

DINÁMICA DE LA ESTRELLA S2 ALREDEDOR DEL AGUJERO
NEGRO SUPERMASIVO GALÁCTICO SAGITARIO A* (UNA
APROXIMACIÓN NEWTONIANA)



TRABAJO DE GRADO

Para optar el título profesional de:

Físico

HERNÁN DARÍO ORDOÑEZ BACCA

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física
Agosto de 2017

DINÁMICA DE LA ESTRELLA S2 ALREDEDOR DEL AGUJERO
NEGRO SUPERMASIVO GALÁCTICO SAGITARIO A* (UNA
APROXIMACIÓN NEWTONIANA)

HERNÁN DARÍO ORDOÑEZ BACCA

TRABAJO DE GRADO

Director:

Alberto Quijano Vodniza

M.Sc. en Física

Codirector:

Leonardo Chaves Velásquez

M.Sc en Astrofísica

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física
Agosto de 2017

©2017 - HERNÁN DARÍO ORDOÑEZ BACCA

“Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores”

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Todos los derechos reservados.

Nota de Aceptación

M.Sc. Alberto Quijano Vodniza

Director

PHD. Ivanio Puerari

Jurado

PHD. Daniel Rosa Gonzalez

Jurado

San Juan de Pasto, Agosto 2017

Agradecimientos

Le agradezco a Dios por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo felicidad.

Le doy gracias al M. Sc. Diego Valencia por sus valiosos aportes a este trabajo, por su dedicación y empeño para conseguir este resultado.

De igual manera mi gratitud a mis profesores del Departamento de física de la Universidad de Nariño, por haberme apoyado en mi proceso académico, así mismo muchos agradecimientos al Dr. Ivanio Puerari por haberme facilitado los equipos de computo del INAOE que se utilizaron para la realización de este proyecto. Al Dr. Christos Efthymiopoulos del centro de investigaciones astronómicas y matemáticas aplicadas de la academia de Atenas por sus valiosos comentarios.

A mi familia por apoyarme en todo momento, por los valores que me han inculcado, y por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida. Sobre todo por ser un excelente ejemplo de vida.

También mis mas sinceros agradecimientos a Angie Escobar por su apoyo incondicional y por haber estado pendiente en todo momento en la consecución de mis objetivos.

“Uno puede describir la situación diciendo que el matemático juega a un juego en el que él mismo inventa las reglas, mientras que el físico juega a otro en que las reglas vienen fijadas por la naturaleza, pero con el transcurrir del tiempo se hace cada vez más evidente que las reglas que los matemáticos encuentran interesantes son las mismas que ha elegido la naturaleza.”

Paul Dirac

DINÁMICA DE LA ESTRELLA S2 ALREDEDOR DEL AGUJERO NEGRO SUPERMASIVO GALÁCTICO SAGITARIO A* (UNA APROXIMACIÓN NEWTONIANA)

Resumen

En este trabajo se estudia la dinámica estelar de la estrella S2 alrededor del agujero negro supermasivo de la Vía Láctea denominado Sagitario A. Para esto, se integran las ecuaciones de movimiento debidas a la interacción gravitacional de la estrella S2, un agujero negro de masa intermedia y el agujero negro masivo del núcleo Galáctico Sagitario A*. En total se corrieron ciento veinte simulaciones con diferentes valores de masa y parámetros orbitales del agujero negro de masa intermedia. La interacción gravitacional debida al agujero negro de masa intermedia, perturba los parámetros orbitales de la estrella tipo S, haciendo que estos evolucionen en el tiempo. Con el fin de cuantificar dichas perturbaciones se calcularon las variaciones de los parámetros orbitales con respecto a su valor inicial, ésto nos permitió obtener un indicativo de que tan alejados están estos parámetros de una interacción de dos cuerpos. Analizamos la naturaleza de la perturbación cuando la órbita del agujero negro de masa intermedia es interna a la órbita de S2 y también cuando es externa. En ambos casos se graficaron las variaciones de los parámetros orbitales a, e, i en función de la masa del agujero negro de masa intermedia. Obtuvimos para órbitas internas que no existe una correlación entre estos dos parámetros, sin embargo para órbitas externas, cuando la diferencia de inclinación es alta, y cuando la excentricidad del agujero negro de masa intermedia es cero se encontró una correlación lineal entre dichas cantidades. Por otro lado, se obtuvieron señales periódicas para la excentricidad y la inclinación*

en el mismo caso de órbitas externas con excentricidad nula y alta diferencia de inclinación. En los casos anteriores realizamos transformada de Fourier a dichas señales para obtener las principales frecuencias de oscilación, con estas cantidades se construyeron las gráficas de frecuencia en función de la masa. Los resultados mostraron nuevamente una correlación lineal. Finalmente se separaron las gráficas donde la excentricidad sobrepasa el valor de uno, por lo tanto la órbita de S2 corresponde a una órbita abierta y por lo tanto se considera que hay escape. La evidencia nos indica que en las perturbaciones donde hay correlación lineal se debe al mecanismo Kozai (Kozai 1962). Hemos investigado en la literatura y no hemos encontrado este tipo de tendencia asociado al mecanismo Kozai.

DYNAMICS OF THE S2 STAR AROUND THE SUPERMASSIVE GALACTIC BLACK HOLE SAGITTARIUS A* (A NEWTONIAN APROXIMATION)

Abstract

In this work we study the stellar dynamics of the S2 star around the supermasive Black Hole of the Milky way Sagittarius A. In order to achieve this goal we integrate the equations of motion due to the interaction between the S2 star, an intermediate massive black hole and the supermasive black hole of the Galactic nucleus Sagittarius A*. The gravitational interaction due to the intermediate massive black hole, perturbs the orbital parameters of the S2 star, therefore these parameters evolve in time. In order to quantify such perturbations we calculated the variations of the orbital parameters as regards their initial values, this allowed us to obtain an indicative about how far these parameters are from the two body problem. We analyse the nature of the perturbation when the orbit of the intermediate massive black hole is internal to S2 and when it is external as well. In both cases we drawn the variations of the orbital parameters a , e , i in function of the mass of the intermediate. For internal orbits we obtained that there is not correlation between these parameters, nevertheless for external orbits, when the the difference of inclination is high, and when the eccentricity of the intermediate black hole is zero, we found by view, a linear correlation between these two quantities. On the other hand, we obtained periodic signals for the eccentricity and the inclination in the same case for external high inclined and null eccentricity orbits. To get the main frequencies of oscillation we performed Fourier transform to such signals, whit these frequencies we built the figures of frequency in function of the mass of the intermediate massive black hole. Our results showed again a linear correlation. Finally we separate the figures when the eccentricity exceed the one value, therefore the orbit of S2 corresponds to an open orbit, thus there is scape of the S2 star. The evidence found in this work indicates that the perturbations where there is linear correlation, it is due to Kozai's mechanism (Kozai 1962). We have investigated in the scientific literature and we have not found this sort of linear tendency associated with such mechanism.*

Índice general

Índice de figuras	XII
Índice de tablas	XXV
1. Conceptos Teóricos	4
1.1. Problemas de dos y tres cuerpos	4
1.1.1. Problema de dos cuerpos	4
1.1.2. Determinación de la posición en el espacio	9
1.1.3. Parámetros orbitales	11
1.1.4. Problema de tres cuerpos	14
1.1.5. Núcleo Galáctico	19
2. Métodos numéricos	21
2.1. Método Runge Kutta Fehlberg	21
2.2. Integración del sistema de ecuaciones diferenciales	23
2.3. Transformada de Fourier	26
3. Parámetros orbitales y condiciones iniciales de la estrella S2	29
3.1. Parámetros orbitales de la estrella S2	29
3.2. Parámetros orbitales Agujero negro de masa intermedia	30
4. El Mecanismo Kozai	31
5. Resultados de las simulaciones	32
5.1. Parámetros Orbitales de la estrella S2 cuando $m_{IMBH} = 400M_{\odot}$	32
5.1.1. Excentricidad IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 0^{\circ}$	33
5.1.2. Excentricidad IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 45^{\circ}$	38
5.1.3. Excentricidad IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 90^{\circ}$	43
5.1.4. Excentricidad IMBH $e = 0,7$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 0^{\circ}$	48
5.1.5. Excentricidad IMBH $e = 0,7$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 45^{\circ}$	53
5.1.6. Excentricidad IMBH $e = 0,7$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 90^{\circ}$	58
5.2. Parámetros Orbitales de la estrella S2 cuando $m_{IMBH} = 1000M_{\odot}$	63
5.2.1. Excentricidad IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 0^{\circ}$	63
5.2.2. Excentricidad IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 45^{\circ}$	68
5.2.3. Excentricidad IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 90^{\circ}$	73
5.2.4. Excentricidad IMBH $e = 0,7$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 0^{\circ}$	79
5.2.5. Excentricidad IMBH $e = 0,7$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 45^{\circ}$	84
5.2.6. Excentricidad IMBH $e = 0,7$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 90^{\circ}$	89

5.3.	Parámetros Orbitales de la estrella S2 cuando $m_{IMBH} = 2000M_{\odot}$	94
5.3.1.	Excentricidad IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 0^{\circ}$	94
5.3.2.	Excentricidad IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 45^{\circ}$	99
5.3.3.	Excentricidad IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 90^{\circ}$	104
5.3.4.	Excentricidad IMBH $e = 0,7$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 0^{\circ}$	109
5.3.5.	Excentricidad IMBH $e = 0,7$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 45^{\circ}$	114
5.3.6.	Excentricidad IMBH $e = 0,7$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 90^{\circ}$	119
5.4.	Parámetros Orbitales de la estrella S2 cuando $m_{IMBH} = 4000M_{\odot}$	124
5.4.1.	Excentricidad IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 0^{\circ}$	124
5.4.2.	Excentricidad IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 45^{\circ}$	129
5.4.3.	Excentricidad IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 90^{\circ}$	134
5.4.4.	Excentricidad IMBH $e = 0,7$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 0^{\circ}$	139
5.4.5.	Excentricidad IMBH $e = 0,7$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 45^{\circ}$	144
5.4.6.	Excentricidad IMBH $e = 0,7$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 90^{\circ}$	149
6.	Análisis de resultados	154
6.1.	Perturbación debida a órbitas internas	155
6.1.1.	Perturbación sobre el semieje mayor	155
6.1.2.	Perturbación sobre la excentricidad	157
6.1.3.	Perturbación sobre la inclinación	159
6.2.	Perturbación debida a órbitas Externas	161
6.2.1.	Perturbación sobre el semieje mayor	161
6.2.2.	Perturbación sobre la excentricidad	163
6.2.3.	Perturbación sobre la inclinación	165
6.2.4.	Análisis del mecanismo Kozai	166
6.3.	Escape de órbitas	170
6.4.	Escape de la estrella S2	171
6.4.1.	$m_{IMBH} = 1000M_{\odot}$	171
6.4.2.	$m_{IMBH} = 2000M_{\odot}$	173
6.4.3.	$m_{IMBH} = 4000M_{\odot}$	179
	Conclusiones	186
6.4.4.	Trabajo futuro	187
	Bibliografía	188
	Anexos	191

Índice de figuras

1.1.	<i>Diagrama Vectorial de fuerzas actuando sobre las masas m_1 y m_2, con vectores de posición \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2. (Solar System Dynamics)</i>	6
1.2.	<i>Movimiento de m_2 con respecto a m_1 definida en un plano orbital (región sombreada), porque $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ es un vector constante, \mathbf{h}, el vector momento angular que es siempre perpendicular al plano de la órbita. (Solar System Dynamics)</i>	7
1.3.	<i>Geometría de la elipse, semieje mayor a, semieje menor b, excentricidad e y longitud del pericentro ϖ. (Solar System Dynamics)</i>	8
1.4.	<i>Movimiento orbital con respecto al plano de referencia en un espacio tridimensional ((Dan L. Boulet, Willmann-Bell, 1991))</i>	10
1.5.	<i>Rotación alrededor de z, un ángulo w. (Dan L. Boulet, Willmann-Bell, 1991)</i>	11
1.6.	<i>Rotación alrededor de X_1, un ángulo i. (Dan L. Boulet, Willmann-Bell, 1991)</i>	12
1.7.	<i>Rotación alrededor de Z_2, un ángulo Ω. (Dan L. Boulet, Willmann-Bell, 1991)</i>	13
1.8.	<i>Atracción gravitacional entre dos cuerpos. (Damby J.M.A. et al. 1997)</i>	15
1.9.	<i>Sistema con masa 1 como referencia. (Damby J.M.A. et al. 1997)</i>	18
2.1.	<i>(a) función que queremos representar, (b) representación de las series de Fourier de la función (Hassani S. 1998)</i>	26
5.1.	<i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$</i>	33
5.2.	<i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$</i>	34
5.3.	<i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$</i>	35
5.4.	<i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$</i>	36
5.5.	<i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$</i>	37

5.6. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$</i>	38
5.7. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$</i>	39
5.8. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$</i>	40
5.9. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$</i>	41
5.10. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$</i>	42
5.11. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$</i>	43
5.12. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$</i>	44
5.13. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$</i>	45
5.14. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$</i>	46
5.15. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$</i>	47
5.16. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$</i>	48
5.17. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$</i>	49
5.18. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$</i>	50

5.19. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$	51
5.20. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$	52
5.21. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$	53
5.22. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$	54
5.23. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$	55
5.24. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$	56
5.25. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$	57
5.26. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$	58
5.27. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$	59
5.28. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$	60
5.29. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$	61
5.30. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$	62
5.31. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$	63

5.32. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$	64
5.33. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$	65
5.34. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$	66
5.35. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$	67
5.36. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$	68
5.37. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$	69
5.38. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$	70
5.39. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$	71
5.40. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$	72
5.41. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$	73
5.42. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$	74
5.43. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$	75
5.44. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$	76

5.45. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$	77
5.46. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$	79
5.47. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$	80
5.48. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$	81
5.49. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$	82
5.50. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$	83
5.51. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$	84
5.52. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$	85
5.53. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$	86
5.54. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$	87
5.55. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$	88
5.56. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$	89
5.57. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$	90

5.58. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$</i>	91
5.59. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$</i>	92
5.60. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$</i>	93
5.61. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$</i>	94
5.62. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$</i>	95
5.63. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$</i>	96
5.64. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$</i>	97
5.65. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$</i>	98
5.66. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$</i>	99
5.67. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$</i>	100
5.68. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$</i>	101
5.69. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$</i>	102
5.70. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$</i>	103

5.71. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$</i>	104
5.72. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$</i>	105
5.73. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$</i>	106
5.74. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$</i>	107
5.75. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$</i>	108
5.76. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$</i>	109
5.77. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$</i>	110
5.78. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$</i>	111
5.79. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$</i>	112
5.80. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$</i>	113
5.81. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$</i>	114
5.82. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$</i>	115
5.83. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$</i>	116

5.84. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$</i>	117
5.85. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$</i>	118
5.86. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$</i>	119
5.87. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$</i>	120
5.88. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$</i>	121
5.89. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$</i>	122
5.90. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$</i>	123
5.91. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$</i>	124
5.92. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$</i>	125
5.93. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$</i>	126
5.94. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$</i>	127
5.95. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$</i>	128
5.96. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$</i>	129

5.97. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$	130
5.98. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$	131
5.99. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$	132
5.100. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$	133
5.101. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$	134
5.102. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$	135
5.103. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$	136
5.104. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$	137
5.105. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$	138
5.106. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$	139
5.107. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$	140
5.108. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$	141
5.109. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$	142

5.110	Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$	143
5.111	Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$	144
5.112	Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$	145
5.113	Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$	146
5.114	Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$	147
5.115	Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$	148
5.116	Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$	149
5.117	Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$	150
5.118	Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$	151
5.119	Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$	152
5.120	Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$	153
6.1.	a) $e = 0, i = 0, a = 0,3\text{mpc}$, b) $e = 0, i = 0, a = 1\text{mpc}$, c) $e = 0, i = 0, a = 3\text{mpc}$, d) $e = 0, i = 45, a = 0,3\text{mpc}$, e) $e = 0, i = 45, a = 1\text{mpc}$, f) $e = 0, i = 45, a = 3\text{mpc}$, g) $e = 0, i = 90, a = 0,3\text{mpc}$, h) $e = 0, i = 90, a = 1\text{mpc}$, i) $e = 0, i = 90, a = 3\text{mpc}$	155

6.2.	<i>j) e = 0,7, i = 0, a = 0,3mpc, k) e = 0,7, i = 0, a = 1mpc, l) e = 0,7, i = 0, a = 3mpc, m) e = 0,7, i = 45, a = 0,3mpc, n) e = 0,7, i = 45, a = 1mpc, o) e = 0,7, i = 45, a = 3mpc, p) e = 0,7, i = 90, a = 0,3mpc, q) e = 0,7, i = 90, a = 1mpc, r) e = 0,7, i = 90, a = 3mpc</i>	156
6.3.	<i>a) e = 0, i = 0, a = 0,3mpc, b) e = 0, i = 0, a = 1mpc, c) e = 0, i = 0, a = 3mpc, d) e = 0, i = 45, a = 0,3mpc, e) e = 0, i = 45, a = 1mpc, f) e = 0, i = 45, a = 3mpc, g) e = 0, i = 90, a = 0,3mpc, h) e = 0, i = 90, a = 1mpc, i) e = 0, i = 90, a = 3mpc</i>	157
6.4.	<i>j) e = 0,7, i = 0, a = 0,3mpc, k) e = 0,7, i = 0, a = 1mpc, l) e = 0,7, i = 0, a = 3mpc, m) e = 0,7, i = 45, a = 0,3mpc, n) e = 0,7, i = 45, a = 1mpc, o) e = 0,7, i = 45, a = 3mpc, p) e = 0,7, i = 90, a = 0,3mpc, q) e = 0,7, i = 90, a = 1mpc, r) e = 0,7, i = 90, a = 3mpc</i>	158
6.5.	<i>a) e = 0, i = 0, a = 0,3mpc, b) e = 0, i = 0, a = 1mpc, c) e = 0, i = 0, a = 3mpc, d) e = 0, i = 45, a = 0,3mpc, e) e = 0, i = 45, a = 1mpc, f) e = 0, i = 45, a = 3mpc, g) e = 0, i = 90, a = 0,3mpc, h) e = 0, i = 90, a = 1mpc, i) e = 0, i = 90, a = 3mpc</i>	159
6.6.	<i>j) e = 0,7, i = 0, a = 0,3mpc, k) e = 0,7, i = 0, a = 1mpc, l) e = 0,7, i = 0, a = 3mpc, m) e = 0,7, i = 45, a = 0,3mpc, n) e = 0,7, i = 45, a = 1mpc, o) e = 0,7, i = 45, a = 3mpc, p) e = 0,7, i = 90, a = 0,3mpc, q) e = 0,7, i = 90, a = 1mpc, r) e = 0,7, i = 90, a = 3mpc</i>	160
6.7.	<i>a) e = 0, i = 0, a = 10mpc, b) e = 0, i = 0, a = 30mpc, c) e = 0, i = 45, a = 10mpc, d) e = 0, i = 45, a = 30mpc, e) e = 0, i = 90, a = 10mpc, f) e = 0, i = 90, a = 30mpc</i>	161
6.8.	<i>g) e = 0,7, i = 0, a = 10mpc, h) e = 0,7, i = 0, a = 30mpc, i) e = 0,7, i = 45, a = 10mpc, j) e = 0,7, i = 45, a = 30mpc, k) e = 0,7, i = 90, a = 10mpc, l) e = 0,7, i = 90, a = 30mpc</i>	162
6.9.	<i>a) e = 0, i = 0, a = 10mpc, b) e = 0, i = 0, a = 30mpc, c) e = 0, i = 45, a = 10mpc, d) e = 0, i = 45, a = 30mpc, e) e = 0, i = 90, a = 10mpc, f) e = 0, i = 90, a = 30mpc</i>	163
6.10.	<i>g) e = 0,7, i = 0, a = 10mpc, h) e = 0,7, i = 0, a = 30mpc, i) e = 0,7, i = 45, a = 10mpc, j) e = 0,7, i = 45, a = 30mpc, k) e = 0,7, i = 90, a = 10mpc, l) e = 0,7, i = 90, a = 30mpc</i>	164
6.11.	<i>a) e = 0,0, i = 0, a = 10mpc, b) e = 0,0, i = 0, a = 30mpc, c) e = 0,0, i = 45, a = 10mpc, d) e = 0,0, i = 45, a = 30mpc, e) e = 0,0, i = 90, a = 10mpc, f) e = 0,0, i = 90, a = 30mpc</i>	165
6.12.	<i>g) e = 0,7, i = 0, a = 10mpc, h) e = 0,7, i = 0, a = 30mpc, i) e = 0,7, i = 45, a = 10mpc, j) e = 0,7, i = 45, a = 30mpc, k) e = 0,7, i = 90, a = 10mpc, l) e = 0,7, i = 90, a = 30mpc</i>	166
6.13.	<i>e = 0,0, i = 0,0, a = 10mpc</i>	167
6.14.	<i>espectros: Excentricidad e inclinación</i>	167

6.15. señales: Excentricidad e inclinación	168
6.16. señal - coeficiente H_K del efecto Kozai ecuación 4.1	168
6.17. Parámetros orbitales del IMBH: $e = 0,0, i = 0,0, a = 10\text{mpc}$	169
6.18. Parámetros orbitales del IMBH: $e = 0,0, i = 45, a = 10\text{mpc}$	169
6.19. Parámetros orbitales del IMBH: $e = 0,0, i = 90, a = 10\text{mpc}$	170
6.20. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$	171
6.21. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$	172
6.22. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$, ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$	173
6.23. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$, ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$	174
6.24. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$, ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$	175
6.25. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$	176
6.26. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$	177
6.27. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$	178
6.28. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$, ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$	179
6.29. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$, ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$	180
6.30. Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$, ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$	181

6.31. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$, ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$</i>	182
6.32. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$</i>	183
6.33. <i>Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$</i>	184

Índice de tablas

3.1. <i>Elementos orbitales de la estrella S2</i> [12]	29
3.2. <i>Elementos orbitales de las estrellas S</i> [12]	30

Introducción

La mejor prueba de la existencia de un agujero negro masivo en el centro galáctico, es el descubrimiento observacional de que las trayectorias de las estrellas más cercanas a este objeto, siguen órbitas Keplerianas. Dichas estrellas giran en presencia de un potencial gravitacional debido a una masa altamente concentrada de aproximadamente $4 \times 10^6 M_{\odot}$ (Schödel et al. 2002; Eisenhauer et al. 2005 ; Ghez et al. 2003, 2005).

Las estrellas más internas del núcleo galáctico (las denominadas estrellas S), se utilizan como partículas de prueba para sondear el potencial en el que se mueven. Sin tener en cuenta el gas y polvo cósmico, el movimiento de las estrellas está determinado únicamente por las fuerzas gravitacionales. Desde el comienzo de las observaciones en 1992, una de las estrellas, la llamada S2, ya ha completado una órbita. Esta órbita (Schödel et al. 2002 ; Ghez et al. 2003) tiene un período de 15 años. Desde el año 2002, el número de estrellas a las cuales se les ha podido determinar bien su órbita, ha crecido de 1 a 28; en total, en la actualidad son monitoreadas aproximadamente 109 estrellas.

Estudios espectroscópicos y de imágenes en el infrarrojo del centro de la vía láctea, indican la presencia de cerca de 100 estrellas jóvenes masivas. Estas estrellas pertenecen a 2 poblaciones distintas: 1. Fuera del primer segundo de arco, un grupo de aproximadamente 40 estrellas, en su mayoría TIPO O y Wolf-Rayet de aproximadamente 6 millones de años se mueven en órbitas aproximadamente circulares contenidas en un plano. 2. Dentro del primer segundo de arco, un grupo de 28 estrellas TIPO B (Estrellas TIPO S) que se mueven en orbitas excéntricas y aleatoriamente orientadas alrededor del agujero negro masivo (Ghez et al. 2003; Eisenhauer et al. 2005; Gillessen et al. 2009).

Se han propuesto varios modelos para explicar la existencia de las estrellas tipo S. En uno de estos escenarios se postula que estrellas jóvenes se han formado en una nube

molecular gigante muy lejos del agujero negro masivo, de esta forma las fuerzas de marea no imposibilitan el colapso y fragmentación de la nube. Así, el cúmulo estelar recién formado migra hacia el interior por medio de fricción dinámica antes de que las fuerzas de marea debidas al agujero negro masivo lo dispersen. En el artículo de Hansen y Milosavljevic 2003, se propone que la presencia de un agujero negro de masa intermedia en el centro del cúmulo podría facilitar el transporte del mismo hacia el interior. Con la ausencia de este objeto, el cúmulo podría ser completamente destruido por las fuerzas de marea a una distancia de aproximadamente 1pc del agujero negro masivo.

Se ha observado que las estrellas tipo S, siguen órbitas con altas excentricidades. En el trabajo de Merriet et al. (2009), se muestra que ambas propiedades son consecuencia natural de la interacción de varios millones de años con un agujero negro de masa intermedia como el que se mencionó anteriormente, siempre y cuando la órbita de este sea medianamente excéntrica y que su masa exceda aproximadamente $1500M_{\odot}$. Los resultados obtenidos por estos investigadores apoyan el modelo en el cual las estrellas jóvenes son llevadas al centro galáctico mientras están ligadas al agujero negro de masa intermedia, y son consistentes con la hipótesis de que este objeto podría estar actualmente orbitando dentro del cúmulo estelar.

En este trabajo se estudió la forma en que es perturbada la órbita de la estrella S2 por la existencia del agujero negro de masa intermedia (con sus siglas en inglés IMBH). Con el fin de hacer esto, se estudió el problema de tres cuerpos: agujero negro masivo (Sagitario A*), el IMBH y la estrella S2. Así mismo, se implementó un código computacional en lenguaje C, cuyas ecuaciones de movimiento se integraron numéricamente con ayuda de las librerías científicas GSL. Las condiciones iniciales para el sistema de ecuaciones diferenciales se obtuvieron a partir del trabajo observacional de Gillessen et al. (2009). En este estudio, se probaron varios valores de masa y parámetros orbitales para el IMBH. Para visualizar de manera concreta como esta órbita es perturbada, se analizó la evolución temporal de los parámetros orbitales de la estrella S2.

Este trabajo de tesis se organiza de la siguiente manera: En el capítulo 1 se hace una revisión de los conceptos teóricos asociados a los problemas de dos y tres cuerpos, además se estudia la física correspondiente al núcleo galáctico. En el capítulo 2 se hace un estudio del método de integración numérico utilizado en este trabajo (Método de Runge Kutta Fehlberg), aparte de esto se plantea el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden para el problema de tres cuerpos. En el capítulo 3 se escriben las ecuaciones correspondientes a los parámetros orbitales de S2, estas ecuaciones son función de las coordenadas de posición y velocidad en un espacio Euclideo, así mismo, se escriben los parámetros orbitales del IMBH que se utilizan en este trabajo para correr las simulaciones. En el capítulo 4 se hace una revisión del mecanismo Kozai. En el capítulo 5 se muestran los resultados de las simulaciones. En el capítulo 6 se hace un estudio de los resultados obtenidos. Finalmente se concluye y se hacen las recomendaciones y trabajo futuro.

Capítulo 1

Conceptos Teóricos

En esta parte del trabajo se hace una revisión de los problemas de dos y tres cuerpos, además del núcleo galáctico. En el caso del problema de dos cuerpos se describe minuciosamente el significado físico y geométrico de los seis parámetros orbitales que definen la órbita en el espacio. Las ecuaciones que se deducen en este capítulo relacionan las coordenadas cartesianas y velocidades de la partícula en función de los parámetros orbitales. Con respecto al problema de tres cuerpos se hace la deducción de las ecuaciones diferenciales de movimiento, estas ecuaciones diferenciales son de segundo orden y en nuestro caso se toman referentes a la masa principal del sistema que es el MBH, por lo tanto son referidas a un sistema de movimiento no inercial. También se hace una recopilación de lo que se ha encontrado en la literatura acerca de la física del núcleo galáctico. Para el problema de dos cuerpos se tomó como referencia el libro *Solar System Dynamics* de los autores C.D Murray S.F Dermott, y para el problema de tres cuerpos se tomó como referencia el libro *Computer Modeling: From Sports to Spaceflight, from Order to Chaos* de J.M.A. Danby.

Problemas de dos y tres cuerpos

Problema de dos cuerpos

La interacción de dos masas puntuales moviéndose bajo una atracción gravitacional mutua esta descrita por la ley de Gravitación Universal de Newton; esta consiste en un pequeño cuerpo moviéndose alrededor de un cuerpo central mas grande. Los efectos de otros cuerpos pueden usualmente ser tratados como perturbaciones al sistema de dos cuerpos.

Ecuaciones de movimiento

Considerando el movimiento de dos masas m_1 y m_2 con vectores de posición \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 en relación al origen O fijo en el espacio inercial (Figura 1.1).

El vector $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ denota la posición relativa de la masa m_2 con respecto a la masa m_1 . Las fuerzas gravitacionales y aceleraciones experimentadas por las dos masas son:

$$\mathbf{F}_1 = +\varrho \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 \quad y \quad \mathbf{F}_2 = -\varrho \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 \quad (1.1)$$

respectivamente, donde $\varrho = 6,67260 \times 10^{-11} \text{Nm}^2 \text{Kg}^{-2}$ es la *Constante de gravitación Universal*. Así, teniendo en cuenta que los vectores \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 están en un espacio tridimensional poseen tres componentes, lo que significa que cada una de las ecuaciones diferenciales vectoriales representan tres ecuaciones diferenciales en términos de componentes. Por lo tanto, serían seis ecuaciones diferenciales de segundo orden que se deben resolver. Esto implica a su vez que debemos hallar doce constantes de movimiento para resolver completamente el problema.

Para encontrar las primeras seis constantes de movimiento, se suman las ecuaciones 1.1 para obtener:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0 \quad (1.2)$$

la cual integrando se tiene:

$$m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{a} \quad y \quad m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{a}t + \mathbf{b} \quad (1.3)$$

donde \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores constantes. Si $\mathbf{R} = (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2)/(m_1 + m_2)$ denota la posición vectorial del centro de masa, entonces las ecuaciones (1.3) pueden ser escritas:

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{a}}{m_1 + m_2} \quad y \quad \mathbf{R} = \frac{\mathbf{a}t + \mathbf{b}}{m_1 + m_2} \quad (1.4)$$

Esto implica que el centro de masa esta estacionario (si $\mathbf{a} = 0$) o esta en movimiento con una velocidad constante en linea recta con respecto al origen O . Considerando el

movimiento de m_2 con respecto a m_1 se simplifica el problema sin perder sus características esenciales. Teniendo en cuenta que $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1$, y usando las ecuaciones (1.1), se tiene:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0 \quad (1.5)$$

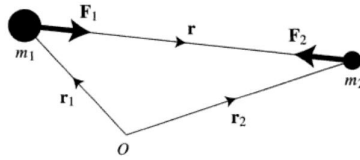


Figura 1.1: Diagrama Vectorial de fuerzas actuando sobre las masas m_1 y m_2 , con vectores de posición \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 . (Solar System Dynamics)

donde $\mu = \varrho(m_1 + m_2)$. Esta es la ecuación del movimiento relativo. Para resolverla y encontrar la trayectoria de m_2 relativa a m_1 se debe primero calcular las constantes del movimiento. Tomando el producto vectorial de \mathbf{r} con la ecuación (1.5) se tiene $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0$, que integrada directamente:

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h} \quad (1.6)$$

donde \mathbf{h} es un vector constante. Así, tenemos las primeras tres constantes de integración que son las tres componentes del momento angular. Teniendo en cuenta que este es un vector perpendicular a un plano formado por \mathbf{r} y $\dot{\mathbf{r}}$, la única manera de que \mathbf{h} sea invariante para todo tiempo, es que el movimiento de los cuerpos se realice en un mismo plano.

Usando el sistema de coordenadas polares (r y θ) centrado en m_1 y una línea de referencia arbitraria correspondiente a $\theta = 0$ y denotando \hat{r} y $\hat{\theta}$ como vectores unitarios perpendiculares al radio vector respectivamente, entonces los vectores posición, velocidad y aceleración pueden ser escritos en coordenadas polares como:

$$\mathbf{r} = r\hat{r} \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \right] \hat{\theta} \quad (1.7)$$

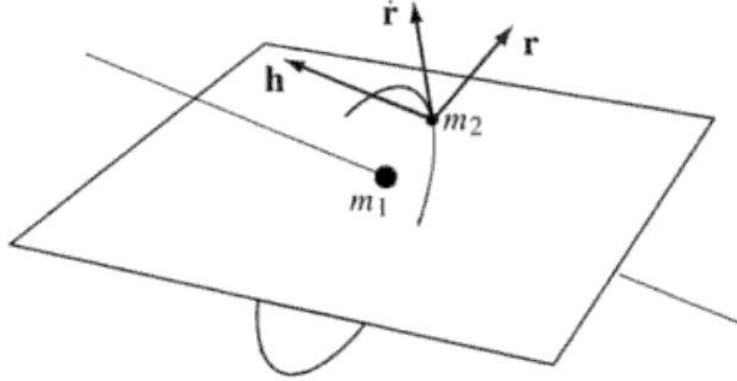


Figura 1.2: Movimiento de m_2 con respecto a m_1 definida en un plano orbital (región sombreada), porque $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ es un vector constante, \mathbf{h} , el vector momento angular que es siempre perpendicular al plano de la órbita. (Solar System Dynamics)

Substituyendo la expresión para $\dot{\mathbf{r}}$ en la ecuación (1.6) se obtiene $\mathbf{h} = r^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{z}}$, así, la magnitud del vector \mathbf{h} queda determinada por:

$$h = r^2\dot{\theta} \quad (1.8)$$

Posición orbital y velocidad

Substituyendo las ecuaciones (1.7) en (1.5) y comparando las componentes de $\hat{\mathbf{r}}$ se tiene:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} \quad (1.9)$$

para resolverla es necesario realizar un cambio de variables $u=1/r$ y tener en cuenta la ecuación (1.8) para obtener:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \varpi)} \quad (1.10)$$

que es la ecuación general de una cónica en coordenadas polares donde e es la excentricidad

y p es el semilactus return dado por:

$$p = h^2/\mu \quad (1.11)$$

Las cuatro posibles secciones cónicas son:

- circulo: $e = 0, \quad p = a.$
- elipse: $0 < e < 1, \quad p = a(1 - e^2).$
- parábola: $e = 1, \quad p = 2q.$
- hipérbola: $e > 1, \quad p = a(e^2 - 1).$

donde la constante a es el *semieje mayor* de la cónica.

En el problema de los dos cuerpos la trayectoria generalmente es una elipse ubicada en un espacio inercial, donde la primera ley de Kepler del movimiento planetario es una consecuencia de la ley del inverso al cuadrado de la fuerza. En la figura (1.3) se observa que la masa m_1 llena uno de los focos de la elipse mientras el otro foco esta vacío.

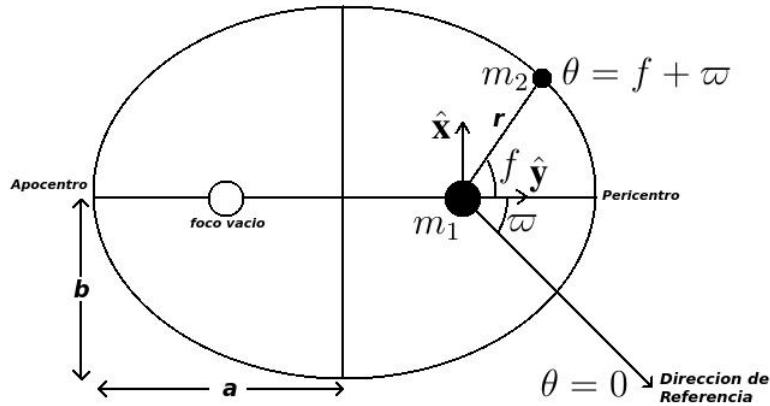


Figura 1.3: Geometría de la elipse, semieje mayor a , semieje menor b , excentricidad e y longitud del pericentro ϖ . (Solar System Dynamics)

En el caso $p = a(1 - e^2)$, las cantidades a y e quedan determinadas por:

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \quad (1.12)$$

teniendo finalmente:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \varpi)} \quad (1.13)$$

aquí, el ángulo θ se conoce como *longitud verdadera* y el ángulo ϖ es la *longitud del pericentro* (aunque esta es una constante del problema de los dos cuerpos, varía cuando se producen perturbaciones adicionales). Es mas conveniente referirse a la coordenada angular al pericentro que a la línea arbitraria de referencia. Esto lleva a introducir un ángulo $f = \theta - \varpi$ (mirar figura (1.3)) que es llamado *anomalía verdadera*. Aunque ϖ es constante la trayectoria es cerrada y la posición angular es descrita por f o θ que son variables periódicas. Así la ecuación (1.13) puede escribirse como:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (1.14)$$

Determinación de la posición en el espacio

Teniendo en cuenta que los vectores posición y velocidad de la masa m_2 con respecto a m_1 están siempre en un plano perpendicular al vector momento angular. Si un objeto se desplaza cortando el plano fundamental XY en un cierto ángulo Ω (longitud del nodo ascendente) con respecto al eje X y con un ángulo de inclinación i como se muestra en la figura (1.4).

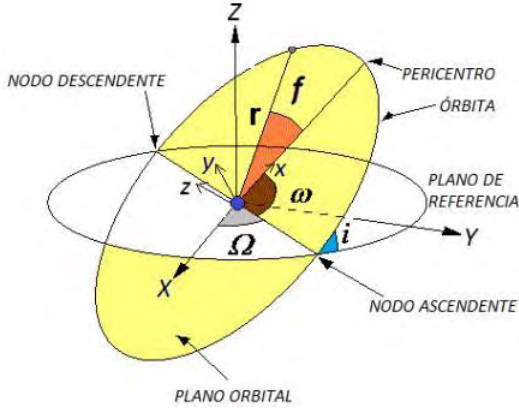


Figura 1.4: *Movimiento orbital con respecto al plano de referencia en un espacio tridimensional ((Dan L. Boulet, Willmann-Bell, 1991))*

Sabiendo que el movimiento está confinado en un plano orbital fijo, se considera un sistema cartesiano inercial XYZ con respecto al cual un punto arbitrario tiene un vector posición $\mathbf{r} = (x, y, z) = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$. El vector posición se toma a lo largo del semieje mayor de la elipse en la dirección del pericentro.

En general, el plano orbital debe estar inclinado respecto al plano de referencia un ángulo i llamado *inclinación* de la órbita. La línea que resulta del corte entre los dos planos (el plano de referencia (plano inercial) y el plano de la órbita) es llamada *línea de los nodos* donde el punto por donde el astro cruza el plano XY de abajo hacia arriba es llamado *nodo ascendente* y el punto diametralmente opuesto se llama *nodo descendente*. El ángulo entre el radio vector del nodo ascendente y el pericentro es llamado *argumento del pericentro*

La inclinación varía siempre en el rango $0 \leq i \leq 180$. Si $i = 90$ el movimiento será **progrado** mientras si $i \geq 90$ el movimiento es **retrógrado**. en el límite cuando $i \rightarrow 0$ el plano orbital coincide con el plano de referencia Teniendo:

$$\varpi = \Omega - \omega \tag{1.15}$$

Parámetros orbitales

Los parámetros orbitales son cinco elementos que en el problema de los dos cuerpos son constantes que están directamente relacionadas con las constantes de integración obtenidas al resolver el problema de los dos cuerpos.

a , el semieje mayor.

e , la excentricidad.

i , inclinación de la órbita respecto al plano de referencia.

Ω , longitud del nodo ascendente.

w , argumento de la latitud del pericentro.

Sabiendo que para un instante dado t los valores θ y r al igual que Ω , i y w (que son constantes) encontramos las componentes del vector posición $\mathbf{r}(x, y, z)$ y $\dot{\mathbf{r}}(x, y, z)$ (o alternativamente, r , θ , \dot{r} y $\dot{\theta}$) de la masa m_2 respecto a m_1 en una órbita definida para cualquier tiempo tienen una localización sobre la órbita por tres constantes a , e , w y el ángulo variable f , el cual indica la posición del cuerpo respecto al pericentro. El análisis se enfoca en el entendimiento del movimiento en el plano orbital. Sin embargo en el sistema lunar se considera una representación tridimensional de la órbita en el espacio (Figura 1.4).

La Figura (1.4) muestra las relaciones entre el sistema de coordenadas orbitales y el sistema de referencia. Es claramente que las coordenadas en un sistema pueden ser expresadas en términos del otro por medio de tres rotaciones sobre varios ejes.

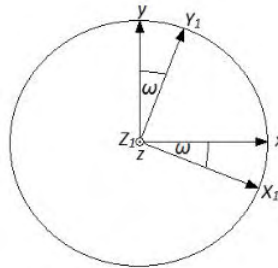


Figura 1.5: Rotación alrededor de z , un ángulo w . (Dan L. Boulet, Willmann-Bell, 1991)

Para transformar desde el sistema de referencia del plano orbital (x, y, z) , al

sistema de referencia, (X, Y, Z) , primero se realiza una rotación sobre el eje z un ángulo w , (Figura 1.5), de modo que el eje X_1 coincida con la línea de nodos, el resultado es un sistema (X_1, Y_1, Z_1) , donde:

$$\begin{aligned} X_1 &= x \cos(w) - y \sin(w). \\ Y_1 &= x \sin(w) + y \cos(w). \\ Z_1 &= z. \end{aligned} \quad (1.16)$$

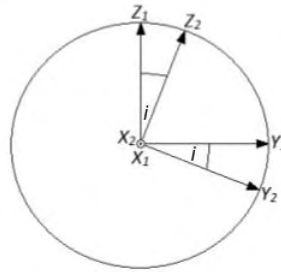


Figura 1.6: Rotación alrededor de X_1 , un ángulo i . (Dan L. Boulet, Willmann-Bell, 1991)

Luego una rotación del sistema (X_1, Y_1, Z_1) sobre el eje X_1 , por medio de un ángulo i , como se muestra en la Figura (1.6), el resultado es un sistema (X_2, Y_2, Z_2) , así:

$$\begin{aligned} X_2 &= X_1. \\ Y_2 &= Y_1 \cos(i) - Z_1 \sin(i). \\ Z_2 &= Y_1 \sin(i) + Z_1 \cos(i). \end{aligned} \quad (1.17)$$

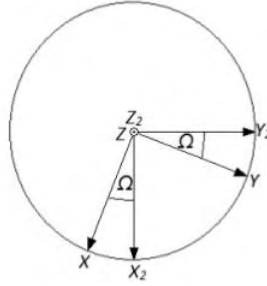


Figura 1.7: Rotación alrededor de Z_2 , un ángulo Ω . (Dan L. Boulet, Willmann-Bell, 1991)

Finalmente una rotación sobre el eje Z_2 un ángulo Ω , Figura (1.7), el resultado será el sistema X, Y, Z.

$$\begin{aligned} X &= X_2 \cos(\Omega) - Y_2 \sin(\Omega). \\ Y &= X_2 \sin(\Omega) + Y_2 \cos(\Omega). \\ Z &= Z_2. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Remplazando (1.16) y (1.17) en (1.18) se tiene:

$$\begin{aligned} X &= x[\cos(w) \cos(\Omega) - \text{sen}(w) \text{sen}(\Omega) \cos(i)] - y[\text{sen}(w) \cos(\Omega) \\ &\quad + \cos(w) \text{sen}(\Omega) \cos(i)] + z \text{sen}(\Omega) \text{sen}(i). \\ Y &= x[\cos(w) \text{sen}(\Omega) + \text{sen}(w) \cos(\Omega) \cos(i)] - y[\text{sen}(w) \text{sen}(\Omega) \\ &\quad - \cos(w) \cos(\Omega) \cos(i)] - z \cos(\Omega) \text{sen}(i). \\ Z &= x \text{sen}(w) \text{sen}(i) + y \cos(w) \text{sen}(i) + z \cos(i). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Al conocer los elementos clásicos es posible determinar la posición inicial en el espacio con respecto al plano de referencia, de acuerdo a las ecuaciones de transformación, (1.19). Si se restringe las coordenadas en la línea del plano orbital, donde en este caso las condiciones iniciales son, $x_{iL} = r \cos f$, $y_{iL} = r \text{sen} f$ y $z_{iL} = 0$, entonces, (1.19), para las condiciones iniciales, queda de la forma:

$$\begin{aligned}
X_{iL} &= r[\cos(\Omega) \cos(w + f) - \sin(\Omega) \sin(w + f) \cos(i)]. \\
Y_{iL} &= r[\sin(\Omega) \cos(w + f) + \cos(\Omega) \sin(w + f) \cos(i)]. \\
Z_{iL} &= r[\sin(w + f) \sin(i)].
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Ahora, tomamos las ecuaciones 1.20 y reemplazamos r definido en la ecuación (1.14). Las condiciones iniciales en el plano de referencia serían:

$$\begin{aligned}
X_{iL} &= \left(\frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \right) [\cos(\Omega) \cos(w + f) - \sin(\Omega) \sin(w + f) \cos(i)]. \\
Y_{iL} &= \left(\frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \right) [\sin(\Omega) \cos(w + f) + \cos(\Omega) \sin(w + f) \cos(i)]. \\
Z_{iL} &= \left(\frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \right) [\sin(w + f) \sin(i)].
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Para encontrar las velocidades derivamos las ecuaciones 1.21 para obtener:

$$\begin{aligned}
\dot{X}_{iL} &= \sqrt{\frac{\varrho(m_1 + m_2)}{a(1 - e^2)}} [\cos(\Omega)(\sin(w + f) + e \sin(w)) \\
&\quad + \sin(\Omega)(\cos(w + f) + e \cos(w) \cos(i))]. \\
\dot{Y}_{iL} &= \sqrt{\frac{\varrho(m_1 + m_2)}{a(1 - e^2)}} [\sin(\Omega)(\sin(w + f) + e \sin(w)) \\
&\quad + \cos(\Omega)(\cos(w + f) + e \cos(w) \cos(i))]. \\
\dot{Z}_{iL} &= \sqrt{\frac{\varrho(m_1 + m_2)}{a(1 - e^2)}} (\cos(w + f) + e \cos(w)) \sin(i).
\end{aligned} \tag{1.22}$$

donde los valores de a y e se pueden cambiar de acuerdo al sistema que se este analizando.

Problema de tres cuerpos

Muchos cuerpos astronómicos se pueden aproximar a esferas y se pueden trabajar usando simetría esférica con su respectivo centro de masa. Usando las leyes del movimiento de Newton, una masa A atrae otra masa B con una fuerza que es proporcional al

producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas y tomando como referencia la línea que los une:

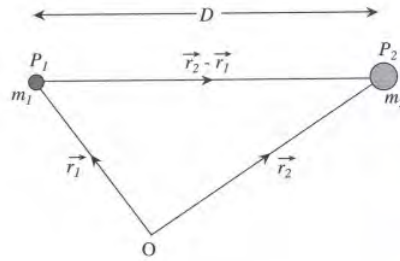


Figura 1.8: Atracción gravitacional entre dos cuerpos. (Damby J.M.A. et al. 1997)

Suponiendo que se tiene la masa m_1 en P_1 y m_2 en P_2 con vectores de posición \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 con respecto a un origen O . El vector $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Así, $\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\| = D$ entonces la fuerza de m_2 sobre m_1 es:

$$\mathbf{F} = \varrho m_1 m_2 \left(\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{D^3} \right) \quad (1.23)$$

donde ϱ es la constante de gravitación universal. La fuerza \mathbf{F} puede ser expresada de otro modo si se introduce el potencial:

$$\mathbf{V}_{12} = - \frac{\varrho m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|} \quad (1.24)$$

tomando como referencia el sistema de coordenadas $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ entonces:

$$D = \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (1.25)$$

y:

$$\frac{\partial V_{12}}{\partial x_1} = \varrho m_1 m_2 \frac{x_2 - x_1}{D^3} \quad (1.26)$$

La cual es la negativa de la componente x de la fuerza en la ecuación (1.24). Definiendo el operador:

$$\nabla_1 = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y_1} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z_1} \quad (1.27)$$

por lo tanto:

$$\mathbf{F} = -\nabla_1 V_{12} \quad (1.28)$$

Aplicando lo anterior es posible encontrar las ecuaciones de movimiento de la atracción mútua entre tres cuerpos de masas, m_1 , m_2 y m_3 con vectores de posición \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 y \mathbf{r}_3 respectivamente, relativos al origen O. Aplicando las leyes del movimiento de Newton, es importante mencionar que O es el origen de un sistema inercial de referencia. La ecuación de movimiento de m_1 es:

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \varrho m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} + \varrho m_1 m_3 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1\|^3} \quad (1.29)$$

por simetría es posible encontrar las ecuaciones de movimiento de m_2 y m_3

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \varrho m_2 m_3 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2\|^3} + \varrho m_2 m_1 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} \quad (1.30)$$

$$m_3 \frac{d^2 \mathbf{r}_3}{dt^2} = \varrho m_3 m_1 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3\|^3} + \varrho m_3 m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\|^3} \quad (1.31)$$

sumando las tres ecuaciones, es fácil observar que los términos del lado derecho se cancelan, obteniendo:

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} + m_3 \frac{d^2 \mathbf{r}_3}{dt^2} = 0 \quad (1.32)$$

integrando se obtiene:

$$m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + m_3 \frac{d\mathbf{r}_3}{dt} = \mathbf{A} \quad (1.33)$$

integrando nuevamente se obtiene:

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 = \mathbf{A}t + \mathbf{B} \quad (1.34)$$

donde \mathbf{A} y \mathbf{B} son vectores constantes de integración. esto significa que el centro de masas no está acelerado o se mueve con velocidad constante, así, el centro de masas es un origen inercial valido. Las ecuaciones (1.33) y (1.34) representan integrales de un sistema dinámico. Si las ecuaciones (1.29), (1.30) y (1.31) son multiplicadas vectorialmente por $\mathbf{r}_1 \times$, $\mathbf{r}_2 \times$ y $\mathbf{r}_3 \times$ respectivamente, y sumando todos los términos de la derecha se cancelan, así:

$$V = V_{12} + V_{23} + V_{31} \quad (1.35)$$

donde la ecuación (1.24) y dos similares son usadas para V_{ij} , entonces:

$$T = \frac{1}{2} \left(m_1 \left(\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \right)^2 + m_2 \left(\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right)^2 + m_3 \left(\frac{d\mathbf{r}_3}{dt} \right)^2 \right) \quad (1.36)$$

Si las ecuaciones (1.29), (1.30) y (1.31) son multiplicadas escalarmente por $\dot{\mathbf{r}}_1$, $\dot{\mathbf{r}}_2$ y $\dot{\mathbf{r}}_3$ respectivamente y sumando, los términos pueden ser integrados respecto al tiempo, dando como resultado la ley de la conservación de la energía.

$$T + V = h \quad (1.37)$$

Las ecuaciones (1.29), (1.30) y (1.31) pueden ser integradas numéricamente. Es mucho más sencillo escoger el centro de masa del sistema como origen, esto implica escoger condiciones iniciales tales que los vectores constantes \mathbf{A} y \mathbf{B} sean cero en las ecuaciones (1.33) y (1.34).

Es conveniente mover el origen al centro de uno de los cuerpos atrayentes (por ejemplo, en el movimiento entre planetas el centro es el sol). Usando la notación de la figura (1.9)

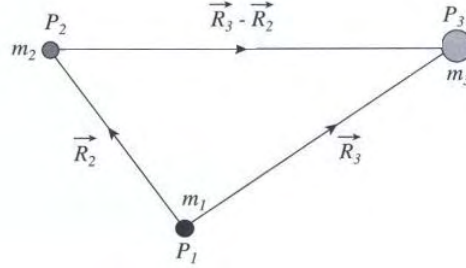


Figura 1.9: Sistema con masa 1 como referencia. (Damby J.M.A. et al. 1997)

Encontramos las ecuaciones para el movimiento de m_2 en $\mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Así, las ecuaciones (1.29) y (1.30) quedan escritas de la siguiente forma.

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \varrho m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} + \varrho m_3 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1\|^3} = \varrho m_2 \frac{\mathbf{R}_2}{R_2^3} + \varrho m_3 \frac{\mathbf{R}_3}{R_3^3} \quad (1.38)$$

y.

