}(\hat{r} \times \hat{\theta}) = mr^2\dot{\theta} \hat{k} \quad (2.23)$$

o sea

$$L = mr^2\dot{\theta} = \text{constante} \quad (2.24)$$

entonces

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) + V(\vec{r}) \quad (2.25)$$

despejando $\dot{\theta}$ de la ecuación (2.24) y reemplazándola en la ecuación (2.25) se llega a

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(\vec{r}) \quad (2.26)$$

de la cual se obtiene

$$dt = \frac{dr}{\left[\frac{2}{m} \left(E - \left(\frac{L^2}{2mr^2} + V(\vec{r}) \right) \right) \right]^{1/2}} \quad (2.27)$$

De la ecuación (2.24) se obtiene

$$dt = \frac{mr^2}{L} d\theta \quad (2.28)$$

Sustituyendo la ecuación (2.28) en (2.27) se obtiene

$$d\theta = \frac{dr}{r^2 \left[\left(\frac{2mE}{L^2} - \frac{2mV}{L^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right]^{1/2}} \quad (2.29)$$

Puesto que la fuerza depende del inverso del cuadrado de la distancia, el potencial ($F = -\nabla V$) se da por una relación de la forma

$$V(r) = -\frac{k}{r} \quad (2.30)$$

Haciendo el cambio de variable $u = 1/r$, utilizando la relación (2.30), e integrando, por medio de la fórmula

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \arccos \left(-\frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{q}} \right) \quad (2.31)$$

Donde,

$$q = \beta^2 - 4\alpha\gamma . \quad (2.32)$$

se llega a:

$$\frac{1}{r} = \frac{m k}{L^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m k^2}} \cos(\theta - \theta') \right] \quad (2.33)$$

Ahora si se define la ecuación de una cónica (ver figura 2):

Se considera O como un punto fijo y M una recta fija. Se toma el polo como O y el eje polar y su prolongación perpendicular a M. Sea D la distancia no dirigida de O a M. Sea $P(r, \theta)$ cualquier punto del conjunto a la derecha de M y en el lado terminal del ángulo de medida θ . Además en toda sección cónica la razón constante entre la distancia a un punto fijo PO y la distancia no dirigida de P a una recta fija (directriz) PM se llama excentricidad e . Esto es,

$$e = \frac{|PO|}{|PM|} \Rightarrow |PO| = e|PM| \quad (2.34)$$

Como P está situado a la derecha de M, $\overline{OP} > 0$; de modo que $|\overline{OP}| = \overline{OP}$, y asimismo como $|\overline{PM}| = r$ ya que $r > 0$. Se deduce que:

$$r = e\overline{PM} \quad (2.35)$$

De la figura 2 se observa que $\overline{PM} = \overline{MO} + \overline{OT}$, esto es

$$\overline{PM} = D + x = D + r \cos \theta \quad (2.36)$$

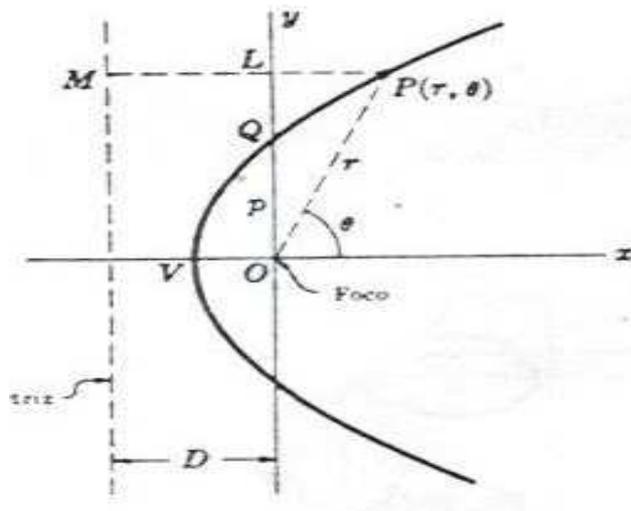
Reemplazando el resultado de la ecuación (2.36) en (2.35) se obtiene:

$$r = e(D + r \cos \theta) \quad (2.37)$$

resolviendo la ecuación anterior para r se obtiene:

$$\frac{1}{r} = C [1 - e \cos(\theta)] \quad \therefore C = eD \quad (2.38)$$

Figura 2. Definición de cónica.



La ecuación (2.38) es la ecuación de una cónica donde e es la excentricidad y D es la distancia entre el foco y la directriz.

Comparando la ecuación (2.33) con (2.38) se puede deducir que la órbita es siempre una cónica de excentricidad:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m k^2}} \quad (2.39)$$

La órbita depende de valor que pueda tener e . El análisis para determinar la forma de la órbita es el siguiente:

Si $E = 0$, se deduce de la ecuación (2.39) que $e = 1$. De la definición (2.38), haciendo $C = 1$ y pasando a coordenadas cartesianas se obtiene:

$$1 = \sqrt{x^2 + y^2} + x$$

de donde

$$y^2 = 1 - 2x \quad (2.40)$$

Esta ecuación representa una parábola.

Si $E < 0$, de la definición de excentricidad se obtiene que $0 < e < 1$. De la definición de cónica se tiene, en coordenadas cartesianas, y nuevamente si $C = 1$:

$$x^2 + y^2 = 1 + e^2 x^2 - 2 e x$$

$$x^2 + \frac{2 e x}{(1 - e^2)} + \frac{y^2}{(1 - e^2)} = \frac{1}{(1 - e^2)} \quad (2.41)$$

realizando operaciones algebraicas se llega a:

$$\frac{\left(x^2 + \frac{e}{1 - e^2}\right)^2}{\frac{1}{(1 - e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{(1 - e^2)}} = 1 \quad (2.42)$$

sea,

$$a^2 = \frac{1}{(1 - e^2)^2}, \text{ donde } a > 0 \quad (2.43)$$

$$\text{si } 0 < e < 1, \text{ entonces } a^2(1 - e^2) > 0 \quad (2.44)$$

$$\text{y puede considerarse } b^2 = a^2(1 - e^2) \quad (2.45)$$

Por lo tanto,

$$\frac{\left(x^2 + \frac{e}{1 - e^2}\right)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.46)$$

Esta ecuación representa la ecuación de una elipse que tiene su eje principal sobre el eje x y su centro es $\left(-\frac{1}{1-e^2}, 0\right)$.

Si $E > 0$, la excentricidad es $e > 1$. Entonces $a^2(e^2 - 1) > 0$. De modo que puede considerarse que $b^2 = a^2(e^2 - 1)$. Por lo tanto,

$$\frac{\left(x^2 + \frac{e}{1-e^2}\right)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.47)$$

Esta ecuación representa la ecuación de una hipérbola que tiene su eje principal sobre el eje x y su centro está en $\left(-\frac{1}{1-e^2}, 0\right)$.

Para un valor de $E = -\frac{\mu k^2}{2L^2}$ se deduce que el valor de la excentricidad es cero, lo que implica una órbita circular.

2.3.2 Ley de las Áreas. Kepler al analizar los datos tomados por Brahe, especialmente los datos de Marte, se preguntaba ¿En qué clase de curva se había movido este planeta durante los diversos años de observación a los que le dedicó Brahe? Las observaciones de las posiciones planetarias fueron necesariamente hechas desde la Tierra. ¿Se movería el planeta Marte en una curva sencilla si se suponía la Tierra en reposo, o si se suponía en movimiento, como lo creía Copérnico? Kepler adopta la idea de Copérnico de que la Tierra gira en torno a su propio eje mientras órbita alrededor del Sol. Realizó innumerables pruebas que le involucraron largos y laboriosos cálculos. Tuvo que reducir cada una de las mediciones de Brahe, del ángulo entre Marte y las estrellas fijas, a una posición del planeta en el espacio respecto a un Sol fijo, alrededor del cual la Tierra misma se movía [3].

Un principio de la dinámica de partículas establece que “cuando la fuerza es central (fuerza que pasa siempre por un eje fijo), la componente del momento angular a lo largo del eje es constante”. Por el hecho de que $\vec{L} = \text{constante}$, el movimiento debido a una fuerza central está confinado siempre a un plano, por esto

$$mr^2\dot{\theta} = L = \text{cte} \quad (2.48)$$

Cuando la partícula (puede ser un planeta) se mueve de P a P' (ver figura 3), el radio vector \vec{r} barre el área sombreada, correspondiente al triángulo OPP'. De aquí que

$$dA = \text{área } \triangle OPP' = \frac{1}{2}r(rd\theta) = \frac{1}{2}r^2 d\theta \quad (2.49)$$

Y el área barrida por unidad de tiempo es

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (2.50)$$

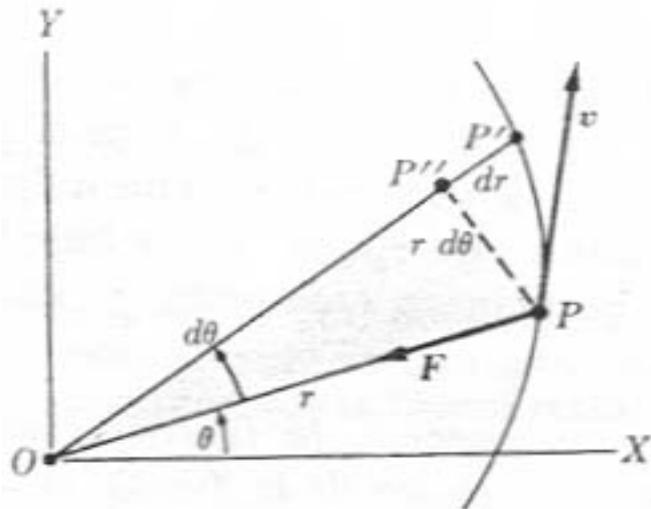
cantidad que se conoce como velocidad areolar.

De acuerdo con la relación (2.48), la ecuación (2.50) se convierte en:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = cte. \quad (2.51)$$

que es constante. Así la conservación del momento angular es equivalente a decir que la velocidad areolar es constante.

Figura 3. Bajo fuerzas centrales, el vector posición barre áreas iguales en tiempos iguales



2.3.3 La ley de los períodos. Después del descubrimiento de su segunda ley, Kepler abandonó finalmente su intento de construir movimientos planetarios mediante combinaciones de movimientos circulares y comenzó a ensayar varios óvalos como posibles órbitas. Luego de largos y difíciles cálculos, logró finalmente uno de sus más importantes resultados: la llamada primera ley de Kepler o ley de

las órbitas. Encontró que cada planeta se mueve siguiendo una órbita elíptica alrededor del Sol, con él situado en uno de sus focos.

Posteriormente Kepler se encaminó en la tarea de buscar una relación entre el tamaño de la órbita de un determinado planeta y su período, es decir, el tiempo de revolución de un planeta girando alrededor del Sol. Luego de muchos intentos encontró la relación precisa que buscaba: la razón entre el cubo del radio de la órbita y el cuadrado de su período es la misma para todos los planetas.

El semieje mayor es la semisuma de las dos distancias absidales r_1 y r_2 . En dichos puntos, la velocidad radial es nula por definición y la conservación de la energía implica que las distancias absidales sean las raíces de la ecuación

$$r^2 + \frac{k}{E}r - \frac{L^2}{2mE} = 0 \quad (2.52)$$

De la teoría de ecuaciones de segundo grado se sabe que el coeficiente del término lineal es igual a la suma de las raíces cambiadas de signo. Así, el semieje mayor será

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} = -\frac{k}{2E} \quad (2.53)$$

$$e^2 = 1 - \frac{L^2}{mka} \Rightarrow \frac{L^2}{mk} = a(1 - e^2) \quad (2.54)$$

Teniendo en cuenta (2.53) y (2.54), la ecuación (2.27) queda

$$\therefore t = \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_{r_0}^r \frac{r \, dr}{\sqrt{r - \frac{r^2}{2a} - \frac{a(1-e^2)}{2}}} \quad (2.55)$$

En el caso del movimiento elíptico, que es el más común al tratar el movimiento planetario, la ecuación (2.55) se integra mediante una variable auxiliar ψ , llamada anomalía excéntrica y definida por:

$$r = a(1 - e \cos \psi) \quad (2.56)$$

Siendo $0 < r_1 < r_2$, el ábside en el cual $r = r_1$ se llama perihelio y el ábside en el que $r = r_2$ se llama afelio. Desde el perihelio se mide ψ .

La sustitución de r en función de ψ mediante la ecuación (2.56) en la ecuación (2.55) da:

$$t = \sqrt{\frac{2m}{2ak}} a^2 \int [1 - e \cos(\psi)] \quad (2.57)$$

Se puede ver que la ecuación (2.57) da una expresión del período T , del movimiento elíptico, si se extiende la integral a todo el dominio de ψ igual a 2π :

$$T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 m}{k} a^3 \quad (2.58)$$

Al ver la ecuación (2.58) cabe recordar que se está tratando el caso particular de un sistema de dos cuerpos en que una de las masas es mucho mayor que la otra. También se desprende de (2.58) que el cuadrado del período de un planeta con respecto al Sol (para nuestro sistema de dos cuerpos celestes) es proporcional al cubo del semieje mayor de su respectiva órbita: tercera ley de Kepler para el sistema Sol-planeta, donde se puede hacer la consideración de que una masa es mucho mayor que la otra.

2.4 LA ECUACIÓN VIS-VIVA

Una relación bastante importante entre la velocidad en la órbita y la posición puede ser derivada mediante una integración en la ecuación que gobierna el movimiento de los dos cuerpos, dada por:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (2.59)$$

Al multiplicar escalarmente esta ecuación por $2\dot{\vec{r}}$, se obtiene:

$$2(\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}) = -2 \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 2 \left(-\frac{\mu \dot{r}}{r^2} \right) \quad (2.60)$$

teniendo en cuenta las siguientes derivadas:

$$\frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = 2(\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}) \quad \wedge \quad \frac{d}{dt} \left(-\frac{\mu}{r} \right) = -\frac{\mu \dot{r}}{r^2} \quad (2.61)$$

Si se reemplaza estos valores en (2.60) y además integramos, resulta:

$$\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{2\mu}{r} + B, \quad (2.62)$$

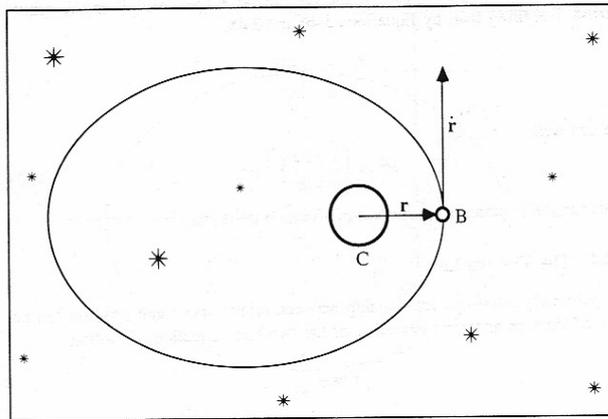
que es equivalente a:

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + B \quad (2.63)$$

Donde B es una constante de integración que puede conocerse al imponer las condiciones iniciales que existen cuando el cuerpo está orbitando en el perifoco, como se observa en la figura 4.

En este caso la distancia r es igual a la distancia perifocal q , además conociendo el valor de la velocidad en un instante dado se puede calcular el valor de la constante, por lo tanto:

Figura 4. Cuerpo situado en el perifoco



Fuente: Methods of orbit determination for microcomputer. BOULET, Dan. pág. 94.

Ahora bien, el vector velocidad es perpendicular al vector de posición, entonces h será igual a:

$$h = |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = r v \sin 90^\circ = qv \Rightarrow v^2 = \frac{h^2}{q^2} \quad (2.64)$$

Para las cónicas el momento angular por unidad de masa y en espacial para una elipse está definido por:

$$h = \sqrt{\mu q(1+e)} \quad (2.65)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (2.63), se obtiene:

$$v^2 = \frac{\mu(1+e)}{q} \quad (2.66)$$

reemplazando (2.66) en (2.63) y sabiendo que para una elipse $q = a(1-e)$ se deduce el valor de la constante B , entonces:

$$B = -\frac{\mu(1-e)}{a(1-e)} - \frac{2\mu}{a(1-e)} = \frac{\mu e - \mu}{a(1-e)} = -\frac{\mu}{a} \quad (2.67)$$

si reemplazamos el valor de la constante de integración en la ecuación (2.63), se obtiene:

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (2.68)$$

Esta ecuación es denominada "ecuación Vis-Viva". Refleja el hecho de que la suma de la energía cinética más la energía potencial del sistema de dos cuerpos permanece constante. También es muy útil como una medida para determinar el semieje mayor cuando los vectores posición y velocidad son conocidos en algún punto de la órbita [4].

2.5 EL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS POR INTEGRACIÓN NUMÉRICA

El proceso denominado integración numérica consiste en calcular la trayectoria del movimiento de los dos cuerpos, mediante una secuencia de repetición en intervalos cortos de tiempo. Esto se hace, conocida la posición y la velocidad para algún tiempo dado, es posible calcular su aceleración mediante la ecuación de movimiento. Sabiendo estos datos se puede extrapolar sobre pequeños intervalos de tiempo para calcular una nueva posición y velocidad, además se puede calcular una nueva aceleración y de esta forma volver a repetir el proceso.

2.5.1 Las series f y g. Se quiere calcular la posición y velocidad en un tiempo t del cuerpo de masa m_2 , a partir de la posición \vec{r}_0 y velocidad \vec{v}_0 dadas en un tipo conocido t_0 . Para ello se debe obtener \vec{r} que satisface la condición inicial para un tiempo t_0 y la ecuación de movimiento dada por la ecuación (2.59), para algún tiempo antes o después de t_0 . Entonces, se escribe la ecuación (2.59) mediante una serie de potencias expandida en un tiempo t alrededor de la posición \vec{r}_0 , por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \vec{C}_0 + \vec{C}_1 t + \vec{C}_2 t^2 + \vec{C}_3 t^3 + \vec{C}_4 t^4 + \dots \\
\dot{\vec{r}} &= \vec{C}_1 + 2\vec{C}_2 t + 3\vec{C}_3 t^2 + 4\vec{C}_4 t^3 + \dots \\
\ddot{\vec{r}} &= 2\vec{C}_2 + 6\vec{C}_3 t + 12\vec{C}_4 t^2 + \dots \\
\dddot{\vec{r}} &= 6\vec{C}_3 + 24\vec{C}_4 t + \dots \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Evaluando la condición inicial, en la cual cuando $t = 0 \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0$, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\vec{C}_0 &= \vec{r}_0 \\
\vec{C}_1 &= \dot{\vec{r}}_0 \\
\vec{C}_2 &= \frac{\ddot{\vec{r}}_0}{2!} \\
\vec{C}_3 &= \frac{\dddot{\vec{r}}_0}{3!} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.70}$$

donde, para algún entero $n > 0$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$.

Sustituyendo el valor de la ecuación anterior en la ecuación (2.69), se obtiene:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \dot{\vec{r}}_0 t + \frac{\ddot{\vec{r}}_0}{2!} t^2 + \frac{\dddot{\vec{r}}_0}{3!} t^3 + \frac{\ddot{\vec{r}}_0}{4!} t^4 + \dots \tag{2.71}$$

Se introducen unas nuevas cantidades para encontrar una solución a la serie, por lo tanto se define:

$$u = \frac{\mu}{r^3} \tag{2.72}$$

$$z = \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r^2} \tag{2.73}$$

$$s = \frac{\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}}{r^2} - u \tag{2.74}$$

de esta manera, la ecuación (2.59), se convierte en:

$$\ddot{\vec{r}} = -u\vec{r} \tag{2.75}$$

Ahora, se procede a encontrar las derivadas de las nuevas cantidades, por lo tanto:

$$\dot{u} = -3 \frac{\mu}{r^3} \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r^2} = -3uz \quad (2.76)$$

Luego la derivada de z , y teniendo en cuenta la ecuación (2.75), se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})r^{-2} + (-ur^2)r^{-2} - 2(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})(r\dot{r})r^{-4} = [(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})r^{-2} - u] - 2(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})(r\dot{r})r^{-4} \\ \dot{z} &= s - 2z^2 \end{aligned} \quad (2.77)$$

Por último se encuentra la derivada para la cantidad s , y usando las relaciones (2.75) y (2.76), entonces:

$$\dot{s} = -2u \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r^2} - 2 \frac{\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}}{r^2} \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r^2} + 3uz \quad (2.78)$$

Sustituyendo la ecuación (2.73) y teniendo en cuenta que:

$$\frac{\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}}{r^2} = s + u$$

la ecuación anterior se convierte en:

$$\dot{s} = -2uz - 2(s+u)z + 3uz = -(uz + 2zs) \quad (2.79)$$

Finalmente para reemplazar los valores encontrados, se debe diferenciar la ecuación de movimiento representada por la ecuación (2.75), entonces:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= -\dot{u}\vec{r} - u\dot{\vec{r}} = 3uz\vec{r} - u\dot{\vec{r}} \\ \ddot{\vec{r}} &= 3(\dot{u}z\vec{r} + uz\dot{\vec{r}} + uz\dot{\vec{r}}) - \dot{u}\vec{r} - u\ddot{\vec{r}} = -9uz^2\vec{r} + 3us\vec{r} - 6uz^2\vec{r} + 6uz\dot{\vec{r}} - u^2\vec{r} \\ \ddot{\vec{r}} &= (3us - 15uz^2 - u^2)\vec{r} + 6uz\dot{\vec{r}} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.80)$$

Evaluando las derivadas para t_0 y reemplazando los resultados en la ecuación (2.71), después de un arreglo algebraico, se obtiene:

$$\vec{r} = \left[1 - \frac{u}{2}t^2 + \frac{uz}{2}t^3 + \frac{3us - 15uz^2 + u^2}{24}t^4 + \dots \right] \vec{r}_0 + \left[t - \frac{u}{6}t^2 + \frac{uz}{4}t^4 + \dots \right] \dot{\vec{r}}_0 \quad (2.81)$$

Definiendo unas nuevas cantidades la ecuación (2.81) se convierte en:

$$\vec{r} = f \vec{r}_0 + g \dot{\vec{r}}_0 \quad (2.82)$$

donde, estas cantidades son las series f y g , dadas por:

$$f = 1 - \frac{u}{2}t^2 + \frac{uz}{2}t^3 + \frac{3us - 15uz^2 + u^2}{24}t^4 + \dots \quad (2.83)$$

$$g = t - \frac{u}{6}t^2 + \frac{uz}{4}t^4 + \dots \quad (2.84)$$

Para un cálculo numérico, es más conveniente introducir unos nuevos valores. Por lo tanto sea,

$$F_0 = 1, F_1 = 0, F_2 = -\frac{u}{2}, F_3 = \frac{uz}{2}, F_4 = \frac{u(3s - 15z^2 + u)}{24}$$

$$G_0 = 0, G_1 = 1, G_2 = 0, G_3 = -\frac{u}{6}, G_4 = \frac{uz}{4} \quad (2.85)$$

Con estas cantidades las series f y g , se reducen a:

$$f = 1 + F_2t^2 + F_3t^3 + F_4t^4 + \dots \quad (2.86)$$

$$g = t + G_3t^3 + G_4t^4 + \dots \quad (2.87)$$

Para obtener el valor de la velocidad, solamente se deriva la ecuación (2.82), entonces:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{f} \vec{r}_0 + \dot{g} \dot{\vec{r}}_0. \quad (2.88)$$

2.5.2 Las series de Taylor. En matemática, física, ingenierías y muchas otras áreas, es muy útil el desarrollo de las series de potencias; a este estudio se le debe las innumerables contribuciones de muchos matemáticos y físicos de los siglos XVII y XVIII: Gregory, Newton, Jhon y James Bernouilli, Leibnitz, Euler, Lagrange, Wallis y Fourier entre otros. No obstante, uno de los nombres más importantes asociados al desarrollo de series de potencias es Brook Taylor. Es por él que se desarrolla una solución al problema de los dos cuerpos por el método de integración numérica [4]. Como bien se sabe esta solución por series de potencias se puede escribir de la siguiente forma:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \dot{\vec{r}}_0 t + \frac{\ddot{\vec{r}}_0}{2!} t^2 + \frac{\dddot{\vec{r}}_0}{3!} t^3 + \frac{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\vec{r}}_0}{4!} t^4 + \dots \quad (2.89)$$

Una expresión de este tipo se conoce como una serie de Taylor expandida en el tiempo. En el cual:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (2.90)$$

Como en el caso anterior utilizamos ciertas cantidades auxiliares que nos ayudan en el desarrollo de la serie. Teniendo en cuenta que la series de Taylor se pueden extender o expandir solamente hasta cualquier orden. Sabiendo esto, se definen las cantidades de la siguiente manera:

$$u = \frac{\mu}{r^3} ; w = \frac{1}{r^2} ; l = \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = r\dot{r} ; z = wl \quad (2.91)$$

