

**MODELAJE FISICO-MATEMATICO DE LA FORMA DE LAS COLAS DE UN
COMETA MEDIANTE UN PROGRAMA COMPUTACIONAL**

**VILMA LORENA CORDOBA MORA
CARLOS SALVADOR ORTEGA ORDOÑEZ**

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICAS
PROGRAMA DE FISICA
LA LINEA DE INVESTIGACION EN ASTROFISICA
SAN JUAN DE PASTO
2005**

**MODELAJE FISICO-MATEMATICO DE LA FORMA DE LAS COLAS DE UN
COMETA MEDIANTE UN PROGRAMA COMPUTACIONAL**

**VILMA LORENA CORDOBA MORA
CARLOS SALVADOR ORTEGA ORDOÑEZ**

**TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARA OPTAR
ALTITULO DE FISICO**

**ASESOR
MSc. ALBERTO QUIJANO VODNIZA**

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICAS
PROGRAMA DE FISICA
LA LINEA DE INVESTIGACION EN ASTROFISICA
SAN JUAN DE PASTO
2005**

Las ideas y conclusiones aportadas en este trabajo de grado, son responsabilidad exclusiva de los autores.

Artículo primero del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966 del Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de aceptación:

Director Trabajo de Grado

Jurado

Jurado

San Juan de Pasto, Mayo de 2005

AGRADECIMIENTOS

...Expreso sinceros agradecimientos a:

Mi madre, mi padre y mi hermana, con los que cuento siempre y de quienes su apoyo en todo momento es incondicional.

Carlos, por su total comprensión y por ser parte de este gran sueño,

El Magíster Alberto Quijano Vodniza, por su contribución en la investigación y desarrollo de este trabajo.

James Perenguez López, por su amistad, sus valiosos aportes e ideas y por contribuir en temas con bibliografía necesaria.

Christian Montúfar, por su colaboración en la elaboración del Software y en su presentación final.

Todas aquellas personas que de alguna manera colaboraron en la realización y culminación del presente trabajo.

... Lorena

AGRADECIMIENTOS

Carlos...

... De manera muy afectuosa agradezco a mi padre Alejandro, a mi madre Erika, a mis hermanos Alejandro, Rosario, Nathali y a toda mi familia... ...Vivo para ellos.

A nuestra Universidad y a todos mis profesores por conducirme a explorar nuevos campos y conocimientos.

Al magíster Alberto Quijano Vodniza por su valiosa colaboración y por permitirnos realizar éste trabajo.

A James Perenguez López, Gloria Moncayo y Cristian Montúfar por su ayuda y por compartirnos sus conocimientos.

A Lorena...

... Gracias por brindarme su apoyo, por aceptarme y compartir conmigo todos sus sueños.

A mis amigos y colegas, gracias por hacer divertida e interesante esta etapa de mi vida.

DEDICATORIA

Por ser el fruto de todo el esfuerzo y de todo el tiempo en el cual estas personas supieron comprenderme y estuvieron ahí siempre, este trabajo está dedicado de manera muy especial a:

Mi madre, Luz Neira

Mi padre, José A.

y mi hermana, Magaly

... Lorena

DEDICATORIA

Carlos...

...Dedico este trabajo a...

...Mi padre Alejandro, a mi madre Erika, a mis hermanos Alejandro, Rosario, Nathali, a mi dulce "angelito" Camila y a toda mi familia.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	20
1. OBJETIVOS	21
1.1 OBJETIVO GENERAL	21
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	21
2. LOS COMETAS	22
2.1 ORIGEN	23
2.2. COMPOSICIÓN Y ESTRUCTURA	27
2.2.1 El Núcleo	28
2.2.2 La Coma	29
2.2.3 Variación de la Magnitud Fotométrica de un Cometa	30
2.2.4 Cola de Plasma ó cola tipo I	32
2.2.5 Cola de Polvo ó cola tipo II	32
2.2.6 Cola de Hidrógeno	33
2.2.7 Cola Anómala ó Anticola	33
3. DINÁMICA DE LOS COMETAS	35
3.1 LA ELIPSE	36
3.2. CÁLCULO DE LA ANOMALÍA VERDADERA	39
3.2.1 Relación Geométrica entre las Anomalías	39
3.3. EL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS	41

3.3.1	Vector Momentum Angular por unidad de masa \vec{l}	46
3.3.2	Vector Laplace-Runge-Lenz \vec{p}	49
3.3.3	Conservación de la Energía para el Problema de los Dos Cuerpos	51
3.4	ECUACIÓN DE ORBITA	52
3.5	LA PARÁBOLA	54
3.6	LA HIPÉRBOLA	56
3.7	ECUACIÓN VIS-VIVA	58
3.8	ELEMENTOS ORBITALES	62
4.	COLAS COMETARIAS	65
4.1.	COLA DE POLVO	65
4.1.1	Coordenadas Cometocéntricas	67
4.1.2	Syndynames y Synchrones	68
4.1.3	Parámetros Funcionales $N_p(t)$ y $g(\rho, d)$	69
4.1.4	Distribución de densidad de partículas de polvo en la cola tipo II	71
4.2.	COLA DE IONES	81
4.2.1	El Viento Solar	81
4.2.2	Modelo de Parker para el Viento Solar	82
4.2.3	Principales Iones cometarios	86
4.2.4	Desconexión de la cola de Iones	87
4.2.5	Aberración Dinámica	90
5.	DISEÑO DEL SOFTWARE	94
5.1.	MODELO MATEMÁTICO	94

5.1.1 Ecuación de un Syndyname	96
5.2 PROCEDIMIENTO PARA EL CÁLCULO DE LA ESTRUCTURA DE LA COLA	97
5.3. PRESENTACIÓN Y ESTRUCTURA DEL SOFTWARE	99
5.3.1 Aplicación del programa	101
6. CONCLUSIONES	104
BIBLIOGRAFÍA	105
APÉNDICES	108

LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1. Distribución de los valores del semieje mayor a (U.A.)	25
Tabla 2. Parámetros principales para las órbitas Elípticas, Parabólicas e Hiperbólicas	62
Tabla 3. Valores de cantidades observadas del Viento Solar cerca de la órbita de la Tierra	82
Tabla 4. Iones observados en los cometas	87
Tabla 5. Valores de la Velocidad de salida (V) y ($1? ?$) para los diferentes tipos de colas	98
Tabla 6. Parámetros conocidos de algunos cometas	112

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Histograma, número de cometas versus los valores originales de $(1/a)$ de 86 cometas	25
Figura 2. Cinturón de Kuiper y Nube de Oort	26
Figura 3. Curva de luz de un cometa	31
Figura 4. Esquema típico de un cometa	34
Figura 5. La Elipse	35
Figura 6. Elipse con el Sol en uno de sus focos	38
Figura 7. Relación Geométrica entre las Anomalías	40
Figura 8. Configuración de dos masas en un Sistema Inercial	42
Figura 9. Movimiento con respecto al Centro de Masas	44
Figura 10. Momento Angular constante, el movimiento de m_2 con respecto a m_1 está contenido en un plano	47
Figura 11. Relación área – tiempo	48
Figura 12. Relación área – ángulo	49
Figura 13. Órbita Parabólica	55
Figura 14. Órbita Hiperbólica	56
Figura 15. Parámetros orbitales requeridos para especificar una órbita	64
Figura 16. Sistema de Coordenadas Cometocéntricas $(?, ?)$	67
Figura 17. Velocidad de las partículas de polvo emitidas desde la región interna de la cabeza del cometa	71
Figura 18. Esfera de radio $v_i?$	76
Figura 19. Eje (M_{CM}, N_{CM}) de un Syndynome para un valor específico de $(1? ?)$ en el plano (M, N)	77
Figura 20. Velocidad del Viento Solar v , como función del radio r para diferentes valores de C	85
Figura 21. Trayectoria de un ión en un Campo Magnético Uniforme	89
Figura 22. Geometría de la cola de iones proyectada sobre el plano fotográfico	91
Figura 23. Geometría de la cola de iones proyectada sobre el plano orbital del cometa	92
Figura 24. Ángulo $?$ bajo el cual salen las partículas desde el núcleo del cometa con una velocidad V	94
Figura 25. Presentación del programa SIMULACION DE LAS COLAS COMETARIAS.	100
Figura 26. Ventana con las opciones del programa	100
Figura 27. Datos para a_p, e, V y $(1? ?)$	101
Figura 28. Resultados para un valor de la anomalía verdadera de $??75.2^0$	102

Figura 29. Cola tipo II	102
Figura 30. Datos considerados para los tres tipos de colas	103
Figura 31. Comparación entres los diferentes tipos de colas	103

LISTA DE APÉNDICES

	pág.
Apéndice A. Mecánica Orbital para el núcleo y las partículas de polvo	108
Apéndice B. Proyección entre los planos Orbital y Fotográfico	114

RESUMEN

Se realiza un estudio general sobre la estructura de los cometas, haciendo énfasis en el origen y composición de los dos tipos de colas cometarias más importantes; se estudia los parámetros físicos involucrados en la forma y desarrollo de dichas colas, para luego diseñar un Software en lenguaje Visual Basic que permita simularlas.

ABSTRACT

A general study on the structure of the comets is carried out, making emphasis in the origin and composition of the two types of more important cometary tails; the physical parameters involved in the form and development of this Tails is studied, to design then a software in Visual Basic language which allows to simulate them.

INTRODUCCIÓN

Los cometas son unos de los objetos celestes más extraordinarios, debido a que están acompañados por vistosas colas que sólo se observan cuando ellos se aproximan al Sol. Desde la antigüedad han sido reconocidos y se les relacionaba con acontecimientos trascendentales, catástrofes naturales, etc. Hoy gracias a los trabajos realizados por muchos investigadores, se sabe que ellos forman parte de nuestro sistema solar y aquellas concepciones erróneas poco a poco han ido desapareciendo.

En el presente trabajo se estudia una de las partes principales de los cometas, las colas cometarias, de manera específica la cola de iones ó cola tipo I y la cola de polvo ó cola tipo II, se analiza los parámetros físicos involucrados en la forma y estructura de dichas colas, luego se crea un modelo utilizado en la elaboración de un Software que permite simularlas en las cercanías al Sol.

En el desarrollo de esta monografía, uno de los propósitos principales es recopilar información necesaria para la formulación del modelo matemático, aclarando que la bibliografía sobre este tema es muy escasa, convirtiendo a este trabajo en una gran herramienta para futuros proyectos de investigación en esta área.

1. OBJETIVOS

1.1 OBJETIVO GENERAL

- ? Estudiar un modelo teórico con base en herramientas computacionales que permita reproducir la forma de las colas de un cometa en las proximidades del Sol.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ? Estudiar el origen, composición y naturaleza de los dos tipos más importantes de colas presentes en un cometa.
- ? Estudiar los parámetros físicos que están involucrados en la forma y generación de las colas cometarias.
- ? Diseñar un programa computacional en lenguaje Visual Basic para modelar las colas de los cometas.

2. LOS COMETAS

Entre los varios objetos celestes del sistema Solar, los cometas han atraído y fascinado al hombre común en gran magnitud durante los últimos dos mil años. Esta información proviene de antiguos registros en pinturas o dibujos de cometas en cuevas y rocas, así como de las observaciones de escritores de la época. Los antiguos griegos les llamaron aster kometes ("estrellas con cabellera") y aun hoy se les sigue llamando cometas. Solo hasta el siglo XVI se demostró que los cometas eran objetos celestes, gracias al trabajo de Tycho Brahe, quien observó el cometa luminoso de 1577 DC con instrumentos mas precisos y desde varios sitios en Europa. Esto revolucionó realmente las ideas sobre los cometas y desde aquel momento, los observadores tomaron una visión seria de estos y comenzaron a realizar medidas de su posición. El reconocimiento al descubrimiento de que los cometas son parte del sistema Solar se debe a Edmond Halley, quien usó la mecánica Newtoniana para demostrar que los cometas que habían aparecido en 1531, 1607 y 1682 eran el mismo, con un periodo de aproximadamente 75.5 años⁽¹⁾. Notó también que el intervalo de tiempo en cada paso sucesivo por el perihelio no era el mismo. Concluyó que esto se debía a la perturbación de su órbita producida por los planetas Júpiter y Saturno. Después de esto, predijo que el mismo cometa volvería en 1758. Así sucedió, el cometa apareció en 1758 y Halley, fallecido para esa fecha, no pudo dar testimonio del triunfo de su predicción. Este cometa lleva su nombre en su honor.

Hace mucho tiempo, la aparición de un cometa era asociada con desastres, calamidades, tragedias y muchas desgracias más. Aunque un resultado beneficioso de tales malas nociones e ideas, es que se ha podido registrar las apariciones de la mayoría de los cometas. Estas observaciones han demostrado ser muy valiosas para los astrónomos modernos. Existía también el miedo de que un cometa pudiera chocar con la Tierra y traer consecuencias desastrosas. Por supuesto, con el pasar del tiempo, muchas de estas ideas se han borrado de la mente de las personas. Se sabe ahora que ellos son objetos que giran alrededor del Sol en varias órbitas y la probabilidad de una colisión de un cometa con la Tierra es muy pequeña. Con el pasar del tiempo la investigación cometaria ha evolucionado, principalmente en las dos o tres últimas décadas, donde se ha enfatizado más en la física, la química y el origen de estos cuerpos celestes. La presencia de moléculas orgánicas complejas en los cometas, que pueden tener alguna relación con la existencia de vida en la Tierra también ha interesado a Biólogos.

⁽¹⁾ Fuente: Krishna, S, K. S. Physics of Comets. W. S. P USA 1986. p. 5.

2.1 ORIGEN

Generalmente se cree que el origen de los cometas está íntimamente relacionado con el origen del Sistema Solar, lo cual es un problema de gran interés actual. Por consiguiente, el estudio de los cometas puede proporcionar pistas que ayuden a entender el origen de nuestro sistema planetario. Además de estas posibles relaciones mutuas, los cometas son objeto de estudios muy interesantes, pero su naturaleza y origen aún no son muy claros. Hay muchas ideas e hipótesis con respecto al origen de los cometas, pero ninguna de estas explicaciones es completamente satisfactoria. Puesto que el material de observación es escaso, los investigadores han intentado avanzar con sus propias ideas basadas en argumentos creíbles. A continuación se discutirán algunos de ellos brevemente.

Kuiper, Gerard (1905-1973); astrónomo nacido en Holanda, reconocido por sus estudios de la superficie de la Luna, descubrió a Miranda (satélite de Urano), Nereida (satélite de Neptuno) y también atmósfera en Titán (satélite de Saturno)⁽²⁾. Propuso en 1951 que existe una región en forma de disco que se extiende desde la órbita de Plutón hasta unas 100 UA ⁽³⁾ del Sol, este disco es conocido como Cinturón de Kuiper (aunque parece que la hipótesis fue de Whipple). El cinturón de Kuiper, Figura 2, está formado por una gran multitud de objetos helados que orbitan alrededor del Sol. Debido a la baja radiación Solar que llega hasta allí, estos cuerpos tienen unas temperaturas superficiales de entre 212 y 240 °C bajo cero. Es posible que por esta causa, el agua helada sea uno de los componentes principales de los cuerpos del cinturón de Kuiper, a estos objetos se les conoce también como KBOs (Kuiper Belt Objects), se estima que existen unos 100.000 objetos⁽⁴⁾ mayores de 50 Km. Algunos de ellos tienen un período de rotación conocido. Con datos actuales, se cree que están formados por metano y otros hidrocarburos ligeros; algunos de ellos presentan agua en forma de hielo. Las observaciones muestran también que se hallan confinados dentro de unos pocos grados por encima o por debajo del plano de la eclíptica. Se considera que la mayoría de cometas de corto periodo, es decir, de menos de 200 años provienen de este cinturón.

⁽²⁾ Tomado de la página en Internet: http://www.mipagina.cantv.net/aquilesr/cinturon_kuiper.htm

⁽³⁾ Una unidad astronómica (UA) es la distancia promedio entre el Sol y la Tierra que equivale a 149.597.870 kilómetros (Valor IAU 1976).

⁽⁴⁾ Tomado de la página en Internet:
http://www.iespana.es/intercosmos/reportajes/pluto/pluto_principal.htm

Ocasionalmente la órbita de un objeto del Cinturón de Kuiper puede ser perturbada por la interacción con los planetas gigantes y estos pueden ser enviados en órbitas dentro o fuera del Sistema Solar.

En los últimos días se ha destacado el estudio de los cometas enfatizando principalmente en el estudio de su órbita. El estudio analítico de las órbitas ha mostrado que los cometas están caracterizados por una elevada excentricidad orbital (lo que significa órbitas muy elípticas) y se vio la posibilidad de realizar una primera clasificación de estos objetos con base al valor del periodo orbital. Se identificaron así los cometas de largo periodo, caracterizados por órbitas con periodos superiores a 200 años y los cometas de corto periodo, cuyo retorno al perihelio era más frecuente y comúnmente inferior a 200 años. El grupo más numeroso está representado por los cometas de largo periodo, que constituyen la mayor parte (84%) de los cometas con órbita conocida. Estos cometas entran en la zona planetaria del sistema solar bajo cualquier ángulo, la inclinación respecto a la eclíptica es al azar, alrededor del 50% está caracterizado por la revolución retrógrada⁽⁵⁾. A pesar de la limitación de datos disponibles (aproximadamente 19 cometas de largo periodo de los que se conocía la órbita original), en 1950 J. H. Oort presentó un estudio acerca de la procedencia de los cometas. Mostró que una simple relación del número de cometas versus $1/a$, el inverso del semi-eje mayor, daba un máximo notable alrededor de $(1/a) \sim 10^{7.5} (UA)^{-1}$ (Tabla 1)⁽⁶⁾.

Entonces la mayoría de estos cometas parecen venir de una región ubicada a 30.000 hasta 50.000 UA⁽⁷⁾. Esto parece manifestar la existencia de una nube de cometas alrededor del Sol a esa distancia. Esta se conoce como la "nube de Oort". Debe señalarse que en 1932, Opik había pensado en la posibilidad de la presencia de semejante nube que rodea el sistema solar. La Figura 1 muestra el histograma del número de cometas versus los valores originales de $(1/a)$ establecidos para aproximadamente 86 cometas con las órbitas bien determinadas.

⁽⁵⁾ Revolución retrógrada se considera cuando la inclinación de la órbita supera los 90 grados.

⁽⁶⁾ Krishna, Op. cit., p. 243.

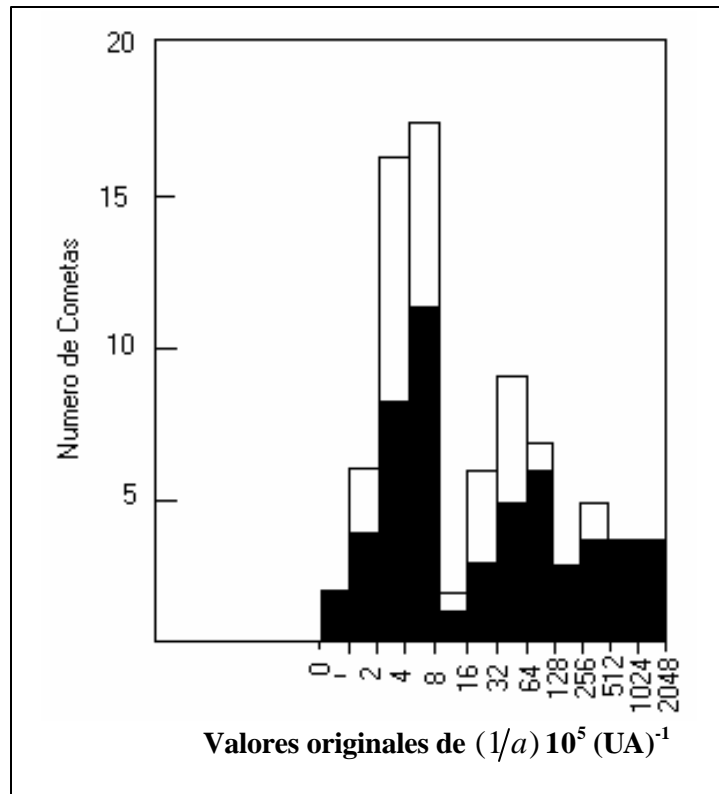
⁽⁷⁾ Ibíd. p. 243

Tabla 1. Distribución de los valores del semi eje mayor a (AU)

$\frac{1}{a} (\text{UA})^{-1}$	NUMERO DE COMETAS
0.00005	10
0.00005 - 0.00010	4
0.00010 - 0.00015	1
0.00015 - 0.00020	1
0.00020 - 0.00025	1
0.00025 - 0.00050	1
0.00050 - 0.00075	1
> 0.00075	0

Fuente: Krishna, S, K. S. Physics of Comets. p. 244

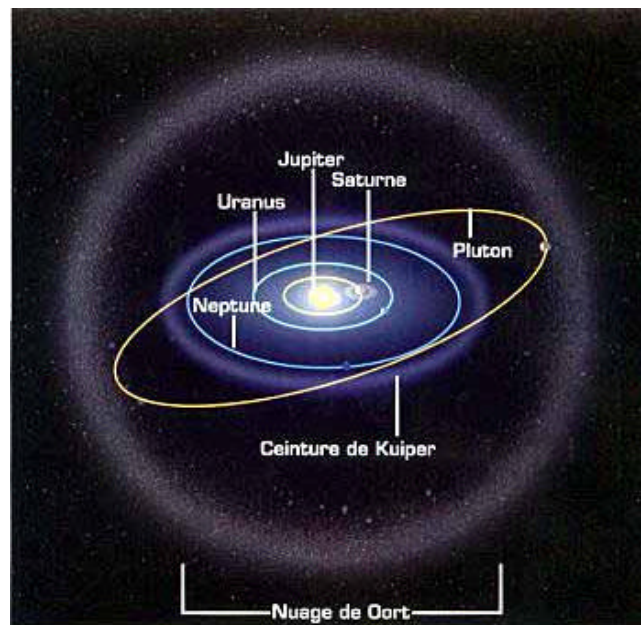
Figura 1. Histograma, número de cometas versus los valores originales de $(1/a)$ de 86 cometas



Fuente. Adaptado de: Krishna, S, K. S. Physics of Comets. p. 245

El máximo en la distribución ocurre aproximadamente en $(1/a) \sim 4 \times 10^{25} (UA)^{21}$ y se extiende hasta $8 \times 10^{25} (UA)^{21}$. El periodo correspondiente para el valor del máximo de $(1/a)$ es aproximadamente 4×10^6 años y la distancia al afelio es aproximadamente 50.000 UA. Los cometas en la nube de Oort son perturbados gravitacionalmente por estrellas, de manera que la órbita de los cometas se modifica continuamente. Por consiguiente el efecto de estas perturbaciones es aleatorio. Esto explica la simetría esférica de la nube. Actualmente se distinguen en la nube de Oort dos regiones diferentes llamadas respectivamente nube externa y nube interna. La nube interna está a 3.000 y 20.000 U.A. La nube externa se extiende desde las 20.000 U.A. Debido a la influencia de perturbaciones estelares, el número de cometas que escapan del sistema Solar a la distancia de $r \sim 100.000$ UA debe ser mayor que aquellos que están a $r \sim 40.000$ UA. La proporción estimada de cometas que se acercan al Sol comparado con aquellos que no lo hacen, es aproximadamente del orden de 10^5 . Combinando esta información con la frecuencia observada del paso por el perihelio se ha hecho una estimación razonable del número total de cometas en la nube del Oort, la cual es $\sim 10^{11}$ entre las distancias de 30.000 y 100.000 UA ⁽⁸⁾.

Figura 2. Cinturón de Kuiper y Nube de Oort



Fuente: Tomado de la página en Internet: <http://www.cielosur.com/ribas12.htm>

⁽⁸⁾ Krishna, Op. cit., p. 245.

No siempre ha sido evidente la conexión entre los cometas, sobre todo los de corto periodo, y las regiones más periféricas del Sistema Solar (nube de Oort o cinturón de Kuiper); se ha intentado, de hecho, muchas veces identificar otros reservorios más cercanos al Sol, pero con resultados no siempre aceptados por la comunidad científica. Se recuerda con este propósito la teoría del astrónomo soviético S.K. Vsekhsvyatskii, quien en los años setenta, imaginaba un origen ligado a las erupciones volcánicas ocurridas en planetas mayores o en sus satélites. En aquellos mismos años Rabe pensaba que una posible fuente de los cometas de corto periodo podría ser identificada con el mecanismo de evolución dinámica de los asteroides Troyanos⁽⁹⁾, cuya similitud física con los núcleos de los cometas extintos había llevado ya a pensar en un mecanismo inverso, es decir, la captura de núcleos cometarios por parte de Júpiter. Siempre surgen serias dudas sobre el hecho de que los cometas de corto periodo hayan podido tener origen en el reservorio gigantesco de cometas de la nube de Oort. El análisis de sus parámetros orbitales (sobre todo el bajo valor de la inclinación) conlleva, de hecho, gran perplejidad acerca de la posibilidad de que una órbita inicialmente caracterizada por una inclinación al azar pueda ser modificada y aplanada de una forma tan eficiente por las perturbaciones planetarias. Como puede verse de la discusión anterior, hay varias hipótesis y sugerencias que se han adelantado para explicar el origen de los cometas.

En un campo como éste donde los datos son escasos, en una muestra de sólo un sistema Solar y con escaso conocimiento, hay lugar limitado para los modelos y explicaciones a los fenómenos observados. Sólo más y mejores datos combinados con ingeniosidad pueden ayudar a reducir la amplia variedad de explicaciones existente. Hasta ese tiempo, la creencia general de que el origen de los cometas también es asociado con el origen del sistema Solar continuará.

2.2 COMPOSICIÓN Y ESTRUCTURA

Otro asunto bien diferente es el conocimiento de la composición y estructura de los cometas, que se reducía a teorías sin posibilidad de confirmación hasta que la técnica no desarrolló los instrumentos adecuados para su identificación. A finales del siglo XIX con ayuda de espectroscopios se conocieron rasgos de la composición química y se descubrió que el agua era un componente primordial en las diferentes capas que podían ser prospectadas. Se definieron con más claridad las partes de un cometa, estableciéndose diferencias entre la cola, la coma y el núcleo o parte más profunda que es realmente el generador de las otras estructuras.

⁽⁹⁾ Asteroides situados en los puntos de Lagrange L4 y L5 de la órbita de Júpiter. A todos estos astros se les han asignado nombres de héroes de la guerra de Troya, griegos a los que ocupan el punto L4 y troyanos a los del L5.