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \varrho m_3 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2\|^3} + \varrho m_1 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2} = \varrho m_3 \frac{\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2}{\|\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2\|^3} - \varrho m_1 \frac{\mathbf{R}_2}{R_2^3} \quad (1.39)$$

restando la primera de la segunda ecuación, se obtiene:

$$\frac{d^2 \mathbf{R}_2}{dt^2} = \varrho m_3 \left(\frac{\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2}{\|\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2\|^3} - \frac{\mathbf{R}_3}{R_3^3} \right) - \varrho(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{R}_2}{R_2^3} \quad (1.40)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{R}_3}{dt^2} = \varrho m_2 \left(\frac{\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3}{\|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3\|^3} - \frac{\mathbf{R}_2}{R_2^3} \right) - \varrho(m_1 + m_3) \frac{\mathbf{R}_3}{R_3^3} \quad (1.41)$$

Estas ecuaciones son el resultado de tener un sistema con un origen no inercial. De esta forma, se consigue un importante resultado tomando $m_3 = 0$, consiguiendo la ecuación relativa para el movimiento de dos cuerpos.

$$\frac{d^2 \mathbf{R}_2}{dt^2} + \varrho(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{R}_2}{R_2^3} = 0 \quad (1.42)$$

si m_3 es pequeña, comparada con las otras masas o si esta relativamente a una distancia muy grande, entonces la ecuación (1.40) puede ser interpretada como la perturbación del movimiento de los dos cuerpos m_2 y m_1 debida al tercer cuerpo de mas m_3 .

Núcleo Galáctico

El núcleo galáctico puede ser estudiado de forma detallada y a altas resoluciones a una distancia de 8kpc. Por simplicidad, se usa el valor mas reciente $R_0 = 7,62 \pm 0,32$ kpc (Eisenhauer et al. 2005).

El centro de la Vía Láctea es un laboratorio único para estudiar procesos que suceden generalmente en el núcleo galáctico. El segundo de arco mas próximo de nuestra Galaxia contiene un denso cúmulo de estrellas, muy luminosas, jóvenes y masivas (Allen et al. 1990; Krabbe et al. 1995; Genzel et al. 2000; Paumard et al. 2001), así como varios componentes de gas extremadamente caliente, neutral e ionizado (Mezger et al. 1996; Morris y Serabyn 1996; Genzel 2001).

Durante dos décadas se ha encontrado evidencia de que el centro galáctico alberga una concentración de materia oscura asociada con un radio compacto localizado en el centro del cúmulo (Sagitario A*). Mediciones de velocidades estelares y orbitas (parciales) han establecido que lo que antes se creía era una concentración de materia oscura es en realidad un agujero negro masivo de $(3 - 4) \times 10^6 M_\odot$ (Eckart y Genzel 1996, 1997; Guez et al. 2005; Schödel et al. 2002, 2003). El centro galáctico constituye la mejor evidencia de la existencia del agujero negro masivo del núcleo galáctico el cual constituye una oportunidad única para estudiar los procesos físicos estelares alrededor del agujero negro.

Evidencia de un agujero negro de masa intermedia

Estudiando los efectos a corto plazo de un IMBH en la órbita de la estrella S2 (S02), la estrella con el período mas corto conocido en orbitar alrededor del MBH en el centro de la Vía Láctea. Imágenes cercanas en el Infrarrojo y observaciones espectroscópicas permiten una determinación precisa de la órbita de la estrella.

Se demuestra que las perturbaciones debidas a un IMBH en una órbita alrededor del MBH, pueden producir un cambio en la apoapsis de S2 que es tan grande o incluso más grande que el desplazamiento relativo. Un IMBH también induce cambios en el plano de la órbita de S2 a un nivel tan grande como 1° por período. Aplicando técnicas de observación

y ajuste orbital a simulaciones del cúmulo S en presencia de un IMBH se encontró que un IMBH más masivo de alrededor de $1000M_{\odot}$ a la distancia de las estrellas S será detectable en el siguiente periapsis de S2, que tendrá lugar en 2018” (Gualandris, et al. 2010).

Se ha propuesto que un IMBH con masa $10^{3-5}M_{\odot}$ podría caer en el centro galáctico (con sus siglas en inglés GC) y formar un enorme agujero negro binario con el agujero negro supermasivo central (MBHB). Motivados por el reciente descubrimiento de que MBHBs podrían aumentar la tasa de eventos de interrupción de mareas (TDE) de objetos estelares, se investiga la posibilidad de utilizar esta tasa para sondear IMBHs en el GC. En el trabajo de Chen et al. (2013) incorporan la perturbación por un IMBH se calcularon las tasas estelares de interrupción en el GC. Se encontró que un IMBH mas pesado que $2000M_{\odot}$ podría aumentar indiscutiblemente la tasa de interrupción estelar. Al comparar las observaciones de Sagitario A* con el modelo de repliegue para los restos estelares, se ha sugerido que la tasa de eventos de interrupción de mareas en nuestra galaxia no debería exceder significativamente $0,002yr^{-1}$, por lo tanto, una fracción de los parámetros espaciales para el IMBH, se concentran en grandes masas y estas pueden ser excluidas. Para derivar la restricción en el espacio de los parámetros restantes, es importante para confirmar las observaciones, colocar la tasa estelar de interrupción entre 10^{-4} y $10^{-2}yr^{-1}$, discutiendo las posibles estrategias para hacer este tipo de mediciones” Chen et al. (2013).

Capítulo 2

Métodos numéricos

En este capítulo se hace referencia a los métodos numéricos utilizados tanto para hacer las simulaciones como para hacer el análisis de las mismas. El método de integración que hemos utilizado es el método de Runge Kutta Fehlberg de orden 4,5. Las librerías científicas utilizadas para el anterior propósito fueron obtenidas del paquete científico: GNU Scientific libraries o con sus siglas en inglés GSL. Con el fin de integrar numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales es necesario reducir a orden uno el sistema de ecuaciones diferenciales por lo cual el sistema completo consiste de doce ecuaciones diferenciales no lineales acopladas de primer orden. También se dedujeron las ecuaciones que permiten obtener los parámetros orbitales en función de las coordenadas cartesianas y las velocidades. Para hacer el análisis de las frecuencias por efecto Kozai (Kozai 1962) se hizo uso de la transformada rápida de Fourier, para este propósito se usaron las librerías de Python.

Método Runge Kutta Fehlberg

Con el fin de integrar nuestro sistema de ecuaciones diferenciales usamos las librerías científicas de C y C++ GSL. En específico utilizamos el integrador Runge Kutta Fehlberg de orden 4,5.

El método de Runge Kutta Fehlberg tiene un procedimiento para determinar si el tamaño del paso que se utiliza es el apropiado. En cada paso, se hacen dos aproximaciones a la solución y se comparan. Si las dos respuestas están de acuerdo, la aproximación es aceptada. Si las dos respuestas no están de acuerdo con la precisión especificada, la longitud del paso es reducida. Si las respuestas aceptan dígitos más significativos que los requeridos, la longitud del paso se incrementa.

Cada paso requiere usar los siguientes seis valores:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_k, y_k) \\
k_2 &= hf\left(t_k + \frac{1}{4}h, y_k + \frac{1}{4}k_1\right) \\
k_3 &= hf\left(t_k + \frac{3}{8}h, y_k + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right) \\
k_4 &= hf\left(t_k + \frac{12}{13}h, y_k + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right) \\
k_5 &= hf\left(t_k + h, y_k + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right) \\
k_6 &= hf\left(t_k + \frac{1}{2}h, y_k - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right)
\end{aligned}$$

entonces una aproximación a la solución de una ecuación diferencial se hace usando el método Runge Kutta de orden cuatro.

$$y_{k+1} = y_k + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4101}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \quad (2.1)$$

donde las cuatro funciones f_1 , f_3 , f_4 y f_5 son usadas. Note que f_2 no se usa en esa formula. Un mejor resultado para la solución es determinado usando el método Runge Kutta de orden cinco.

$$z_{k+1} = y_k + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12,825}k_3 + \frac{28,561}{56,430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \quad (2.2)$$

La longitud mas óptima del paso sh se puede ser determinada multiplicando s veces el tamaño del paso actual h . El escalar s es:

$$s = \left(\frac{tolh}{2|z_{k+1} - y_{k+1}|}\right)^{1/4} \approx 0,84 \left(\frac{tolh}{2|z_{k+1} - y_{k+1}|}\right)^{1/4} \quad (2.3)$$

donde tol es la tolerancia del error especificada.

Integración del sistema de ecuaciones diferenciales

Haciendo un cambio de variables en las ecuaciones diferenciales de segundo orden (1.40) y (1.41) con el fin de reducir las en un orden de magnitud (para poder aplicar el método Runge-Kutta Fehlberg) y separando en coordenadas cartesianas se obtiene:

Tomando:

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}_2}{dt} \quad (2.4)$$

donde para cada coordenada del IMBH se tiene:

$$V_{X_2} = \frac{dX_2}{dt} \quad V_{Y_2} = \frac{dY_2}{dt} \quad V_{Z_2} = \frac{dZ_2}{dt} \quad (2.5)$$

de la misma forma para la estrella S2:

$$V_{X_3} = \frac{dX_3}{dt} \quad V_{Y_3} = \frac{dY_3}{dt} \quad V_{Z_3} = \frac{dZ_3}{dt} \quad (2.6)$$

y efectuando el cambio de variables se tiene:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \quad (2.7)$$

$$\frac{d\mathbf{V}_2}{dt} = \varrho m_3 \left(\frac{\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2}{\|\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2\|^3} - \frac{\mathbf{R}_3}{R_3^3} \right) - \varrho(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{R}_2}{R_2^3} \quad (2.8)$$

$$\frac{d\mathbf{V}_3}{dt} = \varrho m_2 \left(\frac{\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3}{\|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3\|^3} - \frac{\mathbf{R}_2}{R_2^3} \right) - \varrho(m_1 + m_3) \frac{\mathbf{R}_3}{R_3^3} \quad (2.9)$$

teniendo finalmente seis ecuaciones diferenciales de primer orden, (2.5) para el IMBH mientras (2.6) para la estrella S2.

Descomponiendo en coordenadas cartesianas las ecuaciones (2.8) y (2.9) se obtiene:

$$\frac{d\mathbf{V}_{X2}}{dt} = \varrho m_3 \left(\frac{X_3 - X_2}{\|\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2\|^3} - \frac{X_3}{R_3^3} \right) - \varrho(m_1 + m_2) \frac{X_2}{R_2^3} \quad (2.10)$$

$$\frac{d\mathbf{V}_{Y2}}{dt} = \varrho m_3 \left(\frac{Y_3 - Y_2}{\|\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2\|^3} - \frac{Y_3}{R_3^3} \right) - \varrho(m_1 + m_2) \frac{Y_2}{R_2^3} \quad (2.11)$$

$$\frac{d\mathbf{V}_{Z2}}{dt} = \varrho m_3 \left(\frac{Z_3 - Z_2}{\|\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2\|^3} - \frac{Z_3}{R_3^3} \right) - \varrho(m_1 + m_2) \frac{Z_2}{R_2^3} \quad (2.12)$$

$$\frac{d\mathbf{V}_{X3}}{dt} = \varrho m_2 \left(\frac{X_2 - X_3}{\|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3\|^3} - \frac{X_2}{R_2^3} \right) - \varrho(m_1 + m_3) \frac{X_3}{R_3^3} \quad (2.13)$$

$$\frac{d\mathbf{V}_{Y3}}{dt} = \varrho m_2 \left(\frac{Y_2 - Y_3}{\|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3\|^3} - \frac{Y_2}{R_2^3} \right) - \varrho(m_1 + m_3) \frac{Y_3}{R_3^3} \quad (2.14)$$

$$\frac{d\mathbf{V}_{Z3}}{dt} = \varrho m_2 \left(\frac{Z_2 - Z_3}{\|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3\|^3} - \frac{Z_2}{R_2^3} \right) - \varrho(m_1 + m_3) \frac{Z_3}{R_3^3} \quad (2.15)$$

que junto con las ecuaciones (2.5) y (2.6) forman el sistema de doce ecuaciones diferenciales no lineales acopladas del problema.

donde:

$$R_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2} \quad (2.16)$$

$$R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2 + Z_3^2} \quad (2.17)$$

$$R_{32} = \sqrt{(X_3 - X_2)^2 + (Y_3 - Y_2)^2 + (Z_3 - Z_2)^2} \quad (2.18)$$

Para la integración del sistema de ecuaciones se utiliza el método Runge-Kutta Fehlberg (Sección (2.1)) En las tablas (3.1) y (3.2) se encuentran los valores de los parámetros orbitales tanto para el IMBH como para la estrella S2. Usando las ecuaciones (1.21) y (1.22) se obtienen las condiciones iniciales para la integración del sistema.
(mas datos de integración)

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\varrho(m_1 + m_2)}} \quad (2.19)$$

$$D_t = \frac{46,837}{2\pi} \quad (2.20)$$

$$t_f = \frac{2 \times 10^6}{D_t} \quad (2.21)$$

Finalmente, para obtener la variación en los parámetros orbitales de la estrella S2 se realiza la transformación de las coordenadas de posición (X,Y,Z) y velocidad (V_X , V_Y , V_Z) a los parámetros a , e , I , Ω , w y f . Asumiendo que m_1 es la masa del objeto central (SMBH) y m_3 es la masa de la estrella S2, y definiendo en primera instancia el momento angular \mathbf{L} :

$$L = \sqrt{L_X^2 + L_Y^2 + L_Z^2} \quad (2.22)$$

$$L = \sqrt{(YV_Z - ZV_Y)^2 + (ZV_X - XV_Z)^2 + (XV_Y - YV_X)^2} \quad (2.23)$$

De esta manera usando las siguientes ecuaciones obtenemos los parámetros orbitales para la estrella S2.

$$a = \left(\frac{2}{R} - \frac{V^2}{\varrho(m_1 + m_3)} \right)^{-1} \quad (2.24)$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{L^2}{\varrho(m_1 + m_3)a}} \quad (2.25)$$

$$I = \cos^{-1} \left(\frac{L_Z}{L} \right) \quad (2.26)$$

$$\Omega = -\text{sen}^{-1} \left(\frac{L_X}{L \cdot \text{sen}(I)} \right) \quad (2.27)$$

$$f = \cos^{-1} \left[\frac{1}{e} \left(\frac{a(1 - e^2)}{R} - 1 \right) \right] \quad (2.28)$$

$$w = \text{sen}^{-1} \left(\frac{Z}{R \cdot \text{sen}(I)} - f \right) \quad (2.29)$$

Este último sistema de ecuaciones se usó para entender de manera cuantitativa cuál es la perturbación del IMBH sobre las estrella S2.

Transformada de Fourier

La transformada de Fourier es válida para toda función $f(x)$ que sea periódica. Sin embargo, en física se encuentran funciones que están definidas en algún intervalo (a,b) y que solamente se repiten en este. Para este tipo de casos se podría expandir tales funciones en series de Fourier.

Una forma de hacer esto es iniciando con una serie periódica y hacer que su periodo tienda a infinito mientras evoluciona el dominio de la función definida.

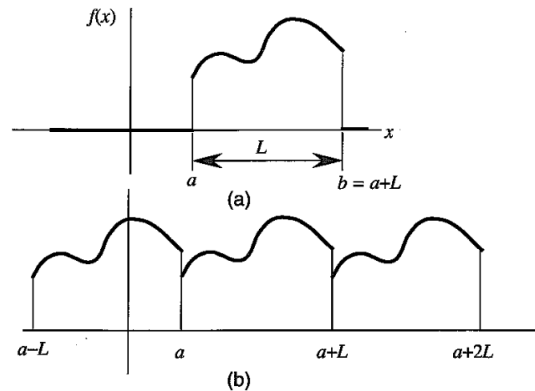


Figura 2.1: (a) función que queremos representar, (b) representación de las series de Fourier de la función (Hassani S. 1998)

Como un caso específico, suponemos que vamos a representar una función $f(x)$ que esta definida solamente en el intervalo (a,b) asignando sus ceros respectivos como se observa en la Figura 2.1(a). Para iniciar, podríamos intentar probar la representación en series de Fourier, esto producirá que nuestra función se repita. Esta situación esta representada en la Figura 2.1(b).

Ahora, podemos probar la función $g_A(x)$ definida en el intervalo $(a - \Lambda/2, b + \Lambda/2)$, donde Λ es un numero arbitrario positivo.

$$g_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } a - \Lambda/2 < x < a, \\ f(x) & \text{si } a < x < b, \\ 0 & \text{si } b < x < b + \Lambda/2 \end{cases}$$

esta función, la cual se describe en la figura 3, tiene la representación de Fourier:

$$g_A(x) = \frac{1}{\sqrt{L + \Lambda}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{\Lambda, n} e^{2i\pi n x / (L + \Lambda)} \quad (2.30)$$

donde,

$$g_{\Lambda, n} = \frac{1}{\sqrt{L + \Lambda}} \int_{a - \Lambda/2}^{b + \Lambda/2} e^{-2i\pi n x / (L + \Lambda)} g_A(x) dx \quad (2.31)$$

hemos conseguido separar varias copias de la función periódica original por Λ , esta claro que si $\Lambda \rightarrow \infty$ podemos separar completamente la función y parar la repetición. Para investigar el comportamiento de las ecuaciones (2.30) y (2.31), sabiendo que Λ crece hasta ∞ , primero notamos que la cantidad k_n definida por $k_n = 2i\pi n x / (L + \Lambda)$ que aparece en el exponente llega a ser casi continua. En otras palabras, mientras n cambia una unidad, k_n cambia ligeramente, que los términos de la suma de la ecuación (2.30) pueden agruparse en j intervalos de valor medio Δn_j , teniendo:

$$g_A(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{g_{\Lambda}(k_j)}{\sqrt{L + \Lambda}} e^{ik_j x} \Delta n_j \quad (2.32)$$

donde $k_j = 2i\pi n_j x / (L + \Lambda)$ y $g_{\Lambda} k_j \equiv g_{\Lambda, n_j}$. Sustituyendo $\Delta n_j = [(L + \Lambda)/2\pi] \Delta k_j$ en la suma, obtenemos:

$$g_A(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{g^{\Lambda}(k_j)}{\sqrt{L + \Lambda}} e^{ik_j x} \frac{L + \Lambda}{2\pi} \Delta k_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_{\Lambda}(k_j) e^{ik_j x} \Delta k_j \quad (2.33)$$

donde introducimos $\tilde{g}_{\Lambda}(k_j)$ definido por $\tilde{g}_{\Lambda}(k_j) \equiv \sqrt{(L + \Lambda)/2\pi} g_{\Lambda}(k_j)$

Ahora esta claro que la suma cuando $\Lambda \rightarrow \infty$ se aproxima a una integral. En el caso en que el limite, $g_\Lambda(x) \rightarrow f(x)$, tenemos:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk, \quad (2.34)$$

donde:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \tilde{g}_\Lambda(k_j) = \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \sqrt{\frac{L + \Lambda}{2\pi}} g_\Lambda(k_j) \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \sqrt{\frac{L + \Lambda}{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{L + \Lambda}} \int_{a-\Lambda/2}^{b+\Lambda/2} e^{-ik_j x} g_\Lambda(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x) e^{ikx} dx, \end{aligned} \quad (2.35)$$

Las ecuaciones (2.34) y (2.35) son llamadas **integrales de transformación de Fourier** de $\tilde{f}(k)$ y $f(x)$ respectivamente (Hassani S. 1998).

Capítulo 3

Parámetros orbitales y condiciones iniciales de la estrella S2

Para este trabajo se tomó como principal fuente de estudio la órbita de la estrella S2, esto se debe a que este objeto es el de mas corto periodo y por lo tanto es el objeto mas monitoreado del núcleo galáctico. A continuación se muestran los valores de los parámetros orbitales tanto de S2 como del IMBH.

Parámetros orbitales de la estrella S2

Tomando como referencia el articulo de Gualandris et al. (2010), los parámetros orbitales para esta estrella S2 son:

Star	P_{orb} (yr)	a (mpc)	e	i (deg)	Ω (deg)	ω (deg)
S2	15.8	4.829	0.880	134.5	225.8	63.8

Tabla 3.1: *Elementos orbitales de la estrella S2* [12]

Estos valores de los parámetros orbitales se introducen en el sistema de ecuaciones 1.19 a 1.22, para asi obtener las condiciones iniciales para S2.

Parámetros orbitales Agujero negro de masa intermedia

Consideramos cuatro valores para la masa del IMBH, $M_{IMBH} = (400, 1000, 2000, 4000)M_{\odot}$, cinco valores para el semieje mayor, $a = (0, 3, 1, 3, 10, 30)mpc$, dos valores para la excentricidad $e = (0 - 0,7)$; y doce orientaciones del plano orbital IMBH/SMBH para un total de 480 condiciones iniciales. Los parámetros de las simulaciones están registrados en la Tabla 3.2.

Run $e = 0.0$	Run $e = 0.7$	q	M_{IMBH} (M_{\odot})	a (mpc)	P (yr)
1–12	241–252	1.0×10^{-4}	400	0.3	0.243
13–24	253–264	1.0×10^{-4}	400	1	1.481
25–36	265–276	1.0×10^{-4}	400	3	7.696
37–48	277–288	1.0×10^{-4}	400	10	46.837
49–60	289–300	1.0×10^{-4}	400	30	243.373
61–72	301–312	2.5×10^{-4}	1000	0.3	0.243
73–84	313–324	2.5×10^{-4}	1000	1	1.481
85–96	325–336	2.5×10^{-4}	1000	3	7.695
97–108	337–348	2.5×10^{-4}	1000	10	46.834
109–120	349–360	2.5×10^{-4}	1000	30	243.355
121–132	361–372	5.0×10^{-4}	2000	0.3	0.243
133–144	373–384	5.0×10^{-4}	2000	1	1.481
145–156	385–396	5.0×10^{-4}	2000	3	7.695
157–168	397–408	5.0×10^{-4}	2000	10	46.828
169–180	409–420	5.0×10^{-4}	2000	30	243.324
181–192	421–432	1.0×10^{-3}	4000	0.3	0.243
193–204	433–444	1.0×10^{-3}	4000	1	1.480
205–216	445–456	1.0×10^{-3}	4000	3	7.692
217–228	457–468	1.0×10^{-3}	4000	10	46.816
229–240	469–480	1.0×10^{-3}	4000	30	243.263

Tabla 3.2: *Elementos orbitales de las estrellas S [12]*

A partir de las tablas y usando las ecuaciones 1.21 y 1.22 se obtienen las condiciones iniciales en coordenadas cartesianas para el IMBH y para la estrella S2.

Capítulo 4

El Mecanismo Kozai

En Astronomía, una resonancia aparece cuando el cociente de dos frecuencias son un número entero. Existe una forma de resonancia secular para pequeños objetos con orbitas altamente inclinadas. Kozai (1962) mostró que un asteroide perturbado por Júpiter moviéndose en una órbita circular no tendría cambio secular en su semieje mayor pero su excentricidad e inclinación tienen cambios tales que la cantidad:

$$H_k = \sqrt{1 - e^2} \cos I \quad (4.1)$$

En la práctica H_k oscilará alrededor de un valor constante mientras que la excentricidad e inclinación oscilaran periódicamente. En éste trabajo encontramos lo que creemos es efecto Kozai para órbitas externas del IMBH respecto a S2 y cuando la excentricidad del IMBH es nula. (este capítulo se tomó principalmente de Murray y Dermott 1999).

Capítulo 5

Resultados de las simulaciones

En esta sección se muestran los resultados de las simulaciones del problema de tres cuerpos propuesto en este trabajo: El MBH, IMBH y la estrella S2. En cada figura se muestra en su respectivo orden seis gráficas: La evolución temporal del semieje mayor de la estrella S2 como función del tiempo en un periodo de $2 \times 10^6 yr$ y su respectiva variación del error, La evolución temporal de la excentricidad e inclinación de la estrella en el mismo periodo de tiempo con sus respectivos errores, en total se corrieron 120 simulaciones para la estrella S2.

Los errores en los parámetros orbitales estudiados se cuantifican con respecto al valor inicial de los mismos (Tabla 3.1), teniendo así la formula:

$$\Delta a = \frac{a_{inicial} - a_{calculado}}{a_{inicial}} \quad (5.1)$$

Para el caso del semieje mayor, para los otros parámetros la formula es similar. El resto de parámetros se muestran en las etiquetas de cada figura.

El título de cada figura indica por ejemplo: Para la estrella S2 con parámetros para el IMBH de excentricidad 0,7, inclinación 45° , masa $400M_\odot$ y semieje mayor de la órbita 0,3, el nombre asignado será: $S02 - 07 - 45 - 0400 - 003$:

Parámetros Orbitales de la estrella S2 cuando $m_{IMBH} = 400M_\odot$

En esta sección se muestran los resultados de las simulaciones cuando la masa del Agujero Negro Masivo Intermedio IMBH es $m_{IMBH} = 400M_\odot$