Igual que en el caso anterior, si se sustituye el valor de u en la ecuación (2.90), se obtiene:

$$\ddot{\vec{r}} = -u\vec{r} \quad (2.92)$$

Ahora, diferenciando algunas de las cantidades nuevas, resulta:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -3 \frac{\mu}{r^3} \frac{r\dot{r}}{r^2} = -3uz \\ \dot{w} &= -2 \frac{1}{r^2} \frac{r\dot{r}}{r^2} = -2wz \end{aligned} \quad (2.93)$$

Expresando los términos \vec{r} , u , w , l y z se los representa como una serie infinita, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{c}_0 + \vec{c}_1 t + \vec{c}_2 t^2 + \vec{c}_3 t^3 + \dots \\ u &= u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + u_3 t^3 + \dots \\ w &= w_0 + w_1 t + w_2 t^2 + w_3 t^3 + \dots \\ l &= l_0 + l_1 t + l_2 t^2 + l_3 t^3 + \dots \\ z &= z_0 + z_1 t + z_2 t^2 + z_3 t^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.94)$$

Se procede, ahora a diferenciar la serie de \vec{r} con respecto al tiempo, para poder obtener una expresión general para \vec{c} , entonces:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \vec{c}_1 + 2\vec{c}_2 t + 3\vec{c}_3 t^2 + \dots \\ \ddot{\vec{r}} &= 2\vec{c}_2 + 6\vec{c}_3 t + \dots \end{aligned} \quad (2.95)$$

Sustituyendo el valor de $\hat{r} \wedge u$ dado por (2.93) la ecuación (2.92) se convierte en:

$$\ddot{\vec{r}} = -(u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \dots)(\bar{c}_0 + \bar{c}_1 t + \bar{c}_2 t^2 + \dots). \quad (2.96)$$

Igualando los coeficientes de las potencias iguales al tiempo de las ecuaciones (2.95) y (2.96), se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{c}_2 &= -\frac{\bar{c}_0 u_0}{1.2} \\ \bar{c}_3 &= -\frac{(\bar{c}_0 u_1 + \bar{c}_1 u_0)}{2.3} \\ &\vdots \\ \bar{c}_n &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=0}^{n-2} u_{2(n-i)} \quad \text{cambio } n \text{ por } j+2 \\ \bar{c}_{j+2} &= -\frac{1}{(j+1)(j+2)} \sum_{n=0}^j \bar{c}_n u_{j-n} \end{aligned} \quad (2.97)$$

Haciendo el mismo procedimiento para u se tiene:

$$\dot{u} = u_1 + 2u_2 t + 3u_3 t^2 + \dots = -3[u_0 z_0 + (u_0 z_1 + u_1 z_0)t + (u_0 z_2 + u_1 z_1 + u_2 z_0)t^2 + \dots] \quad (2.98)$$

Igualando los coeficientes de las potencias iguales al tiempo de la ecuación anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned} u_1 &= -3 \frac{u_0 z_0}{1} \\ u_2 &= -3 \frac{u_0 z_1 + u_1 z_0}{2} \\ u_3 &= -3 \frac{u_0 z_2 + u_1 z_1 + u_2 z_0}{3} \\ &\vdots \\ u_j &= -\frac{3}{j} \sum_{n=0}^{j-1} u_n z_{j-(n+1)} \end{aligned} \quad (2.99)$$

De una forma similar, se deducen los otros términos, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
w_j &= -\frac{2}{j} \sum_{n=0}^{j-1} w_n z_{j-(n+1)} \\
l_j &= \sum_{n=0}^j (n+1) \bar{c}_{n+1} \cdot \bar{c}_{j-n} \\
z_j &= \sum_{n=0}^j w_n l_{j-n}
\end{aligned} \tag{2.100}$$

De esta manera utilizando estas relaciones para determinar los coeficientes se puede por medio de un proceso de cálculo computacional encontrar el valor de \bar{r} para un intervalo de tiempo t , entonces:

$$\bar{r} = \bar{c}_0 + \bar{c}_1 t + \bar{c}_2 t^2 + \bar{c}_3 t^3 + \dots + \bar{c}_m t^m \tag{2.101}$$

donde m es el orden de la serie en expansión de Taylor y el número de la mayor derivada utilizada.

2.5.3 El método Runge-Kutta. Este método es útil para la solución de ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{2.102}$$

Este método numérico logra la exactitud del procedimiento de una serie de Taylor sin requerir el cálculo de derivadas superiores para llegar a las soluciones de la forma

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h) h \tag{2.103}$$

En esta ecuación la pendiente ϕ se usa para extrapolar desde un valor anterior y_i a un nuevo valor y_{i+1} en una distancia h , y se conoce como la función incremento. La función incremento se escribe por lo general como

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n \tag{2.104}$$

donde las a son constantes y las k son:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\
k_3 &= f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\
&\vdots \\
k &= f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)
\end{aligned} \tag{2.105}$$

donde las k son las relaciones de recurrencia. Como cada k es una evaluación funcional, esta recurrencia hace que los métodos Runge-Kutta sean eficientes para cálculos computacionales.

2.5.3.1 Métodos Runge-Kutta de segundo orden. Cuando $n = 2$ se obtiene el método R-K de segundo orden que son exactos si la solución de la ecuación diferencial es cuadrática. Además como los términos cúbicos de la distancia h y mayores son eliminados durante la derivación el error de truncamiento local es $\mathbf{0} (h^3)$ y el global $\mathbf{0} (h^2)$.

En este método la ecuación (2.103) es

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2) h \quad (2.106)$$

Para deducir las constantes a_1, a_2, p_1, q_{11} se parte de la serie de Taylor de segundo orden para y_{i+1} en términos de y_i y $f(x_i, y_i)$ dada por

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) h + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) \frac{h^2}{2!} \quad (2.107)$$

La estrategia para este método es el uso de manipulaciones algebraicas de las constantes. Para ello se expande en series de Taylor la segunda ecuación de las (2.104), de lo cual se obtiene

$$f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) = f(x_i, y_i) + p_1 h \frac{\partial f}{\partial x} + q_{11} k_1 h \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{0} (h^2) \quad (2.108)$$

Sustituyendo la primera ecuación de (2.105) y (2.109) en (2.106), y organizando términos se tiene:

$$y_{i+1} = y_i + [a_1 f(x_i, y_i) + a_2 f(x_i, y_i)] h + \left[a_2 p_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} f(x_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y} \right] h^2 + \mathbf{0} (h^3) \quad (2.109)$$

Igualando las ecuaciones (2.109) y (2.107) se deduce que

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= \mathbf{1} \\ a_1 p_2 &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \\ a_2 q_{11} &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \end{aligned} \quad (2.110)$$

Como hay tres ecuaciones con cuatro incógnitas se debe suponer el valor de una de ellas para determinar las otras, debido a esto hay un número interminable de métodos R-K de sendo orden.

2.5.3.2 Métodos R-K de quinto orden. Si se necesita de mayor exactitud para obtener mejores resultados en la solución de las ecuaciones diferenciales es recomendable utilizar el método R-K de quinto orden. Por un procedimiento análogo al anterior se obtiene

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 35k_5 + 7k_6) \quad (2.111)$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}k_1h\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{8}k_1h + \frac{1}{8}k_2h\right) \\ k_4 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i - \frac{1}{2}k_2h + k_3h\right) \\ k_5 &= f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{16}k_1h + \frac{9}{16}k_4h\right) \\ k_6 &= f\left(x_i + h, y_i + \frac{3}{7}k_1h + \frac{2}{7}k_2h + \frac{12}{7}k_3h - \frac{12}{7}k_4h + \frac{8}{7}k_5h\right) \end{aligned} \quad (2.112)$$

Con las relaciones anteriores, tratemos ahora el movimiento de los dos cuerpos en el cual la posición y velocidad están determinadas para un tiempo dado t_0 . Si se define:

$$\vec{f}(\vec{v}) = \vec{v} ; \quad \vec{g}(\vec{r}) = -\frac{\mu \vec{r}}{r^3} \quad (2.113)$$

A continuación con la información proporcionada se tiene,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{f}(\vec{v}) ; \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}(\vec{r}) \quad (2.114)$$

Ahora se procede a integrar por el método Runge-Kutta aplicando la ecuación (2.102) para cada ecuación diferencial, ya que la expresión anterior es similar a la forma de la ecuación (2.112). Con esto se obtienen los siguientes vectores:

$$\begin{aligned}
\vec{k}_1 &= f(\vec{v}_0) \\
\vec{G}_1 &= g(\vec{r}_0) \\
\vec{k}_2 &= f\left(\vec{v}_0 + \frac{1}{4}\vec{G}_1h\right) \\
\vec{G}_2 &= g\left(\vec{r}_0 + \frac{1}{4}\vec{k}_1h\right) \\
\vec{k}_3 &= f\left(\vec{v}_0 + \frac{1}{8}\vec{G}_1h + \frac{1}{8}\vec{G}_2h\right) \\
\vec{G}_3 &= g\left(\vec{r}_0 + \frac{1}{8}\vec{k}_1h + \frac{1}{8}\vec{k}_2h\right) \\
\vec{k}_4 &= f\left(\vec{v}_0 - \frac{1}{2}\vec{G}_2h + \vec{G}_3h\right) \\
\vec{G}_4 &= g\left(\vec{r}_0 - \frac{1}{2}\vec{k}_2h + \vec{k}_3h\right) \\
\vec{k}_5 &= f\left(\vec{v}_0 + \frac{3}{16}\vec{G}_1h + \frac{9}{16}\vec{G}_4h\right) \\
\vec{G}_5 &= g\left(\vec{r}_0 + \frac{3}{16}\vec{k}_1h + \frac{9}{16}\vec{k}_4h\right) \\
\vec{k}_6 &= f\left(\vec{v}_0 - \frac{3}{7}\vec{G}_1h + \frac{2}{7}\vec{G}_2h + \frac{12}{7}\vec{G}_3h - \frac{12}{7}\vec{G}_4h + \frac{8}{7}\vec{G}_5h\right) \\
\vec{G}_6 &= g\left(\vec{r}_0 - \frac{3}{7}\vec{k}_1h + \frac{2}{7}\vec{k}_2h + \frac{12}{7}\vec{k}_3h - \frac{12}{7}\vec{k}_4h + \frac{8}{7}\vec{k}_5h\right)
\end{aligned} \tag{2.115}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2.111), el incremento de los vectores son:

$$\begin{aligned}
\delta\vec{r} &= \frac{1}{90}\left(7\vec{k}_1 + 32\vec{k}_3 + 12\vec{k}_4 + 32\vec{k}_5 + 7\vec{k}_6\right) \\
\delta\vec{v} &= \frac{1}{90}\left(7\vec{G}_1 + 32\vec{G}_3 + 12\vec{G}_4 + 32\vec{G}_5 + 7\vec{G}_6\right)
\end{aligned} \tag{2.116}$$

Por último se aplica la relación general de la ecuación (2.111), y siendo

$$x = x_i + \delta x \tag{2.117}$$

Por lo que los vectores posición y velocidad en el paso final de la integración son:

$$\vec{r} = \vec{r}_i + \delta\vec{r} \ ; \ \vec{v} = \vec{v}_i + \delta\vec{v} \tag{2.118}$$

REFERENCIAS

- [1] PORTILLA B., José Gregorio. Elementos de astronomía de posición. Bogotá: Observatorio Astronómico Nacional. Facultad de ciencias. Universidad Nacional de Colombia, 2001. p. 210.
- [2] GOLDSTEIN, Herbert. Mecánica clásica. 2 ed. Madrid: Aguilar, 1972. p. 72.
- [3] PHYSICAL SCIENCE STUDY COMMITTEE. Physics. New York: se, Prentice-Hall, 1962. p. 63.
- [4] BOULET, Dan L. Methods of orbit determination for the microcomputer. Richmond, Virginia: Willmann – Bell, Inc., 1991. p. 98.

3. LA GEOMETRÍA DE LAS ÓRBITAS

3.1 INTRODUCCIÓN

Al estudiar el problema de los dos cuerpos en un campo de sólo interacción gravitacional se ha visto que este movimiento es más factible desarrollarlo reduciéndolo al movimiento de un solo cuerpo. Como ya se sabe, ésta es una ecuación diferencial de segundo orden. Cuando se la soluciona se encuentra seis constantes de integración. Estas constantes o parámetros son los llamados elementos orbitales y cuando son conocidos pueden describir ciertas características del movimiento. El grupo de elementos es válido para cualquier tiempo dado y se determina evaluando la posición y velocidad del movimiento.

Estos elementos orbitales se discutirán en el presente capítulo con el interés de implementar aún más lo conocido con respecto al problema de los dos cuerpos, como por ejemplo introducir un plano en la órbita al sistema de coordenadas que facilite la derivación de las trayectorias elípticas, hiperbólicas y parabólicas mediante la ecuación de movimiento. Para ello se debe especificar los diferentes sistemas de coordenadas celestes para ubicar la posición, si se requiere, de un astro determinado.

3.2 SISTEMAS DE COORDENADAS

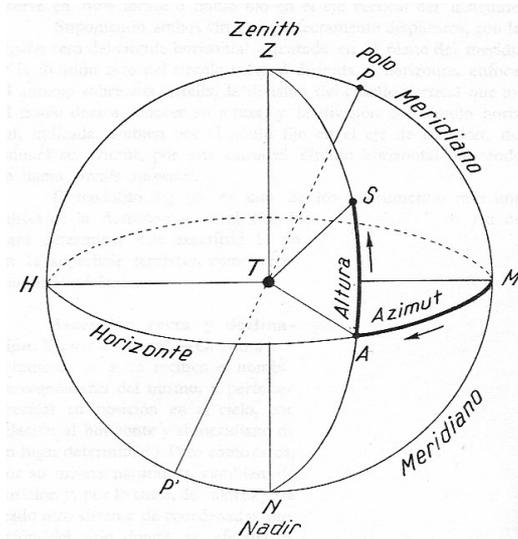
Para determinar la posición de un astro en la bóveda celeste los astrónomos utilizan varios sistemas de coordenadas, los cuales son los siguientes:

3.2.1 Sistema horizontal. Tiene como plano de referencia el horizonte matemático del observador. Estas coordenadas permiten ubicar la posición aparente de un astro para un observador situado a una latitud y longitud dadas, para un instante determinado. Las coordenadas son el Azimut y la altura (ver figura 5).

El azimut (A) de un cuerpo celeste es el ángulo contado sobre el horizonte que comienza a medirse desde el punto cardinal norte en dirección hacia el oriente hasta la vertical del cuerpo. Se cumple que $0^\circ \leq A < 360^\circ$.

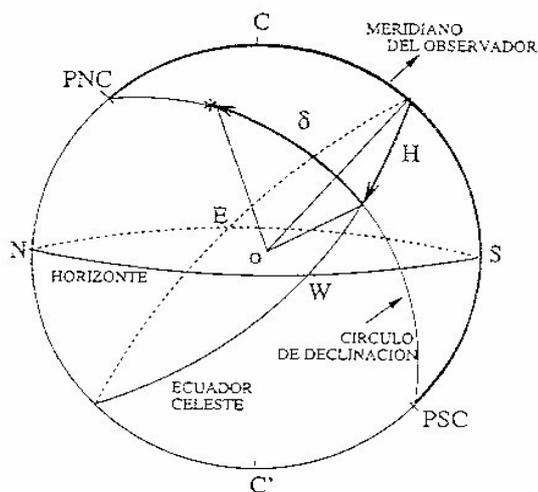
La altura (h) de un cuerpo celeste es el ángulo contado sobre la vertical del cuerpo, que comienza a medirse desde el horizonte hasta el cuerpo correspondiente. Se cumple que $-90 \leq h \leq 90$.

Figura 5. Sistema de coordenadas horizontales



3.2.2 Sistema ecuatorial horario. Este sistema tiene como plano de referencia el ecuador celeste. Las coordenadas son el ángulo horario y la declinación (ver figura 6). El ángulo horario (H) de un cuerpo es el ángulo contado sobre el ecuador celeste que comienza a medirse desde el meridiano del observador en dirección hacia el occidente hasta el círculo de declinación del cuerpo correspondiente; $0^\circ \leq H < 360^\circ$. Se suele especificar el ángulo horario en unidades de tiempo. Como la bóveda celeste describe una circunferencia completa en 24 horas, entonces $15^\circ = 1^h$.

Figura 6. Sistema ecuatorial horario

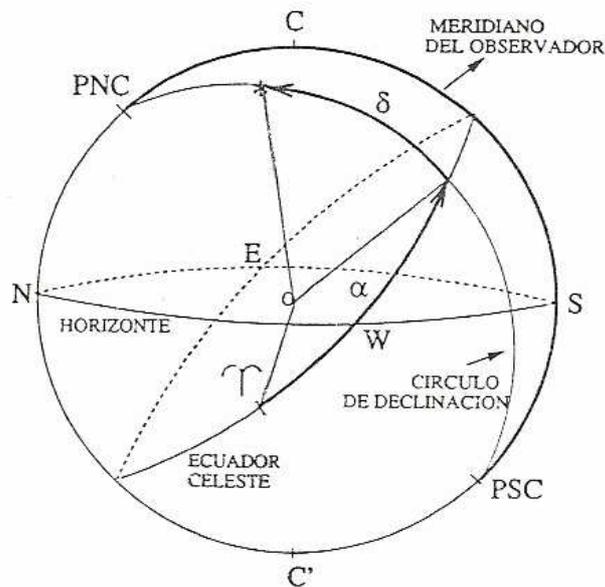


La declinación (δ) de un cuerpo es el ángulo medido sobre el círculo de declinación de este que comienza a contarse desde el ecuador celeste hasta el cuerpo correspondiente; $-90 \leq \delta \leq 90$.

3.2.3 Sistema ecuatorial absoluto. Como antes su plano de referencia es el ecuador celeste. Las coordenadas son la ascensión recta y la declinación (ver figura 7). La declinación es el mismo ángulo que se definió anteriormente. La ascensión recta (α) de un cuerpo es el ángulo medido sobre el ecuador celeste contado desde el punto vernal en dirección contraria a las agujas del reloj, visto desde el polo norte celeste, hasta el círculo de declinación del astro. Al igual que el ángulo horario la ascensión recta de un cuerpo se expresa generalmente en unidades de tiempo; $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$.

Este sistema coordenado es absoluto, o sea que es válido para cualquier observador independiente de su latitud y longitud geográfica.

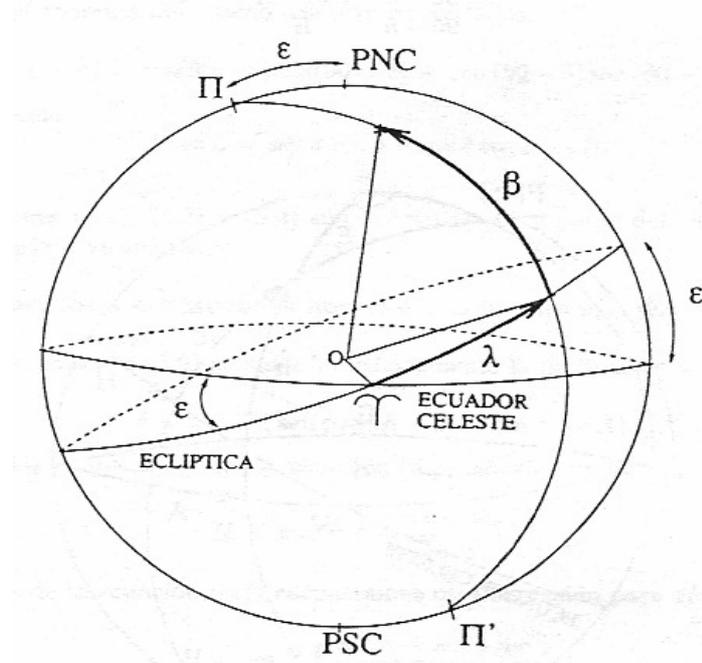
Figura 7. coordenadas ecuatoriales absolutas.



3.2.4 Sistema eclíptico. En estas coordenadas el plano de referencia es el plano de la eclíptica. La ubicación de un astro se determina por: la coordenada longitudinal, que se llama longitud eclíptica, λ , que es el ángulo medido sobre la eclíptica desde el punto vernal en dirección contraria a las agujas del reloj, visto desde el polo norte celeste, hasta la semicircunferencia que pasa por los polos eclípticos (II y II') y el cuerpo. La coordenada latitudinal se llama latitud

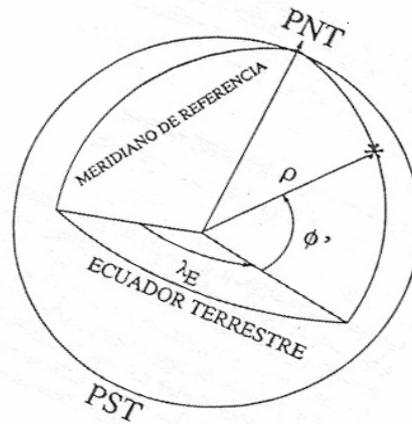
eclíptica, β , siendo ésta el ángulo medido sobre la semicircunferencia que pasa por los polos eclípticos y el astro, que comienza a contarse desde la eclíptica hasta el astro correspondiente. Se cumple que: $0 \leq \lambda < 2\pi$ y $-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$.

Figura 8. Coordenadas Eclípticas.



3.2.5 Sistema geocéntrico del observador. Este sistema coordenado tiene como origen el centro de masa de la Tierra. El plano fundamental es el ecuador terrestre (ET). Las coordenadas geocéntricas son las siguientes: la latitud geocéntrica (ϕ') siendo esta el ángulo existente entre una línea que pasa por el punto y el centro del planeta, y el ecuador terrestre; $-90^\circ \leq \phi' \leq 90^\circ$. Otra coordenada en este sistema es la longitud geocéntrica (λ') que es el ángulo medido sobre el ET, desde el meridiano cero (o de referencia) hasta el meridiano del punto correspondiente. Su medida puede hacerse hacia ambos lados del meridiano cero, haciéndose necesario especificar si el ángulo es al occidente o al oriente. El meridiano de referencia se define de tal forma que atraviese cualquier lugar sobre la superficie de la tierra; este meridiano es el meridiano de Greenwich. Finalmente se define la distancia radial de un punto sobre la superficie terrestre que es la distancia en línea recta que existe entre dicho punto y el centro de masa de la Tierra.

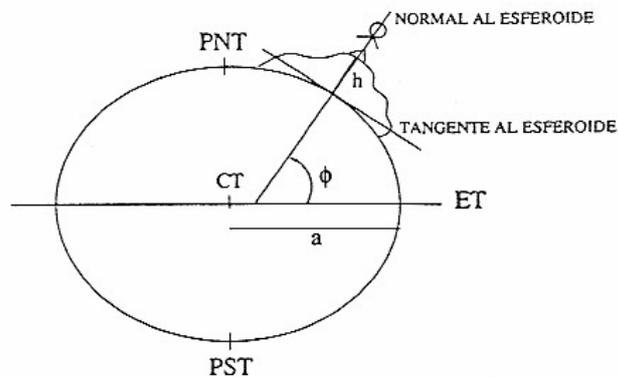
Figura 9. Coordenadas geocéntricas del observador.



3.2.6 Sistema geodésico. Debido a la forma de la Tierra para especificar este sistema coordenado se ha de usar un esferoide de referencia, el cual queda determinado cuando se adoptan valores específicos del radio ecuatorial terrestre a y del achatamiento f .

Las coordenadas geodésicas son: la latitud geodésica ϕ que es el ángulo existente entre la normal al esferoide en dicho punto y el ET, (ver figura 10); $-90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$. La longitud geodésica λ se define de la misma forma que la longitud geocéntrica λ' , $\lambda = \lambda'$. Finalmente se define la altura h de un observador sobre el elipsoide como la distancia sobre el esferoide medida a lo largo de la normal a dicho esferoide.

Figura 10. latitud geodésica

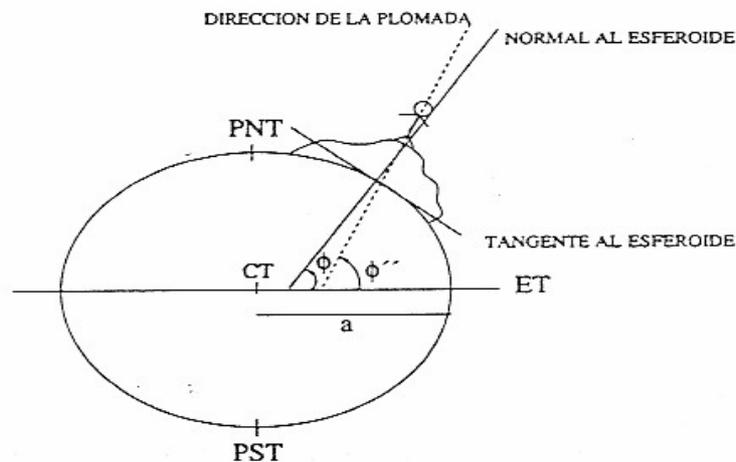


3.2.7 Coordenadas geográficas o astronómicas. Estas son las que se obtienen cuando se determinan la latitud y la longitud con respecto al polo celeste y al meridiano local a través de la vertical local.