2.2.1 El Núcleo. Aunque el núcleo parece ser responsable de la mayoría de los fenómenos observados en los cometas, su naturaleza es la menos entendida. Como el núcleo no puede ser observado directamente desde la Tierra a causa de su pequeño tamaño, la información con respecto a su naturaleza, estructura y la composición viene de medios indirectos. Existe un modelo de funcionamiento razonable para el núcleo, el astrónomo norteamericano Fred L. Whipple propuso en 1949 la teoría de que el núcleo de un cometa, de forma cuasi esférica y que constituye prácticamente toda su masa, es una estructura sólida helada, una especie de "bola de nieve sucia", es decir, esta compuesto de agua congelada, polvo meteórico y moléculas complejas como de dióxido de carbono CO_2 , cianuro de hidrogeno HCN , amoniaco NH_3 , metano CH_4 , monóxido de carbono CO (formadas a causa de la abundancia de elementos como H, C, N y O) y otros compuestos de carbono y azufre, generalmente volátiles, que rodean una parte central más interior, constituida al parecer de silicatos de hierro, magnesio y manganeso⁽¹⁰⁾. Varios hechos puntuales sirven de demostración a esta teoría; el principal es que la mayoría de los gases y partículas eyectados por los cometas, y que conforman la coma y la cola de los mismos, están compuestos por moléculas fragmentarias, o radicales, de los elementos más comunes en el espacio: hidrógeno H, carbono C, nitrógeno N, y oxígeno O.

Los radicales de, por ejemplo, CH, NH, y OH pueden generarse a partir de moléculas estables como CH_4 (metano), NH_3 (amoniaco) y H_2O (agua), los cuales pueden existir como hielo o compuestos más complejos a baja temperatura en el núcleo. Otro hecho que apoya la teoría de la "bola de nieve" es que los cometas que mejor han sido observados se mueven en órbitas significativamente desviadas con respecto a las calculadas usando la mecánica celeste de Newton. Esto provee una clara evidencia de que el escape de gases del cometa produce un efecto de "propulsión a chorro" que aleja ligeramente al núcleo cometario de su trayectoria original. El estudio de estos chorros muestra también que el núcleo posee un movimiento de rotación, ya que los mismos no son rectos sino que están curvados, de tal manera que ponen en evidencia la rotación del cuerpo central.

Un estudio de los hielos interplanetarios⁽¹¹⁾ a dado mas información sobre estos compuestos y su particular estado, al formarse en ausencia de gravedad y a temperaturas tan bajas de solo unos pocos grados por encima del cero absoluto (0° Kelvin), su estructura no es cristalina como lo es para nosotros el hielo de agua

⁽¹⁰⁾ Tomado de la página en Internet:
<http://www.udistrital.edu.co/comunidad/profesores/pdeaza/html/Colas.html>

⁽¹¹⁾ Página en Internet: <http://www.astrosurf.com/Cometas-obs/ArtSoftUtil/Cometasblandos.doc>

sino que son hielos amorfos, solo agregaciones de material a muy baja temperatura, ese estado amorfo es semejante al del agua líquida en sus enlaces del hidrógeno y por ello aunque de altísima viscosidad permanecen móviles y permiten con ello envolver o atrapar a otros compuestos. El aumento de temperatura debido al acercamiento al Sol es responsable de transiciones de fase que hacen que el hielo adquiera una forma de cristalización extraña, la forma cúbica, que en determinadas condiciones coexiste con la amorfa, solo cuando el calentamiento es mayor la forma cúbica se hace hexagonal, que es el hielo ordinario y cuya disposición atómica no permite la presencia de otras sustancias en su interior, siendo estas expulsadas y por ello una de las causas de los chorros habidos en algunos cometas, esto puede suceder por capas preservando la forma de hielo normal a las capas internas, así el núcleo subsiste a través del tiempo dando vueltas alrededor del Sol y perdiendo solamente en cada paso una masa promedio del 1%. Cuando el cometa está a grandes distancias del Sol, el espectro continuo visto es simplemente la luz del Sol reflejada en el núcleo.

2.2.2 La Coma. Cuando un cometa se aproxima al Sol, a una distancia menor o igual a 6 UA, la radiación solar repercute en la superficie del núcleo, parte de la energía se absorbe y parte se refleja. La energía absorbida da origen a la temperatura de la superficie que sublima⁽¹²⁾ el material del núcleo; el gas, principalmente compuesto de moléculas complejas, y el polvo se liberan extendiéndose en el espacio, este proceso forma una nube larga y tenue de gas y polvo llamada coma o cabellera del cometa.

Obviamente la coma aumenta en tamaño y brillo cuando se acerca al Sol, pero decrece, por pérdida de material Cometario, al interactuar fuertemente con el Sol. La coma alcanza tamaños que oscilan entre 10^3 y 5×10^7 Km de radio⁽¹³⁾. Al absorber la radiación ultravioleta del Sol, los gases comienzan a sufrir reacciones químicas y a liberar grandes cantidades de hidrógeno molecular. Comienza entonces a formarse una gigantesca nube de hidrógeno neutro alrededor del cometa. El hidrógeno también absorbe la radiación ultravioleta y comienza a emitir su propio brillo debido al fenómeno de fluorescencia, a unas 5 UA del Sol, la fluorescencia generalmente se hace más intensa que la luz reflejada. Sin embargo, este brillo no es detectable desde la Tierra pues es absorbido por nuestra atmósfera, pero ha sido detectado desde naves espaciales.

⁽¹²⁾ Sublimación es el proceso de paso de sólido a gas, sin la etapa líquida intermedia.

⁽¹³⁾ Tomado de la página en Internet:
<http://www.udistrital.edu.co/comunidad/profesores/pdeaza/html/colas.html>

La coma de un cometa está formada por tres capas concéntricas: procediendo desde el núcleo hacia el exterior encontramos una primera capa reducida llamada **coma interna o molecular** de aproximadamente 10^4 Km, a continuación la **coma intermedia o de radicales** de aproximadamente 10^5 Km y finalmente una capa enorme llamada **coma de hidrógeno** que alcanza tamaños que oscilan entre 10^6 y 10^7 kilómetros de radio. El núcleo y la coma forman la cabeza de un cometa.

Una manera de estudiar características físicas de un objeto celeste, es detectando, analizando e interpretando la radiación electromagnética proveniente de él. En una estrella esta radiación se origina en su parte central a causa de los procesos de fusión nuclear que ocurren allí. Un planeta o un cometa generalmente reflejan la radiación proveniente del Sol y la que produce corresponde a un mínimo porcentaje. Para un cometa este mínimo porcentaje se produce en las vecindades del perihelio a causa de eventos moleculares, atómicos y nucleares ocurridos en la superficie del núcleo durante todo el proceso de sublimación.

La formación de la coma permite localizar al cometa en observaciones visuales, cuando se halla por término medio entorno a 3 UA del Sol. Para hablar de la localización visual de los cometas, es oportuno hacer una breve consideración sobre el brillo de estos cuerpos celestes.

2.2.3 Variación de la magnitud fotométrica de un cometa. El brillo de un Cometa es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r a la tierra y a la n potencia de su distancia r al Sol:

$$B \propto B_0 \frac{1}{r^2 r^n} \quad (1)$$

Sí $r \propto 1UA$, de la ecuación (1) se ve que $B \propto B_0$. A B_0 se le denomina brillo absoluto, es decir, el brillo que tendría el cometa a una distancia de 1 UA del Sol y de la Tierra en un mismo instante. Aquí n puede adoptar valores entre 0 y 25 e incluso negativos. El valor más frecuente de n esta entre 3 y 5. n es una función que depende de la reflectividad del núcleo, la composición química, la proporción de polvo y también al parecer de la mecánica de rotación. Por ello no ha podido establecerse en un modelo físico ni relacionarla con algún parámetro físico conocido del cometa. En astronomía no es común hacer uso del brillo para estudiar físicamente un objeto, sino de su magnitud. La magnitud permite un análisis más eficiente y cómodo pues varía más lentamente que el brillo. Para trabajar en términos de las magnitudes se utiliza la ecuación de Pogson:

$$M - m_0 = 2.5 \log \frac{B}{B_0} \quad (2)$$

Esta ecuación establece que la diferencia entre dos magnitudes, es proporcional al logaritmo en base diez del cociente entre sus brillos. Si se reemplaza en esta ecuación la relación entre brillos para un cometa se obtiene

$$M - m_0 = 5 \log \left(\frac{r}{1 \text{ UA}} \right)^{2.5n} \quad (3)$$

Las distancias se expresan en unidades astronómicas. Si $r = 1 \text{ UA}$ entonces: $M = m_0$ que se conoce como **Magnitud Absoluta**. Si en la ecuación (3) se considera

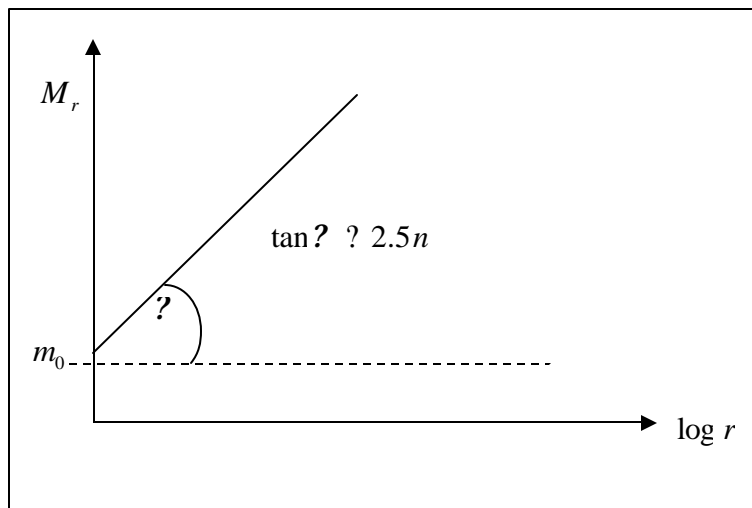
$$M_r = M - 5 \log r \quad (4)$$

M es la magnitud observada desde la tierra, luego se tiene

$$M_r = 2.5n \log r + m_0 \quad (5)$$

La ecuación (5) se conoce como **Magnitud reducida** del cometa y es la magnitud observada desde el Sol. Para muchos cometas activos, la grafica de la magnitud reducida M_r en función del logaritmo de la distancia Sol-cometa, será una recta de pendiente $2.5n$, por lo tanto, dicha curva conocida como **Curva de Luz** permite calcular el coeficiente n y la magnitud absoluta m_0 (Figura 3). Basándose en la ecuación (4) y con ayuda de la curva de luz, el brillo esperado puede predecirse fácilmente. En ocasiones los núcleos sufren estallidos, llamados "outburst", ya sea por mayor efecto de la radiación Solar o por fractura del núcleo, con lo cual se desprende mas cantidad de material aumentando el brillo de la coma en media magnitud o más.

Figura 3. Curva de luz de un cometa.



El rasgo más característico de un cometa es, por supuesto, la presencia de dos o más colas. Las colas que apuntan en dirección contraria al Sol surgen principalmente debido a la interacción del polvo y el gas del material cometario con la radiación y el viento solar. Las colas que aparecen en los cometas pueden ser de tres tipos.

2.2.4 Cola de plasma. También llamada **cola de tipo I** ó **cola de iones**. Debido a las reacciones químicas sufridas por algunos gases de la coma, ocasionadas por la interacción de éstos con la radiación Solar, se producen grandes cantidades de moléculas ionizadas (moléculas que han perdido o ganado uno o varios electrones). Debido al viento Solar y a la presión ejercida por los fotones ("presión de radiación"), los gases de la coma son "empujados" muy lejos del núcleo en la dirección característica. Las partículas que forman los gases ionizados poseen una masa muy pequeña por lo que son arrastradas fácilmente formando una cola recta que puede llegar a tener varios cientos de millones de Km de largo; éstas crecen a medida que el cometa se acerca al Sol. Como está formada por partículas cargadas, existe una gran interacción entre el material de la cola con el viento y la radiación Solar por lo que se generan corrientes eléctricas y campos magnéticos turbulentos dentro de la misma. Su brillo, causado por el proceso de fluorescencia, es de un tono azulado o verde.

2.2.5 Cola de polvo. También es llamada **cola de Tipo II**. Es la más fácil de observar a simple vista. Está formada por granos finísimos de polvo de un tamaño del orden de las micras ⁽¹⁴⁾. Debido a que son mucho más masivos que los iones, estos granos no son arrastrados tan fácilmente por el viento y la radiación Solar, formando una cola curvada cuya dirección es la característica, siempre alejándose del Sol. Su brillo se debe principalmente a la luz que estas pequeñas partículas reflejan del Sol. Estas colas pueden llegar a tener decenas de millones de Km de largo. No todos los cometas desarrollan esta cola, debido a que los pasos sucesivos de éstos alrededor del Sol los ha desgastado. Se cree que debido a la trayectoria de los cometas y a la posición cercana de la Tierra al Sol, es muy probable que ésta intercepte las enormes colas o el polvo dejado en el espacio por las mismas. Cuando esto sucede, el polvo, al entrar a la atmósfera terrestre, empieza a quemarse, produciendo lo que se conoce como las lluvias de meteoros o vulgarmente "lluvia de estrellas". Por ejemplo, cuando la Tierra intercepta el polvo dejado por el cometa Swift-Tuttle, aproximadamente entre el 9 y el 13 de agosto, se producen las Perseidas ("lluvias de meteoros" cuyo vértice o punto radiante de origen, se encuentra en la constelación de Perseus); cuando la Tierra intercepta las partículas de polvo dejadas por el cometa Halley se producen las Oriónidas (punto radiante en la constelación de Orión, entre el 20 y 22 de octubre).

⁽¹⁴⁾ Tomado de la página en Internet: <http://www.astropanama.org/materiainterplan.html>

Estas "lluvias" se producen casi-periódicamente cada año. Esto se debe a que las partículas de polvo dejadas por estos cometas, han quedado en órbita en el espacio interplanetario e intercepta la órbita de traslación de la Tierra. Con el tiempo (quizás algunos cientos de años) estas lluvias irán desapareciendo por la dispersión del polvo debido al viento Solar.

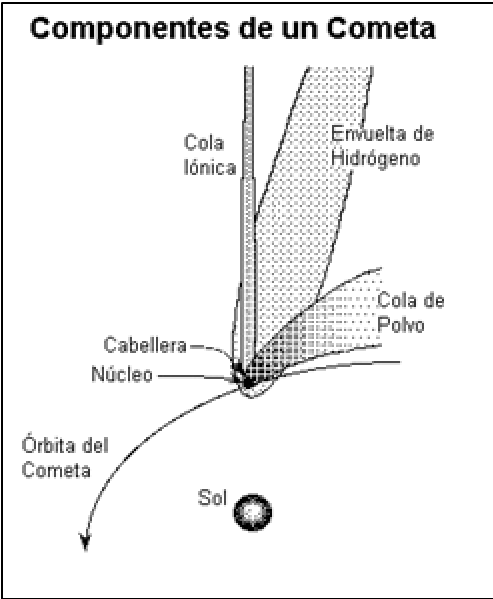
2.2.6 Cola de Hidrógeno. Es muy pequeña debido a la rápida dispersión del hidrógeno por el espacio. No es observable desde la Tierra pues la luz que emite es absorbida por la atmósfera.

2.2.7 Cola anómala o Anticola. Se han fotografiado cometas que poseen una pequeña cola que "apunta hacia el Sol". Este fenómeno es explicado de la siguiente manera: se ha encontrado que las partículas de estas colas anómalas son mucho más grandes (del orden de los milímetros) que las de la cola normal, por lo que éstas no son arrastradas por el viento solar, sino que se van quedando a lo largo de la órbita del cometa debido a la inercia de las mismas. Ahora bien, cuando el Sol, el cometa y la Tierra están en las posiciones adecuadas es posible ver a dicha cola fácilmente (el hecho de que no siempre es posible verlas no significa que no estén allí). Así, debido al efecto de la perspectiva, parece entonces que tal cola está dirigida hacia el Sol.

Las anticolas no son más que un efecto visual causado por la geometría formada por el sistema Sol-Tierra-cometa y se pueden observar cuando se cumplen las siguientes condiciones: la Tierra está muy cerca del plano orbital del cometa, el ángulo Sol-cometa-Tierra sea mayor de 90° , el cometa desprenda partículas grandes y que todo esto ocurra después del paso por el perihelio.

En resumen, un cometa consta de un núcleo, que es su parte esencial, una coma o envoltura de polvo y gas que lo rodea y una o varias colas formadas por el gas y los granos que se liberan del núcleo por sublimación de los hielos, fenómenos que solo ocurren cuando el cometa se acerca lo suficiente al Sol. Se Puede mirar en la Figura 4 las principales partes de un cometa.

Figura 4. Esquema típico de un cometa.



Fuente: <http://bang.lanl.gov/solarsys/comet.htm>, mayo 1996.

3. DINÁMICA DE LOS COMETAS

Mediante observaciones de la esfera celeste realizadas por antiguos astrónomos se evidenció la existencia de cuerpos celestes que, a diferencia de las estrellas fijas, se desplazaban por el cielo formando extrañas trayectorias. Se tienen registros históricos⁽¹⁵⁾ de que filósofos y geómetras griegos intentaron describir el movimiento de los planetas, la Luna y el Sol en términos de trayectorias circulares con movimiento uniforme. Pero el asunto se complicó debido a que en aquellos tiempos se creía que la Tierra era el centro del universo con todos los demás cuerpos, incluido el Sol, girando alrededor de ella (modelo de Ptolomeo). No fue sino hasta el año de 1542 cuando el monje polaco Nicolás Copérnico publicó su libro: “Sobre las Revoluciones de los Cuerpos Celestes” en el cual planteaba un modelo Heliocéntrico, es decir, todos los planetas incluyendo la Tierra giran en torno al Sol en órbitas circulares; esta idea ya había sido propuesta por el astrónomo griego Aristarco en el siglo IV AC. Sin embargo esta idea encontró oposición por parte de la Iglesia Católica. Johannes Kepler⁽¹⁶⁾ estaba convencido de la validez de la teoría de Copérnico, con base en este modelo y con las observaciones de los planetas realizadas por Tycho Brahe encontró⁽¹⁷⁾ tres relaciones geométricas que cumplían todos los planetas sin excepción, permitiendo explicar y calcular con suma precisión el complicado movimiento planetario y la posición de los astros en el cielo. Ahora, se tendrá en cuenta las tres leyes de Kepler, para calcular la posición del núcleo de un cometa en función del tiempo.

⁽¹⁵⁾ PORTILLA BARBOSA, José Gregorio. Elementos de Astronomía de posición. Observatorio Astronómico Nacional. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. 2001. p. 208

⁽¹⁶⁾ *Ibíd.* p. 209

⁽¹⁷⁾ *Ibíd.* p. 210

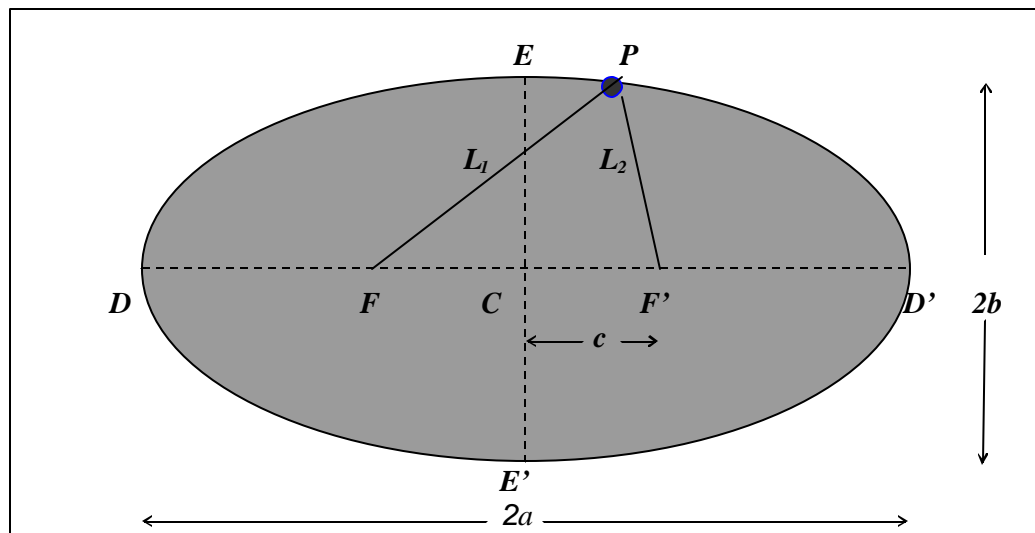
3.1 LA ELIPSE

La elipse⁽¹⁸⁾ es el conjunto de puntos cuya suma de distancias a dos puntos distintos prefijados (focos) es constante

$$PF + PF' = \text{constante} \quad (6)$$

La recta que pasa por los dos focos F y F' y que corta a la elipse en dos puntos llamados *Vértices*, es conocida como el *Eje mayor*, como se ilustra en la Figura 5.

Figura 5. La Elipse



Fuente: ADAPTADO DE LARSON, Roland E. HOSTETLER, Robert P. p. 784

La distancia del centro C a cualquiera de los vértices se conoce como *semieje mayor*

$$CD = CD' = DD'/2 = a \quad (7)$$

La distancia del centro de la elipse a E o a E' se conoce como *semieje menor*

$$CE = CE' = EE'/2 = b \quad (8)$$

⁽¹⁸⁾ LARSON, Roland E. HOSTETLER, Robert P. Cálculo y Geometría Analítica V. 2 Quinta edición: McGRAW-HILL. 1995. p. 784

Para cualquier punto sobre la elipse se cumple que

$$L_1 + L_2 = \text{constante} \quad (9)$$

Si se toma un punto en uno de los vértices se tiene

$$DF + DF' = (a - c) + (a + c) = 2a \quad (10)$$

Se puede por lo tanto asumir que la suma de las distancias entre cualquier punto sobre la elipse y los dos focos debe ser $2a$ (el eje mayor)

$$L_1 + L_2 = 2a \quad (11)$$

Para los puntos E y E' se tiene

$$a^2 - c^2 = b^2 \quad (12)$$

Ahora bien, para cualquier punto (x, y) de la elipse, la suma de las distancias entre (x, y) y los focos (tomando el centro en el origen y el eje mayor ubicado sobre el eje x) es

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a \quad (13)$$

Con algo de álgebra se llega a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad (14)$$

y teniendo en cuenta la ecuación (12) se obtiene la ecuación general de una elipse en coordenadas cartesianas con centro en el origen y el eje mayor ubicado sobre el eje x

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (15)$$

Para medir cuán distinta de un círculo es una elipse se utiliza el concepto de *excentricidad*. La excentricidad se define como

$$e = c/a \quad 0 < e < 1 \quad e = 0 \text{ circunferencia} \quad 0 < c < a \quad (16)$$

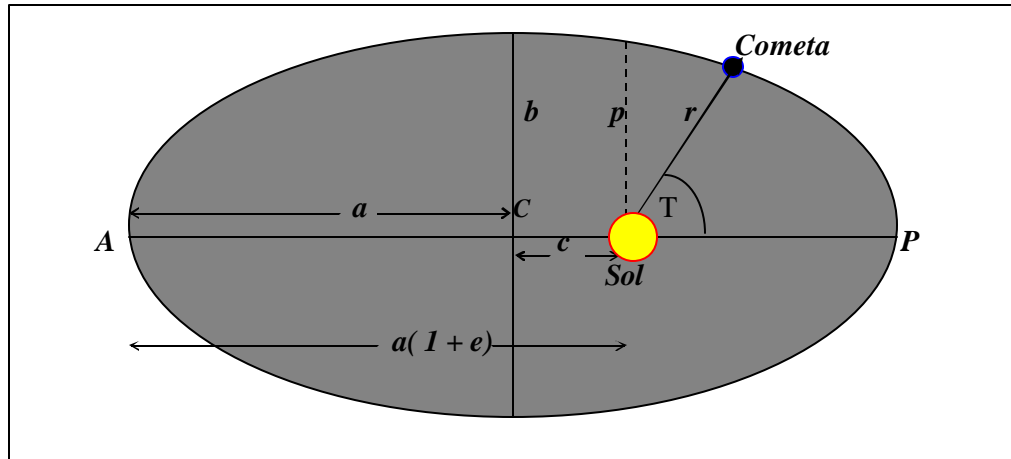
Para una elipse muy excéntrica los focos están cerca a los vértices y el cociente es aproximadamente 1. Reemplazando $c = ea$ en la ecuación (12) se tiene que

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \quad (17)$$

De acuerdo con la primera ley de Kepler, el Sol se encuentra en uno de los focos de la órbita del cometa, entonces, se expresa la ecuación de una elipse en coordenadas cartesianas con respecto a uno de los focos F ó F' (Figura 6). En la Figura 6 el punto P de la órbita más cercano al Sol se denomina *Perihelio* y el punto A de esta órbita, se denomina *Afelio*. El eje mayor de la órbita AP es la línea de *Apsides* y la recta que une al Sol con el núcleo del cometa se denomina *radio vector del cometa*. La distancia entre el cometa y el Sol en el Afelio es

$$a_A = a(1 + e) \quad (18)$$

Figura 6. Elipse con el Sol en uno de sus focos.