Excentricidad IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 0^\circ$

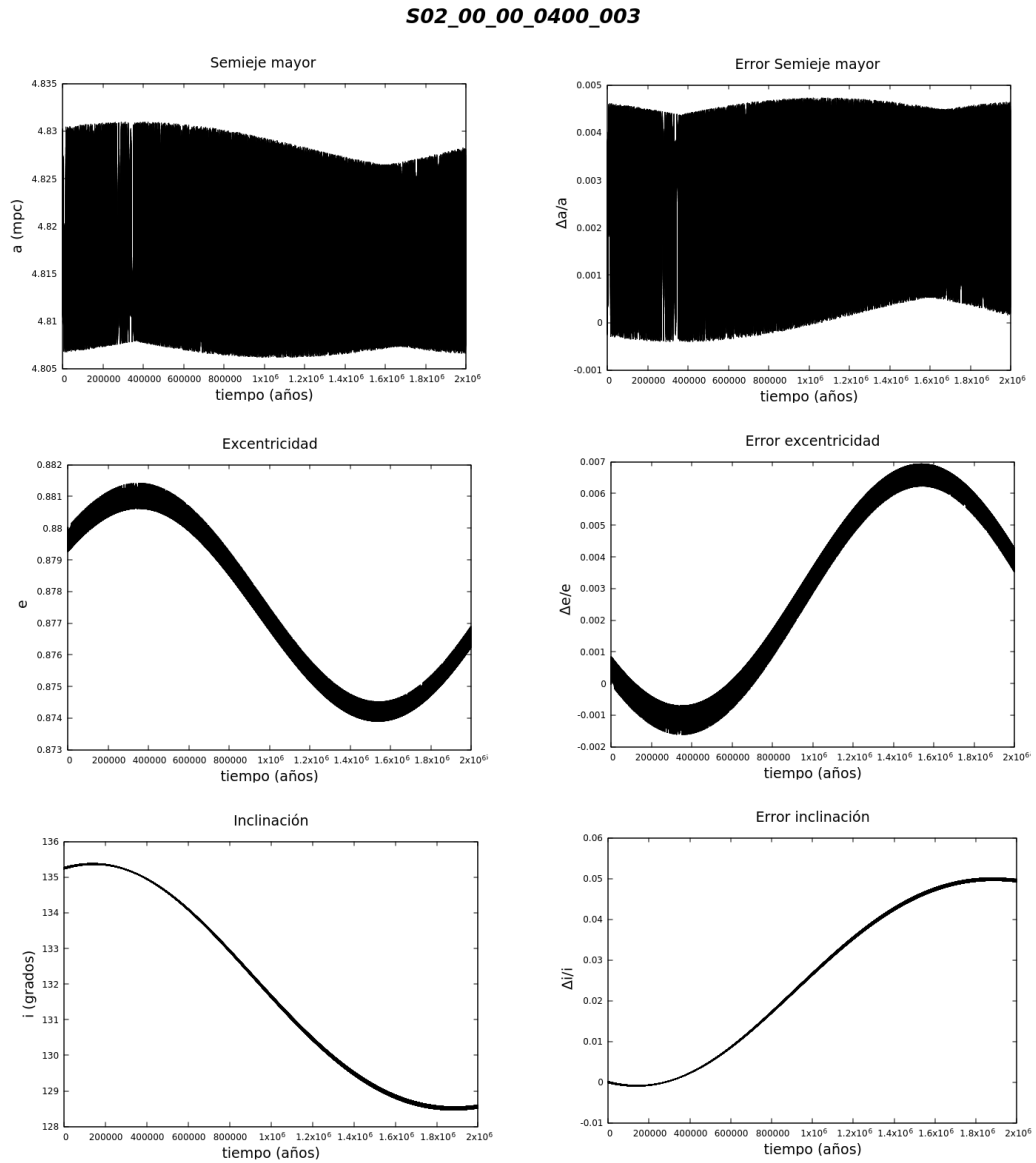


Figura 5.1: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$

S02_00_00_0400_010

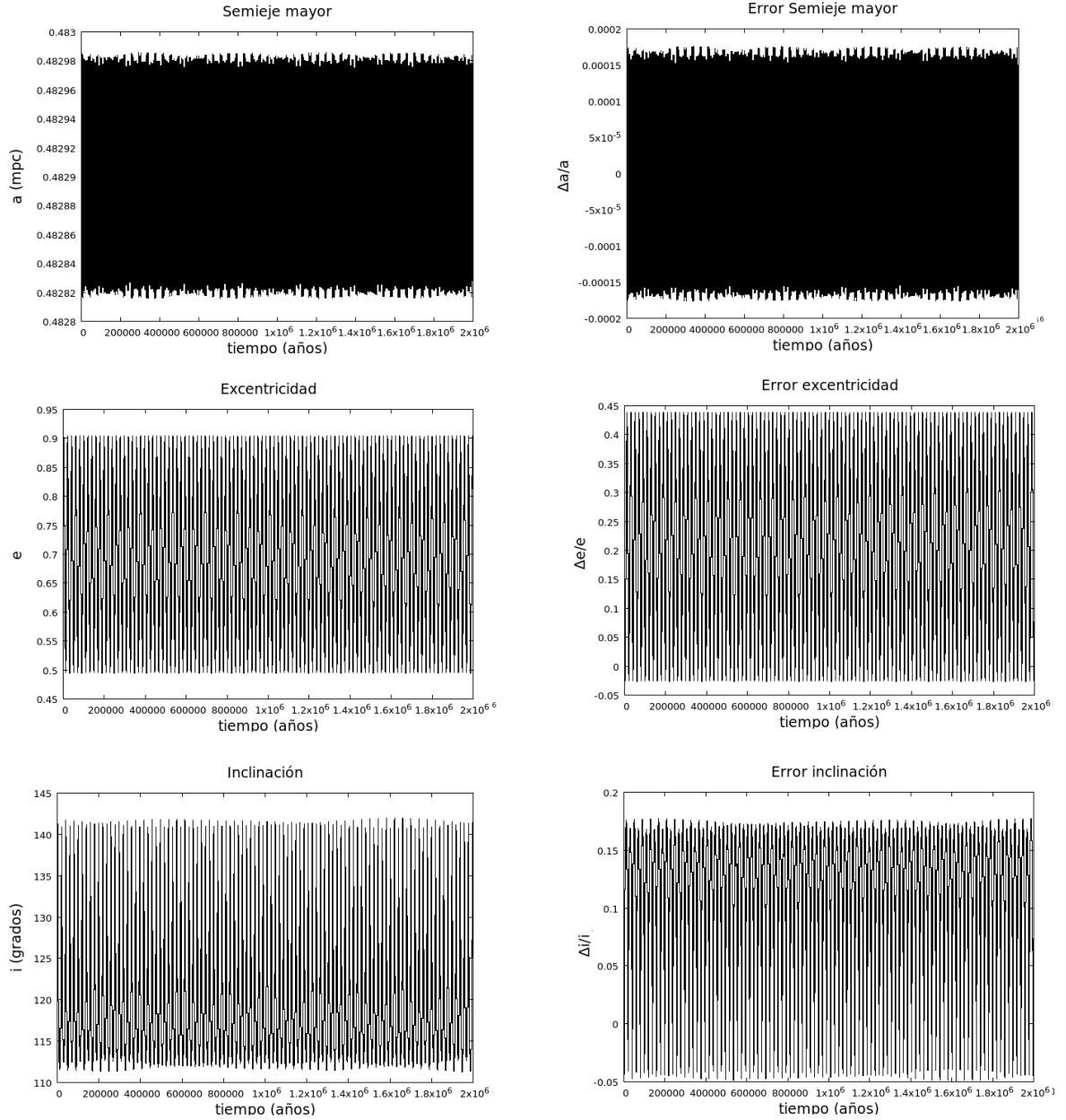


Figura 5.2: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

S02_00_00_0400_030

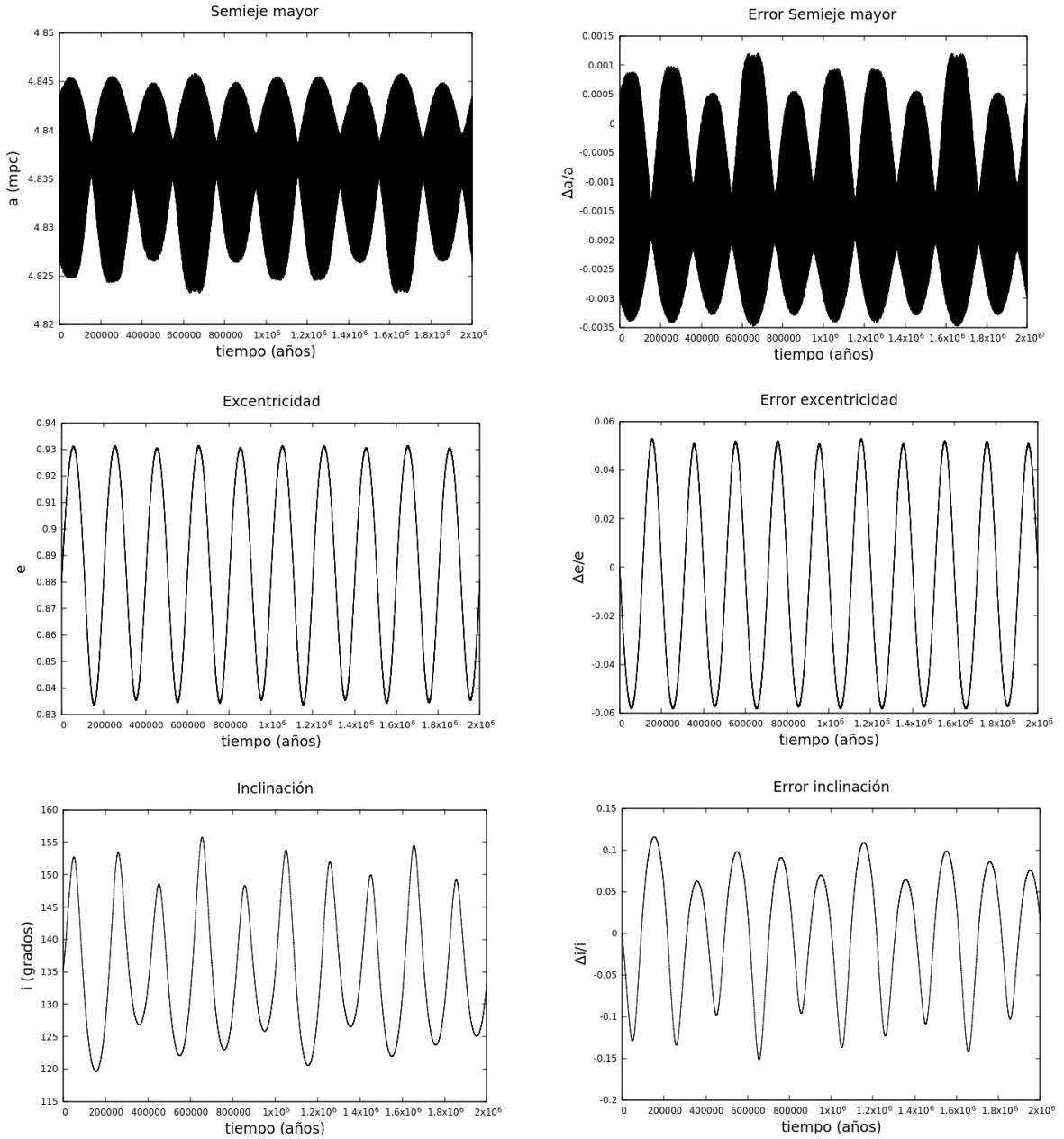


Figura 5.3: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$

S02_00_00_0400_100

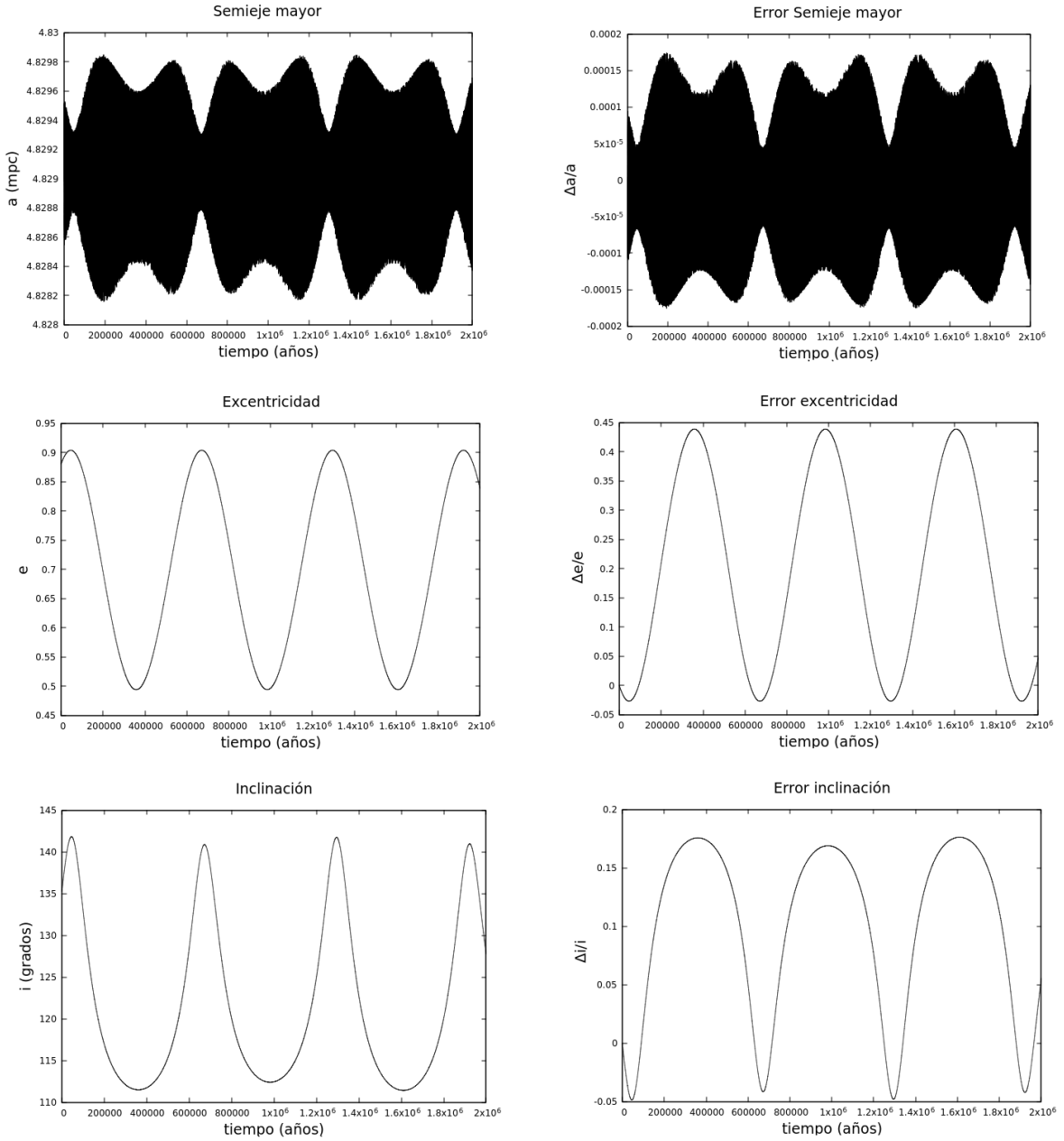


Figura 5.4: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$

S02_00_00_0400_300

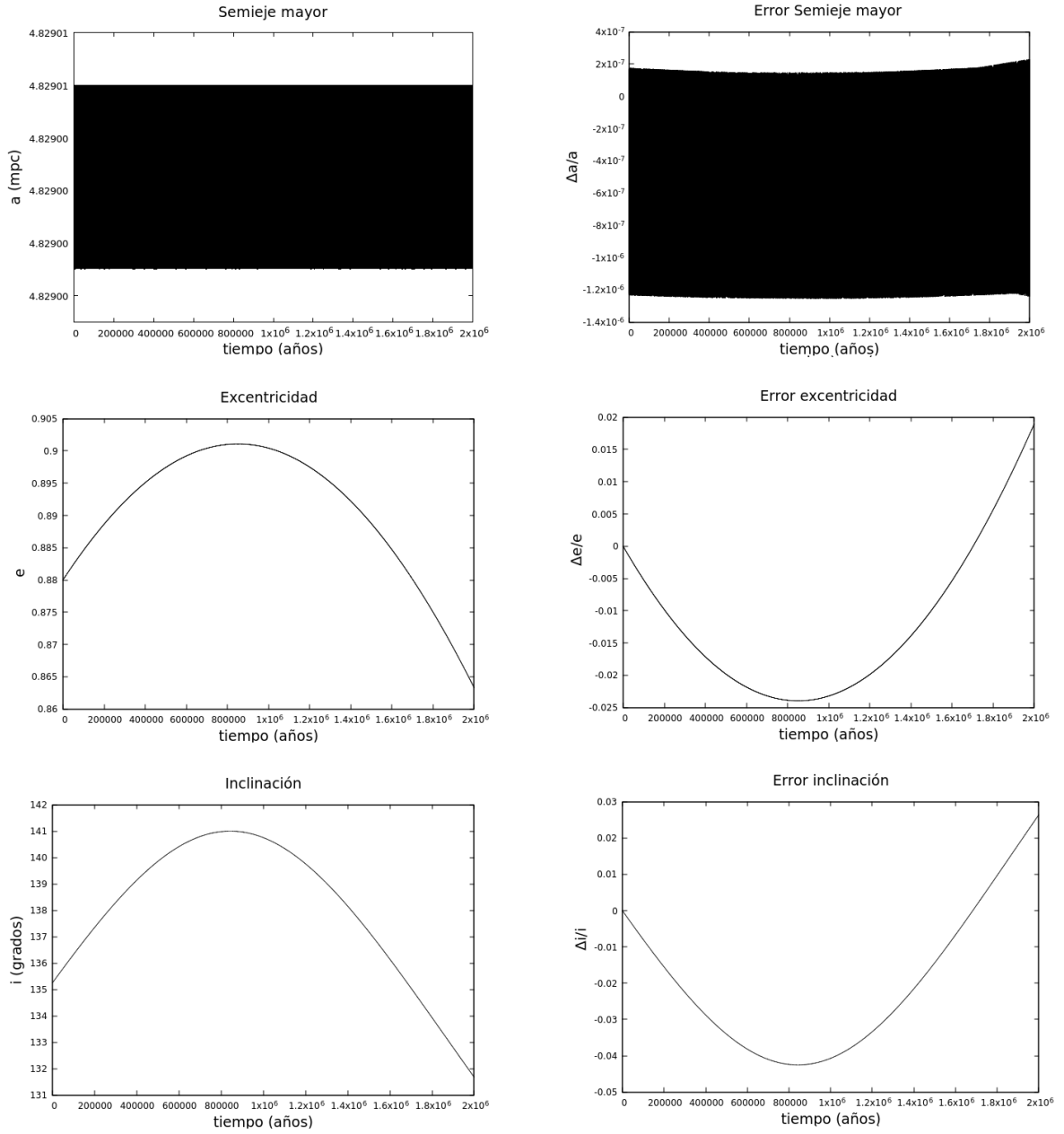


Figura 5.5: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$

Excentricidad IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 45^\circ$

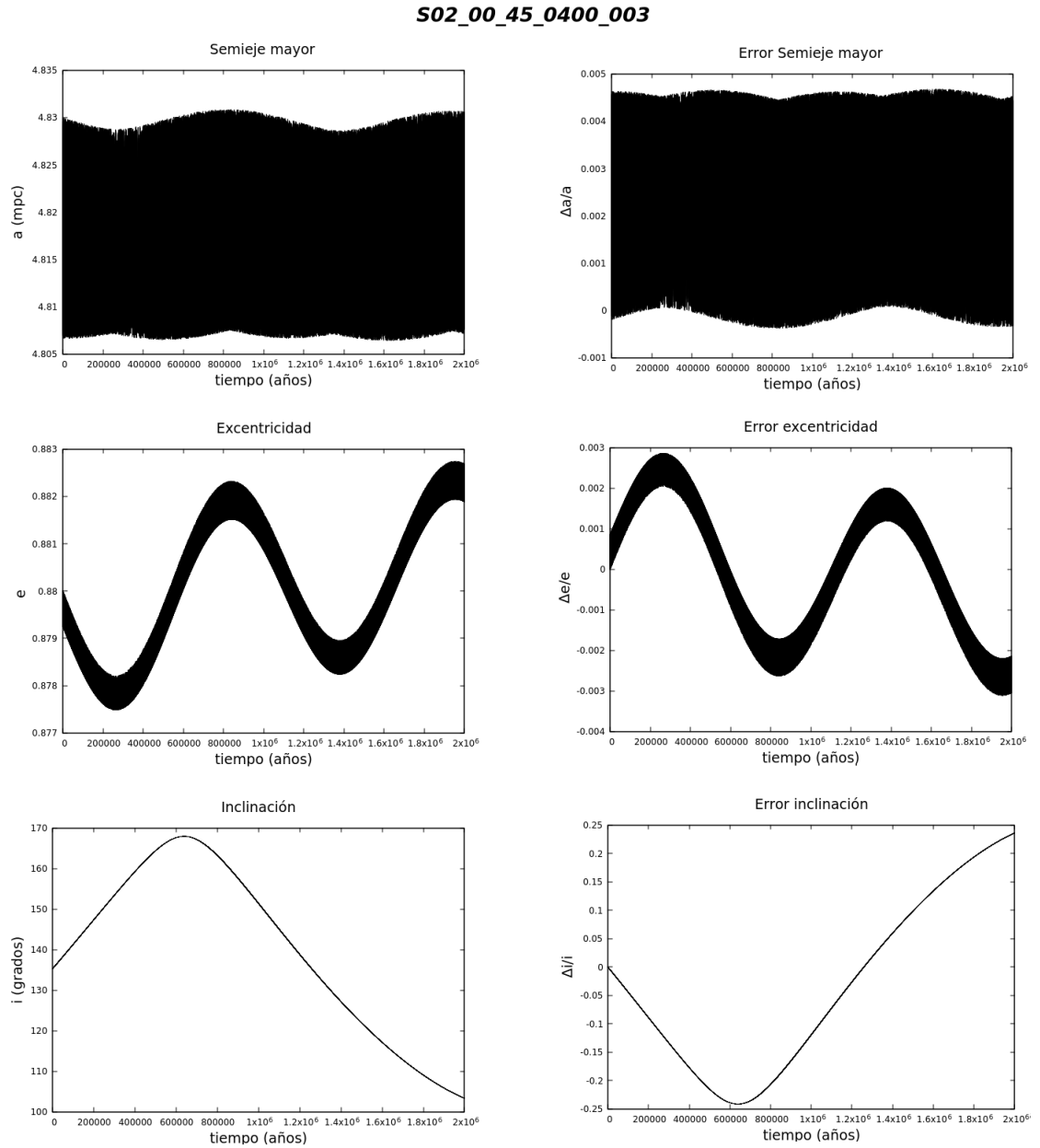


Figura 5.6: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$

S02_00_45_0400_010

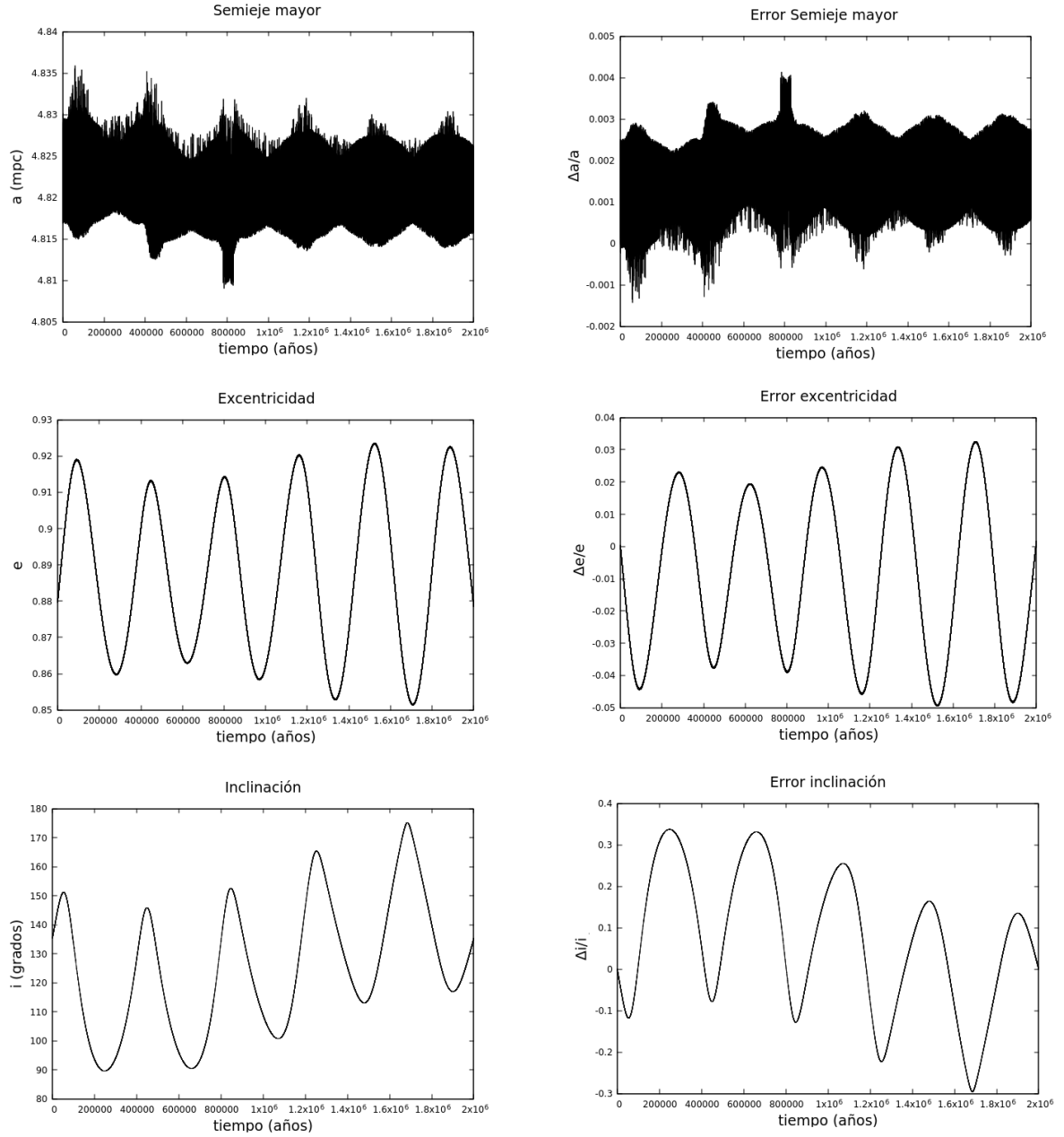


Figura 5.7: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0mpc$

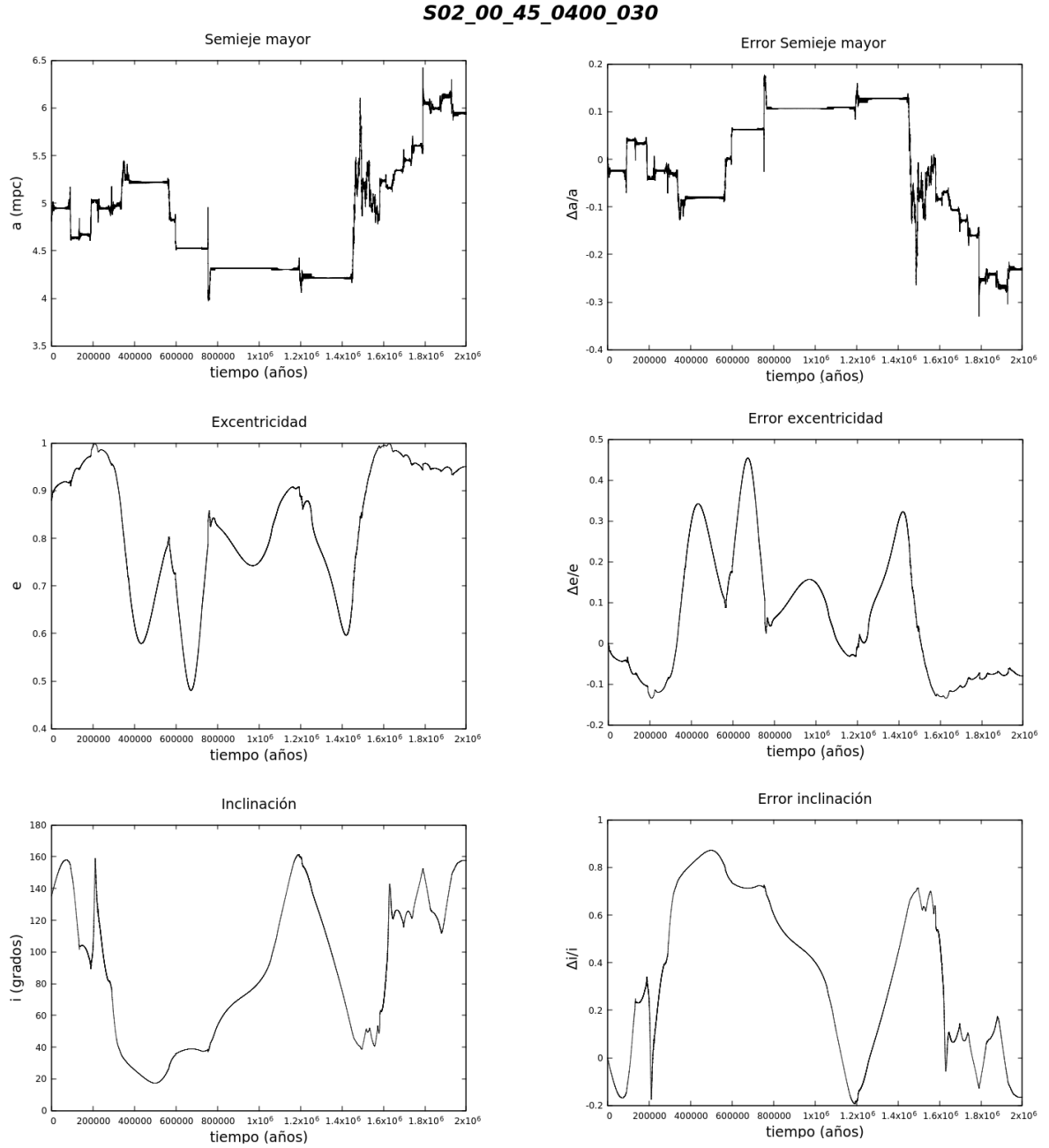


Figura 5.8: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$

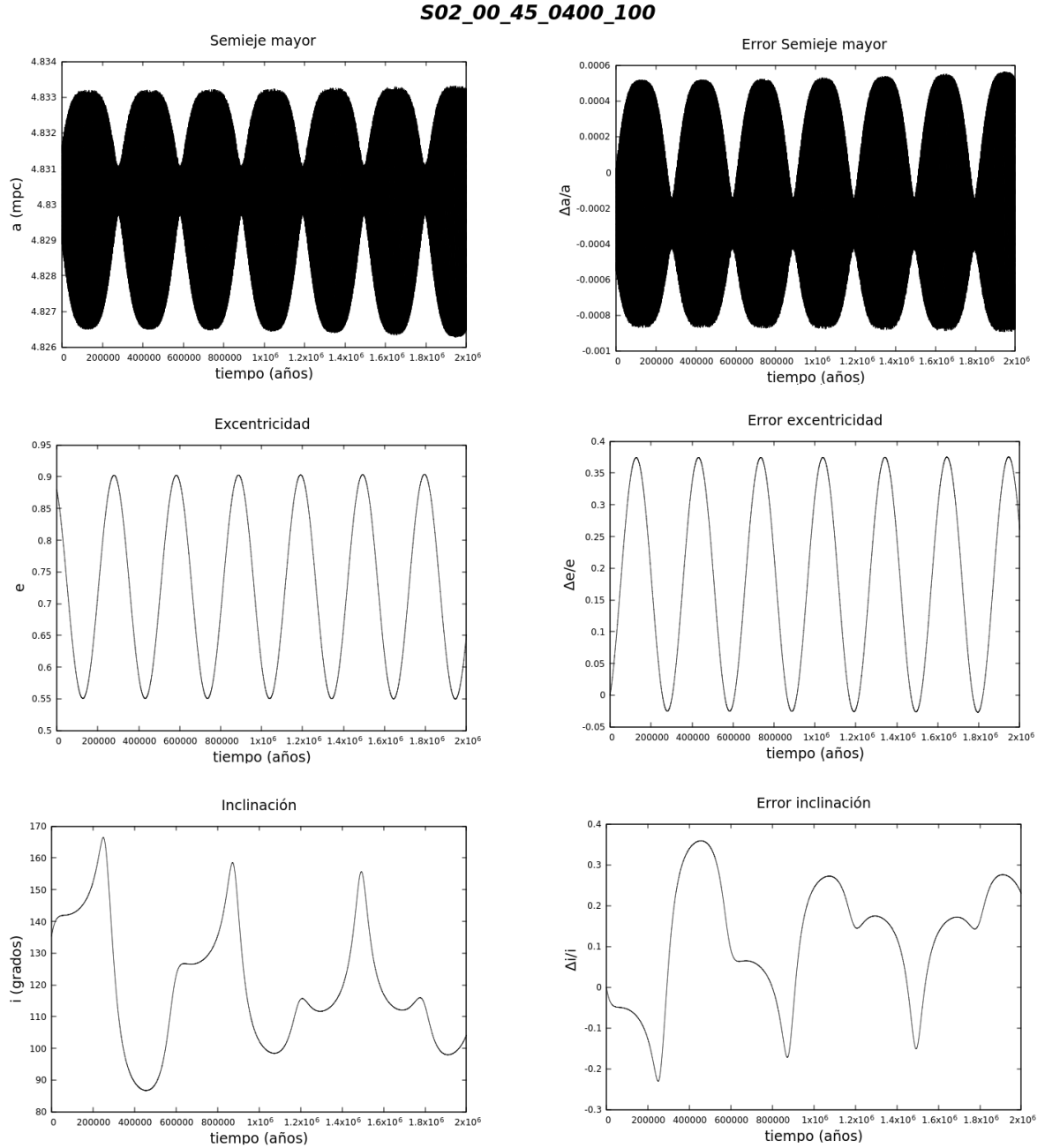


Figura 5.9: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$

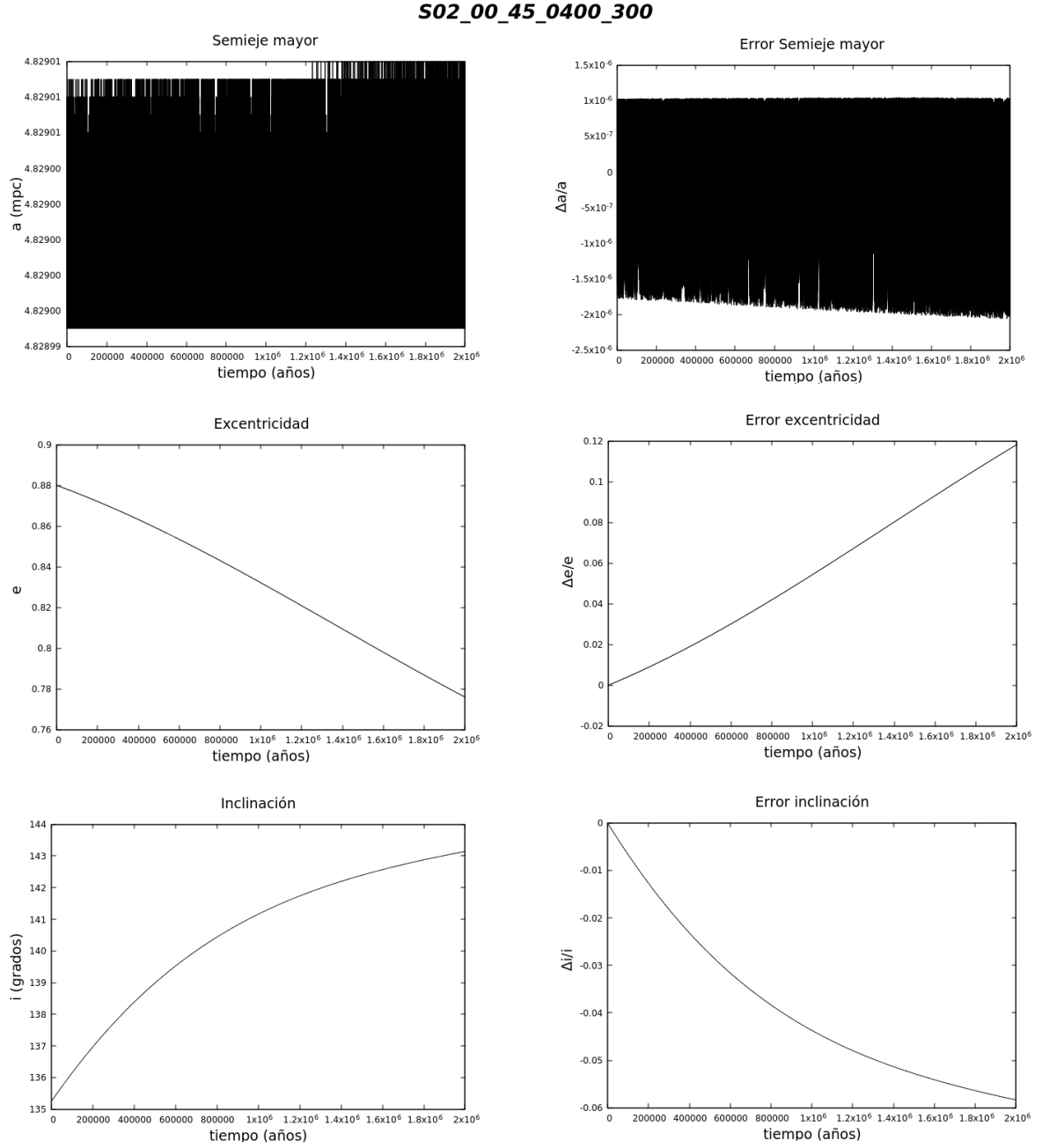


Figura 5.10: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$

Excentricidad IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 90^\circ$

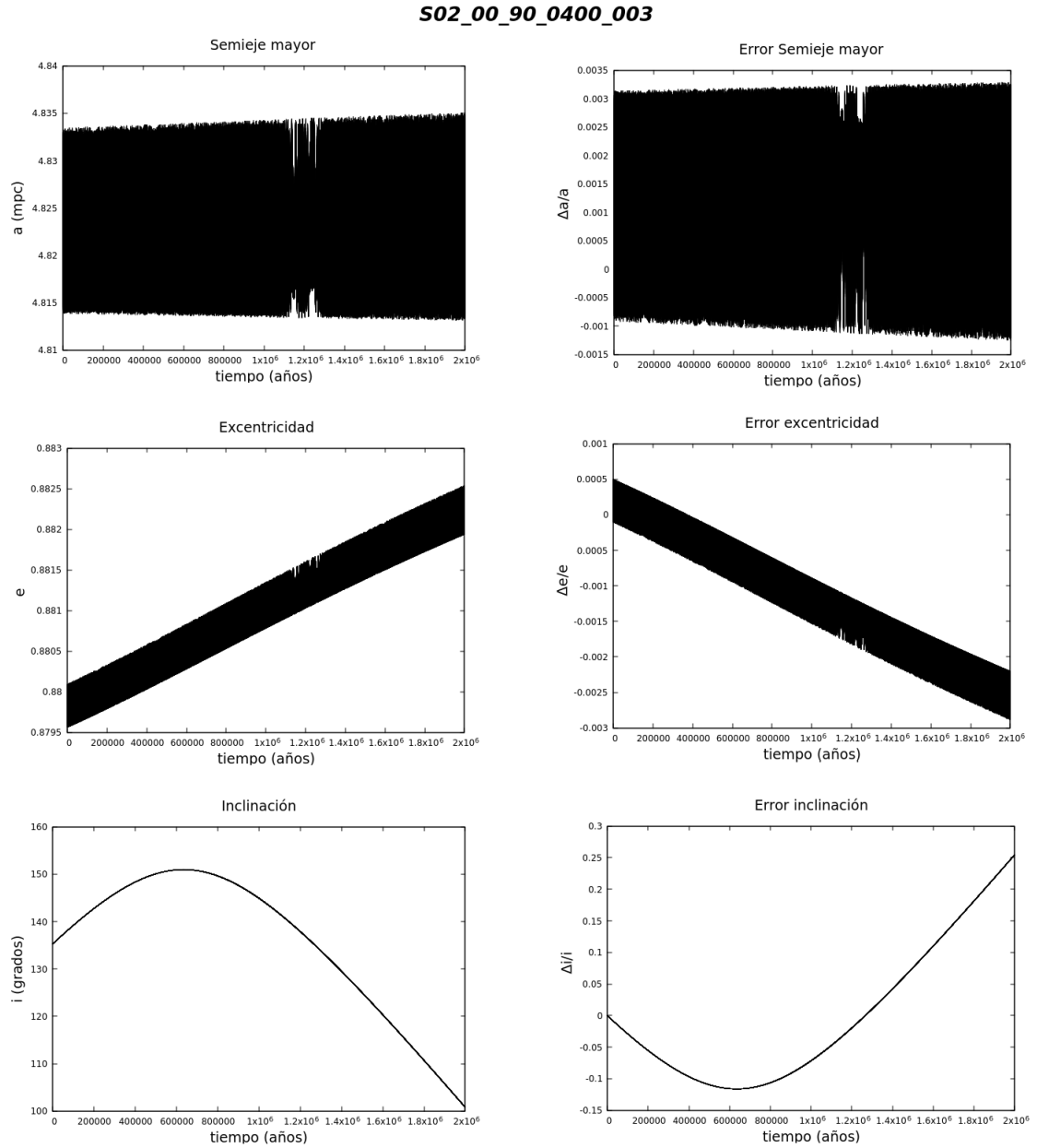


Figura 5.11: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$

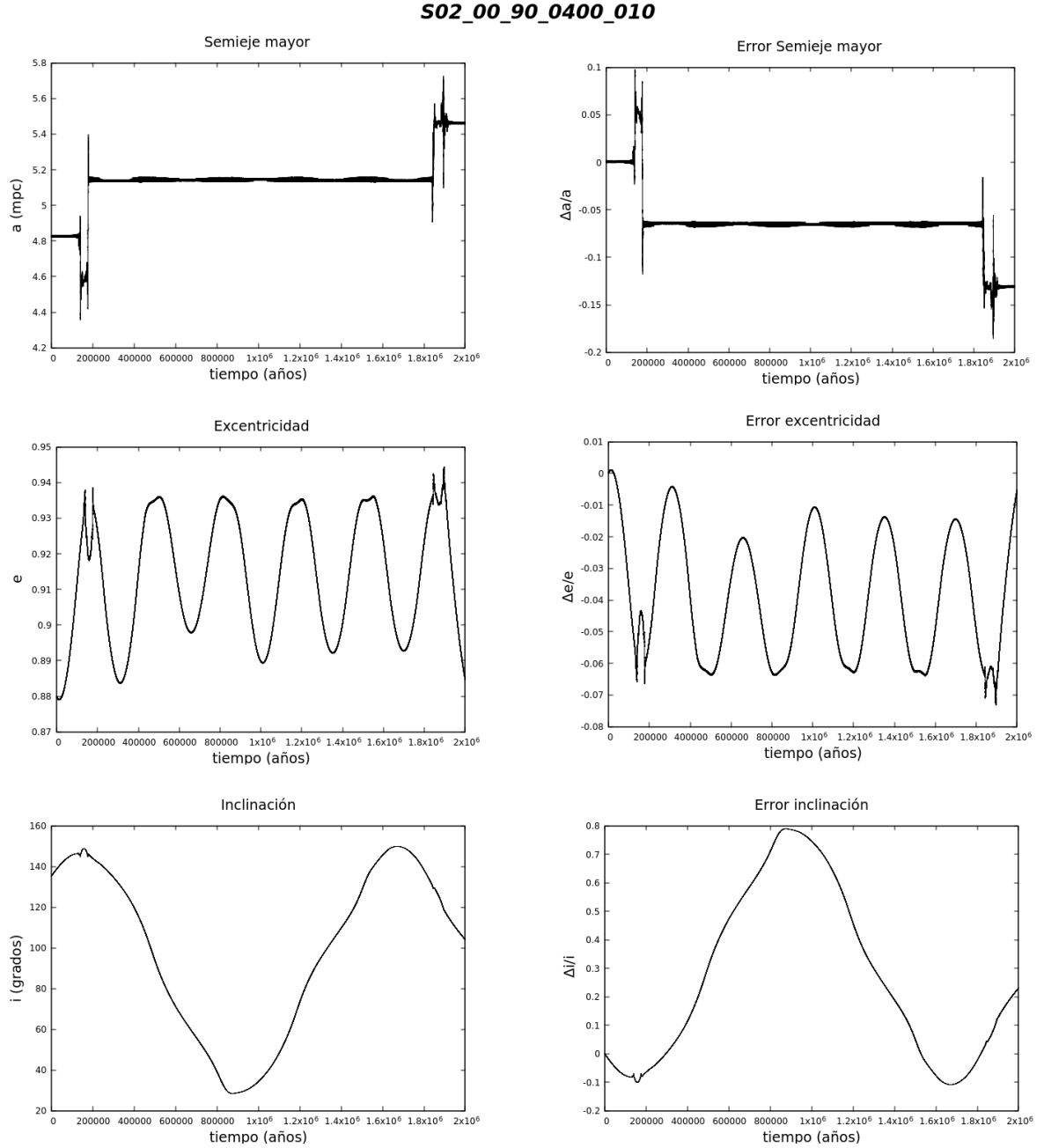


Figura 5.12: *Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$*

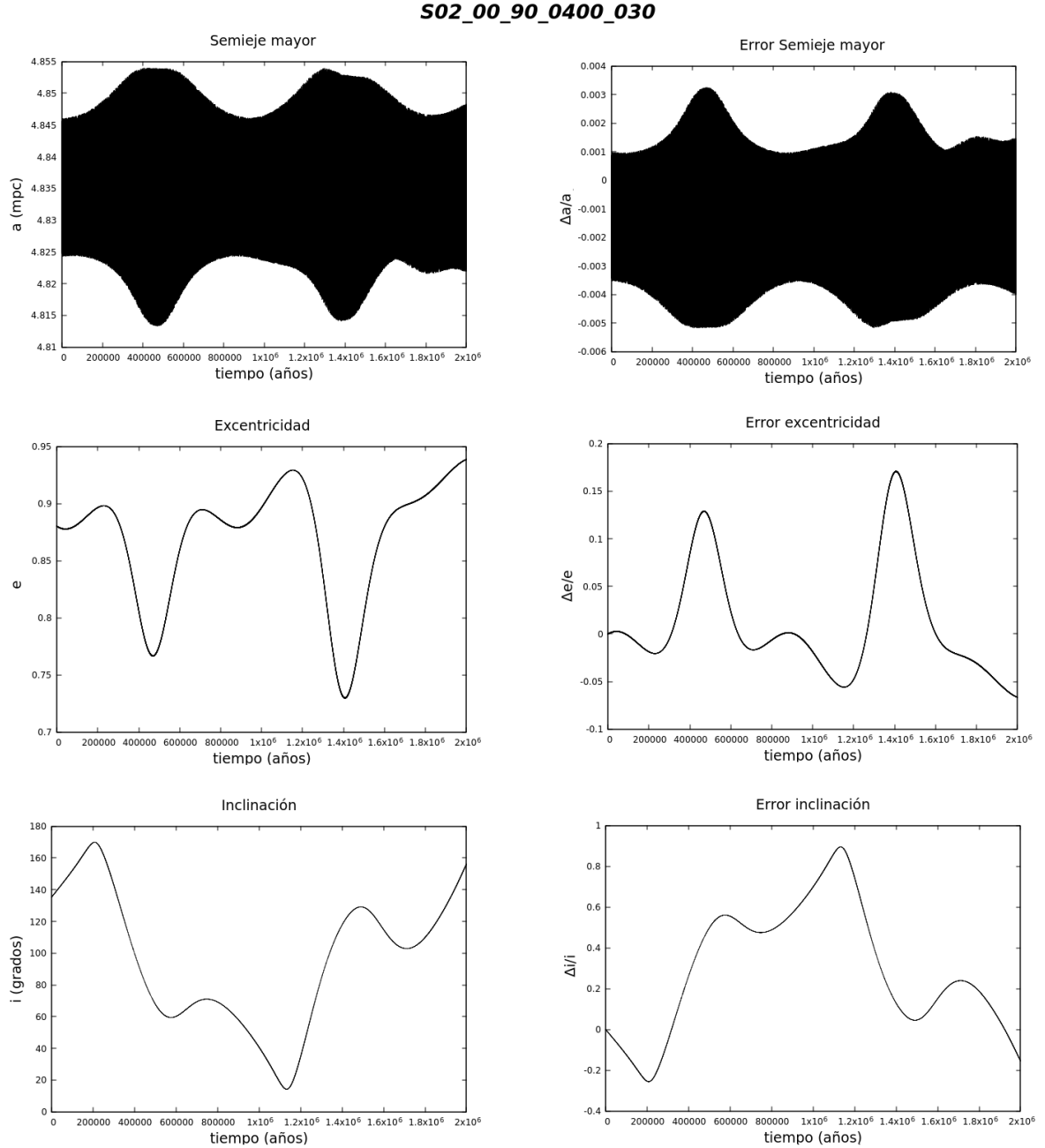


Figura 5.13: *Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$*

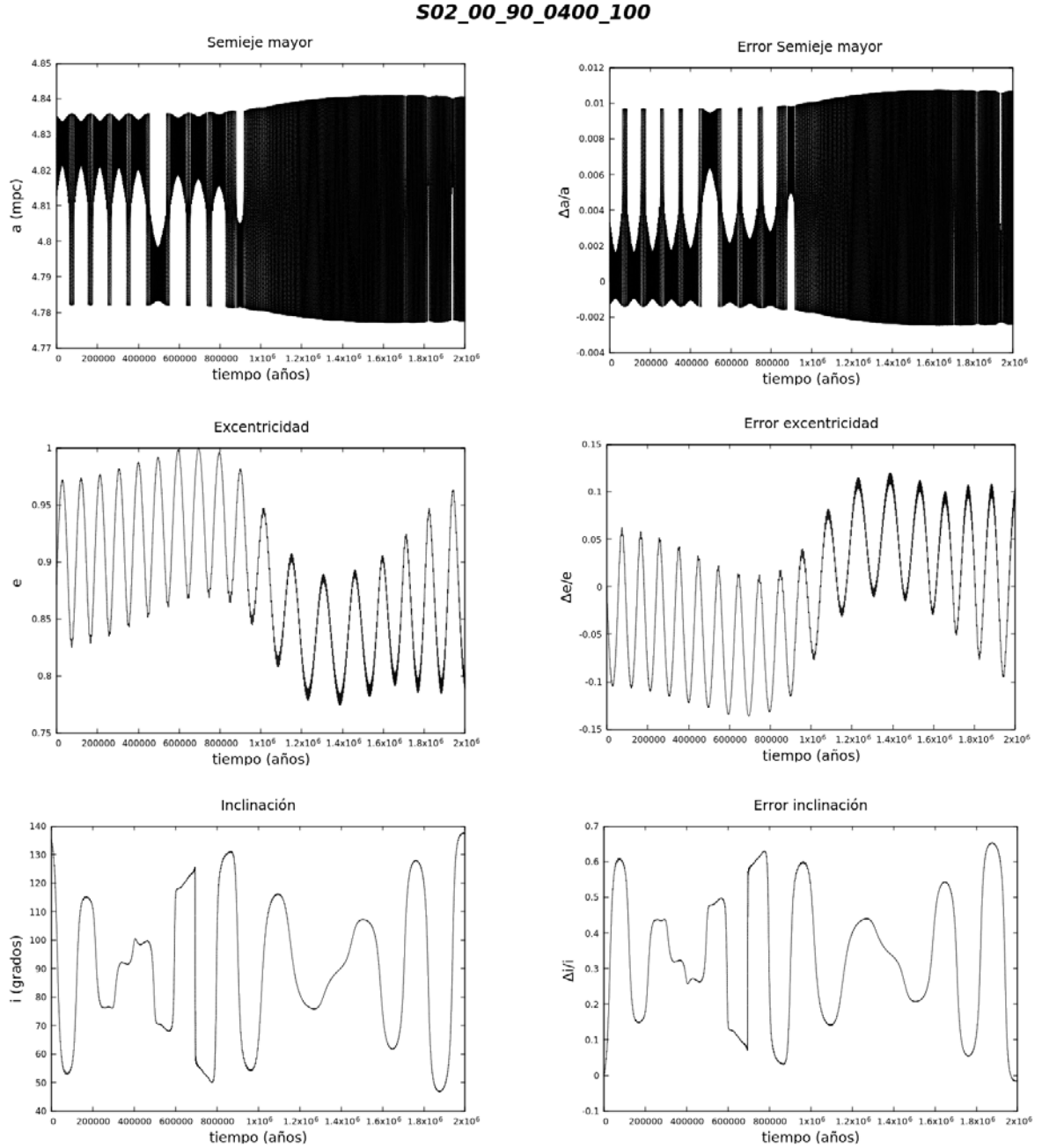


Figura 5.14: *Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$*

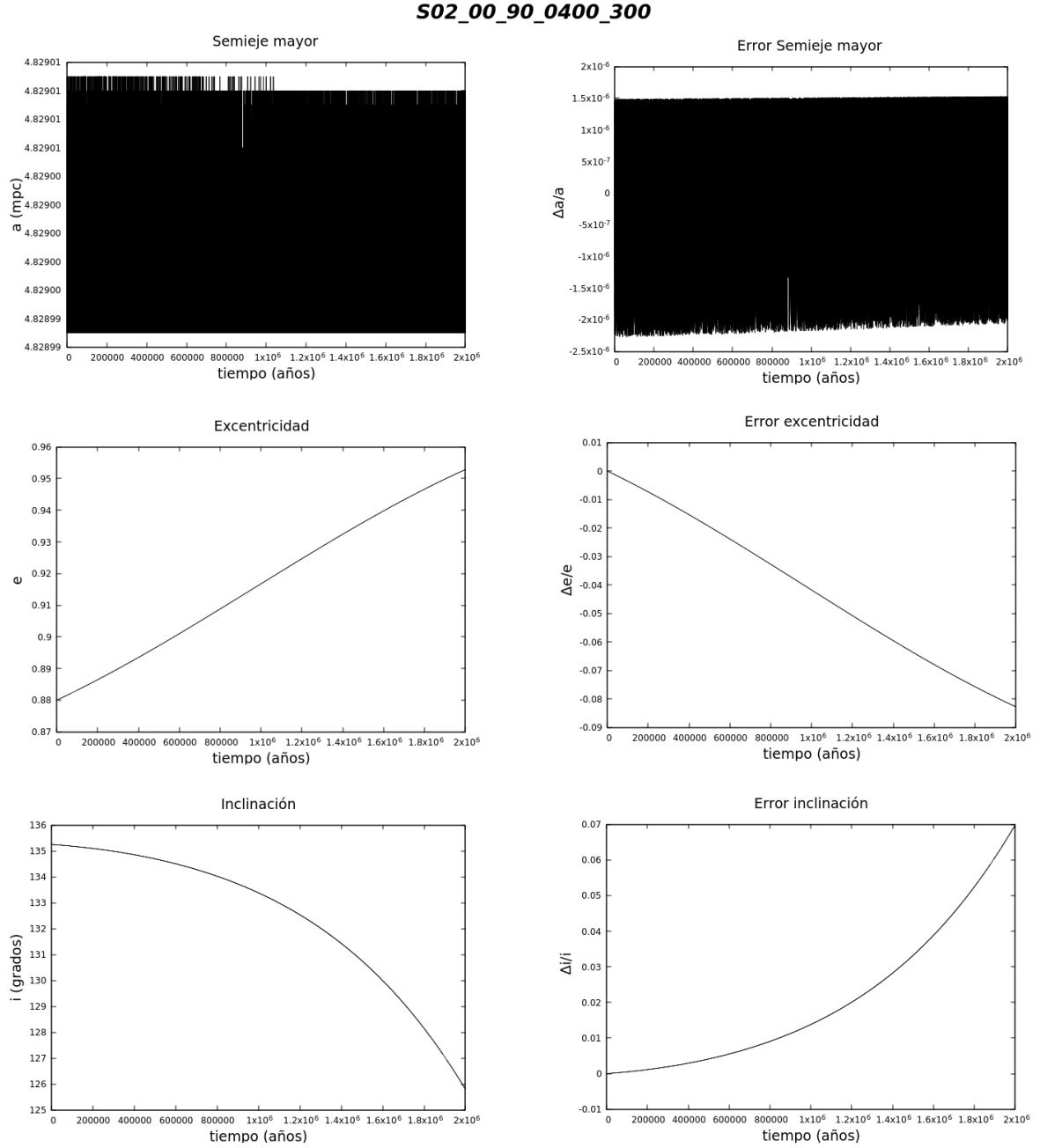


Figura 5.15: *Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$*

Excentricidad IMBH $e = 0,7$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 0^\circ$

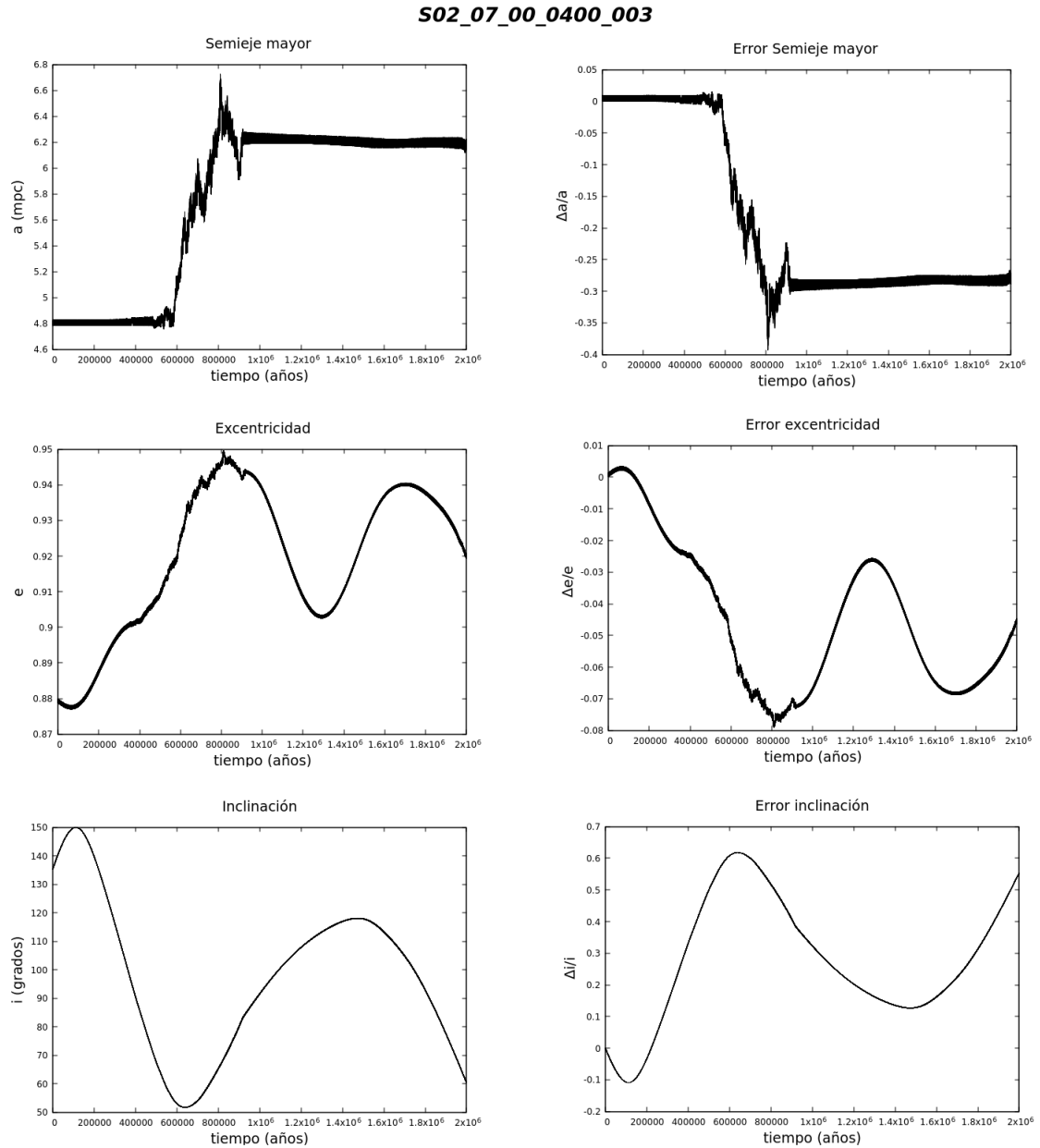


Figura 5.16: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$

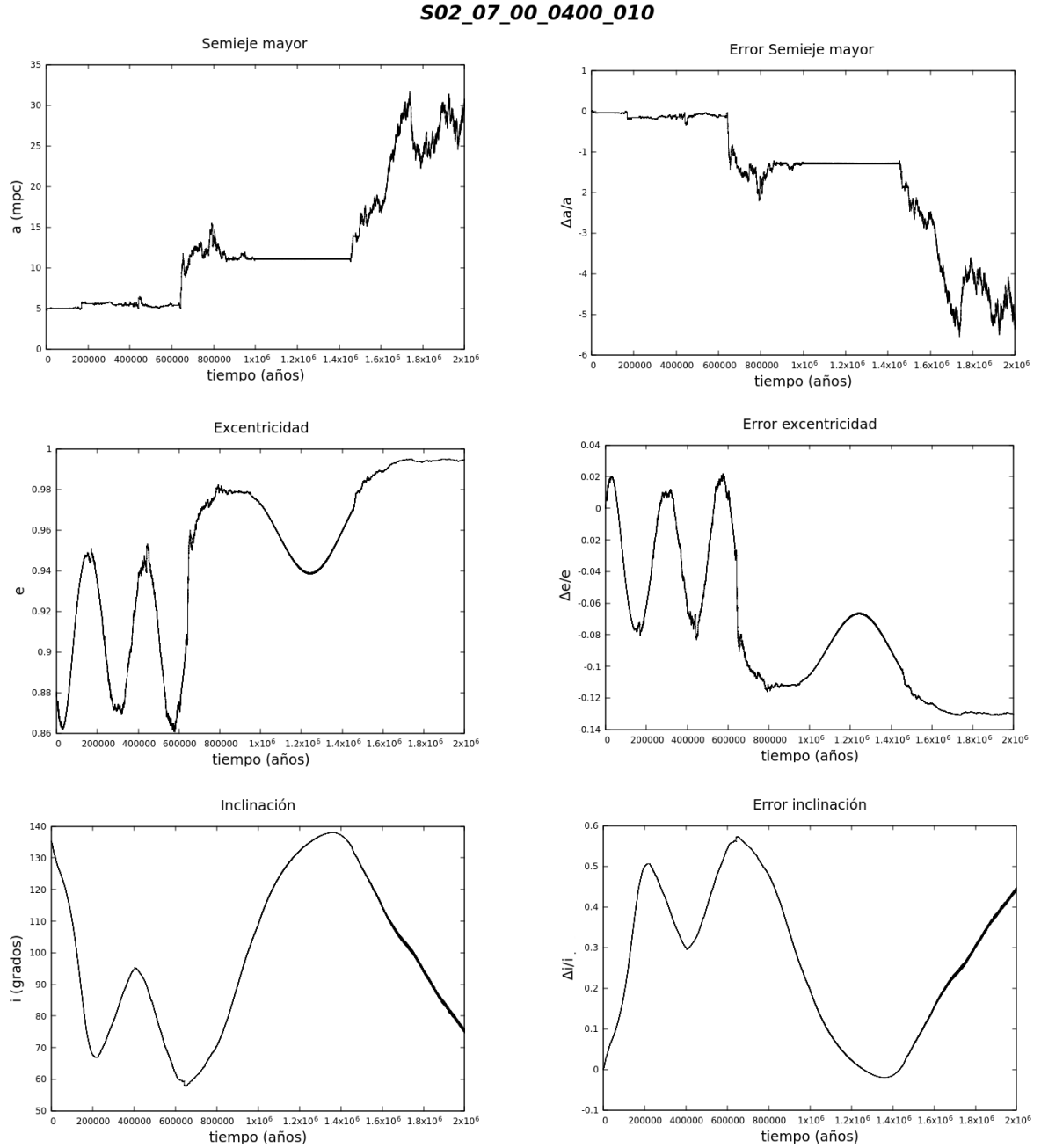


Figura 5.17: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{ mpc}$

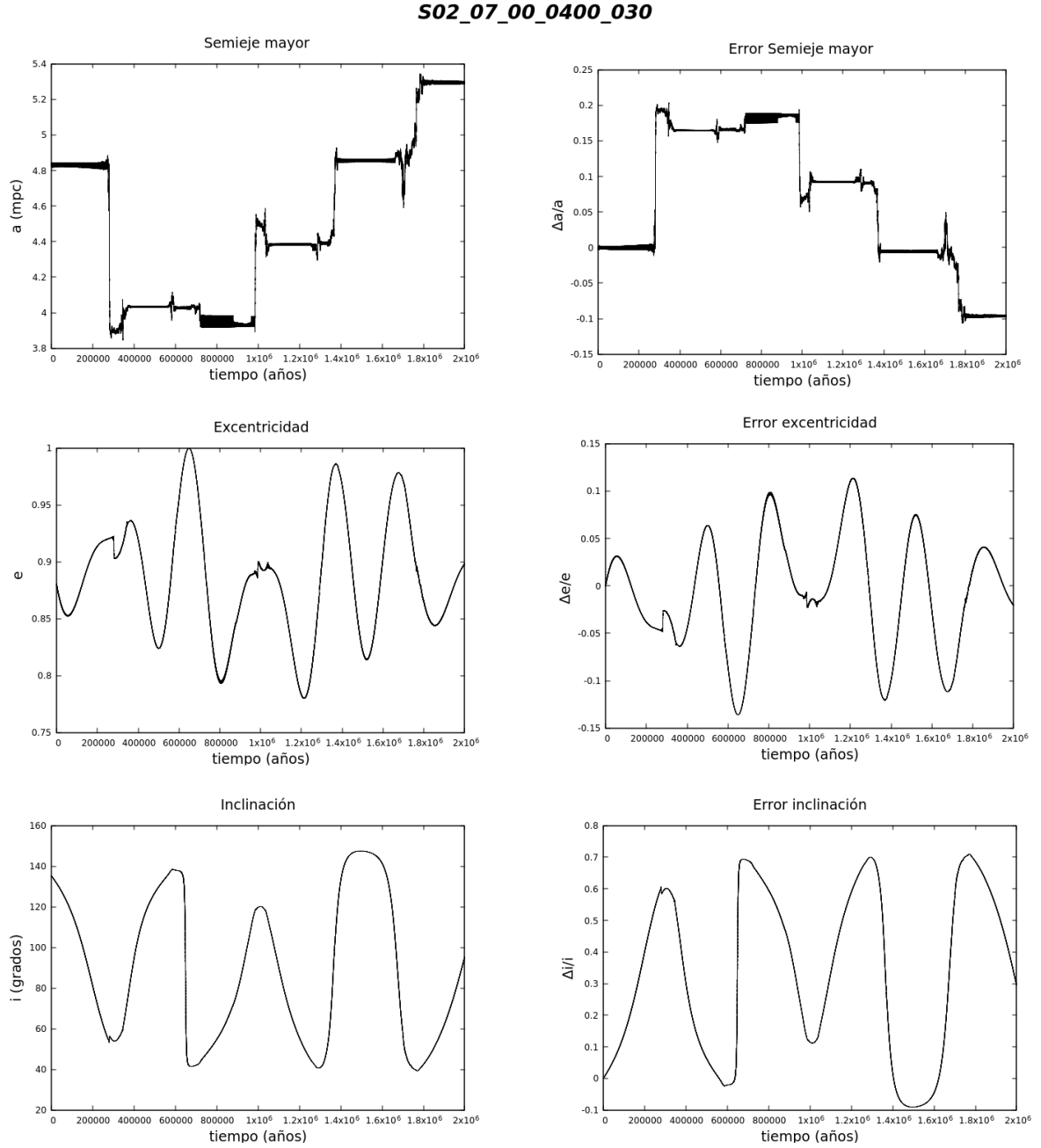


Figura 5.18: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$

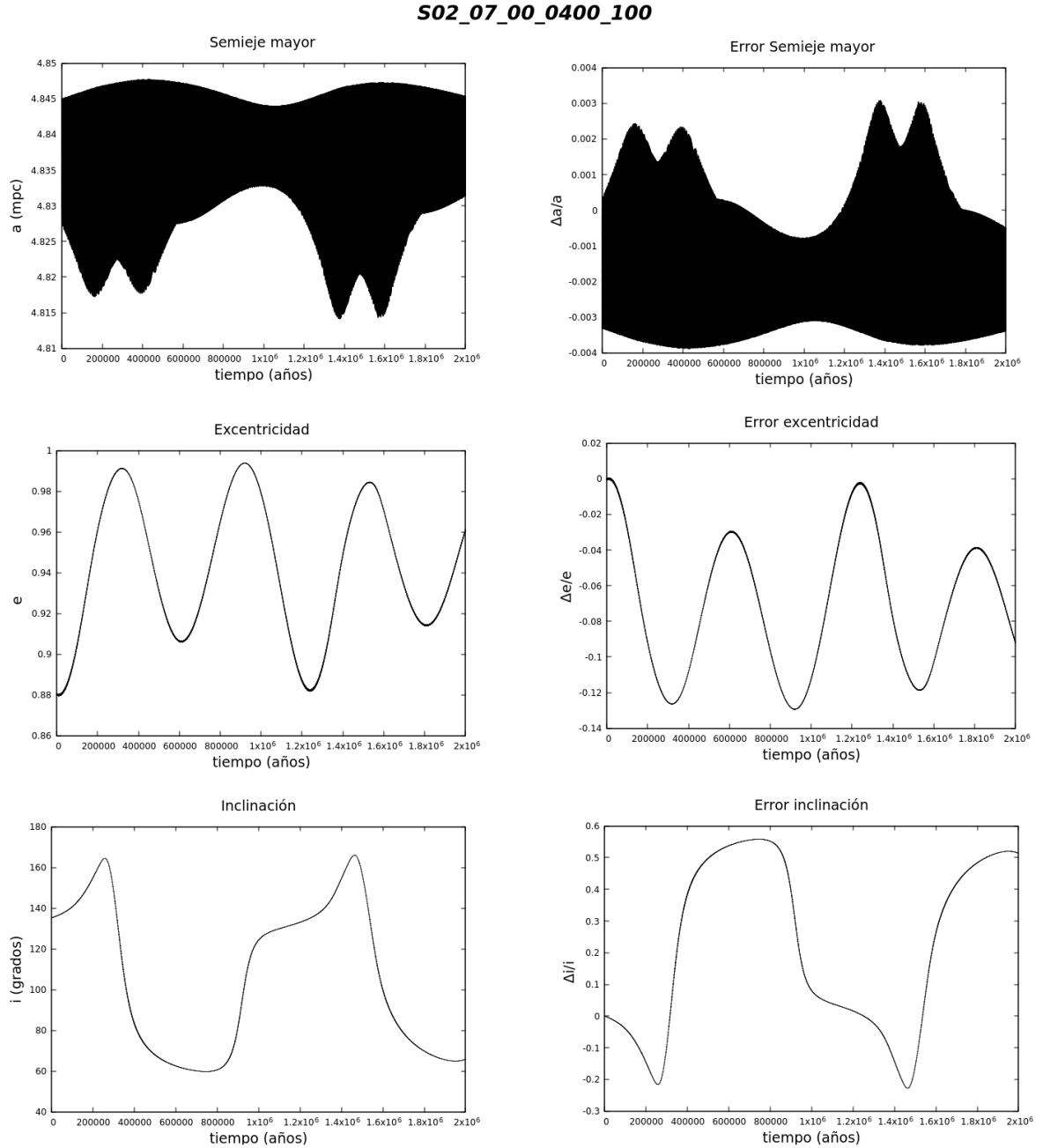


Figura 5.19: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$

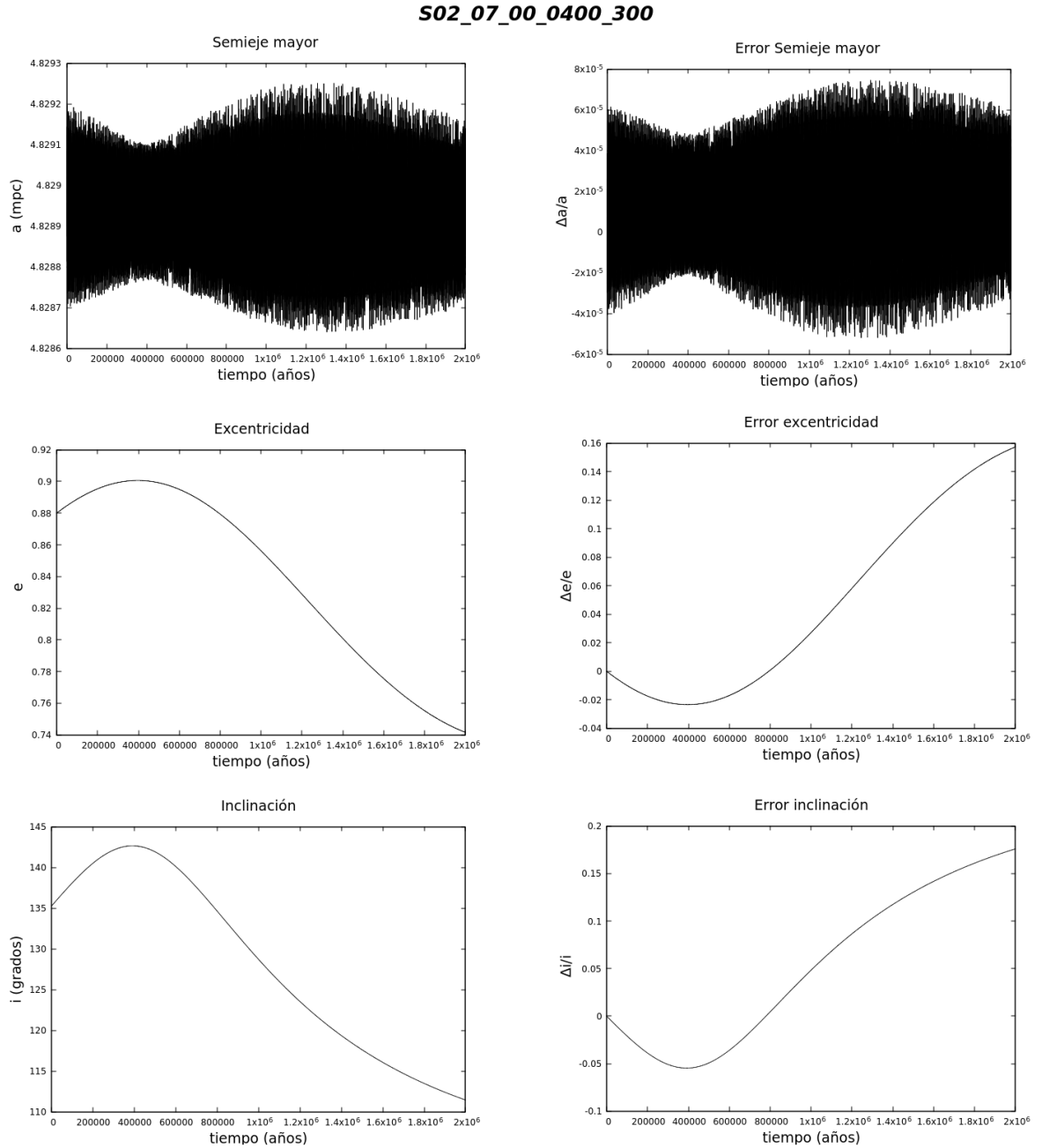


Figura 5.20: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$

Excentricidad IMBH $e = 0,7$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 45^\circ$