La latitud geográfica ϕ'' de un punto sobre la superficie terrestre es el ángulo existen entre la vertical local y el ET, (ver figura 11). debido a que la vertical local para cada punto se afecta por anomalías gravitacionales locales, así como exteriores, existirá una pequeña diferencia en dirección entre la vertical de dicho punto y la normal al esferoide (la que define ϕ). Esta inclinación se conoce con el nombre de desviación vertical, siendo así ésta la diferencia entre latitud geográfica y latitud geodésica.

La longitud geográfica λ'' para un punto terrestre es el ángulo entre el plano del meridiano astronómico de dicho punto y el plano del primer meridiano que pasa por Greenwich. El meridiano astronómico es plano que pasa por el observador y contiene la vertical y una paralela a la dirección del eje de rotación [1].

Figura 11. Latitud geográfica o astronómica.

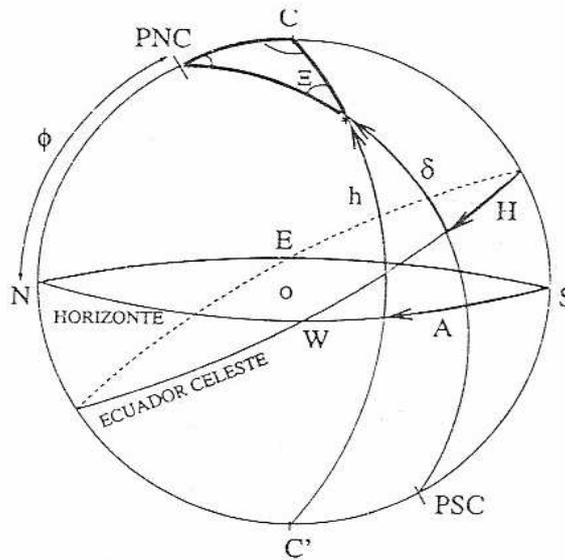


3.3 TRANSFORMACION ENTRE LOS SISTEMAS DE COORDENADAS

3.3.1 Paso de horizontales a ecuatoriales horarias y viceversa. Representemos las coordenadas horizontales y ecuatoriales horarias de un cuerpo celeste cualquiera como se muestra en la figura 12. De esta se observa el triángulo esférico de lados $90 - \phi$, $90 - \delta$, $90 - h$ y de ángulos E , $360 - A$, H .

Figura 12. relación entre coordenadas horizontales y ecuatoriales horarias.

Lados	Ángulos
$90 - \phi$	Ξ
$90 - \delta$	$360 - A$
$90 - h$	H



Utilizando el teorema del seno para triángulos esféricos se obtiene:

$$\frac{\text{sen}(90 - \delta)}{\text{sen}(360 - A)} = \frac{\text{sen}(90 - h)}{\text{sen}H} \quad (3.1)$$

utilizando la identidad trigonométrica para diferencia de ángulos, se llega a:

$$\cos \delta \text{ sen}H = -\cosh \text{ sen}A \quad (3.2)$$

Ahora bien, si se aplica el teorema de los cosenos para un triángulo esférico se obtiene:

$$\begin{aligned} \cos(90 - \delta) &= \cos(90 - \phi) \cos(90 - h) + \text{sen}(90 - \phi) \text{ sen}(90 - h) \cos(360 - A) \\ \text{sen}\delta &= \text{sen}\phi \text{ sen}h + \cos\phi \cosh \cos A \end{aligned} \quad (3.3)$$

Nuevamente aplicando este teorema, pero ahora para otro de los lados del triángulo se tiene:

$$\begin{aligned} \cos(90 - h) &= \cos(90 - \delta) \cos(90 - \phi) + \sin(90 - \delta) \sin(90 - \phi) \cos(H) \\ \operatorname{sen} h &= \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \phi + \cos \delta \cos \phi \cos H \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ahora para pasar de horizontales a ecuatoriales horaria, es decir, conocidos ϕ, h y A . Con la ecuación (3.3) se obtiene la declinación, esto es:

$$\delta = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} h + \cos \phi \cosh \cos A) \quad (3.5)$$

Al determinar la declinación δ se puede calcular el valor de H , con la ecuación (3.2) o la ecuación (3.4), esto es:

$$H = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{-\cosh \operatorname{sen} A}{\cos \delta}\right) \quad (3.6)$$

$$H = \operatorname{cos}^{-1}\left(\frac{\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \phi}{\cos \delta \cos \phi}\right) \quad (3.7)$$

Para pasar de ecuatoriales horarias a horizontales, es decir, conocidos ϕ, δ y H . Con la ecuación (3.4) se determina el valor de h :

$$h = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \phi + \cos \delta \cos \phi \cos H) \quad (3.8)$$

determinado el valor de h inmediatamente se calcula el valor de A con las ecuaciones (3.2) y (3.3), por tanto:

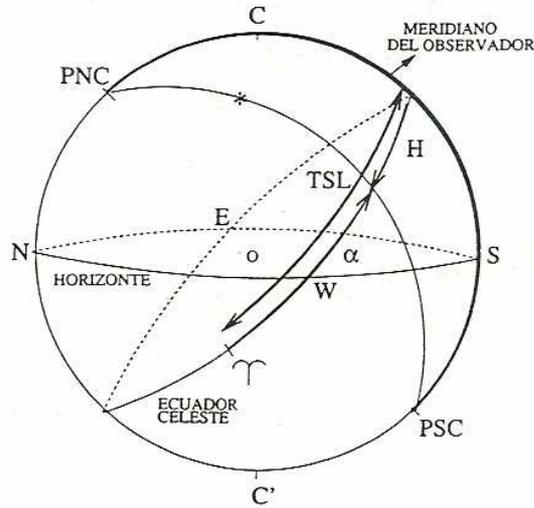
$$A = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{-\cos \delta \operatorname{sen} H}{\cosh}\right) \quad (3.9)$$

$$A = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\operatorname{sen} \delta - \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} h}{\cos \phi \cosh}\right) \quad (3.10)$$

3.3.2 De ecuatoriales horarias a ecuatoriales absolutas. En estos sistemas la declinación es la misma, entonces lo único que se considera es la relación entre el ángulo horario y la ascensión recta. La conexión se establece a través del tiempo sidereal que indica a través del punto vernal. El tiempo sidereal local TSL (ver apéndice A) de un observador en un instante dado se define como el ángulo horario del punto vernal (ver figura 13).

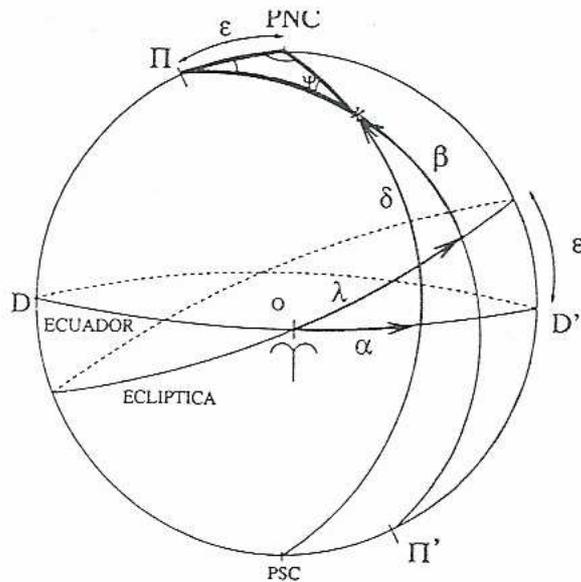
$$TSL = \alpha + H \Rightarrow H = TSL - \alpha \quad (3.11)$$

Figura 13. Relación entre α, H y TSL .



3.3.3 De ecuatoriales absolutas a eclípticas y viceversa. Representemos las coordenadas ecuatoriales absolutas y las eclípticas de un cuerpo celeste cualquiera como se muestra en la figura 14. el punto vernal está ubicado exactamente a medio camino entre los puntos D y D' . De ésta se observa el triángulo esférico de lados $90 - \beta$, $90 - \delta$, ϵ y de ángulos $90 + \alpha$, $90 - \lambda$, Ψ .

Figura 14. Relación entre coordenadas ecuatoriales absolutas y eclípticas.



Aplicando el teorema de los senos para los triángulos esféricos, se obtiene:

$$\frac{\text{sen}(90 - \delta)}{\text{sen}(90 - \lambda)} = \frac{\text{sen}(90 - \beta)}{\text{sen}(90 + \alpha)} \quad (3.12)$$

De la que se llega a:

$$\cos \delta \cos \alpha = \cos \lambda \cos \beta \quad (3.13)$$

Aplicando el teorema de los cosenos:

$$\cos(90 - \delta) = \cos(90 - \beta) \cos \varepsilon + \text{sen}(90 - \beta) \text{sen} \varepsilon \cos(90 - \lambda)$$

de la cual se obtiene:

$$\text{sen} \delta = \text{sen} \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \text{sen} \varepsilon \text{sen} \lambda \quad (3.14)$$

Nuevamente aplicando este teorema, pero ahora para otro de los lados del triángulo se tiene:

$$\cos(90 - \delta) = \cos(90 - \delta) \cos \varepsilon + \text{sen}(90 - \delta) \text{sen} \varepsilon \cos(90 + \alpha)$$

que es equivalente a:

$$\text{sen} \beta = \text{sen} \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \text{sen} \varepsilon \text{sen} \alpha \quad (3.15)$$

Ahora se pueden encontrar otras dos relaciones utilizando el teorema del seno por el coseno, esto es:

$$\text{sen} \lambda \cos \beta = \text{sen} \delta \text{sen} \varepsilon + \cos \delta \cos \varepsilon \text{sen} \alpha \quad (3.16)$$

$$\text{sen} \alpha \cos \delta = -\text{sen} \beta \text{sen} \varepsilon + \cos \beta \cos \varepsilon \text{sen} \lambda \quad (3.17)$$

Para pasar de coordenadas eclíptica a ecuatoriales, es decir, conocidos λ y β determinar α y δ . De la ecuación (3.14) se obtiene la declinación, esto es:

$$\delta = \text{sen}^{-1}(\text{sen} \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \text{sen} \varepsilon \text{sen} \lambda) \quad (3.18)$$

Para obtener el valor de la ascensión recta se divide las ecuaciones (3.17) con la ecuación (3.13):

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{-\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \varepsilon + \cos \beta \cos \varepsilon \operatorname{sen} \lambda}{\cos \lambda \cos \beta} \right) \quad (3.19)$$

Para pasar de coordenadas ecuatoriales a eclípticas, es decir, conocidos α y δ determinar λ y β . De la ecuación (3.15) se obtiene β , esto es:

$$\beta = \operatorname{sen}^{-1} (\operatorname{sen} \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} \alpha) \quad (3.20)$$

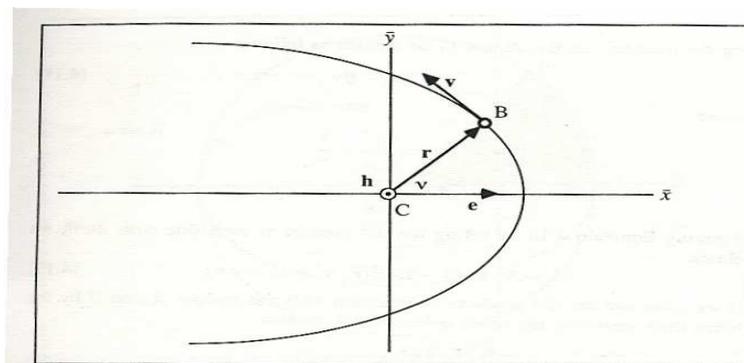
Dividiendo la ecuación (3.16) con la ecuación (3.13) se halla la relación para determinar λ , por tanto:

$$\lambda = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \varepsilon + \cos \delta \cos \varepsilon \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha \cos \delta} \right) \quad (3.21)$$

3.4 RELACIONES BÁSICAS

Considerando un sistema de dos masas, en el cual el cuerpo de masa m_2 está orbitando alrededor de m_1 , supongamos además que este cuerpo está situado en el origen de un sistema inercial de coordenadas. El plano de la órbita es el plano xy , donde el eje x está alineado con el semieje mayor de la trayectoria del movimiento. En un tiempo dado el cuerpo m_2 se desplaza del eje x y forma un ángulo θ con el radio vector de posición \vec{r} . A este ángulo se lo denomina anomalía verdadera del movimiento. La velocidad \vec{v} que es perpendicular al vector de posición y el vector momento angular por unidad de masa se los representa mediante la figura 15.

Figura 15. Plano de la órbita



Como ya se sabe el momento angular por unidad de masa está definido por:

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} \quad (3.21)$$

de esta manera para el sistema de coordenadas del plano de la órbita estos vectores están definidos así:

$$\begin{aligned} \vec{h} &= \langle 0, 0, h \rangle \\ \vec{r} &= \langle x, y, 0 \rangle \\ \vec{v} &= \langle \dot{x}, \dot{y}, 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.22)$$

Multiplicando escalarmente la ecuación (3.21) por \vec{h} , se obtiene:

$$\vec{h} \cdot \vec{h} = \vec{h} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) \quad (3.23)$$

$$h^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & h \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = h(xy - \dot{x}y) \quad (3.24)$$

$$h = (xy - \dot{x}y) \quad (3.25)$$

3.4.1 Definición del vector excentricidad. Multiplicando vectorialmente la ecuación de movimiento por \vec{h} , se obtiene:

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = -\frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \times \vec{h}) = -\frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})) \quad (3.26)$$

Utilizando la identidad vectorial de triple producto, se obtiene:

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \mu \frac{(\vec{r}\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}\vec{r})}{r^2} \quad (3.27)$$

Ahora teniendo en cuenta la siguiente derivada:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{r\dot{\vec{r}} - \vec{r}\dot{r}}{r^2} \quad (3.28)$$

Considerando la siguiente relación:

$$\frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \ddot{\vec{r}} \times \vec{h} \quad (3.29)$$

Reemplazando las ecuaciones (3.28) y (3.29) en la ecuación (3.27) e integrando su resultado se obtiene:

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \mu \left(\frac{\vec{r}}{r} + \vec{e} \right) \quad (3.30)$$

donde \vec{e} es un vector constante de integración definido por:

$$\vec{e} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} \quad (3.31)$$

La magnitud del vector $e = |\vec{e}|$ se denomina la excentricidad de las cónicas, que determina qué tipo de cónica es: una parábola, elipse, hipérbola o una circunferencia dependiendo del valor que tome la excentricidad.

Multiplicando escalarmente la ecuación (3.30) y utilizando el triple producto escalar del cálculo vectorial, se obtiene:

$$(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{h} = \mu \left(\frac{r^2}{r} + \vec{e} \cdot \vec{r} \right) \quad (3.32)$$

de la que es fácil deducir que:

$$\frac{h^2}{\mu} = r + \vec{e} \cdot \vec{r} \quad (3.33)$$

En el caso para el cual la excentricidad de la órbita es igual a cero r sería igual a una constante. Esto implicaría que la trayectoria del cuerpo sería circular.

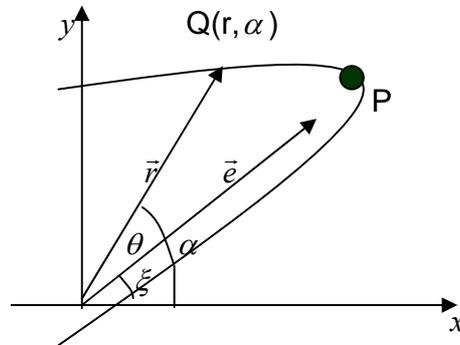
En el plano de la órbita en general la excentricidad toma valores distintos de cero, como se muestra en la figura 16. El ángulo entre el eje x y el vector \vec{e} está dado por ξ . Si la partícula está situada en punto Q de coordenadas (r, α) , de esta manera el ángulo entre el eje x y el vector de posición \vec{r} está dado por α . Si se elige como el eje de coordenadas al vector \vec{e} y al ángulo entre \vec{e} y \vec{r} será:

$$\theta = \alpha - \xi \quad (3.34)$$

Con el análisis anterior, si utilizamos la definición del producto escalar para los vectores \vec{e} y \vec{r} , se obtiene:

$$\vec{e} \cdot \vec{r} = er \cos \theta \quad (3.35)$$

Figura 16. La excentricidad en el plano de la orbita



Fuente: Mathematical introduction to Celestial Mechanics. POLLARD, Harry. pág.6

y la ecuación (3.33) se transforma en:

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos \theta} = \frac{\rho}{1 + e \cos \theta} \quad (3.36)$$

$$\therefore \rho = \frac{h^2}{\mu} \quad (3.39)$$

Esto implica que la órbita siempre será una sección cónica con excentricidad e , en un plano fijo que pasa por el cuerpo situado en el origen del sistema. Esta conclusión es una generalización de la primera ley de Kepler, válida sobre todo para los cometas cuya órbita puede ser de cualquier forma.

Analizando la ecuación (3.35), cuando $\theta = 0$, entonces r toma valores pequeños, y por lo tanto $e > 0$. Por consiguiente la magnitud del vector \vec{e} es igual a la longitud de la excentricidad cuando el cuerpo se va acercando al punto P ubicando el foco de la sección cónica como se puede observar en la figura 16, es decir, que el vector \vec{e} define la dirección del pericentro.

El punto P es llamado pericentro y el ángulo θ se conoce como Anomalía Verdadera del sistema. El pericentro recibe diferentes nombres, depende del cuerpo que se elija en centro de coordenadas. Por ejemplo si es el Sol, el pericentro pasa a llamarse perihelio; si es la Tierra, es llamado perigeo; si es una estrella, es llamado periastro. Y el ángulo ξ se conoce como la amplitud del pericentro [2].

3.4.2 Relación entre momento angular y velocidad angular. Si se observa la figura 15 se puede obtener una importante relación, en el plano de la órbita; se deduce que:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta\end{aligned}\tag{3.38}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (3.25) y (3.38)

$$h = r^2 \dot{\theta}\tag{3.39}$$

3.4.3 Relación entre velocidad y anomalía verdadera. Otra relación muy importante para la geometría de las órbitas se la puede deducir a partir de la ecuación general de las cónicas ya que ella determina la trayectoria del movimiento, por lo tanto:

$$\rho = r(1 + e \cos \theta)\tag{3.40}$$

Al diferenciar con respecto al tiempo y multiplicarla por r esta ecuación, se obtiene:

$$0 = \dot{r}r(1 + e \cos \theta) - r^2 \dot{\theta} e \sin \theta\tag{3.41}$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.39) y (3.40) en (3.41) y despejando \dot{r} , se deduce que:

$$\dot{r} = \frac{h e \sin \theta}{\rho}\tag{3.42}$$

reemplazando el valor de h en la ecuación anterior dado por:

$$h = \sqrt{\rho \mu}\tag{3.43}$$

Resulta que:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} e \sin \theta\tag{3.44}$$

3.4.4 Relación entre la anomalía verdadera y el parámetro D. Otra relación bastante importante se la deduce partiendo de la ecuación anterior y también utilizando la ecuación general de las cónicas. Multiplicando la ecuación (3.44) por r y sustituyendo el valor de (3.40), se obtiene:

$$\frac{\dot{r}r}{\sqrt{\mu}} = \frac{\sqrt{\rho} e \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \quad (3.45)$$

Se define el parámetro D que es muy utilizado en el cálculo de órbitas, particularmente en el caso de órbitas parabólicas, como:

$$D = \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{\sqrt{\mu}} \quad (3.46)$$

de esta forma la ecuación (3.46) es ahora:

$$D = \frac{\sqrt{\rho} e \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \quad (3.47)$$

3.4.5 Relación entre excentricidad, semiparámetro y el parámetro D. Esta relación parte de la definición del vector \vec{e} y reemplazando en la ecuación anterior el valor del vector momento angular por unidad de masa, se obtiene:

$$\vec{e} = \frac{\vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v})}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} \quad (3.48)$$

Factorizando y organizando términos, se logra:

$$\vec{e} = \left(\frac{v^2}{\mu} - \frac{1}{r} \right) \vec{r} - \frac{r\dot{r}}{\mu} \vec{v} \quad (3.49)$$

Sea,

$$A = \frac{v^2}{\mu} - \frac{1}{r} \quad \wedge \quad B = \frac{r\dot{r}}{\mu} \quad (3.50)$$

por consiguiente la ecuación (3.49) es ahora:

$$\vec{e} = A\vec{r} - B\vec{v} \quad (3.51)$$

Multiplicando escalarmente esta ecuación por \vec{e} , se obtiene:

$$e^2 = A^2(\vec{r} \cdot \vec{r}) - 2AB\vec{r} \cdot \vec{v} + B^2(\vec{v} \cdot \vec{v}) \quad (3.52)$$

Sustituyendo los valores de la ecuación (3.50) en la ecuación (3.52), se deduce que:

$$e^2 = \left(\frac{v^2}{\mu} - \frac{1}{r} \right)^2 r^2 - 2 \left(\frac{v^2}{\mu} - \frac{1}{r} \right) \frac{(r\dot{r})^2}{\mu} + \left(\frac{r\dot{r}}{\mu} \right)^2 v^2 \quad (3.53)$$

Reemplazando el valor del parámetro D y la relación que existe para la ecuación Vis-viva en la ecuación (3.53), se obtiene:

$$e^2 = \left(\frac{a-r}{a} \right)^2 + \frac{D^2}{a} = \left(1 - \frac{r}{a} \right)^2 + \frac{D^2}{a} \quad (3.54)$$

Como el semiparámetro ρ para una elipse está dado por:

$$\rho = a(1 - e^2) \Rightarrow e^2 = 1 - \frac{\rho}{a} \quad (3.55)$$

Al igualar las ecuaciones (3.54) con (3.55), se obtiene:

$$\rho = r \left(1 - \frac{r}{a} \right) - D^2 \quad (3.56)$$

3.5 GEOMETRÍA Y TIEMPO

Las leyes de Kepler derivadas en el capítulo anterior, son una relación geométrica del sistema solar. Estas fueron desarrolladas por éste brillante astrónomo con el objetivo principal de construir un modelo heliocéntrico del universo y también para calcular la posición de cualquier astro en un tiempo determinado.

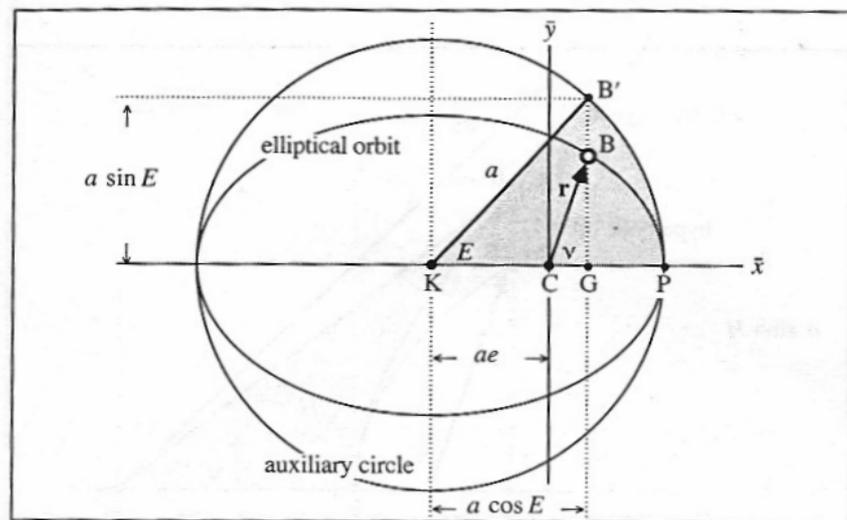
Al aplicar la ecuación (3.25) a la geometría específica de las órbitas es posible derivar matemáticamente la relación que existe entre la posición en el plano de la órbita y el tiempo transcurrido para una época dada para cualquier tipo de trayectoria cónica. Estas ecuaciones derivadas matemáticamente a partir de esta ecuación, son una generalización de las leyes de Kepler [3].

3.5.1 Formulación elíptica. Para deducir la formulación elíptica, se considera la ayuda de un círculo auxiliar el cual circunscribe la trayectoria elíptica del movimiento como lo muestra la figura 17.