Fuente: Adaptado de KRISHNA S, K. S. p. 22.

y la distancia entre el Sol y el cometa en el Perihelio es

$$a_p = a(1 - e) \quad (19)$$

Para expresar la ecuación de una elipse en coordenadas cartesianas con respecto a uno de los focos, se realiza una traslación de coordenadas de C a F' (Sol) sobre el eje x . Se sabe que $CF' = c = ea$ por lo tanto la ecuación (15) se transforma en

$$\frac{(x - ea)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (20)$$

Sin embargo esta ecuación no es muy utilizada en astronomía, por lo que es necesario expresarla en coordenadas polares

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta} \quad (21)$$

La ecuación (21) es la ecuación de una elipse en coordenadas polares con origen en el foco F' (Sol) y permite calcular la posición del cometa en cualquier punto sobre su órbita conocido el valor de θ . θ es llamada la *Anomalía Verdadera*

$$\theta = 0 \quad r = a(1 - e) = a_p \quad (22)$$

$$\theta = 180 \quad r = a(1 + e) = a_A \quad (23)$$

La distancia promedio existente entre el cometa y el Sol, llamada r_{med} es el *Semieje Mayor*

$$r_{med} = \frac{a_p + a_A}{2} = a \quad (24)$$

Sea

$$p = a(1 - e^2) \quad (25)$$

Conocido como semi-latus, entonces la ecuación (21) se transforma en

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \quad (26)$$

$$\theta = 90^\circ \quad r = p; \quad \theta = 270^\circ \quad r = p$$

3.2 CÁLCULO DE LA ANOMALÍA VERDADERA

3.2.1 Relación Geométrica entre las Anomalías. Se considera una elipse de semieje mayor a inscrita en una circunferencia de radio a como se muestra en la Figura 7. La elipse y la circunferencia tienen el mismo centro C . La distancia FG es igual a

$$FG = r \cos \theta \quad (27)$$

Además

$$FG = CG - CF \quad (28)$$

$$FG = a(\cos E - e)$$

donde E es llamada *Anomalía excéntrica*. Reemplazando las ecuaciones (21) y (28) en la ecuación (27) se tiene

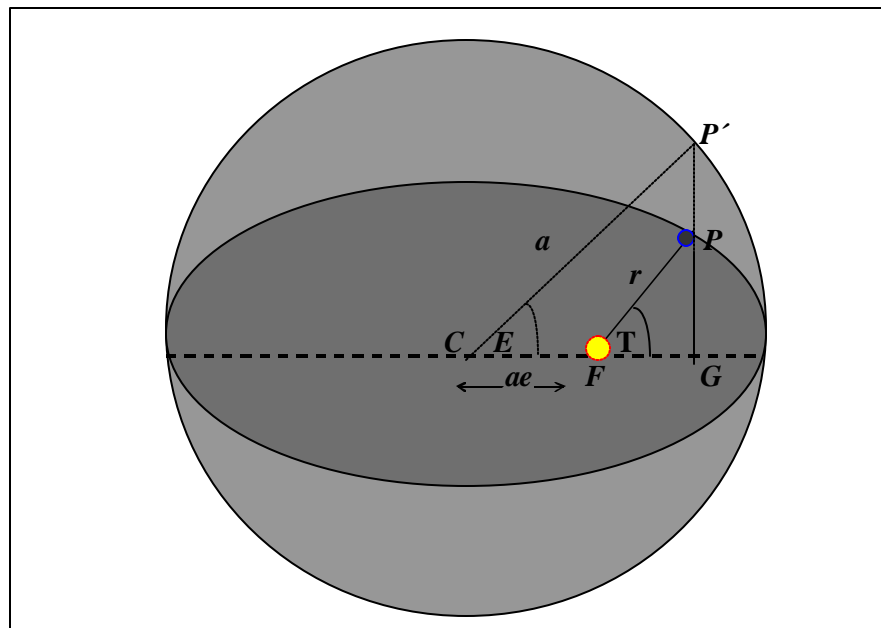
$$\cos \theta = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \quad (29)$$

De (29) y teniendo en cuenta las identidades trigonométricas

$$1 - \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (30)$$

$$1 + \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (31)$$

Figura 7. Relación Geométrica entre las Anomalías



Fuente: Adaptado de POLLARD, Harry. p. 17

Es fácil demostrar que:

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad (32)$$

Conociendo el valor de la *excentricidad* e de la orbita del cometa, el valor de la *anomalía excéntrica* E , se puede calcular la *anomalía verdadera* θ por medio de la ecuación (32).

3.3 EL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS

Uno de los temas fundamentales de la mecánica celeste es el estudio del movimiento de dos cuerpos, uno respecto al otro, regidos por las leyes de Newton. Para tal propósito se consideran dos partículas de masas m_1 y m_2 completamente aisladas de los demás cuerpos del universo. Se debe encontrar el estado dinámico de ambas partículas con respecto a un sistema inercial dado, cuando la única fuerza que actúa entre ellas es la atracción gravitacional.

En este problema solo se considera la fuerza de atracción Newtoniana, lo que significa que no existen fuerzas externas o si existen, son de magnitud tan pequeña que se consideran insignificantes.

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (33)$$

\vec{r} es el vector posición de m_2 con respecto a m_1 . Las fuerzas ejercidas entre las masas m_1 y m_2 son:

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = - \frac{Gm_1 m_2}{r^3} \vec{r}_2 - \frac{Gm_1 m_2}{r^3} \vec{r}_1 \quad (34)$$

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \frac{Gm_1 m_2}{r^3} \vec{r}_2 + \frac{Gm_1 m_2}{r^3} \vec{r}_1 \quad (35)$$

Estas ecuaciones equivalen⁽¹⁹⁾ a seis ecuaciones diferenciales de segundo orden, que requieren doce constantes arbitrarias para su completa solución. Ahora sumando las ecuaciones (34) y (35) e integrando se llega a:

$$m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} + m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{C}_1 \quad (36)$$

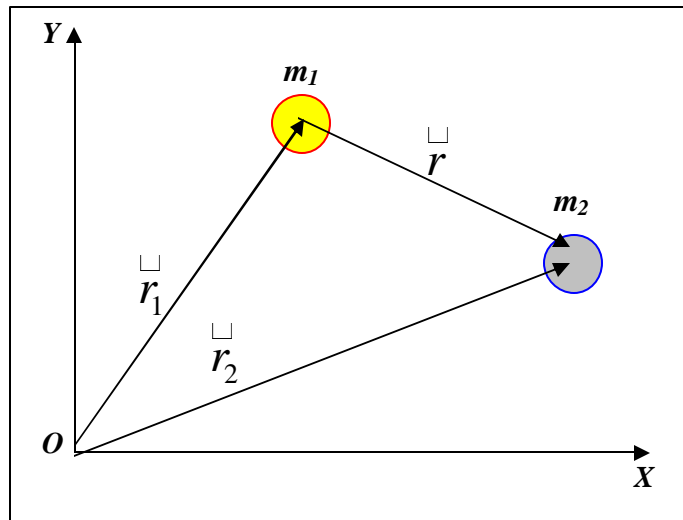
La ecuación (36) representa la conservación del momentum lineal de ambas partículas. Una nueva integración de la ecuación (36) permite obtener

⁽¹⁹⁾ DANBY, J. M. A. Fundamentals of Celestial Mechanics. 2nd. Edition Revised & Enlarged. Richmond, Virginia, U. S. A. : Willman-Bell, Inc. 1992. p. 125.

$$m_2 \ddot{r}_2 + m_1 \ddot{r}_1 = \ddot{C}_1 t + \ddot{C}_2 \quad (37)$$

Donde \ddot{C}_1 y \ddot{C}_2 son dos vectores constantes que proveen las primeras seis constantes de integración.

Figura 8. Configuración de dos masas en un sistema inercial.



Utilizando la definición del vector posición del centro de masas en este sistema, para representar la posición de las partículas como si se tratara de un solo cuerpo

$$\ddot{R}(m_1 + m_2) = m_2 \ddot{r}_2 + m_1 \ddot{r}_1 \quad (38)$$

Con esto se puede escribir la ecuación (37) como

$$\ddot{R} = \frac{\ddot{C}_1 t}{m_1 + m_2} + \frac{\ddot{C}_2}{m_1 + m_2} \quad (39)$$

Se puede decir que el centro de masas, se mueve con velocidad constante o simplemente está estático, con respecto al origen en O (será el sistema de referencia inercial). Hasta ahora, solo se sabe que el momentum lineal de las partículas de masas m_1 y m_2 se conserva y que el centro de masas se mueve en línea recta con respecto al origen O del sistema de referencia inercial. Por lo tanto se debe encontrar el movimiento de las partículas de masas m_1 y m_2 ya no con respecto al punto arbitrario O sino con respecto al centro de masas del sistema.

De la Figura 9 se deduce que

$$\ddot{R} + \ddot{r}_1 = \ddot{r}_1 \quad (40.1)$$

$$\ddot{R} + \ddot{r}_2 = \ddot{r}_2 \quad (40.2)$$

Derivando dos veces con respecto al tiempo las ecuaciones (40.1) y (40.2) se tiene

$$\frac{d^2 \ddot{R}}{dt^2} + \frac{d^2 \ddot{r}_1}{dt^2} = \frac{d^2 \ddot{r}_1}{dt^2} \quad (41.1)$$

$$\frac{d^2 \ddot{R}}{dt^2} + \frac{d^2 \ddot{r}_2}{dt^2} = \frac{d^2 \ddot{r}_2}{dt^2} \quad (41.2)$$

De la ecuación (39) se deduce

$$\frac{d^2 \ddot{R}}{dt^2} = 0 \quad (42)$$

Entonces las ecuaciones (41.1) y (41.2) se transforman en

$$\frac{d^2 \ddot{r}_1}{dt^2} = \frac{d^2 \ddot{r}_1}{dt^2} \quad (43.1)$$

$$\frac{d^2 \ddot{r}_2}{dt^2} = \frac{d^2 \ddot{r}_2}{dt^2} \quad (43.2)$$

De esta misma Figura, también se puede ver que

$$\ddot{r} = \ddot{r}_2 + \ddot{r}_1 \quad (44.1)$$

$$\ddot{r} = \ddot{r}_2 + \ddot{r}_1 \quad (44.2)$$

$$\ddot{R} + \ddot{r}_1 = \ddot{r}_1 \quad (44.3)$$

$$\ddot{R} + \ddot{r}_2 = \ddot{r}_2 \quad (44.4)$$

Como se toma el origen de coordenadas en el centro de masas entonces

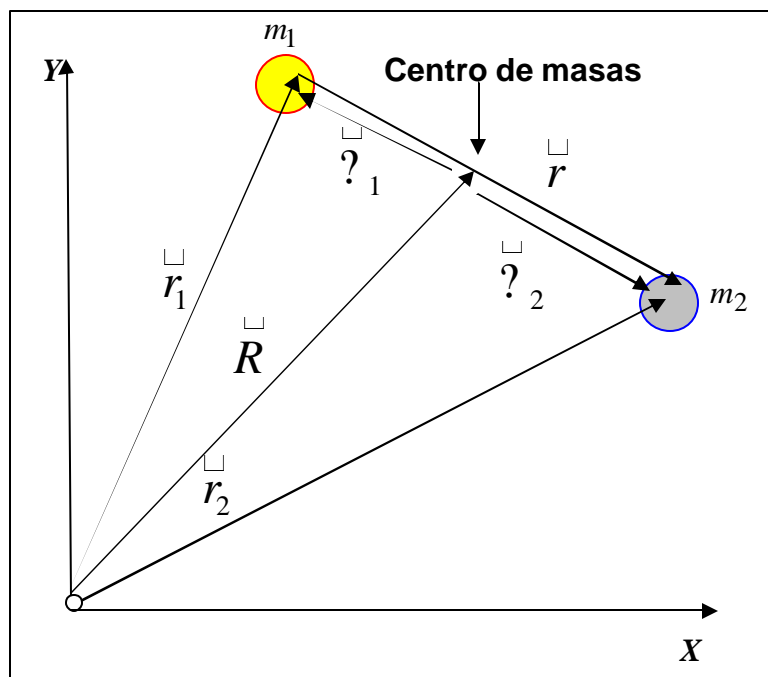
$$\vec{R} = 0 \quad (45)$$

Con esto, las ecuaciones (44.3) y (44.4) se transforman en

$$\ddot{r}_1 = \ddot{r}_1 \quad (46.1)$$

$$\ddot{r}_2 = \ddot{r}_2 \quad (46.2)$$

Figura 9. Movimiento con respecto al centro de masas.



Fuente: Adaptado de GOLDSTEIN, Herbert. p. 72

y por definición de vector posición del centro de masas ecuación (38), se tiene

$$m_2 \vec{r}_2 + m_1 \vec{r}_1 = 0 \quad (47)$$

Finalmente las ecuaciones (46.1) y (46.2) se convierten en:

$$\ddot{r}_1 = \ddot{r}_1 - \frac{m_2}{m_1} \ddot{r}_2 \quad (48.1)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \ddot{\mathbf{r}}_1 \quad (48.2)$$

Estas ecuaciones permiten encontrar cualquiera de los vectores posición uno en función del otro. De las ecuaciones (46.1), (46.2) y (27)

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 \quad (49)$$

Sumando en ambos lados de la ecuación (49) el término $\ddot{\mathbf{r}}_2$ se tiene

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \ddot{\mathbf{r}}_1 \quad (50.1)$$

Ahora se suma el término $\ddot{\mathbf{r}}_1$ en ambos lados de la ecuación (49) para obtener

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \ddot{\mathbf{r}}_2 \quad (50.2)$$

Con las ecuaciones (34), (35), (50.1) y (50.2) se tiene

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = -G \frac{m_2^3}{m_1 m_2} \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} \quad (51)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -G \frac{m_1^3}{m_1 m_2} \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \quad (52)$$

Se tienen aquí dos ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden, que representan seis ecuaciones diferenciales en términos de sus componentes. Si se logra resolver alguna de ellas, ejemplo para \mathbf{r}_2 , la solución para \mathbf{r}_1 queda determinada por la ecuación (49) y el movimiento de ambas partículas queda completamente especificado con respecto al centro de masas.

Otra manera de resolver el problema de los dos cuerpos con solo tres ecuaciones diferenciales es estudiar el movimiento de una de las partículas con respecto a la otra, tomando el origen en cualquiera de las dos partículas. Los astrónomos tratan de encontrar el movimiento de un planeta con respecto al Sol, o el de un satélite con respecto a su planeta y no con respecto a un punto arbitrario ubicado en el espacio.

Sumando las ecuaciones (34) y (35) se tiene

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (53)$$

donde $M = m_1 + m_2$. Definiendo

$$GM = \mu \quad (54)$$

Se obtiene finalmente

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (55)$$

Esta ecuación diferencial vectorial de segundo orden describe el movimiento de m_2 con respecto a un origen en m_1 . La ecuación equivale a tres ecuaciones diferenciales también de segundo orden en sus componentes, que requiere de seis constantes arbitrarias de integración para su completa solución. Encontrar, analizar e interpretar esas seis constantes de integración, es el fundamento central para la solución del problema de los dos cuerpos⁽²⁰⁾.

3.3.1 Momentum Angular por Unidad de Masa. De la ecuación (55) se tiene

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = 0 \quad (56)$$

Al integrar la ecuación (56) resulta el vector constante

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{l} = \frac{\mathbf{L}}{m} \quad (57)$$

\mathbf{l} es llamado momento angular por unidad de masa y es un vector perpendicular al plano formado por \mathbf{r} y $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, por tanto la única forma de que \mathbf{l} sea un invariante para todo tiempo, es que el movimiento de m_2 con respecto a m_1 este contenido en un plano formado por los vectores \mathbf{r} y $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$.

⁽²⁰⁾ DANBY, Op. cit., p. 127.

Como el movimiento de m_2 con respecto a m_1 , sea cual sea debe estar contenido en un plano, se estudia el movimiento utilizando solo dos coordenadas. Se considera el sistema de coordenadas polares (r, θ) para encontrar las constantes de movimiento y así poder resolver el problema. Es fácil demostrar que la ecuación (55) en coordenadas polares tiene la forma

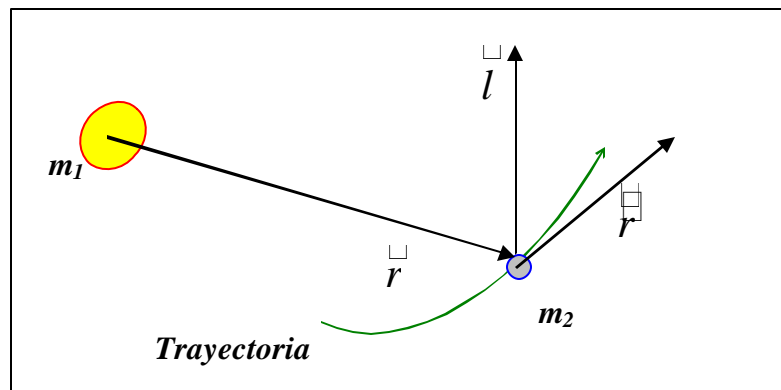
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_2 \dot{r}^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(2 E \frac{1}{r} \right) + \frac{L^2}{2 m_2 r^2} = \text{constante} \quad (58)$$

Comparando los términos de ambos lados de la ecuación (58) se obtiene

$$\frac{1}{2} m_2 \dot{r}^2 = \frac{L^2}{2 m_2 r^2} \quad (59)$$

$$2 E \frac{1}{r} + \frac{L^2}{2 m_2 r^2} = 0 \quad (60)$$

Figura 10. Momento angular constante, el movimiento de m_2 con respecto a m_1 esta contenido en un plano.



Fuente: BOULET, Dan L. p. 87

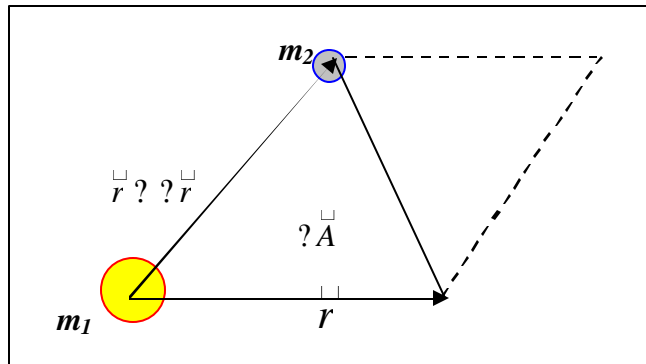
Resolviendo la ecuación (60) se obtiene la siguiente constante de integración:

$$C_1 = r^2 \dot{\theta} \quad (61)$$

Para encontrar el valor de C_1 , se considera la Figura 11. Donde \vec{r} es el vector posición para un tiempo dado, después de un instante de tiempo Δt el vector \vec{r} se ha incrementado hasta $\vec{r} + \Delta \vec{r}$. El diferencial de área ΔA cubierto por \vec{r} y $\vec{r} + \Delta \vec{r}$ de acuerdo con la interpretación geométrica del producto vectorial es

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} \quad (62)$$

Figura 11. Relación área-tiempo



Al tomar el límite cuando Δt tiende a cero se tiene

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} l \dot{\theta} \quad (63)$$

por lo tanto

$$dA = \frac{1}{2} l d\theta \quad (64)$$

La expresión (64) es la forma matemática de la segunda ley de Kepler, el cuerpo de masa m_2 barre un diferencial de área que es proporcional al diferencial de tiempo; es decir el cuerpo barre áreas iguales en tiempos iguales. Ahora se calcula el área generada por el movimiento del cuerpo de masa m_2 al barrer un cierto ángulo $d\theta$, Figura 12. El diferencial de área dA es

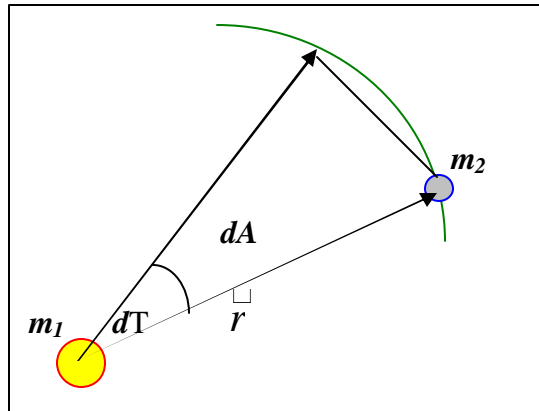
$$dA = \frac{r^2 d\theta}{2} \quad (65)$$

Comparando las ecuaciones (64) y (65) se deduce que

$$l = r^2 \dot{\theta} \quad (66)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (61) se puede concluir que la constante de integración $C_1 = l$. El vector \vec{l} provee las tres primeras constantes necesarias para

Figura 12. Relación área-ángulo



Fuente: Adaptado de la página en Internet:
http://www.geocities.com/lemagicien_2000/mathpage/calcorbresp/calcorbresp.html#t1

la solución del problema de los dos cuerpos y es una cantidad que se conserva en el movimiento.

3.3.2 Vector Laplace-Runge-Lenz. Ahora realizando el producto vectorial de los vectores \hat{r} y \hat{l} se obtiene

$$\hat{r} \times \hat{l} = \frac{1}{r^2} (r \times \dot{r}) \quad (67)$$

Al considerar las siguientes expresiones

$$\frac{d}{dt} (r \times \dot{l}) = \dot{r} \times \dot{l} \quad (68)$$

$$r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{r}}{r} \right) = r \times \dot{r} \quad (69)$$

la ecuación (67) se transforma en

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{r}}{r} \times \dot{l} \right) = \frac{\dot{r}}{r} \times \dot{l} \quad (70)$$

Cuya integral es inmediata, con lo cual resulta un vector constante que se define así

$$\vec{p} \perp \vec{r} \perp \vec{l} \perp \frac{\vec{r}}{r} \quad (71)$$

\vec{p} es conocido como el vector Laplace-Runge-Lenz⁽²¹⁾, este vector provee dos constantes más para la solución del problema. Los vectores \vec{p} y \vec{l} son ortogonales, por lo tanto

$$\vec{p} \cdot \vec{l} = 0 \quad (72)$$

Ahora

$$\vec{p} \cdot \vec{r} = l^2 \cos \theta \quad (73)$$

entonces

$$\frac{l^2}{r} = \frac{p}{a} \cos \theta \quad (74)$$

Despejando r de la ecuación (74) se llega finalmente a

$$r = \frac{l^2}{a(1 - e^2) - p \cos \theta} \quad (75)$$

Comparando la ecuación (75) con la ecuación (21), siendo p el *semilatus rectum* se mira que

$$e = \frac{p}{a} \quad (76.1)$$

y

$$\frac{l^2}{a} = a(1 - e^2) = p \quad (76.2)$$

⁽²¹⁾ Tomado de la página en Internet:
<http://scienceworld.wolfram.com/physics/Two-BodyProblem.html>

3.3.3 Conservación de la Energía para el Problema de los Dos cuerpos. La última constante de movimiento se obtiene mediante el siguiente análisis

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \dot{\theta} \right) = 0 \quad (77)$$

como $r \neq 0$ se debe cumplir que

$$2r\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0 \quad (78)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (66) y usando la condición anterior, la ecuación (58) se transforma en

$$\ddot{r} - \frac{l^2}{r^3} + \frac{\gamma}{r^2} = 0 \quad (79)$$

Con las siguientes identidades:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{r}^2 \right) = \dot{r} \ddot{r} \quad (80.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{l^2}{2r^2} \right) = -\frac{l^2}{r^3} \dot{r} \quad (80.2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma}{r} \right) = -\frac{\gamma}{r^2} \dot{r} \quad (80.3)$$

la ecuación (79) se transforma en:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2r} + \frac{m\gamma}{r} \right) = 0 \quad (81)$$

Definiendo la energía orbital como la suma de la energía cinética y la energía potencial gravitacional

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2r} + \frac{m\gamma}{r} \quad (82)$$

donde m es la masa reducida⁽²²⁾ del sistema, definida por

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (83)$$

se encuentra que

$$\frac{d}{dt} \gamma E = 0 \quad (84)$$

Por lo tanto E se conserva y es la última constante de movimiento necesaria para resolver el problema de los dos cuerpos.

3.4 ECUACIÓN DE ÓRBITA

Se debe resolver ahora la ecuación (59), para lo cual se multiplica por $2r^2$ y se tiene en cuenta la ecuación (66) expresada en términos de l .

$$2 \frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{l^2}{r^3} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{1}{r^2} = 2C_2 \quad (85)$$

Considerando las identidades (80.1), (80.2), (80.3) e integrando con respecto al tiempo se obtiene la solución

$$\frac{dr}{dt} \frac{1}{r^2} + \frac{l^2}{r^2} + \frac{2}{r} = 2C_2 \quad (86)$$

C_2 es una constante de integración. Con el cambio de variable

$$\frac{dr}{dt} = \frac{l}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \quad (87)$$

la ecuación (86) se expresa en términos de la variable angular θ

⁽²²⁾ GOLDSTEIN, Herbert. Mecánica Clásica. Universidad de Harvard. Segunda edición española. 1972. p. 73.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{l}{r} \dot{\theta} \right) = \sqrt{Q^2 - \frac{l^2}{r^2} \dot{\theta}^2} \quad (88)$$

siendo

$$Q^2 = \frac{2C_2}{l^2} \quad (89)$$

Ahora realizando el siguiente cambio de variable

$$\theta = \frac{l}{r} \quad (90.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{l}{r} \dot{\theta} \right) = \frac{d}{dt} \quad (90.2)$$

la ecuación (88) se transforma en

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \quad (91)$$

integrando la ecuación (91) se obtiene la siguiente solución

$$\theta = Q \cos(\theta) \quad (92)$$

Donde θ es una nueva constante de integración. Finalmente reemplazando los valores de Q y θ dados por las ecuaciones (89) y (90.1) se llega a

$$r = \frac{l^2}{1 - \sqrt{1 - \frac{2l^2 C_2}{Q^2}} \cos(\theta)} \quad (93)$$

Esta ecuación del tipo $r = r(\theta)$ se conoce como **ecuación de órbita** y es la generalización de la primera ley de Kepler, se debe recordar que el movimiento de m_2 con respecto a m_1 no solo describe orbitas elípticas, puede también efectuar orbitas parabólicas e hiperbólicas. Si se conoce los valores de las constantes l , C_2 y θ se puede conocer cualquiera de las posibles trayectorias. La ecuación (93) representa la ecuación generalizada de una cónica en coordenadas polares.

Ahora, la ecuación (21) es la ecuación de una elipse en coordenadas polares con origen en uno de los focos, comparándola con la ecuación (93) se encuentra que

$$\frac{l^2}{p} = a(1 - e^2) \quad (94.1)$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{2l^2 C_2}{p^2}} \quad (94.2)$$

$$e \geq 0 \quad (94.3)$$

De la ecuación (94.2) es fácil deducir que para una trayectoria elíptica

$$C_2 = \frac{p^2}{2a} \quad (95)$$

Para continuar con el estudio de las trayectorias se debe recordar las propiedades geométricas de la parábola y la hipérbola.