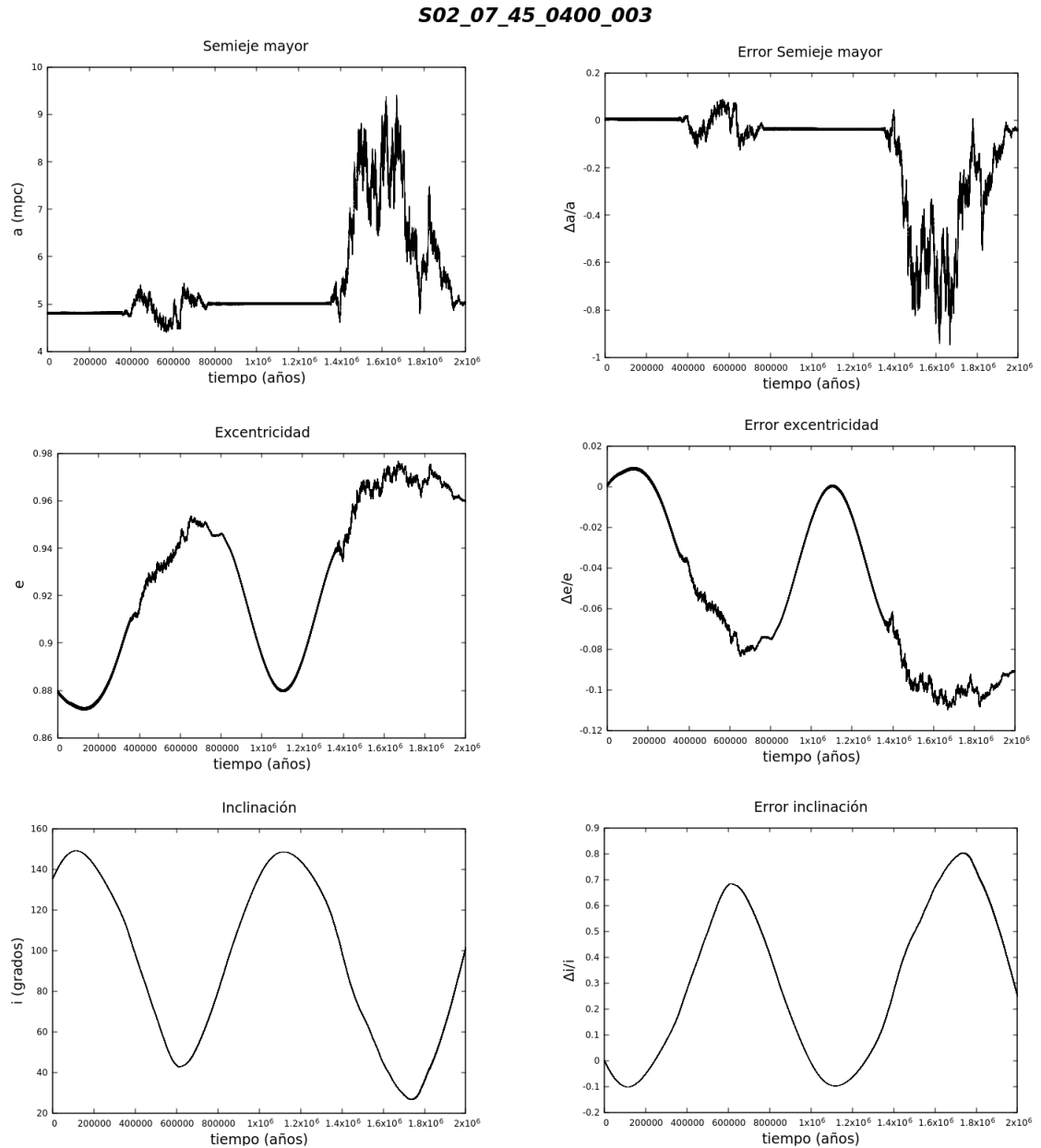


Figura 5.21: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$

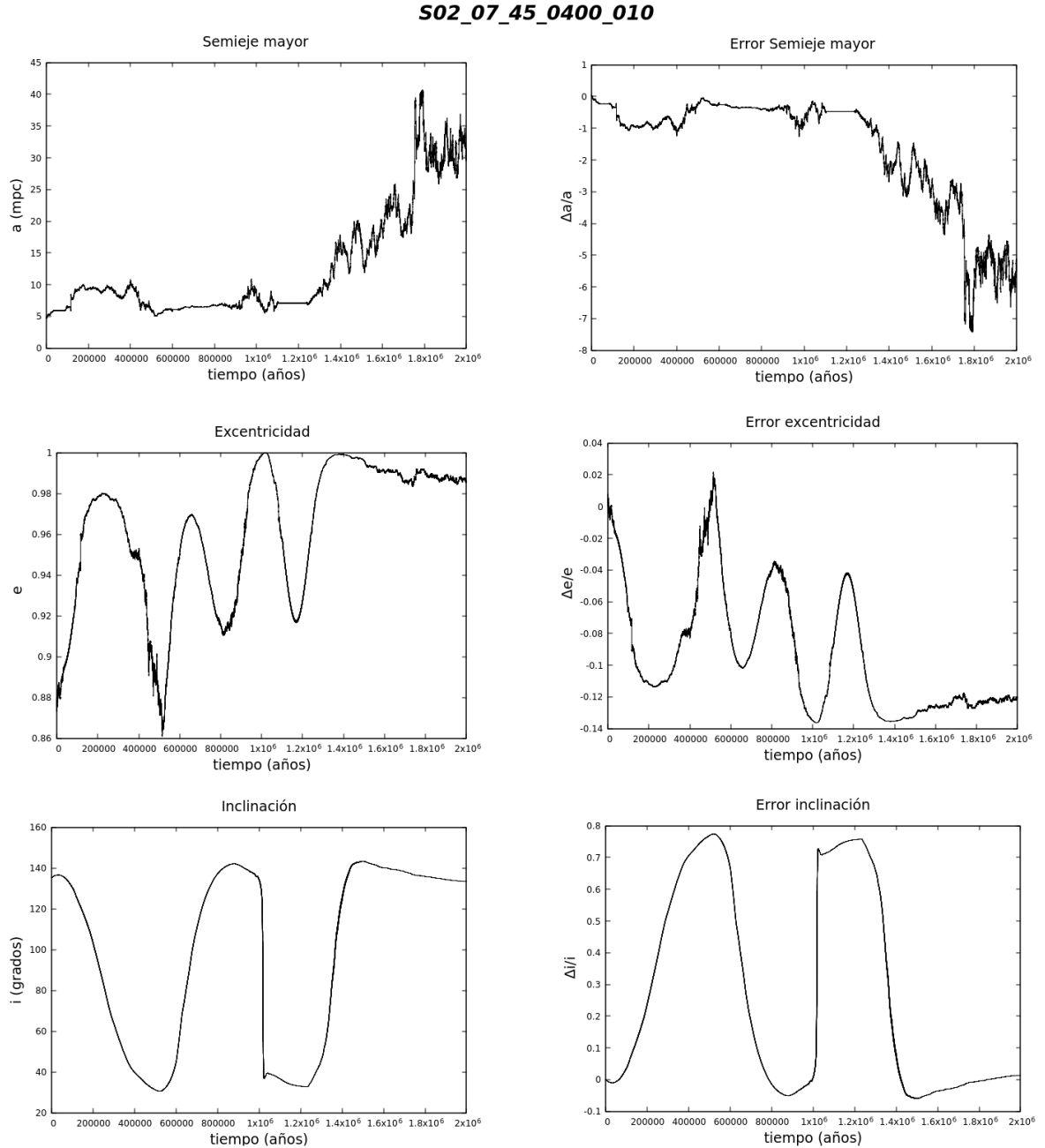


Figura 5.22: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

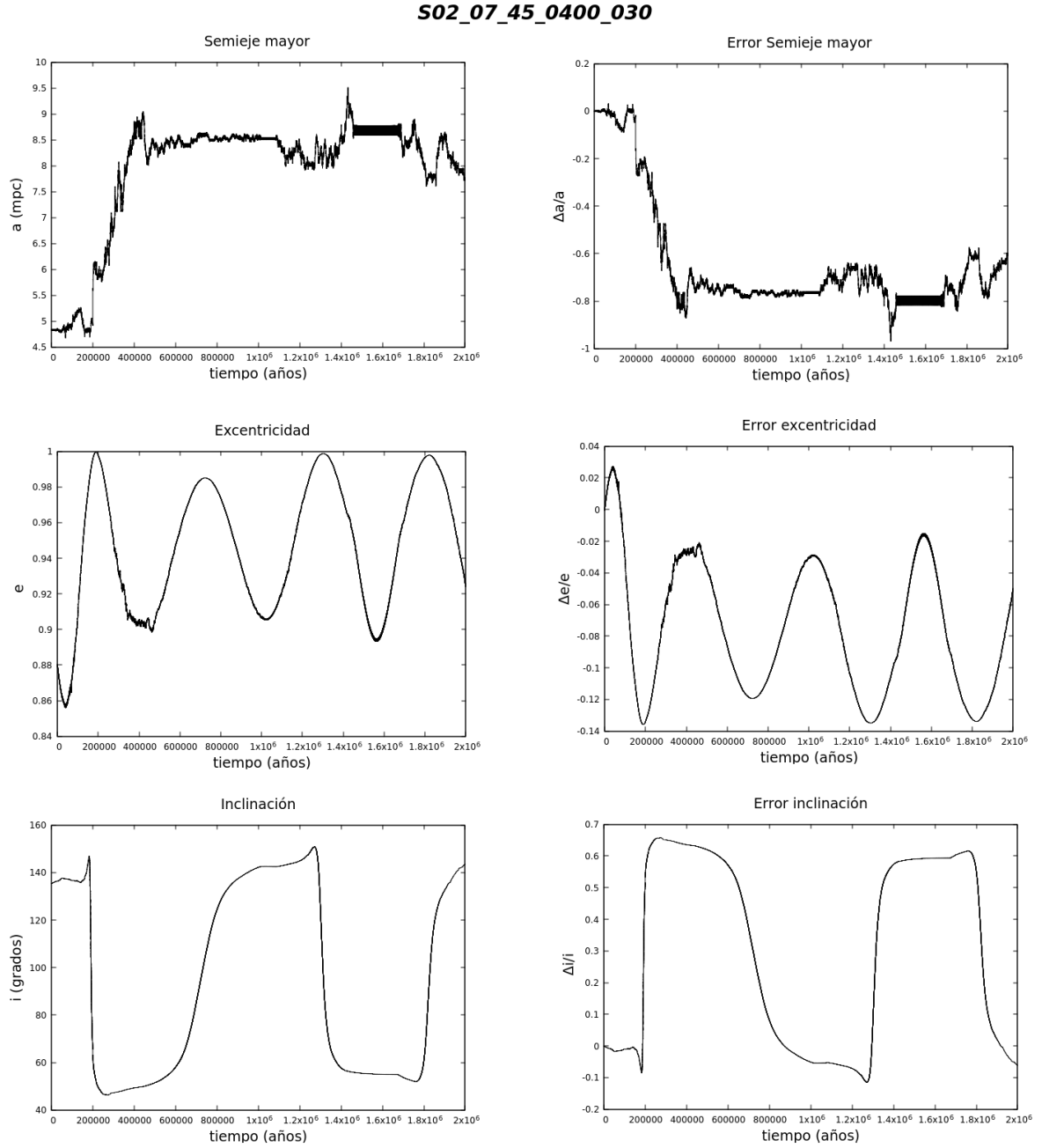


Figura 5.23: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$

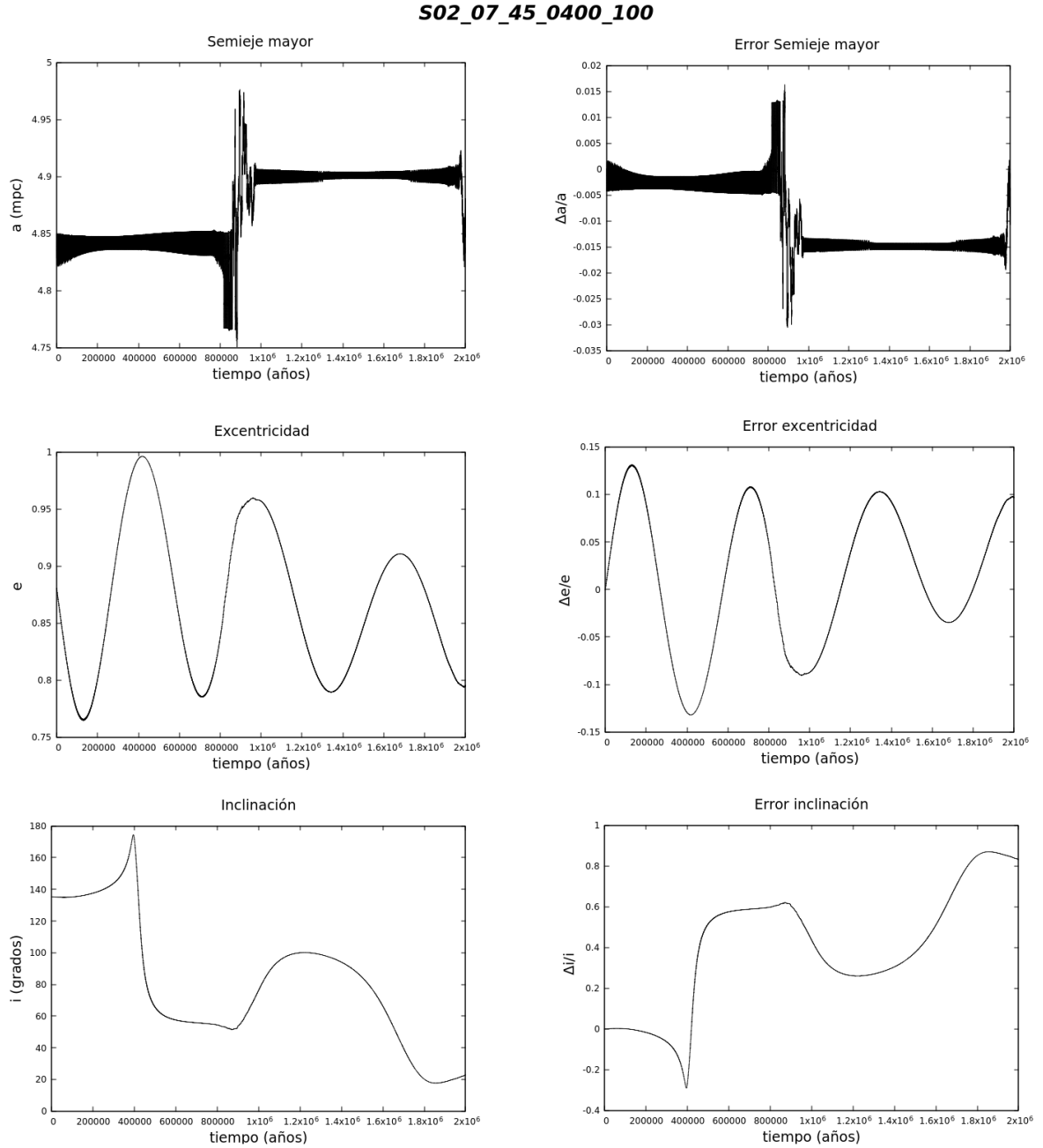


Figura 5.24: *Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$*

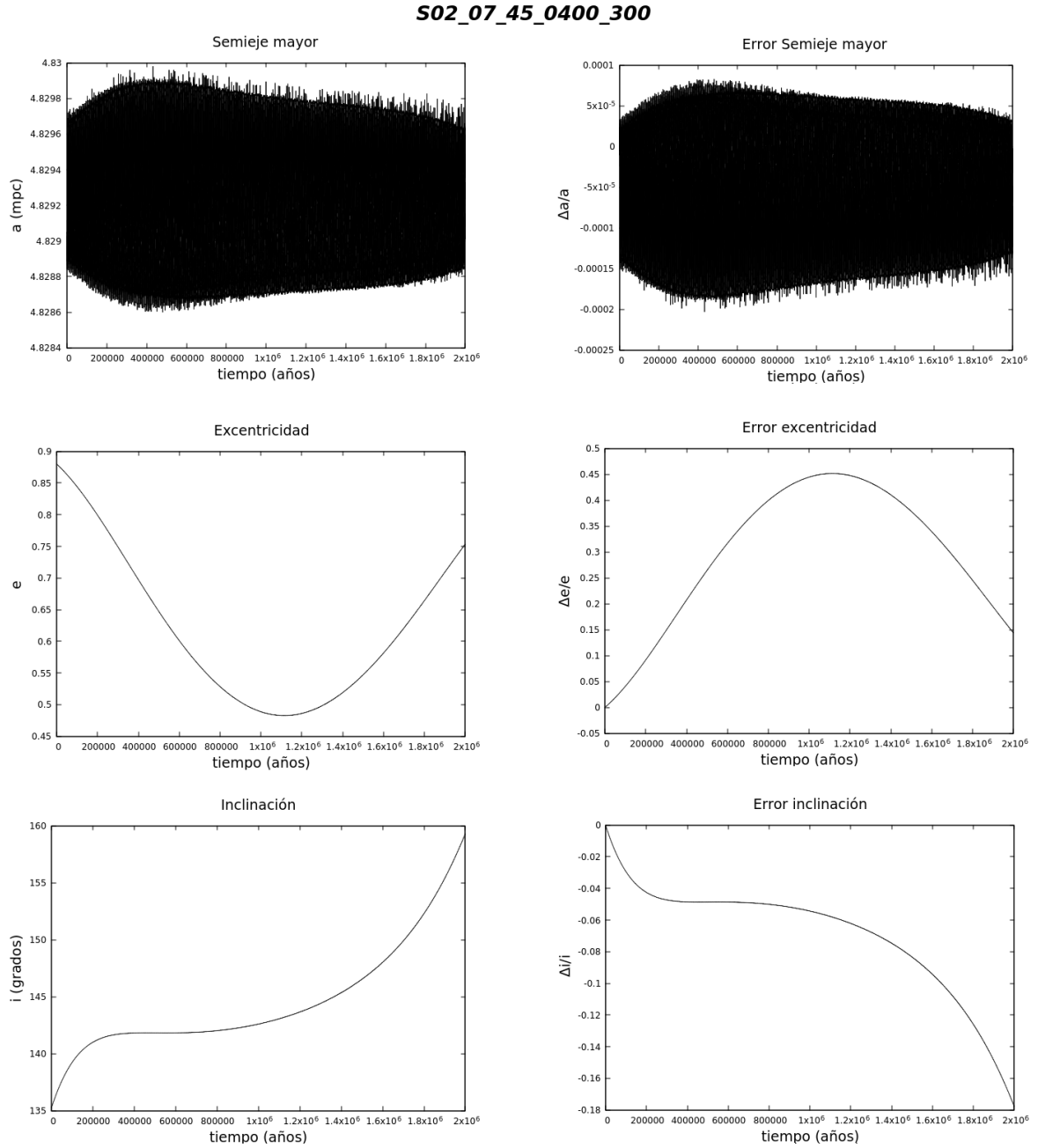


Figura 5.25: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$

Excentricidad IMBH $e = 0,7$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 90^\circ$

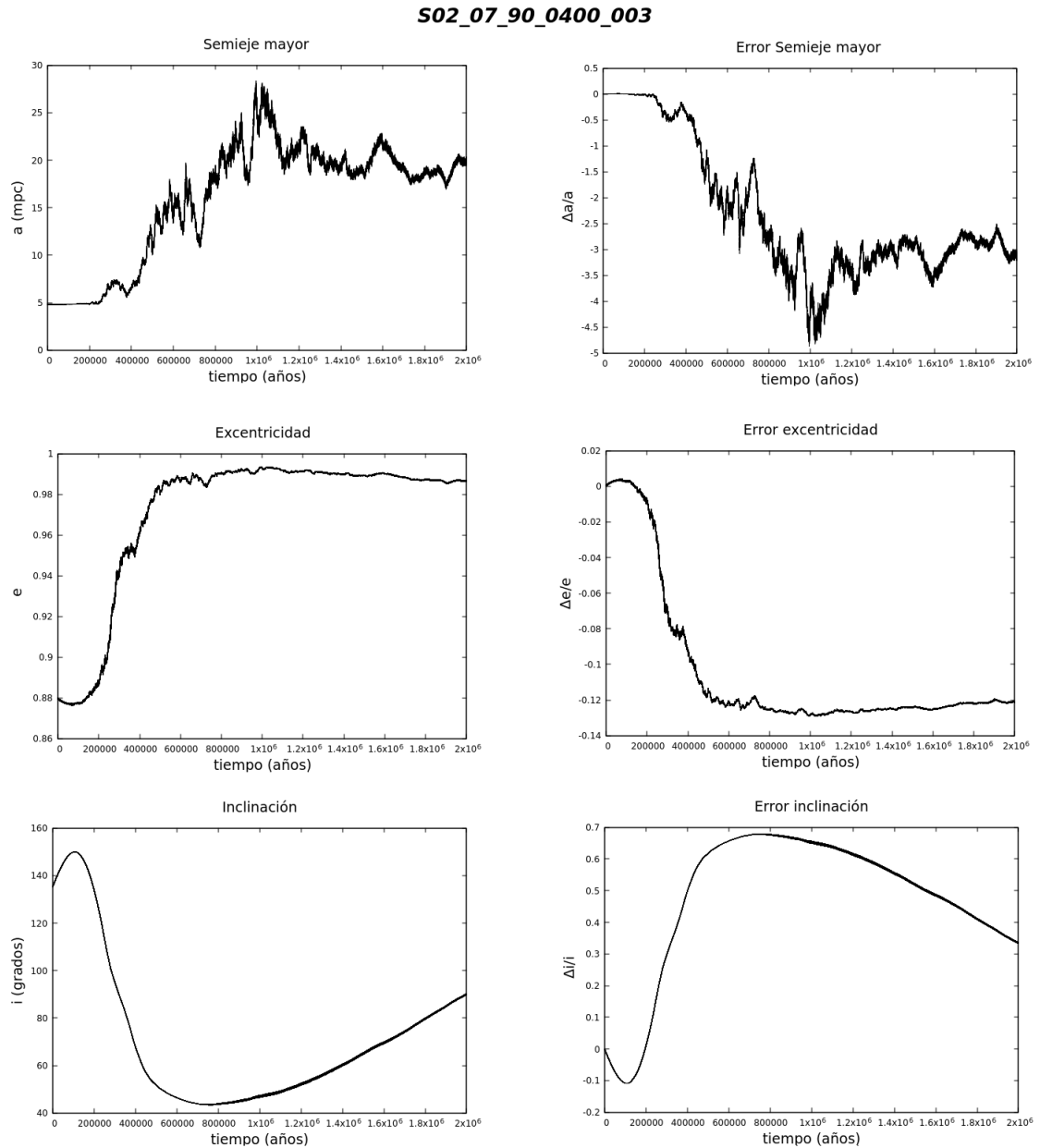


Figura 5.26: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$

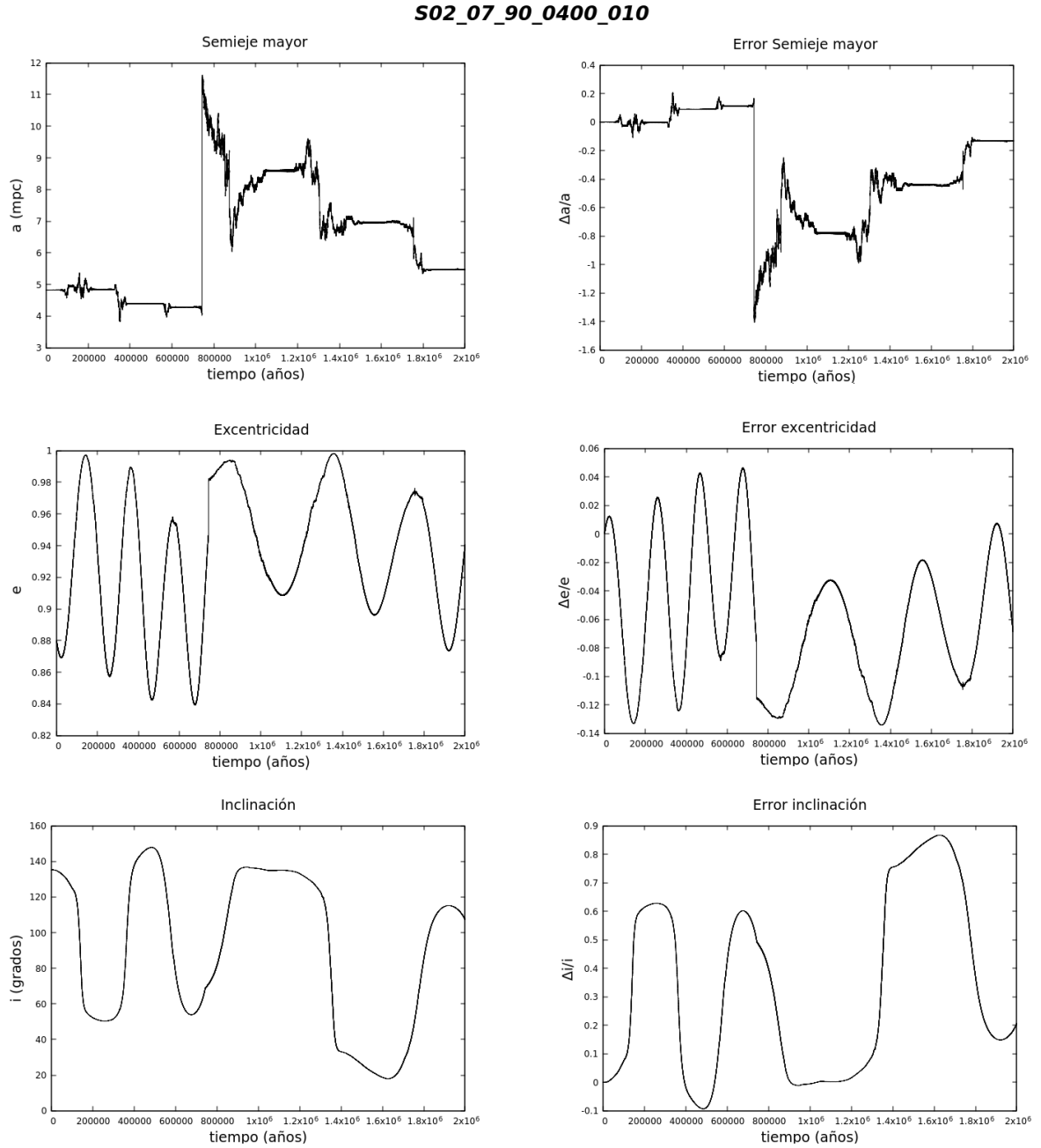


Figura 5.27: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

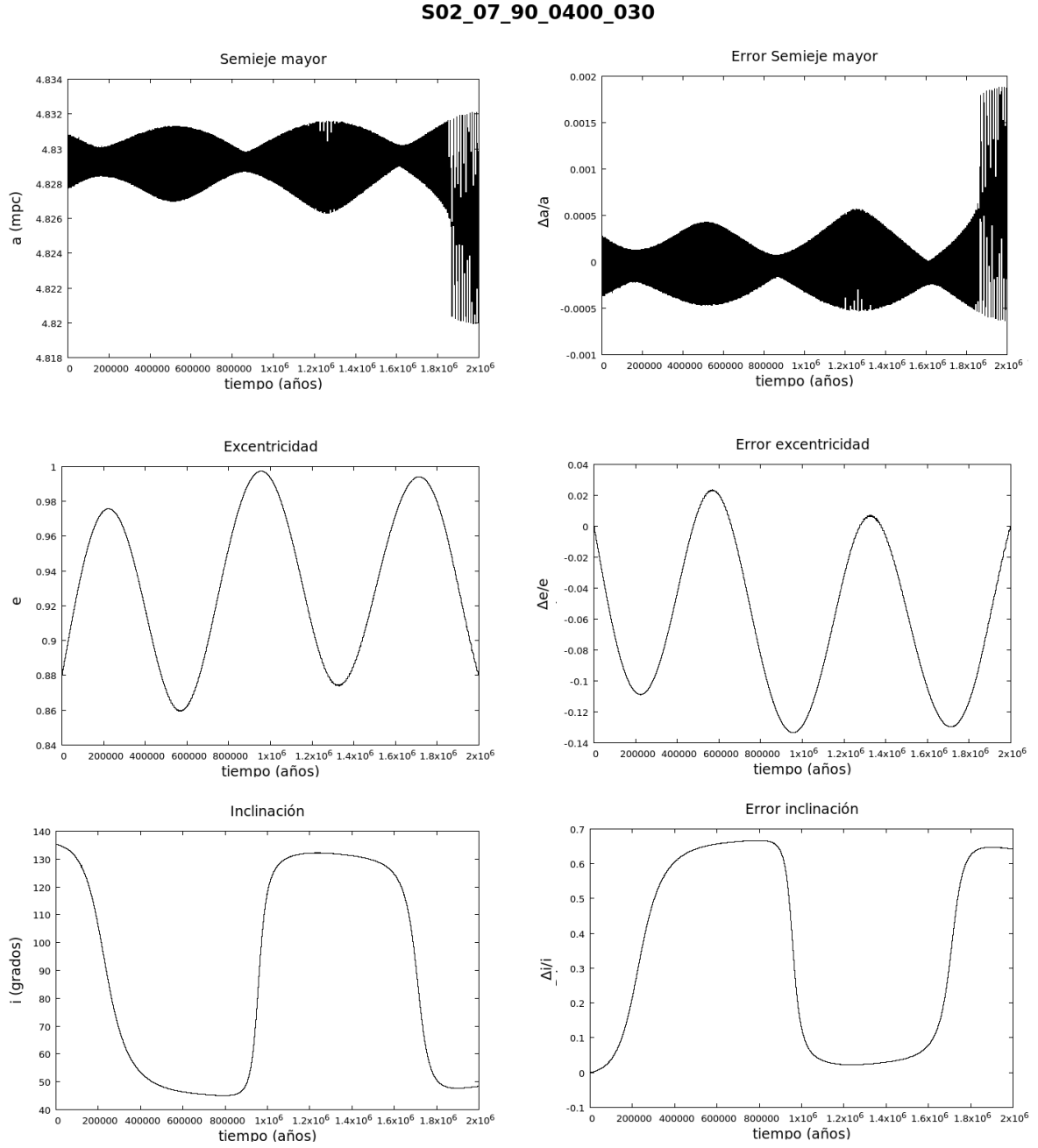


Figura 5.28: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$

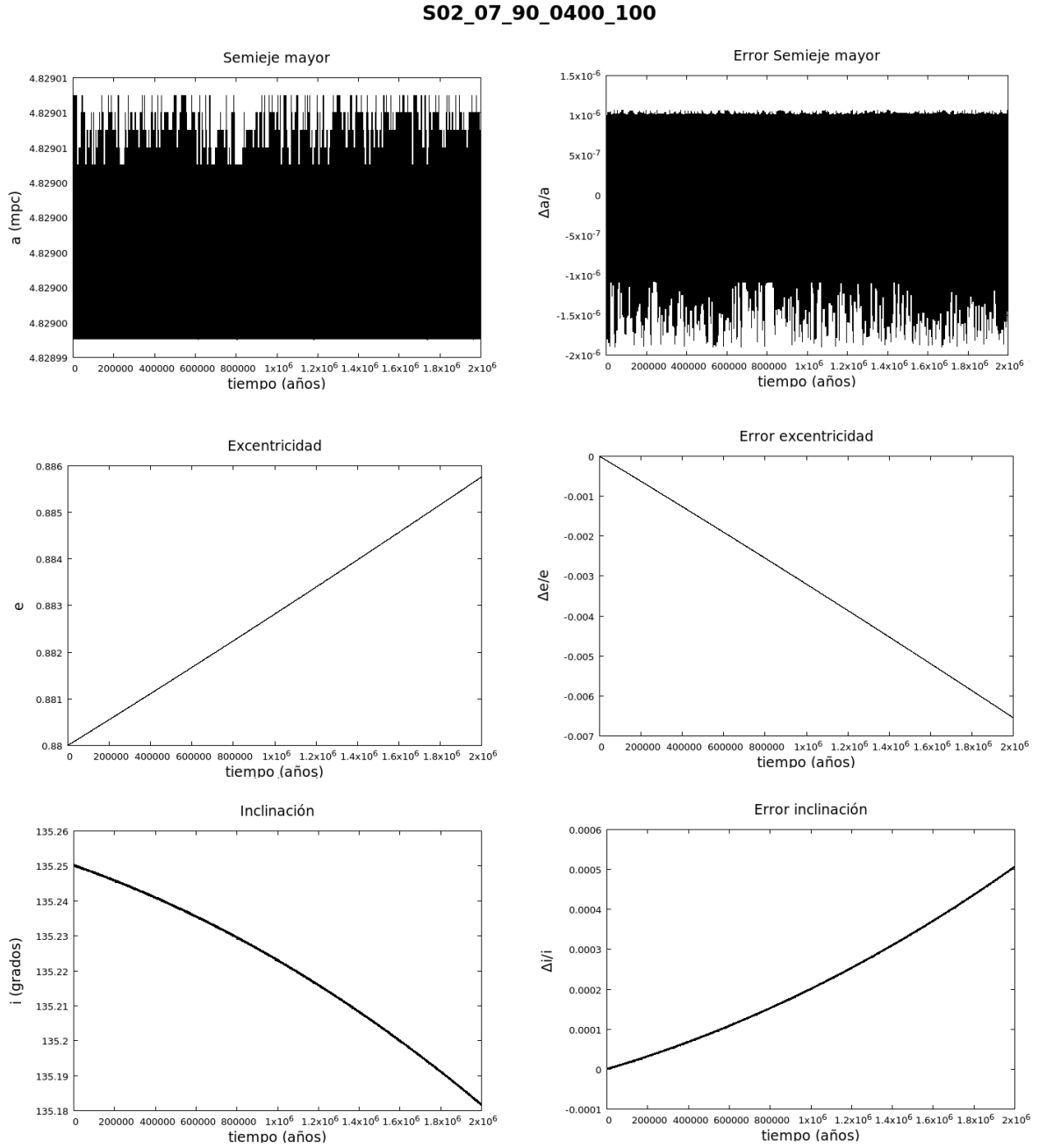


Figura 5.29: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$

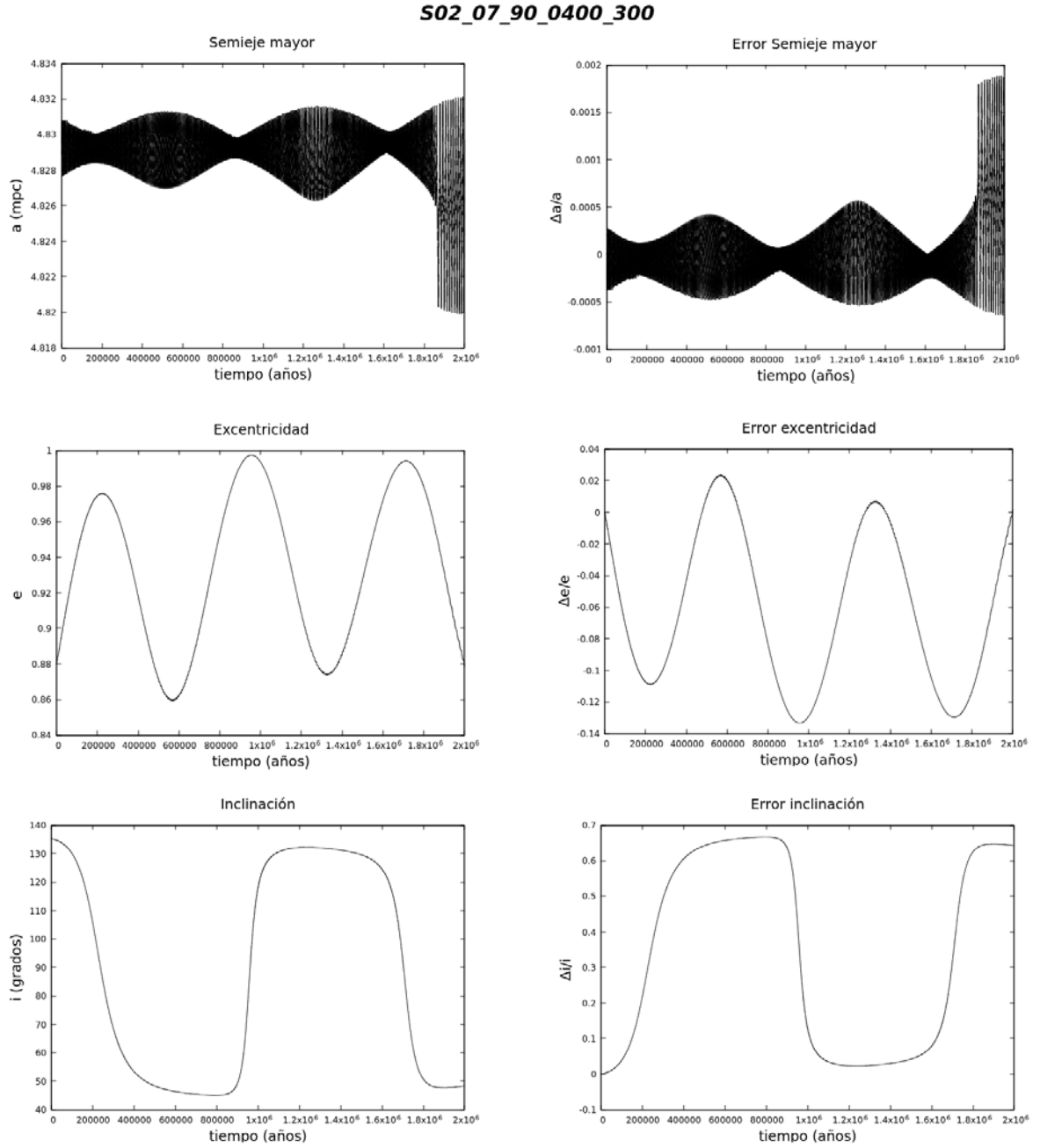


Figura 5.30: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 400M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$

Parámetros Orbitales de la estrella S2 cuando $m_{IMBH} = 1000M_{\odot}$

En esta sección se muestran los resultados de las simulaciones cuando la masa del Agujero Negro Masivo Intermedio IMBH es $m_{IMBH} = 1000M_{\odot}$

Excentricidad IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 0^{\circ}$

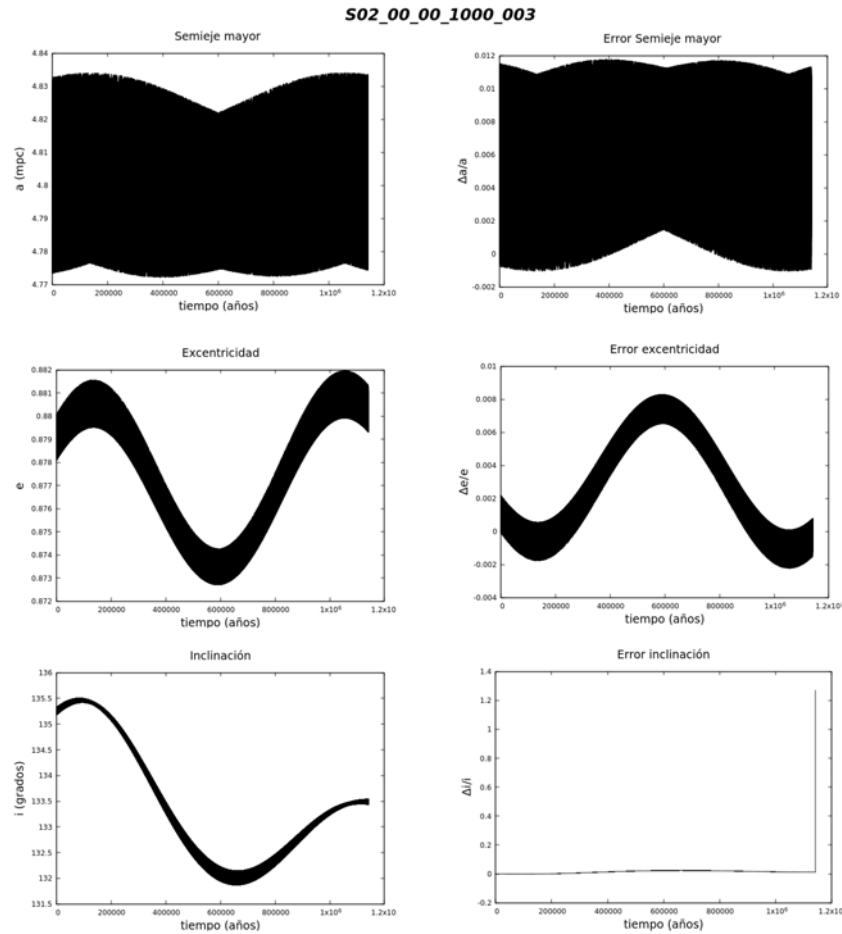


Figura 5.31: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^{\circ}$, masa IMBH $m = 1000M_{\odot}$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$