Aquí el círculo auxiliar es de centro K , el cuerpo de masa m_2 se mueve alrededor de m_1 con trayectoria elíptica y se tiene en cuenta el punto B' que es la proyección de m_2 en la dirección de y sobre el círculo. El ángulo E es proporcional al área barrida del eje x hasta la línea que une el punto KB' y se conoce como la anomalía excéntrica. La distancia del punto B' al centro del círculo es la longitud

del radio de éste y es siempre constante en cualquier instante dado de tiempo y su valor es a . La longitud entre el centro del círculo K y el cuerpo m_1 , es decir, la distancia focal es ae , donde e es la excentricidad de la elipse. La ayuda del círculo auxiliar es que las coordenadas $x \wedge y$ no se las expresa en términos de la anomalía verdadera, sino más bien en términos de la anomalía de la excéntrica, con el fin de que la ecuación de movimiento pueda ser reducida a una forma más simple y de esta manera integrarla más fácilmente.

Figura 17. Círculo auxiliar para la formulación elíptica.



De la figura se observa que:

$$\cos E = \frac{ae + x}{a} \Rightarrow x = a(\cos E - e) \quad (3.57)$$

como la ecuación general de una cónica esta dada por:

$$\rho = r + e(r \cos \theta) = r + ex \quad (3.58)$$

sustituyendo la ecuación (3.57) en (3.58) y teniendo en cuenta el valor de ρ , se obtiene

$$r = a - ae \cos E = a(1 - e \cos E) \quad (3.59)$$

encontrando el valor de y así,

$$y^2 = r^2 - x^2 = a^2(1 - e \cos E)^2 - a^2(\cos E - e)^2 \quad (3.60)$$

$$y^2 = a^2 [1 - e^2 - \cos^2 E(1 - e^2)] = a^2(1 - e^2)(1 - \cos^2 E) \quad (3.61)$$

La ecuación (3.61), utilizando la identidad trigonométrica fundamental, se convierte en:

$$y = a \operatorname{sen} E \sqrt{1 - e^2} \quad (3.62)$$

Derivando las ecuaciones (3.57) y (3.62) y reemplazándolas en la ecuación (3.25), se obtiene:

$$h = a^2 \sqrt{1 - e^2} (1 - e \cos E) \dot{E} \quad (3.63)$$

teniendo en cuenta que:

$$\sqrt{\frac{\rho}{a}} = \sqrt{1 - e^2} \quad \wedge \quad h = \sqrt{\rho \mu} \quad (3.64)$$

Introduciendo estos resultados en la ecuación (3.63) resulta:

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} dt = (1 - e \cos E) dE \quad (3.65)$$

Integrando la ecuación anterior, se obtiene:

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} t = E - e \operatorname{sen} E \quad (3.66)$$

Donde la constante de integración tiene un valor igual a cero porque para cuando la anomalía excéntrica sea igual a cero, se tiene un tiempo igual a cero. Definiendo t_0 como el tiempo de tránsito perifocal, entonces la posición del cuerpo celeste para cualquier tiempo t conocido se determina por:

$$n(t - t_0) = E - e \operatorname{sen} E \quad (3.67)$$

donde n , es conocido como el movimiento medio, dado por

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (3.68)$$

Al introducir una cantidad M conocida como anomalía media la ecuación (3.67) se convierte en:

$$M = E - e \operatorname{sen} E \quad (3.69)$$

La ecuación (3.69) es la ecuación de Kepler para órbitas elípticas y además tiene un caso particular de movimiento circular cuando la excentricidad es igual a cero.

Ahora veamos la relación que existe entre la anomalía excéntrica y la anomalía verdadera, partiendo de la ecuación general de una cónica y de la ecuación (3.58), por lo tanto:

$$r = a(1 - e \cos E)$$

$$\frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} = a(1 - e \cos E) \quad (3.70)$$

Organizando algunos términos llegamos a:

$$\cos \theta = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \quad (3.71)$$

Ahora, se suma 1 a la ecuación anterior. Luego se la multiplica por -1 y se le adiciona 1 nuevamente, pero a la ecuación original. Finalmente se divide las expresiones resultantes, obteniéndose lo siguiente:

$$\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{(2 - e \cos E)(e - 1 - \cos E)}{e \cos E(1 + \cos E - e)} = \frac{(2 - e \cos E)(2 \operatorname{sen}^2 \frac{E}{2} + e)}{e \cos E(2 \cos^2 \frac{E}{2} - e)} \quad (3.72)$$

Utilizando la identidad trigonométrica dada por:

$$\operatorname{tg}^2 A = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} \quad (3.73)$$

y después de hacer algunos arreglos la ecuación (3.72) se convierte en:

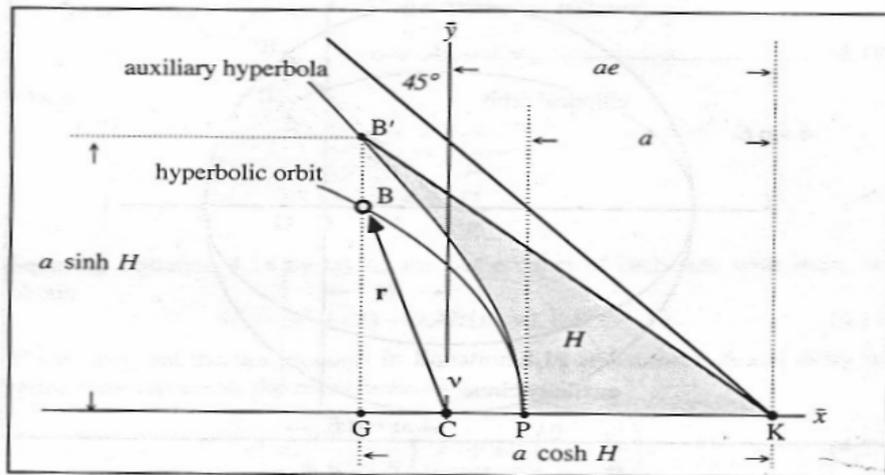
$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \quad (3.74)$$

Esta ecuación representa la anomalía verdadera en función de la anomalía media.

3.5.2 Formulación hiperbólica. Al igual que en el caso anterior, para deducir una formulación hiperbólica se utiliza la ayuda de una figura geométrica auxiliar, sólo

que en este caso en lugar de un círculo se utiliza una hipérbola auxiliar, como lo ilustra la figura 15.

Figura 17. Hipérbola auxiliar para la formulación Hiperbólica.



Como se puede observar el centro geométrico de la curvas es el punto C. El cuerpo de masa m_2 se mueve alrededor de m_1 con trayectoria hiperbólica, donde en la hipérbola auxiliar es seguido por un punto B' que es la proyección de m_2 en la dirección del eje y . Además en la hipérbola los rayos asintóticos están a 45° grados del eje de coordenadas. La excentricidad es mayor que la unidad y el eje semieje mayor es menor que la unidad. El parámetro H que se proporcional al área barrida de la figura, se denomina anomalía excéntrica hiperbólica.

De la figura se obtiene,

$$\cosh H = \frac{x + ae}{a} \Rightarrow x = a(\cosh H - e) \quad (3.75)$$

Nuevamente, utilizando la ecuación general una cónica y haciendo algunos arreglos se llega a:

$$\frac{\rho - r}{e} = a \cosh H - ae \Rightarrow p = ae \cosh H - ae^2 + r \quad (3.76)$$

Reemplazando el valor de ρ y organizando términos se obtiene:

$$r = a(1 - e \cosh H) \quad (3.77)$$

Sustituyendo el valor de las ecuaciones (3.75) y (3.77) en la ecuación (3.61), se obtiene:

$$y^2 = a^2(1 - e^2 + \cosh^2 H(e^2 - 1)) = a^2(e^2 - 1)(\cosh^2 H - 1) \quad (3.78)$$

Al aplicar la identidad hiperbólica dada por:

$$\cosh^2 A - \sinh^2 A = 1 \quad (3.79)$$

la ecuación (3.78) se convierte en:

$$y = \pm a\sqrt{e^2 - 1}\sinh H \quad (3.80)$$

Puesto que el valor de excentricidad es mayor que uno y el valor del semieje mayor es menor que uno, se toma el signo menos en la ecuación anterior, para poder obtener un valor positivo de y cuando H toma valores positivos.

Derivando las ecuaciones (3.75) y (3.80) y sustituyéndolas en la ecuación (3.25), se obtiene:

$$h = a^2\sqrt{e^2 - 1}(e \cosh H - 1)\dot{H} \quad (3.81)$$

como,

$$h = \sqrt{\mu\rho} = \sqrt{\mu(-a)(e^2 - 1)} \quad (3.82)$$

sustituyendo este resultado en la ecuación (3.81) e integrando, resulta

$$\sqrt{\frac{\mu}{(-a)^3}}t = e\sinh H - H \quad (3.83)$$

En este caso, también la constante de integración es cero, porque se define un tiempo igual a cero cuando la anomalía excéntrica hiperbólica vale cero. Siguiendo el mismo procedimiento de la ecuación de Kepler para el movimiento elíptico, se define el movimiento medio dado por:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{(-a)^3}} \quad (3.84)$$

De esta manera, para un tiempo conocido t ,

$$M = e\sinh H - H \quad (3.85)$$

Esta es la ecuación de Kepler para un cuerpo que sigue una trayectoria hiperbólica.

3.5.3 Formulación Parabólica. Para una órbita parabólica en el movimiento de los dos cuerpos, es bien sabido que la excentricidad es igual a la unidad, es por ello que la ecuación general de las cónicas es dada por:

$$r = \frac{\rho}{1 + \cos \theta} \therefore \rho = q(1 + e) = 2q \quad (3.86)$$

Pero cuando la excentricidad es igual a la unidad se llega a la conclusión de que el semieje mayor de la parábola tiende a infinito. De esta manera la ecuación de Kepler para órbitas parabólicas se deriva sin utilizar una curva auxiliar, lo que se hace es utilizar el parámetro D como la anomalía excéntrica parabólica. Por lo tanto,

$$D = \frac{\sqrt{\rho} \cos \theta}{1 + \cos \theta} \quad (3.87)$$

Aplicando la identidad trigonométrica dada por:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\operatorname{sen} A}{1 + \cos A} \quad (3.88)$$

la ecuación anterior se convierte en:

$$D = \sqrt{\rho} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \quad (3.89)$$

Como x en coordenadas polares es dada por:

$$x = r \cos \theta \quad (3.90)$$

sustituyendo el valor de (3.86) en (3.90), se obtiene:

$$x = \frac{\rho \cos \theta}{1 + \cos \theta} \quad (3.91)$$

Aplicando las identidades trigonométricas dadas por:

$$\cos A = \cos^2 \frac{A}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} \quad \wedge \quad \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 \quad (3.92)$$

la ecuación (3.91) se convierte en:

$$x = \frac{1}{2} \left(\rho - \rho t \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (3.93)$$

reemplazando la ecuación (3.90) en (3.93), se obtiene:

$$x = \frac{1}{2} (\rho - D^2) \quad (3.94)$$

Ahora se calcula el valor para y de la misma manera, entonces

$$y = r \operatorname{sen} \theta = \frac{\rho \operatorname{sen} \theta}{1 + \cos \theta} \quad (3.95)$$

aplicando la identidad trigonométrica dada por la ecuación (3.88), la ecuación anterior se convierte en:

$$y = \rho \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\rho D} \quad (3.96)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.94) y (3.96) junto con sus respectivas derivadas en la ecuación (3.25), se obtiene:

$$h = \frac{1}{2} (\rho - D^2) \sqrt{\rho \dot{D}} + \sqrt{\rho D^2 \dot{D}} \quad (3.97)$$

Esta expresión es simplificada utilizando las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{\mu \rho} = \sqrt{2q\mu} \\ \dot{D} &= \frac{dD}{dt} \end{aligned} \quad (3.98)$$

Sustituyendo (3.98) en (3.97) y organizando términos, resulta

$$2\sqrt{\mu} dt = 2q dD + D^2 dD \quad (3.99)$$

que al integrarla, se obtiene:

$$2\sqrt{\mu} t = 2qD + \frac{D^3}{3} \quad (3.100)$$

La constante de integración es cero, porque D es igual a cero cuando θ es igual a cero para un t igual a cero. Definiendo como en los dos casos anteriores, el movimiento medio por:

$$n = \sqrt{\mu} \quad (3.101)$$

Entonces, la anomalía media es:

$$M = n(t - t_0) \quad (3.102)$$

donde t_0 es el tiempo de transito del perifoco. Por lo tanto, la ecuación (3.100) se convierte en:

$$M = qD + \frac{D^3}{6} \quad (3.103)$$

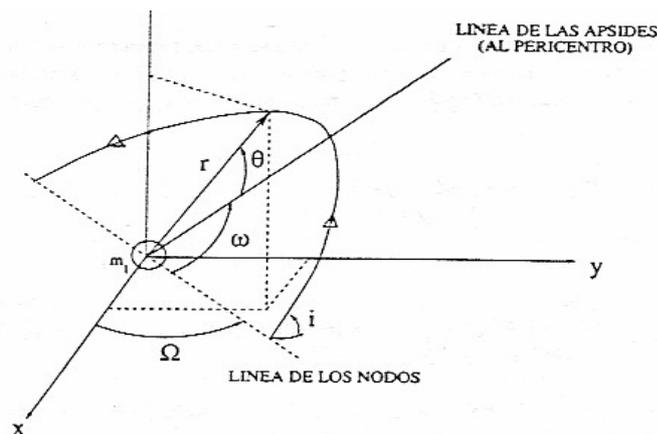
Esta es la forma parabólica de las ecuaciones de Kepler, también es conocida como la ecuación de Barker [3].

3.6 ELEMENTOS ORBITALES

Para describir el movimiento entre los dos cuerpos, no es suficiente con conocer la posición y la velocidad de uno de ellos, ya que éstos no revelan claramente el tamaño, forma y orientación de la órbita en el espacio. Para ello existe un grupo de parámetros o elementos que están directamente relacionados con las constantes de integración obtenidas al desarrollar las ecuaciones diferenciales que gobiernan este movimiento [5].

Estos elementos son los siguientes:

Figura 19. Los elementos orbitales.



- ◆ a = semieje mayor de la órbita.
- ◆ e = excentricidad de la órbita.

- ◆ i = inclinación de la órbita con respecto a algún plano de referencia.
- ◆ Ω = longitud del nodo ascendente de la órbita.
- ◆ ω = argumento de perihelio de la órbita.
- ◆ T = Tiempo de paso del cuerpo por el perihelio.

Los elementos a, e especifican respectivamente el tamaño y la forma de la órbita. Los elementos i, Ω, ω sirven para especificar la orientación del plano orbital en el espacio. El elemento final, T , es el tiempo en el cual el objeto orbitante pasa a través del perihelio de la órbita.

Para una órbita parabólica el semieje mayor es reemplazado por el parámetro q llamada distancia pericéntrica y su valor de excentricidad tiene un valor fijo igual a la unidad.

No obstante, no siempre es posible encontrar los elementos orbitales como se los acaba de definir. También se utiliza lo siguiente:

M_r en vez de T para una órbita elíptica donde M_r es la anomalía media para un instante dado cualquiera t_r que se llama de referencia, esto es;

a la ecuación (3.67) se le suma y resta el término nt_r y se obtiene:

$$M = M_r + n(t - t_r) \quad (3.104)$$

donde $M_r = n(t_r - t_0)$ es la anomalía media de referencia.

A ϖ en vez de ω , donde ϖ es denominado la longitud del pericentro, en un ángulo que resulta de la suma de ángulos definidos en planos diferentes:

$$\varpi = \Omega + \omega \quad (3.105)$$

A L_r en vez de T o de M_r para una órbita elíptica, donde L_r es la longitud media para el tiempo de referencia t_r . Esta longitud se relaciona con la anomalía media de referencia mediante:

$$L_r = M_r + \varpi \quad (3.106)$$

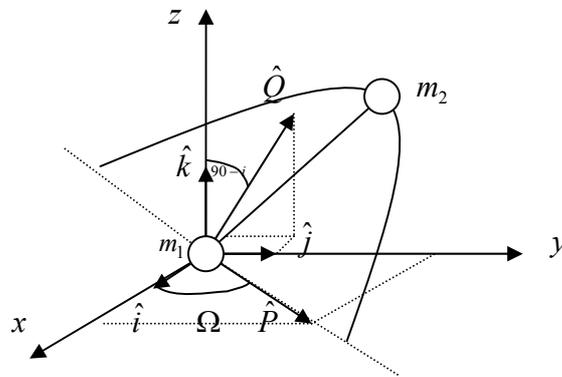
3.7 POSICIÓN Y VELOCIDAD A PARTIR DE ELEMENTOS CLÁSICOS

3.7.1 POSICIÓN EN LA ORBITA

En ocasiones se presenta lo contrario, es decir, conocidos los elementos orbitales del movimiento, se debe hallar la posición para un tiempo dado t , es decir, conocidos para un instante dado los valores de θ y r al igual que Ω , i y ω que son cantidades constantes, hallar las componentes del vector posición \vec{r} para dicho tiempo.

Para esta transformación se define un grupo de vectores unitarios $\hat{P} \wedge \hat{Q}$, el primero de ellos \hat{P} ubicado en el plano xy y dirigido en la dirección del nodo ascendente, el segundo \hat{Q} , ortogonal al primero pero definido en el plano de la órbita en que se mueve el cuerpo de masa m_2 , como lo muestra la figura 19.

Figura 20. Definición de los vectores unitarios $\hat{P} \wedge \hat{Q}$



De la figura se puede observar que:

$$\begin{aligned}\hat{P} &= \cos \Omega \hat{i} + \operatorname{sen} \Omega \hat{j} + \mathbf{0} \hat{k} \\ \hat{Q} &= -\operatorname{sen} \Omega \cos i \hat{i} + \cos \Omega \cos i \hat{j} + \operatorname{sen} i \hat{k}\end{aligned}\quad (3.107)$$

de igual manera, para encontrar una relación entre los vectores unitarios en coordenadas polares y los vectores unitarios $\hat{P} \wedge \hat{Q}$, nos basamos en la figura 20 y se puede deducir:

$$\hat{u}_r = \hat{P} \cos(w + \theta) + \hat{Q} \operatorname{sen}(w + \theta) \quad (3.108)$$

Teniendo en cuenta que el vector de posición en coordenadas polares está dado por,

$$\vec{r} = r \hat{u}_r \quad (3.109)$$

Se llega a :

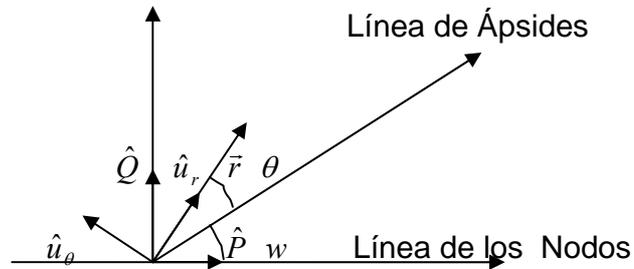
$$\vec{r} = r\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = r(\hat{P} \cos(w + \theta) + \hat{Q} \text{sen}(w + \theta)) \quad (3.110)$$

Reemplazando la ecuación (3.107) en (3.110) e igualando sus respectivas componentes se obtiene:

$$\begin{aligned} x &= r(\cos(w + \theta) \cos \Omega - \text{sen}(w + \theta) \text{sen} \Omega \cos i) \\ y &= r(\cos(w + \theta) \text{sen} \Omega + \text{sen}(w + \theta) \cos \Omega \cos i) \\ z &= r(\text{sen}(w + \theta) \text{sen} i) \end{aligned} \quad (3.111)$$

las ecuaciones válidas para cualquier tipo de órbita.

Figura 21. Relación de los vectores $\hat{u}_\theta \wedge \hat{u}_r$ con $\hat{P} \wedge \hat{Q}$



3.7.2 VELOCIDAD EN LA ÓRBITA

Ahora se determinará la velocidad del cuerpo cuando los elementos orbitales son conocidos, para algún tiempo dado t . Ya que en el cálculo de órbitas es de gran interés el conocimiento de las componentes del vector velocidad. Para ello se parte de la velocidad en coordenadas polares dada por,

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta} \hat{u}_\theta. \quad (3.112)$$

En este caso, se encontrará la velocidad para cada órbita, es decir, se calcula los valores de $\dot{r} \wedge \dot{\theta}$ para órbitas elípticas, hiperbólicas y parabólicas y lo sustituimos en la ecuación (3.112).

De esta forma, de la figura 21 se observa que el vector unitario para la coordenada angular en función de los vectores $\hat{P} \wedge \hat{Q}$ está dado por:

$$\hat{u}_\theta = -\hat{P} \text{sen}(w + \theta) + \hat{Q} \cos(w + \theta) \quad (3.113)$$

A partir de la relación de r con la anomalía excéntrica para una órbita elíptica dada por la ecuación (3.59), es posible hallar el valor de \dot{r} , esto es:

$$\dot{r} = a e \operatorname{sen} E \dot{E} \quad (3.114)$$

Para determinar el valor de \dot{E} , se utiliza la relación dada por la ecuación (3.69), que al derivarla con respecto al tiempo se convierte en:

$$\dot{E} = \frac{n}{1 - e \cos E} \quad (3.115)$$

Sustituyendo (3.115) en (3.114), se obtiene:

$$\dot{r} = \frac{a e \operatorname{sen} E}{1 - e \cos E} = \frac{a^2 e \operatorname{sen} E}{r} \quad (3.116)$$

El valor de $\dot{\theta}$ es:

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2} = \frac{\sqrt{\mu a(1 - e^2)}}{r^2} \quad (3.117)$$

Al reemplazar los valores de las ecuaciones (3.116), (3.108), (3.113) y (3.117) en (3.112), se obtiene:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{a^2 e \operatorname{sen} E}{r} (\hat{P} \cos(w + \theta) + \hat{Q} \operatorname{sen}(w + \theta)) + \frac{\sqrt{a\mu(1 - e^2)}}{r} (-\hat{P} \operatorname{sen}(w + \theta) + \hat{Q} \cos(w + \theta))$$

Introduciendo los valores de los vectores unitarios $\hat{P} \wedge \hat{Q}$ en la relación anterior e igualando sus componentes se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{a^2 e \operatorname{sen} E}{r} (\cos(w + \theta) \cos \Omega - \operatorname{sen}(w + \theta) \operatorname{sen} \Omega \cos i) - \frac{\sqrt{a\mu(1 - e^2)}}{r} (\operatorname{sen}(w + \theta) \cos \Omega + \cos(w + \theta) \operatorname{sen} \Omega \cos i) \\ \dot{y} &= \frac{a^2 e \operatorname{sen} E}{r} (\cos(w + \theta) \operatorname{sen} \Omega + \operatorname{sen}(w + \theta) \cos \Omega \cos i) + \frac{\sqrt{a\mu(1 - e^2)}}{r} (\operatorname{sen}(w + \theta) \operatorname{sen} \Omega + \cos(w + \theta) \cos \Omega \cos i) \\ \dot{z} &= \frac{a^2 e \operatorname{sen} E}{r} \operatorname{sen}(w + \theta) \operatorname{sen} i + \frac{\sqrt{a\mu(1 - e^2)}}{r} \cos(w + \theta) \operatorname{sen} i \end{aligned} \quad (3.118)$$

Se hace el mismo procedimiento para calcular la velocidad de una órbita hiperbólica. Derivando la ecuación (3.77), se obtiene:

$$\dot{r} = -a e \operatorname{sen} h \dot{H} \quad (3.119)$$

Ahora se halla el valor de \dot{H} , derivando la ecuación (3.83), por lo tanto:

$$\dot{H} = \frac{n}{e \cosh H - 1} \quad (3.120)$$

y el valor de $\dot{\theta}$ en este caso es:

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2} = \frac{\sqrt{a\mu(e^2 - 1)}}{r^2} \quad (3.121)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.121), (3.120) y (3.119) en la ecuación (3.112) se encuentra el valor de la velocidad, entonces:

$$\dot{\vec{r}} = -\frac{a \operatorname{sen} h H}{e \cosh H - 1} \hat{u}_r + \frac{\sqrt{a\mu(e^2 - 1)}}{r} \hat{u}_\theta \quad (3.122)$$

Al reemplazar los valores de los vectores unitarios en coordenadas polares en función de los vectores unitarios $\hat{P} \wedge \hat{Q}$ y éstos a su vez en función de los vectores unitarios $\hat{i}, \hat{j} \wedge \hat{k}$ e igualando sus componentes, se llega a:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{a^2 \operatorname{sen} h H}{r} (\cos(w + \theta) \cos \Omega - \operatorname{sen}(w + \theta) \operatorname{sen} \Omega \cos i) - \frac{\sqrt{a\mu(e^2 - 1)}}{r} (\operatorname{sen}(w + \theta) \cos \Omega + \cos(w + \theta) \operatorname{sen} \Omega \cos i) \\ \dot{y} &= \frac{a^2 \operatorname{sen} h H}{r} (\cos(w + \theta) \operatorname{sen} \Omega + \operatorname{sen}(w + \theta) \cos \Omega \cos i) + \frac{\sqrt{a\mu(e^2 - 1)}}{r} (\cos(w + \theta) \cos \Omega \cos i - \operatorname{sen}(w + \theta) \operatorname{sen} \Omega) \\ z &= \frac{a^2 \operatorname{sen} h H}{r} \operatorname{sen}(w + \theta) \operatorname{sen} i + \frac{\sqrt{a\mu(e^2 - 1)}}{r} \cos(w + \theta) \operatorname{sen} i \end{aligned} \quad (3.123)$$