3.5 LA PARABOLA

La parábola⁽²³⁾ es el conjunto de los puntos en un plano equidistante de un punto fijo llamado foco y una línea recta fija llamada directriz. En otras palabras, para una parábola se cumple que (Figura 13):

$$PF = PR \quad (96)$$

q es la menor distancia existente entre el foco y la trayectoria, conocida como *distancia pericéntrica*. Ahora

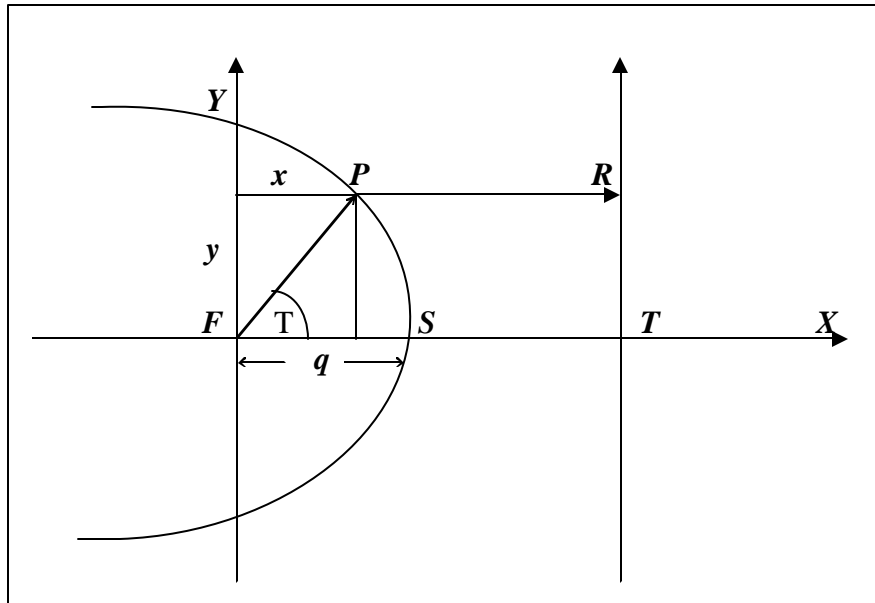
$$FS = ST \quad (97)$$

entonces

$$FT = 2q \quad (98.1)$$

⁽²³⁾ LEITHOLD, Louis. Cálculo con Geometría Analítica. 2nd. University de Southern California. p. 44

Figura 13. Orbita Parabólica



El foco F se encuentra en el origen de coordenadas, por lo tanto la ecuación de la directriz es

$$x = 2q \quad (98.2)$$

Las coordenadas del punto P son (x, y) , las de R son $(2q, y)$, la distancia

$$PR = 2q - x \quad (99)$$

Ahora por la definición de parábola se tiene que

$$PF^2 = PR^2 \quad (100)$$

Con lo cual y utilizando las ecuaciones de transformación entre coordenadas cartesianas y polares se llega finalmente a

$$r = \frac{2q}{1 - \cos \theta} \quad (101)$$

Esta es la ecuación de una parábola en coordenadas polares con el origen en uno de los focos. Comparando esta ecuación con la ecuación (93) se deduce que

$$\frac{l^2}{q} = 2q \quad (102.1)$$

$$r = \frac{a}{1 - e \cos \theta} \quad (102.2)$$

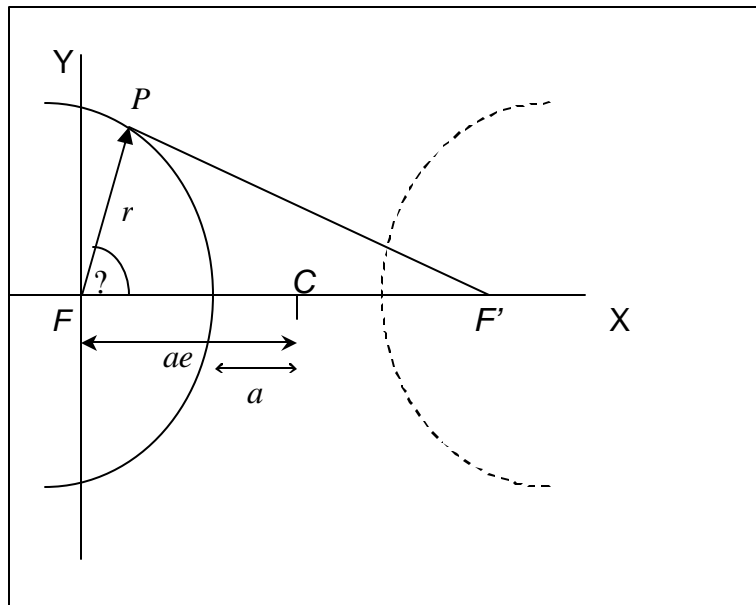
$$C_2 = 0 \quad (102.3)$$

3.6 LA HIPÉRBOLA

Una Hipérbola es el lugar de los puntos tales que la diferencia de distancias hasta dos puntos fijos llamados focos es constante.

$$PF - PF' = 2a \quad (103)$$

Figura 14. Orbita Hiperbólica.



Para obtener la ecuación de una Hipérbola en coordenadas polares se realizan los mismos pasos utilizados para la órbita Elíptica.

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 - e \cos \theta} \quad (104)$$

Comparando la ecuación (104) con la ecuación (93) se obtiene

$$\frac{l^2}{a^2} = a(e^2 - 1) \quad (105.1)$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{2l^2 C_2}{\gamma^2}} \quad (105.2)$$

$$\gamma > 0 \quad (105.3)$$

$$C_2 = \frac{\gamma^2}{2a} \quad (105.4)$$

Ahora se necesita identificar físicamente la constante C_2 , para ello se utiliza la ecuación (66) en términos de \dot{r} y de esta manera expresar la ecuación (86) como

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{2\gamma^2}{r} - 2C_2 \quad (106)$$

El lado izquierdo de esta ecuación corresponde al cuadrado de la velocidad en coordenadas polares, con lo cual se llega a

$$C_2 = \frac{E^2}{2} - \frac{\gamma^2}{r} \quad (107)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación (107) por la masa reducida m se obtiene

$$C_2 = \frac{E}{m} \quad (108)$$

Un resultado interesante es analizar el valor de la energía para cada una de las trayectorias, si reemplazamos la ecuación (95) en la ecuación (108) se obtiene para orbitas elípticas

$$E = -\frac{Gm_1 m_2}{2a} \quad (109)$$

De igual manera encontramos que para orbitas parabólicas e hiperbólicas se tiene respectivamente

$$E = 0 \quad (110)$$

$$E = \frac{Gm_1 m_2}{2a} \quad (111)$$

3.7 ECUACIÓN VIS-VIVA

La velocidad de un cuerpo celeste (planeta, satélite o cometa) en cualquier punto de su órbita, se puede obtener como consecuencia de la conservación de la energía. Si se reemplaza la ecuación (95) en la ecuación (107) es fácil mirar que para una órbita elíptica se cumple que

$$E^2 = V^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (112)$$

Esta expresión es de gran utilidad en Mecánica Celeste y se conoce como ecuación Vis-Viva. Siendo e la excentricidad de la órbita elíptica, se puede calcular las velocidades en los puntos de ápsides, perihelio y afelio

$$V_P^2 = \frac{2(1-e)}{a(1+e)} \quad (113.1)$$

$$V_A^2 = \frac{2(1-e)}{a(1-e)} \quad (113.2)$$

De igual manera para una órbita parabólica ($E = 0$) e hiperbólica, se tiene

$$V^2 = \frac{2}{r} \quad (114)$$

$$V^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \quad (115)$$

Ahora, para órbitas elípticas, existe una relación entre el semieje mayor a y el período T empleado por el cuerpo de masa m_2 en completar una revolución alrededor de m_1 . Se integra la expresión matemática de la segunda ley de Kepler dada por la ecuación (64), desde un área cero ($t = 0$) hasta que el cuerpo cubra el área total de la elipse A_t lo cual se consigue al completar un período T

$$A_t = \pi ab = \frac{\pi}{2} T \quad (116)$$

Reemplazando las ecuaciones (17) y (94.1) en la ecuación (116) da

$$T^2 \propto \frac{4\pi^2 a^3}{\mu} \quad (117)$$

Esta es la forma matemática de la tercera ley de Kepler, el cuadrado del periodo de revolución es proporcional al cubo del semieje mayor. Esta ecuación se puede expresar utilizando el concepto de movimiento medio. Se conoce como movimiento medio a la expresión

$$n \propto 2\pi/T \quad (118)$$

en unidades de *radianes / día*. Reemplazando el valor de T se tiene

$$n \propto n^2 a^3 \quad (119)$$

Haciendo referencia nuevamente a la Figura 7, se mira que la abscisa de P y P' es

$$x' \propto x \propto a \cos E \quad (120)$$

La ordenada de P' es

$$y' \propto a \sin E \quad (121)$$

Reemplazando la abscisa de P en la ecuación (15) inmediatamente se encuentra la ordenada de P

$$y \propto b \sin E \quad (122)$$

entonces el radio vector r se puede expresar como

$$r \propto a(1 - e \cos E) \quad (123)$$

La ecuación (21) permite encontrar el radio vector r en términos de la anomalía verdadera θ . Se necesita entonces una relación que exprese el radio vector r en función del tiempo t . Reemplazando el valor de C_2 encontrado para una trayectoria elíptica en la ecuación (86) se llega a

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \propto \frac{2\mu}{r} - \frac{l^2}{r^2} - \frac{\mu}{a} \quad (124)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (76.2) y (119) la ecuación (124) se transforma en

$$r dr + na \sqrt{a^2 e^2 - (r - a)^2} dt \quad (125)$$

De la ecuación (123) se puede obtener

$$r - a = ea \cos E \quad (126.1)$$

$$dr = -ea \sin E dE \quad (126.2)$$

Por lo tanto la ecuación la ecuación (125) se convierte en

$$n dt = (1 - e \cos E) dE \quad (127)$$

Integrando la ecuación (127) para el paso por el perihelio donde $E = 0$, $t = t_0$ y para un valor de E dado en un tiempo t , se obtiene

$$n(t - t_0) = E - e \sin E \quad (128)$$

La ecuación (128) es la ecuación de Kepler, que es una de las expresiones famosas de la astronomía dinámica. Esta puede escribirse en la forma

$$M = E - e \sin E \quad (129)$$

Donde M es la anomalía media definida por

$$M = n(t - t_0) \quad (130)$$

La ecuación (66) permite calcular la anomalía verdadera θ en función del tiempo t ; recordando que para los distintos tipos de orbitas que pueden seguir los cometas, los valores de l y r son diferentes. Cuando un cometa de largo periodo, procedente de la nube de Oort entra en el sistema solar, se caracteriza porque sus orbitas muy excéntricas ($e \approx 1$); con lo cual es difícil determinar con gran exactitud, el periodo ó el semieje mayor a de la orbita. Por lo tanto es importante comprender la dinámica de una orbita parabólica, trayectoria que parece seguir el cometa en este caso. Hay que recordar que para órbitas parabólicas la excentricidad es igual a la unidad. La ecuación en coordenadas polares y el momentum angular por unidad de masa para una parábola, están dadas por las ecuaciones (101) y (102.1); reemplazando estas ecuaciones en la ecuación (66) se obtiene

$$\sqrt{\frac{2\mu}{q^3}} dt = \sec^4 \theta \frac{d\theta}{2} \quad (131)$$

que al integrar entre los límites

$$t \geq t_0 \text{ cuando } \theta \geq 0$$

y cualquier tiempo t , el cual tiene un valor correspondiente para θ , se llega finalmente a

$$\tan^3 \frac{\theta}{2} - 3 \tan \frac{\theta}{2} = 3 \sqrt{\frac{a}{2q^3}} (t - t_0) \quad (132)$$

t_0 es la constante final de integración, es el tiempo en el que ocurre el máximo acercamiento del cometa con respecto al Sol, ósea el paso por el perihelio.

De la ecuación de una parábola en coordenadas polares, ecuación (101), se tiene

$$2q = r(1 - \cos \theta) \quad (133)$$

derivando con respecto al tiempo y reemplazando la ecuación (102.1) se llega a

$$\frac{\dot{r}}{\sqrt{2q}} = \sqrt{2q} \tan \frac{\theta}{2} \quad (134)$$

si

$$D = \frac{\dot{r}}{\sqrt{2q}} \quad (135)$$

entonces

$$D = \sqrt{2q} \tan \frac{\theta}{2} \quad (136)$$

El parámetro D es conocido como anomalía excéntrica parabólica. Sustituyendo la ecuación (136) en la ecuación (132) se obtiene finalmente la siguiente expresión

$$\sqrt{2q} (t - t_0) = qD = \frac{D^3}{6} \quad (137)$$

La ecuación anterior, es una ecuación de tercer grado que posee una sola raíz real y dos raíces imaginarias, por lo cual es de gran ayuda en los cálculos astronómicos. La relación (137) se conoce como ecuación de Barker y es la forma parabólica de las ecuaciones de Kepler.

Para una órbita hiperbólica el procedimiento es prácticamente similar al realizado en el caso de la trayectoria elíptica; con lo cual es fácil llegar a

$$r = a(e \cosh F - 1) \quad (138)$$

F es una variable que se encuentra de la solución de la ecuación trascendental

$$e \sinh F - F = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (t - t_0) \quad (139)$$

la anterior es la ecuación de Kepler para una órbita hiperbólica; F juega un papel similar a la variable E de la trayectoria elíptica. Para relacionar la anomalía verdadera θ con F se utiliza la siguiente expresión

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \tanh \frac{F}{2} \quad (140)$$

En la Tabla 2 se encuentran algunos de los parámetros característicos de las órbitas elípticas, parabólicas e hiperbólicas.

Tabla 2. Parámetros principales para órbitas elípticas, parabólicas e hiperbólicas.

Tipo de órbita	Posición	Momentum angular por unidad de masa	Energía orbital	Velocidad
Elíptica	$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta}$	$l = \sqrt{\mu p}$	$E = -\frac{Gm_1 m_2}{2a}$	$V^2 = \frac{\mu}{r} \left(2 - \frac{1}{a} \right)$
Parabólica	$r = \frac{2q}{1 - e \cos \theta}$	$l = \sqrt{2\mu q}$	$E = 0$	$V^2 = \frac{2\mu}{r}$
Hiperbólica	$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 - e \cos \theta}$	$l = \sqrt{\mu a(e^2 - 1)}$	$E = \frac{Gm_1 m_2}{2a}$	$V^2 = \frac{\mu}{r} \left(2 + \frac{1}{a} \right)$

3.8 ELEMENTOS ORBITALES

Generalmente los objetos en el espacio se especifican con respecto al plano de la eclíptica o al sistema de coordenadas ecuatoriales. En el primero, la órbita de la

Tierra alrededor del Sol, es decir, el plano de la eclíptica es el sistema de referencia, mientras que en el segundo es el plano ecuatorial terrestre. La posición de un objeto celeste se determina por la *longitud* y la *latitud* en el plano de la eclíptica y por la *ascensión recta* α y la *declinación* δ en el sistema ecuatorial. La ascensión recta es medida desde el *punto Vernal* γ o equinoccio de primavera, que es uno de los puntos donde el plano de la eclíptica corta el ecuador celeste. La declinación es la distancia angular de norte a sur del ecuador celeste. La longitud eclíptica λ es el ángulo medido a partir del punto Vernal en dirección contraria a las manecillas del reloj y la latitud eclíptica β es el ángulo medido sobre la semicircunferencia que pasa por los polos eclípticos y el astro en cuestión, comienza a medirse desde la eclíptica hasta el astro correspondiente. La transformación entre los dos sistemas de coordenadas mencionados se realiza teniendo en cuenta las siguientes ecuaciones trigonométricas.

De ecuatoriales a eclípticas

$$\tan \lambda = \frac{\sin \alpha \cos \delta}{\cos \alpha} \quad (141)$$

$$\sin \beta = \sin \alpha \sin \delta \quad (142)$$

de eclípticas a ecuatoriales

$$\tan \alpha = \frac{\sin \lambda \cos \beta}{\cos \lambda} \quad (143)$$

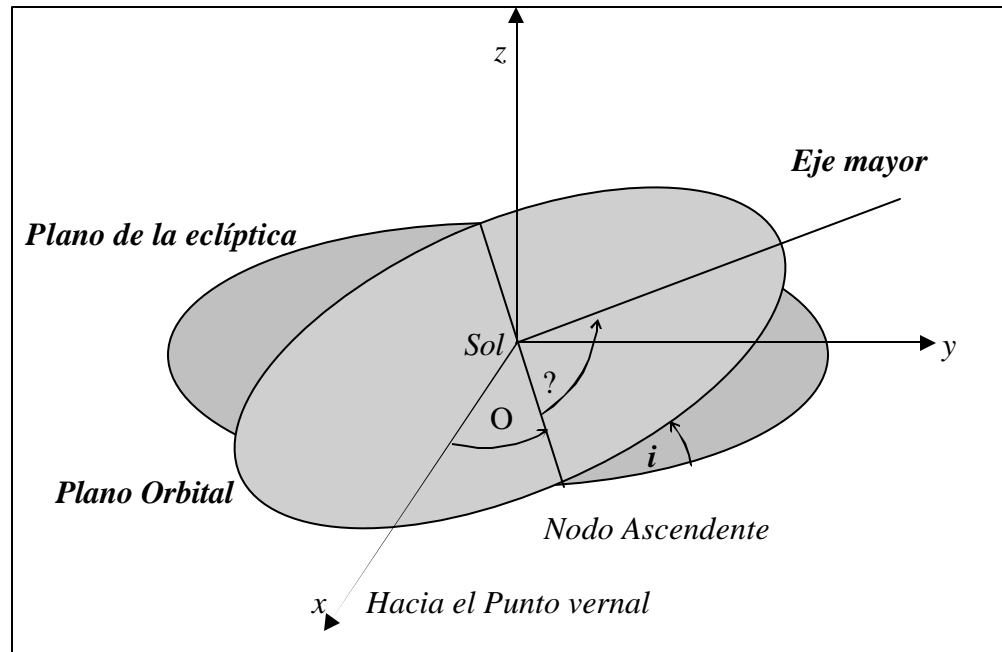
$$\sin \delta = \sin \beta \cos \lambda \quad (144)$$

donde e conocido como oblicuidad de la eclíptica es el ángulo que se forma entre los planos ecuatorial y eclíptico. La posición de un cometa en el espacio generalmente se especifica en el sistema de coordenadas eclípticas. Para definir completamente una órbita en el espacio se requieren 5 parámetros, conocidos como elementos orbitales (Figura 15). Estos son:

- ? a : semieje mayor.
- ? e : excentricidad.
- ? i : ángulo entre el plano orbital y el plano de la eclíptica.
- ? Ω : longitud del nodo ascendente. Este es el ángulo medido desde el *punto Vernal* γ a lo largo del plano de la eclíptica hasta el punto de intersección del plano orbital con el plano de la eclíptica.

? ω : longitud al perihelio, es el ángulo medido desde el nodo ascendente hasta el perihelio.

Figura 15. Parámetros orbitales requeridos para especificar una órbita



Fuente: KRISHNA S, K. S. p. 23.

Los dos primeros parámetros especifican el tamaño y la forma de la órbita, mientras que los otros tres definen la orientación de la órbita con respecto al plano de la eclíptica. El sexto elemento es el *parámetro del tiempo* que define la posición del cuerpo en su órbita en cualquier instante. Se toma el tiempo de paso por el perihelio t_0 . Este da un tiempo de referencia para poder situar el cuerpo en su órbita. Por consiguiente, las cantidades a , e , t_0 y los ángulos i , ω , θ definen la posición del cuerpo y su órbita completamente en cualquier tiempo dado.

4. COLAS COMETARIAS

En el presente capítulo se desarrolla el objetivo principal de este trabajo, se realiza un estudio de los dos tipos de colas más importantes presentes en los cometas, el cual servirá de base en la elaboración de un modelo que permite reproducir las colas cometarias.

Existen dos tipos de colas cometarias, cola de plasma (tipo I), cola de polvo (tipo II) y en cualquier cometa en particular pueden estar presentes uno o ambos tipos. La única similitud para ambos tipos es que, el centro o eje de la cola esta en el plano orbital del cometa.

4.1 COLA DE POLVO

Las colas de polvo (tipo II) son más cortas ($\sim 10^7$ Km) y más anchas que las colas de plasma, son curvadas y se retrasan entre el radio vector extendido del Sol y la trayectoria orbital del cometa. Raramente muestran detalle estructural. Debido a la luz del Sol reflejada por las colas de polvo se observa un espectro continuo, reafirmando el concepto de que están compuestas por pequeñas partículas de "polvo". Bessel en 1830 sugirió que estas partículas son repelidas hacia la cola por la presión de radiación solar, la fuerza de radiación es en magnitud aproximadamente igual a la gravedad solar. Bredikhin refinó el concepto cerca de 1900, ideas que se formularon firmemente por Finson y Probst en los años 1950. Por lo tanto las partículas de polvo emitidas por el núcleo están sujetas a dos fuerzas opuestas. La presión de radiación solar que actúa sobre las partículas de polvo intenta alejarlas del Sol, mientras la fuerza de gravedad solar las atrae.

Puesto que la fuerza de presión de radiación se dirige radialmente al exterior y varía como r^{-2} (r es la distancia desde el Sol), como lo hace la gravedad solar, se puede restar la fuerza de radiación de la fuerza de gravedad y considerar que las partículas están sujetas a un pequeño campo gravitacional "eficaz". Este hecho permite el uso de la mecánica orbital de Kepler para determinar el movimiento de las partículas. La fuerza de presión de radiación es a menudo medida por la razón de la fuerza de radiación a la de la gravedad, definida por la cantidad

$$(1?) ? \frac{F_{rad}}{F_{grav}} \quad (145)$$

La fuerza de radiación es proporcional a la intensidad solar multiplicada por el área transversal de la partícula, mientras la fuerza de gravedad es proporcional a la masa de la partícula. Se asume que las partículas del polvo son esféricas, de densidad de masa ρ_p , de diámetro d y que la naturaleza de la luz dispersada es independiente del tamaño de la partícula, entonces

$$F_{rad} = \frac{d^2 Q_{pr}}{4c} \frac{E_S}{4r^2} \quad (146.1)$$

$$F_{grav} = \frac{GM_\odot}{r^2} \frac{\rho_p d^3}{6} \quad (146.2)$$

Aquí E_S , es la radiación solar total media (3.93×10^{26} W), c es la velocidad de luz, G la constante gravitacional universal y M_\odot la masa solar. La cantidad Q_{pr} es el factor de eficiencia de dispersión de la presión de radiación; si las partículas son comparables en tamaño con la longitud de onda, Q_{pr} se toma como constante del orden de la unidad. El valor exacto de Q_{pr} depende de la naturaleza del medio de dispersión, es decir, si es un dieléctrico o un medio absorbente. Para un dieléctrico, Q_{pr} puede ser tan bajo como $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{2}$, mientras para un medio absorbente, para los tamaños de las partículas y longitudes de onda de interés, $Q_{pr} \sim 1 - 2$. El factor Q_{pr} puede expresarse como:

$$Q_{pr} = Q_{abs} + Q_{sca} (1 - \cos \theta) \quad (146.3)$$

Donde θ es el ángulo de dispersión; Q_{abs} y Q_{sca} son los factores de eficiencia para la absorción y dispersión.

Bajo las suposiciones dadas y reemplazando los valores de las constantes conocidas la ecuación (145) se convierte en

$$(1 - \cos \theta) = C (\rho_p d)^{21} \quad (147)$$

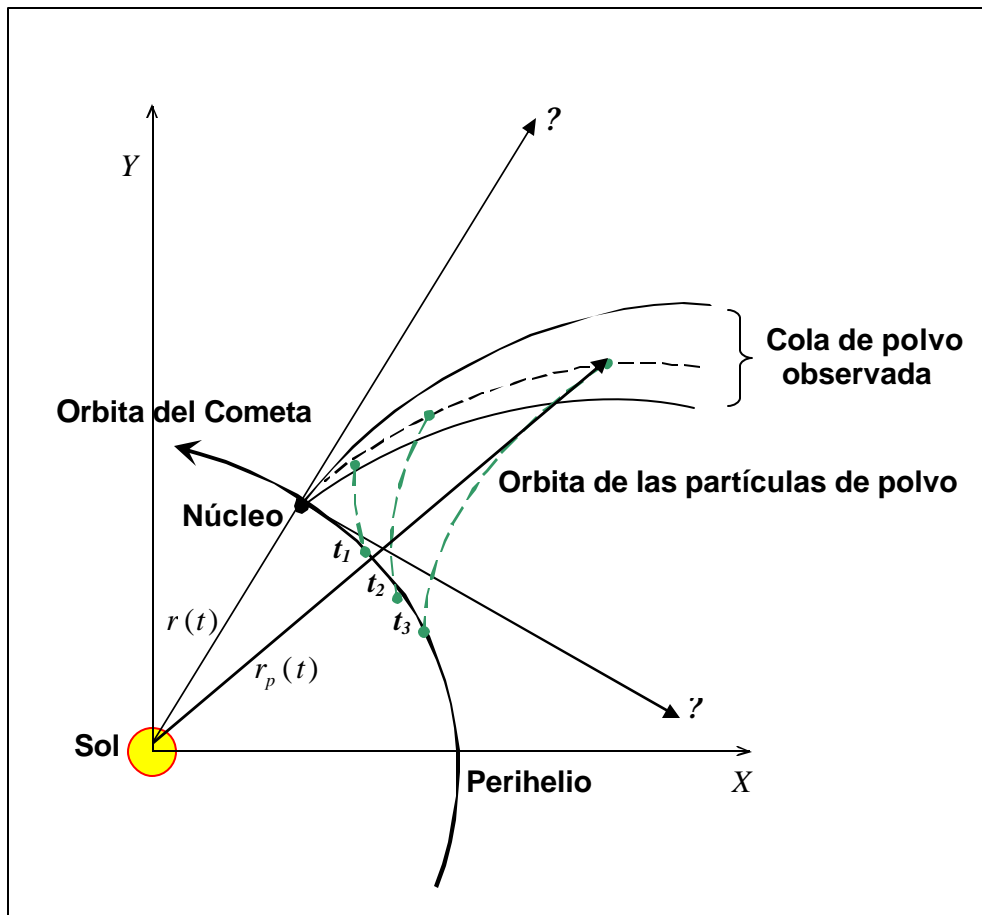
donde

$$C = \frac{3Q_{pr} E_S}{8cGM_\odot} = 1.19 \times 10^{24} Q_{pr} \frac{g}{cm^2} \quad (148)$$

Así la presión de radiación es más importante para las partículas más pequeñas. Esta fuerza repulsiva tiene un efecto despreciable sobre el movimiento del núcleo del cometa.

4.1.1 Coordenadas Cometocéntricas. Para describir la forma de las colas cometarias, es conveniente usar un nuevo sistema de coordenadas conocido como sistema de coordenadas cometocéntricas (ρ, ϕ) (Figura 16).

Figura 16. Sistema de coordenadas Cometocéntricas (ρ, ϕ).



Fuente: Adaptado de FINSON, Michael L. and PROBSTEIN, Roland F. p. 330.

- ? El origen de este sistema se mueve con el núcleo a lo largo de la órbita del cometa.
- ? Las coordenadas ρ y ϕ están en el plano orbital del cometa.

- ? El eje ρ tiene como origen al Sol y se extiende a lo largo del radio vector a través del núcleo del cometa.
- ? El eje θ es perpendicular a ρ , esta en dirección opuesta a la trayectoria del cometa a lo largo de su órbita, por lo tanto su movimiento estará en la coordenada negativa de θ .
- ? La tercera coordenada z mide la distancia desde el plano orbital y es perpendicular a dicho plano.