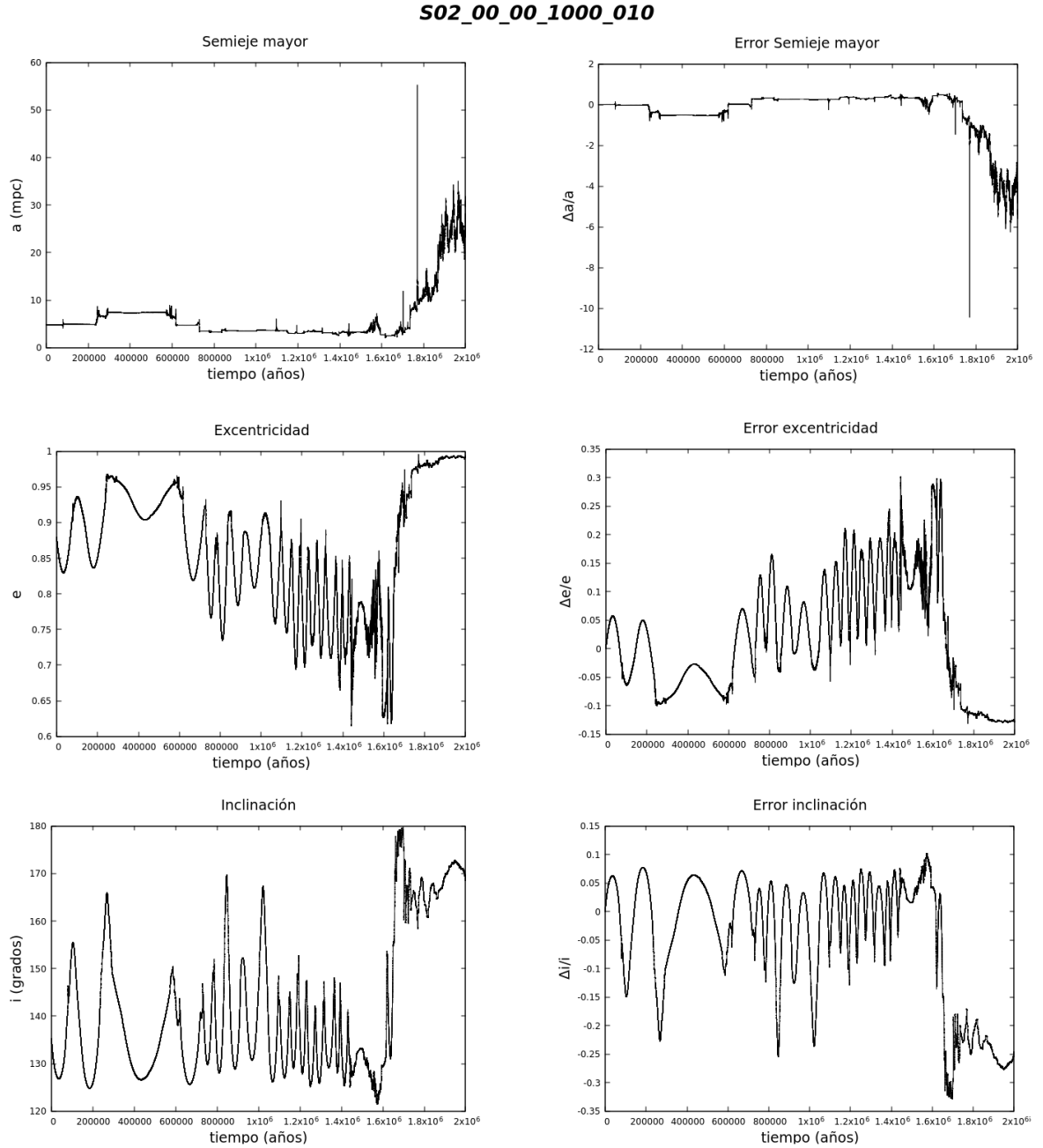


Figura 5.32: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

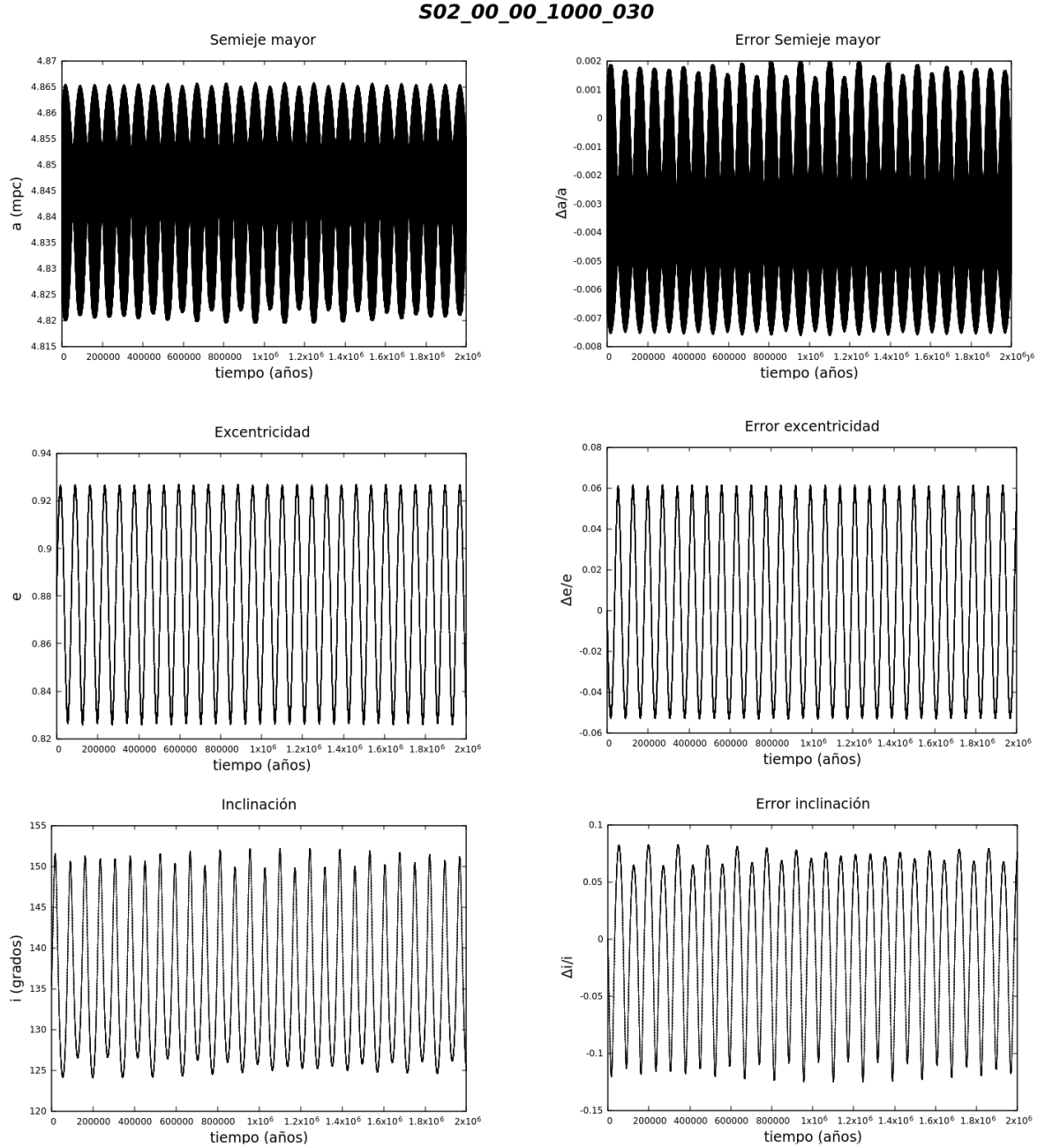


Figura 5.33: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$

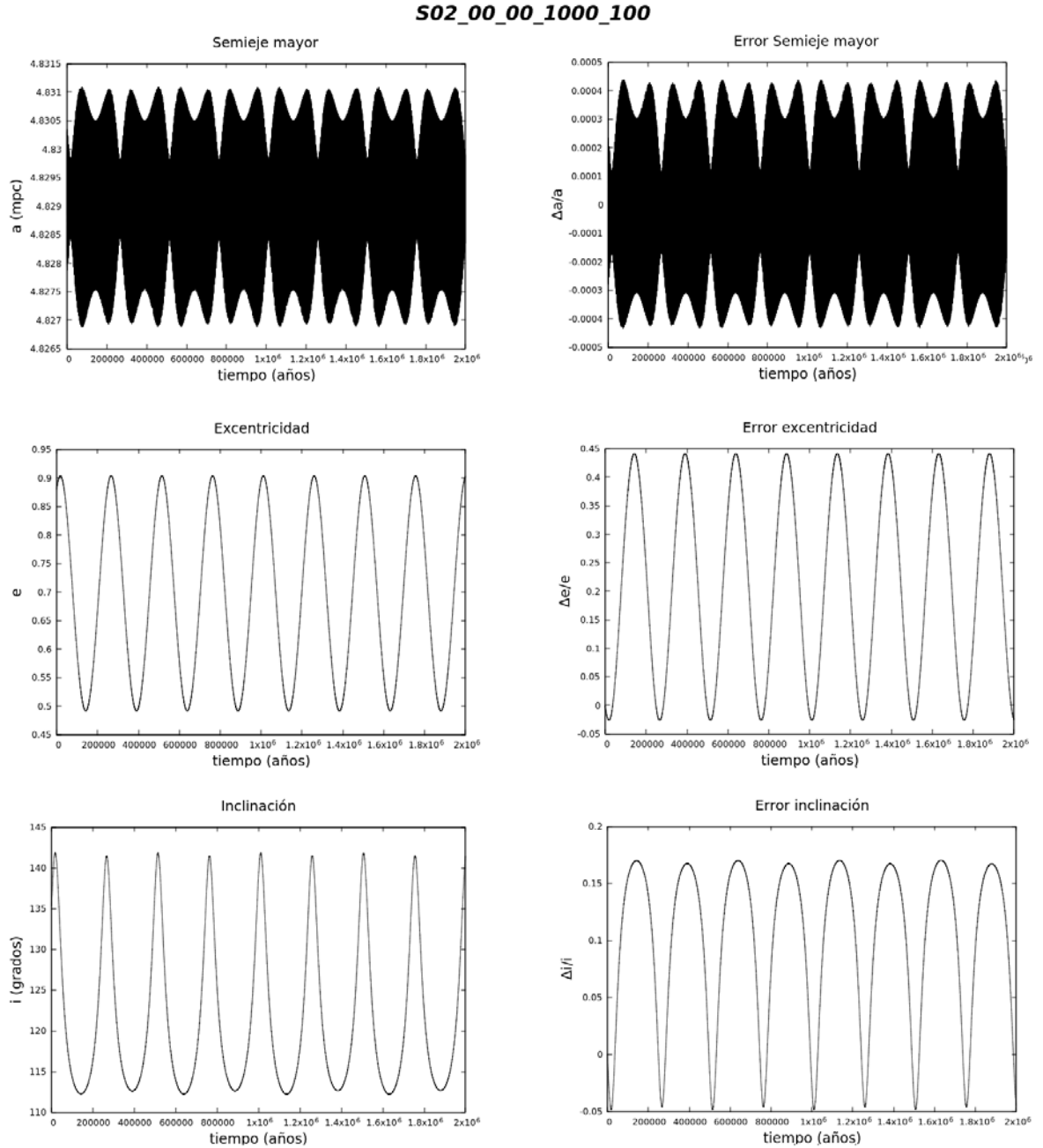


Figura 5.34: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$

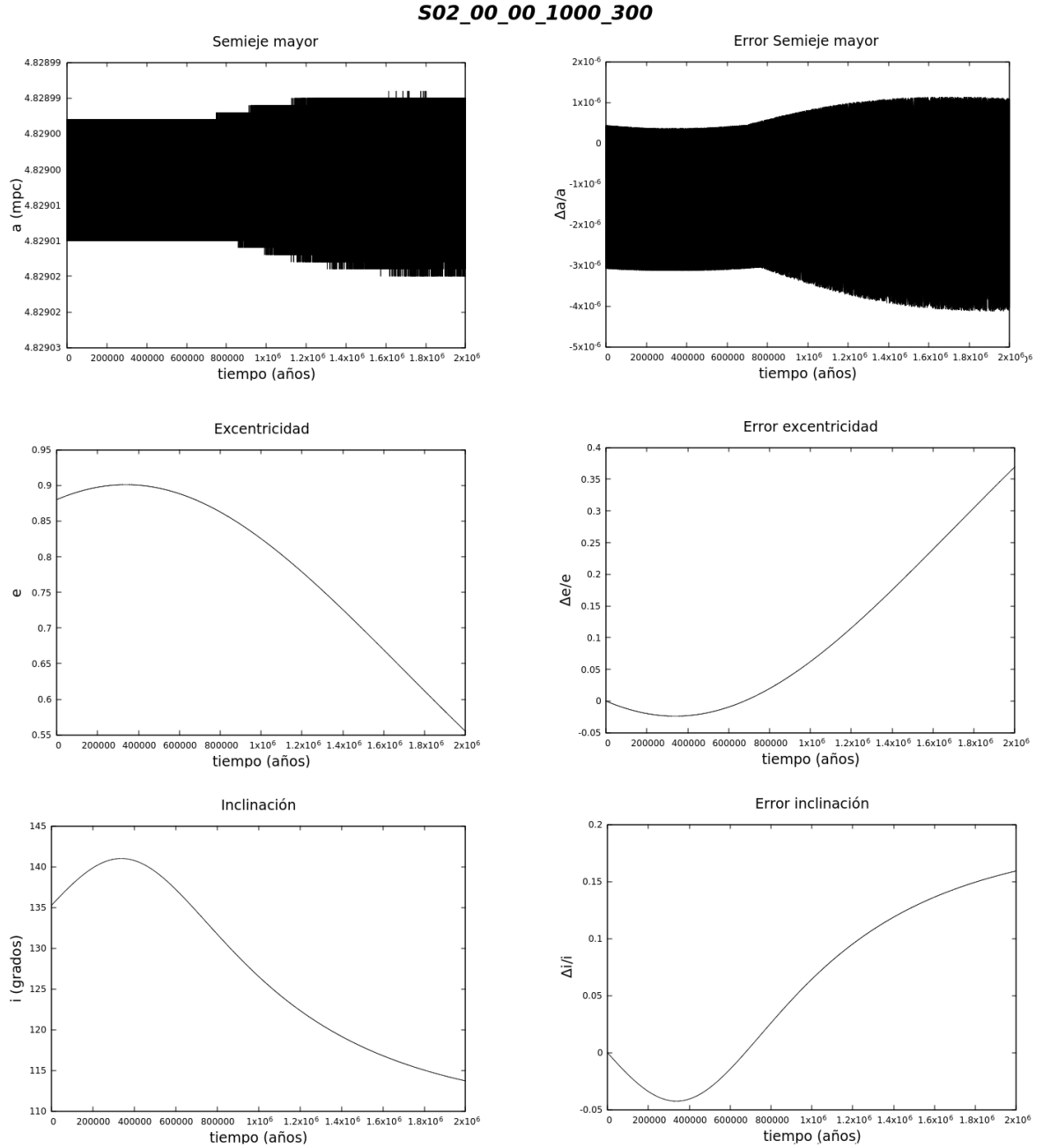


Figura 5.35: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$

Excentricidad IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 45^\circ$

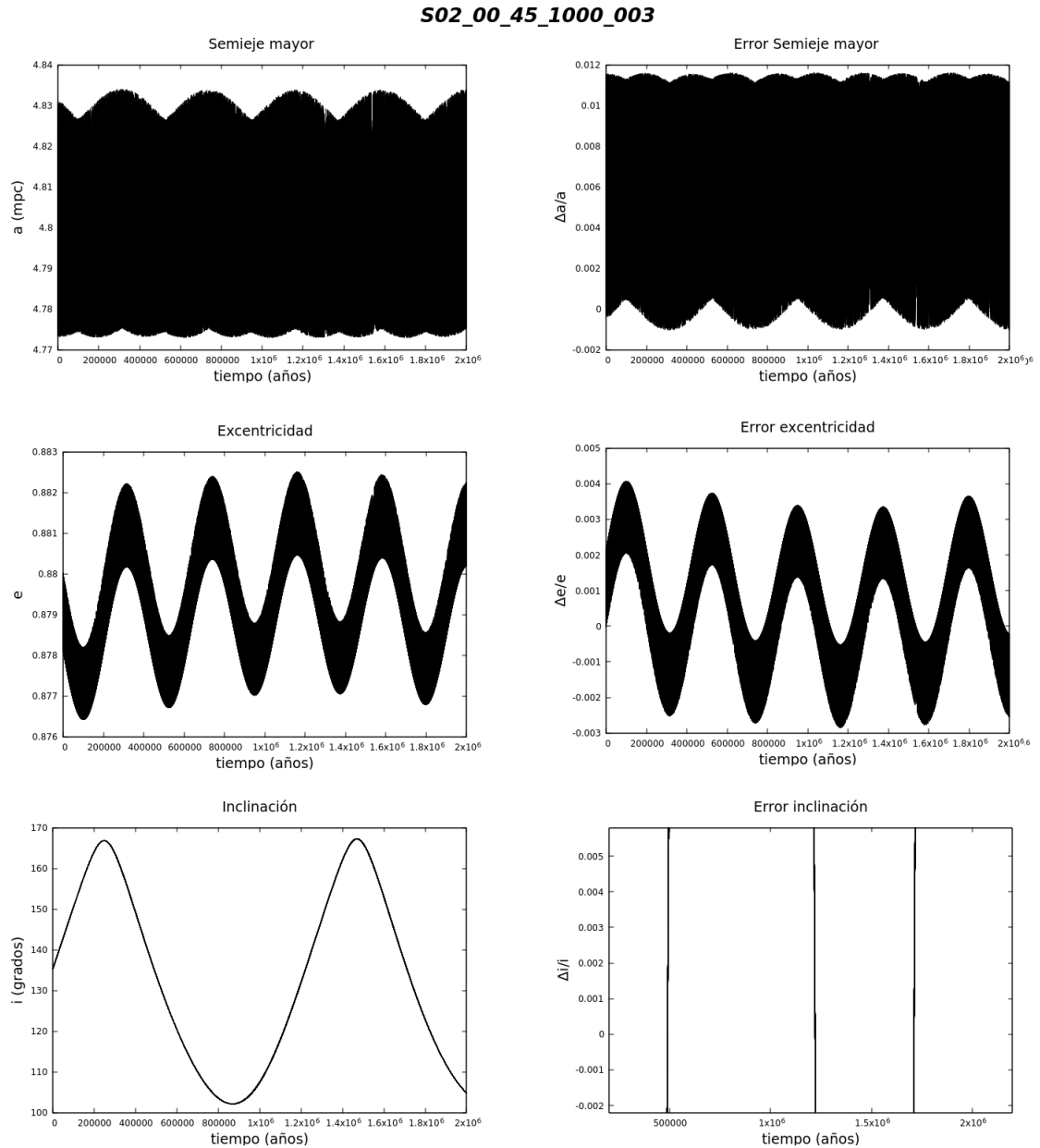


Figura 5.36: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$

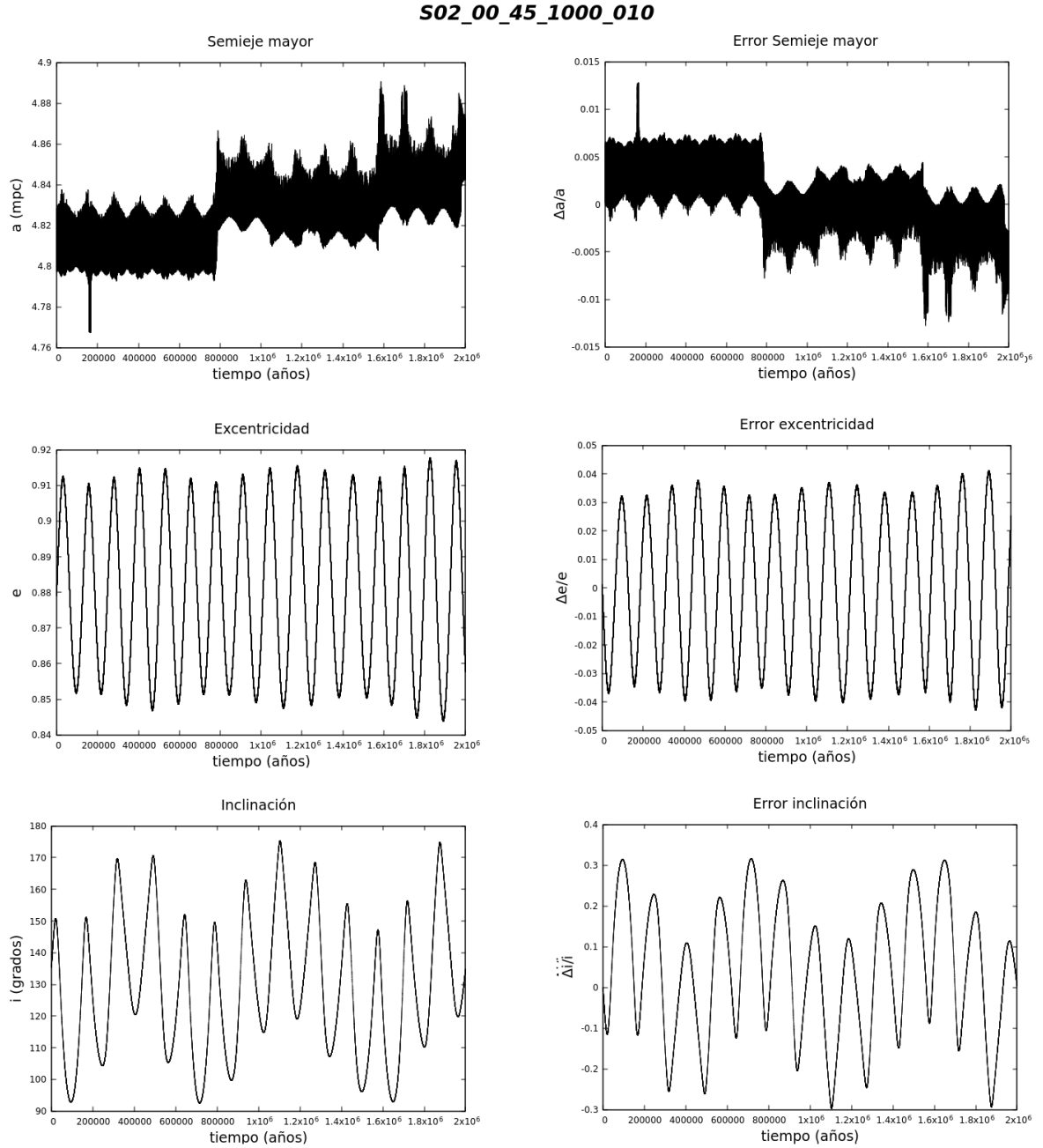


Figura 5.37: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

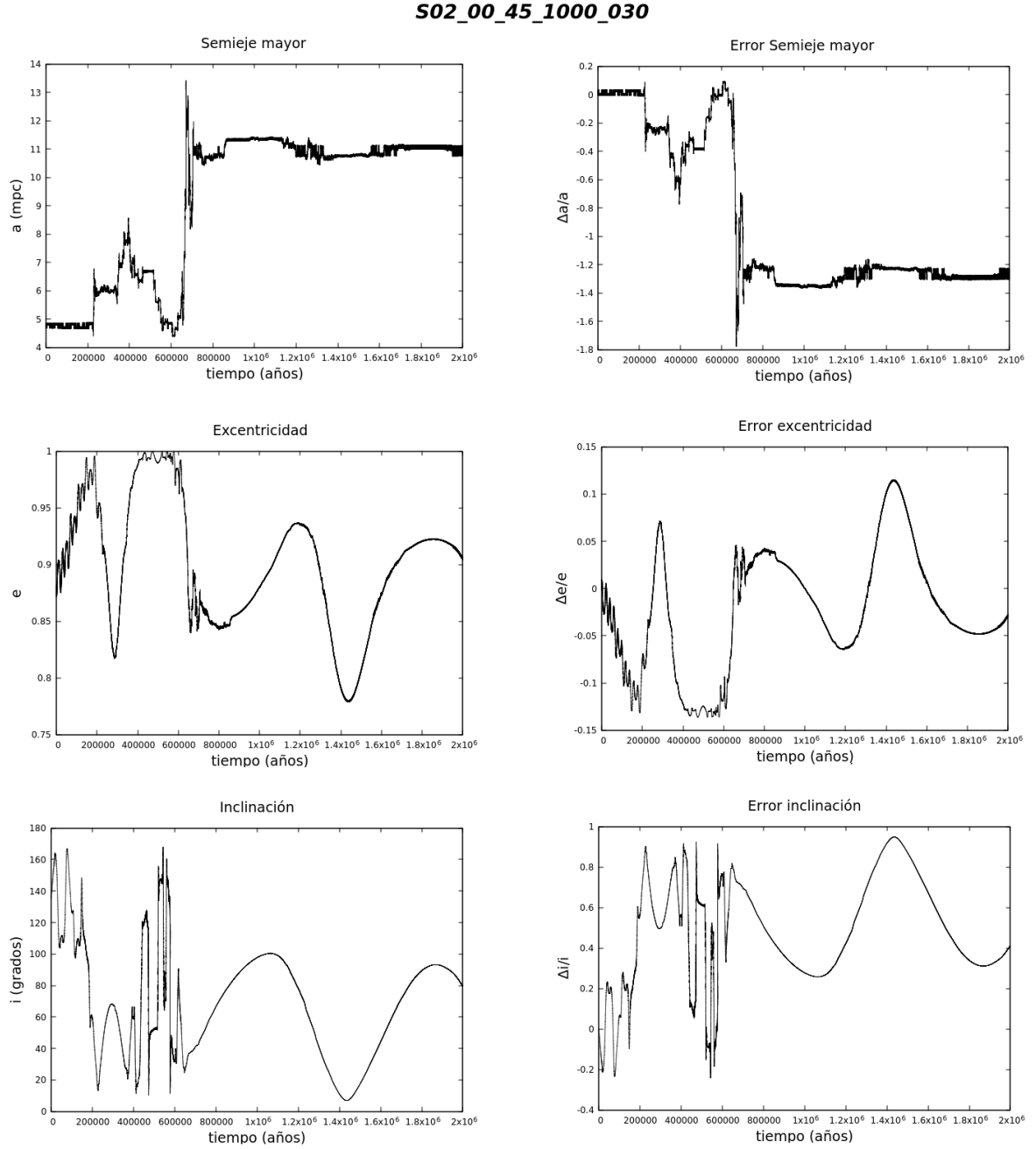


Figura 5.38: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0mpc$

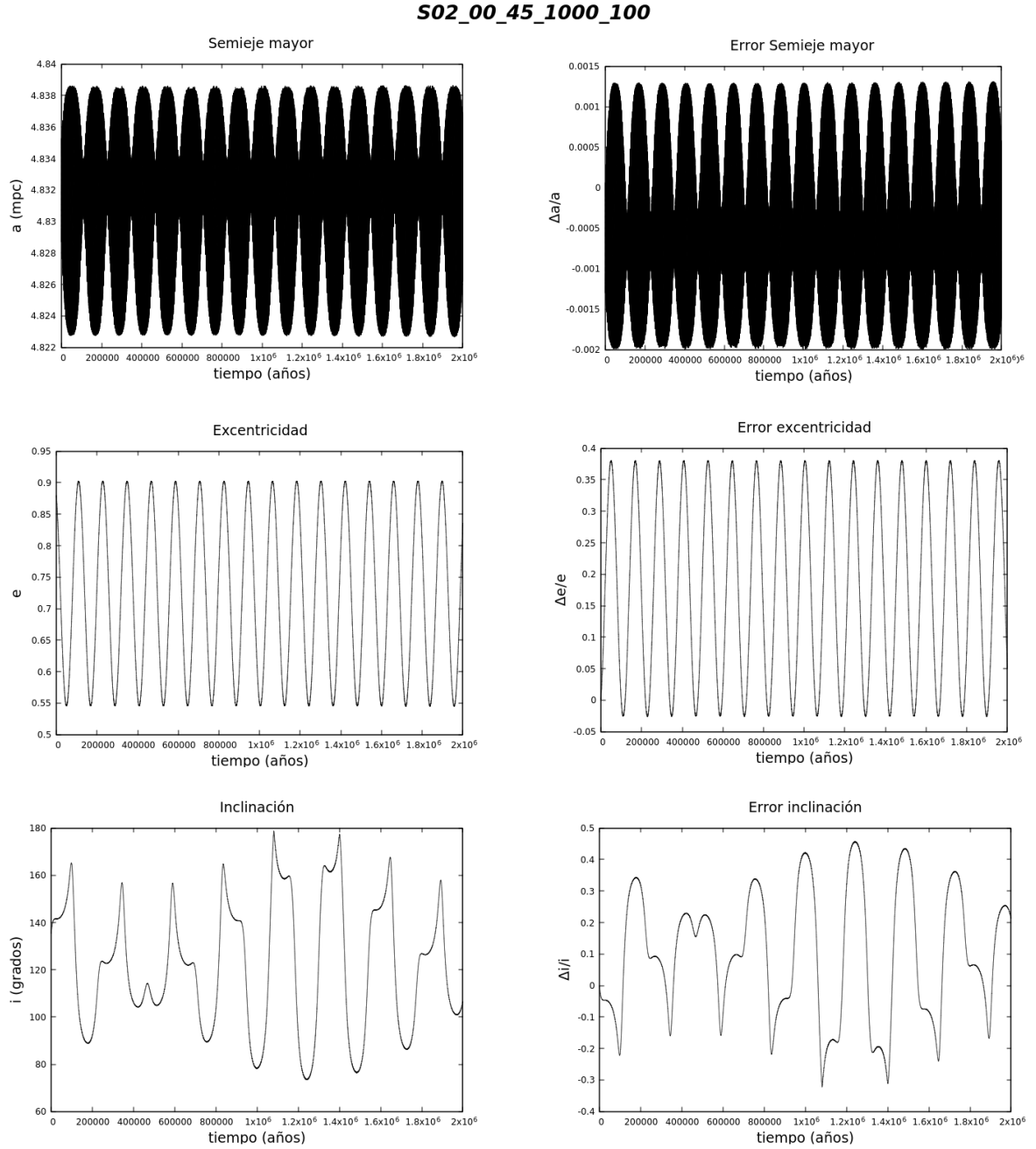


Figura 5.39: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$

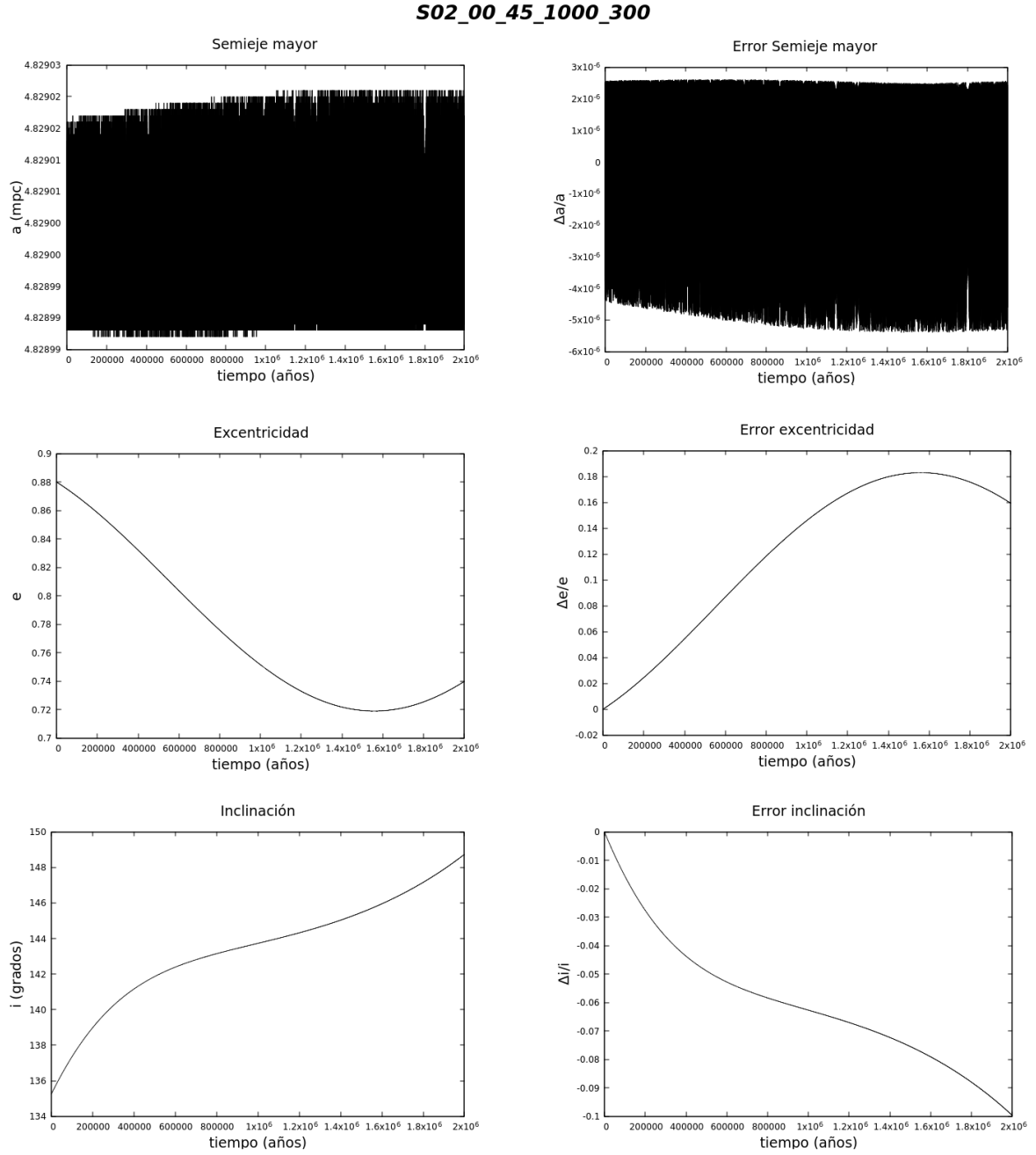


Figura 5.40: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30mpc$

Excentricidad IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 90^\circ$

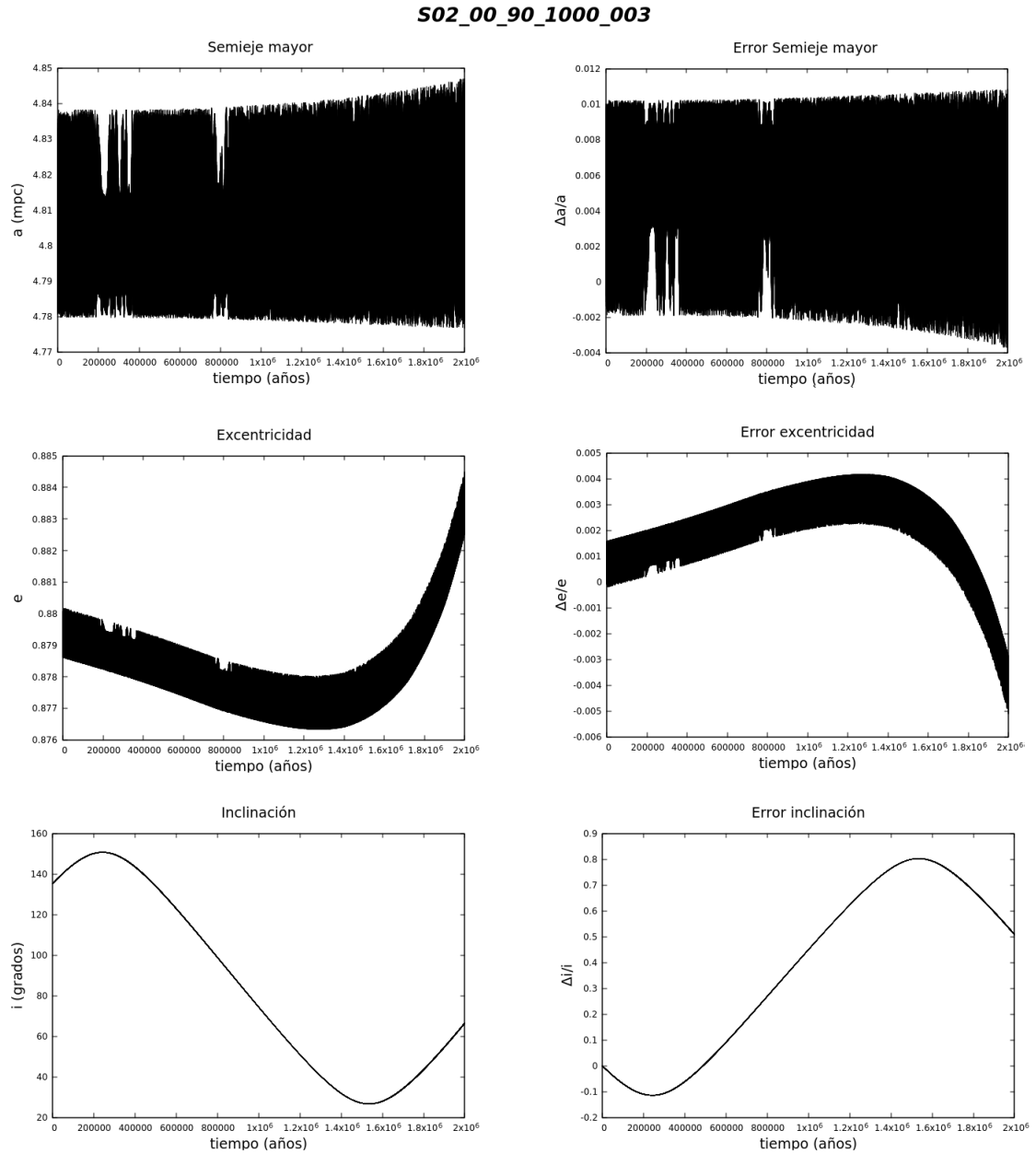


Figura 5.41: *Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$*

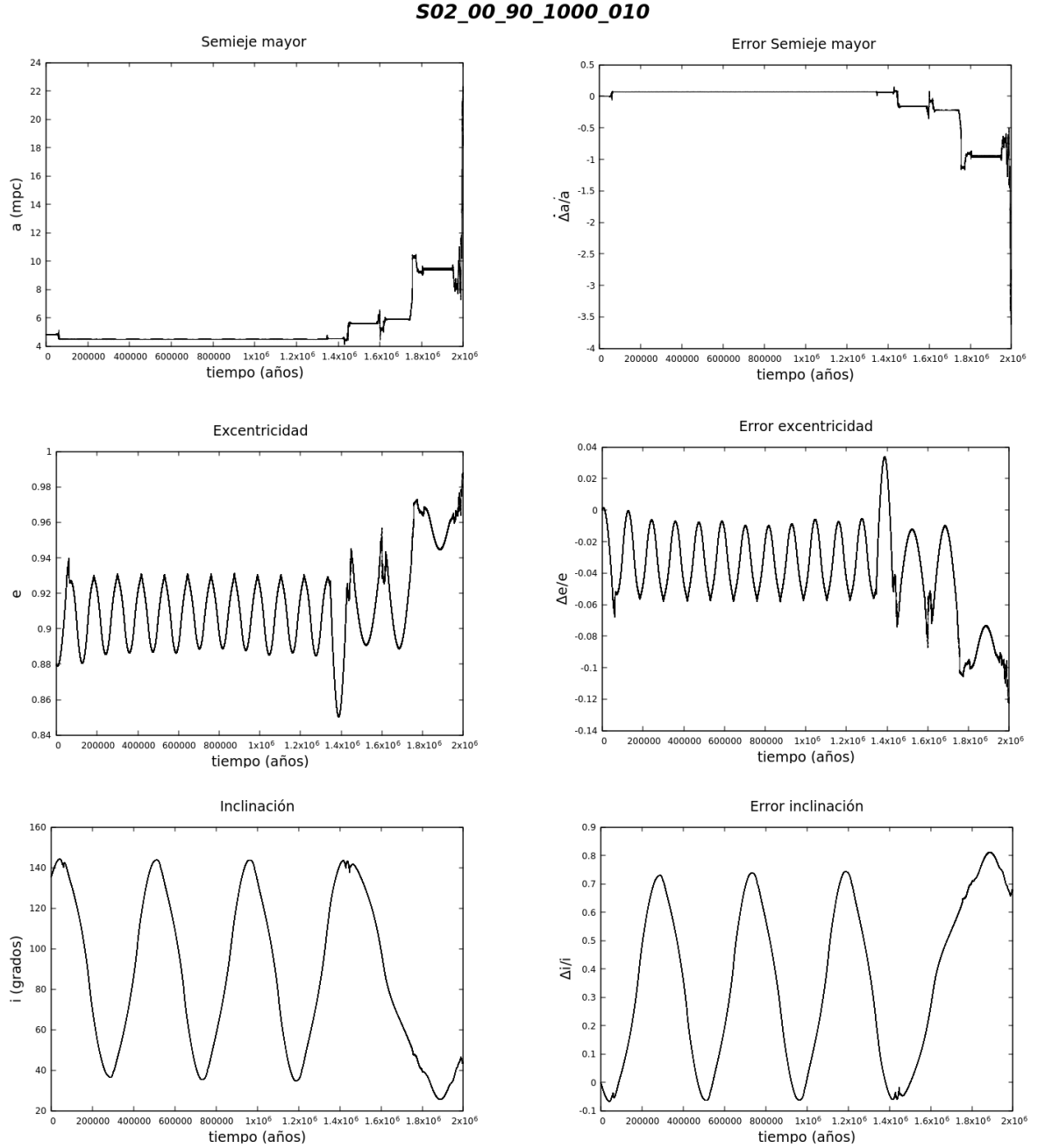


Figura 5.42: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

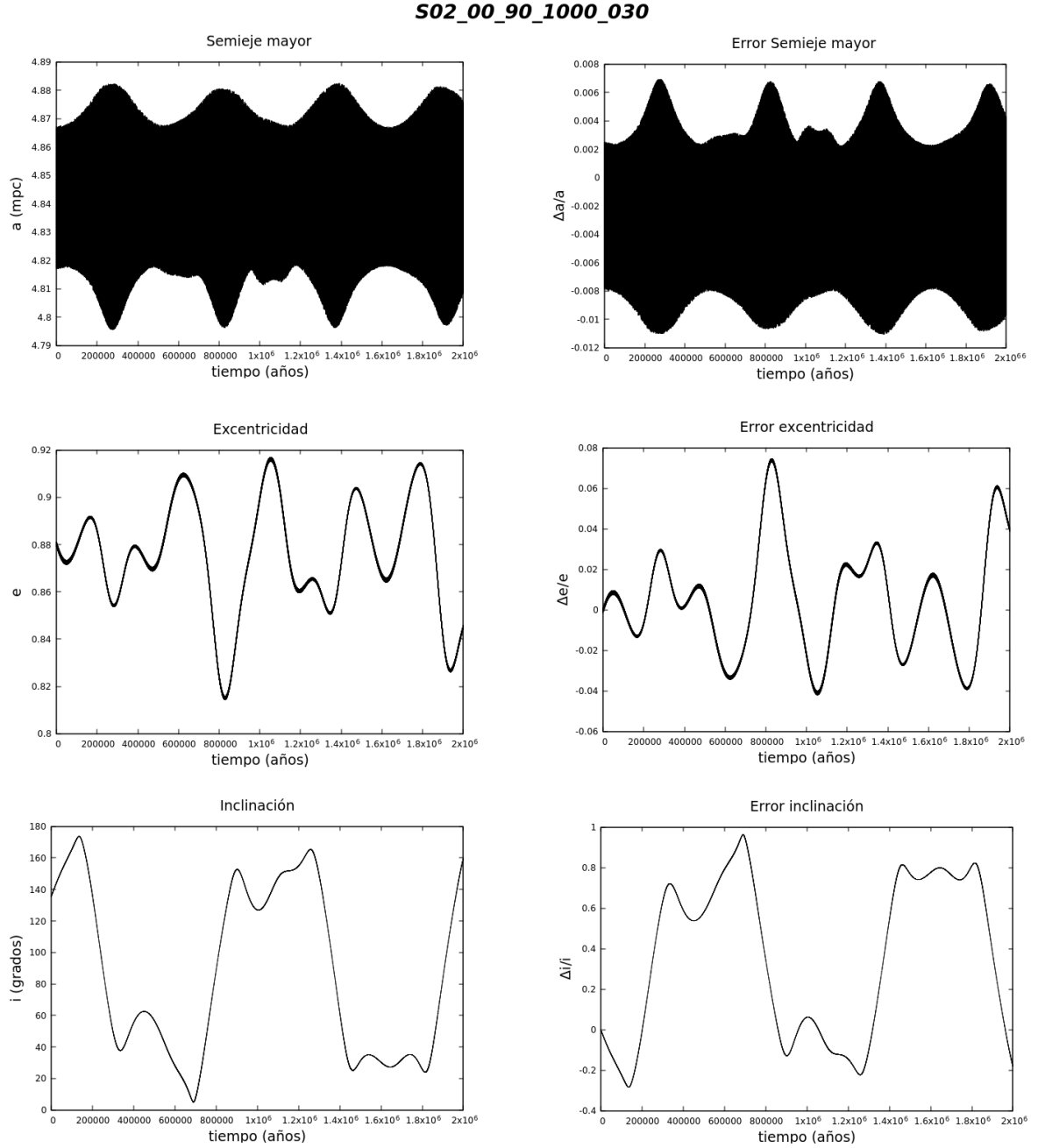


Figura 5.43: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$

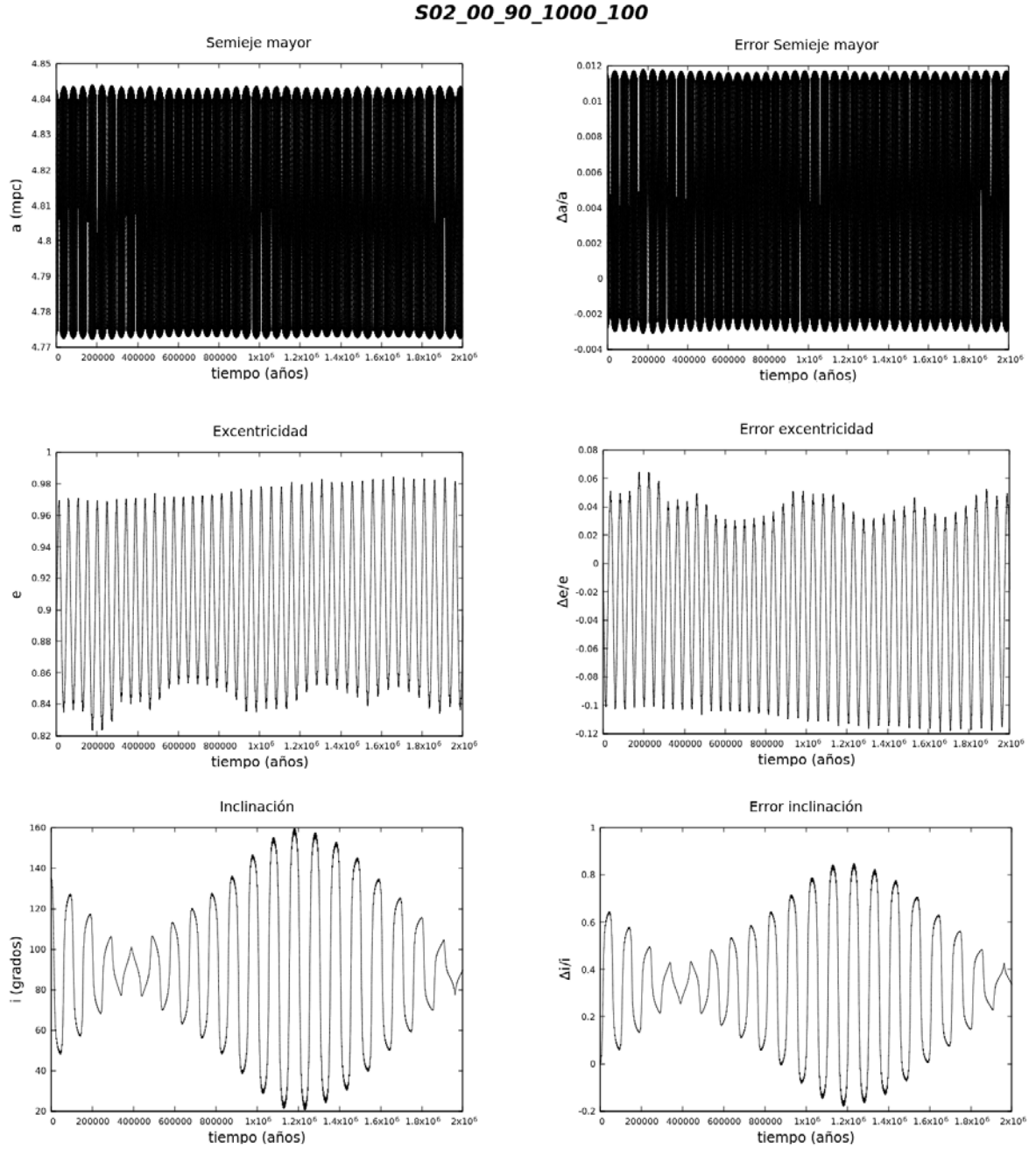


Figura 5.44: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$

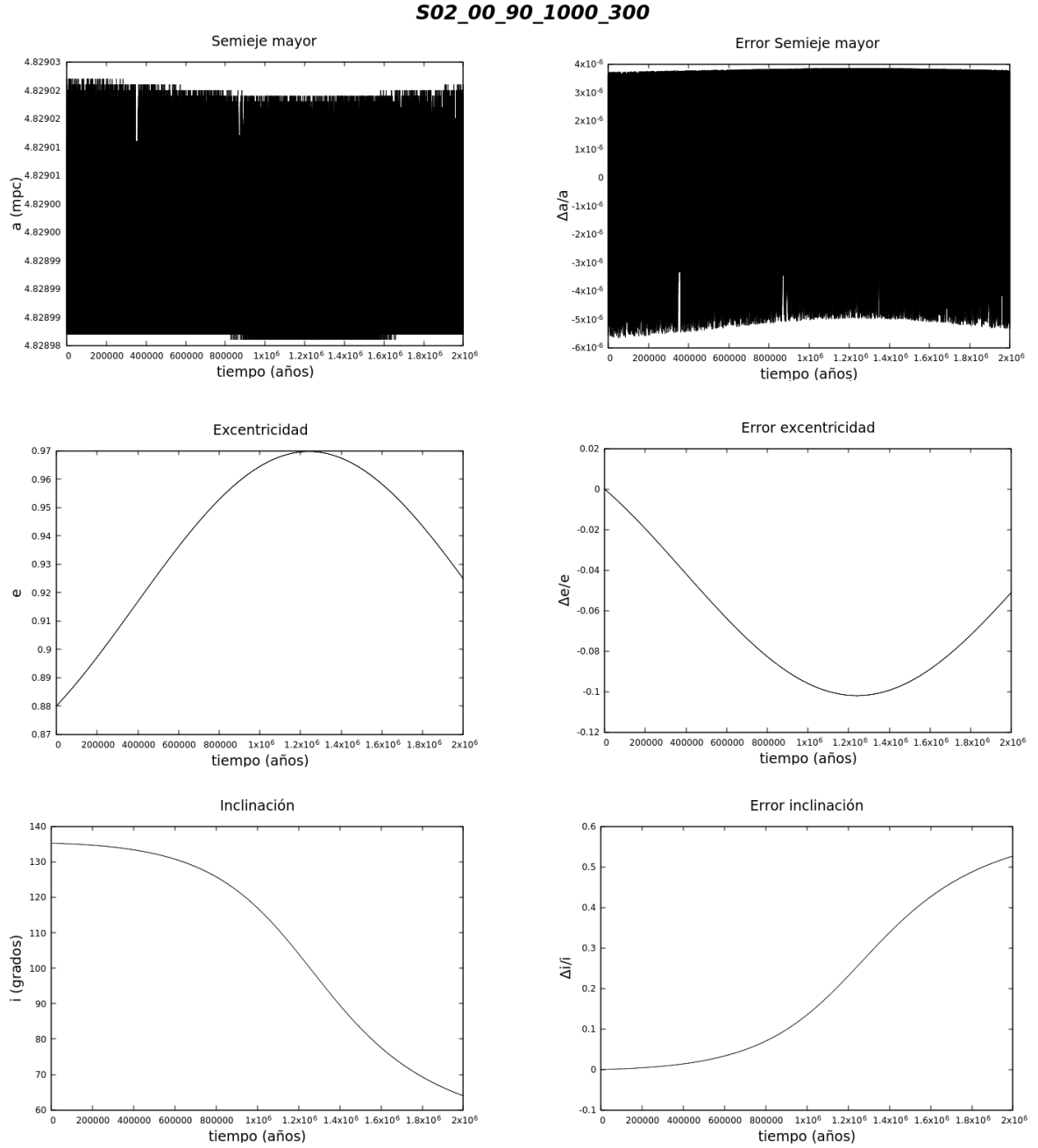


Figura 5.45: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30mpc$

Excentricidad IMBH $e = 0,7$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 0^\circ$

S02_07_00_1000_003

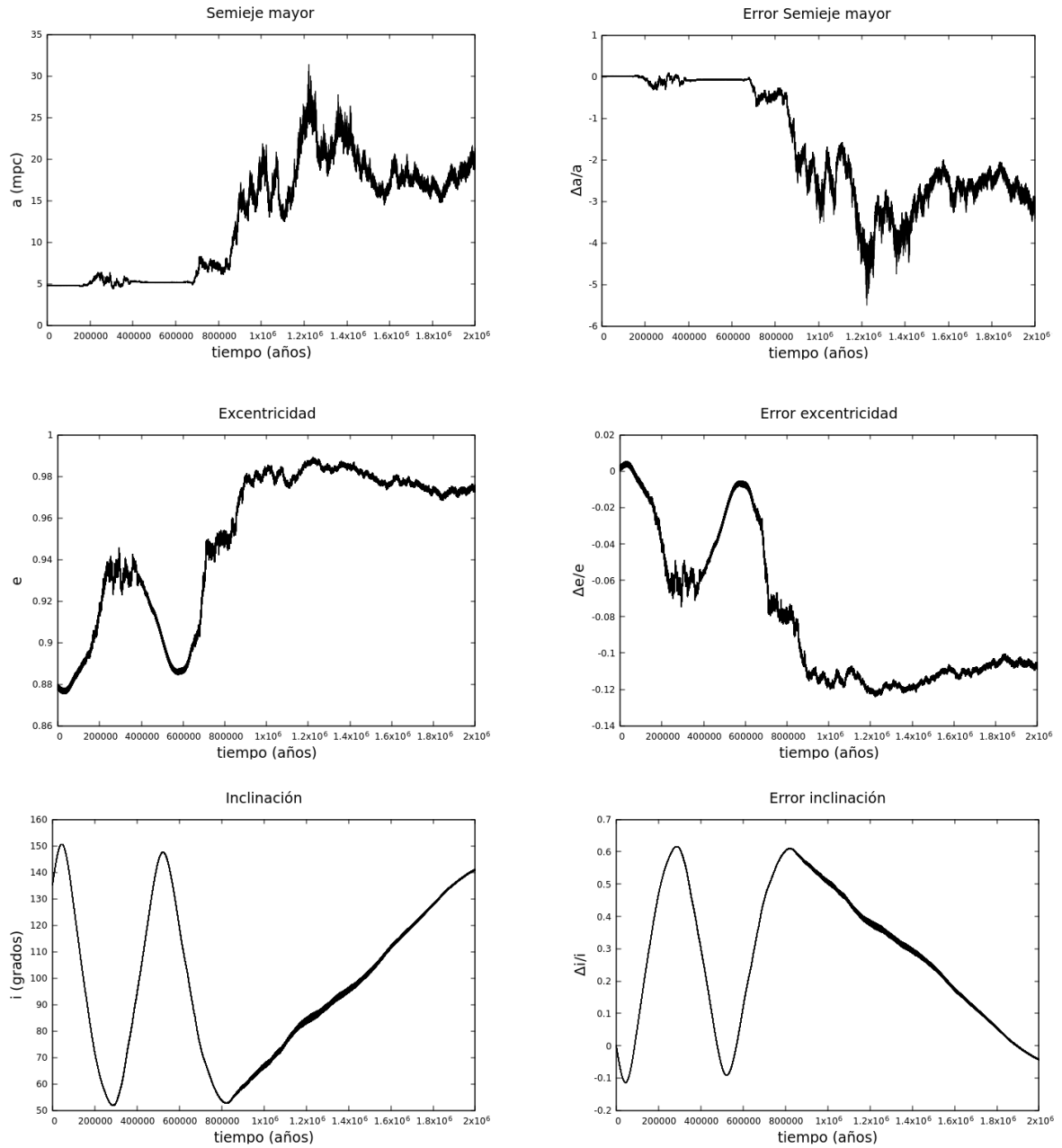


Figura 5.46: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$

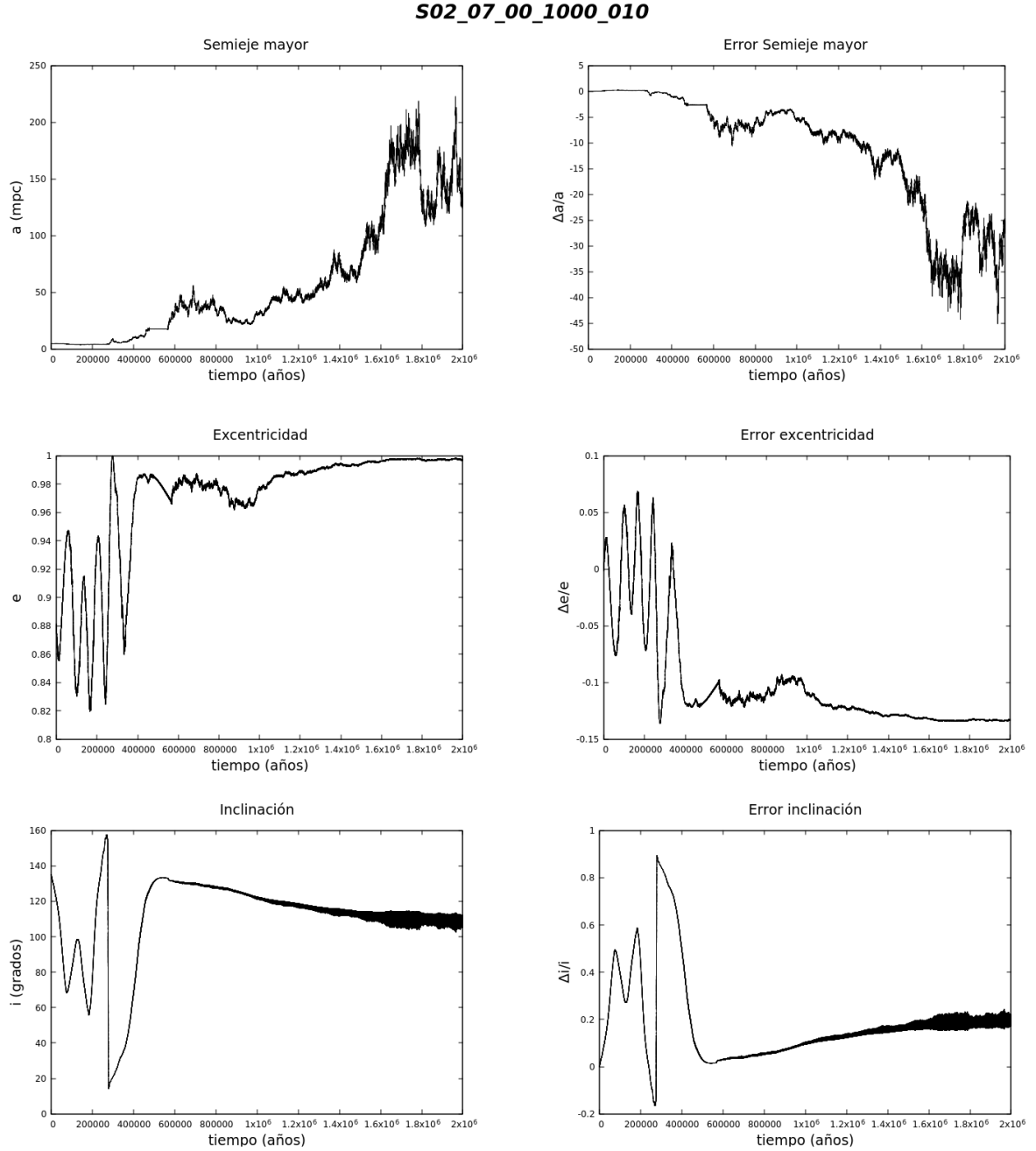


Figura 5.47: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

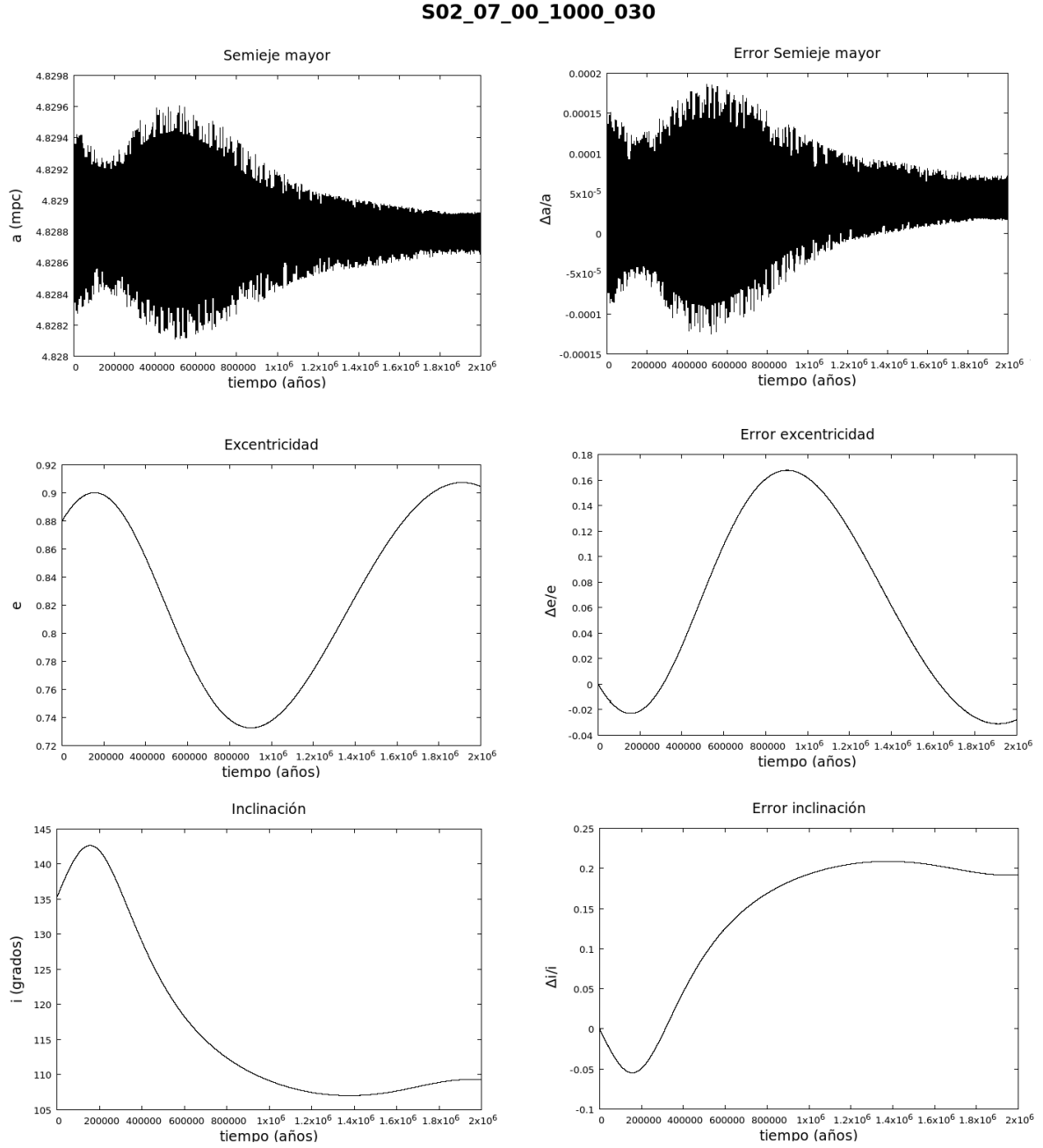


Figura 5.48: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$

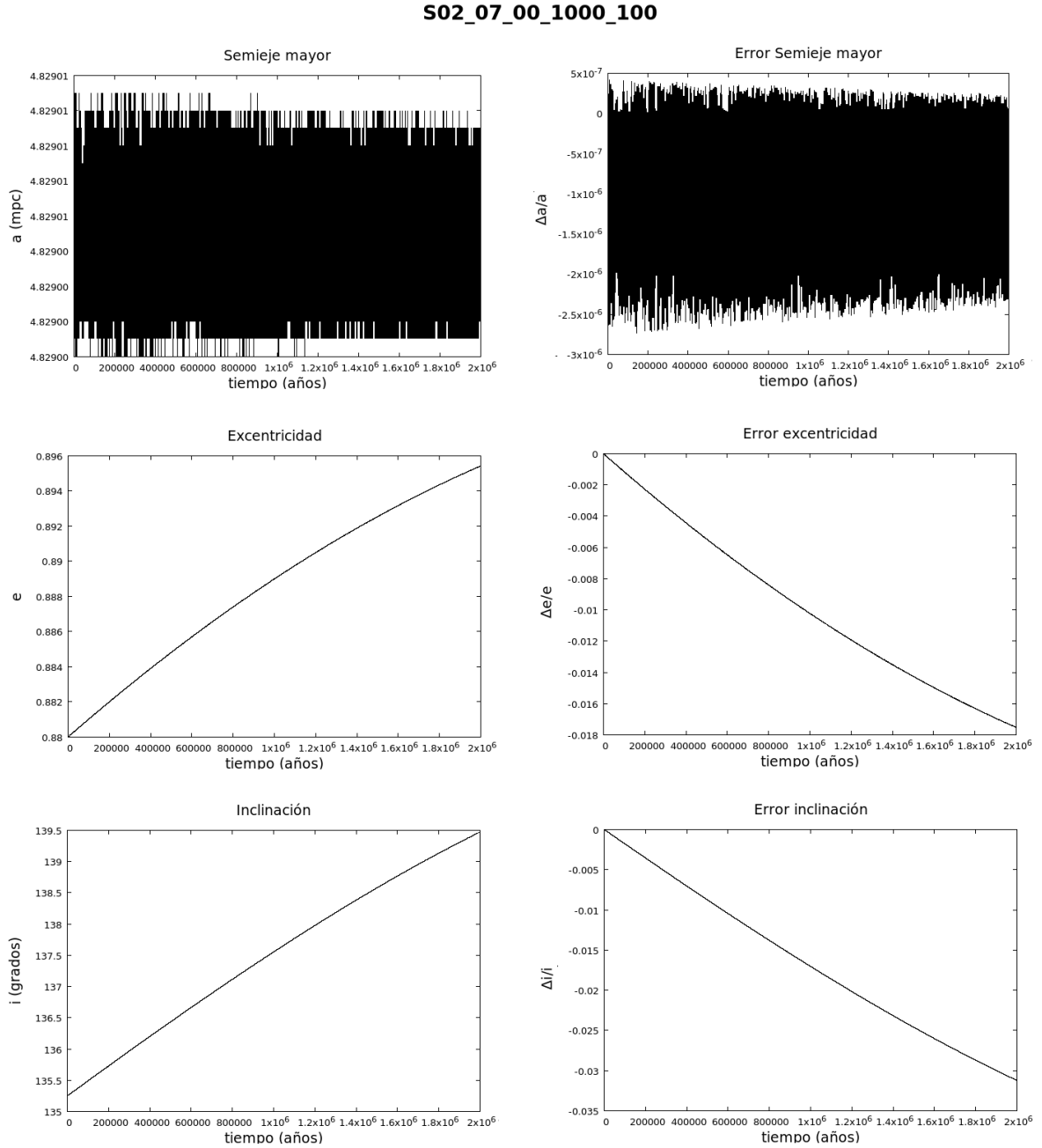


Figura 5.49: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$

S02_07_00_1000_300

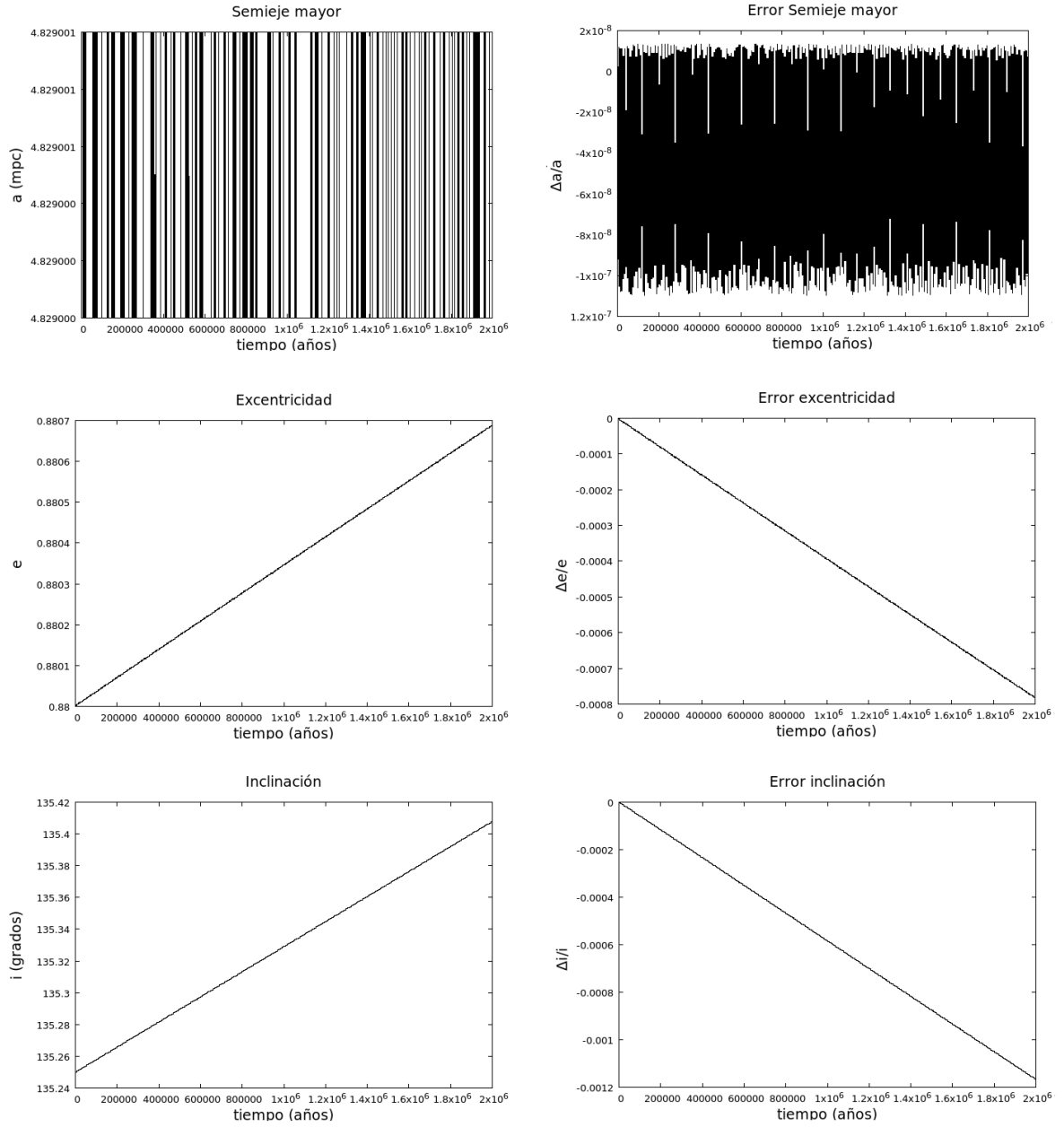


Figura 5.50: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$

Excentricidad IMBH $e = 0,7$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 45^\circ$