Para la órbita parabólica se utiliza el parámetro D y con éste se calcula una expresión para r , valiéndose de las ecuaciones (3.94) y (3.96):

$$r = \frac{1}{2}(2q + D^2) \quad (3.124)$$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación anterior, resulta

$$\dot{r} = D\dot{D} \quad (3.125)$$

como

$$\dot{D} = \frac{n}{q + \frac{1}{2}D^2} = \frac{n}{r} \quad (3.126)$$

Sustituyendo este valor, la ecuación (3.126) se convierte en:

$$\dot{r} = \frac{Dn}{r} \quad (3.127)$$

Para una órbita parabólica $\dot{\theta}$ es:

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{2q\mu}}{r^2} \quad (3.128)$$

Realizando el mismo procedimiento de los anteriores casos, se encuentra el valor de las componentes de la velocidad de una órbita parabólica, entonces se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{Dn}{r} (\cos(w+\theta)\cos\Omega - \text{sen}(w+\theta)\text{sen}\Omega \cos i) - \frac{\sqrt{2q\mu}}{r} (\text{sen}(w+\theta)\cos\Omega + \cos(w+\theta)\text{sen}\Omega \cos i) \\ \dot{y} &= \frac{Dn}{r} (\cos(w+\theta)\text{sen}\Omega + \text{sen}(w+\theta)\cos\Omega \cos i) + \frac{\sqrt{2q\mu}}{r} (\cos(w+\theta)\cos\Omega \cos i - \text{sen}(w+\theta)\text{sen}\Omega) \\ \dot{z} &= \frac{Dn}{r} \text{sen}(w+\theta)\text{sen}i + \frac{\sqrt{2q\mu}}{r} \cos(w+\theta)\text{sen}i \end{aligned} \quad (3.129)$$

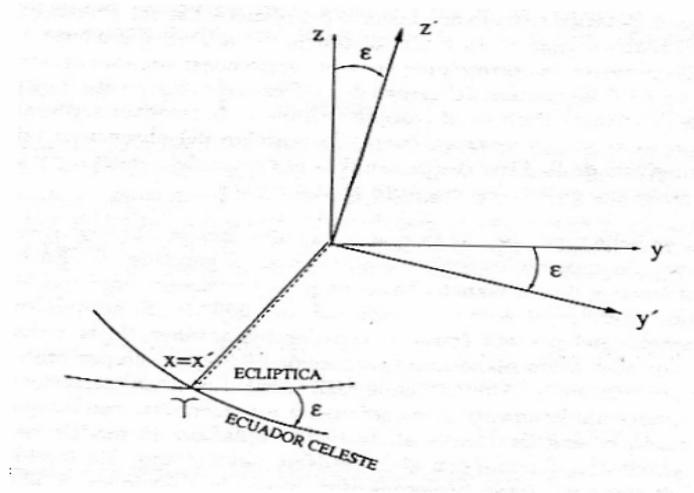
3.7.3 La ubicación de un astro con respecto a la Tierra. Si se requiere calcular la posición de un astro con respecto al planeta se necesita pasar de las coordenadas eclípticas heliocéntricas (x, y, z) a unas coordenadas ecuatoriales heliocéntricas (x', y', z') . Como el plano del ecuador celeste y el de la eclíptica se cortan en el punto Aries y asimismo el eje x está en la misma dirección de este punto la transformación entre estos sistemas sería una rotación de las coordenadas un ángulo ε conocido como la oblicuidad de la eclíptica. Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R_1(-\varepsilon) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \cos \varepsilon - z \text{sen} \varepsilon \\ z' &= y \text{sen} \varepsilon + z \cos \varepsilon \end{aligned} \quad (3.130)$$

Lo siguiente sería encontrar el vector posición del astro con respecto a la Tierra, esto se halla conociendo, para un mismo tiempo t el vector posición de la Tierra con respecto al Sol (ver figura 22).

Figura 22. Rotación alrededor del eje x.



Si se define un sistema de coordenadas ecuatoriales geocéntricas (ξ, η, ζ) para expresar el vector ρ se tiene:

$$\xi = x' - x'_T; \quad \eta = y' - y'_T; \quad \zeta = z' - z'_T \quad (3.131)$$

Este sistema geocéntrico está relacionado con las coordenadas ecuatoriales de la siguiente manera (ver figura 23):

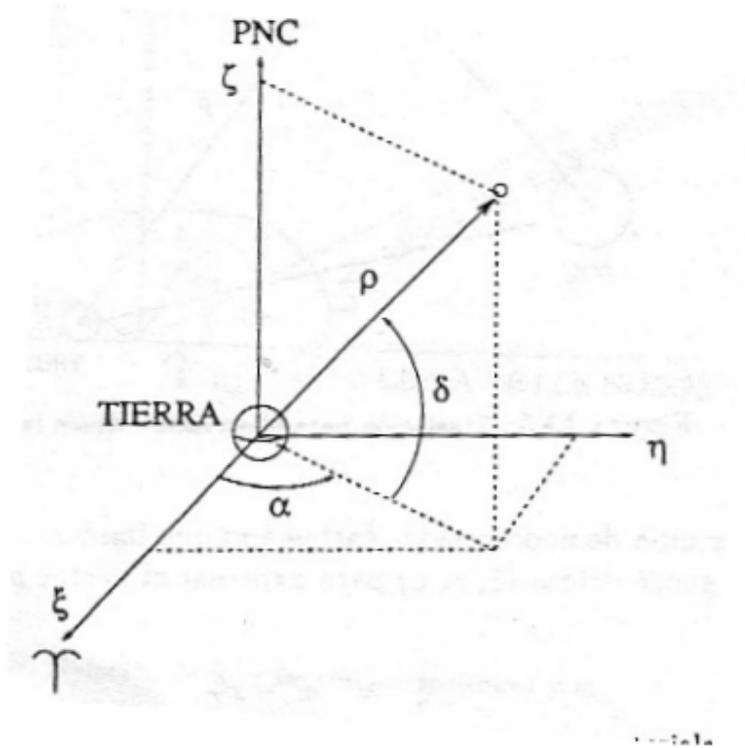
$$\begin{aligned} \xi &= \rho \cos \lambda \cos \phi \\ \eta &= \rho \operatorname{sen} \lambda \cos \phi \\ \zeta &= \rho \operatorname{sen} \phi \end{aligned} \quad (3.132)$$

donde ρ es la distancia entre el cuerpo y la Tierra.

Y sus coordenadas ecuatoriales para un observador ubicado en la Tierra son:

$$\begin{aligned} \alpha &= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\eta}{\xi} \right) \\ \delta &= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right) \\ \rho &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \end{aligned} \quad (3.133)$$

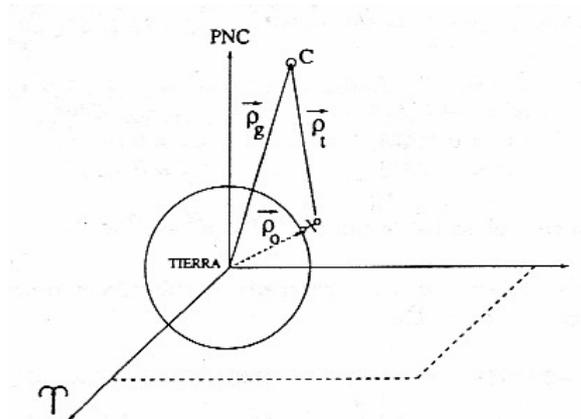
Figura 23. Relación entre las coordenadas ecuatoriales y las (ξ, η, ζ) .



3.7.4 La posición de un astro con relación a las coordenadas topocéntricas.

Las coordenadas halladas en la sección anterior son válidas para un observador situado en el centro de nuestro planeta. Ya que gran parte de los astros están a distancias tan enormes comparadas con el radio terrestre, la corrección que es necesario hacer para un observador situado en la superficie terrestre usualmente no se la tiene en cuenta. Pero si se trata de cuerpos situados a pequeñas distancias, por ejemplo la Luna o satélites artificiales se debe tener en cuenta la posición del observador situado en la superficie con respecto al centro del planeta (ver figura 24).

Figura 24. Determinación del vector topocéntrico.



Para calcular las coordenadas de un cuerpo con respecto a un observador situado en la superficie con coordenadas geocéntricas (ϕ', λ, ρ) se debe tener en cuenta cómo es el vector posición del observador con respecto al centro del planeta. Para un cuerpo cualquiera cerca de la superficie sea, $\vec{\rho}_g$ su vector geocéntrico; $\vec{\rho}_o$ el vector geocéntrico del observador y $\vec{\rho}_t$ el vector topocéntrico del cuerpo con respecto al observador. De la figura se tiene:

$$\vec{\rho}_t = \vec{\rho}_g - \vec{\rho}_o \quad (3.134)$$

De la figura 25 también se observa la relación que existe entre el TSL en el momento de la observación, la latitud geocéntrica ϕ' , la distancia radial y el vector topocéntrico del observador de coordenadas rectangulares (ξ_0, η_0, ζ_0) . Se deduce que:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \rho \cos TSL \cos \phi' \\ \eta_0 &= \rho \operatorname{sen} TSL \cos \phi' \\ \zeta_0 &= \rho \operatorname{sen} \phi' \end{aligned} \quad (3.135)$$

Y las coordenadas rectangulares topocéntricas $(\xi_{t0}, \eta_{t0}, \zeta_{t0})$ serán:

$$\xi_t = \xi_g - \xi_o; \quad \eta_t = \eta_g - \eta_o; \quad \zeta_t = \zeta_g - \zeta_o \quad (3.136)$$

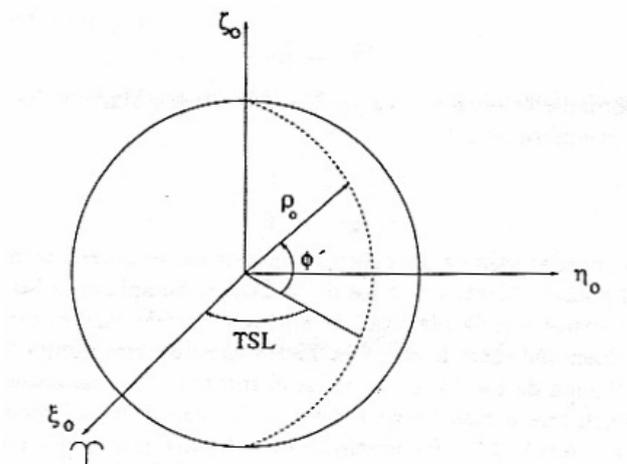
Las coordenadas ecuatoriales topocéntricas del cuerpo son:

$$\rho_t = \sqrt{\xi_t^2 + \eta_t^2 + \zeta_t^2}$$

$$\lambda_i = \tan^{-1} \left(\frac{\eta_i}{\xi_i} \right) \quad (3.137)$$

$$\phi'_i = \tan^{-1} \left(\frac{\zeta_i}{\sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2}} \right)$$

Figura 25. Relación entre las coordenadas geocéntricas y las nuevas coordenadas.



Para una mejor comprensión de los temas tratados se hará una aplicación específica para calcular las coordenadas ecuatoriales absolutas del planeta Marte para el instante 0 horas en tiempo terrestre del 31 de diciembre de 2004.

Para hallar las coordenadas del planeta Marte se necesita poseer los elementos orbitales de los planetas Tierra y Marte. Hasta ahora se ha observado que en el problema de los dos cuerpos los elementos orbitales son constantes para todo tiempo. Pero en sistema de tres o más cuerpos estos empiezan a variar con el tiempo es por ello que se utilizan datos recientes de estos elementos (ver apéndice A).

La fecha de referencia es (ver apéndice A) la 13 de septiembre del 2000 a las 0 horas tiempo terrestre. Se empieza calculando el valor de la anomalía media de referencia mediante la ecuación (3.106) tanto para Marte como para la Tierra;

$$M_{rM} = 153.32315$$

$$M_{rT} = 249.29326$$

Ahora se calcula la diferencia del tiempo en que se quiere calcular los datos (0 horas del 31 de diciembre del 2004) y el tiempo de referencia. Las fechas julianas de estos instantes son 2453370.5 y 2451800.5 respectivamente, el intervalo de tiempo entre las dos fechas es:

$$t - t_r = 1570$$

El movimiento medio se lo puede calcular a partir de $n(t - t_r)$ o también se obtiene el valor directamente del apéndice A, por lo tanto:

$$n(t - t_r)_M = 822.9012774$$

$$n(t - t_r)_T = 1547.437059$$

La anomalía media es según (3.104)

$$M_M = 976.2244274$$

$$M_T = 1796.730319$$

La anomalía excéntrica se calcula mediante la relación (3.69) esto es:

$$E = M + \left(\frac{180}{\pi} \right) e \sin E$$

como en la mayoría de los casos las órbitas son casi circulares el término $\frac{180}{\pi} e \sin E$ es pequeño, lo suficiente como para obtener un valor aproximado de E , que se llama E_0 :

$$E_0 = M$$

Un valor mejorado de E , llamado E_1 :

$$E_1 = M + \left(\frac{180}{\pi} \right) e \sin E$$

y así sucesivamente. Se observará que E_n converge hacia un valor determinado después del cual es irrelevante continuar el proceso. Dependiendo de que tan grande se el valor de la excentricidad la convergencia será rápida o lenta. Por tanto:

$$E_n - E_{n-1} = 0$$

De esta manera para Marte se obtendrá:

$$E_{1M} = 971.0254$$

$$E_{2M} = 971.159595$$

$$E_{3M} = 971.1554431$$

$$E_{4M} = 971.1555685$$

Lo mismo para la Tierra:

$$E_{1T} = 1796.675631$$

$$E_{2T} = 1796.674718$$

$$E_{3T} = 1796.674702$$

$$E_{4T} = 1796.67472$$

El radio vector (la distancia entre los planetas y el Sol) será entonces:

$$r_M = 1.569574828$$

$$r_T = 0.983280396$$

Con estos resultados podemos calcular la anomalía verdadera utilizando la ecuación (3.74), por tanto:

$$\theta_M = -113.8455528$$

$$\theta_T = -3.381369114$$

Los demás ángulos, según la tabla del apéndice A son:

$$\omega_M = 286.4534, \quad \omega_T = -60.4063$$

$$\Omega_M = 49.5600; \quad \Omega_T = 163.4000$$

$$i_M = 1.84967, \quad i_T = 0.00014$$

Se calcula ahora las coordenadas rectangulares eclípticas heliocéntricas de ambos planetas, con las relaciones de la ecuación (3.111), esto es:

$$\begin{array}{ll}
x_M = -1.163250445 & x_T = -0.164189088 \\
y_M = -1.053741459 & y_T = 0.96947526 \\
z_M = 0.006517661286 & z_T = -2.15553112 \times 10^{-6}
\end{array}$$

Luego se calculan las coordenadas rectangulares ecuatoriales heliocéntricas de los dos planetas, tomando el valor de la oblicuidad de la eclíptica $\varepsilon = 23^\circ 26' 21.8''$ utilizando la ecuación (3.130):

$$\begin{array}{ll}
x'_M = -1.163250445 & x'_T = -0.16418988 \\
y'_M = -0.969380785 & y'_T = 0.88947636 \\
z'_M = -0.413176097 & z'_T = 0.385634651
\end{array}$$

Lo siguiente es calcular las coordenadas rectangulares ecuatoriales geocéntricas del planeta Marte con ayuda de (3.131):

$$\begin{array}{l}
\xi = -1.146831536 \\
\eta = -1.1858857145 \\
\zeta = -0.798810748
\end{array}$$

Por último las coordenadas del planeta Marte se calculan utilizando (3.133), por tanto:

$$\begin{array}{l}
\alpha = 58^\circ 19' 38.19'' \\
\delta = -20^\circ 5' 20.04'' \\
\rho = 2.325655
\end{array}$$

3.8 EL PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS.

En el capítulo anterior se hizo un estudio del movimiento de los dos cuerpos con algunas suposiciones tales como: considerarlos aislados completamente del universo y también se consideraba sólo la interacción gravitacional, dejando atrás cualquier otro tipo de interacción por ejemplo las interacciones electromagnéticas, las fuerzas de repulsión o las fuerzas de sustentación y resistencia. Pero al llegar a la realidad existe una gran dificultad, pues estos cuerpos si existen y afectan considerablemente el sistema de los dos cuerpos. Sin embargo, a pesar de que sus resultados y aproximaciones no son lo que se espera, los dedicados a este estudio han encontrado que es un buen modelo a seguir para tratar de entender lo que sucede en nuestro sistema solar.

En el caso de la órbita de un satélite además de la presencia de la Tierra se debe tener en cuenta la presencia de la Luna que afecta considerablemente su

movimiento, ya que es muy masiva comparado con la masa del satélite, o también al analizar la órbita de la Luna alrededor de la Tierra se debe considerar la presencia del Sol debido a su gran masa, la cual hace que exista una fuerte interacción gravitacional sobre ella. Estos son ejemplos claros del problema de los tres cuerpos, que igual al problema de los dos cuerpos se pueden encontrar las ecuaciones que gobiernan este movimiento dependiendo de la escogencia del origen del sistema de coordenadas. El más importante problema es que no existe una solución analítica de estas ecuaciones diferenciales. Debido a esto los estudiosos del tema se han dedicado a solucionarlas bajo ciertas aproximaciones. Hoy en día son de gran utilidad los procedimientos realizados a gran velocidad con las computadoras para los cálculos matemáticos.

El problema de los tres cuerpos principalmente radica en encontrar la solución de las ecuaciones diferenciales, es decir, calcular el movimiento de las tres masas bajo una interacción gravitacional y cualquier condición inicial.

Se elige un sistema de coordenadas arbitrario O y se consideran tres cuerpos de masas m_1, m_2 y m_3 representados por sus respectivos vectores de posición \vec{r}_1, \vec{r}_2 y \vec{r}_3 . Asimismo se tienen en cuenta los vectores de posición relativos al las masas, entonces sea \vec{R}_{12} el vector relativo del cuerpo de masa m_2 con respecto a m_1 , \vec{R}_{13} el vector relativo del cuerpo de masa m_3 con respecto a m_1 y \vec{R}_{23} el vector relativo del cuerpo de masa m_3 con respecto a m_2 .

La fuerza que experimenta el cuerpo de masa m_i debido a la presencia de m_j y m_k es:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = G \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) + G \frac{m_i m_k}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_k - \vec{r}_i) \quad (3.138)$$

Para las masas m_1, m_2, m_3 integrando la suma de las ecuaciones (3.138) se tiene:

$$m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 + m_3 \dot{\vec{r}}_3 = \vec{C}_1 \quad (3.139)$$

Donde la constante de integración es un vector que representa tres constantes del movimiento.

Al integrar nuevamente resulta una nueva constante de integración y si además se tiene en cuenta la definición del centro de masa se obtendrá lo siguiente:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\vec{C}_1 t}{m_1 + m_2 + m_3} + \frac{\vec{C}_2}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (3.140)$$

esto significa que el vector centro de masa del sistema se desplaza en el espacio en línea recta y con movimiento uniforme.

Multiplicando vectorialmente cada una de las ecuaciones (3.136) por \vec{r}_1 , \vec{r}_2 y \vec{r}_3 , respectivamente y sumando se tiene:

$$m_1 \vec{r}_1 \times \dot{\vec{v}}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \dot{\vec{v}}_2 + m_3 \vec{r}_3 \times \dot{\vec{v}}_3 = \vec{0} \quad (3.141)$$

de donde:

$$m_1 \frac{d}{dt} (\vec{r}_1 \times \vec{v}_1) + m_2 \frac{d}{dt} (\vec{r}_2 \times \vec{v}_2) + m_3 \frac{d}{dt} (\vec{r}_3 \times \vec{v}_3) = \vec{0} \quad (3.142)$$

Organizando los términos, colocándolos en forma de series e integrando se tiene:

$$\vec{H} = \left(\sum_{i=1}^3 \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \right) \quad (3.143)$$

Aquí la constante integración representa la conservación del momento angular. Esto es, cuando las masas están en movimiento los vectores posición y velocidad son tales que el vector constante encontrado conserva su magnitud y una dirección fija en el espacio. La línea a lo largo de la cual se dirige se denomina línea invariable. Asociada a este plano está un plano perpendicular a ella y que contiene el centro de masas, al cual se le llama plano invariable [1].

Para encontrar otra constante de movimiento se multiplica escalarmente cada una de las ecuaciones (3.138) por $\dot{\vec{r}}_1$, $\dot{\vec{r}}_2$ y $\dot{\vec{r}}_3$, y sumando sus resultados se llega a:

$$\begin{aligned} m_1 \dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{v}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 \cdot \dot{\vec{v}}_2 + m_3 \dot{\vec{r}}_3 \cdot \dot{\vec{v}}_3 &= \frac{Gm_1 m_2}{R_{12}^3} \hat{u}_{12} \cdot (\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2) + \frac{Gm_1 m_3}{R_{13}^3} \hat{u}_{13} \cdot (\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_3) \\ &+ \frac{Gm_2 m_3}{R_{23}^3} \hat{u}_{23} \cdot (\dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}_3) \end{aligned} \quad (3.144)$$

donde

$$\begin{aligned} \vec{R}_{i j} &= \vec{r}_j - \vec{r}_i \Rightarrow R_{i j}^3 = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3 \\ \vec{R}_{i j} &= R_{i j} \hat{u}_{i j} \end{aligned} \quad (3.145)$$

y de igual manera los demás vectores $\vec{R}_{j k}$, $\vec{R}_{i k}$ y sus normas.

Ahora bien como,

$$\hat{u}_{ij} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\dot{R}_{ij} \quad (3.146)$$

Al sustituir estos resultados en (3.144) se obtiene:

$$m_1 \vec{v}_1 \cdot \dot{\vec{v}}_1 + m_2 \vec{v}_2 \cdot \dot{\vec{v}}_2 + m_3 \vec{v}_3 \cdot \dot{\vec{v}}_3 = -G \left(\frac{m_1 m_2}{R_{12}^3} \dot{R}_{12} + \frac{m_1 m_3}{R_{13}^3} \dot{R}_{13} + \frac{m_2 m_3}{R_{23}^3} \dot{R}_{23} \right) \quad (3.147)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v_i)^2 &= \vec{v}_i \cdot \dot{\vec{v}}_i \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R_{ij}} \right) &= -\frac{1}{R_{ij}^2} \frac{dR_{ij}}{dt} \end{aligned} \quad (3.148)$$

con estos resultados finalmente se llega a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i v_i^2 \right) = G \frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 m_2}{R_{12}} + \frac{m_1 m_3}{R_{13}} + \frac{m_2 m_3}{R_{23}} \right) \quad (3.149)$$

Definiendo al término entre paréntesis del lado izquierdo como la energía cinética del sistema y al término del lado derecho entre paréntesis incluido la constante, como la energía potencial del sistema, e integrando se tiene:

$$T + V = E \quad (3.150)$$

Donde E es la energía total del sistema que además es otra constante del movimiento.

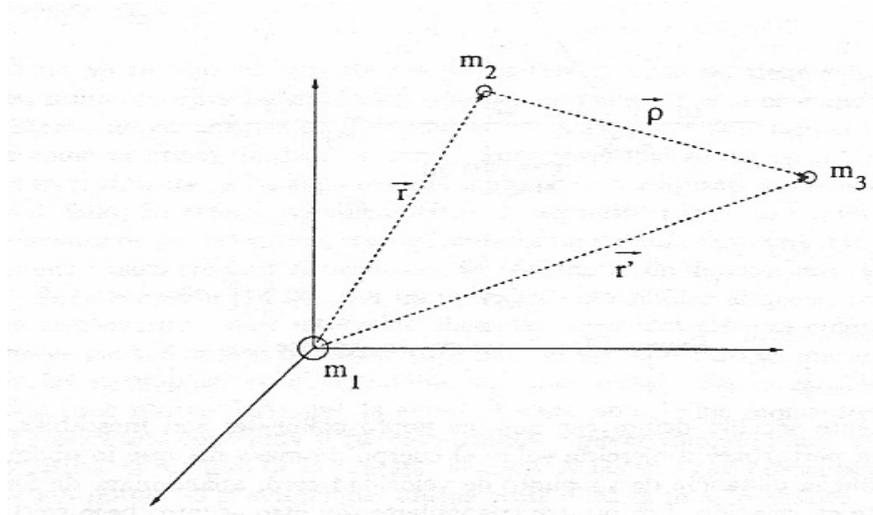
Ahora al igual que en problema de los dos cuerpos se puede elegir como origen del sistema de coordenada una de las masas. La ecuación de movimiento sería en este caso:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} + Gm_3 \left(\frac{\vec{\rho}}{\rho^3} - \frac{\vec{r}'}{r'^3} \right) \quad (3.151)$$

Eligiendo un sistema de coordenadas cartesiano con origen en una de las masas dígase m_1 (ver figura 3.20), las distancias que separan sus masas serán:

$$\begin{aligned}
 r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\
 r'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \\
 \rho^2 &= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2
 \end{aligned}
 \tag{3.152}$$

Figura 26. Sistema inercial de los tres cuerpos con el origen en uno de ellos.