La posición de una partícula en la cola es calculada en el sistema de coordenadas cometocéntricas (ρ, θ) y luego convertida al sistema heliocéntrico (X, Y) . En la Figura 16, $r(t)$ y $\theta(t)$ son las coordenadas polares heliocéntricas del núcleo del cometa y $r_p(t)$ y $\theta_p(t)$ son las de la partícula de polvo. El ángulo θ se toma cero en el perihelio de la órbita del cometa y aumenta en la dirección del movimiento del cometa. De la geometría de la Figura 16, la posición deseada de la partícula de polvo relativa al núcleo del cometa en el tiempo de observación t_c es

$$\rho = r_p(t_c) \cos \theta_p(t_c) + r(t_c) \tag{149.1}$$

$$\theta = \theta_p(t_c) \sin \theta_p(t_c) \tag{149.2}$$

4.1.2 Syndynames y Synchrones. Para comprender la formación de las colas de polvo es conveniente usar el concepto de Syndyname (o Syndyne) y Synchrones, los cuales fueron introducidos por Bredikhin. La naturaleza de la órbita de las partículas de polvo es dada por el valor de $(1 - \beta)$. Existen dos casos de interés que deben ser considerados. Primeramente, se asume que partículas del mismo tamaño (Físicamente esto significa que las partículas de polvo tienen valores similares de $(1 - \beta)$ y por lo tanto están sujetas a la misma fuerza repulsiva) son emitidas continuamente desde el núcleo con velocidad relativa cero, en tiempos iniciales τ diferentes a lo largo de la órbita del cometa. Debido a la naturaleza repulsiva de la presión de radiación, estas órbitas serán generalmente hiperbólicas. El lugar en el plano (ρ, θ) de las posiciones de estas trayectorias en el tiempo de observación t_c es llamado un Syndyname o Syndyne, denotando así las partículas eyectadas desde el núcleo con velocidad relativa cero en diferentes tiempos y sujetas a la misma fuerza repulsiva. Se debe señalar que el tiempo inicial τ es cero en el núcleo ($\rho = 0$) y aumenta a medida que la distancia desde el núcleo crece a lo largo del lugar.

En el otro caso se considera que todas las partículas de polvo son emitidas desde el núcleo al mismo tiempo, $\tau = \text{constante}$ y $(1 - \beta)$ tiene un amplio rango de

valores, como en el caso de una explosión. Este segundo tipo de lugar en el plano (ρ, θ) es llamado un Synchrone.

La suposición de que las partículas de polvo tienen el mismo tamaño no es muy realista, las trayectorias de las partículas de polvo están relacionadas con sus tamaños como puede verse de la ecuación (147). Las partículas de tamaño más pequeñas deberían haberse movido más rápido comparadas con aquellas partículas de tamaños más grandes. En una situación real, generalmente la velocidad inicial de las partículas de polvo no es cero, el núcleo emite partículas de polvo uniformemente en todas las direcciones con una velocidad v_i , la cola resultante se centrará sobre el Synchrone para el cual la velocidad de emisión relativa al núcleo es cero y el ancho de la cola para cualquier sección transversal será $2v_i r$. A una distancia dada del núcleo, r puede determinarse de la mecánica orbital si $(1 - \beta)$ es conocido y así v_i puede calcularse, típicamente $v_i \sim 1 \text{ Km s}^{-1}$.

4.1.3 Parámetros Funcionales $N_p(t)$ y $g(\rho_p d)$. Considerando solo aquellos cometas que presentan colas del tipo II, llamados cometas de polvo puro, en los cuales están involucradas únicamente las fuerzas de gravedad solar y presión de radiación. Se asume que las partículas de polvo (esféricas, de diámetro d y densidad ρ_p) se emiten desde el núcleo del cometa de una manera esencialmente continua en el tiempo y con una amplia distribución de tamaños de partículas, de modo que:

$$N_p(t) \propto (\rho_p d)^{2.1} \quad (150)$$

donde el coeficiente de proporcionalidad es independiente del tamaño de la partícula. La frecuencia con que se emiten las partículas de polvo (de todos los tamaños) desde el núcleo se denotará por $N_p(t)$, en partículas por segundo. Se asume en el modelo que la distribución de tamaños de partículas es constante a lo largo de la órbita del cometa, excepto posiblemente durante un evento inusual semejante a una explosión repentina. Es conveniente expresar la distribución de tamaños de partículas en términos del producto $(\rho_p d)$, el cual, se expresa en términos del diámetro de la partícula d si ρ_p es constante. Se representa esta distribución de tamaños de partículas por medio de la función de distribución $g(\rho_p d) d(\rho_p d)$, definida como la fracción de partículas para las cuales $(\rho_p d)$ está en el rango $(\rho_p d)$ a $(\rho_p d) + d(\rho_p d)$. Esta distribución se normaliza a la unidad por medio de la relación

$$\int_0^\infty g(\rho_p d) d(\rho_p d) = 1 \quad (151)$$

Las cantidades $\dot{N}_p(t)$ y $g(r, d)$ son consideradas como parámetros funcionales que se determinan por la comparación de cálculos hechos en el modelo con las observaciones. Ahora, es necesario conocer las velocidades con que salen las partículas de polvo del núcleo. Para comprender este proceso de emisión se asume que las partículas de polvo salen de la superficie del núcleo sin velocidad relativa y luego son aceleradas como resultado de la interacción “drag” con el gas que se expande en la cabeza del cometa (El modelo para el cálculo de la velocidad de las partículas de polvo está basado en la aproximación a la situación de un fluido constante). Se ha encontrado que del resultado de la interacción las partículas alcanzan una velocidad final a una pequeña distancia desde el núcleo (aproximadamente 20 radios del núcleo) comparada con los diámetros típicos de la cabeza. Así las velocidades de emisión desde el núcleo para los cálculos del presente modelo corresponden realmente a las velocidades finales alcanzadas por las partículas de polvo. Recientes estudios demuestran que el núcleo está rotando con un periodo del orden de 10^4 s, el cual es pequeño comparado con el tiempo empleado por los cometas en cambiar de posición orbital ($\sim 10^6$ s), por lo tanto se asume que el núcleo es calentado simétricamente y el proceso de expansión del gas es esféricamente simétrico, lo que concuerda con las observaciones. También se asume que la temperatura del gas y del polvo en la superficie del núcleo es igual y se omiten las colisiones entre partículas de polvo en la región de la cabeza. Ningún efecto de reacciones químicas o de calentamiento adicional fue considerado en la región del flujo debido a la radiación solar. Como se señaló anteriormente se ha encontrado que la velocidad final de las partículas de polvo se alcanza después de 20 radios del núcleo (20 - 100 Km), funcionalmente, esta velocidad final, aquí denotada por v_i se expresa en la forma

$$\frac{v_i}{(C_p T)^{\frac{1}{2}}} = g(M, ?) \quad (152.1)$$

donde

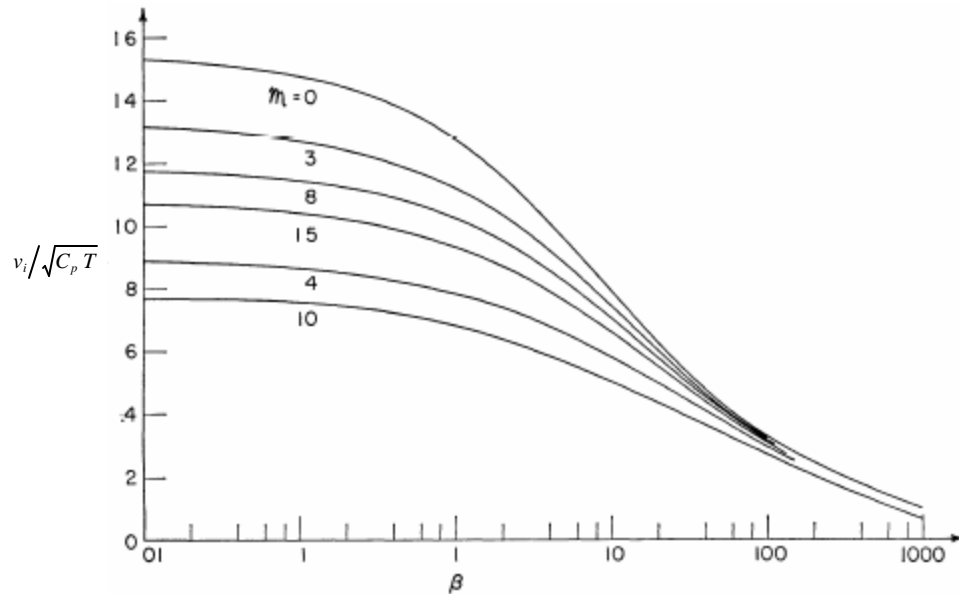
$$M = \frac{\dot{m}_p}{\dot{m}_g} \quad (152.2)$$

$$g = \frac{16}{3} \frac{? \dot{m}_p d R_0 (C_p T)^{\frac{1}{2}}}{\dot{m}_g} \quad (152.3)$$

\dot{m}_p en (g s^{-1}), es la frecuencia del flujo de masa de polvo y \dot{m}_g en (g s^{-1}) la del gas. Por consiguiente M representa la razón de masa de polvo-gas. Aquí R_0 es el radio del núcleo del cometa, T es la temperatura inicial del gas y C_p ($\text{cm}^2 \text{s}^{-2} \text{°C}^{-1}$)

el calor específico a presión constante. Los resultados expresados por la ecuación (152.1) se muestran en la Figura 17, que indica la velocidad de las partículas de polvo en función de β , esta cantidad es adimensional.

Figura 17. Velocidad de las partículas de polvo emitidas desde la región interna de la cabeza del Cometa.



Fuente: Adaptado de FINSON, Michael L. and PROBSTEIN, Roland F. p. 339.

En términos de los parámetros del presente problema, v_i se puede escribir como

$$v_i \approx v_i(\beta, d, N_d, \bar{m}_g) \quad (153)$$

donde T y R_0 son conocidos. Basándose en estos resultados, se supone que las partículas de polvo salen del núcleo de manera simétricamente esférica cuyas velocidades son dadas por los resultados mostrados en la Figura 17. También se puede mantener la proporción del flujo de masa del gas \bar{m}_g , como una variable. Este valor puede obtenerse comparando los cálculos teóricos con las observaciones.

4.1.4 Distribución de densidad de partículas de polvo en la Cola tipo II de un Cometa. Utilizando el modelo presentado en la sección anterior, se formulan ahora las ecuaciones adecuadas para calcular la distribución de densidad de polvo en la cola tipo II presente en los cometas. Como se mencionó, el modelo asume que la cola de polvo de un cometa es en cualquier momento una acumulación de

partículas con una amplia gama de tamaños, emitidas desde el núcleo en un amplio rango de tiempos⁽²⁴⁾.

Existen dos formas convenientes de calcular la densidad en la cola:

- 1) Obtener la densidad para la cola compuesta de un tamaño de partícula (de la cual el syndynome para el valor correspondiente de $(1 - \beta)$ será el eje) y luego integrar las colas como esta, sobre todos los valores de $(1 - \beta)$, o lo que es igual sobre de todos los tamaños de las partículas; este procedimiento es conocido como aproximación Syndynome.
- 2) Obtener la densidad para la cola compuesta de todas las partículas emitidas al mismo tiempo (un synchrone será el eje) y luego integrar las colas de este tipo sobre todos los valores de β . Esta es la aproximación Synchrone. Estas dos aproximaciones dan el mismo resultado.

Para propósitos ilustrativos, se muestra el procedimiento para el primer método, primeramente se deduce la distribución del número de densidad para un syndynome único en la cola. Realmente, interesa la integral del número de densidad a lo largo de la línea de visión desde la Tierra. Esta integral se conoce como Densidad de Superficie. Debido a que los espesores ópticos en las colas de polvo son pequeños, la densidad de superficie es proporcional a la intensidad luz, una cantidad que puede determinarse de las observaciones y compararse con la densidad de superficie predicha teóricamente. Se considera que el cometa es observado en el tiempo de interés t_c , medido desde el paso por el perihelio para el cual el tiempo se toma como cero. Para un Syndynome individual de la cola correspondiente a un valor particular de $(1 - \beta)$, las partículas se emiten en el tiempo

$$t = t_c + \beta r \tag{154}$$

Aquí r es cero en el origen del Syndynome y aumenta a lo largo del eje de la cola; según el modelo descrito en la sección anterior, las partículas se emiten simétricamente desde el núcleo con una velocidad v_i , la cual se expresa funcionalmente por la ecuación (153) y se da específicamente por las curvas de la Figura 17.

⁽²⁴⁾ FINSON, Michael L. and PROBSTEIN, Roland F. A theory of dust comet. I. Model and equations. Massachusetts Institute and Technology. p. 340.

Se asume que los parámetros funcionales que determinan esta velocidad, es decir, la distribución del tamaño de partículas $g(d_p)$, la frecuencia de emisión de polvo $\dot{N}_p(t)$ y la frecuencia de emisión de gas de la cabeza $\dot{m}_g(t)$, son conocidas o por lo menos han sido seleccionados.

De la ecuación (147) se tiene que $v_i = v_i(1 - \alpha)^{t/t_c}$, por lo tanto, de las ecuaciones (153) y (154) se puede escribir que

$$v_i = v_i(1 - \alpha)^{t/t_c} \quad (155)$$

Se asume que el tiempo de observación t_c esta fijo, con lo cual se conoce un parámetro del problema. En consecuencia, el número de partículas emitidas en el tiempo t a $t + dt$ con tamaños en el rango (d_p) a $(d_p + dd_p)$ esta dado por

$$\dot{N}_p(t) dd_p g(d_p) dd_p \quad (156)$$

Ahora la cantidad de luz dispersada es proporcional al área transversal o $(d_p)^2$ para un d_p dado. Además, para facilidad de los cálculos es conveniente considerar $(1 - \alpha)$ en lugar de (d_p) como una variable independiente. Por lo tanto se introduce la función de distribución de peso

$$f(1 - \alpha) d(1 - \alpha) = (d_p)^2 g(d_p) dd_p \quad (157)$$

Esta nueva función de distribución cumple la condición de normalización

$$\int_0^1 f(1 - \alpha) d(1 - \alpha) = 1 \quad (158.1)$$

entonces

$$f(1 - \alpha) d(1 - \alpha) = \frac{(d_p)^2 g(d_p) dd_p}{\int_0^1 (d_p)^2 g(d_p) dd_p} \quad (158.2)$$

Con ayuda de la ecuación (147) la anterior expresión se transforma en

$$f(1 - \alpha) = \frac{C^{-1} (d_p)^4 g(d_p)}{\int_0^1 (d_p)^2 g(d_p) dd_p} \quad (158.3)$$

Con lo cual el número de partículas emitidas en el tiempo t a $t + dt$ en el rango $(1 - \alpha)$ a $(1 - \alpha) + d(1 - \alpha)$ se puede expresar como

$$N_p(t) d\theta f(\theta) d(\theta) \quad (159)$$

Para calcular $f(\theta)$ se compara los resultados calculados con las intensidades de luz observadas y luego se encuentra la distribución de tamaño de partículas con ayuda de las diferentes suposiciones consideradas.

Después de la emisión, este grupo de partículas es repelido hasta la cola por la presión de radiación, formando simultáneamente una cáscara esférica delgada que se expande con velocidad v_i expresada por la ecuación (155). Para el tiempo de observación t_c , este grupo de partículas forma una cáscara esférica de radio $v_i(\theta, t_c)$, centrada en el punto sobre el lugar del syndynome para el valor particular de θ . La cola syndynome esta compuesta de muchas cáscaras esféricas, para todos los posibles valores de θ desde 0 hasta θ . Los puntos sobre este lugar son denotados por $(\theta_{CM}, \theta_{CM})$ (con el subíndice "CM" que denota el centro de masa de los grupos de partículas emitidos en los varios tiempos t_c) y se calculan usando la mecánica orbital de Kepler; en el Apéndice A se dan los detalles para calcular la posición relativa al núcleo del Cometa, en el tiempo de observación t_c , de una partícula de polvo que se liberara desde el núcleo del cometa con velocidad relativa cero en el tiempo t_c y sobre la que actúa un campo gravitatorio efectivo. Como la velocidad de emisión relativa se toma cero, la órbita de la partícula esta dentro del plano orbital del cometa. Debido al tamaño del núcleo del cometa no existe efecto sobre su órbita como resultado de la presión de radiación. Se considera conocida la órbita del núcleo del cometa, por lo tanto, puede encontrarse la posición y la velocidad del núcleo en cualquiera tiempo deseado a lo largo de la órbita (Ver Tabla 2). La posición y velocidad del núcleo en el tiempo de emisión t_c sirve como condición inicial para la órbita de la partícula, correspondiente al valor de θ con un valor escogido de (θ) . Para especificar la órbita de la partícula bajo el campo gravitatorio efectivo, se determinan cuatro constantes con ayuda de las condiciones iniciales, tomadas en el tiempo de emisión desde el núcleo del cometa. Dos constantes, el semieje mayor y la excentricidad, definen la forma y el tamaño de la órbita. Como el perihelio de las dos órbitas no está alineado, el ángulo entre el perihelio se toma como la tercera constante. En general, el cometa y la partícula no alcanzan simultáneamente su respectivo perihelio, por lo tanto esta diferencia de tiempo es la cuarta constante. Conociendo, la órbita de la partícula que se emitió en t_c , se puede encontrar su posición en el tiempo posterior t_c . Esta posición, relativa a la posición del núcleo en este mismo tiempo t_c , determina la posición resultante sobre el eje del syndyne. El eje puede representarse en la forma paramétrica

$$\theta_{CM}(\theta, t_c) \quad , \quad \theta_{CM}(\theta, t_c) \quad (160)$$

En el Apéndice A se dan los detalles de la determinación de la ecuación (160). Es claro que las partículas siguen órbitas bien definidas en el plano orbital del cometa, sin embargo lo que realmente ve un observador sobre la superficie de la Tierra, es la proyección de estas trayectorias en el plano del Cielo o plano Fotográfico. El plano del Cielo o plano Fotográfico es el plano que contiene al núcleo del cometa y es normal a la línea que une el núcleo y la Tierra. Este plano corresponde a las placas fotográficas y se desea que los puntos en la cola del cometa se proyecten en este plano. Se definen dos coordenadas en este plano; M y N , el eje M representa la dirección radial aparente, es la proyección del eje ρ en este plano. El eje N se define perpendicular al eje M y es escogido para que los puntos sobre el eje ρ tengan valores positivos de N . La geometría y los detalles de la proyección de cualquier punto (ρ, θ) sobre el plano (M, N) , se dan en el Apéndice B. Proyectando el syndyname (ρ_{CM}, θ_{CM}) en el plano fotográfico, puede representarse la apariencia resultante del eje de la cola en la forma paramétrica

$$M_{CM} = M_{CM}(\rho_{CM}, \theta_{CM}; t_c), \quad N_{CM} = N_{CM}(\rho_{CM}, \theta_{CM}; t_c) \quad (161)$$

La distancia entre un punto típico sobre el eje de la cola (ρ_{CM}, θ_{CM}) y el plano Fotográfico es generalmente pequeña comparada con la distancia Tierra-Cometa. Por lo tanto, con poca pérdida en precisión, se puede asumir que las cáscaras esféricas están centradas en el punto (M_{CM}, N_{CM}) en el plano fotográfico, en lugar del punto (ρ_{CM}, θ_{CM}) sobre el plano orbital del cometa. Ahora, se busca determinar la densidad de superficie modificada (modificada por que es proporcional a la intensidad de luz) integrando la densidad a lo largo de la línea de visión sobre estas cáscaras esféricas.

Un ejemplo para una cáscara de radio v_i se muestra en la Figura 18, con la línea de visión a una distancia z_0 desde el centro. El número de partículas en esta cáscara es dado por la ecuación (159), de modo que el número de partículas por unidad de área de la superficie de la cáscara se obtiene dividiendo este valor por el área de la superficie $4\pi(v_i)^2$. La densidad de superficie modificada vista por el observador es entonces

$$2 \frac{\bar{N}_p f(\theta) d\theta d(\theta)}{4\pi(v_i)^2} \frac{dA}{dA_0} \quad (162)$$

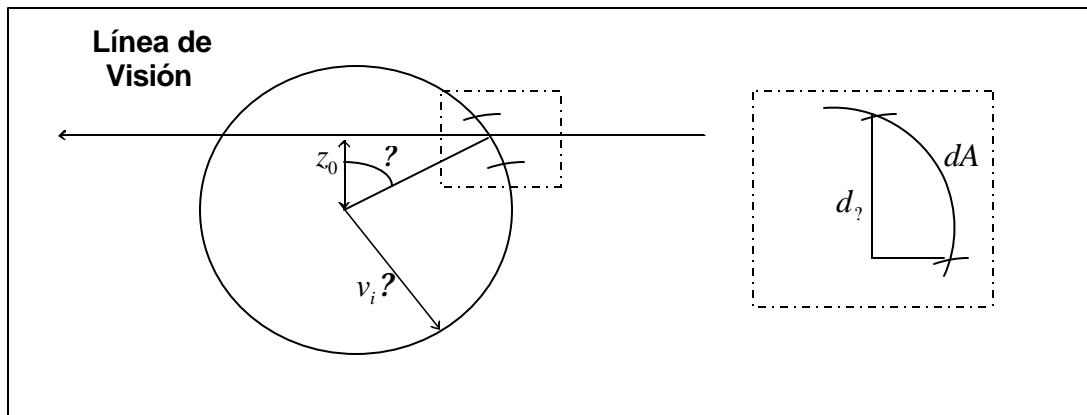
dA y dA_0 son los diferenciales de áreas mostradas en la Figura 18 y el factor 2 indica las dos intersecciones de la línea de visión con la esfera. De la geometría de la Figura 18, se tiene

$$\frac{dA_i}{dA} = \sin \theta = \frac{z_0}{v_i} \quad (163)$$

Con lo cual la densidad de superficie modificada para tal esfera es

$$\frac{N_p f(\theta) d\theta}{2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} (v_i)^2 \frac{z_0^2}{(v_i)^2} \frac{1}{v_i^2} d\theta} \quad (164)$$

Figura 18. Esfera de radio v_i



Señalando, que este resultado es valido sólo para $z_0 < v_i$, sin ninguna contribución a la densidad de superficie por parte de $z_0 > v_i$. Ahora se integra la expresión (164) sobre todas las esferas con valores diferentes de θ para una línea de visión dada.

$$\frac{f(\theta) d\theta}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{N_p d\theta}{(v_i)^2 \frac{z_0^2}{(v_i)^2} \frac{1}{v_i^2}} \quad (165)$$

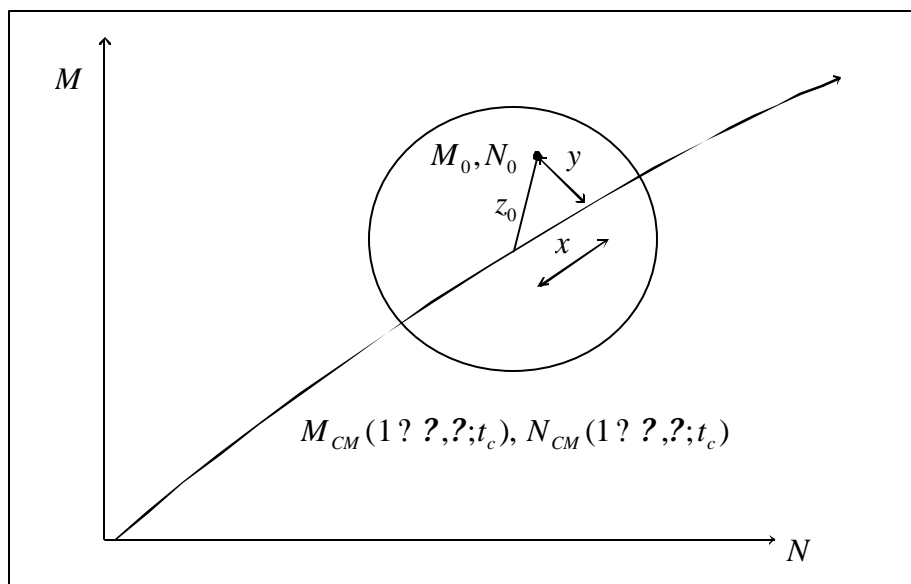
θ_1 y θ_2 son los valores para los cuales $z_0 = v_i$. La Figura 19, muestra el eje (M_{CM}, N_{CM}) para un valor específico de $(1, 2)$, con un punto de interés (M_0, N_0) dado en el plano (M, N) y localizado a una distancia normal y del eje del syndname. La línea de visión es normal al plano (M, N) y lo intersecta en el punto (M_0, N_0) , el cual esta a una distancia z_0 del centro de la esfera.

A fin de simplificar los límites de integración y la integral expresada por la ecuación (165), se introduce la siguiente aproximación, basada en el hecho de que a lo largo del eje de cola del cometa, la velocidad de las partículas relativa al núcleo es

del orden de 5 - 20 Km s⁻¹, mientras la velocidad v_i con la cual son emitidas las partículas desde la región interna de la cabeza, es del orden de 0.5 Km s⁻¹. Esta aproximación, conocida como aproximación Hipersónica, facilita mucho los cálculos con pérdida despreciable en precisión, aunque no sea necesaria o fundamental para la teoría. La condición Hipersónica puede expresarse como

$$\frac{dx}{d\tau} \gg v_i \quad (166)$$

Figura 19. Eje (M_{CM}, N_{CM}) de un syndynome para un valor específico de $(1, \tau)$ en el plano (M, N) .



Fuente: Adaptado de FINSON, Michael L. and PROBSTEIN, Roland F. p. 343.