S02_07_45_1000_003

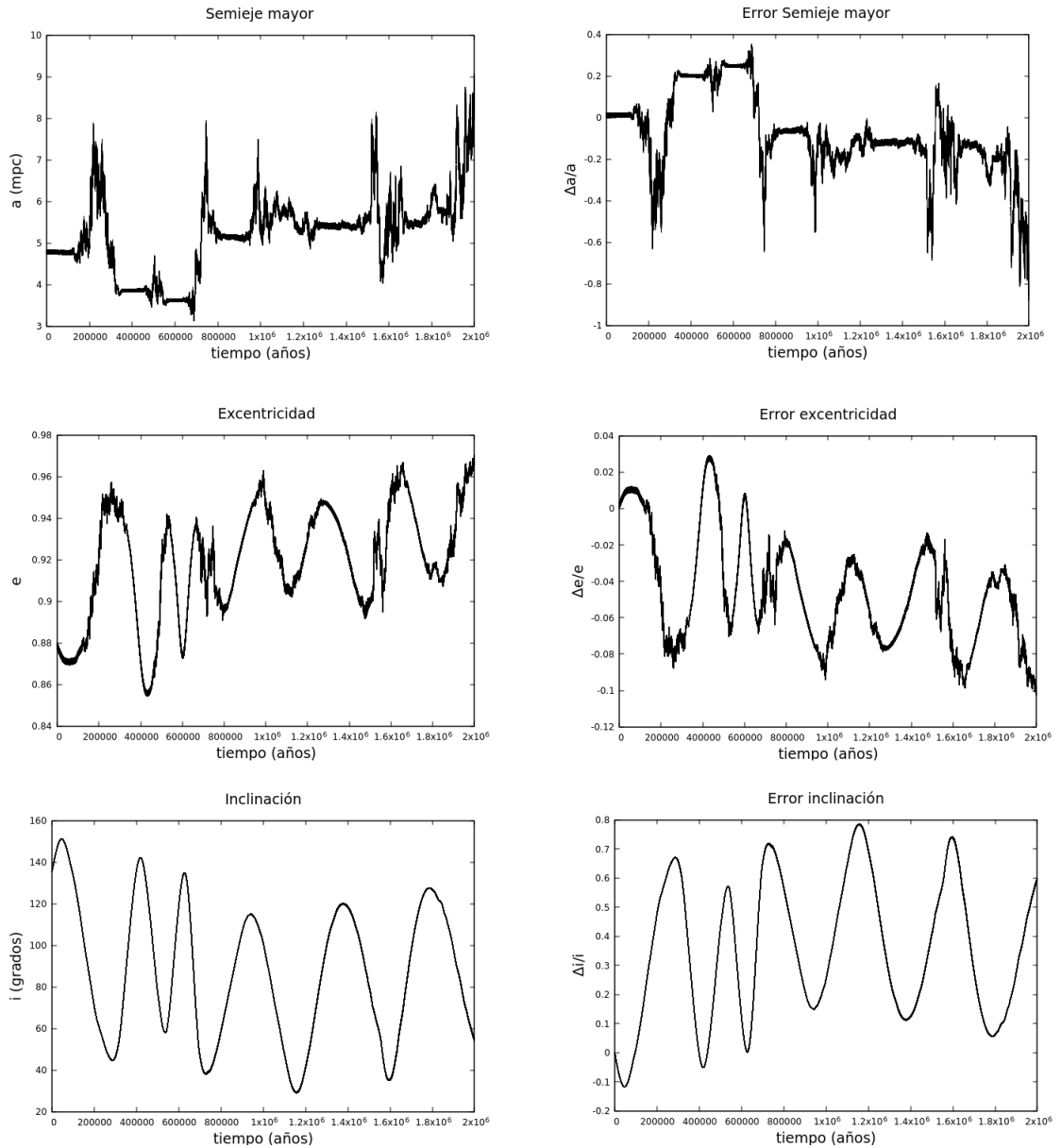


Figura 5.51: *Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$*

S02_07_45_1000_010

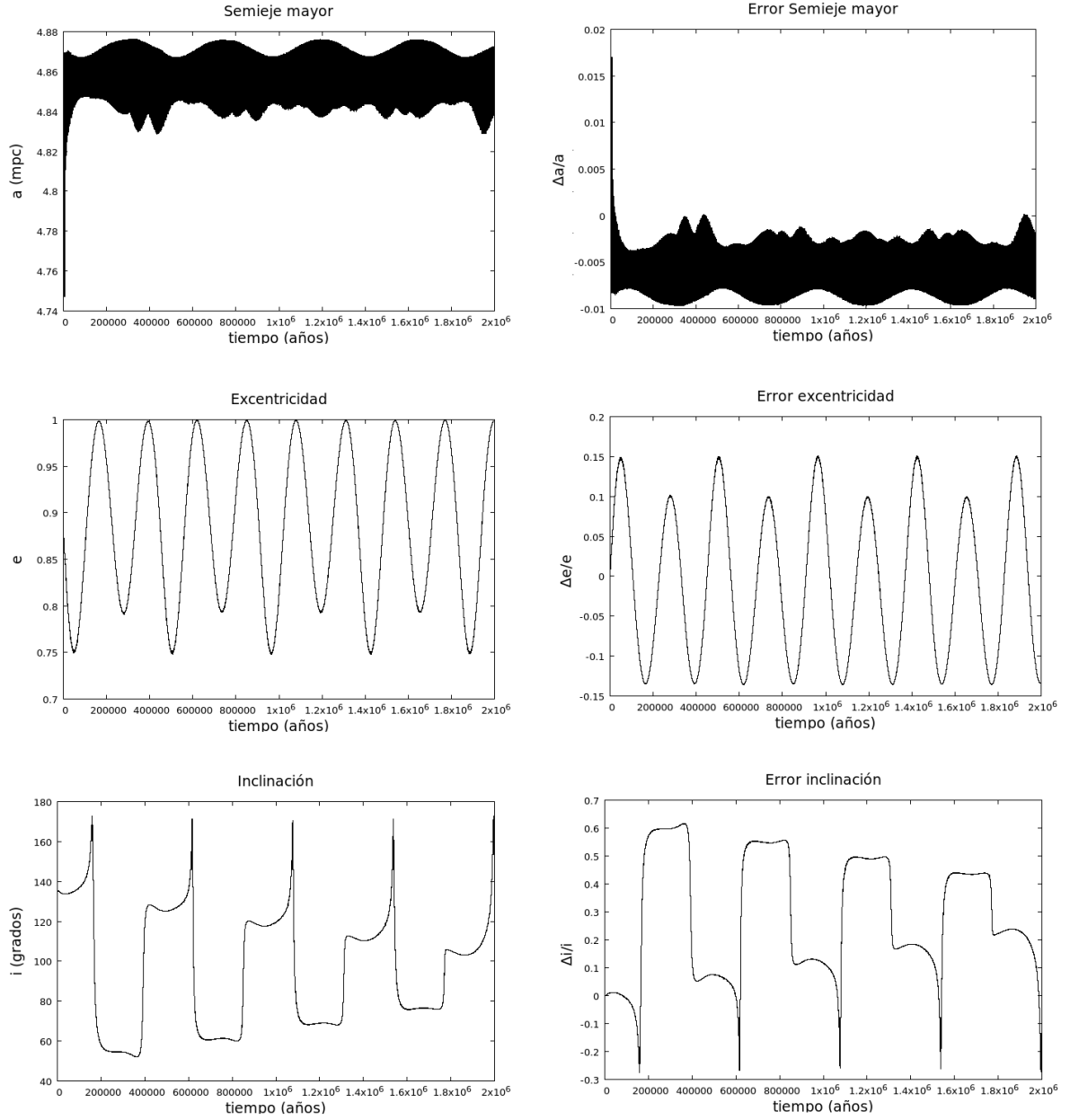


Figura 5.52: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

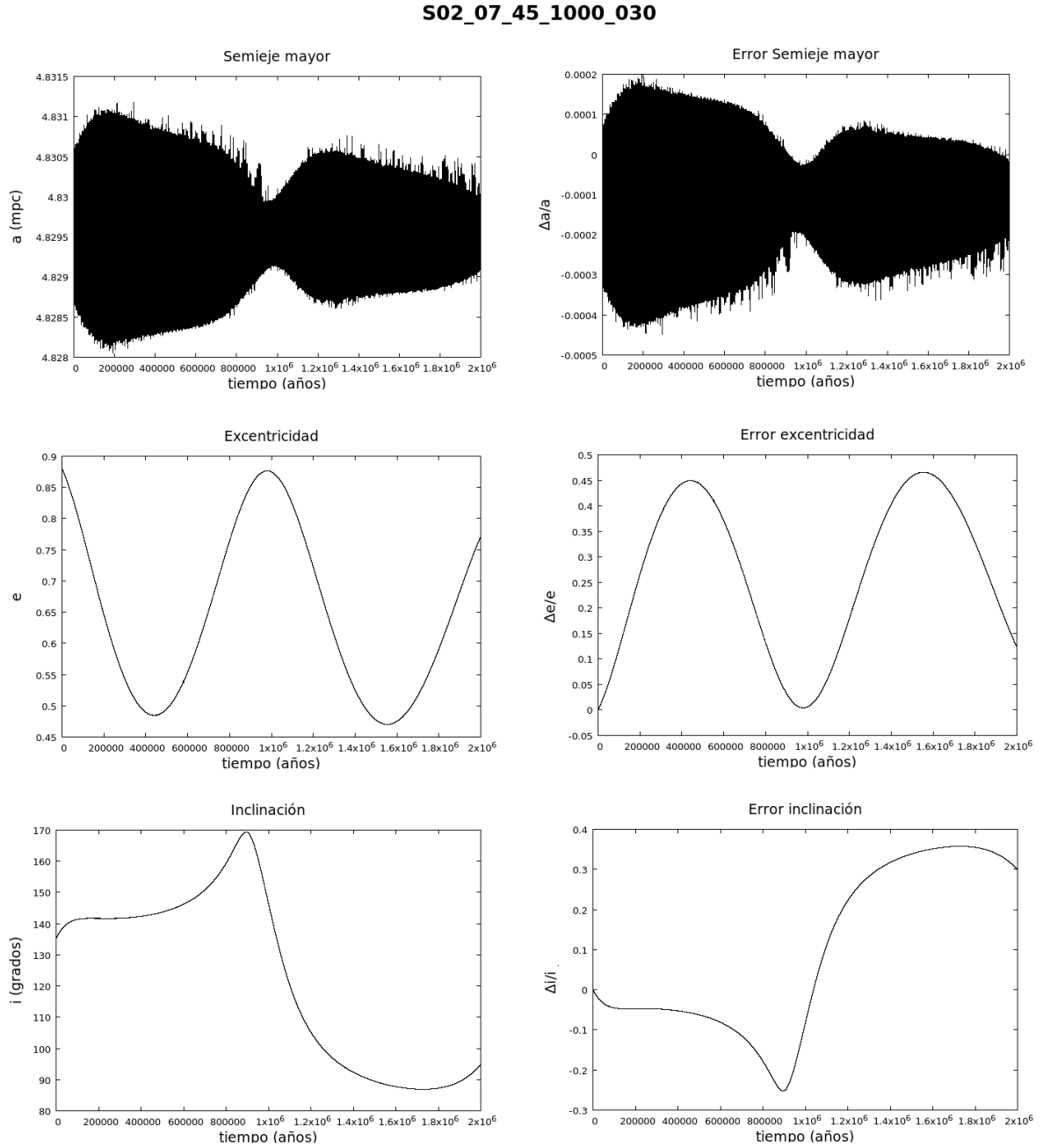


Figura 5.53: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$

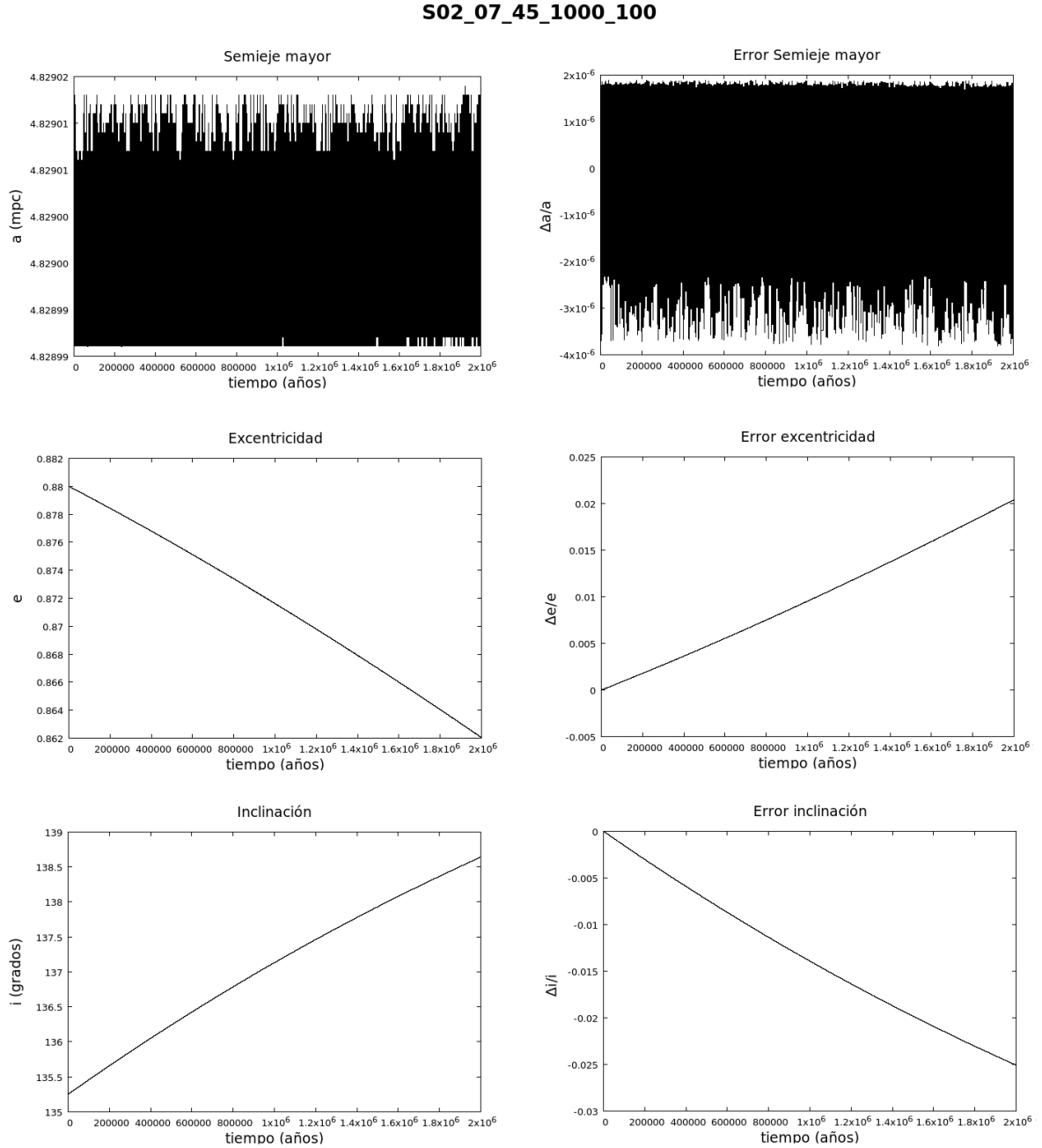


Figura 5.54: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$

S02_07_45_1000_300

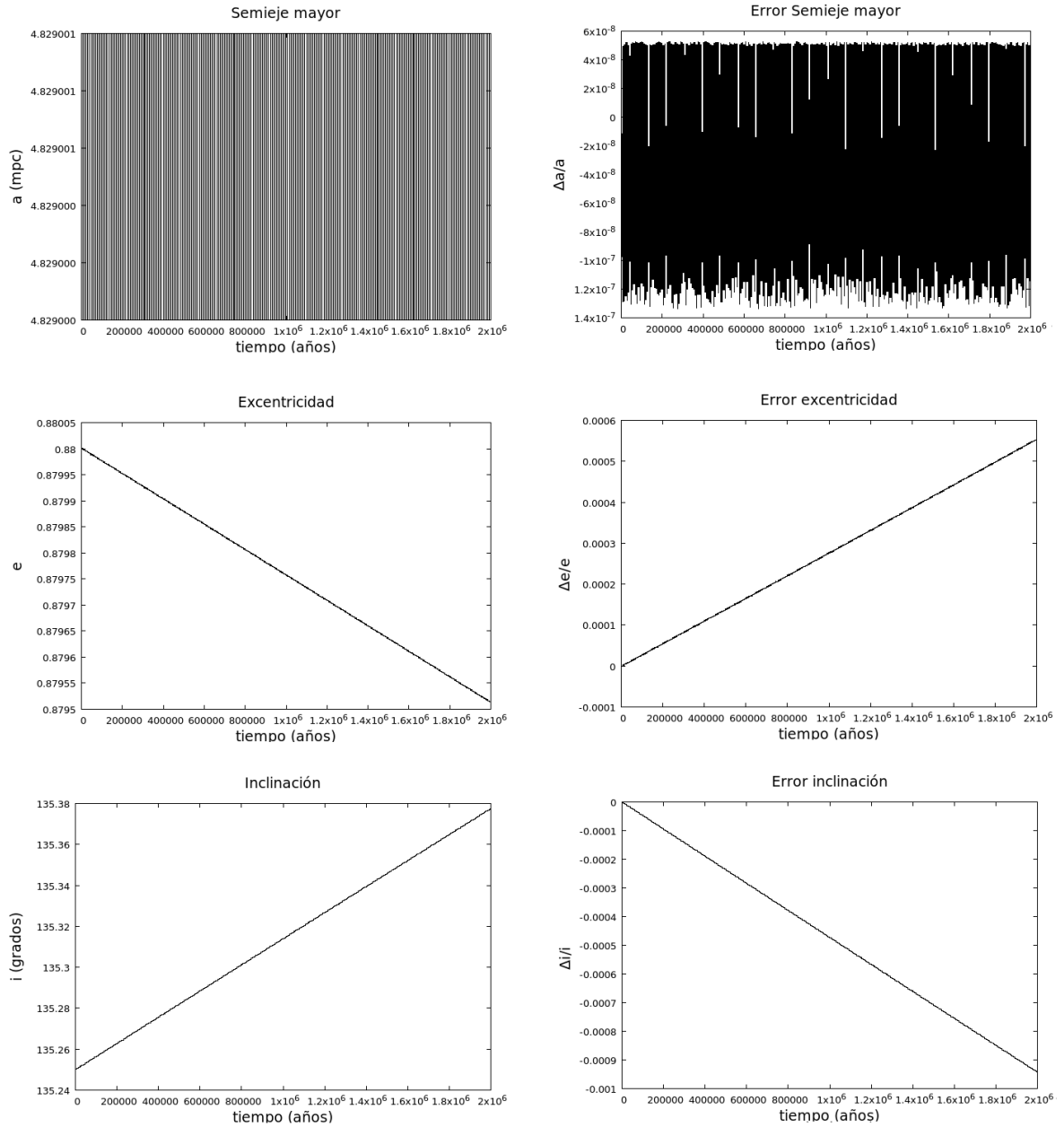


Figura 5.55: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$

Excentricidad IMBH $e = 0,7$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 90^\circ$

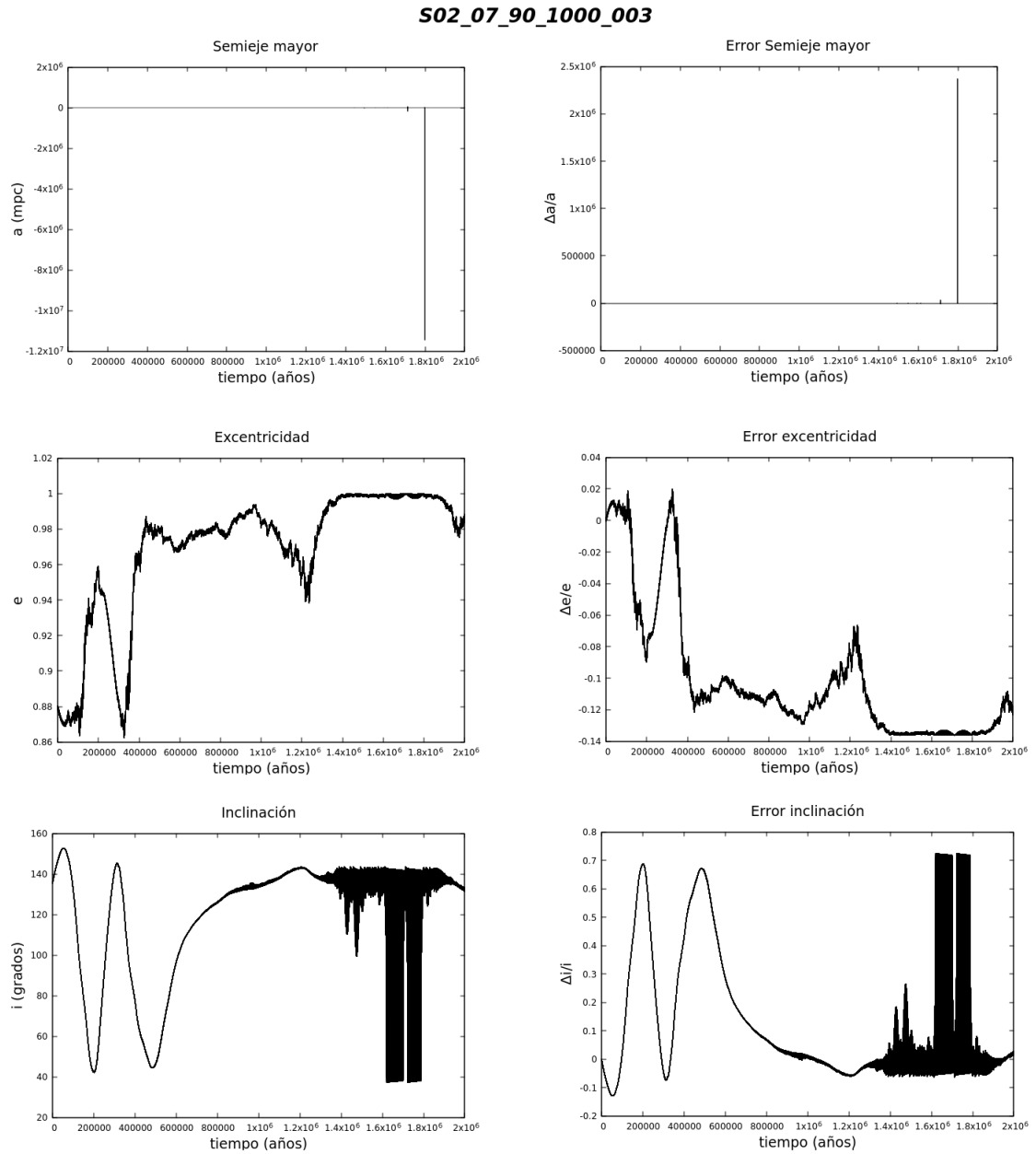


Figura 5.56: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$

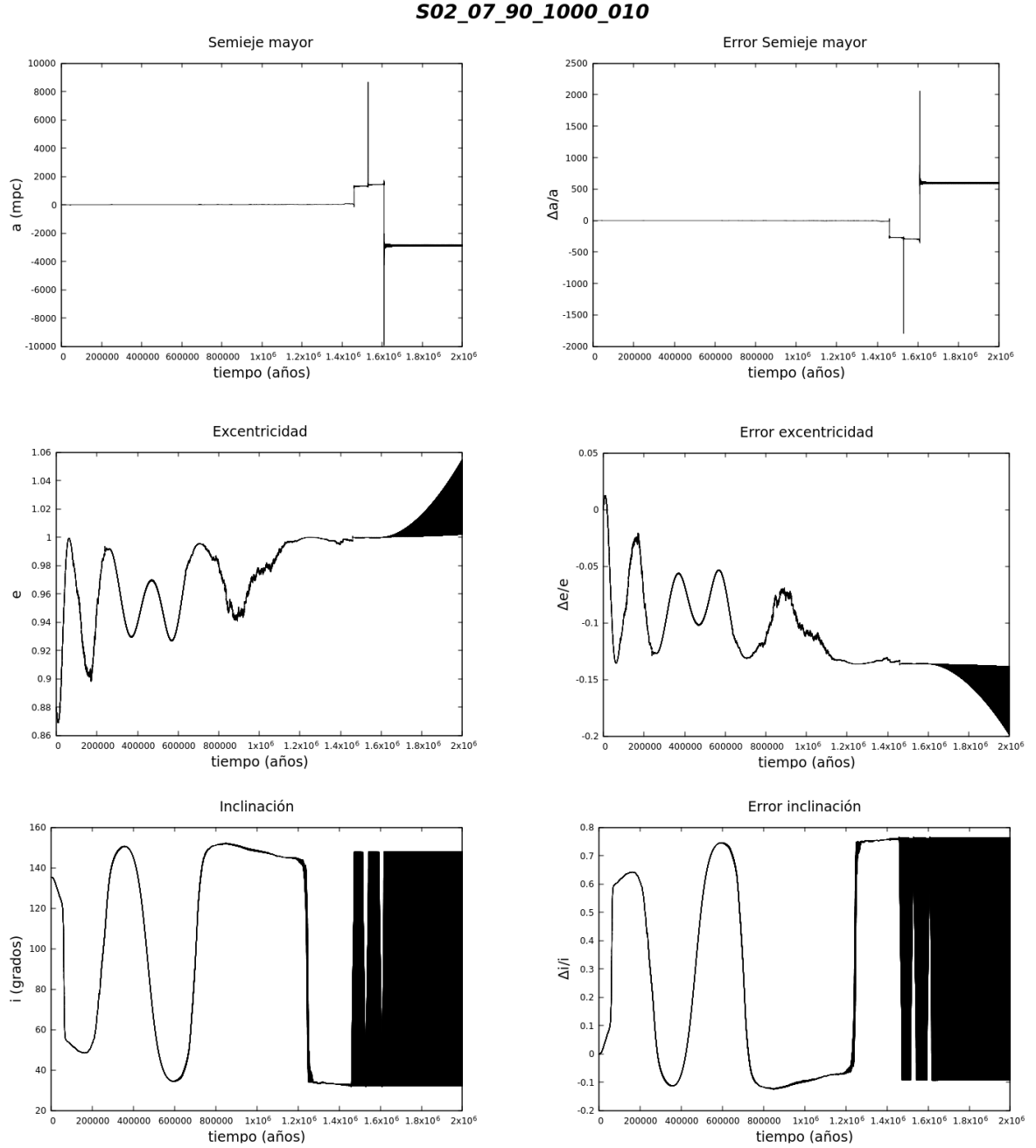


Figura 5.57: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

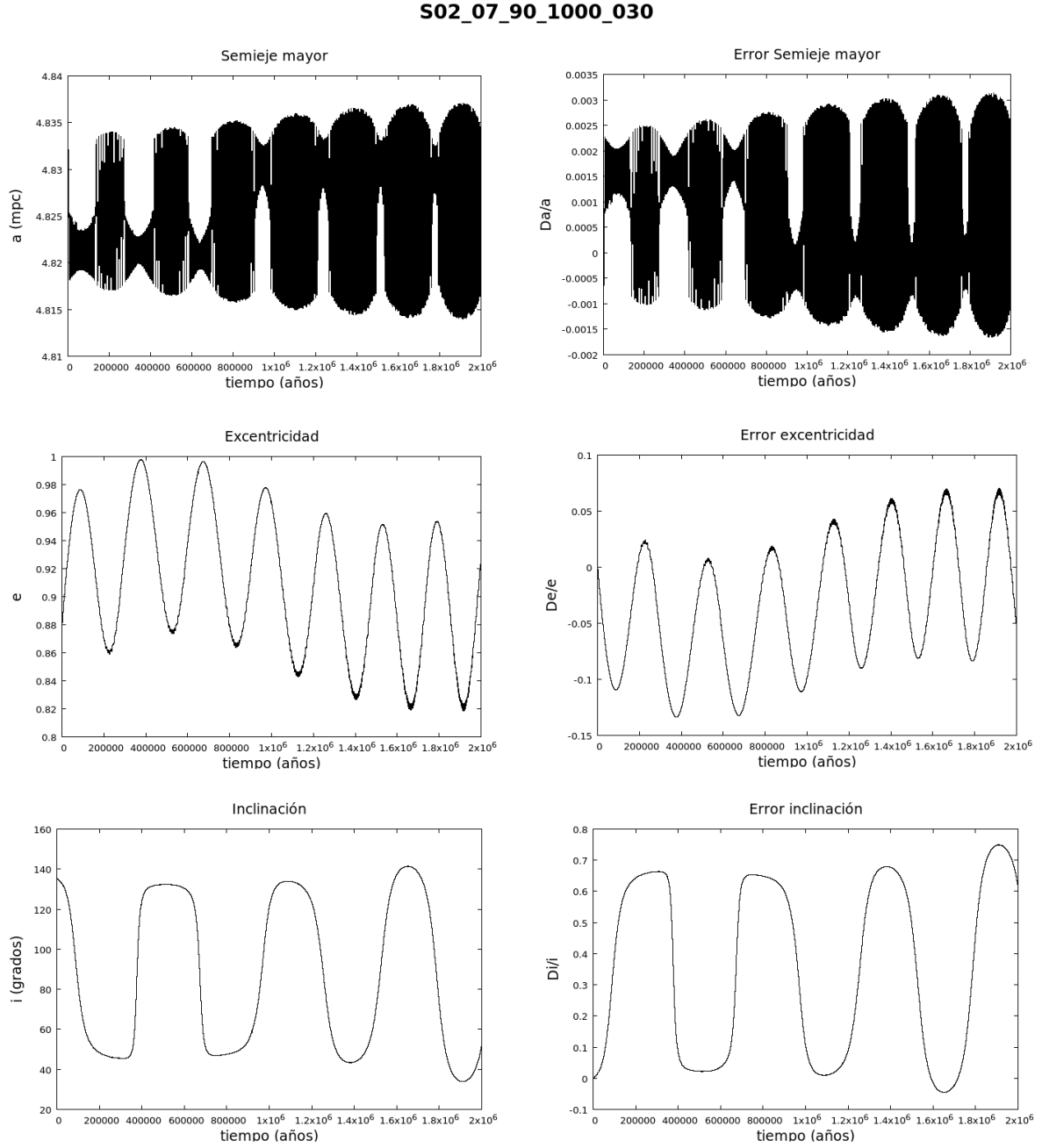


Figura 5.58: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$

S02_07_90_1000_100

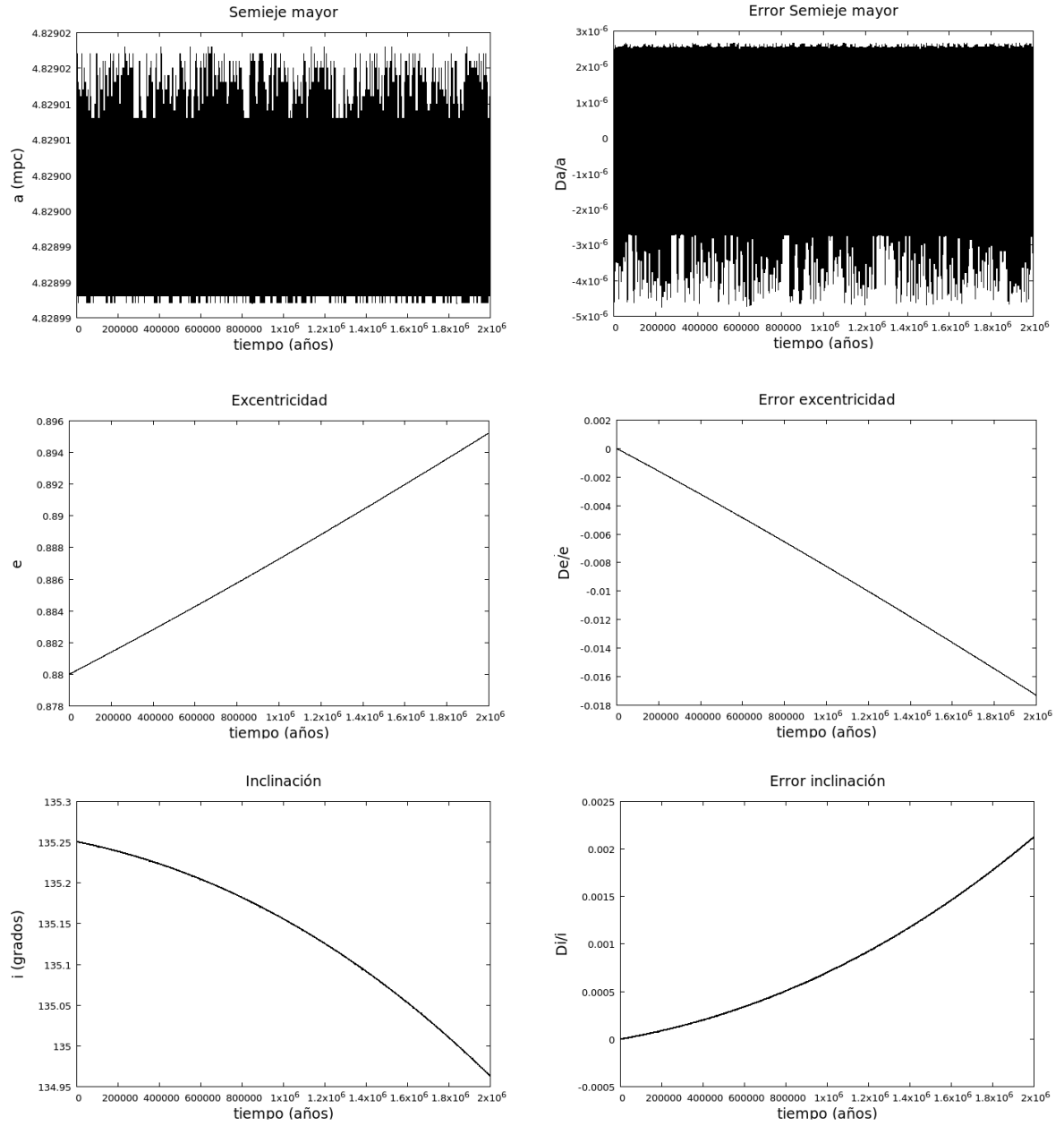


Figura 5.59: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$

S02_07_90_1000_300

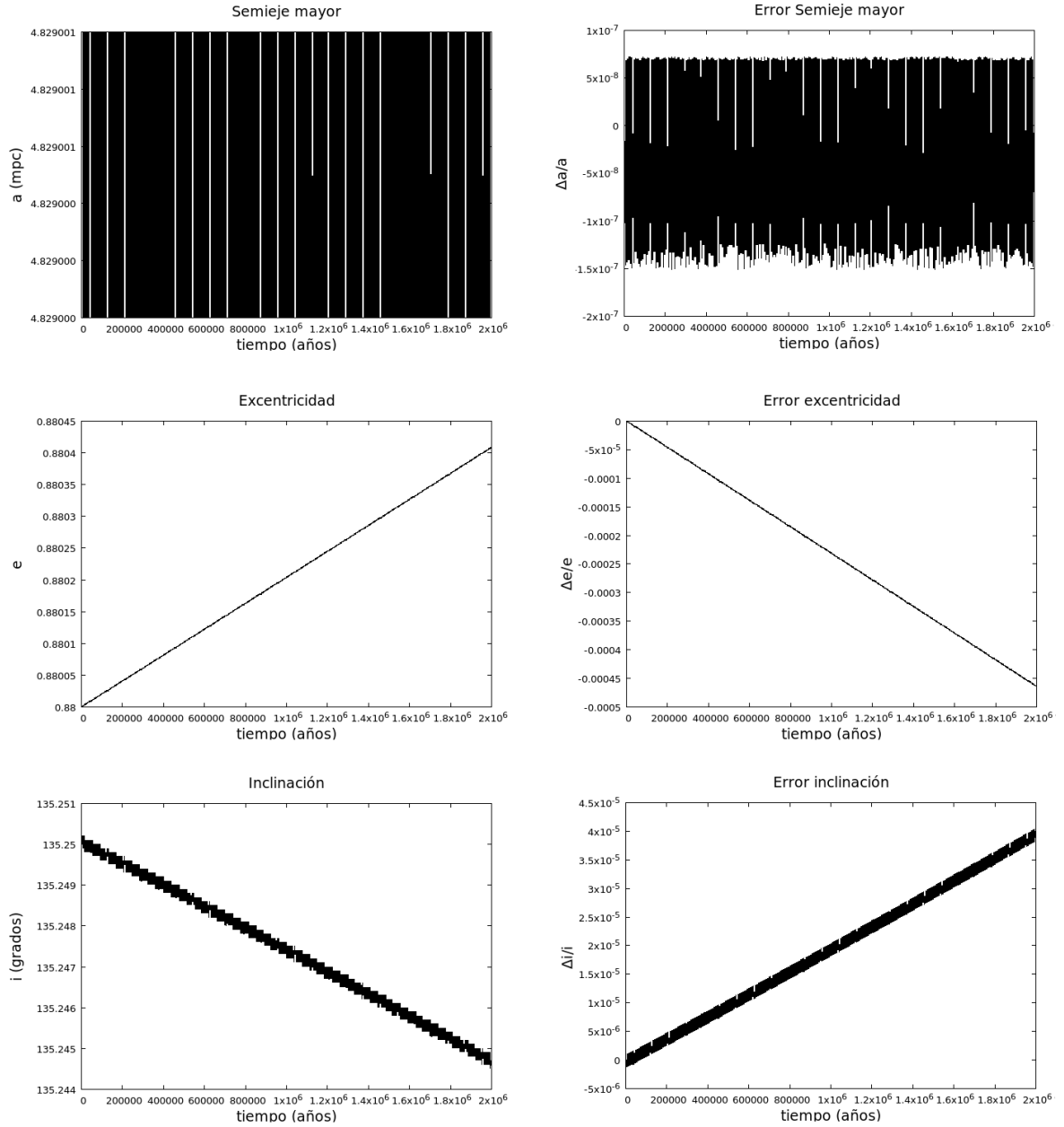


Figura 5.60: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$

Parámetros Orbitales de la estrella S2 cuando $m_{IMBH} = 2000M_{\odot}$

En esta sección se muestran los resultados de las simulaciones cuando la masa del Agujero Negro Masivo Intermedio IMBH es $m_{IMBH} = 2000M_{\odot}$

Excentricidad IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 0^{\circ}$

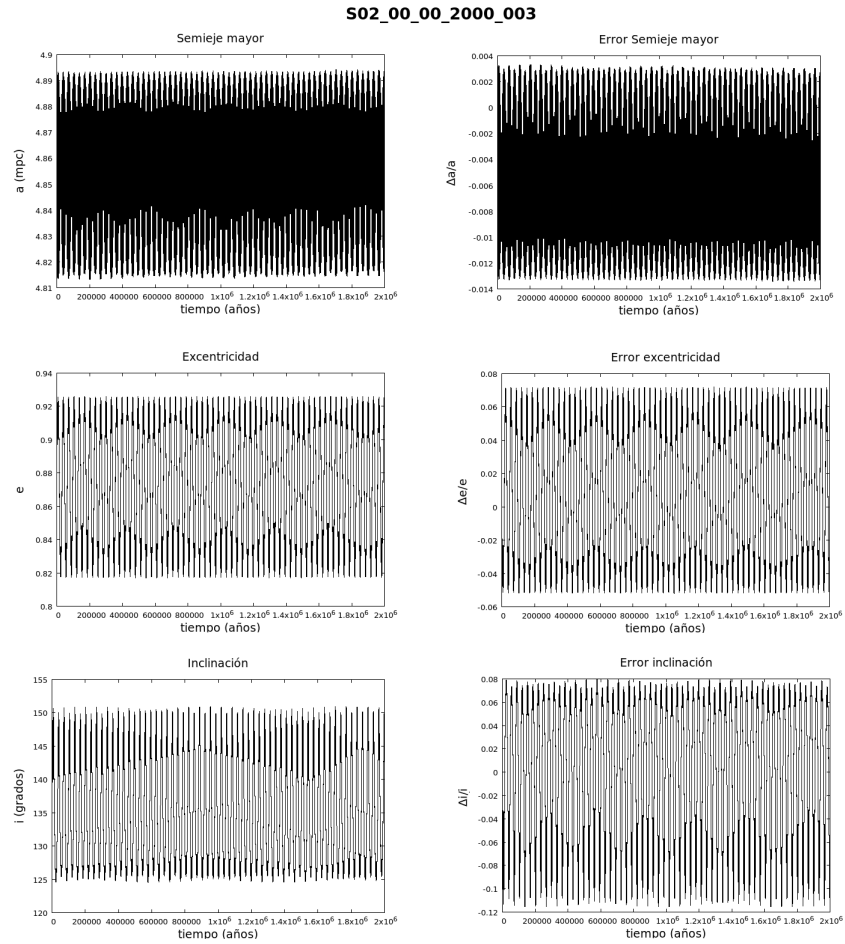


Figura 5.61: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^{\circ}$, masa IMBH $m = 2000M_{\odot}$, semieje mayor IMBH $a = 0,3m_{pc}$