De esta manera se puede expresar la ecuación diferencial vectorial en términos de sus componentes, esto es, para la componente x , por ejemplo, se tiene:

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{r^3}x + Gm_3\left(\frac{x'-x}{\rho^3} - \frac{x'}{r'^3}\right)
 \tag{3.153}$$

Teniendo presente lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{1/2} = \frac{(x'-x)}{\rho^3} & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xx'+yy'+zz'}{r^3}\right) &= \frac{x'}{r^3} \\
 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\right) &= \frac{(y'-y)}{\rho^3} & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xx'+yy'+zz'}{r^3}\right) &= \frac{y'}{r^3} \\
 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\right) &= \frac{(z'-z)}{\rho^3} & \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xx'+yy'+zz'}{r^3}\right) &= \frac{z'}{r^3}
 \end{aligned}$$

y además sabiendo que:

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' = xx' + yy' + zz'
 \tag{3.154}$$

La ecuación (3.153) se reduce a:

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{r^3}x + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (3.155)$$

Donde Φ se denomina la función perturbadora:

$$\Phi = Gm_3 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} \right) \quad (3.156)$$

Con estos resultados la ecuación diferencial vectorial es:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \nabla \Phi \quad (3.157)$$

nota: Si el cuerpo de masa m_3 es igual a cero el sistema se reduce lógicamente al problema de los dos cuerpos.

3.8.1 Condiciones para órbitas circulares. Puesto que el vector momento angular se conserva para el sistema de tres masas es posible ubicar el origen de dicho sistema en su centro de masa, así como tomar el plano $\xi\eta$ como el plano de movimiento; entonces las ecuaciones diferenciales de movimiento son:

$$\frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \quad (i = 1,2,3) \quad (3.158)$$

$$\frac{d^2 \eta_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \quad (3.159)$$

$$U = \frac{k^2 m_1 m_2}{r_{1,2}} + \frac{k^2 m_2 m_3}{r_{2,3}} + \frac{k^2 m_3 m_1}{r_{3,1}} \quad (3.160)$$

El movimiento del sistema referido a los ejes que rotan con velocidad angular uniforme n se determina por la sustitución:

$$\xi_i = x_i \cos(n t) - y_i \sen(n t) \quad (i = 1,2,3) \quad (3.161)$$

$$\eta_i = x_i \sen(n t) + y_i \cos(n t) \quad (3.162)$$

Reemplazando (3.161) y (3.162) en (3.158) y (3.159) se tiene:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} - 2n \frac{dy_i}{dt} - n^2 x_i - \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \quad (3.163)$$

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} - 2n \frac{dx_i}{dt} - n^2 y_i - \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial y_i} = 0 \quad (3.164)$$

Si los cuerpos se mueven en círculos alrededor del origen con velocidad angular n , sus coordenadas con respecto a los ejes rotantes son constantes, por lo que:

$$-n^2 x_1 + k^2 m_2 \frac{(x_1 - x_2)}{r_{1,2}^3} + k^2 m_3 \frac{(x_1 - x_3)}{r_{1,3}^3} = 0 \quad (3.165)$$

$$-n^2 x_2 + k^2 m_1 \frac{(x_2 - x_1)}{r_{1,2}^3} + k^2 m_3 \frac{(x_2 - x_3)}{r_{2,3}^3} = 0 \quad (3.166)$$

$$-n^2 x_3 + k^2 m_1 \frac{(x_3 - x_1)}{r_{1,3}^3} + k^2 m_2 \frac{(x_3 - x_2)}{r_{2,3}^3} = 0 \quad (3.167)$$

$$-n^2 y_1 + k^2 m_2 \frac{(y_1 - y_2)}{r_{1,2}^3} + k^2 m_3 \frac{(y_1 - y_3)}{r_{1,3}^3} = 0 \quad (3.168)$$

$$-n^2 y_2 + k^2 m_1 \frac{(y_2 - y_1)}{r_{1,2}^3} + k^2 m_3 \frac{(y_2 - y_3)}{r_{2,3}^3} = 0 \quad (3.169)$$

$$-n^2 y_3 + k^2 m_1 \frac{(y_3 - y_1)}{r_{1,3}^3} + k^2 m_2 \frac{(y_3 - y_2)}{r_{2,3}^3} = 0 \quad (3.170)$$

Como el origen está en el centro de masa las coordenadas cumplen:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0 \quad (3.171)$$

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 = 0 \quad (3.172)$$

Las unidades de tiempo, espacio y masa son arbitrarias. Es posible escogerlas tal que $r_{1,2} = 1$ y $k^2 = 1$. Luego, las condiciones para la existencia de soluciones en las que la órbita sea circular son:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0 \quad (3.173)$$

$$-n^2 x_1 + m_2 (x_1 - x_2) + m_3 \frac{(x_1 - x_3)}{r_{1,3}^3} = 0 \quad (3.174)$$

$$-n^2 x_2 + m_1 (x_2 - x_1) + m_3 \frac{(x_2 - x_3)}{r_{2,3}^3} = 0 \quad (3.175)$$

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 = 0 \quad (3.176)$$

$$-n^2 y_1 + m_2(y_1 - y_2) + m_3 \frac{(y_1 - y_3)}{r_{1,3}^3} = 0 \quad (3.177)$$

$$-n^2 y_2 + m_1(y_2 - y_1) + m_3 \frac{(y_2 - y_3)}{r_{2,3}^3} = 0 \quad (3.178)$$

3.8.2 Solución para el sistema en forma de triángulo equilátero. Las ecuaciones se satisfacen si los cuerpos se mantienen en los vértices de un triángulo equilátero. Por tanto $r_{1,2} = r_{2,3} = r_{1,3} = 1$, y las ecuaciones de (3.173) a (3.178) quedan:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0 \quad (3.179)$$

$$(m_2 + m_3 - n^2) x_1 - m_2 x_2 - m_3 x_3 = 0 \quad (3.180)$$

$$(m_1 + m_3 - n^2) x_2 - m_1 x_1 - m_3 x_3 = 0 \quad (3.181)$$

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 = 0 \quad (3.182)$$

$$(m_2 + m_3 - n^2) y_1 - m_2 y_2 - m_3 y_3 = 0 \quad (3.183)$$

$$(m_2 + m_3 - n^2) y_2 - m_2 y_2 - m_3 y_3 = 0 \quad (3.184)$$

Estas ecuaciones son lineales y homogéneas en x_1, x_2, \dots, y_3 . Para que tenga una solución diferente de $x_1 = x_2 = \dots = y_3 = 0$, que es incompatible con $r_{1,2} = \dots = 1$, el determinante de sus coeficientes debe ser cero. Haciendo $\sum_{i=1}^3 m_i = M$, la condición para que esto se cumpla es

$$m_3^2 (M - n^2)^4 = 0 \quad (3.185)$$

de donde $n^2 = M$. Luego, la configuración triangular equilátera con componentes iniciales propias de velocidad es una solución particular del problema de los tres cuerpos; y, si las unidades son tales que las distancias mutuas y k^2 son la unidad, el cuadrado de la velocidad angular de revolución es igual a la suma de las masas de los tres cuerpos [4].

3.8.3 Soluciones para una configuración en línea recta. Las ecuaciones (3.176), (3.177) y (3.178) se satisfacen para $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, o sea si todos los cuerpos están en el eje x . Suponga que se mantienen en orden m_1, m_2, m_3 desde el borde negativo hasta el positivo. Luego $x_1 > x_2 > x_1$ y $r_{1,2} = x_2 - x_1 = 1$, quedando ahora las ecuaciones (3.173), (3.174) y (3.175) en la forma:

$$m_1 x_1 + m_2(1 + x_1) + m_3 x_3 = 0 \quad (3.186)$$

$$m_2 + \frac{m_3}{(x_3 - x_1)} + n^2 x_1 = 0 \quad (3.187)$$

$$-m_1 + \frac{m_3}{(x_3 - x_1 - 1)} + n^2(1 + x_1) = 0 \quad (3.188)$$

Eliminando x_3 y n^2 se tiene que:

$$m_2 + (m_1 + m_2) x_1 + \frac{m_3^3(1 + x_1)}{(M x_1 + m_2)^2} - \frac{m_3^3 x_1}{(M x_1 + m_2 + m_3)^2} = 0 \quad (3.189)$$

Pero en lugar de adoptar x_1 como desconocida se puede usar una nueva variable: $x_3 - x_2 = A$. Claro que x_1 se expresará e función de la nueva variable. Las relaciones entre x_1, x_2, x_3 y A son:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0 \quad (3.190)$$

$$x_2 - x_1 = 1 \quad (3.191)$$

$$x_3 - x_2 = A \quad (3.192)$$

donde

$$x_1 = -\frac{m_2 + m_3 + m_3 A}{M} \quad (3.193)$$

que sustituida en (3.189), despejando fracciones y dividiendo para factores comunes, la condición para soluciones colineales es:

$$(m_1 + m_2)A^5 + (3m_1 + 2m_2)A^4 + (3m_1 + m_2)A^3 - (m_2 + 3m_3)A^2 - (2m_2 + 3m_3)A - (m_2 + m_3) = 0 \quad (3.194)$$

Esta es la ecuación de Lagrange. Los coeficientes de las potencias de A sólo cambian de signo una vez, así que sólo hay una raíz positiva. Por tanto sólo hay una posición de m_1 tal que $x_1 > x_2 > x_3$.

3.8.4 Propiedades dinámicas de la solución. Como los cuerpos orbitan en círculos con velocidad angular uniforme alrededor del centro de masa, la ley de áreas se cumple para cada cuerpo separadamente; luego la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo es constantemente dirigida hacia el centro de masa.

Sean las distancias de las masas m_1, m_2, m_3 desde su centro de masa a_1, a_2, a_3 respectivamente. Luego la aceleración centrífuga a la cual está sujeta m_i es $\alpha_i = V_i^2 / a_i$, donde V_i es la velocidad lineal de m_i . Esto se puede escribir como

$\alpha_i = n^2 a_i$. La fuerza centrípeta equilibra la centrífuga; luego la aceleración hacia el centro de masas es:

$$\alpha_i = n^2 a_i \quad (3.195)$$

O sea que las aceleraciones de los cuerpos hacia su centro de masa común son directamente proporcionales a sus respectivas distancias desde este punto.

3.8.5 Soluciones para secciones cónicas. Las ecuaciones diferenciales de movimiento cuando el sistema se refiere a ejes fijos con el origen en el centro de gravedad del sistema son:

$$\frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = -\frac{m_2(\xi_1 - \xi_2)}{r_{1,2}^3} - \frac{m_3(\xi_1 - \xi_3)}{r_{1,3}^3} \quad (3.196)$$

$$\frac{d^2 \eta_1}{dt^2} = -\frac{m_2(\eta_1 - \eta_2)}{r_{1,2}^3} - \frac{m_3(\eta_1 - \eta_3)}{r_{1,3}^3} \quad (3.197)$$

$$\frac{d^2 \xi_2}{dt^2} = -\frac{m_1(\xi_2 - \xi_1)}{r_{1,2}^3} - \frac{m_3(\xi_2 - \xi_3)}{r_{2,3}^3} \quad (3.198)$$

$$\frac{d^2 \eta_2}{dt^2} = -\frac{m_1(\eta_2 - \eta_1)}{r_{1,2}^3} - \frac{m_3(\eta_2 - \eta_3)}{r_{2,3}^3} \quad (3.199)$$

$$\frac{d^2 \xi_3}{dt^2} = -\frac{m_1(\xi_3 - \xi_1)}{r_{1,3}^3} - \frac{m_2(\xi_3 - \xi_2)}{r_{2,3}^3} \quad (3.200)$$

$$\frac{d^2 \eta_3}{dt^2} = -\frac{m_1(\eta_3 - \eta_1)}{r_{1,3}^3} - \frac{m_2(\eta_3 - \eta_2)}{r_{2,3}^3} \quad (3.201)$$

Suponga que las coordenadas de m_1, m_2, m_3 en $t = t_0$ son respectivamente $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, y que las distancias respectivas desde el origen son: $r_1^{(0)}, r_2^{(0)}, r_3^{(0)}$. Suponga que los ángulos que $r_1^{(0)}, r_2^{(0)}, r_3^{(0)}$ forman con el eje ξ son $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Luego:

$$x_1 = r_1^{(0)} \cos \varphi_1 \quad x_2 = r_2^{(0)} \cos \varphi_2 \quad x_3 = r_3^{(0)} \cos \varphi_3 \quad (3.202)$$

$$y_1 = r_1^{(0)} \operatorname{sen} \varphi_1 \quad y_2 = r_2^{(0)} \operatorname{sen} \varphi_2 \quad y_3 = r_3^{(0)} \operatorname{sen} \varphi_3 \quad (3.203)$$

Ahora sean las coordenadas de los cuerpos a cualquier tiempo. Suponga que las relaciones de las distancias mutuas son constantes; luego las distancias mutuas en t son:

$$\rho, r_{1,2} \quad \rho, r_{2,3} \quad \rho, r_{1,3} \quad (3.204)$$

donde ρ es el factor de proporcionalidad. Ya que la forma de la figura formada por los tres cuerpos no se altera, se sigue que:

$$r_i = r_i^{(0)} \rho \quad (3.205)$$

Los radios habrán girado a través del mismo ángulo θ . De aquí que:

$$\xi_1 = r_1^{(0)} \rho \cos(\theta + \varphi_1) = (x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta) \rho \quad (3.206)$$

$$\eta_1 = r_1^{(0)} \rho \sin(\theta + \varphi_1) = (x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta) \rho \quad (3.207)$$

$$\xi_2 = r_2^{(0)} \rho \cos(\theta + \varphi_2) = (x_2 \cos \theta - y_2 \sin \theta) \rho \quad (3.208)$$

$$\eta_2 = r_2^{(0)} \rho \sin(\theta + \varphi_2) = (x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta) \rho \quad (3.209)$$

$$\xi_3 = r_3^{(0)} \rho \cos(\theta + \varphi_3) = (x_3 \cos \theta - y_3 \sin \theta) \rho \quad (3.210)$$

$$\eta_3 = r_3^{(0)} \rho \sin(\theta + \varphi_3) = (x_3 \sin \theta + y_3 \cos \theta) \rho \quad (3.211)$$

Las ecuaciones de (3.196) a (3.201) se transformarán por medio de las ecuaciones (3.196), (3.197), (3.206) y (3.207), después multiplicando los resultados de las transformaciones por $\cos \theta$ y $\sin \theta$, y sumando, y luego por $-\sin \theta$ y $\cos \theta$, y sumando se tiene:

$$x_1 \frac{d^2 \rho}{dt^2} - 2y_1 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} - x_1 \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - y_1 \rho \frac{d^2 \theta}{dt^2} = - \left\{ \frac{m_2(x_1 - x_2)}{r_{1,2}^3} + \frac{m_3(x_1 - x_3)}{r_{1,3}^3} \right\} \frac{1}{\rho^2} \quad (3.212)$$

$$y_1 \frac{d^2 \rho}{dt^2} - 2x_1 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} - y_1 \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - x_1 \rho \frac{d^2 \theta}{dt^2} = - \left\{ \frac{m_2(y_1 - y_2)}{r_{1,2}^3} + \frac{m_3(y_1 - y_3)}{r_{1,3}^3} \right\} \frac{1}{\rho^2} \quad (3.213)$$

Sea

$$\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = \psi \quad (3.214)$$

Por lo que

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} - \frac{y_1}{x_1 \rho} \frac{d\psi}{dt} - \frac{\psi^2}{\rho^3} = - \frac{1}{x_1} \left\{ \frac{m_2(x_1 - x_2)}{r_{1,2}^3} + \frac{m_3(x_1 - x_3)}{r_{1,3}^3} \right\} \frac{1}{\rho^2} \quad (3.215)$$

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} - \frac{x_1}{y_1 \rho} \frac{d\psi}{dt} - \frac{\psi^2}{\rho^3} = - \frac{1}{y_1} \left\{ \frac{m_2(y_1 - y_2)}{r_{1,2}^3} + \frac{m_3(y_1 - y_3)}{r_{1,3}^3} \right\} \frac{1}{\rho^2} \quad (3.216)$$

Para las ecuaciones (3.198), (3.199), (3.200), (3.201) y de (3.212) y (3.213) se tiene:

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} - \frac{y_2}{x_2 \rho} \frac{d\psi}{dt} - \frac{\psi^2}{\rho^3} = -\frac{1}{x_2} \left\{ \frac{m_1(x_2 - x_1)}{r_{1,2}^3} + \frac{m_3(x_2 - x_3)}{r_{2,3}^3} \right\} \frac{1}{\rho^2} \quad (3.217)$$

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} - \frac{x_2}{y_2 \rho} \frac{d\psi}{dt} - \frac{\psi^2}{\rho^3} = -\frac{1}{y_2} \left\{ \frac{m_1(y_2 - y_1)}{r_{1,2}^3} + \frac{m_3(y_2 - y_3)}{r_{2,3}^3} \right\} \frac{1}{\rho^2} \quad (3.218)$$

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} - \frac{y_3}{x_3 \rho} \frac{d\psi}{dt} - \frac{\psi^2}{\rho^3} = -\frac{1}{x_3} \left\{ \frac{m_1(x_3 - x_1)}{r_{1,3}^3} + \frac{m_2(x_3 - x_2)}{r_{2,3}^3} \right\} \frac{1}{\rho^2} \quad (3.219)$$

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} - \frac{x_3}{y_3 \rho} \frac{d\psi}{dt} - \frac{\psi^2}{\rho^3} = -\frac{1}{y_3} \left\{ \frac{m_1(y_3 - y_1)}{r_{1,3}^3} + \frac{m_2(y_3 - y_2)}{r_{2,3}^3} \right\} \frac{1}{\rho^2} \quad (3.220)$$

Las ecuaciones que van de (3.215) a (3.220) son condiciones necesarias para la existencia de soluciones en las cuales las relaciones de las distancias de los cuerpos son constantes. Sin embargo hay dos variables por determinar: ρ y ψ . La primera da las dimensiones del sistema por medio de (3.205), y la segunda su orientación por medio de (3.214). A fin de que existan las soluciones estas ecuaciones deben ser consistentes, para lo cual se ha de cumplir:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} \quad (3.221)$$

o

$$\frac{d\psi}{dt} = 0 \quad (3.222)$$

y el sistema de seis ecuaciones:

$$-n^2 x_1 + m_2 \frac{(x_1 - x_2)}{r_{1,2}^3} + m_3 \frac{(x_1 - x_3)}{r_{1,3}^3} = 0 \quad (3.223)$$

$$-n^2 x_2 + m_1 \frac{(x_2 - x_1)}{r_{1,2}^3} + m_3 \frac{(x_2 - x_3)}{r_{2,3}^3} = 0 \quad (3.224)$$

$$-n^2 x_3 + m_1 \frac{(x_3 - x_1)}{r_{1,3}^3} + m_2 \frac{(x_3 - x_2)}{r_{2,3}^3} = 0 \quad (3.225)$$

$$-n^2 y_1 + m_2 \frac{(y_1 - y_2)}{r_{1,2}^3} + m_3 \frac{(y_1 - y_3)}{r_{1,3}^3} = 0 \quad (3.226)$$

$$-n^2 y_2 + m_1 \frac{(y_2 - y_1)}{r_{1,2}^3} + m_3 \frac{(y_2 - y_3)}{r_{2,3}^3} = 0 \quad (3.227)$$

$$-n^2 y_3 + m_1 \frac{(y_3 - y_1)}{r_{1,3}^3} + m_3 \frac{(y_3 - y_2)}{r_{2,3}^3} = 0 \quad (3.228)$$

donde n^2 es el valor constante común de las llaves en los miembros derechos de las ecuaciones que van de (3.215) a (3.220). De las ecuaciones (3.223) – (3.228) se sigue que las ecuaciones del centro de masa

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0 \quad (3.229)$$

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 = 0 \quad (3.230)$$

se cumplen.

Las ecuaciones (3.221) sólo se cumplen si los tres cuerpos están en línea recta en $t = t_0$. Asumiendo que se satisface (3.221) y que los cuerpos se mantienen colineales; luego la resultante de todas las fuerzas, a las cuales cada uno está sujeta, se dirige constantemente hacia el centro de gravedad del sistema, y por tanto la ley de áreas con respecto a este punto se cumple. De aquí que:

$$r_i^2 \frac{d\theta}{dt} = c_i \quad (3.231)$$

donde las c_i son constantes, ($i = 1, 2, 3$). Teniendo en cuenta (3.205):

$$\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{c_1}{(r_1^{(0)})^2} \quad (3.232)$$

y luego de (3.214) que $d\psi / dt = 0$. De aquí que las ecuaciones que van de (3.214) a (3.220) queden en la forma:

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} - \frac{\psi^2}{\rho^3} = -n^2 \frac{1}{\rho^2} \quad (3.233)$$

$$\psi = c_0 = \text{constante} \quad (3.234)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\psi}{\rho^2} = \frac{c_0}{\rho^2} \quad (3.235)$$

que son las ecuaciones diferenciales en coordenadas polares para el problema de los dos cuerpos. Luego ρ y θ satisfacen las condiciones de movimiento para sección cónica bajo la ley de gravitación, y se sigue de las ecuaciones (3.205) y de la definición de θ que los tres cuerpos describen secciones cónicas similares teniendo una excentricidad arbitraria [4].

3.9 PERTURBACIONES

Lo expuesto hasta el momento son modelos imaginados para tratar de explicar lo que en realidad sucede en el universo. El astro más masivo de nuestro sistema solar se ve afectado por la existencia de los planetas que giran alrededor de él, es más aún, el paso de un cuerpo tan pequeño como un cometa debe perturbar en algo a este gigantesco astro aunque sea muy poco notorio para nosotros. Los cometas como al eyectar gases tienen algo semejante a un motor de propulsión, en ellos existen fuerzas no gravitacionales que perturban notoriamente sus trayectorias. El primer cometa que se estudió con este tipo de perturbación fue el de Encke. El hecho es que en las órbitas de los cuerpos celestes existen perturbaciones que afectan considerablemente los resultados, ya sea porque existen más de dos cuerpos en el universo, o porque los cuerpos no son totalmente esféricos, o existen otras fuerzas de interacción, además de la fuerza gravitacional.

La ecuación de movimiento de una órbita perturbada es de la forma:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \vec{F} \quad (3.236)$$

Para el caso de los tres cuerpos la perturbación sería \vec{F} , pero en este caso podría ser cualquier otra situación, por ejemplo la no esfericidad de los cuerpos, o fuerzas aerodinámicas, fuerzas electromagnéticas, fuerzas no gravitacionales presentes en los cometas y debidas a la eyección de gases del núcleo, etc. En tal caso es que está fuerza es igual a cero la ecuación se reduce a la del problema al problema ya conocido.

Cuando únicamente intervienen más de dos cuerpos considerando que no afecte cualquier otro tipo de interacción, es decir, considerando los cuerpos totalmente esféricos y despreciando las otras fuerzas como la electromagnética, de repulsión, etc. La ecuación de movimiento en este caso es dada por:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\vec{P}_i}{P_i^3} - \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right) \quad (3.237)$$

3.9.1 El método de Cowell. Considere un cuerpo orbitando de masa m en el cual son conocidas la posición y velocidad en un tiempo dado t_0 a lo largo de las posiciones \vec{r}_i y velocidad \vec{v}_i de n masas perturbando. Por lo tanto, la ecuación (3.237) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\ddot{\vec{r}} = -(1+m)\frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{a}_t \quad (3.238)$$

Donde \vec{a}_t es el total de las atracciones perturbadoras dada por:

$$\vec{a}_t = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\vec{P}_i}{P_i^3} - \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right) \quad (3.239)$$

además

$$\vec{P}_i = \vec{r}_i - \vec{r} \quad (3.240)$$

Como la posición \vec{r}_i y velocidad \vec{v}_i del cuerpo perturbado se determinan para algún tiempo por medio de las series f y g o de cualquier otro método analítico, se asume que todas las cantidades del lado derecho de la ecuación (3.238) son conocidos para cada paso dado de integración.