Aquí $dx/d\tau$ es la frecuencia de cambio de longitud a lo largo del eje de un syndynome dado con respecto a τ (ver la Figura 19). Esta derivada puede calcularse de los resultados de la mecánica orbital, expresada en la forma funcional por las ecuaciones (161). Como x representa la longitud a lo largo del eje del syndyne, para el cual $(1, \tau)$ es constante, entonces

$$\frac{dx}{d\tau}(1, \tau; t_c) = \frac{\partial M_{CM}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t_c} + \frac{\partial N_{CM}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t_c} \quad (167)$$

Con $d\tau = dx / (dx/d\tau)$, la integral de la ecuación (165) puede escribirse como

$$\frac{f(1 \ ? \ ?) d(1 \ ? \ ?)}{2 \ ?} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\bar{N}_p \ dx}{(v_i \ ?)^2 (dx/d?) \cdot 1 \ ? \ z_0^2 / (v_i \ ?)^2 \ ?^{1/2}} \quad (168)$$

La condición Hipersónica expresada por la ecuación (166) implica que $dx/d?$, es tan grande que las varias esferas tienen esencialmente el mismo valor de $?$. Esto, permite tratar a \bar{N}_p , $v_i?$ y $dx/d?$ (todas las cuales son funciones de $?$) como constantes sobre el rango de integración. Con ayuda de la aproximación Hipersónica, la ecuación (168) se convierte en

$$\frac{\bar{N}_p f(1 \ ? \ ?) d(1 \ ? \ ?)}{2 \ ? (v_i \ ?) (dx/d?)} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{?(v_i \ ?)^2 \ ? \ z_0^2 \ ?^{1/2}} \quad (169)$$

De la Figura 19 se tiene que $z_0^2 \ ? \ x^2 \ ? \ y^2$, en el límite de la esfera $(v_i?)^2 \ ? \ z_0^2$, con lo cual los límites de integración son

$$x_1 \ ? \ ? \ (v_i?)^2 \ ? \ y^2 \ ?^{1/2} \quad (170.1)$$

$$x_2 \ ? \ ? \ (v_i?)^2 \ ? \ y^2 \ ?^{1/2} \quad (170.2)$$

La integral de la expresión (169) se reduce a

$$\frac{\bar{N}_p f(1 \ ? \ ?) d(1 \ ? \ ?)}{2 \ ? (v_i \ ?) (dx/d?)} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{?(v_i \ ?)^2 \ ? \ y^2 \ ? \ x^2 \ ?^{1/2}} \quad (171)$$

El valor de la integral anterior es simplemente $?$, de modo que la densidad de superficie modificada para un syndynome individual de la cola es

$$\bar{N}_p f(1 \ ? \ ?) d(1 \ ? \ ?) \int_{?}^{?} 2 v_i \ ? \ \frac{dx}{d?} (?; 1 \ ? \ ?, t_c) \ ?^{21} \quad (172)$$

El resultado anterior tiene una interpretación física simple, el producto $\bar{N}_p(t_c \ ? \ ?) f(1 \ ? \ ?)$ da el número de partículas en cualquier punto (peso por su capacidad para dispersar la luz), mientras $2 v_i?$ y $dx/d?$ dan la dilatación en las direcciones lateral y longitudinal, respectivamente. La solución de la expresión (172) para un syndynome individual, da una densidad de superficie modificada constante a través de la cola; se debe señalar que esta ecuación sólo se aplica a puntos que realmente están dentro de la cola. El ancho de la cola es $2 v_i?$ y la

densidad de superficie es cero para puntos cuya distancia normal desde el eje sea mayor que v_i .

Para obtener la densidad de superficie modificado total, para un punto dado (M_0, N_0) dentro de la cola del cometa, se integra los diferentes syndynames de la cola para todos los valores de $(1 \ ? \ ?)$:

$$D = \int_{(1 \ ? \ ?)_a}^{(1 \ ? \ ?)_b} \bar{N}_p f(1 \ ? \ ?) \frac{dx}{d(1 \ ? \ ?)}(1 \ ? \ ?; t_c) d(1 \ ? \ ?) \quad (173)$$

$(1 \ ? \ ?)_a$ y $(1 \ ? \ ?)_b$ son los valores límites de $(1 \ ? \ ?)$ para los cuales el punto dado esta dentro de los syndynames individuales de la cola.

El procedimiento para derivar las ecuaciones para una cola synchrone (Aproximación synchrone), es completamente análogo al dado anteriormente, con los papeles de $(1 \ ? \ ?)$ y φ invertidos. Para este caso, la condición Hipersónica se expresa como

$$\frac{dx}{d(1 \ ? \ ?)} \frac{M_{CM}^2}{(1 \ ? \ ?)^2} \frac{N_{CM}^2}{(1 \ ? \ ?)^2} \frac{v_i}{(1 \ ? \ ?)} \quad (174)$$

Aquí se toma el cambio relativo de $(1 \ ? \ ?)$ con pequeñas distancias v_i . La densidad de superficie modificada total D , para un punto dado se da por

$$D = \int_a^b \bar{N}_p f(1 \ ? \ ?) \frac{dx}{d(1 \ ? \ ?)}(1 \ ? \ ?; t_c) d(1 \ ? \ ?) \quad (175)$$

φ_a y φ_b son los valores límites de φ para los cuales el punto de interés esta dentro de los synchrones individuales en la cola.

Tres parámetros funcionales cometarios están incluidos en la ecuación (173) o en la ecuación (175), $\bar{N}_p(t)$, $f(1 \ ? \ ?)$ y $v_i(1 \ ? \ ?; t_c)$. El primer paso es entonces determinar estas tres funciones igualando la intensidad de luz calculada y observada. Se puede distinguir una segunda fase, donde la información adicional puede obtenerse introduciendo suposiciones con respecto a la dispersión de la luz y la densidad de las partículas de polvo. También $(1 \ ? \ ?)$ puede relacionarse al producto $(\varphi_p d)$ por medio de la ecuación (147), asumiendo un valor para la constante Q_{pr} . Una elección adicional de φ_p (asumiéndola uniforme sobre todas

las partículas del polvo) produce el diámetro d de la partícula. Así $f(1??)$ puede relacionarse con $g(?,d)$ usando la ecuación **(158.3)**, que a su vez podría expresarse luego en términos solo de d . Ahora puede encontrarse, el nivel absoluto de $\bar{N}_p(t)$ que en la primera fase era indeterminado. Nuevamente es necesario relacionar $(1??)$ con d y asumir un valor para el albedo del material de polvo (El albedo de las partículas de polvo no es muy conocido, los valores mas probables están entre 0,05 y 0.5. Por supuesto, al multiplicar $\bar{N}_p(t)$ por la masa de la partícula de polvo $?, ? d^3/6$, se obtiene la frecuencia de producción de masa de polvo \bar{m}_p . En la tercera fase, se determina la frecuencia de producción de masa de gas de la cabeza a través de la Figura 17, con v_i expresada en términos de $(?,d)$ y t . A estas alturas, deben asumirse valores para el radio del núcleo R_0 , la temperatura del núcleo T y el calor específico del gas de la cabeza C_p .

4.2 COLA DE IONES

El otro tipo de colas cometarias, es la cola de iones, la cual proporciona un lugar único y natural para el estudio de varios procesos del plasma. La formación de la cola de plasma o cola tipo I, se debe básicamente a la interacción del viento solar con el plasma cometario. A continuación se discutirán algunos aspectos que influyen en la desconexión de este tipo de cola y algunas características observadas en ella.

4.2.1 El Viento Solar. Como muchos de los descubrimientos que se realizan a menudo, la existencia del viento solar fue predicha teóricamente antes de tener la tecnología necesaria, para diseñar naves espaciales e instrumentos capaces de identificarlo en el espacio interplanetario. El descubrimiento de que el medio interplanetario está constantemente atravesado por el viento solar, así como la gran variedad de fenómenos que en él ocurre dio origen a una nueva disciplina de estudio, conocida como física del medio interplanetario. El primero en sugerir que el Sol pudiera emitir un flujo continuo, fue el alemán Ludwing Biermann en 1951, al notar que las colas cometarias siempre apuntan en dirección contraria al Sol en su movimiento orbital, tanto cuando se aproximan como cuando se alejan de él. Biermann demostró que la presión de la luz solar no puede causar las repentinas aceleraciones y deflexiones observadas en la cola conformada por partículas cargadas eléctricamente ó iones; sugiere entonces que un flujo continuo de electrones y protones provenientes del Sol sí podría explicar este comportamiento.

En aquel entonces se asumía que hacia las capas exteriores del Sol, la presión y densidad del gas disminuían hasta llegar a cero y que el calentamiento se debía a la conducción de calor desde el interior. En este modelo el gas de la corona solar en la cual se registran temperaturas de 10^6 °C (1.8×10^5 °K) está en reposo. Solo hasta 1958, Eugene N. Parker de la Universidad de Chicago, sugirió que una corona estática y extendida no puede existir sin una presión externa que la esté confinando. Como la presión interestelar es muy pequeña y la fuerza de gravedad solar no es capaz de retenerla; la corona solar debe expandirse continuamente a muy alta velocidad, hacia el medio interplanetario. A esta atmósfera solar en expansión se le conoce como viento solar. Los resultados de Parker no fueron bien recibidos y muchos científicos preferían la imagen de una corona solar estática; pero en 1959 la sonda espacial Soviética Lunik 3, mediante el análisis de datos recogidos por sus instrumentos, confirma la existencia del flujo de iones provenientes del Sol.

El viento solar al igual que los gases tiene propiedades de un flujo, pero a diferencia de estos últimos, su enorme conductividad eléctrica hace que sean también muy sensibles a campos electromagnéticos. Gracias a las mediciones hechas por los instrumentos de las naves espaciales, se sabe que la velocidad del

viento solar en el medio interplanetario es prácticamente radial con respecto al Sol y oscila entre 400 y 800 Km s⁻¹. El viento solar es un fluido muy tenue en el medio interplanetario, a una distancia de 1 U.A. del Sol su densidad apenas alcanza en promedio, del orden de 10 protones por cm³. Este flujo que se encuentra eléctricamente neutro, se expande esféricamente y se extiende más allá de la órbita del último planeta del sistema solar. Se habla entonces, de la existencia de una región donde la expansión térmica del viento solar ya es contenida por la presión del viento interestelar. No se sabe con certeza donde se encuentra dicha frontera, pero algunos modelos indican que se encuentra a una distancia de 100 U.A. desde el Sol. La región ocupada por este plasma se llama heliosfera; la sonda espacial Voyager 2 sigue operando y ya ha abandonado el sistema solar tratando de encontrar la heliopausa, es decir, la frontera con el viento interestelar. La Tabla 3 indica los valores típicos de cantidades observadas cerca de la órbita de la Tierra.

Tabla 3. Valores de cantidades observadas del viento solar cerca de la órbita de la Tierra.

	<i>Valor Promedio</i>	<i>Valor Máximo</i>
<i>Densidad de iones ó electrones</i>	5 cm ³	40 cm ³
<i>Velocidad del viento solar</i>	400 Km s ⁻¹	800 Km s ⁻¹
<i>Temperatura de los electrones (T_e)</i>	2 x 10 ⁵ °K	8 x 10 ⁵ °K
<i>Temperatura de los iones (T_i)</i>	10 ⁵ °K	8 x 10 ⁵ °K
<i>Campo magnético</i>	5 x 10 ⁻⁵ Gauss	20 x 10 ⁻⁵ Gauss

Fuente: COWLING T. G. The Solar Wind.

Cuando el viento solar comienza a fluir acarrea consigo al campo magnético de la región del Sol de donde surgió, hacia el espacio interplanetario; este campo magnético solar que conlleva el viento solar se le conoce como Campo Magnético Interplanetario.

4.2.2. Modelo de Parker para el viento solar. El movimiento de un fluido normal se describe por las ecuaciones de la Hidrodinámica, las cuales representan las leyes de conservación de la mecánica. La conservación de la materia se describe por la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (176)$$

donde ρ es la densidad y \mathbf{V} la velocidad del fluido. La conservación del momentum se describe por

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{F} \quad (177)$$

\mathbf{F} representa una fuerza por unidad de volumen arbitraria y p la presión. La principal suposición del modelo de Parker es que el flujo es continuo (constante), esféricamente simétrico e isotérmico, entonces las ecuaciones anteriores se transforman en

$$\rho \frac{dV}{dr} = 0 \quad (178)$$

$$\rho (V \frac{dV}{dr}) = -\rho g \quad (179)$$

$$p = RT \quad (180)$$

$$T = T_0 \quad (181)$$

La velocidad de viento solar solo varía radialmente $\mathbf{V} = v \hat{r}$ y la aceleración gravitacional obedece la ley del inverso del cuadrado radial $g = GM_\odot / r^2$. Utilizando coordenadas esféricas la ecuación (178) se transforma en

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 v)}{dr} = 0 \quad (182)$$

y la componente radial de la ecuación (179) es

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{dp}{dr} - \frac{GM_\odot}{r^2} \quad (183)$$

Utilizando la definición de la velocidad del sonido para la corona solar $c_s^2 = p/\rho$, la ley de los gases se expresará como

$$p = \rho c_s^2 \quad (184.1)$$

y

$$\frac{dp}{dr} \approx c_s^2 \frac{d\rho}{dr} \quad (184.2)$$

Con lo cual la ecuación (183) toma la forma

$$v \frac{dv}{dr} \approx \frac{c_s^2}{v} \frac{d\rho}{dr} \approx \frac{GM_\odot}{r^2} \quad (185)$$

Con ayuda de la ecuación (182) se llega finalmente a

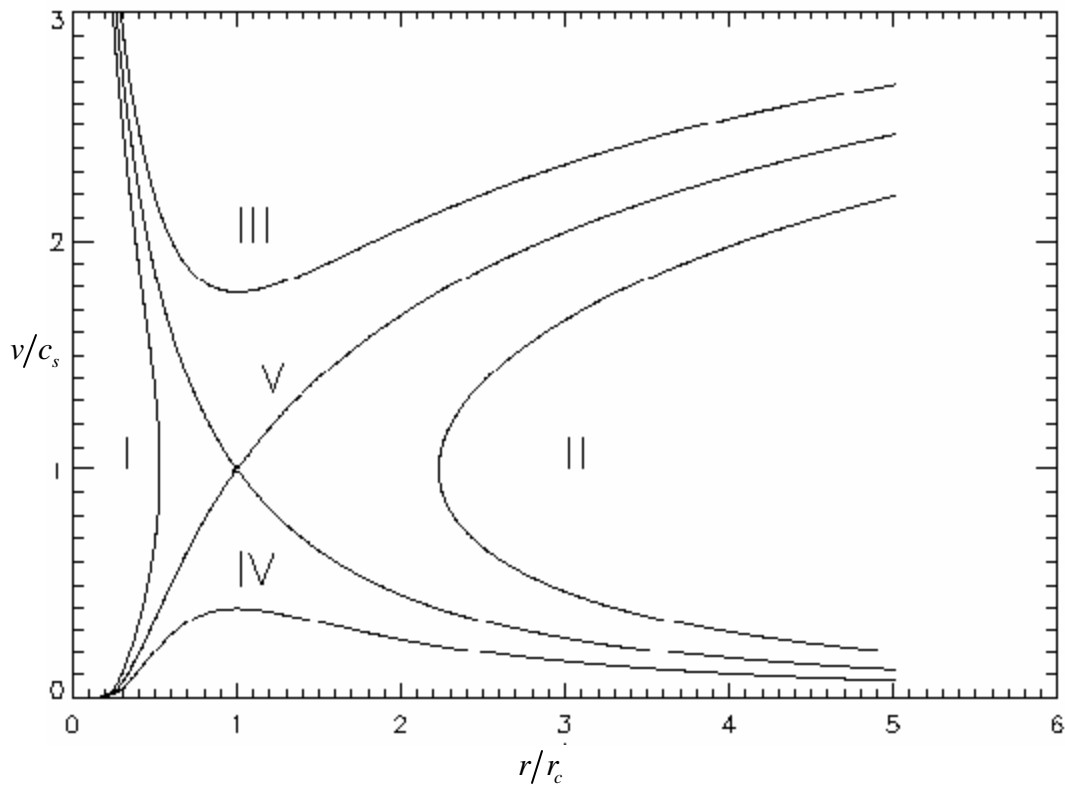
$$\frac{1}{2} v^2 \approx \frac{c_s^2}{v} \frac{dv}{dr} \approx \frac{2c_s^2}{r^2} (r - r_c) \quad (186)$$

donde $r_c \approx GM_\odot / 2c_s^2$. r_c es importante porque $r_c \approx r$ y $v \approx c_s$ son puntos críticos de la ecuación (186). Si la velocidad del plasma alcanza la velocidad del sonido, entonces el radio debe ser igual a r_c o el gradiente de la velocidad se hace infinito; otra forma de expresar esto es que si $r_c \approx r$ entonces $dv/dr \approx 0$ ó $v \approx c_s$. Integrando la ecuación (186) se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{v^2}{c_s^2} \approx \ln \frac{v}{c_s} \approx 4 \ln \frac{r}{r_c} \approx 4 \frac{r_c}{r} \approx C \quad (187)$$

donde C es una constante de integración; la solución para diferentes valores de C se muestran en la Figura 20. Es fácil observar de esta Figura que la solución I no es físicamente aceptable, no es posible para el viento solar abandonar la superficie solar con una velocidad por debajo de la velocidad del sonido, alcanzar un radio máximo a muy poca distancia y retornar al Sol con una velocidad supersónica. La solución II no es físicamente aceptable puesto que nunca comienza en la superficie solar. La solución III predice flujos supersónicos en la base de la corona que nunca han sido observados, por lo tanto esta solución también debe despreciarse. Los dos tipos de soluciones que son físicamente razonables son la IV y la V. La solución V es un caso único donde el plasma abandona la superficie solar con una velocidad particular y pasa a través del punto crítico en $r_c \approx r$ y $v \approx c_s$. Para estos valores específicos, de la ecuación (187) se encuentra que $C \approx 3$. La solución IV siempre permanece por debajo de la velocidad del sonido y se conoce como solución "brisa solar". El comportamiento de la solución V para valores grandes de r , se puede obtener fácilmente.

Figura 20. Velocidad del viento solar v , como función del radio r , para diferentes valores de C .



Fuente: Adaptado de la página en Internet
<http://farside.ph.utexas.edu/teaching/plasma/lectures/node66.html>

De la Figura 20 se tiene que $v \gg c_s$, así que la ecuación (187) es aproximadamente

$$\frac{v}{c_s} \approx 4 \ln \frac{r}{r_c} \quad (188.1)$$

así que

$$v \approx 2 c_s \left(\ln \frac{r}{r_c} \right)^{1/2} \quad (188.2)$$

Según la ecuación (182) se encuentra que cuando r tiende a infinito, ρ tiende a cero y como consecuencia de la ecuación (184.1) p también tiende a cero. Por lo tanto para grandes distancias, la presión se iguala con la baja presión del medio

interestelar. El comportamiento de la solución IV para grandes valores de r es bien diferente. De la Figura 20 se mira que v tiende a cero cuando r tiende a infinito, así la ecuación (187) toma la forma

$$\ln \frac{v}{c_s} \approx 4 \ln \frac{r}{r_c} \quad (189.1)$$

con lo cual

$$v \approx c_s \frac{r_c}{r} \quad (189.2)$$

Reemplazando la ecuación (189.2) en la ecuación (182) se tiene

$$\frac{v^2}{c_s^2} \approx \frac{c_s^2}{c_s^2} \frac{r_c^2}{r^2} \quad (190)$$

Como v tiende a un valor constante cuando r tiende a infinito, así mismo lo hará la presión; por lo tanto esta presión con un valor finito no puede igualarse con la baja presión del medio interestelar. Claramente la solución IV no será físicamente aceptable; se concluye así que el modelo Parker para el viento solar esta dado por la solución V de la ecuación (187). Esta solución predice que la corona solar se expande radialmente con velocidades subsónicas que se incrementan hasta un punto crítico (punto sónico), en el cual alcanza la velocidad del sonido y luego es acelerada gradualmente hasta alcanzar velocidades supersónicas mientras la presión y la densidad del gas decrecen.

Ya se mencionó que para $r_c \approx r$ y $v \approx c_s$ la constante $C \approx 3$, por lo tanto la ecuación (187) se puede expresar como

$$\frac{v^2}{c_s^2} \approx 1 - \ln \frac{v}{c_s} - 4 \ln \frac{r}{r_c} + 4 \frac{r_c}{r} \approx 1 \quad (191)$$

4.2.3. Principales iones cometarios. En la Tabla 4 se encuentran los iones que han sido observados en los cometas. De estos quizá CO^+ , CO_2^+ , H_2O^+ y N_2^+ son los más importantes. Estos tienen emisiones en el rango del espectro visible y cerca al ultravioleta, por lo tanto es posible observarlos desde la Tierra. A causa de su carga eléctrica los iones son fuertemente acoplados al flujo del viento solar circundante, el cual los arrastra luego en dirección antisolar para formar la cola de iones. Esto hace muy difícil determinar la frecuencia de producción de iones. Las observaciones muestran que CO^+ es el ión cometario más abundante.

Tabla 4. Iones observados en los cometas.

Iones	$C^+, OH^+, CO^+, CH^+, CN^+$ $N_2^+, H_2O^+, CO_2^+, CO_3^+$ $H_3O^+, Ca^+, H_2S^+, HCS^+$
-------	---

Fuente: adaptado de COMETS IN SPACE AGE, WHIPPLE Fred. L. p. 10

4.2.4. Desconexión de la Cola de iones. Como ya se discutió anteriormente el viento solar arrastra consigo el campo magnético solar hacia el espacio interplanetario, a una velocidad promedio de 400 Km s^{-1} . Ahora se necesita saber que sucede con cada ión del plasma cometario al interactuar con el viento solar, para ello se realiza el siguiente análisis.

En ausencia de campo eléctrico la ecuación de movimiento para un ión se representa mediante la fuerza de Lorentz

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{q}{c} \vec{V} \times \vec{B} \quad (192)$$

donde m es la masa de uno de los iones, \vec{V} la velocidad de un ión, q la carga eléctrica, \vec{B} el campo eléctrico y c la velocidad de la luz en el vacío. Por comodidad se toma el campo magnético de la forma $\vec{B} = B \hat{k}$, B está dado en Gauss, con lo cual se encuentra

$$m \frac{dV_x}{dt} = \frac{q}{c} V_y B \quad (193.1)$$

$$m \frac{dV_y}{dt} = -\frac{q}{c} V_x B \quad (193.2)$$

$$m \frac{dV_z}{dt} = 0 \quad (193.3)$$

Las ecuaciones (193.1) y (193.2) se pueden expresar como

$$\frac{d^2 V_x}{dt^2} = -\omega^2 V_x \quad (194.1)$$

$$\frac{d^2 V_y}{dt^2} = -\omega^2 V_y \quad (194.2)$$

donde $\omega = qB/mc$, la solución de las ecuaciones (194.1) y (194.2) es

$$V_{x,y} = V_{\perp} e^{i\omega t} \quad (195)$$

aquí V_{\perp} es una constante que denota la velocidad en el plano perpendicular a \vec{B} . Con ayuda de la ecuación (193.2) se encuentra

$$V_x = V_{\perp} \sin \omega t \quad (196.1)$$

$$V_y = V_{\perp} \cos \omega t \quad (196.2)$$

$$V_{\perp}^2 = V_x^2 + V_y^2 \quad (196.3)$$

Integrando nuevamente las ecuaciones (196.1) y (196.2) se tiene

$$X(t) = X_0 + \frac{V_{\perp}}{\omega} \cos \omega t \quad (197.1)$$

$$Y(t) = Y_0 + \frac{V_{\perp}}{\omega} \sin \omega t \quad (197.2)$$

$$Z(t) = Z_0 + V_{\parallel} t \quad (197.3)$$

V_{\parallel} es la velocidad en el plano paralela a \vec{B} . El desplazamiento en Z es lineal en el tiempo, por lo tanto se debe analizar el desplazamiento en las direcciones X y Y . Tomando $X_0 = Y_0 = 0$, el radio de giro de la partícula ionizada cuyo eje es la dirección de B y su rapidez angular ω , es entonces

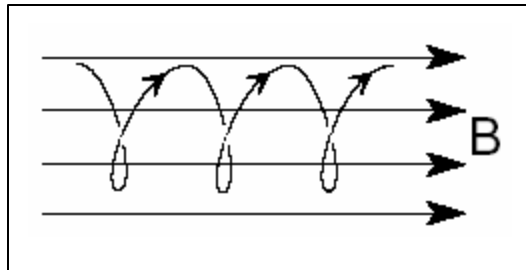
$$r = \frac{V_{\perp}}{\omega} \quad (198)$$

r es conocido como radio de Larmor y el ángulo de la trayectoria de la partícula con el campo magnético se conoce como ángulo de inclinación

$$\theta = \tan^{-1} \frac{V_{\perp}}{V_{\parallel}} \quad (199)$$

entonces los iones cometarios describen trayectorias helicoidales alrededor de las líneas de campo magnético (Figura 21)

Figura 21. Trayectoria de un ión en un campo magnético uniforme



Fuente: OTTO, Antonius. p. 46

A medida que el viento solar recibe iones cometarios, se produce un aumento de su masa, lo que genera una desaceleración conservando así su momentum o cantidad de movimiento. Por otra parte, como el campo magnético y el plasma están unidos se afirma que el campo magnético está congelado en el plasma, teorema de Alfvén. Así si \vec{J} es el vector densidad de corriente y \vec{H} la intensidad del campo magnético se tiene

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (200.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (200.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -u \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (200.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \quad (200.4)$$

$$\vec{J} = \nabla \times (\vec{E} + u \nabla \times \vec{B}) \quad (200.5)$$

$$\vec{B} = u \vec{H} \quad (200.6)$$

donde σ es la conductividad del plasma, u es la permeabilidad magnética, la ecuación (200.5) es la ley de Ohm generalizada, aquí el término $\nabla \times \vec{B}$ es el campo eléctrico del movimiento, originado por el desplazamiento del plasma en el campo magnético \vec{B} . Para la ecuación (200.1) se considera que el campo es lentamente variable, lo que significa que la corriente de desplazamiento $\nabla \times \vec{E}$ es despreciable en comparación a \vec{J} . Reemplazando \vec{E} de la ecuación (200.5) en la ecuación (200.3) se llega a

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{V} \times \vec{H} = \frac{1}{u} \vec{J} \quad (201)$$

Ahora utilizando la siguiente expresión

$$\vec{J} = \vec{H} \times (\nabla \times \vec{H}) + \nabla^2 \vec{H} \quad (202)$$

se llega finalmente a

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{V} \times \vec{H} = \frac{1}{u} \nabla^2 \vec{H} \quad (203)$$

En el medio interplanetario la resistencia R es muy pequeña (tiende a cero), por lo tanto u se hace infinito, con lo cual se llega a

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{V} \times \vec{H} = 0 \quad (204)$$

Esta ecuación expresa que el material conductor del plasma conlleva en su movimiento a las líneas de campo, el campo magnético sigue congelado en el plasma. Gracias a esto se produce la desconexión de la cola iónica del cometa, la cual continúa su trayectoria acoplada al viento solar y a su antiguo campo magnético. Para estudiar como se modifica el campo magnético al producirse un desplazamiento en el interior de la cola cometaria desconectada, se tiene en cuenta la siguiente relación

$$\vec{V} \times \vec{H} = \vec{V} \times (\nabla \times \vec{H}) + \nabla^2 \vec{H} \quad (205)$$

Utilizando las condiciones dadas por las ecuaciones (200.4) y (178) la ecuación (204) se transforma finalmente en

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{V} \times \vec{H} = \nabla^2 \vec{H} \quad (206)$$

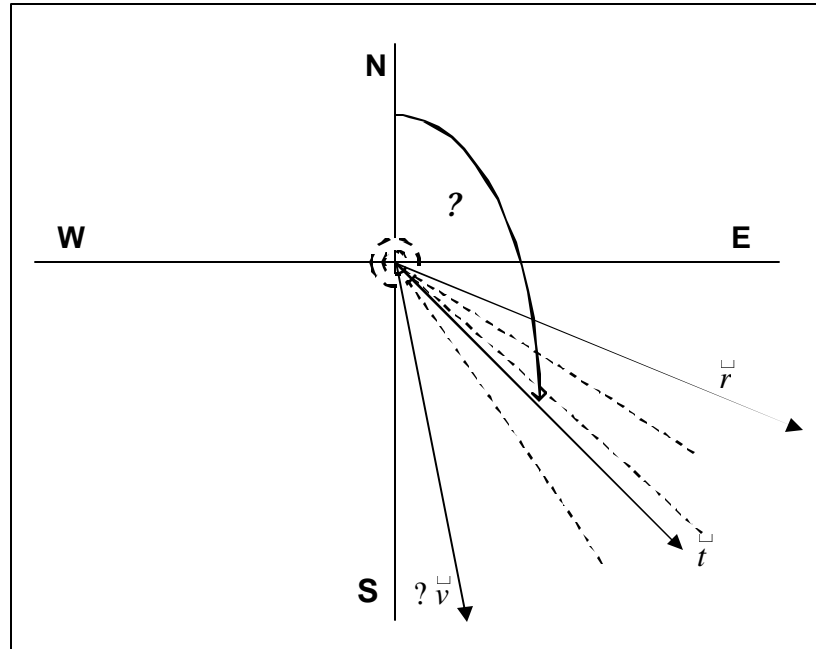
Integrando la anterior ecuación se podrá conocer la evolución temporal del campo magnético congelado en la cola de plasma desconectada (la cual se aleja del Sol).