S02_00_00_2000_010

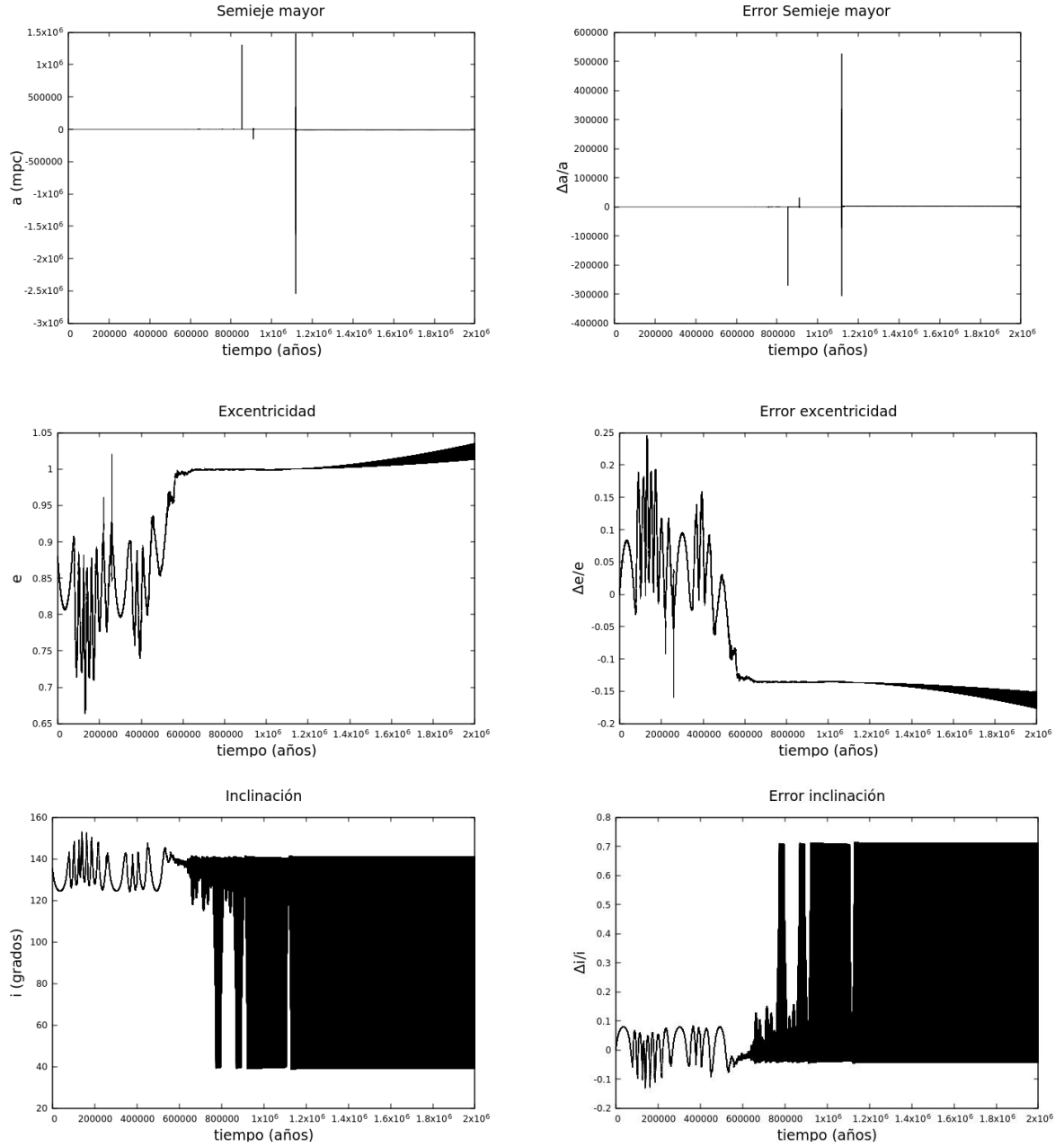


Figura 5.62: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0mpc$

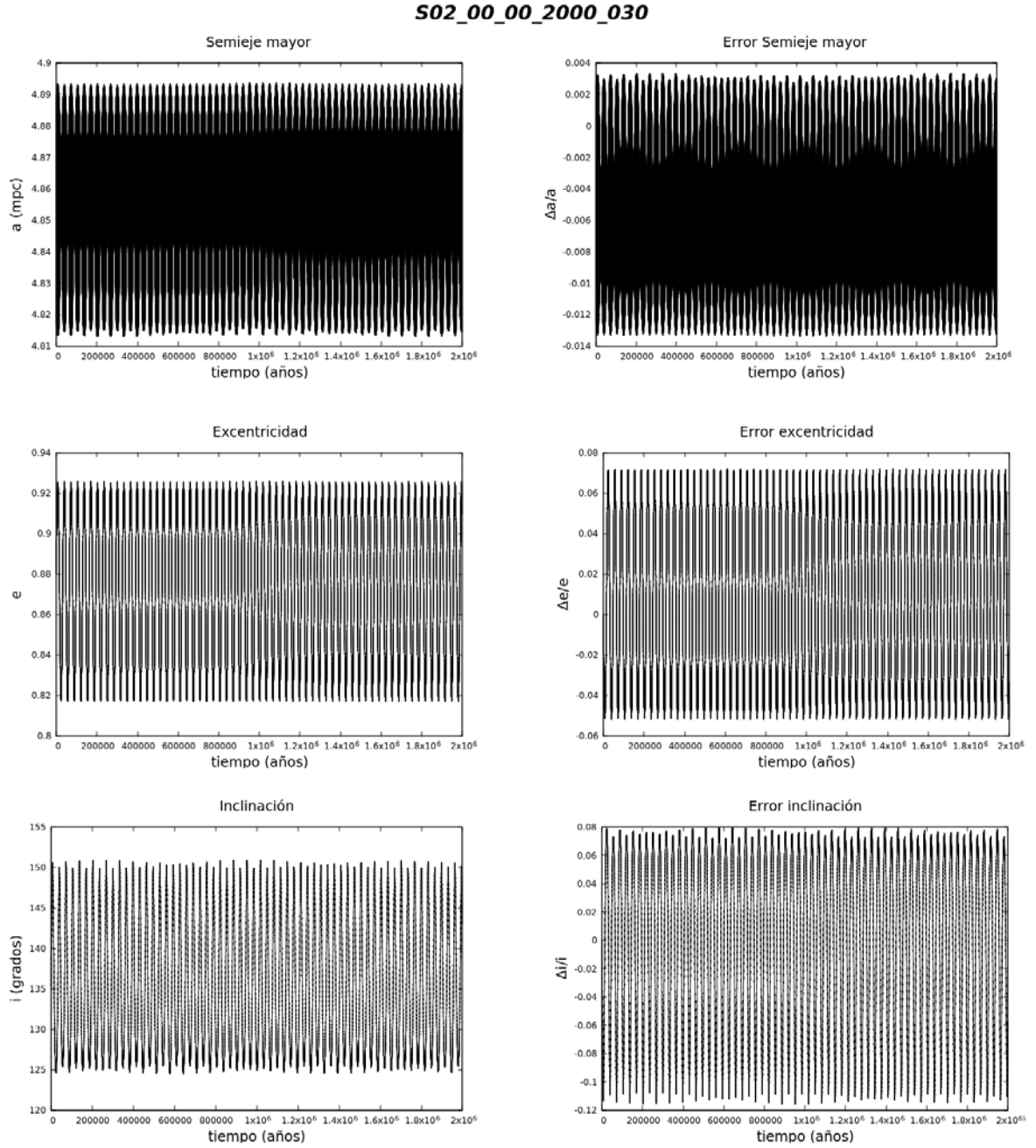


Figura 5.63: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0mpc$

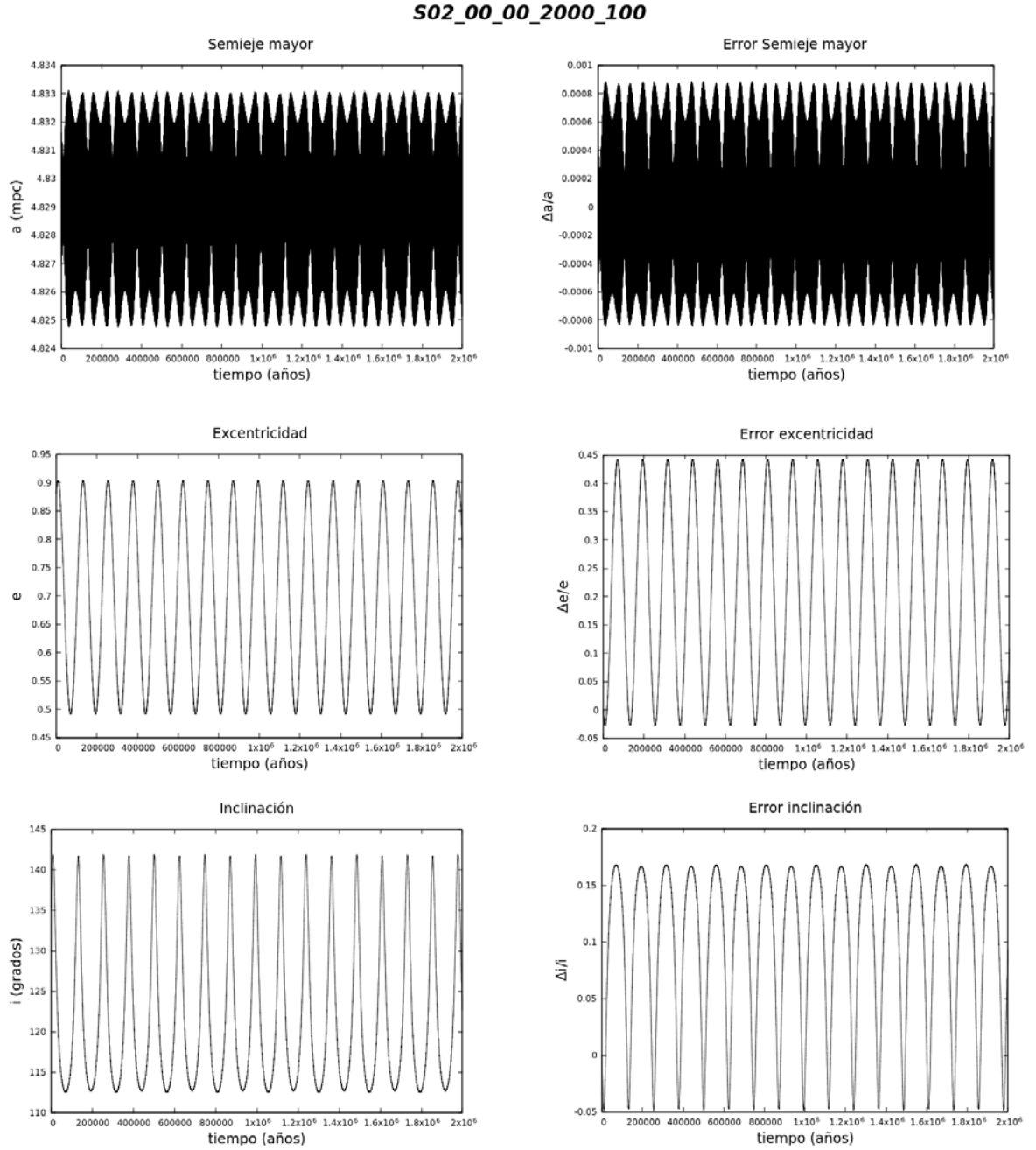


Figura 5.64: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$

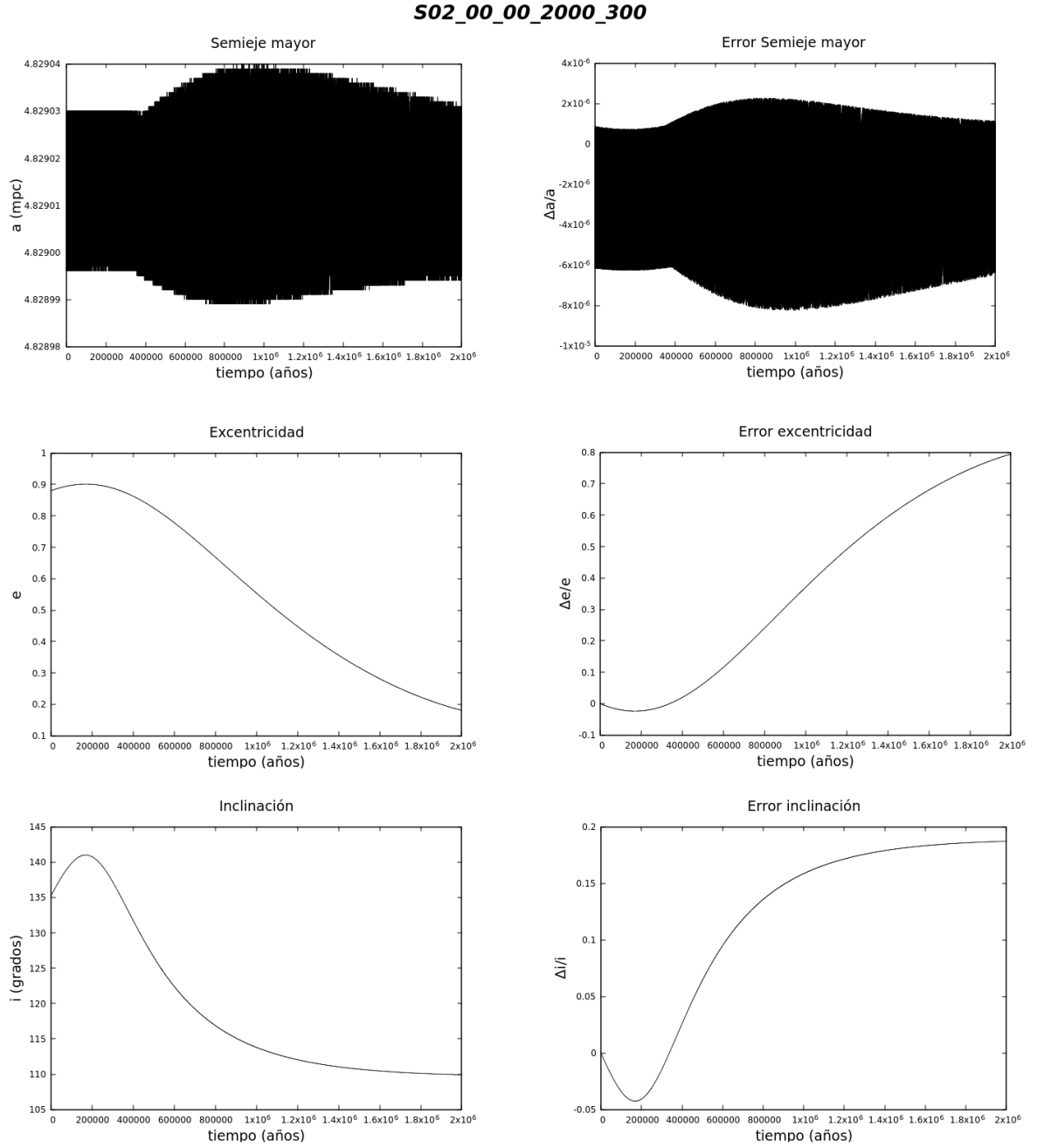


Figura 5.65: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$

Excentricidad IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 45^\circ$

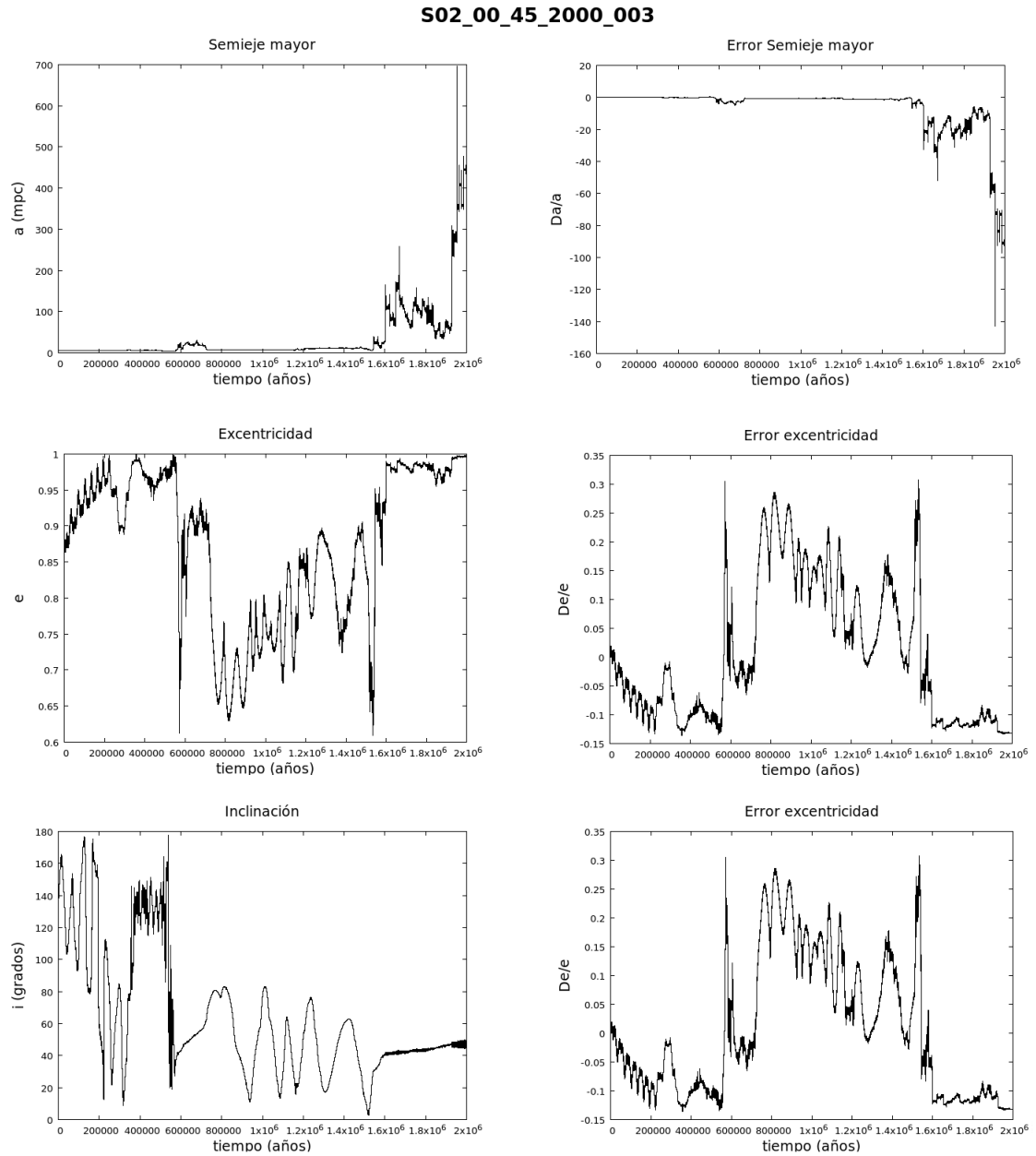


Figura 5.66: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3mpc$

S02_00_45_2000_010

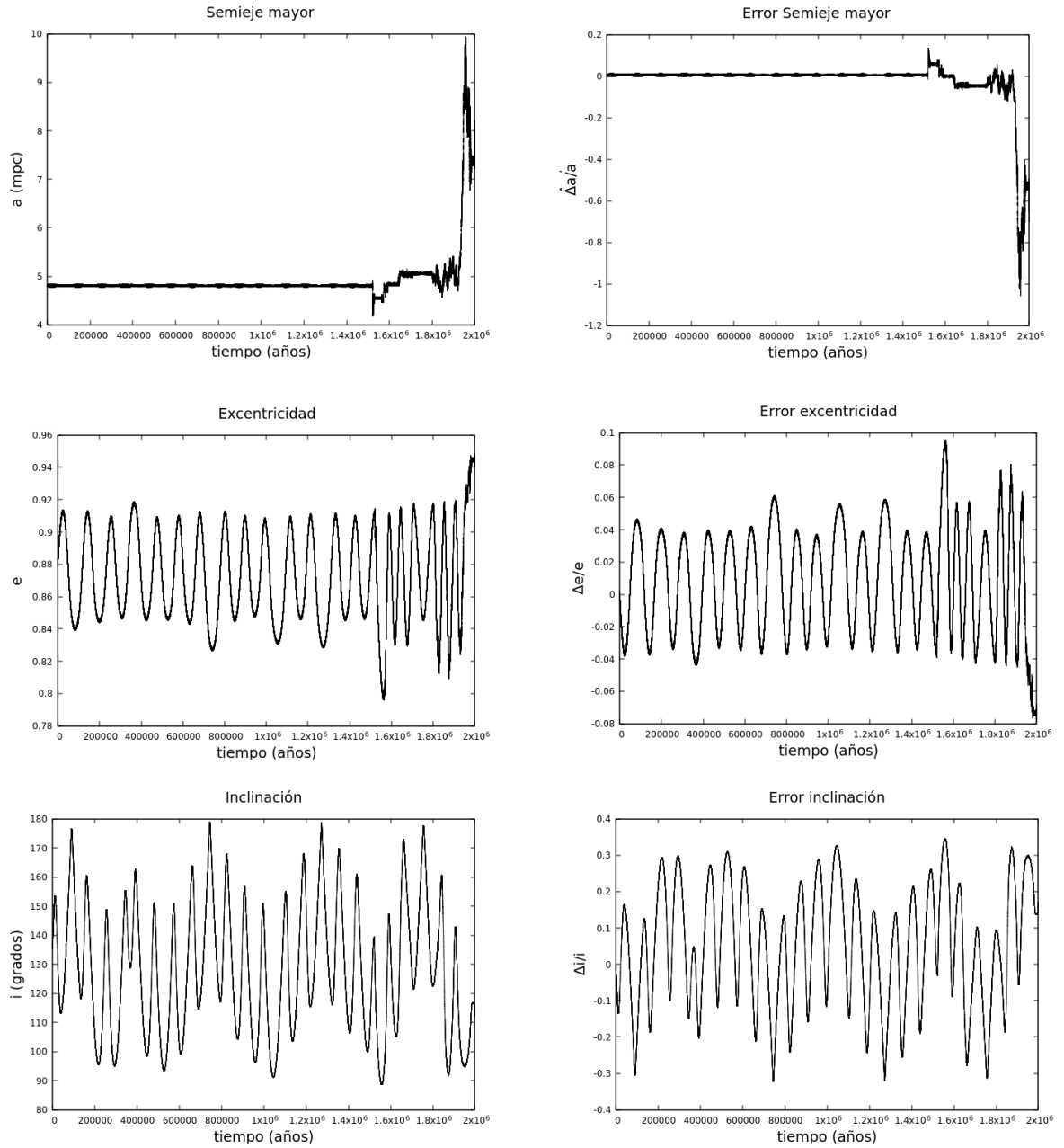


Figura 5.67: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

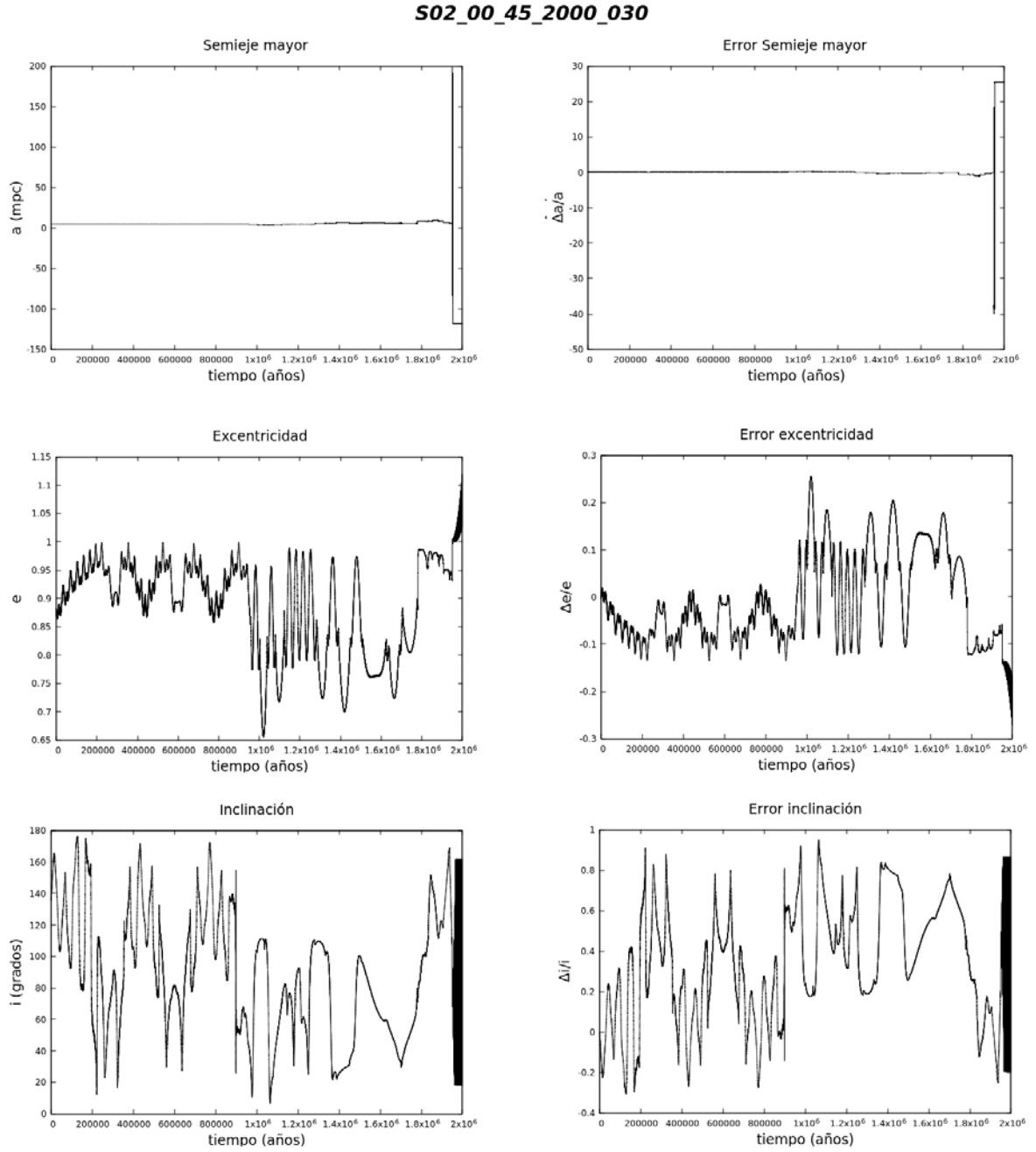


Figura 5.68: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0mpc$

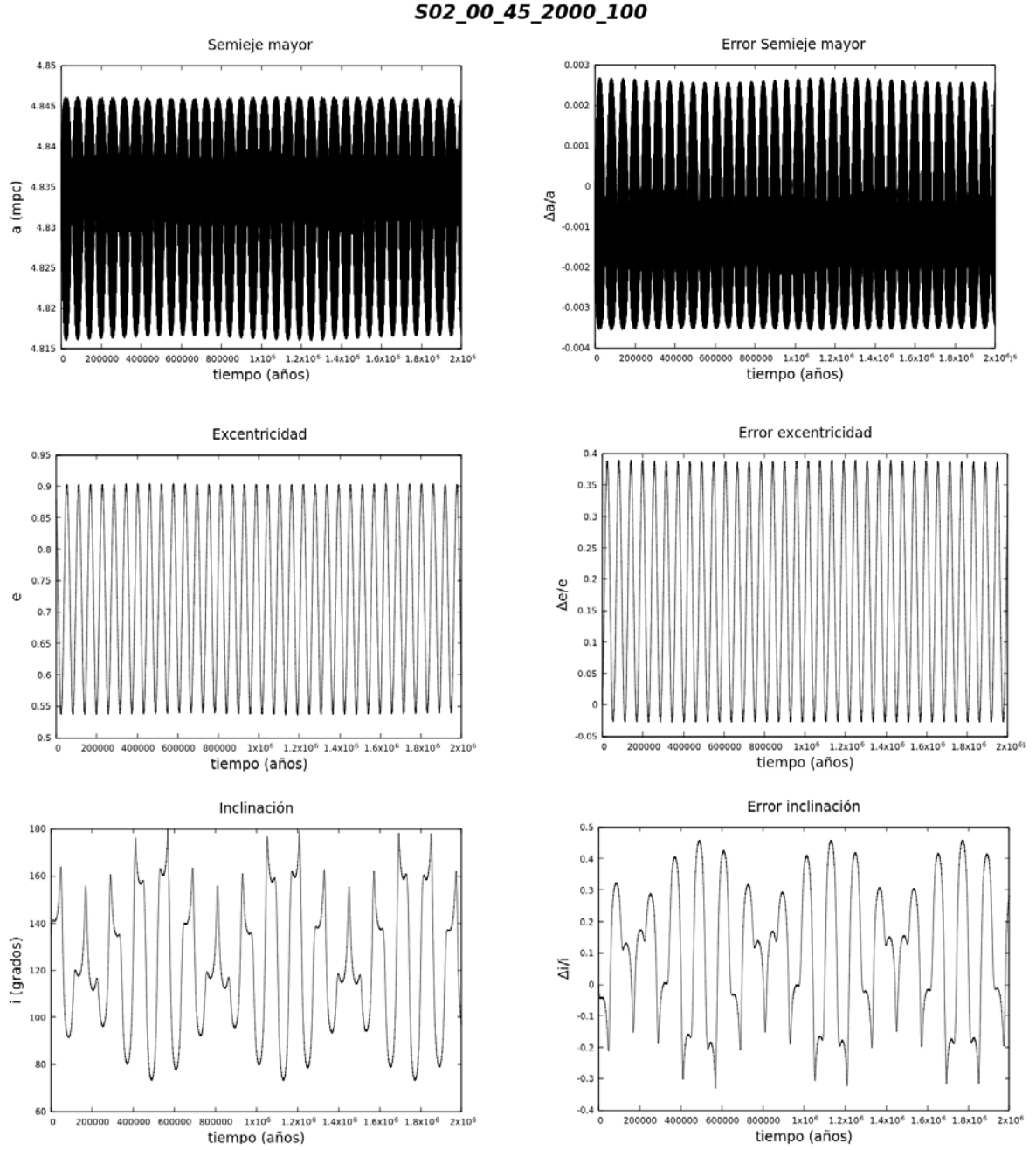


Figura 5.69: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$

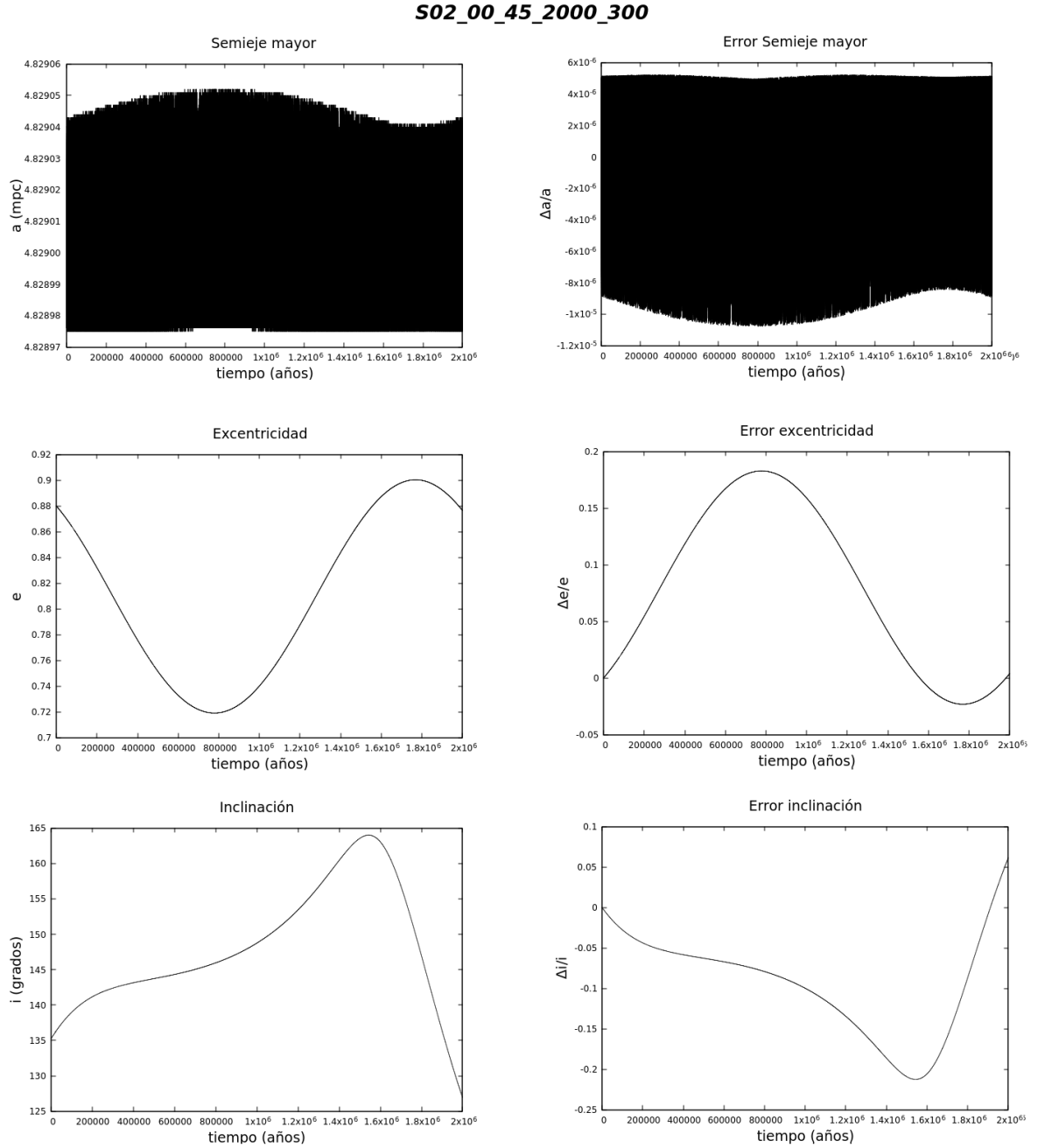


Figura 5.70: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$

Excentricidad IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 90^\circ$

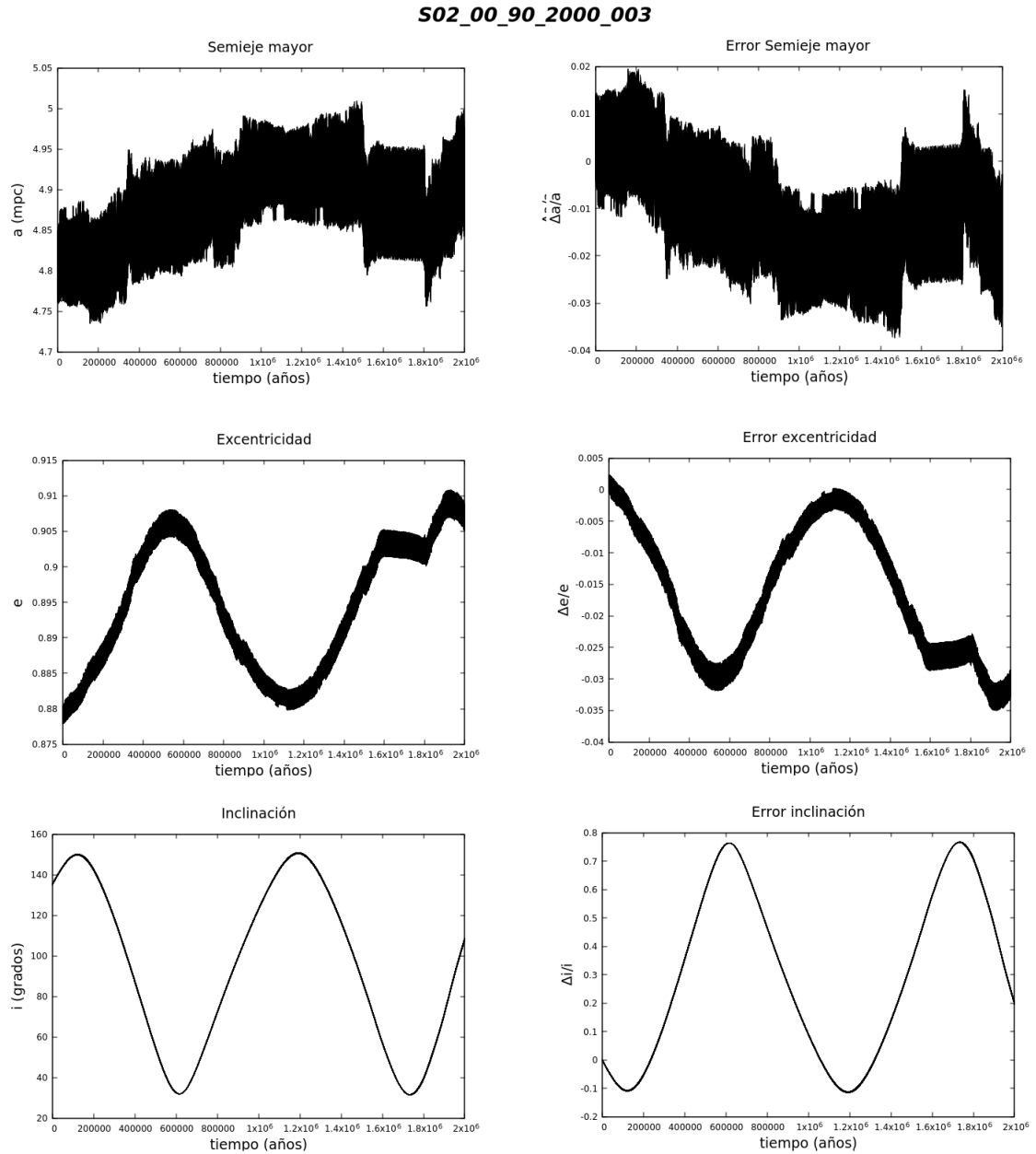


Figura 5.71: *Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$*

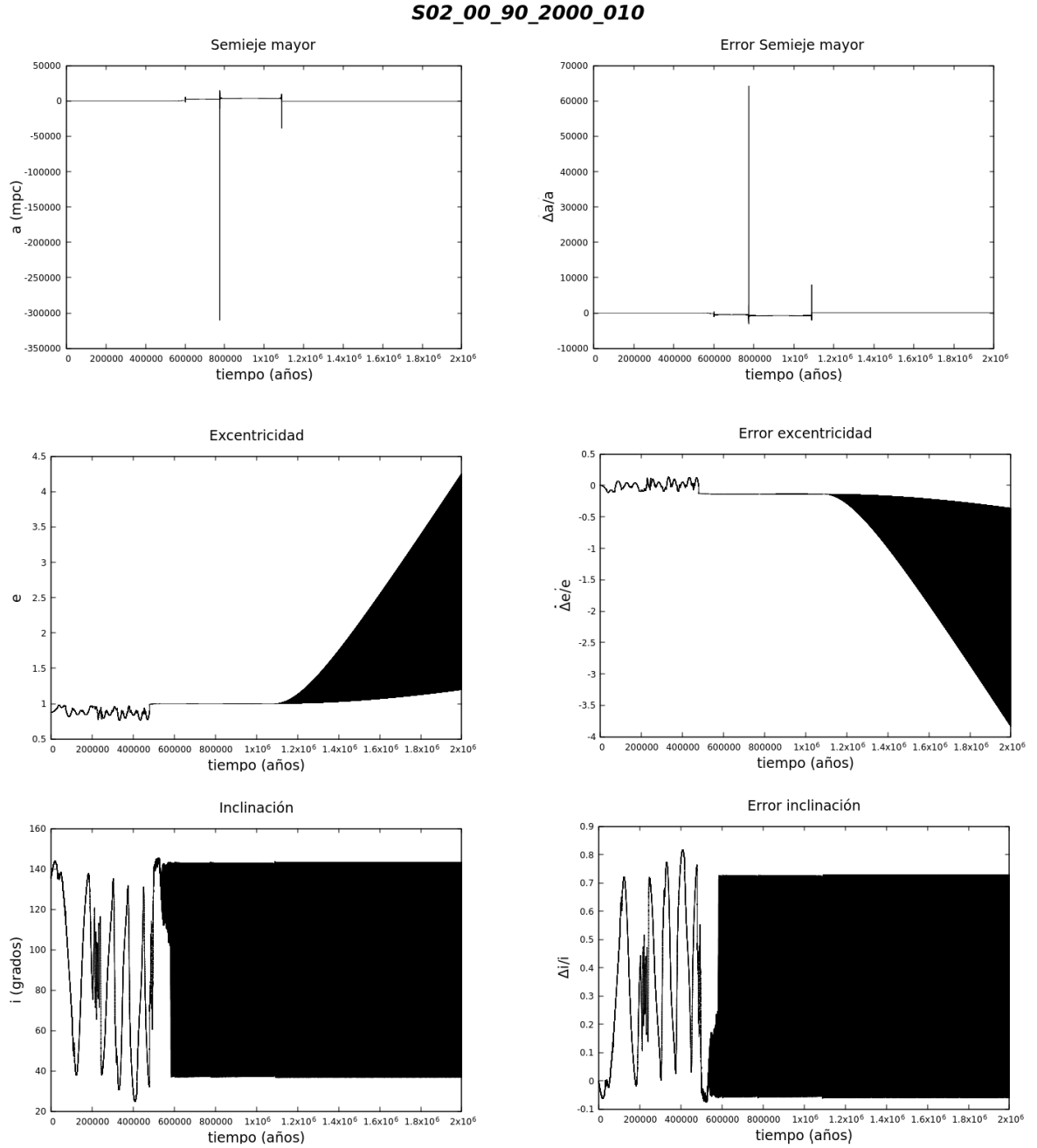


Figura 5.72: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

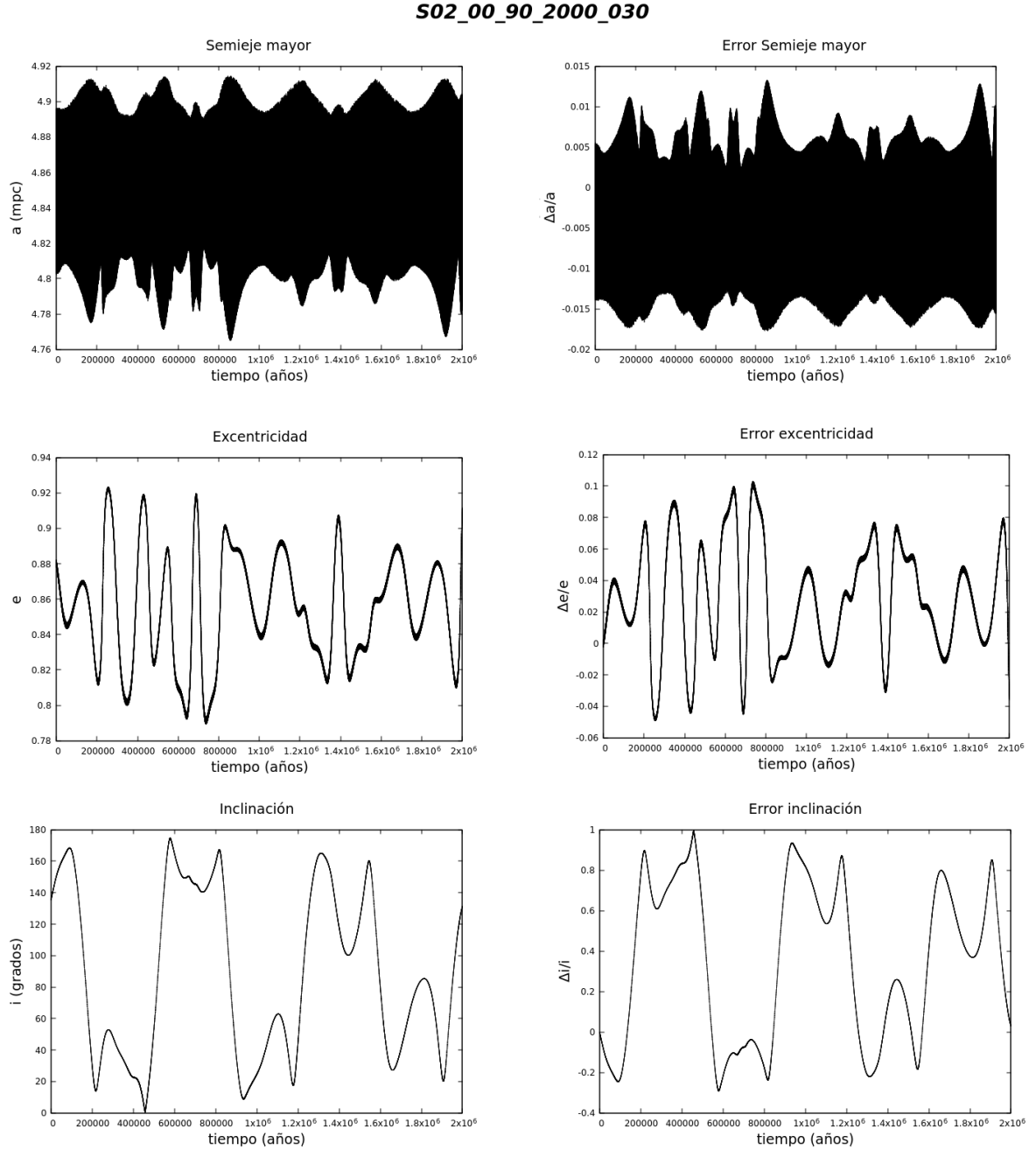


Figura 5.73: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$

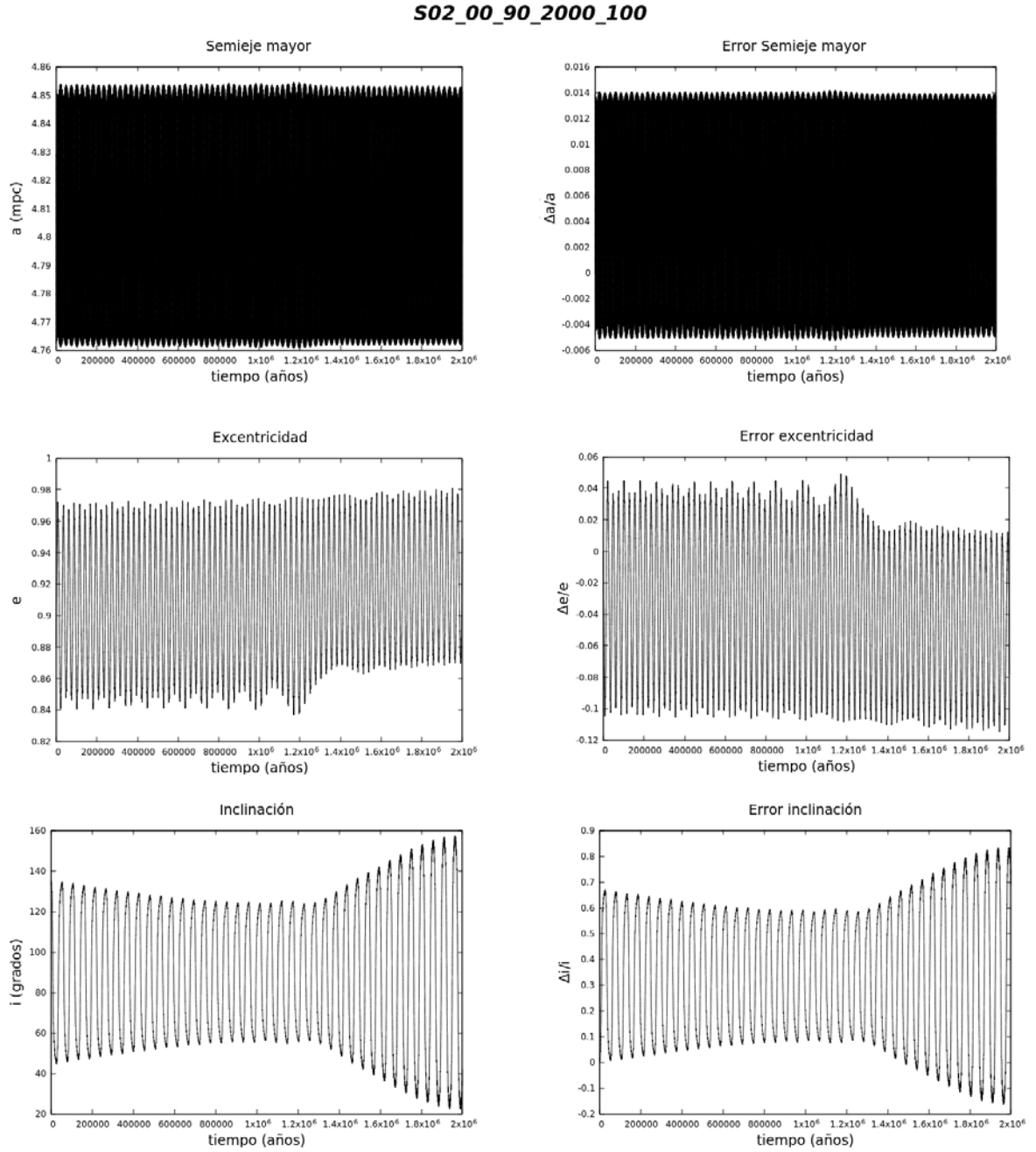


Figura 5.74: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$

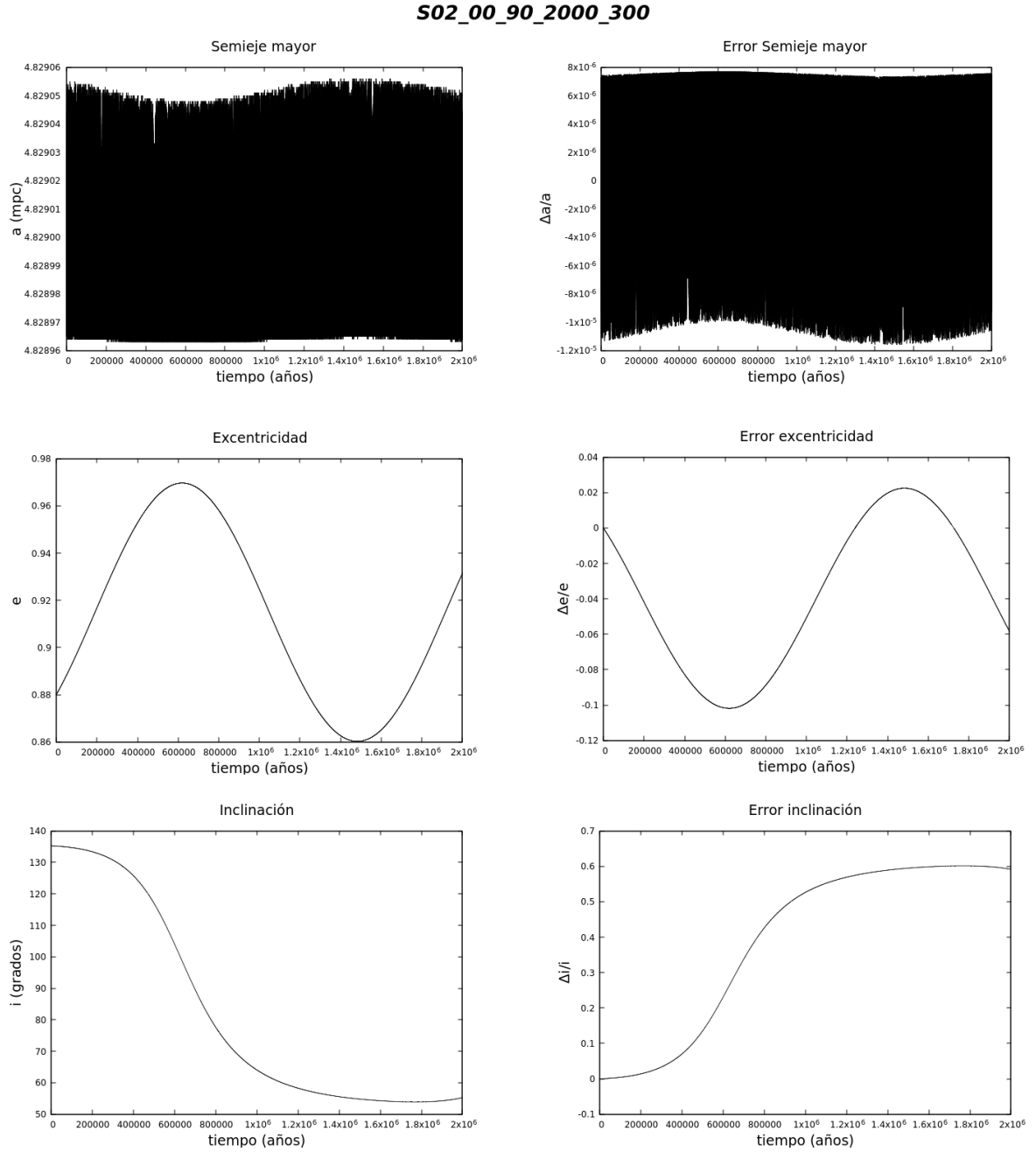


Figura 5.75: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$

Excentricidad IMBH $e = 0,7$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 0^\circ$