Aplicando para este caso el método de Runge-Kutta a la ecuación (3.238) se tiene:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = f(\vec{v}) \quad \therefore \quad f(\vec{v}) = \vec{v} \quad (3.241)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = g(m, \vec{r}, r, \vec{a}_t) \quad \therefore \quad g(m, \vec{r}, r, \vec{a}_t) = -(1+m)\frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{a}_t \quad (3.242)$$

El cálculo de estas cantidades por cada uno de los seis pasos internos del método Runge-Kutta [4] es incluido como una parte de la integración numérica utilizando sólo dos de los cuerpos acelerados, de esta manera se tiene que para cada cuerpo perturbado:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \quad (3.243)$$

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = -(1+m_i)\frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \quad (3.244)$$

Para la rutina de integración de esta perturbación especial de las funciones de las ecuaciones (3.241) a través de (3.244) por medio de unos vectores auxiliares tiene la siguiente forma:

$$\vec{F}_j = hf(\vec{v})_j \quad (3.245)$$

$$\vec{G}_j = hg(m, \vec{r}, r, \vec{a}_t)_j \quad (3.246)$$

donde j va de uno a seis y h es el intervalo de tiempo modificado. Por último los incrementos de los vectores para el cuerpo en movimiento son:

$$\delta\vec{r} = \frac{1}{90} (7\vec{F}_1 + 32\vec{F}_3 + 12\vec{F}_4 + 32\vec{F}_5 + 7\vec{F}_6) \quad (3.247)$$

$$\delta\vec{v} = \frac{1}{90} (7\vec{G}_1 + 32\vec{G}_3 + 12\vec{G}_4 + 32\vec{G}_5 + 7\vec{G}_6)$$

y por tanto su nueva posición y velocidad y luego los puntos del próximo paso de la integración, es decir, donde se repite otra vez el procedimiento, serán:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_0 + \delta\vec{r} \\ \vec{v} &= \vec{v}_0 + \delta\vec{v} \end{aligned} \quad (3.248)$$

3.9.2 El método de Encke. Al calcular el movimiento de los dos cuerpos por medio de las series f y g , o cualquier otro método numérico. Este método es más favorable ya que los factores de atracciones perturbadas son integrados numéricamente. Por lo tanto, en este método la única diferencia entre la órbita referente a los dos cuerpos y la órbita de perturbación es la integración numérica. Esta aproximación es más beneficiosa que el anterior método pero con el único inconveniente de que los cálculos son más complicados. Es mas, en este método es necesario ajustar los elementos de la órbita de referencia para tomar en cuenta las perturbaciones acumuladas. Este procedimiento se denomina Rectificación.

Según esto, la aceleración de los dos cuerpos a lo largo de la órbita de referencia es:

$$\ddot{\vec{r}}_m = -(1+m) \frac{\vec{r}_m}{r_m^3} \quad (3.249)$$

Al restar esta expresión de la ecuación (3.238) se obtiene:

$$\delta\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{r}}_m = (1+m) \left(\frac{\vec{r}_m}{r_m^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right) + \vec{a}_t \quad (3.250)$$

El cálculo se desarrolla de igual forma que el anterior método ya que la posición y velocidad encontradas se utilizan nuevamente para repetir el proceso de integración y así sucesivamente. Por lo tanto para algún suceso, el resultado es:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_m + \delta\vec{r} \\ \vec{v} &= \vec{v}_m + \delta\vec{v}\end{aligned}\quad (3.251)$$

Donde \vec{r}_m y \vec{v}_m son la posición y la velocidad y los incrementos $\delta\vec{r}$ y $\delta\vec{v}$ son las perturbaciones de los vectores calculados por integración de la aceleración diferencial.

Las funciones principales que son integradas numéricamente para determinar los incrementos son:

$$\begin{aligned}\frac{d(\delta\vec{r})}{dt} &= f(\delta\vec{v}) \quad \therefore \quad f(\delta\vec{v}) = \delta\vec{v} \\ \frac{d(\delta\vec{v})}{dt} &= g(m, \vec{r}_m, r_m, \vec{r}, r, \vec{a}_i) \quad \therefore \quad g(m, \vec{r}_m, r_m, \vec{r}, r, \vec{a}_i) = (1+m) \left(\frac{\vec{r}_m}{r_m^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right)\end{aligned}\quad (3.252)$$

Teniendo presente que en los pasos de la integración numérica cada vez se repite un nuevo procedimiento, esto lleva a afirmar que los vectores posición y velocidad \vec{r}_m y \vec{v}_m respectivamente son conocidos al principio de un nuevo paso de integración. Además la diferencia entre \vec{r}_m/r_m^3 y \vec{r}/r^3 disminuye durante cada paso de integración. El cálculo de estas cantidades durante los pasos internos del método Runge-Kutta es encontrado por integración numérica. Las funciones a integrarse son:

$$\frac{d\vec{r}_m}{dt} = \vec{v}_m \quad (3.253)$$

$$\frac{d\vec{v}_m}{dt} = -(1+m) \frac{\vec{r}_m}{r_m^3} \quad (3.254)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \quad (3.255)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -(1+m) \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{a}_i \quad (3.256)$$

Al igual que en el método anterior la posición y la velocidad de los cuerpos perturbados son determinados en el comienzo de cada integración. De esta manera para cada cuerpo perturbado durante el intervalo de los pasos de integración, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}_i}{dt} &= \vec{v}_i \\ \frac{d\vec{v}_i}{dt} &= -(\mathbf{1} + m_i) \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}\end{aligned}\quad (3.257)$$

Las vectores auxiliares para el para la integración utilizando el método Runge-Kutta son ahora:

$$\begin{aligned}\vec{F}_j &= hf(\delta\vec{v})_j \\ G_j &= hg(m, \vec{r}_m, r_m, \vec{r}, r, \vec{a}_t)_j\end{aligned}\quad (3.258)$$

donde h es intervalo de tiempo modificado y $j = 1$ a 6 . La perturbación comienza por:

$$\begin{aligned}\delta\vec{r} &= \vec{0} \\ \delta\vec{v} &= \vec{0}\end{aligned}\quad (3.259)$$

porque la perturbación y la órbita de los dos cuerpos coincide en el comienzo de este pasó. En el final de la integración, los incrementos de la perturbación para el cuerpo en movimiento se obtienen de:

$$\begin{aligned}\delta\vec{r} &= \frac{1}{90} (7\vec{F}_1 + 32\vec{F}_3 + 12\vec{F}_4 + 32\vec{F}_5 + 7\vec{F}_6) \\ \delta\vec{v} &= \frac{1}{90} (7\vec{G}_1 + 32\vec{G}_3 + 12\vec{G}_4 + 32\vec{G}_5 + 7\vec{G}_6)\end{aligned}\quad (3.260)$$

Por último la nueva posición y velocidad del cuerpo está dada por la ecuación (3.251), a saber:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_m + \delta\vec{r} \\ \vec{v} &= \vec{v}_m + \delta\vec{v}\end{aligned}\quad (3.261)$$

3.9.3 Teoría de perturbaciones al problema de los dos cuerpos. Como ya se ha mencionado, los intentos por explicar el movimiento de los cuerpos celestes de una manera analítica son muchos, unos más complejos que otros; el hecho es que cada día los astrónomos y científicos se preocupan aún más por averiguar lo que pasa en el firmamento. La teoría de perturbaciones es un desarrollo matemático bastante ingenioso y a la vez muy practico que radica fundamentalmente en el problema de los dos cuerpos.

Al existir otros cuerpos, se tiene:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \sigma\vec{a}_i \quad (3.262)$$

donde σ es un parámetro que indica el grado de magnitud de la aceleración perturbativa.

Ahora si determinado cuerpo no sigue una trayectoria elíptica lo que se trata es obligarlo a cualquier instante, en cualquier punto de la trayectoria a que describa y se aproxime a una elipse. Por ello si se logra descubrir como están cambiando con el tiempo los elementos que determinan la geometría de una órbita y su orientación, el problema se resuelve hallando los valores de estos parámetros.

3.9.4 Variación de parámetros. Como ya se conoce, el movimiento de los dos cuerpos es descrito por ecuaciones diferenciales de segundo orden que son algo complicadas de resolver. Ahora bien, el método de variación de parámetros consiste en expresar una perturbación a este problema como un sistema en el cual hay que resolver seis ecuaciones diferenciales, pero de primer orden. Es decir, en lugar de encontrar las ecuaciones que permitan hallar en el tiempo los vectores posición y velocidad de acuerdo con (3.262), es más viable hallar la variación temporal de los elementos orbitales.

El vector de posición \vec{r} es función del tiempo y de cada uno de los elementos orbitales $\vec{r} = \vec{r}(a, e, i, \Omega, w, M, t)$ por tanto, su derivada total con respecto al tiempo será:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial i} \frac{di}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \Omega} \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \frac{dw}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial M} \frac{dM}{dt} \quad (3.263)$$

Introduciendo la cantidad c_k donde k va de uno a seis, la ecuación anterior se convierte en:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \sum_{k=1}^6 \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_k} \frac{dc_k}{dt} \quad (3.264)$$

Como se exige que en cada punto de la trayectoria exista una elipse instantánea u osculadora, entonces se cumple que:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \quad (3.265)$$

Teniendo presente esto la ecuación (3.264) es ahora:

$$\sum_{k=1}^6 \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_k} \frac{dc_k}{dt} = 0 \quad (3.266)$$

este término se conoce como condición de oscilación.

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (3.264) se obtiene:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \sum_{k=1}^6 \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial c_k} \frac{dc_k}{dt} \quad (3.267)$$

El lado derecho de la ecuación anterior es la conocida perturbación al problema de los dos cuerpos, por tanto recordando la ecuación (3.157) y remplazándola en (3.267) se obtiene:

$$-\frac{\mu}{r^3} \vec{r} + \nabla \Phi = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \sum_k \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial c_k} \frac{dc_k}{dt} \quad (3.268)$$

Como en la órbita instantánea u osculadora en cada punto de la trayectoria se debe cumplir que:

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0,$$

según esta condición, la ecuación anterior es ahora:

$$\nabla \Phi = \sum_{k=1}^6 \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial c_k} \frac{dc_k}{dt} \quad (3.269)$$

Multiplicando escalarmente la ecuación (3.266) por $\frac{\partial \vec{r}}{\partial c_j}$ y la ecuación (3.269) por

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial c_j}$ donde c_j va de uno a seis y restando los resultados se llega a:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial c_k} \frac{dc_k}{dt} - \sum_{k=1}^6 \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial c_j} \frac{dc_k}{dt} &= \nabla \Phi \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_j} \\ \sum_{k=1}^6 \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial c_k} - \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial c_j} \right] \frac{dc_k}{dt} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial c_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial c_j} = \frac{\partial \Phi}{\partial c_j} \end{aligned} \quad (3.270)$$

Expresando este resultado de una manera más compacta, se tiene:

$$\sum_{k=1}^6 [c_j, c_k] \frac{dc_k}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial c_j} \quad (3.271)$$

En la cual, el símbolo entre corchetes en la sumatoria se conoce como los paréntesis de Lagrange.

Según esta notación, las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} [c_1, c_1] \frac{dc_1}{dt} + [c_1, c_2] \frac{dc_2}{dt} + \dots + [c_1, c_6] \frac{dc_6}{dt} &= \frac{\partial \Phi}{\partial c_1} \\ [c_2, c_1] \frac{dc_1}{dt} + [c_2, c_2] \frac{dc_2}{dt} + \dots + [c_2, c_6] \frac{dc_6}{dt} &= \frac{\partial \Phi}{\partial c_2} \\ &\vdots \\ [c_6, c_1] \frac{dc_1}{dt} + [c_6, c_2] \frac{dc_2}{dt} + \dots + [c_6, c_6] \frac{dc_6}{dt} &= \frac{\partial \Phi}{\partial c_6} \end{aligned} \quad (3.272)$$

Sabiendo que por su definición de o simetría para los paréntesis de Lagrange, se cumple:

$$\begin{aligned} [c_m, c_m] &= 0 \\ [c_m, c_n] &= -[c_n, c_m] \end{aligned} \quad (3.273)$$

Se llega a que sólo doce de los paréntesis de Lagrange son diferentes de cero:

$$\begin{aligned} [\Omega, i] &= -[i, \Omega] = -na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i \\ [\Omega, a] &= -[a, \Omega] = \frac{\sqrt{1-e^2} na \cos i}{2} \\ [\Omega, e] &= -[e, \Omega] = -\frac{na^2 e \cos i}{\sqrt{1-e^2}} \\ [w, a] &= -[a, w] = \frac{\sqrt{1-e^2} na}{2} \\ [w, e] &= -[e, w] = -\frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}} \\ [a, M] &= -[M, a] = -\frac{na}{2} \end{aligned} \quad (3.274)$$

Reemplazando este resultado en la ecuación (3.272) se llega a:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{1-e^2} na \cos i}{2} \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\sqrt{1-e^2} na}{2} \frac{dw}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial a} \\
 & - \frac{na^2 e \cos i}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d\Omega}{dt} - \frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{dw}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial e} \\
 & - na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial i} \\
 & \frac{\sqrt{1-e^2} na \cos i}{2} \frac{da}{dt} - \frac{na^2 e \cos i}{\sqrt{1-e^2}} \frac{de}{dt} - na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i \frac{di}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \Omega} \\
 & \frac{\sqrt{1-e^2} na}{2} \frac{da}{dt} - \frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{de}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial w} \\
 & \frac{na}{2} \frac{da}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial M}
 \end{aligned} \tag{3.275}$$

Despejando los resultados de la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial \Phi}{\partial M} \\
 \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial \Phi}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \Phi}{\partial w} \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{\operatorname{ctgi}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \Phi}{\partial w} - \frac{\operatorname{csci}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \Phi}{\partial \Omega} \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{csci}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \Phi}{\partial i} \\
 \frac{dw}{dt} &= - \frac{\operatorname{ctgi}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \Phi}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \Phi}{\partial e} \\
 \frac{dM}{dt} &= - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial \Phi}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial \Phi}{\partial a}
 \end{aligned} \tag{3.276}$$

Estas ecuaciones se conocen como las ecuaciones de Lagrange para la mecánica celeste.

REFERENCIAS

- [1] PORTILLA B., José Gregorio. Elementos de astronomía de posición. Bogotá: Observatorio Astronómico Nacional. Facultad de ciencias. Universidad Nacional de Colombia, 2001. p. 282.
- [2] POLLARD, Harry. Mathematical introduction to celestial mechanics. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1966. p. 25.
- [3] BOULET, Dan L. Methods of orbit determination for the microcomputer. Richmond, Virginia: Willmann – Bell, Inc., 1991, p.135.
- [4] MOULTON, Forest Ray. An Introduction to Celestial Mechanics. 2nd ed. 1970, p. 384.

4. APLICACIÓN DE LA RELATIVIDAD AL CALCULO DE ORBITAS

4.1 INTRODUCCIÓN

Una teoría física es provisional, porque puede llegar el día en que la experimentación la refute y la verifique.

Toda teoría física se ve apoyada cada vez que un experimento resulta pero un solo experimento puede ponerla en problemas, como lo afirmaba Einstein. En dicho caso hay que empezar a buscar una nueva ley que describa lo que está pasando. Es así como surge la Teoría de la Relatividad, pues la ley gravitacional de Newton no podía explicar el movimiento del planeta Mercurio correctamente. Al tratarse este problema con la teoría general de la relatividad (TGR) se obtienen resultados que predicen que el eje mayor de la elipse de Mercurio debe rotar alrededor del Sol a un ritmo de 42 segundos de arco por cada siglo, lo que sí está de acuerdo a la experimentación; claro que la TGR tampoco es la última palabra en física, pues predice su propio fallo cerca de una singularidad.

4.2 ÓRBITAS PLANETARIAS.

4.2.1 Ecuación de movimiento en un campo de Schwarzschild. En la teoría de Einstein la trayectoria de un cuerpo libre en las cuatro dimensiones será la geodésica dada por [1]:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (4.1)$$

donde $d\tau$ es el intervalo de tiempo propio asociado con el movimiento de una partícula. Este se define igual a ds a lo largo de la línea de universo de la partícula.

Empleando un sistema de coordenadas esféricas, puesto que se va a estudiar un campo gravitacional producido por una masa con simetría esférica, fijo en el sistema de coordenadas, se usa r , θ , ϕ , además de la nueva variable que se introduce en relatividad (el tiempo t); se determinan los correspondientes símbolos de Christoffel (ver apéndice B para su cálculo):

$$\begin{aligned} \Gamma^4_{41} = \Gamma^4_{14} &= \frac{1}{2} N' & \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} &= \frac{1}{r} \\ \Gamma^1_{44} &= \frac{1}{2} N' e^{N-L} & \Gamma^2_{33} &= -\text{sen}(\theta) \cos(\theta) \end{aligned}$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}L' \qquad \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \qquad (4.2)$$

$$\Gamma^1_{22} = -r e^{-L} \qquad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \text{ctg}(\theta)$$

$$\Gamma^1_{33} = -r \text{sen}^2(\theta) e^{-L}$$

que substituidos en la ecuación (4.1), para $i = 2$ se tiene

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \text{sen}(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0 \qquad (4.3)$$

Las ecuaciones (4.1) correspondientes a $i = 1, 3 \wedge 4$ son, respectivamente:

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{1}{2}N' e^{N-L} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2}L' \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r e^{-L} \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - r \text{sen}^2(\theta) \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0 \qquad (4.4)$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\phi}{ds} + 2 \text{ctg}(\theta) \frac{d\theta}{ds} \frac{d\phi}{ds} = 0 \qquad (4.5)$$

$$\frac{d^2t}{ds^2} + N' \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} = 0 \qquad (4.6)$$

Si orientamos los ejes de manera que el plano $\theta = \pi/2$ contenga un elemento de trayectoria en un instante cualquiera, se tiene que en este instante $\frac{d\theta}{ds} = 0$ [1].

Teniendo en cuenta esto, las ecuaciones (4.4), (4.5) y (4.6) quedan:

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{1}{2}N' e^{N-L} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2}L' \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0 \qquad (4.7)$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\phi}{ds} = 0 \qquad (4.8)$$

$$\frac{d^2t}{ds^2} + N' \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} = 0 \qquad (4.9)$$

Las ecuaciones (4.8) y (4.9) se pueden integrar directamente si hacemos lo siguiente para (4.9): Puesto que las componentes del tensor de Ricci son (ver apéndice B para su obtención):

$$R_{11} = \frac{1}{2} N'' - \frac{1}{4} L' N' - \frac{1}{4} (N')^2 - \frac{L'}{r} = 0 \quad (4.10)$$

$$R_{22} = e^{-L} \left[1 + \frac{1}{2} r (N' - L') \right] - 1 = 0 \quad (4.11)$$

$$R_{44} = e^{N-L} \left[-\frac{1}{2} N'' - \frac{1}{4} (N')^2 + \frac{1}{4} N' L' - \frac{N'}{r} \right] = 0 \quad (4.12)$$

De (4.10) y (4.12) se tiene que $L' = -N'$ de donde $L = -N + const.$ Si $r \rightarrow \infty$ entonces L y N se aproximan a cero, por lo que:

$$L(r) = -N(r) \quad (4.13)$$

Así (4.11) queda:

$$e^N (1 + r N') = 1 \quad (4.14)$$

Sea $e^N = \gamma$, entonces se tiene que:

$$\gamma + r \gamma' = 1 \quad (4.15)$$

Integrando (4.15) se tiene:

$$\gamma = 1 - \frac{2 G m}{r} = e^N \quad (4.16)$$

siendo $2 G m$ la constante de integración, m se identifica con la masa productora del campo. Derivando N ,

$$N' = \frac{d}{dr} \ln(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dr} \quad (4.17)$$

Así, la ecuación (4.9) se convierte en

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dr} \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} = 0 \quad (4.18)$$

que es lo mismo que:

$$\frac{d}{ds} \left(\gamma \frac{dt}{ds} \right) = 0 \quad (4.19)$$

que integrándola da:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{k}{\gamma} \quad (4.20)$$

Integrando (4.8) se llega a:

$$r^2 \frac{d\phi}{ds} = h \quad (4.21)$$

En las ecuaciones (4.20) y (4.21) h y k son constantes de integración.

Teniendo en cuenta esto y que $\theta = \pi/2$, la ecuación (4.4) tendrá la forma:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{\gamma}{2} \frac{d\gamma}{dr} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - \frac{1}{2\gamma} \frac{d\gamma}{dr} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - r \gamma \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 = 0 \quad (4.22)$$

Sustituyendo (4.20) y (4.21) en (4.22):

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{\gamma}{2} \frac{d\gamma}{dr} \left(\frac{k}{\gamma} \right)^2 - \frac{1}{2\gamma} \frac{d\gamma}{dr} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - r \gamma \left(\frac{h}{r^2} \right)^2 = 0 \quad (4.23)$$

Resta por saber qué indica $\left(\frac{dr}{ds} \right)^2$ en (4.23); veamos. Puesto que

$$ds^2 = -\gamma^{-1} (dr)^2 - r^2 (d\theta)^2 - r^2 \sin^2(\theta) (d\phi)^2 + \gamma (dt)^2 \quad (4.24)$$

Utilizando en ésta (4.20) y (4.21) y como $\theta = \pi/2$,

$$ds^2 = -\gamma^{-1} (dr)^2 - r^2 (d\phi)^2 + \gamma (dt)^2 \quad (4.25)$$

$$-1 = \gamma^{-1} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 - \gamma \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \quad (4.26)$$

se tiene

$$\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = k^2 - \frac{h^2 \gamma}{r^2} - \gamma \quad (4.27)$$

sustituyendo en (4.23) se llega a:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{h^2}{2 r^2} \frac{d\gamma}{dr} + \frac{1}{2} \frac{d\gamma}{dr} - \gamma \frac{h^2}{r^3} = 0 \quad (4.28)$$

Puesto que

$$\frac{d\gamma}{dr} = \frac{2 G m}{r^2} \quad (4.29)$$

Entonces se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{m G}{r^2} = \frac{h^2}{r^3} \left(1 - \frac{3 G m}{r} \right) \quad (4.30)$$

Teniendo en cuenta (4.21)

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} \quad (4.31)$$

de la que se tiene, si tenemos en cuenta (4.21):

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{d^2 r}{d\phi^2} \frac{h^2}{r^4} - \frac{2 h^2}{r^5} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 \quad (4.32)$$

con lo que la ecuación (4.30) queda:

$$\frac{h^2}{r^4} \frac{d^2 r}{d\phi^2} - \frac{2 h^2}{r^5} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \frac{m G}{r^2} = \frac{h^2}{r^3} \left(1 - \frac{3 G m}{r} \right) \quad (4.33)$$

Sea

$$u = \frac{1}{r} \quad (4.34)$$

con lo que (4.33) queda:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{m G}{h^2} + 3 m G u^2 \quad (4.35)$$

La razón de $3 m G u^2$ a $\frac{m G}{h^2}$ es $3 h^2 u^2$, ó utilizando (4.21) es $3 \left(r \frac{d\phi}{ds} \right)^2$. Para velocidades planetarias ordinarias esta relación es pequeña. Por ejemplo, el radio medio de la órbita terrestre es $r = 1.5 * 10^{13}$ cm., la velocidad angular es $w = 2 * 10^{-7}$ rad/seg., y si $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{c}$, se tiene que $3 \frac{w^2 r^2}{c^2} \approx 10^{-8}$.

4.2.2 Precesión del perihelio. Ya se obtuvo la ecuación de movimiento relativista de un planeta en un campo de Schwarzschild, la cual es la ecuación (4.35).

Finalmente se determinó, aproximadamente, la magnitud del término ϵ , el cual es muy pequeño comparado con la unidad, por lo que se puede tratar a (4.35) como una ecuación de movimiento a la que se le ha agregado una perturbación. A fin de resolver (4.35) se debe prescindir del término ϵ y se obtiene así una ecuación aproximada:

(4.36)

Cuya solución se conoce por mecánica clásica:

(4.37)

Donde e es la excentricidad de la órbita y ω es la longitud del perihelio. Reordenando (4.35) se tiene:

(4.38)

si se reemplaza el término pequeño (ϵ) en (4.35) por su aproximación newtoniana dada por (4.37), se tiene, siendo

que

(4.39)

Puesto que las órbitas planetarias son casi circulares (sus excentricidades son muy pequeñas, por ejemplo para Mercurio $e \approx 0.2$), la contribución del término que contiene ϵ es despreciable; tampoco el término ϵ^2 tiene un efecto significativo en la forma de la órbita, pero el segundo término que contiene ϵ , puede tener un efecto acumulativo en el desplazamiento del perihelio. Teniendo en cuenta todo esto, simplificamos (4.39) escribiendo:

(4.40)

La solución de esta ecuación es:

(4.41)

Si

se tiene que

(4.42)

(4.42) representa una órbita que es una elipse presesando [2]. El argumento del coseno cambia por cuando cambia por

(4.43)

esta ecuación demuestra que la distancia entre dos perihelios continuos es mayor que por la cantidad:

(4.44)

esta cantidad da la presesión angular del perihelio por revolución; se observa que el perihelio avanza.