4.2.5. Aberración Dinámica. Más soporte para la hipótesis del viento solar proviene del estudio de la orientación de la cola de iones de los cometas. Los ejes de la cola de iones se encuentran retrasados unos pocos grados con respecto al

radio vector. El retraso es debido al efecto resultante de la velocidad del viento solar y la velocidad del cometa. Esto se conoce como aberración dinámica.

La Figura 22 muestra la geometría de la cola del cometa en el plano fotográfico; aquí \vec{r} , \vec{t} y $?\vec{v}$ denotan respectivamente, el radio vector, el vector a lo largo del eje de la cola y el vector de la velocidad negativa del cometa.

Figura 22. Geometría de la cola de iones proyectada sobre el plano fotográfico.



Fuente: KRISHNA, S. K. S p. 205

El dato de observación es el ángulo de posición $?$ del eje de la cola sobre el plano fotográfico. Para interpretar la orientación de la cola de iones, es conveniente usar el plano orbital del cometa como marco de referencia. Conociendo las diferentes cantidades que se muestran en la Figura 22, la orientación de la cola en el plano orbital del cometa puede calcularse (Figura 23), suponiendo que tal cola también está en el mismo plano. La ecuación básica usada para la interpretación de la aberración dinámica observada es dada por

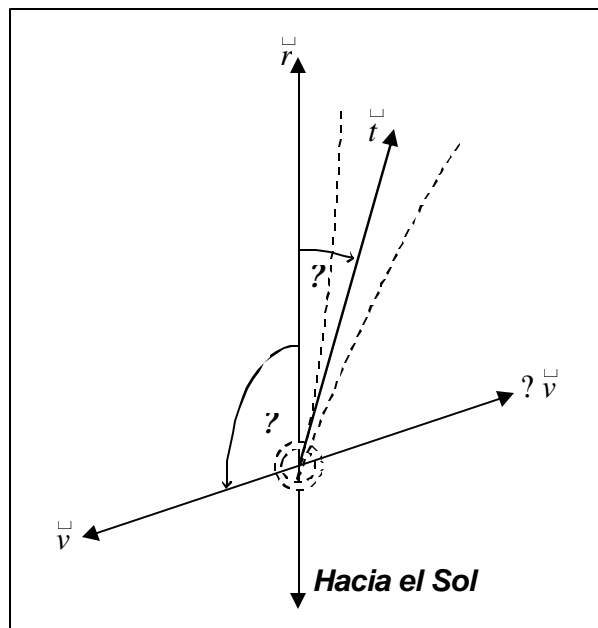
$$\vec{t} = \vec{w} + ?\vec{v} \quad (207)$$

donde \vec{w} es la velocidad del viento solar; físicamente la anterior ecuación dice que la dirección de la cola es la dirección del viento solar vista por un observador que se encuentra en el cometa. El ángulo de aberración $?$ es el ángulo de la cola con respecto al radio vector y para un cometa que se encuentra cerca del ecuador solar se da por

$$\tan \theta = \frac{v \sin \phi + w_t \cos i}{w_r + v \cos \phi} \quad (208)$$

donde i es la inclinación de la órbita del cometa con respecto al plano del ecuador solar y ϕ es el ángulo entre el radio vector y la dirección de v , w_r es la componente radial de la velocidad del viento solar y w_t la componente tangencial, el término $w_t \cos i$ es aproximadamente la componente de la velocidad del viento solar en el plano orbital del cometa y es perpendicular al radio vector \vec{r} .

Figura 23. Geometría de la cola de iones proyectada sobre el plano orbital del cometa.



Todas las cantidades de la ecuación (208) anterior son conocidas excepto w_r y w_t . Por lo general el valor de w_t es muy pequeño, por lo tanto el valor de w_r puede calcularse fácilmente de la Ecuación (208). Si w_t tiene un valor apreciable, se debe mostrar el ángulo de aberración para los cometas directos (D) y retrógrados (R). El método anterior se ha aplicado a cerca de 60 cometas para aproximadamente 1600 observaciones. Los ángulos de aberración promedio resultantes para los cometas directos y retrógrados son

$$\langle \theta \rangle_D = 3.7^\circ$$

y

$$\langle \omega \rangle_R \approx 5.5^\circ$$

Si se asumen que w_r y w_t tienen el mismo valor para los dos casos y usando los valores para los otros parámetros requeridos, los valores promedios resultantes para w_r y w_t son

$$\langle w_r \rangle \approx 450 \pm 11 \text{ Km s}^{-1}$$

y

$$\langle w_t \rangle \approx 8.4 \pm 1.3 \text{ Km s}^{-1}$$

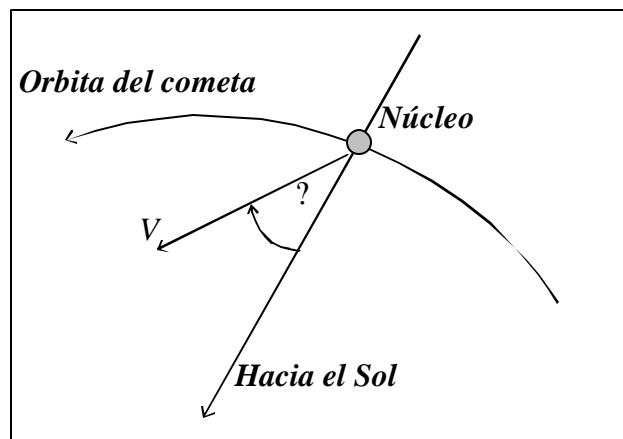
5. DISEÑO DEL SOFTWARE

Para elaborar el programa computacional denominado “**SIMULACION DE LAS COLAS COMETARIAS**”, se ha utilizado el lenguaje de programación Visual Basic versión 6.0, el cual cumple con todas las normas y acuerdos legales existentes para el uso de cualquier software en las instituciones educativas. Se decidió utilizar este tipo de lenguaje por su fácil comprensión y manejo, proporciona gran precisión en los cálculos numéricos y es un lenguaje que está orientado a objetos.

5.1 MODELO MATEMÁTICO

La observación del flujo de materia en el núcleo del cometa Halley en 1835, junto con el desarrollo de la cola del cometa, sirvió de pauta para el diseño de la teoría de Bessel sobre la forma de los cometas. Según Bessel las partículas salen del núcleo del cometa (preferiblemente en dirección al Sol) con una velocidad V y bajo un ángulo θ , Figura 24.

Figura 24. Ángulo θ bajo el cual salen las partículas desde el núcleo del cometa con una velocidad V .



Para la observación de un cometa se tiene en cuenta el total de partículas que salen del núcleo en un intervalo de tiempo y en diferentes direcciones, limitándose a las regiones próximas de la cabeza y al comienzo de la cola del cometa, este intervalo de tiempo es del orden de horas y para la cola, el mismo, crece a días. Bessel trata la cola como una formación plana, que se encuentra sobre el plano orbital del cometa.

El elemento principal de la teoría de Bessel, es la representación analítica de las coordenadas cometocéntricas (x, y) , para cualquier partícula en un tiempo t , este sistema de coordenadas ya se discutió en la sección 4.1.1. La posición de una partícula en la cola del cometa se describe por las coordenadas x y y en el sistema cometocentrico y por x^h y y^h en el sistema Heliocéntrico. De la geometría de la Figura 16 se puede encontrar la expresión que relaciona los dos sistemas coordenados

$$r^2 = x^2 + y^2 = r^2 \quad (209.1)$$

$$r^2 = x^h{}^2 + y^h{}^2 \quad (209.2)$$

Donde x y y representan las coordenadas heliocéntricas del núcleo del cometa. Las transformaciones inversas respectivas son

$$x^h = x - \beta y \quad (210.1)$$

$$y^h = y + \beta x \quad (210.2)$$

Las coordenadas heliocéntricas x^h y y^h de la partícula se desarrollaron por Bessel⁽²⁵⁾ alrededor del intervalo de tiempo t_0

$$x^h = x_0^h + \frac{dx_0^h}{dt} (t - t_0) + \frac{d^2x_0^h}{dt^2} \frac{(t - t_0)^2}{2} + \frac{d^3x_0^h}{dt^3} \frac{(t - t_0)^3}{6} \dots \quad (211.1)$$

$$y^h = y_0^h + \frac{dy_0^h}{dt} (t - t_0) + \frac{d^2y_0^h}{dt^2} \frac{(t - t_0)^2}{2} + \frac{d^3y_0^h}{dt^3} \frac{(t - t_0)^3}{6} \dots \quad (211.2)$$

x_0^h y y_0^h indican la posición de la partícula en el tiempo t_0 . Los cocientes diferenciales $d^n x_0^h / dt^n$, $d^n y_0^h / dt^n$ resultan de las ecuaciones de movimiento para la partícula y el núcleo. Vale la pena aclarar que para el núcleo el valor de β dado por la ecuación (54), es igual a la unidad, es decir, se considera la masa solar igual a uno; mientras que para las partículas se asume una masa hipotética, denotada por β .

⁽²⁵⁾ FLÜGGE, S. HANDBUCH DER PHYSIK. Band LII. Astrophysik III: Das Sonnensystem. Springer-Verlag. Berlin Göttingen Heidelberg. 1959. p. 497.

Con lo anterior las ecuaciones diferenciales para el núcleo y la partícula son respectivamente

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{x}{r^3} = 0 \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{y}{r^3} = 0 \quad (212.1)$$

$$\frac{d^2 x_p}{dt^2} + \frac{x_p}{r_p^3} = \frac{2x}{r^3} \quad \frac{d^2 y_p}{dt^2} + \frac{y_p}{r_p^3} = \frac{2y}{r^3} \quad (212.2)$$

El anterior desarrollo conduce a

$$\frac{d^2 V \cos \theta}{dt^2} + \frac{2V \cos \theta}{r^2} = 2V \sin \theta \frac{\sqrt{p}}{r^2} \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{2V \sin \theta}{r^3} \frac{4e \sin \theta}{\sqrt{p}}$$

$$\frac{d^2 V \cos \theta}{dt^2} + \frac{2V \cos \theta}{r^3} = \frac{3p}{r^4} V \sin \theta + \frac{6e \sin \theta}{r^3} \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (213.1)$$

$$\frac{d^2 V \sin \theta}{dt^2} + \frac{2V \sin \theta}{r^2} = \frac{2V \cos \theta}{r^4} - 2\sqrt{p} V \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{3p}{r^4} \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 V \cos \theta}{dt^2} + \frac{6e \sin \theta}{r^3} \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (213.2)$$

e , p y θ son respectivamente la excentricidad, el parámetro orbital y la anomalía verdadera de la órbita del Cometa al tiempo t . Las ecuaciones (213) permiten determinar la posición de una partícula relativa al núcleo, cuando las condiciones y el parámetro θ se conocen. Si las observaciones permiten determinar el movimiento de las partículas en la cola, estas ecuaciones conducen entonces a calcular θ . En el método usado por Bessel se utilizan formulas complicadas, aquí no se tendrá en cuenta dicho procedimiento. Realmente lo más importante es la correcta interpretación física más no la formulación matemática.

5.1.1 Ecuación de un Syndyname. Para eliminar el tiempo t de las ecuaciones (213) es conveniente según Bessel realizar la siguiente substitución

$$\theta = \frac{2}{3} \frac{e \sin \theta}{r \sqrt{p}} \eta^2 \quad (214)$$

Si no se tienen en cuenta pequeños valores para la coordenada θ , entonces después de eliminar θ se llega a la siguiente expresión

$$V \sin \theta = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{1-e}} - \frac{4}{3} \frac{e r \sin \theta}{(1-e)\sqrt{p}} - \frac{2}{3r} \frac{\sqrt{2p}}{\sqrt{1-e}} \theta^{3/2} \quad (215)$$

Esta es la ecuación de la curva para la totalidad de las partículas, que son eyectadas desde el núcleo del cometa en el intervalo de tiempo t_c hasta t , bajo el mismo ángulo θ y con el mismo valor de $(1-e)$ (fuerza de repulsión). Las curvas dadas por la ecuación (215) se conocen como Syndynames; dicho concepto ya fue estudiado en la sección (4.1.2). Al dividir la coordenada y por la correspondiente coordenada x , se encuentra

$$\tan \theta = V \sin \theta = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{1-e}} - \frac{4}{3} \frac{e r \sin \theta}{\sqrt{p}(1-e)} - \frac{2}{3r} \frac{\sqrt{2p}}{\sqrt{1-e}} \sqrt{\theta} \quad (216)$$

donde θ es el ángulo que se forma entre un punto del Syndyname y el radio vector extendido. La ecuación (215) puede reescribirse de la forma

$$V \sin \theta = (A \sqrt{\theta} + B \theta) + C \theta^{3/2} \quad (217)$$

con

$$A = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{1-e}} \quad (218.1)$$

$$B = \frac{4}{3} \frac{e r \sin \theta}{(1-e)\sqrt{p}} \quad (218.2)$$

$$C = \frac{2}{3r} \frac{\sqrt{2p}}{\sqrt{1-e}} \quad (218.3)$$

5.2 PROCEDIMIENTO PARA EL CÁLCULO DE LA ESTRUCTURA DE LA COLA

Los parámetros A , B y C dependen solamente de los parámetros básicos e , p , θ y de la posición del núcleo del cometa dada por (r, θ) . Por consiguiente, una vez se fija la posición del núcleo, estas tres expresiones pueden calcularse y usarse para determinar todos los syndynames necesarios para un punto dado en la órbita del cometa. Esta manera más corta de escribir la ecuación (215), proporciona también información sobre la estructura de un Syndyname.

El factor C es independiente de los parámetros de salida V y β , por lo tanto describe la posición del eje de la cola del cometa. Esto es en realidad un Syndyname con el ángulo de salida β igual a 0° o 180° . Los otros dos factores de la ecuación (217), A y B dependen de V y β , estos describen como muchos Syndynames se desvían del eje de la cola. Como β sólo está presente en la función seno, las desviaciones máximas se encuentran para $\beta = 90^\circ$ y $\beta = 270^\circ$. El factor V determina el ancho de la cola, debido a que actúa como un factor de multiplicación en la desviación del eje de la cola. Por consiguiente es suficiente calcular los Syndynames para 90° y -90° para determinar el límite de la cola; tomando $\beta = 0^\circ$ se obtiene el eje de la cola. Aquí se asume que la velocidad de salida V es constante durante el cálculo total de una cola, incluso durante el paso cerca del Sol. En el transcurso de su extensa investigación en más de 50 cometas diferentes, Bredichin llegó a la conclusión de que las colas cometarias se pueden dividir en tres clases distintas o tipos caracterizados por diferentes valores de $(1/\beta)$ y V . Los resultados de Bredikhin se dan en la Tabla 5, la velocidad V está dada en $U.A./58.132 \text{ días}$, la velocidad en Km. s^{-1} se obtiene de $29.785 \beta V$.

Tabla 5. Valores de la Velocidad de salida V y $(1/\beta)$ para los diferentes tipos de colas

	Tipo I	Tipo II	Tipo III
$(1/\beta)$	>10	0.5 - 4	0.1 - 0.4
V	0.1 - 0.34	0.03 - 0.07	0.01 - 0.02

Fuente: adaptado de FLÜGGE, S. HANDBUCH DER PHYSIK. Band LII. Astrophysik III: Das Sonnensystem. p. 501

Se puede observar de la tabla anterior que las colas tipo I poseen un valor grande $(1/\beta)$, por lo cual estas colas son débilmente curvadas, el valor de $(1/\beta)$ para el tipo II y III es más pequeño, de aquí su fuerte curvatura.

Para calcular la estructura de la cola de un cometa en varias posiciones de su órbita, se realizan los siguientes pasos, vale la pena aclarar que cada uno de estos pasos depende del anterior.

1. Se debe seleccionar un cometa, esto significa la elección de la excentricidad e , la distancia del perihelio a_p y el valor de $(1/\beta)$. Con esto la órbita y los efectos de gravitación y repulsión están fijados. Ahora la velocidad de salida V puede seleccionarse en relación con el valor $(1/\beta)$, por medio de la Tabla 5.

2. Seleccionar una posición en la órbita. Esto se realiza escogiendo un valor de la anomalía verdadera θ . Ahora es posible calcular la distancia r al Sol y las coordenadas Heliocéntricas del núcleo (x, y) . Además las cantidades A , B y C son calculadas respectivamente con las ecuaciones **(218)**.
3. Selección de un Syndyname, se debe elegir un valor para θ puesto que cada valor determina un Syndyname (ecuación **(217)**).
4. Calcular la coordenada θ correspondiente para varios valores θ del Syndyname. Los puntos (θ, θ) en el sistema Cometocentrico se transforman en coordenadas Heliocéntricas (x^i, y^i) por medio de las ecuaciones **(210)**. Al graficar todas las coordenadas (x^i, y^i) junto con la posición del núcleo en el sistema de coordenadas Heliocéntrico, se puede encontrar la posición de cada Syndyname.

Para un cometa se consideran varias posiciones, para cada posición se calculan por lo menos tres syndynames. Por ejemplo, tomando nueve posiciones, tres Syndynames para cada posición y diez puntos (θ, θ) para cada uno de los Syndynames, se requiere evaluar 270 puntos. Al trazar estos puntos en el sistema (X, Y) , se describe la forma de la cola y la naturaleza de sus cambios cuando el cometa se acerca al Sol. Los Syndynames seleccionados son por supuesto, 0° o 180° para el eje de la cola, 90° y -90° para los límites de la cola. Es importante calcular únicamente la longitud de la cola cuando el cometa se acerca al Sol, puesto que a grandes distancias estas no se forman. La ecuación **(217)** permite calcular una cola de cualquier longitud, pero en la realidad solo alcanzan unas cuantas fracciones de U.A. Hay que recordar que las coordenadas (θ, θ) están expresadas en U.A.

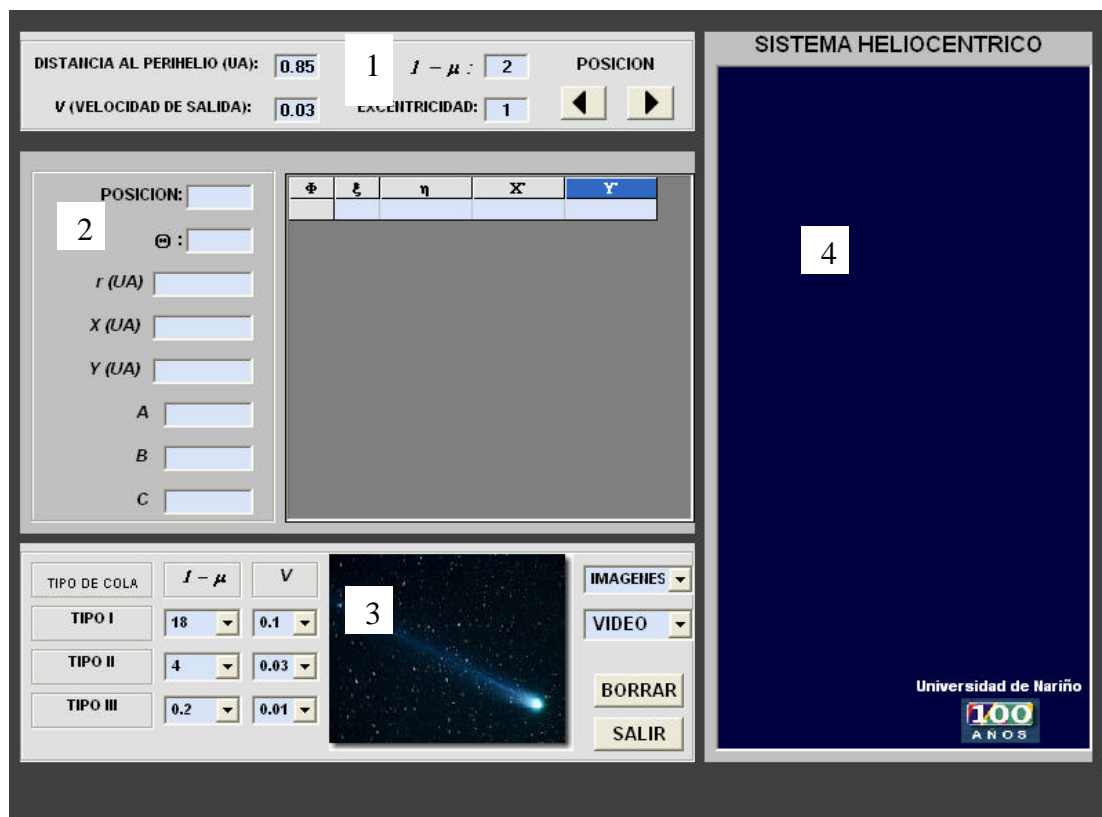
5.3 PRESENTACION Y ESTRUCTURA DEL SOFTWARE

El programa denominado “**SIMULACION DE LAS COLAS COMETARIAS**” inicia con la presentación indicada en la Figura 25. Aquí se nombran los diseñadores del programa; luego se accede a la ventana principal donde se ofrecen las opciones del software (Figura 26).

Figura 25. Presentación del programa **SIMULACION DE LAS COLAS COMETARIAS**.



Figura 26. Ventana con las opciones del programa.



Esta ventana se divide en cuatro partes, en la primera parte se introducen los valores para la distancia al perihelio a_p , ($1? ?$), la excentricidad e y la velocidad de salida V . Estos valores son utilizados en los diferentes cálculos que se deben realizar. Por medio de las flechas se puede calcular los Syndynames y la posición en la órbita del cometa. Estos dos botones también permiten visualizar las colas cometarias en el sistema Heliocéntrico ubicado en la parte número **(4)**. En la segunda parte (número **2**), se muestran los valores de la anomalía verdadera θ , r , las coordenadas (x, y) para el núcleo del cometa, los valores de las constantes A , B y C , en la tabla se indica el ángulo de salida de las partículas α , las coordenadas (θ, θ) para cada Syndynome y las coordenadas (x^i, y^i) de las partículas en la cola. Se debe aclarar que las coordenadas (x, y) y (x^i, y^i) fueron cambiadas por (X, Y) y (X^i, Y^i) simplemente para dar mejor presentación al programa. En la parte número **(3)** se tienen los valores de ($1? ?$) y V para los diferentes tipos de colas. Se puede tener acceso a una galería de imágenes de algunos cometas, como otra aplicación también existe la opción de seleccionar un video sobre el impacto de la sonda Giotto con el núcleo del cometa Halley. El botón "borrar" permite escoger otros valores para visualizar otros tipos de colas, sin necesidad de salir del programa. En la parte número **(4)** como se mencionó anteriormente se puede visualizar los diferentes tipos de colas, las colas tipo I se observan en color azul claro, el tipo II en color amarillo y el tipo III en color blanco; en esta sección también se puede reproducir los videos seleccionados.

El video utilizado en este programa fue tomado de NASA movie Comet Halley Returns (CMP 256). Este fue digitado by Calvin J. Hamilton.

5.3.1 Aplicación del programa. Considerando los siguientes valores

Figura 27. Datos para a_p , ($1? ?$), e y V .

DISTANCIA AL PERIHELIO (UA):	<input type="text" value="0.5"/>	$1 - \mu$:	<input type="text" value="4"/>	POSICION
V (VELOCIDAD DE SALIDA):	<input type="text" value="0.07"/>	EXCENTRICIDAD:	<input type="text" value="0.98"/>	◀ ▶

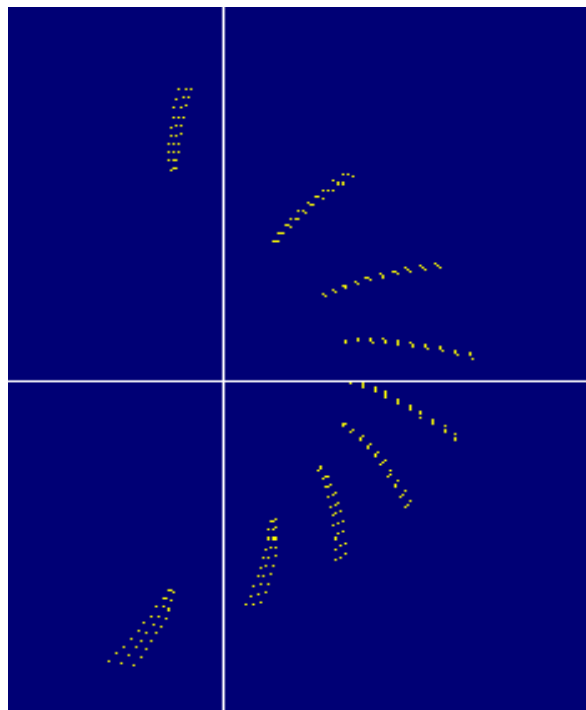
Se obtiene los siguientes resultados

Figura 28. Resultados para un valor de la anomalía verdadera de 75.2° .