Para una órbita casi circular (4.37) queda:

(4.45)

donde es el radio de la órbita. De esto se tiene que el avance angular del perihelio por revolución es

(4.46)

Para el planeta Mercurio se tiene que: $\frac{GM_{\text{sol}}}{a^3} = \frac{4\pi^2}{P^2}$,
donde a es el semieje mayor y P el período orbital, siendo M_{sol} la masa del Sol.

Para el planeta Mercurio el valor del corrimiento del perihelio por cada revolución es $4.9 \cdot 10^{-7}$ rad. Este planeta tiene un período de 88 días, completando 415 revoluciones por siglo. De este modo el avance acumulativo del perihelio durante cien años vale $4.9 \cdot 10^{-7} \cdot 415 \cdot 100 = 0.020425$ rad = 42 segundos de arco. Para Venus es sólo 9 segundos, para la Tierra es 4 segundos y para Marte es apenas un segundo.

REFERENCIAS

- [1] OHANIAN, Hans C. Gravitation and spacetime. New York - London: W.W. Norton & company, 1976. p. 112.

5. PROGRAMAS MODELO

5.1 INTRODUCCION

En este capítulo se presentan los programas que se desarrollan en el lenguaje GWBASIC como aplicación a la teoría tratada a lo largo de este trabajo. Estos programas pueden modificarse a gusto del investigador, quien es el encargado de tomar datos experimentales de los cuerpos celestes. Aquí se presentan los programas POSVEL1 y TG de manera tal que sea el investigador quien introduzca los datos según sea necesarios. Estos dos programas no llevan desde el principio o desde su creación los datos para determinados casos. A los programas que se presentan en este capítulo, se puede tener acceso gracias al disquete que se anexa al trabajo.

5.2 PROGRAMA TG.

Listado del programa TG, el cual determina la energía potencial de un cuerpo de masa M_2 orbitando con respecto a otro de masa M_1 , así como las velocidades en el perihelio y en el afelio y el corrimiento del argumento del perihelio de su órbita, de manera aproximada puesto que se manejan constantes como la velocidad de la luz, la constante gravitacional, el número π , etc. Es un programa de tipo general donde ha de introducirse los datos.

5.3 PROGRAMA F Y G.

Listado del programa F y G, el cual calcula el movimiento orbital de dos cuerpos por integración numérica usando series F y G de octavo orden. En este programa se calcula la posición y la velocidad en un tiempo t , a partir de la posición y la velocidad dados a un tiempo inicial. El programa aquí presentado incorpora datos que se requieren para su ejecución para el planeta Mercurio, los cuales se tomaron del libro "The Astronomical Almanac". Teniendo en cuenta esto, es fácil hacerle un cambio para volverlo uno más general; los cambios se deberían hacer en los renglones comprendidos entre 1160 y 1200, así como entre los que van desde 30000 hasta 30040, que es donde se introducen los datos que se requieren para que el programa pueda ejecutarse.

5.4 PROGRAMA CLASSEL.

Listado del programa CLASSEL, el cual calcula los elementos clásicos de las componentes de posición y velocidad. El ejemplo aquí expuesto toma los datos de los renglones que van desde 20000 hasta 50050 para introducirlos en los READ que van en los renglones desde 1200 hasta 1250. Si se quiere hacer el programa más general es en estos renglones donde ha de hacerse los cambios. Este programa ejemplo requiere de los siguientes datos: nombre del cuerpo orbitante

(éste dato sólo es por información), la época, la masa total con relación a la solar, el tiempo inicial y las componentes de posición y velocidad iniciales, para determinar los elementos clásicos del cuerpo orbitante.

5.5 PROGRAMA POSVEL1.

Este programa calcula los elementos de posición y velocidad teniendo en cuenta los elementos clásicos. Este programa es una aplicación de de los temas tratados en el capítulo cuarto, exactamente en el apartado 4.5. A este programa se ha de introducir los datos. Al correr el programa se ha de dar los datos de ángulos en grados, pues aunque el lenguaje GWBASIC sólo lee ángulos en radianes, se ha puesto la orden de convertir grados a radianes. La masa que se pide allí va a estar dada en unidades de masas solares; las distancias en unidades astronómicas.

5.6 PROGRAMA VALOR INICIAL PARA UN MOVIMIENTO ELIPTICO.

Listado del programa VALOR INICIAL PARA UN MOVIMIENTO ELIPTICO, el cual determina la posición y la velocidad del cuerpo una vez se hayan introducido los valores iniciales de dichos parámetros: este programa no tiene incorporados datos, sino que al correrlo él los pide. Los datos necesarios son: la masa reducida, el tiempo inicial, las componentes iniciales de posición y velocidad y el tiempo en el cual se quiere determinarlos posteriormente. Un programa como este, o como los programas TG y el POSVEL1 son generales, los cuales no llevan datos introducidos, sino que se deben medir primero y luego se han de aplicar en estos programas para hacer un estudio del cuerpo en cuestión.

6. CONCLUSIONES

- ◆ Es interesante ver el adelanto científico al que se ha llegado hasta el momento gracias a las leyes de la mecánica newtoniana. Afortunadamente el movimiento orbital se apoya en dichas ideas.

Cosas como estas nos indican que el universo si está hecho para ser comprendido y que con el paso del tiempo se podrá llegar a entender su funcionamiento hasta tal punto en que el hombre no deba más a recurrir de ideas místicas.

- ◆ Las leyes de Kepler son una herramienta muy importante para entender el movimiento orbital. Podríamos decir que dichas leyes son a la mecánica analítica lo que los postulados de Bhor a la mecánica cuántica. Gracias a esas extraordinarias ideas ha sido posible que el hombre vaya comprendiendo mejor el universo que lo rodea.
- ◆ En el caso de que las leyes de Newton tengan falencias a la hora de ser aplicadas al estudio de órbitas de cuerpos celestes, se cuenta con una herramienta más poderosa que es la teoría general de la relatividad (TGR), la cual permite reducir esos obstáculos que la primera no logra; claro que la TGR es muy buena hasta cierto punto, puesto que presenta algunas dificultades al predecir la existencia de ciertas singularidades en el espacio-tiempo, donde las leyes físicas fallan y se hace imposible predecir acontecimientos.
- ◆ Se ha hecho una revisión del tema de órbitas de cuerpos celestes, empezando por la plantear las leyes físicas que gobiernan los cuerpos gravitantes, pasando luego a tratar en sí el tema de las órbitas y sus implicaciones, hasta llegar hacer la revisión desde el punto de vista de TGR del planeta de Mercurio, aunque dicho resultado se podría aplicar a todos los planetas, pero esto no se realiza porque es Mercurio el que presenta un resultado más significativo.
- ◆ Finalmente se proponen unos programas en lenguaje BASIC para un mejor entendimiento de lo tratado en el trabajo, para complementar y afianzar con resultados el estudio de órbitas de cuerpos celestes.

7. RECOMENDACIONES

- ◆ Que este trabajo sirva a otros estudiantes de la línea de investigación en astrofísica para emprender trabajos más especializados.
- ◆ Se recomienda a otros estudiantes trabajar más detalladamente en el cálculo de órbitas con aplicación de la teoría de la relatividad.
- ◆ Sería muy conveniente que otro grupo trabaje en el software propuesto en programación tipo Visual Basic, etc. Para tener mayor versatilidad en el diseño de la ayuda educativa.

8. BIBLIOGRAFÍA

ALONSO, Marcelo y FINN, Edward. Física Vol. I. 2 ed. Massachussets: Adison Wesley – Iberoamericana, 1986. 451 p.

ARIAS DE GREIFF, J. Astronomía en Colombia. Santa fe de Bogotá: Colección Enrique Pérez Arbeláez No. 8, 1993.

BARKER, Robert M. L. MAKEMSON, Maud W. Astrodynamics. 2nd ed. Los Angeles: Academic Press, Inc., 1967, 439 p.

BARTEE, Thomas C. Basic. 2 ed. México: Harla, 1985, 450 p.

BOULET, Dan L. Methods of orbit determination for the microcomputer. Richmond, Virginia: Willmann – Bell, Inc., 1991, 565 p.

CHAPRA, Steven. CANALE, Raymond. Métodos numéricos para ingenieros. 3 ed. New York: Mc Graw Hill, 1999, 780 p.

DANBY, J.M.A. Computing applications to differential equations. Reston, VA: Reston Publishing Company, 1985. 434 p.

----- . Fundamentals of celestial mechanics. 2nd. Published by Willmann-Bell, Inc.

FEYNMAN, Richard. Física. Vol. I. 2 ed. México: Addison Wesley, 1987. 5p.

GOLDSTEIN, Herbert. Mecánica clásica. 2 ed. Madrid: Aguilar, 1972. 793 p.

GOTTFRIED, Byron S. Teoría y problemas de programación Basic. 2 ed. México: Serie de compendio Schaum, Mc GrawHill, 1982. 345 p.

HAWKING, Stephen. Historia del tiempo del big bang a los agujeros negros. 15 ed. Santa fe de Bogotá: Grijalbo Ltda., 1992. 245 p.

LANDAU, L. D. Teoría clásica de campos. Barcelona- Buenos Aires: México, 1966. 467 p.

LARSON, Roland – HOSTETLER, Robert. Cálculo y geometría analítica. 3 ed. Mexico: Mc Graw – Hill, 1972. 1134 p.

LEITHOLD, Louis. El Cálculo. 7 ed. México: Harla, 1998. 1360 p.

LOW, Francis E. Classical field theory. Electromagnetism and gravitation. New York: Intesscience Publication: wiley & sons, Inc 1997. 1977 p.

McCUSKEY, S.W. Introduction to Celestial Mechanics. Addison-Wesley Pu. Co., Massachusetts. 1970.

MOULTON, Forest Ray. An Introduction to Celestial Mechanics. 2nd ed. 1970, 477 p.

OHANIAN, Hans C. Gravitation and spacetime. New York - London: W.W. Norton & company, 1976. 461 p.

PARS, L.A. Introduction to dynamics. London: Heinemann, 1965. 427 p.

POLLARD, Harry. Mathematical introduction to celestial mechanics. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1966. 111 p.

PORTILLA B., José Gregorio. Elementos de astronomía de posición. Bogotá: Observatorio Astronómico Nacional. Facultad de ciencias. Universidad Nacional de Colombia, 2001. 376 p.

SAVELIEV, I. V. Curso de física general. Vol. I. Moscú: Mir, 1984. 372 p.

SZEBEHELY, V. Theory of orbits. New York: Academic press, 1967. 345 p.

SPIEGEL, Murray R. Manual de fórmulas y tablas matemáticas 400 fórmulas y tablas. México: McGraw-Hill, c. 1970. 271 p.

WILSON, Jerry D. Física con Aplicaciones. 2 ed. México: McGraw-Hill, 1990. 747 p.

ZEL' Dovich, Ya B. Stars and Relativity. Dover publications. New York: Dover Publications, INC, 1996. 522 p.

9. APENDICES

APENDICE A. EL TIEMPO EN ASTRONOMIA.

9.1 INTRODUCCION.

En astronomía el punto vernal es de mucha importancia ya que con este se especifica el día sideral, esto es, el tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del punto por el meridiano. Este día difiere del día solar verdadero, el cual es el tiempo que le toma a la Tierra dar una revolución completa sobre sí misma con respecto al centro del Sol; difiere porque el Sol se desplaza a través de las estrellas a razón de un grado por día, es por ello que el día solar verdadero no es una medida de tiempo confiable ya que varía de día en día.

Otra definición que utilizan los astrónomos es el día Solar medio que es intervalo de tiempo que le toma a la Tierra en dar una revolución completa sobre sí misma con respecto al Sol medio, este es un sol ideal que está cerca del sol verdadero algunas veces adelantándose, otras atrasándose y en otras coincidiendo con él. Además se tiene en cuenta que se desplaza a razón de 0.98 grados por día en dirección hacia el este.

De esta manera, han surgido en astronomía los conceptos diferentes de tiempo con algunas diferencias entre ellos, por ejemplo como el sol medio se desplaza a razón de 0.98561 grados/día o lo que es lo mismo $0.98561 \frac{\text{grados}}{\text{día}}$, entonces el día sideral es más corto que un día solar medio. En el momento en que se cumplan las 24 horas de tiempo solar medio, ya se habrán acumulado $24 \times 0.98561 = 23.65344$ días siderales más de tiempo sideral. Por tanto:

$$24 \text{ días solar medio} = 23.65344 \text{ días sideral.}$$

9.2 TIEMPO SOLAR MEDIO (TSOLM).

Para un observador ubicado en la Tierra se define el TSOLM como el ángulo horario del sol medio que aprecia dicho observador, más doce horas:

donde α es el ángulo horario del Sol medio.

9.3 TIEMPO UNIVERSAL (TU).

Se define TU al tiempo solar medio para un observador situado en el meridiano de Greenwich. Conocido este tiempo se puede conocer el TSOLM para un observador situado en cualquier longitud, ya que a causa de la rotación de la Tierra en dirección de oeste a este, por cada 15 grados que un observador este desplazado hacia el oeste del meridiano de Greenwich, el Sol medio esta desplazado 15 grados al este de su meridiano, entonces estará retrasado 15 grados o una hora con respecto al meridiano de Greenwich. De igual manera, si un observador está desplazado 15 grados al este, el Sol medio está situado al oeste de su meridiano y por ello el TSOLM está una hora adelantado con respecto al meridiano de Greenwich. Esto es,

(A.1)

Siendo el signo positivo si el observador está al este, y viceversa.

9.3.1 Fecha Juliana (F.J). Conocer el número de días entre dos fechas bastante alejadas es un cálculo muy tedioso puesto que ha habido cambios en el número de días de los años a lo largo de la historia. Por esto se elabora en astronomía el concepto de fecha juliana. Para ello se tomó como día de referencia, para cubrir un buen lapso, al primero de enero del año 4713 a.C. a mediodía de Greenwich. Con esta definición aparece la de "número de día juliano", que es el número de días transcurridos desde el día de referencia.

Para un tiempo universal dado:

(A.2)

donde TU se expresa en horas y J_0 es el valor de la FJ a cero horas de TU, o usando la fórmula dada en el libro de referencia Almanac for Computers:

(A.3)

siendo que:

representa una función de truncamiento que extrae la parte entera de x .

A es el año. Debe ser un entero perteneciente al intervalo de 1901 a 2099.

M es el mes. Debe ser un entero perteneciente al intervalo de 1 a 12.

D es el día. Debe ser un entero perteneciente al intervalo de 1 a 31.

9.4 TIEMPO SIDERAL LOCAL (TSL).

Para un observador situado en la Tierra se define TSL como el ángulo horario (AH) del punto vernal que aprecia dicho observador. Esto es:

El tiempo sideral medio de Greenwich (TSMG) es igual al ángulo medido en dirección contraria a las manecillas del reloj desde el equinoccio medio a lo largo del ecuador celeste al plano del meridiano de Greenwich. Si θ es el TSMG medido en grados en cero horas del TU, del libro Almanac for Computers se tiene que:

(A.4)

siendo J el número de siglos julianos desde J2000.0.

(A.5)

9.5 EL TIEMPO ATOMICO (TA).

El tiempo atómico se basa en el conteo de los ciclos de una señal eléctrica de alta frecuencia que se mantiene en resonancia con una transición atómica. La unidad fundamental es el segundo S.I. que se define como la irradiación de 9192631770 periodos de la radiación que corresponde a la transición entre dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.

9.6 EL TIEMPO DINAMICO (TD).

El tiempo dinámico es una medida uniforme del tiempo determinado empíricamente, por la comparación de observadores con las predicciones de teorías de mecánica celeste aplicadas rigurosamente. Este tiempo, como se puede ver al decir observaciones, depende del punto de observación, por ello se definen dos tipos de tiempo dinámico:

El tiempo dinámico baricéntrico (TDB) es la variable independiente de las ecuaciones de movimiento de todos los cuerpos principales del sistema solar con referencia al baricentro del sistema solar.

El tiempo dinámico terrestre (TDT) es la variable independiente de las efemérides aparentemente geocéntricas de los cuerpos del sistema solar.

9.7 ELEMENTOS ORBITALES HELIOCÉNTRICOS REFERIDOS A LA ECLÍPTICA MEDIA Y EQUINOCCIO DE J2000.0

Época: 13 de septiembre de 2000 (FJ 2451800.5)

Planeta	Inclinación	Longitud del nodo ascendente	Longitud del perihelio	Semieje mayor
Mercurio	7.00498	48.3301	77.4564	0.3871009
Venus	3.39460	76.6781	131.8530	0.7233309
Tierra	0.00014	163.4000	102.9937	0.9999868
Marte	1.84967	49.5600	336.0139	1.52357226
Júpiter	1.30437	100.5042	15.4305	5.2044210
Saturno	2.48544	113.6340	90.6429	9.5825510
Urano	0.77227	73.9476	169.4404	19.2012300
Neptuno	1.76856	131.7921	46.9810	30.0476200
Plutón	17.16051	110.2600	223.7791	39.2362300

Planeta	Movimiento medio	Excentricidad	Longitud media
Mercurio	4.092304000	0.2056291	217.84199
Venus	1.602135000	0.0067470	231.32466
Tierra	0.985628700	0.0167348	352.28696
Marte	0.524094200	0.0934789	129.33705
Júpiter	0.08305250	0.0488689	55.58083
Saturno	0.033231080	0.0564861	58.63199
Urano	0.011714390	0.0456617	316.48002
Neptuno	0.005984119	0.0112593	306.71426
Plutón	0.004010265	0.2444214	240.00032

9.8 FECHA JULIANA

AÑOS CENTURIA			
AÑO	FJ	AÑO	FJ
-1900	1027082.5	600	1940207.5
-1800	1063607.5	700	1976732.5
-1700	1100132.5	800	2013257.5
-1600	1136657.5	900	2049782.5
-1500	1173182.5	1000	2086307.5
-1400	1209707.5	1100	2122832.5
-1300	1246232.5	1200	2159357.5
-1200	1282757.5	1300	2195882.5
-1100	1319282.5	1400	2232407.5
-1000	1355807.5	1500J	2268932.5
-900	1392332.5	1500G	2268922.5
-800	1428857.5	1600	2305447.5
-700	1465382.5	1700	2341971.5
-600	1501907.5	1800	2378495.5
-500	1538432.5	1900	2415019.5
-400	1574957.5	2000	2451544.5
-300	1611482.5	2100	2488068.5
-200	1648007.5	2200	2524592.5
-100	1684532.5	2300	2561116.5
0	1721057.5	2400	2597641.5
100	1757582.5	2500	2634165.5
200	1794107.5	2600	2670689.5
300	1830632.5	2700	2707213.5
400	1867157.5	2800	2743738.5
500	1903682.5	2900	2780262.5

AÑO ADICIONAL							
AÑO	FJ	AÑO	FJ	AÑO	FJ	AÑO	FJ
0	0	25	9131	50	18262	75	27393
1	365	26	9496	51	18627	76	27759
2	730	27	9861	52	18993	77	28124
3	1095	28	10227	53	19358	78	28489

4	1461	29	10592	54	19723	79	28854
5	1826	30	10957	55	20088	80	29220
6	2191	31	11322	56	20454	81	29585
7	2556	32	11688	57	20819	82	29950
8	2922	33	12053	58	21184	83	30315
9	3287	34	12418	59	21549	84	30681
10	3652	35	12783	60	21915	85	31046
11	4017	36	13149	61	22280	86	31411
12	4383	37	13514	62	22645	87	31776
13	4748	38	13879	63	23010	88	32142
14	5113	39	14244	64	23376	89	32507
15	5478	40	14610	65	23741	90	32872
16	5844	41	14975	66	24106	91	33237
17	6209	42	15340	67	24471	92	33603
18	6574	43	15705	68	24837	93	33968
19	6939	44	16071	69	25202	94	34333
20	7305	45	16436	70	25567	95	34698
21	7670	46	16801	71	25932	96	35064
22	8035	47	17166	72	26298	97	35429
23	8400	48	17532	73	26663	98	35794
24	8766	49	17897	74	27028	99	36159

MES ADICIONAL							
MES	FJ	MES	FJ	MES	FJ	MES	FJ
Enero	0	Marzo	59	Julio	181	Nov.	304
Enero(B	-1	Abril	90	Agosto	212	Dic.	334
Febrero	31	Mayo	120	Sep.	243		
Febrero(B	30	Junio	151	Octubre	273		

APÉNDICE B. CALCULOS EN RELATIVIDAD.

En este apéndice se desarrollan unos cálculos matemáticos que se han obviado a lo largo del cuarto capítulo, como es el caso de la obtención de los símbolos de Christoffel, las componentes del tensor de Riemann y de Ricci, las componentes del tensor de curvatura y de las ecuaciones de Einstein en el vacío, llegando a obtener la solución de Schwatzschild para un campo estático simétricamente esférico, que luego se aplica en el cálculo de la ecuación de movimiento en un campo de este tipo.

En la geometría de Euclides la distancia elemental entre dos puntos muy próximos viene dada por

$$(B.1)$$

y el movimiento de una masa puntual es rectilíneo y uniforme, siempre que sobre él no actúe una fuerza. Un espacio-tiempo que tenga estos espacios euclídeos tridimensionales también tiene líneas de universo rectilíneas, las llamadas geodésicas. Si se toma como dimensiones de este espacio las x, y, z , el intervalo entre dos puntos próximos tendrá la forma

$$(B.2)$$

Una masa material de dimensiones despreciables crea a su alrededor un campo gravitacional permanente imposible de anular en todos sus puntos por la elección de algún sistema de ejes. Si el universo fuera euclídeo, el sistema coordenado más conveniente sería un sistema de coordenadas polares, tal que:

$$, \quad , \quad y \quad (B.3)$$

y el intervalo correspondiente será:

$$(B.4)$$

Pero la presencia de la masa puntual produce una distorsión del espacio-tiempo, por lo cual el intervalo tendrá la forma:

$$(B.5)$$

Haciendo los cambios de variables

$$, \quad , \quad y \quad (B.6)$$

se tiene que

$$(B.7)$$

Si las nuevas funciones de son exponenciales, se puede poner

$$(B.8)$$

Como , , y entonces el tensor métrico correspondiente a (B.8) es

$$(B.9)$$

Para hallar las nuevas funciones ha de valerse de las ecuaciones de campo de Einstein. A fin de lograr esto primero se debe determinar los símbolos de Christoffel para el tensor métrico dado por (B.9). Los símbolos de Christoffel se determinan por:

$$(B.10)$$

Procediendo con el cálculo de estos elementos se tiene:

De la misma manera

Los demás símbolos se calculan de la misma manera, llegando a obtenerse:

(B.11)

El tensor de Riemann se da por:

(B.12)

Así, por ejemplo se calcula sus componentes:

siendo las componentes del tensor de Riemann

(B.13)

Prosiguiendo con los cálculos ahora se va a determinar las componentes del tensor de Ricci, el cual se define como:

(B.14)

Por ejemplo se calcula una de sus componentes de la siguiente manera:

Similarmente se determinan las demás componentes, teniéndose finalmente:

(B.15)

La curvatura escalar tiene la forma:

(B.16)

Siendo

(B.17)

El tensor de curvatura escalar se calcula teniendo en cuenta las ecuaciones (B.15), (B.16) y (B.17):

de donde se obtiene que

(B.18)

Ahora hay que hallar las componentes de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío:

(B.19)

En los cálculos precedentes se observa que \dots , por lo que \dots . Teniendo en cuenta esto se puede determinar las componentes de las ecuaciones de campo. La componente \dots , por ejemplo, se halla así:

(B.20)

Usando (B.20) y (B.18) se puede determinar (B.19), siendo :

(B.21)

De la misma forma para las demás componentes:

(B.22)

(B.23)

(B.24)

De la ecuación (B.21) se observa que:

(B.25)

que desarrollándola

por tabla de integrales se llega a

de donde

teniéndose para $r \rightarrow \infty$, finalmente que

(B.26)

Restando (B.21) de (B.22):

(B.27)

de donde

(B.28)

A grandes distancias $r \rightarrow \infty$, el tensor métrico (B.9) se debe reducir a aquél de un espacio-tiempo plano en coordenadas esféricas. En este límite $\alpha \rightarrow 0$ y $\beta \rightarrow 0$ tienden a cero y la constante se hace cero; por lo cual:

(B.29)

entonces

(B.30)

De acuerdo a (B.26) y (B.30) el intervalo para el campo simétricamente esférico tiene la forma:

(B.31)

La constante α se asocia al valor $\alpha = 2GM/c^2$, siendo G la constante de gravitación universal y M es la masa central.

Haciendo el siguiente cambio de variable

(B.32)

Introduciendo este cambio de variable en (B.31) se llega a

(B.33)

de donde, si \dots y si \dots :

(B.34)

Esta es la solución de Schwarzschild para las ecuaciones de campo.