POSICION:	2	Φ	ξ	η	X'	Y'
ANOMALIA VERDADERA:	75.2°	-90	0,05	-0,003020	0,217943	-0,813
r (UA)	0,791794	-90	0,1	0,004580	0,223366	-0,863
X (UA)	0,202251	-90	0,15	0,016596	0,224520	-0,914
Y (UA)	-0,765528	-90	0,2	0,031938	0,222459	-0,967
A	0,559883	-90	0,25	0,050053	0,217717	-1,020
B	-0,251332	-90	0,3	0,070593	0,210629	-1,073
C	0,592378	-90	0,35	0,093316	0,201433	-1,127
		-90	0,4	0,118037	0,190303	-1,182
		-90	0,45	0,144613	0,177380	-1,237
		-90	0,5	0,172928	0,162777	-1,293
		0	0,05	0,006623	0,208619	-0,815
		0	0,1	0,018733	0,209683	-0,866

Para los anteriores cálculos se utilizó un valor de la anomalía verdadera de 75.2° , es un Syndynome para 90° y en una sola posición. El resultado para los tres Syndynomes en nueve posiciones se muestra en al Figura 29.

Figura 29. Cola tipo II

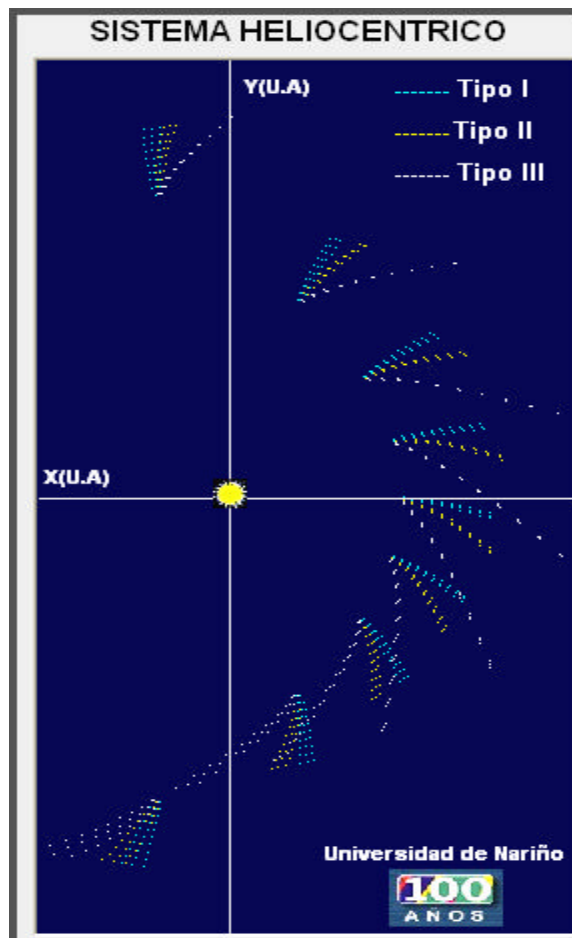


De esta Figura se puede ver la curvatura propia de las colas tipo II; con ayuda del programa se puede visualizar y comparar las características típicas de las colas cometarias, esto se puede observar en la Figura 31 donde están expuestas los tipos I, II y III. Los valores considerados son

Figura 30. Datos considerados para los tres tipos de colas

TIPO DE COLA	$f - \mu$	V	DISTANCIA AL PERIHELIO (UA): 0.85	
TIPO I	18	0.1	EXCENTRICIDAD: 1	
TIPO II	4	0.03		
TIPO III	0.3	0.02		

Figura 31. Comparación entre los diferentes tipos de colas



Aquí las colas tipo I se observan en color azul claro, el tipo II en color amarillo y el tipo III en color blanco. Es evidente la fuerte curvatura en las colas tipo II y III, mientras la cola tipo I parece tener una forma casi recta.

CONCLUSIONES

- 1.** La cola de polvo (Tipo II) y la cola de iones (Tipo I) se forman solo cuando el cometa se encuentra a una distancia menor a 6 U.A
- 2.** El núcleo constituye la fuente principal de las partículas de polvo y de los iones que forman la cola Tipo II y Tipo I respectivamente, estos se liberan de manera continua en el tiempo, durante los procesos que ocurren en el núcleo cuando el cometa se aproxima al Sol.
- 3.** Las colas cometarias se producen por la interacción de los gases ionizados y las partículas de polvo que conforman la coma del cometa, con el viento y la presión de radiación solar.
- 4.** Los parámetros físicos que están involucrados en la formación de las colas cometarias son la velocidad de salida de las partículas y el parámetro $(1? ?)$, el cual está relacionado con su diámetro y densidad.
- 5.** El software diseñado en lenguaje de programación Visual Basic 6.0, permite simular y visualizar las diferencias existentes entre los principales tipos de colas cometarias.
- 6.** El lenguaje de programación Visual Basic 6.0, facilitó el diseño de la estructura del software, gracias a su alta precisión y velocidad para la realización de los respectivos cálculos.

BIBLIOGRAFIA

ALONSO, Marcelo y FINN, Edward. Física Vol. I. 2ª ed. Massachussets: Adison Wesley – Iberoamericana, 1986. 451 p.

BOBROVNIKOFF, N. T. The present state of theory of comets. Lick Observatory. 1928. Disponible en Internet:
http://adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-bib_query?1928PASP...40..164B&db_key=AST

BOLEY, Forrest I. Plasmas en el laboratorio y en el cosmos. México: Editorial reverté Mexicana, S. A. 1968. 175 p.

BOULET, Dan L. Methods of orbit determination for the microcomputer. Richmond, Virginia: Willmann – Bell Inc. 1991. 565 p.

Castañeda, Mauricio y Ewert De Geus, Jeannine. Introducción a la física moderna. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 1997.

CHENG, Francis F. Introduction to plasma physics. Los Angeles: Electrical sciences and engineering Department, school engineering and applied science, Universidad de California. 1974. 329 p.

COLLINS II, George W. The Foundations of Celestial Mechanics. Case Western Reserve University. 2004. Disponible en Internet:
<http://ads.harvard.edu/books/1989fcm..book/>

COWLING, T. G. The Solar Wind. Departament of applied Mathematics, the Universidad of Leeds. Disponible en Internet:
http://adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-bib_query?1971QJRAS..12..447C&db_key=ast

DANBY, J. M. A. Fundamentals of Celestial Mechanics. 2nd. Edition Revised & Enlarged. Richmond, Virginia, U. S. A. : Willman-Bell, Inc. 1992.

DENISSE, J. F Y DELCROIX, J. L. Teoría de ondas en los plasmas. México: Editorial Alambra, S. A. 1968. 161 p.

EISBERG, Robert. Fundamentos de física moderna. México: Limusa, 1992.

FERNÁNDEZ, Julio A. and JOCKERS, K. Max Planck Institut Für Aeronomie. 205 p.

FEYNMAN, Richard. Física Vol. I. 2ª ed. Madrid: Aguilar, 1972. 793 p.

FINSON, Michael L. and PROBSTEIN, Roland F. A theory of dust comet. I. Model and equations. Massachusetts Institute and Technology. Disponible en internet: http://adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-bib_query?1968ApJ...154..327F&db_key=AST

FLÜGGE, S. HANDBUCH DER PHYSIK. Band LII. Astrophysik III: Das Sonnensystem. Springer-Verlag. Berlin Göttingen Heidelberg. 1959.

GEHEIMENRATH, Herrn y BESSEL, Ritter. Beobachtungen über die physische Beschaffenheit des Halley'schen kometen und dadurch veranlafste Bemerkungen. Astronomische Nachrichten. Disponible en Internet: http://adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-bib_query?1836AN.....13..185B&db_key=AST

GOLDSTEIN, Herbert. Mecánica Clásica. Universidad de Harvard. Segunda edición española. 1972. 456 p.

GONZÁLES ESPARZA, Juan Américo. Introducción a la dinámica de gran escala del medio interplanetario. México: Departamento de estudios espaciales, instituto de geofísica, UNAM. 2000. 82 p.

KRISHNA, S, K. S. Physics of Comets. W. S. P USA 1986. 273 p.

LARSON, Roland E. HOSTETLER, Robert P. Cálculo y Geometría Analítica V. 2. Quinta edición: MCGRAW-HILL. 1995. 1134 p.

LEITHOLD, Louis. El Cálculo con Geometría Analítica. 2nd. University de Southern California. 1360 p.

MEEUS, Jean. Astronomical algorithms. 2nd ed., Richmond, Virginia: Willmann – Bell Inc. 1998. 477 p.

Microsoft Corporation. Visual Basic 6.0. Madrid: McGraw Hill, 1998.

MOULTON, Forest Ray. An Introduction to celestial Mechanics. 2nd ed. 1970. 477p.

OTTO, Antonius. Magnetospheric Physics, 2002

POLLARD, Harry. Mathematical Introduction to celestial Mechanics. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs. 1966. 111 p.

PORTILLA BARBOSA, José Gregorio. Elementos de Astronomía de posición. Observatorio Astronómico Nacional. Bogota: Universidad Nacional de Colombia. 2001. 376 p.

REITZ, John R., MILFORD, Frederick J. y CHRISTY, Robert W. Fundamentos de la teoría electromagnética. 3ª ed. México: Fondo Educativo Interamericano, S. A. de C. V. 1984. 584 p.

SPIEGEL, Murray R. Manual de formulas y tablas matemáticas 400 fórmulas y tablas. México: McGraw-Hills, c. 1970 p.

WHIPPLE, Fred. COMETS IN SPACE AGE, L. Smithsonian Astrophysical Observatory. 1998. 18p. Disponible en Internet:
http://adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-bib_query?1989ApJ...341....1W&db_key=AST

ZADUNAISKY, Pedro E. Introducción a la Astrodinámica, teoría y métodos numéricos. Buenos Aires: Comisión nacional de actividades espaciales. 1998.

SITIOS DE INTERNET

<http://scienceworld.wolfram.com/physics/Two-BodyProblem.html>

http://www.geocities.com/lemagicien_2000/mathpage/calcorbesp/calcorbesp.html#1

http://www.mipagina.cantv.net/aquilesr/cinturon_kuiper.htm

http://www.iespana.es/intercosmos/reportajes/pluto/pluto_principal.htm

<http://www.udistrital.edu.co/comunidad/profesores/pdeaza/html/Colas.html>

<http://www.astrosurf.com/Cometas-obs/ArtSoftUtil/Cometasblandos.doc>

<http://www.udistrital.edu.co/comunidad/profesores/pdeaza/html/colas.html>

<http://www.astropanama.org/materiainterplan.html>

<http://bang.lanl.gov/solarsys/comet.htm>, mayo 1996.

APENDICES

Apéndice A. Mecánica orbital para el núcleo y las partículas de polvo

Se desea ahora determinar la posición de una partícula de polvo relativa al núcleo del cometa, en el tiempo de observación t_c , que se libera desde el núcleo del cometa en el tiempo t_0 y que está sujeta a la fuerza repulsiva de la presión de radiación durante este intervalo de tiempo. Si r_p es la distancia heliocéntrica de una partícula de polvo, M_\odot la masa Solar y G la constante gravitacional, entonces la aceleración de la gravedad es $\hat{r}GM_\odot/r_p^2$. Con $(1-\beta)$ que denota la razón de la fuerza de presión de radiación a la de gravedad, se tiene que la aceleración total sobre la partícula es

$$\hat{r}(1-\beta)\frac{GM_\odot}{r_p^2} - \hat{r}\frac{\beta GM_\odot}{r_p^2} \quad (\text{A1})$$

Para este desarrollo se considera que t_c , β y $(1-\beta)$ o β son conocidos. La partícula de polvo bajo estas consideraciones se libera desde el núcleo del cometa sin velocidad relativa, de modo que la órbita resultante de la partícula estará contenida en el plano orbital del cometa. Como en la Figura 16, $r(t)$ y $\theta(t)$ son las coordenadas polares heliocéntricas del núcleo del cometa y $r_p(t)$ y $\theta_p(t)$ son las de la partícula de polvo. El ángulo θ se toma cero en el perihelio de la órbita del cometa y aumenta en la dirección de su movimiento. La posición de la partícula de polvo relativa al núcleo del cometa en el tiempo de observación t_c , según la geometría de la Figura 16, esta dada por las ecuaciones (149.1) y (149.2)

Para sintetizar, se asumirá que la órbita del cometa es parabólica. Ésta es una excelente aproximación para la mayoría de los cometas. Una discusión general sobre este tipo de trayectoria se dio en la sección (3.5). Asumiendo conocida la distancia al perihelio q , la ecuación de tal órbita se da por la ecuación (101). Para encontrar $r(t)$ y $\theta(t)$ para un valor particular de t , primero se resuelve la ecuación cúbica (132) que tiene una sola raíz real

$$z^3 - \frac{3}{2} \frac{GM_\odot}{2q^3} z^{1/2} t^2 - \frac{9}{4} \frac{GM_\odot}{2q^3} t^2 - 1 z^{1/2} z^{1/3} - \frac{3}{2} \frac{GM_\odot}{2q^3} z^{1/2} t^2 - \frac{9}{4} \frac{GM_\odot}{2q^3} t^2 - 1 z^{1/2} z^{1/3} \quad (\text{A2})$$

siendo $z = \tan(\theta/2)$, con lo cual $r(t)$ y $\theta(t)$ se pueden expresar por

$$r(t) = q(1 - z^2) \quad (\text{A3})$$

$$\theta(t) = 2 \tan^{-1} z \quad (\text{A4})$$

Así se puede encontrar la posición del cometa en tiempos tales como $t = t_c$ ó $t = t_c + \tau$. Ahora es necesario determinar de las condiciones iniciales de la órbita de la partícula en el tiempo de emisión $t_c = \tau$. Con una órbita parabólica para el cometa y un valor de presión de radiación diferente de cero, esta órbita se asume hiperbólica. Sólo se consideran valores de $(1 - \beta) > 1$, de modo que la aceleración de gravedad es atractiva.

Se requieren cuatro constantes para especificar la órbita de la partícula. El semieje mayor a_p y la excentricidad e_p , dan la forma de la órbita; la tercera, φ_p da la orientación del perihelio con respecto a la órbita del cometa y la cuarta, t_{0p} es el tiempo en el cual la partícula alcanza el perihelio. La ecuación para la trayectoria hiperbólica se da por la ecuación (104) y se cumple que $e_d > 1$. Si éstas constantes orbitales son conocidas, $r_p(t)$ ó $\theta_p(t)$ pueden determinarse introduciendo la cantidad $F(t)$ definida por la ecuación

$$\tan \frac{\theta_p(t) - \varphi_p}{2} = \sqrt{\frac{e_p - 1}{e_p + 1}} \tanh \frac{F(t)}{2} \quad (\text{A5})$$

La cantidad $F(t)$ se encuentra de la solución de la ecuación trascendental

$$e_p \sinh F(t) - F(t) = \sqrt{\frac{GM_\gamma}{a_p^3}} (t - t_{0p}) \quad (\text{A6})$$

La ecuación (104), se puede expresar en términos de $F(t)$

$$r_p(t) = a_p (e_p \cosh F(t) - 1) \quad (\text{A7})$$

De la ecuación (104) o de la ecuación (A5), se puede encontrarse entonces $\theta_p(t)$. Para determinar los cuatro parámetros orbitales desconocidos, se señala que en el tiempo de emisión, la posición de la partícula y el núcleo deben coincidir

$$r(t_c) = r_p(t_c), \quad \theta(t_c) = \theta_p(t_c) \quad (\text{A8})$$

También, en la emisión, la componente radial y tangencial de la velocidad de la partícula de polvo, con respecto al Sol, deben ser iguales a las del núcleo. Teniendo en cuenta los valores de l para cada tipo de trayectoria (ver Tabla 2) se tiene que las componentes radiales de los movimientos orbitales son

$$\frac{dr(t)}{dt} = \frac{GM_\odot}{2q} \sin \theta(t), \quad \frac{dr_p(t)}{dt} = \frac{GM_\odot}{a_p(e_p^2 - 1)} e_p \sin(\theta_p(t)) \quad (\text{A9})$$

y las componentes tangenciales

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{(2qGM_\odot)^{1/2}}{r^2(t)}, \quad \frac{d\theta_p(t)}{dt} = \frac{(GM_\odot a_p(e_p^2 - 1))^{1/2}}{r_p^2(t)} \quad (\text{A10})$$

Las ecuaciones (A8)-(A10), junto con las ecuaciones (101) y (104) para r y r_p respectivamente, pueden resolverse para encontrar e_p , a_p y θ_p

$$e_p = \frac{4(1 - q)r(t_c)}{q^2} \quad (\text{A11})$$

$$a_p = \frac{r(t_c)}{2(1 - q)} \quad (\text{A12})$$

$$\theta_p = \theta(t_c) + \sin^{-1} \frac{\sin \theta(t_c)}{e_p} \quad (\text{A13})$$

De las ecuaciones (A5) y (A6), se obtiene entonces t_{0p}

$$F(t_c) = 2 \tanh^{-1} \frac{e_p - 1}{e_p + 1} \tan \frac{\theta(t_c) - \theta_p}{2} \quad (\text{A14})$$

$$t_{op} = t_c + \frac{a_p^3}{GM_\odot} e_p \sinh F(t_c) - F(t_c) \quad (\text{A15})$$

Teniendo los cuatro parámetros necesario para describir la órbita de la partícula correspondientes a los valores escogidos de t_c , θ y $(1 - q)$, se puede encontrar la

posición de la partícula en el tiempo t_c . La Ecuación **(A6)** se resuelve para encontrar $F(t_c)$ y las ecuaciones **(A5)** y **(A7)** dan $\theta_p(t_c)$ y $r_p(t_c)$. Las ecuaciones **(149.1)** y **(149.2)** dan entonces la posición relativa al núcleo.

En la Tabla 6 se enumeran algunos parámetros orbitales calculados para una selección de cometas.

Tabla 6. Parámetros conocidos de algunos cometas

NOMBRE	Periodo Orbital (Años)	Fecha del Perihelio	Distancia al Perihelio a_p (U.A)	Semi-eje Mayor (U.A)	Excentricidad e	Inclinación Orbital i (°)	Magnitud Absoluta
1P Halley	76.1	1986-02-09	0.587	17.94	0.967	162.2	5.5
2P Encke	3.30	2003-12-28	0.340	2.21	0.847	11.8	9.8
6P d'Arrest	6.51	2008-08-01	1.346	3.49	0.614	19.5	8.5
9P Tempel 1	5.51	2005-07-05	1.500	3.12	0.519	10.5	12.0
19P Borrelly	6.86	2001-09-14	1.358	3.61	0.624	30.3	11.9
21P Giacobini-Zinner	6.52	1998-11-21	0.996	3.52	0.706	31.8	9.0
26P Grigg-Skjellerup	5.09	1992-07-22	0.989	2.96	0.664	21.1	12.5
27P Crommelin	27.89	1984-09-01	0.743	9.20	0.919	29.0	12.0
45P Honda-Mrkos-Pajdusakova	5.29	1995-12-25	0.528	3.02	0.825	4.3	13.5
46P Wirtanen	5.46	2013-10-21	1.063	3.12	0.652	11.7	9.0
55P Tempel-Tuttle	32.92	1998-02-28	0.982	10.33	0.906	162.5	9.0
67P Churyumov-Gerasimenko	6.57	2002-08-18	1.292	3.51	0.632	7.1	

73P Schwassmann-Wachmann 3	5.36	2006-06-02	0.937	3.06	0.694	11.4	11.7
75P Kohoutek	6.24	1973-12-28	1.571	3.4	0.537	5.4	12.1
76P West-Kohoutek-Ikemura	6.46	2000-06-01	1.596	3.45	0.540	30.5	10.6
81P Wild 2	6.39	2003-09-25	1.583	3.44	0.540	3.2	6.5
95P Chiron	50.7	1996-02-14	8.46	13.7	0.383	7	
107P Wilson-Harrington	4.29	2001-03-26	1.000	2.64	0.623	2.8	9.0
Hale-Bopp	4000	1997-03-31	0.914	250	0.995	89.4	-1.0
Hyakutake	~ 40000	1996-05-01	0.230	~ 1165	0.9998	124.9	

Fuente: Comet Fact Sheet Disponible en http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/fact_notes.html

Apéndice B. Proyección entre los planos orbital y fotográfico.

Para determinar la apariencia de un cometa según un observador estacionado en la Tierra, debe encontrarse primero la posición de la Tierra relativa al cometa. Diariamente se tabulan los valores de la posición de la Tierra relativa al Sol, los valores se dan en coordenadas ecuatoriales. Estos valores pueden relacionarse con las coordenadas cometocéntricas de la Tierra $(\rho_e, \theta_e, \phi_e)$ por medio de métodos conocidos.

Se puede definir ahora un sistema de coordenadas cometocentrico L, M, N , que es útil para comparaciones con fotografías de cometas. Se asumirá que el eje del telescopio se dirige hacia el núcleo del cometa, de modo que la placa fotográfica sea normal a la línea que conecta la Tierra y el núcleo del cometa. El error introducido por esta suposición es despreciable si el telescopio se dirige poco menos de $2^\circ - 3^\circ$ del núcleo. La línea recta que conecta la Tierra y el núcleo es dada por

$$\frac{\rho_e}{r} \hat{\rho}_e + \frac{\rho_e}{r} \hat{\theta}_e + \frac{\rho_e}{r} \hat{\phi}_e \quad (\text{B1})$$

El eje L del sistema coordenado L, M, N se toma a lo largo de esta línea y dirigido hacia la Tierra. El plano normal a esta línea y que contiene el núcleo del cometa corresponde al "plano del cielo" o "plano fotográfico". Dicho plano contiene los ejes M y N y se da por

$$\hat{\rho}_e \cdot \hat{\theta}_e = 0 \quad (\text{B2})$$

Para propósitos ilustrativos es conveniente trabajar con vectores unitarios. El vector unitario del eje L , en términos de los vectores unitarios de los ejes ρ, θ y ϕ es

$$\hat{L} = \frac{\rho_e}{r} \hat{\rho}_e + \frac{\rho_e}{r} \hat{\theta}_e + \frac{\rho_e}{r} \hat{\phi}_e \quad (\text{B3})$$

donde $r = (\rho_e^2 + \rho_e^2 \sin^2 \theta_e + \rho_e^2 \cos^2 \theta_e)^{1/2}$ es la distancia Tierra-cometa. El eje M se define como la dirección radial aparente sobre una fotografía, es decir, la proyección del eje ρ sobre el plano M, N . Esta proyección es entonces la línea de intersección

entre este plano y aquel plano determinado por la línea Tierra-cometa y el eje \hat{L} . Puesto que el vector normal a un plano se da por el producto vectorial de cualquiera de los dos vectores contenidos en el plano, el vector normal al último plano es

$$\hat{L} \times \hat{e}_e = \frac{e}{r} \hat{e}_e \times \hat{e}_e$$

El vector unitario resultante es

$$\hat{j} = \frac{\hat{L} \times \hat{e}_e}{|\hat{L} \times \hat{e}_e|} \quad (\text{B4})$$

Como el vector a lo largo de la línea de intersección entre dos planos es dado por el producto vectorial de los vectores normales de los planos, el vector unitario a lo largo del eje M es

$$\hat{M} = \hat{L} \times \hat{j} = \frac{(\hat{L} \times \hat{e}_e) \times \hat{e}_e}{|\hat{L} \times \hat{e}_e|} = \frac{\hat{L} \times \hat{e}_e \times \hat{e}_e}{|\hat{L} \times \hat{e}_e|} \quad (\text{B5})$$

El signo de la ecuación (B5) es escogido de modo que la dirección de M positiva corresponda al incremento de θ (es decir, radialmente hacia fuera). La tercera coordenada N , también esta en el plano fotográfico y se escoge de manera que forme un conjunto apropiado con L y M ; de hecho, \hat{N} es idéntico a \hat{j} de la ecuación (B4), usando el signo menos

$$\hat{N} = \hat{L} \times \hat{M} = \frac{\hat{L} \times (\hat{L} \times \hat{e}_e)}{|\hat{L} \times \hat{e}_e|} = \frac{\hat{L} \times \hat{e}_e}{|\hat{L} \times \hat{e}_e|} \quad (\text{B6})$$

De las ecuaciones (B3), (B5) y (B6), se tiene la transformación deseada desde el sistema (θ, ρ, θ) al sistema (L, M, N)

$$L = \frac{e}{r} \cos \theta + \frac{e}{r} \sin \theta \quad (\text{B7.1})$$

$$M = \frac{(\hat{L} \times \hat{e}_e) \times \hat{e}_e}{|\hat{L} \times \hat{e}_e|} = \frac{\hat{L} \times \hat{e}_e \times \hat{e}_e}{|\hat{L} \times \hat{e}_e|} \quad (\text{B7.2})$$

$$N = \frac{\hat{L} \times \hat{e}_e}{|\hat{L} \times \hat{e}_e|} = \frac{\hat{L} \times \hat{e}_e}{|\hat{L} \times \hat{e}_e|} \quad (\text{B7.3})$$

Con este sistema de coordenadas ahora determinado, la proyección de un punto a lo largo del eje de la cola sobre el plano fotográfico se encuentra fácilmente. Tal punto, encontrado por el método del Apéndice A, se denota por L_0, M_0, N_0 . Así la posición de este punto en las coordenadas L, M, N es

$$L_0 = \frac{L}{L_0} \quad M_0 = \frac{M}{M_0} \quad N_0 = \frac{N}{N_0} \quad (B8.1)$$

$$M_0 = \frac{(\sqrt{e^2 + e^2})^{1/2}}{L_0} \quad N_0 = \frac{e}{(\sqrt{e^2 + e^2})^{1/2}} \quad (B8.2)$$

$$N_0 = \frac{e}{(\sqrt{e^2 + e^2})^{1/2}} \quad (B8.3)$$

La posición de la Tierra es

$$L_e = 0 \quad M_e = 0 \quad N_e = 0 \quad (B9)$$

La línea recta que conecta la Tierra y el punto del eje de la cola es

$$\frac{L - L_0}{L_0} = \frac{M - M_0}{M_0} = \frac{N - N_0}{N_0} \quad (B10)$$

La proyección deseada del punto del eje de la cola sobre el plano fotográfico ($L = 0$) es entonces

$$M_{CM} = M_0 \frac{M_0 L_0}{L_0} \quad N_{CM} = N_0 \frac{N_0 L_0}{L_0} \quad (B11)$$

que con las ecuaciones (B8), produce la proyección deseada de los puntos L_{CM}, M_{CM} en el plano orbita del cometa:

$$M_{CM} = \frac{M_0}{(\sqrt{e^2 + e^2})^{1/2}} \quad N_{CM} = \frac{e}{(\sqrt{e^2 + e^2})^{1/2}} \quad (B12)$$

$$N_{CM} = \frac{e}{(\sqrt{e^2 + e^2})^{1/2}} \quad (B13)$$