S02_07_00_2000_003

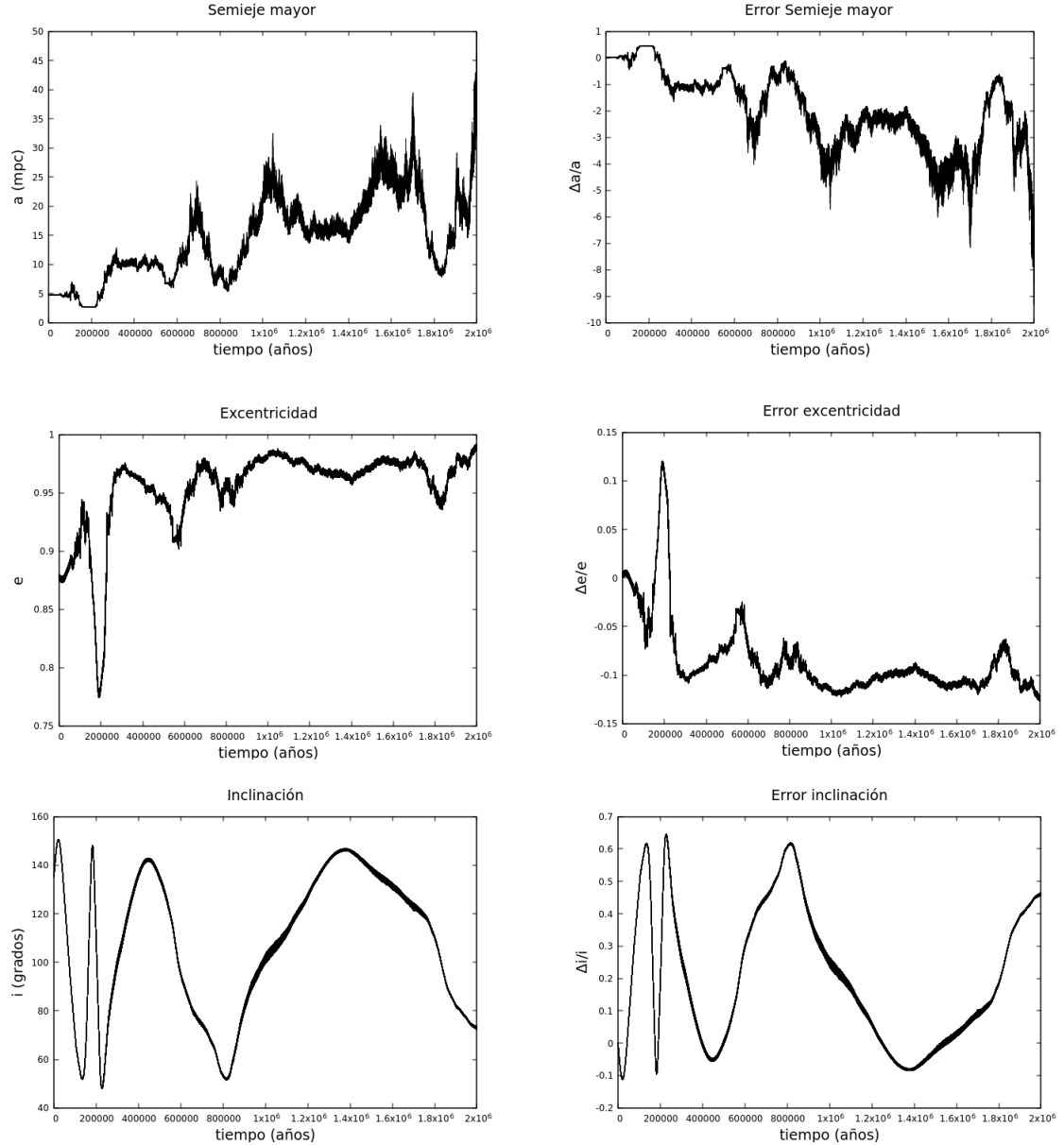


Figura 5.76: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$

S02_07_00_2000_010

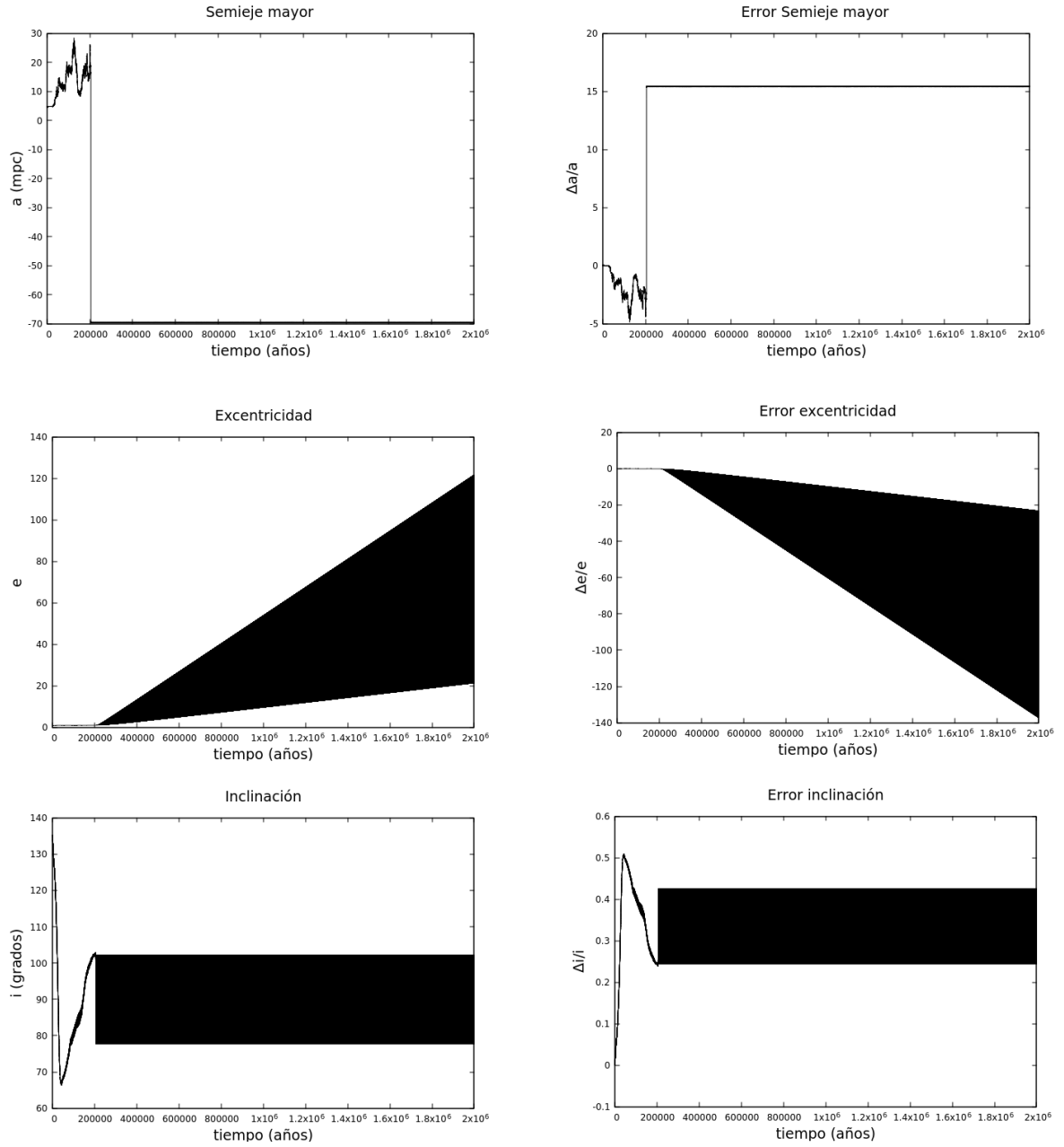


Figura 5.77: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

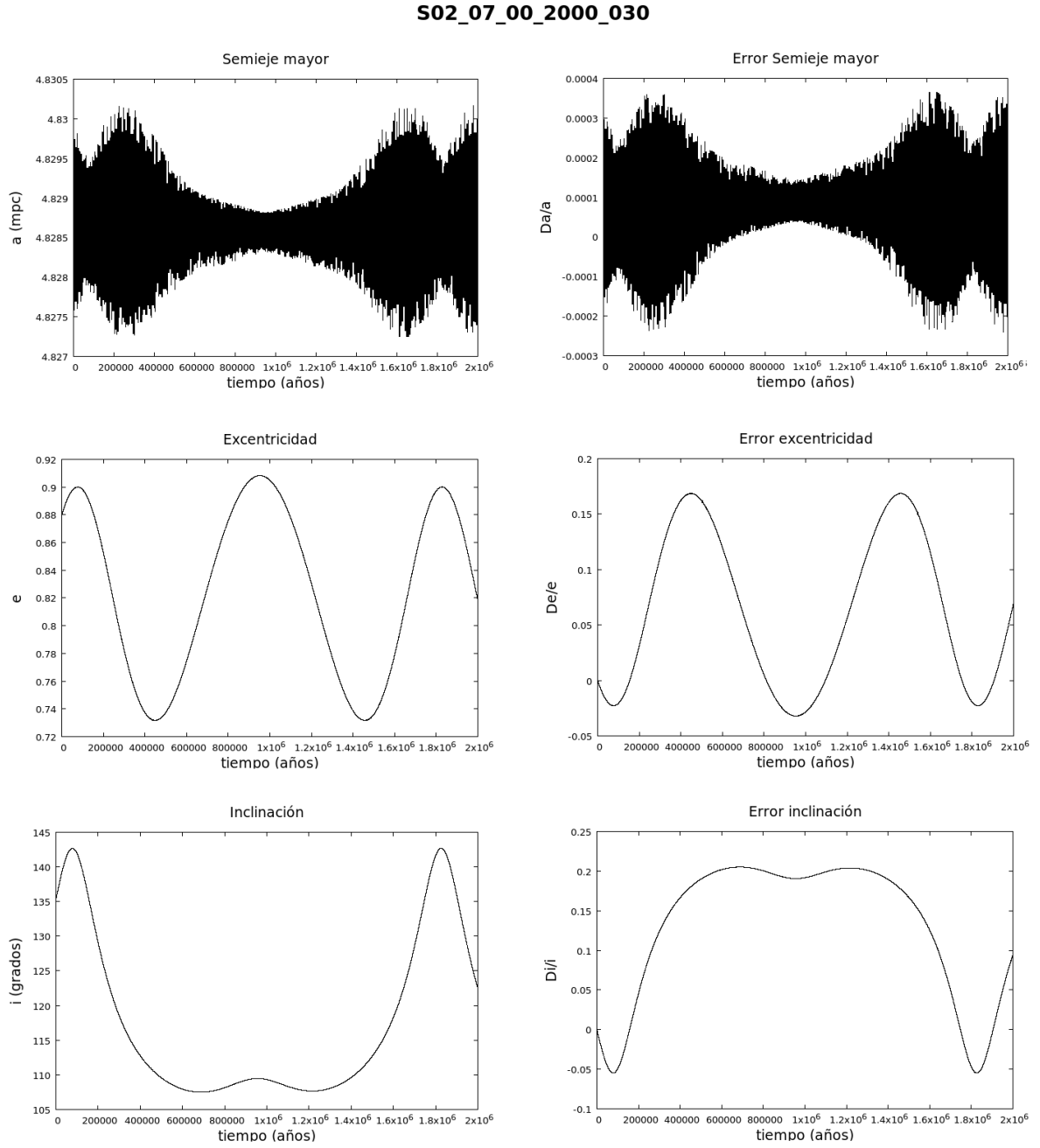


Figura 5.78: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$

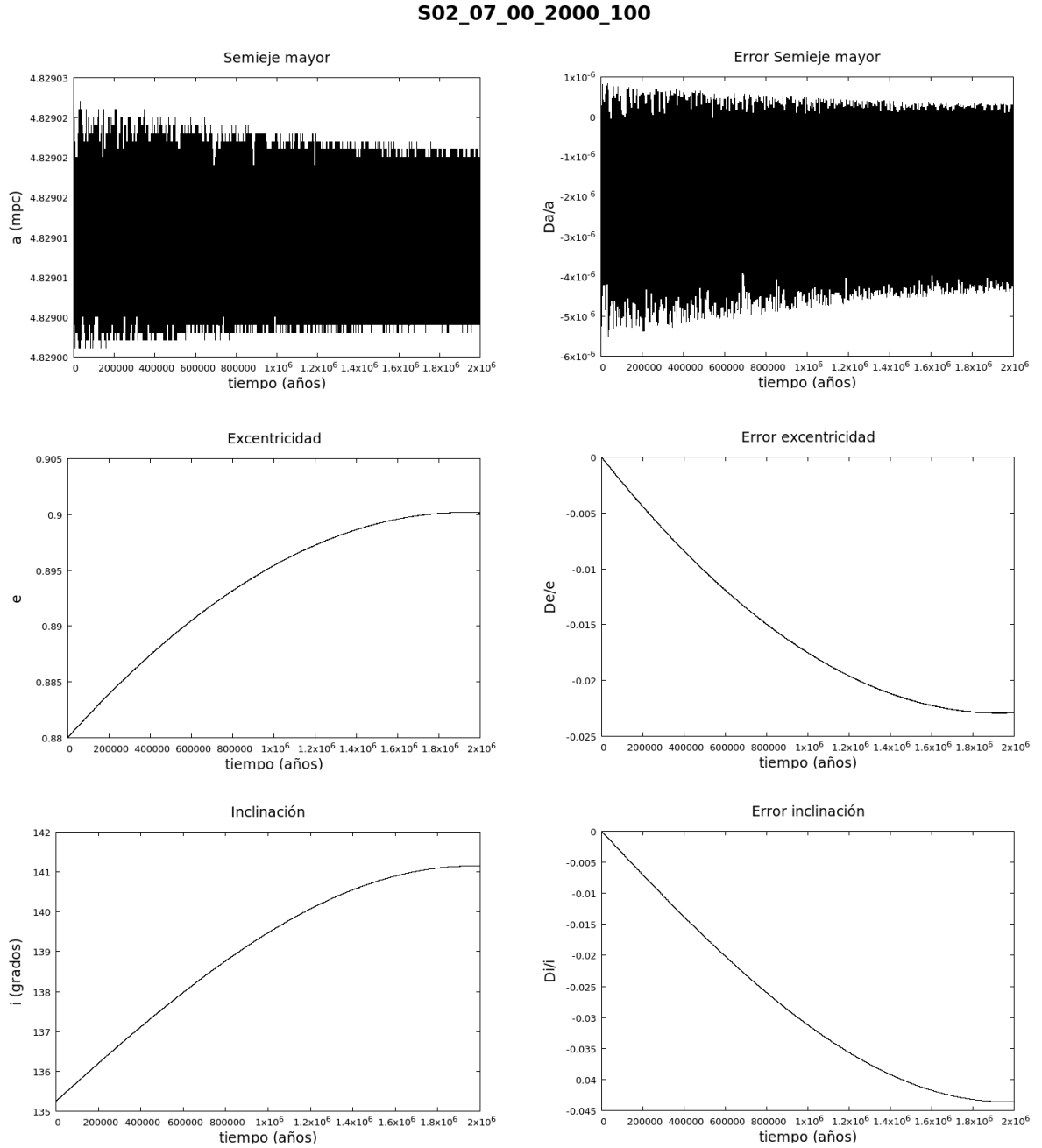


Figura 5.79: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$

S02_07_00_2000_300

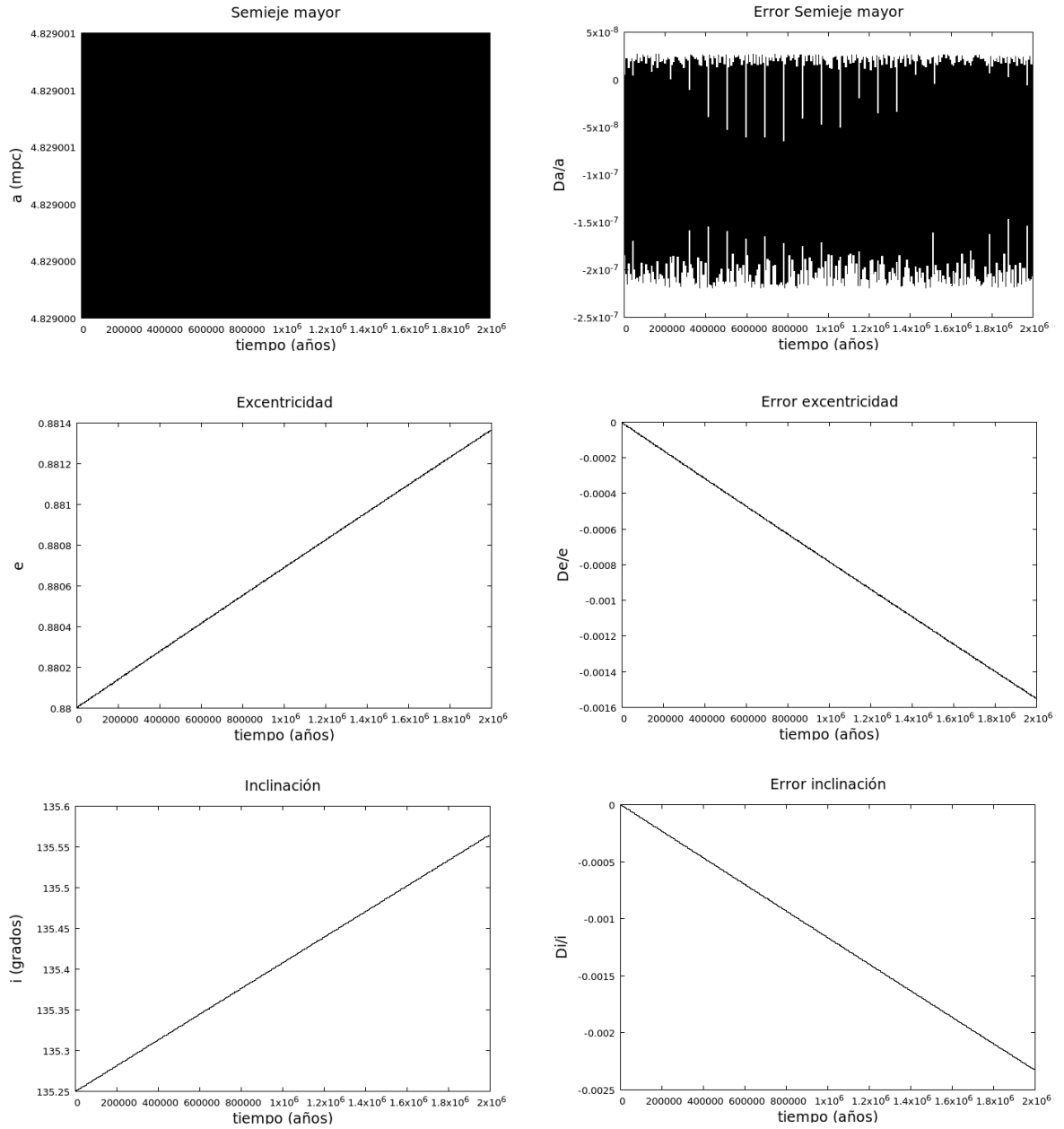


Figura 5.80: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$

Excentricidad IMBH $e = 0,7$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 45^\circ$

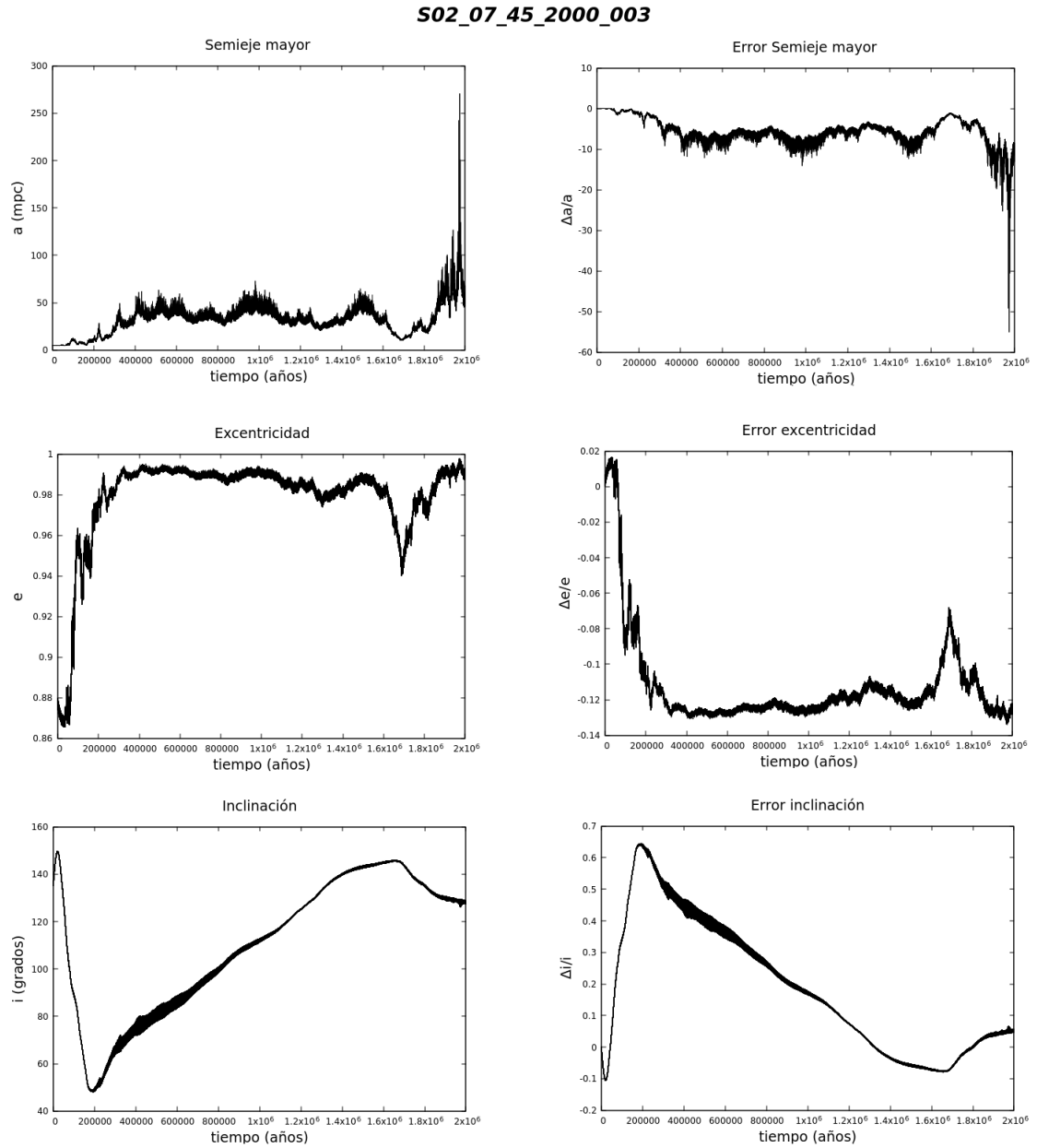


Figura 5.81: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$

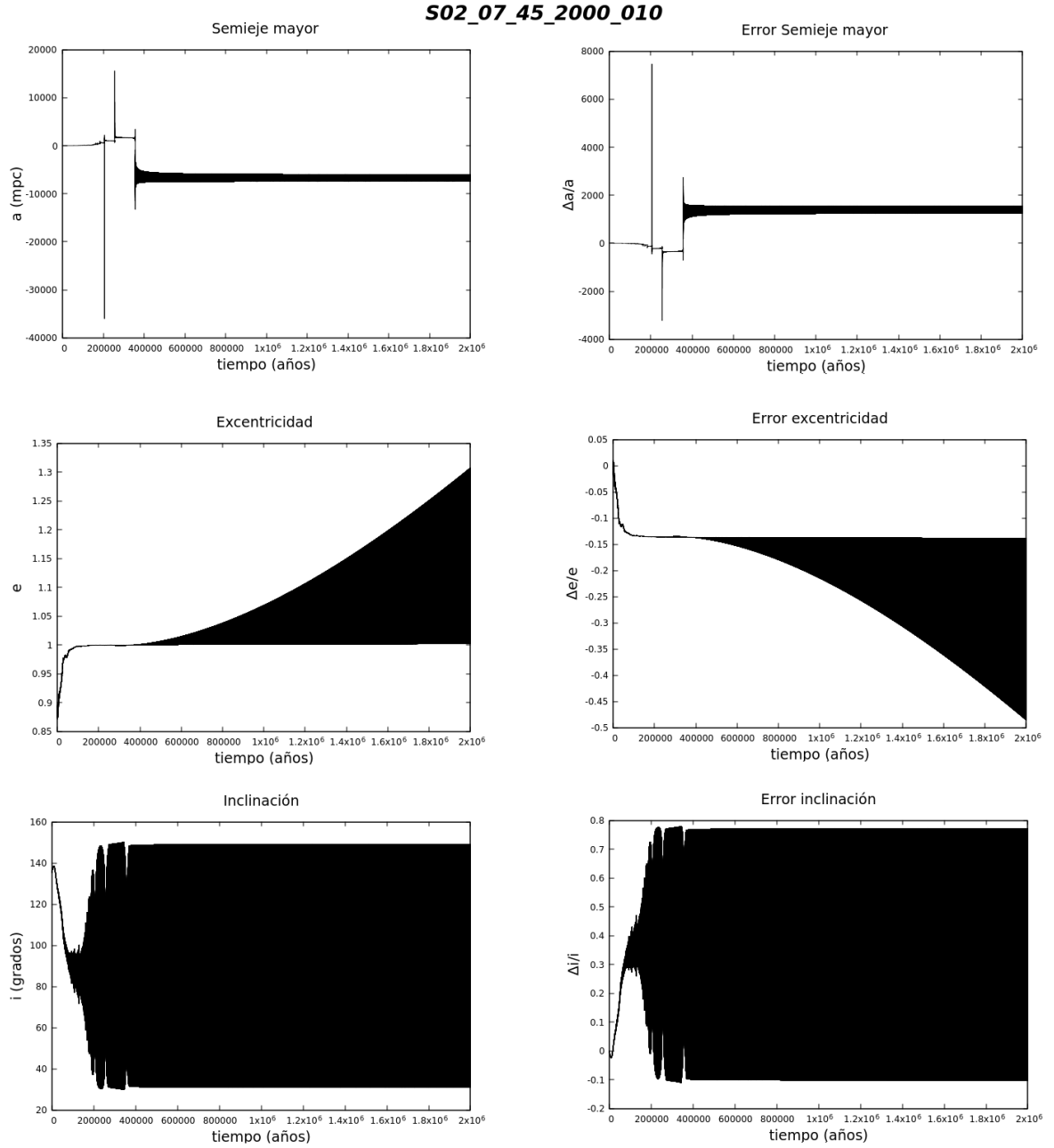


Figura 5.82: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

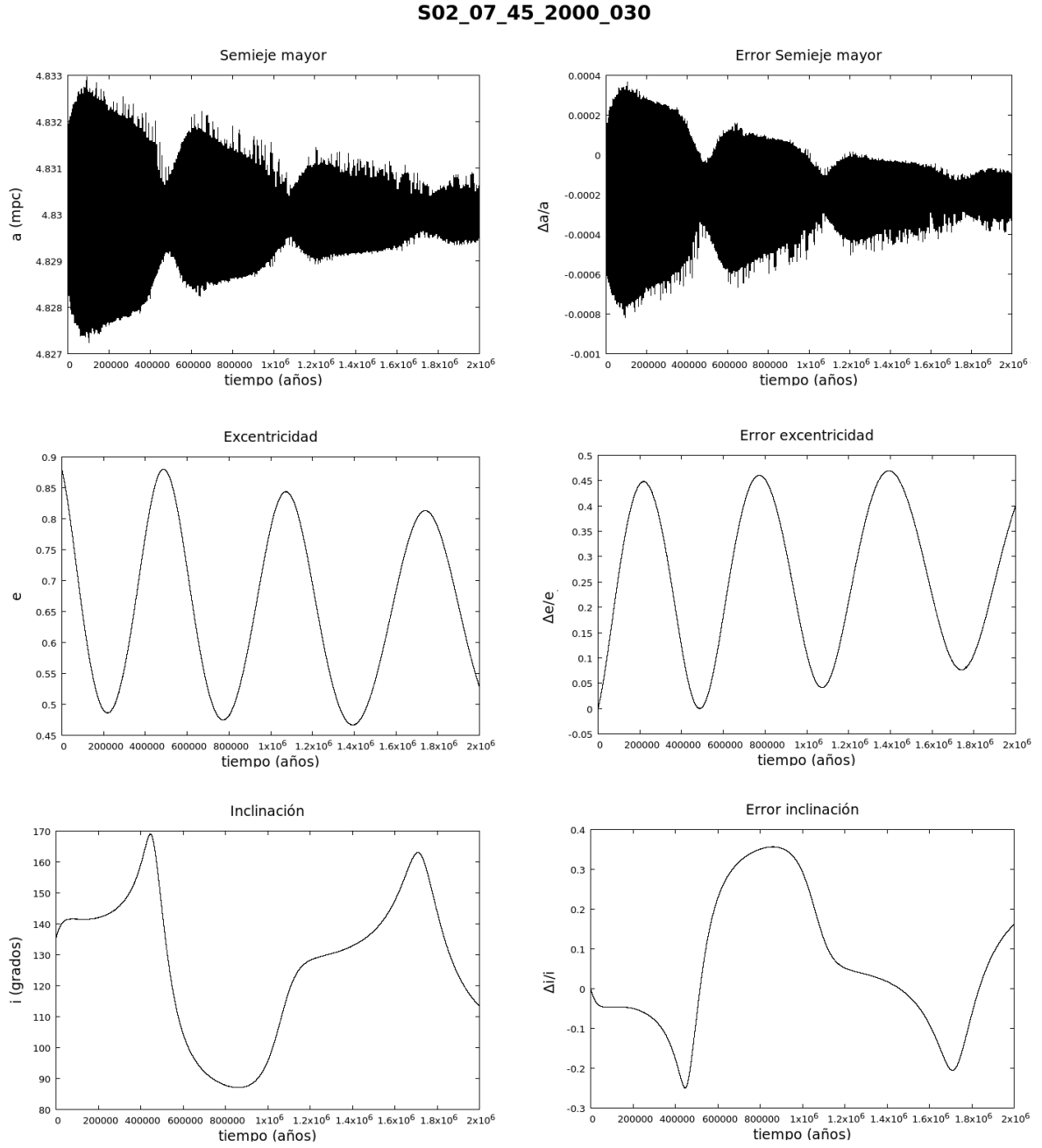


Figura 5.83: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$

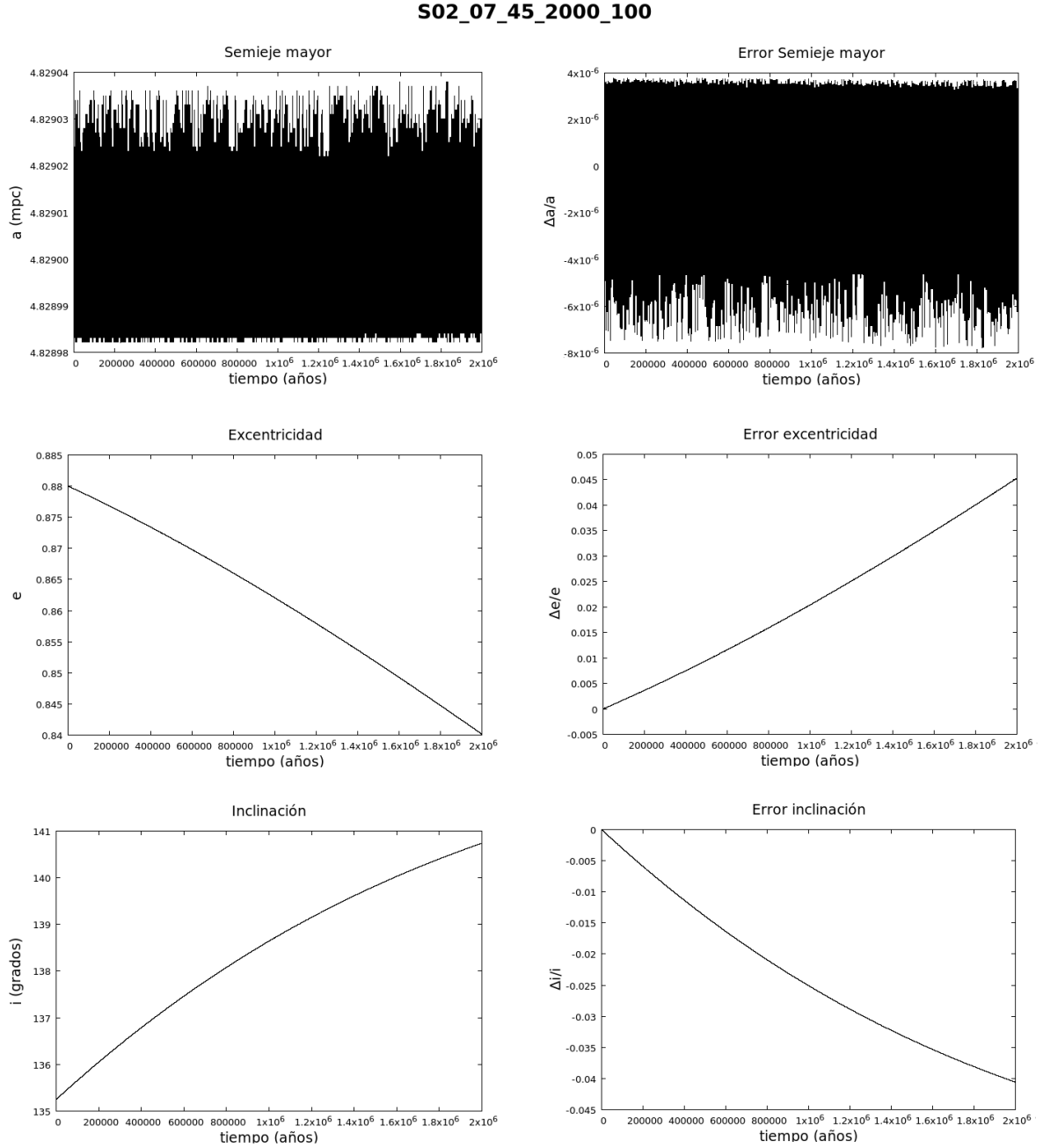


Figura 5.84: *Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$*

S02_07_45_2000_300

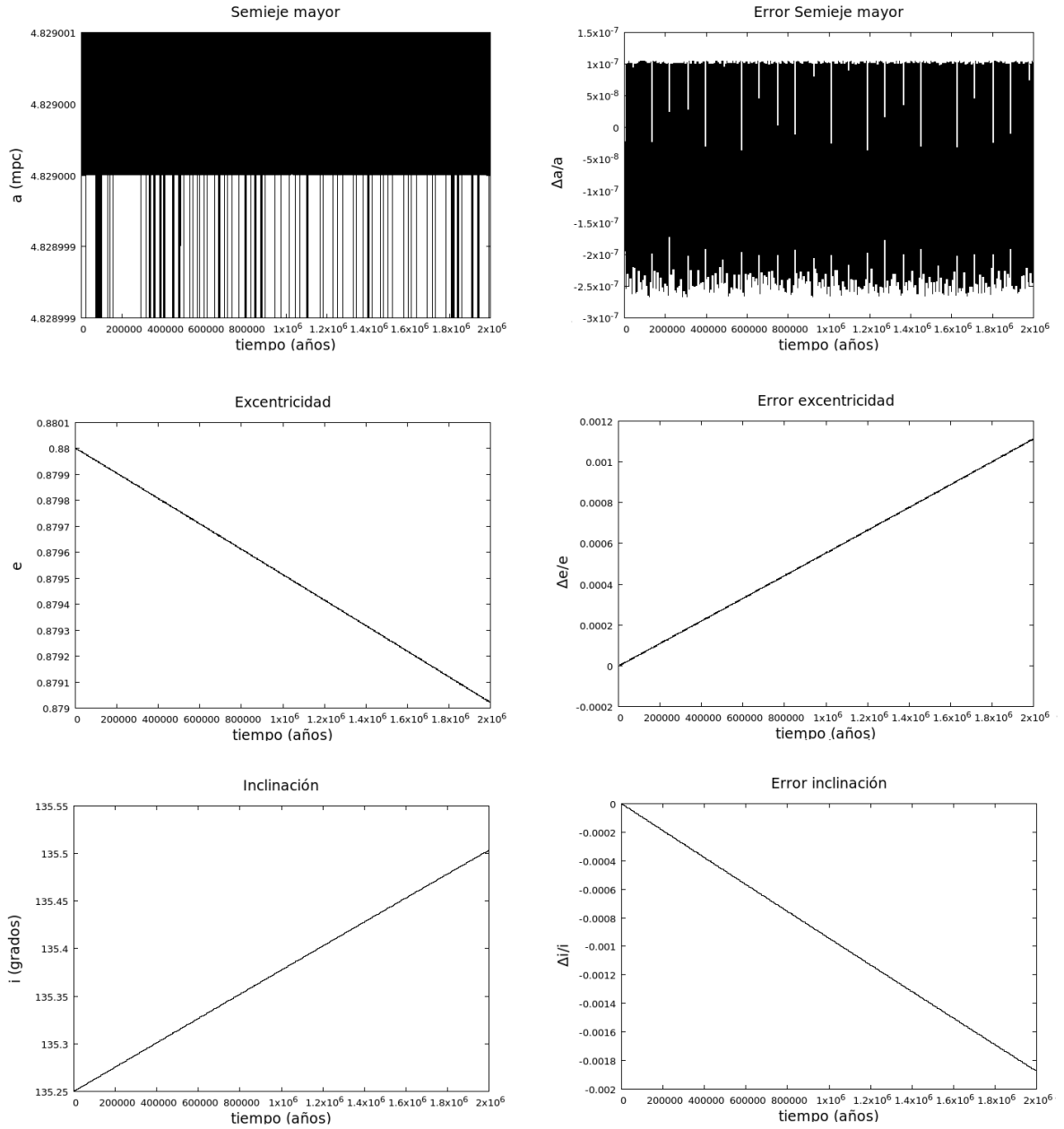


Figura 5.85: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$

Excentricidad IMBH $e = 0,7$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 90^\circ$

S02_07_90_2000_003

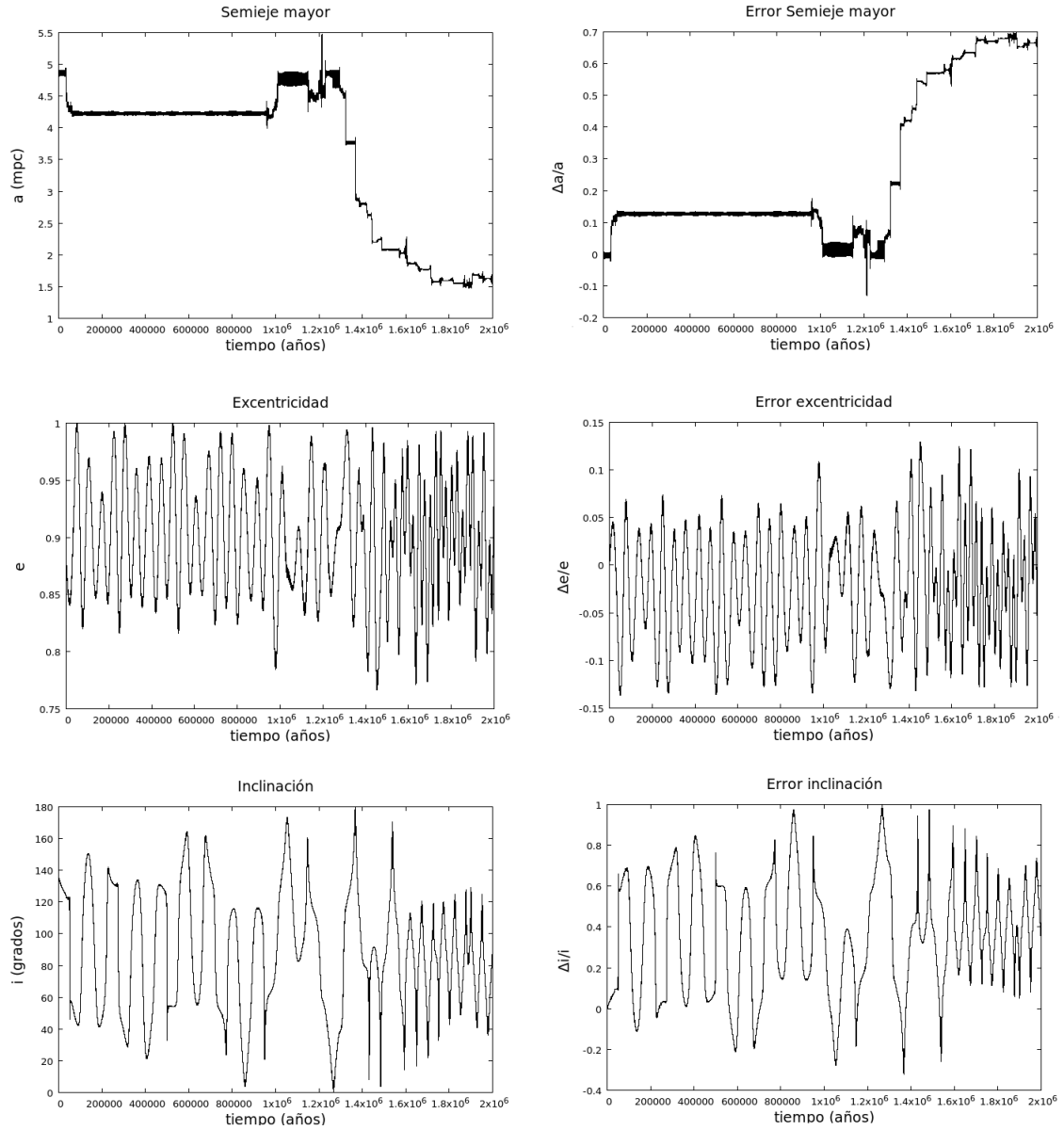


Figura 5.86: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$

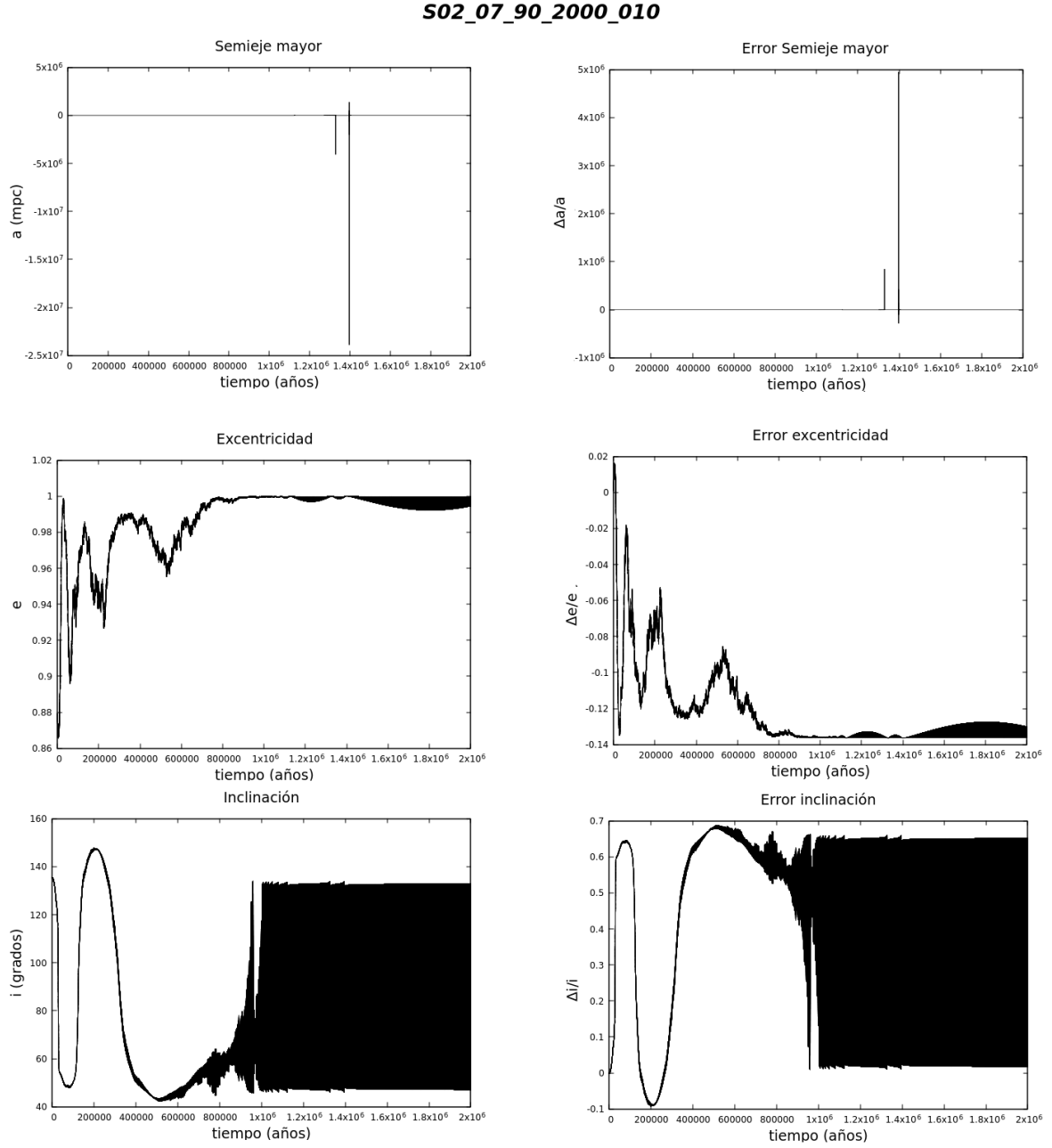


Figura 5.87: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

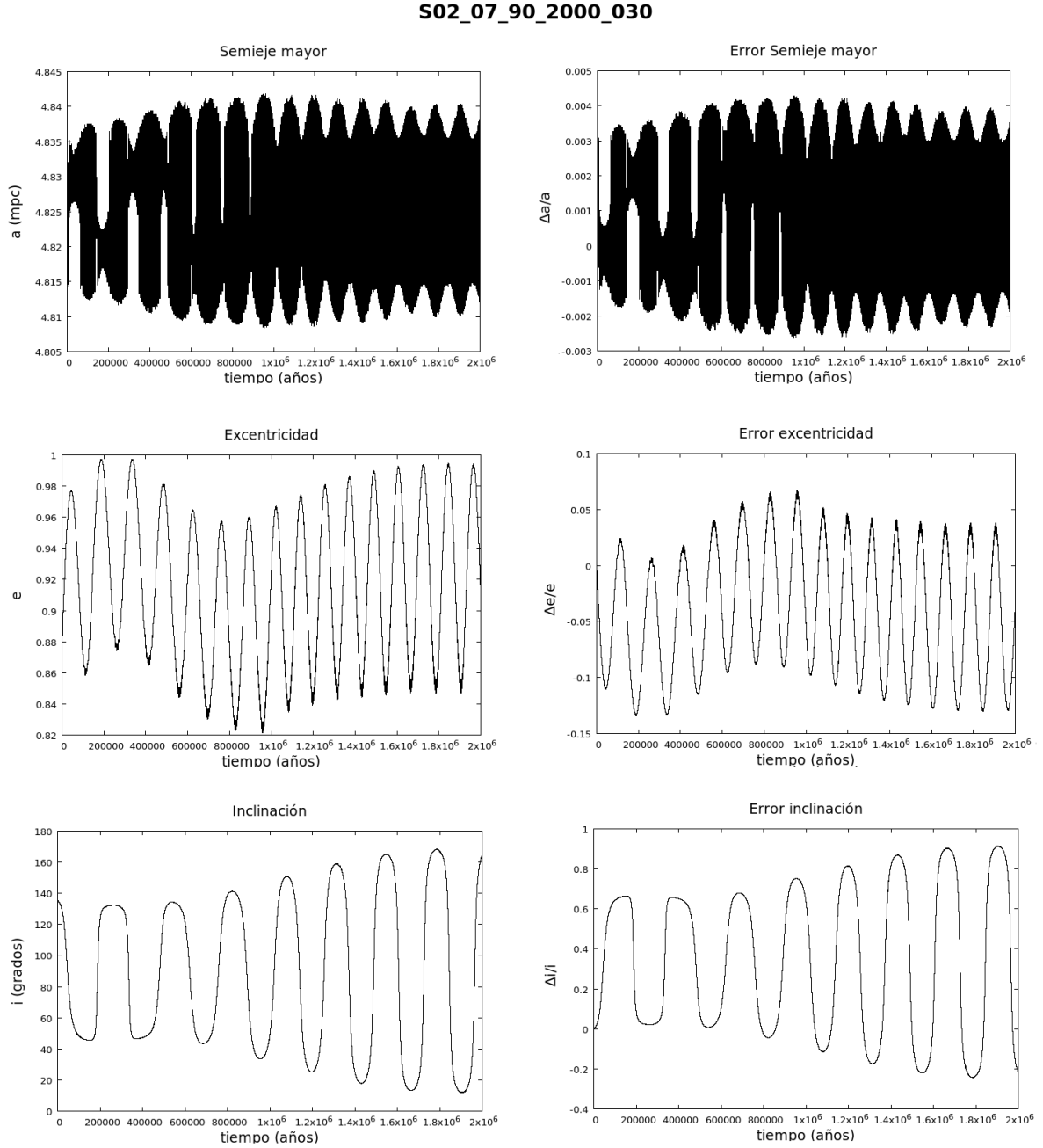


Figura 5.88: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$

S02_07_90_2000_100

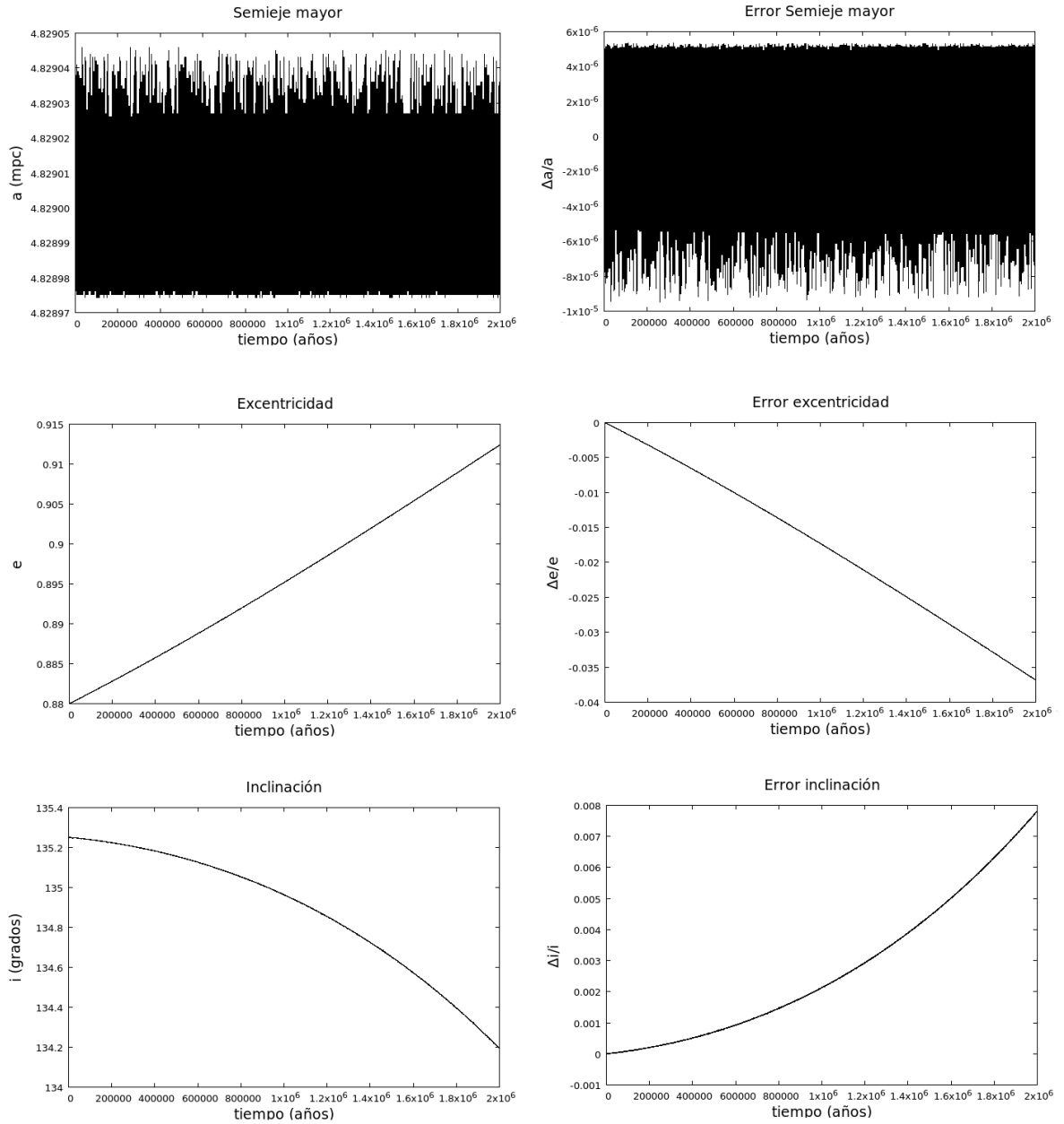


Figura 5.89: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$

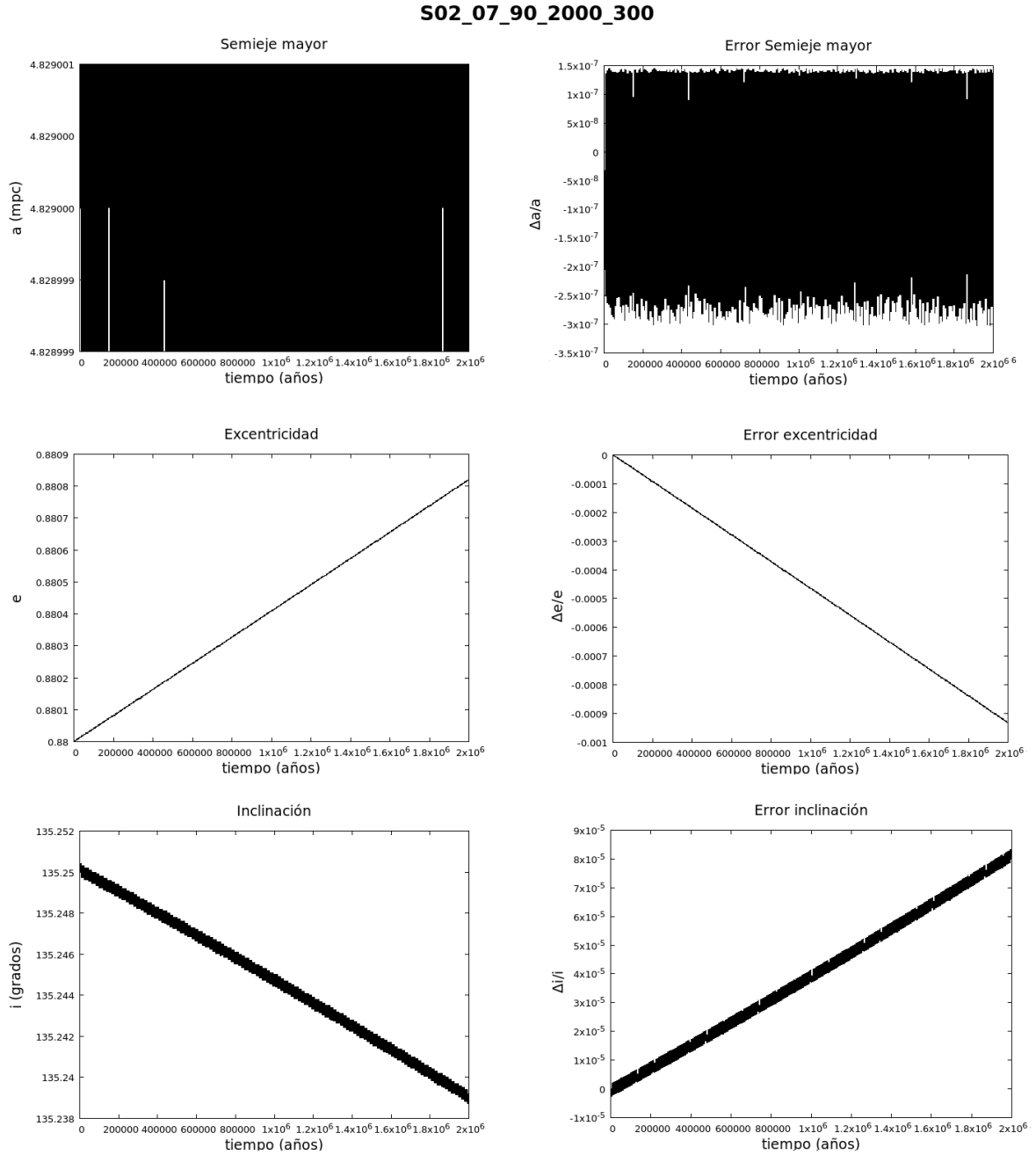


Figura 5.90: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$

Parámetros Orbitales de la estrella S2 cuando $m_{IMBH} = 4000M_{\odot}$

En esta sección se muestran los resultados de las simulaciones cuando la masa del Agujero Negro Masivo Intermedio IMBH es $m_{IMBH} = 4000M_{\odot}$

Excentricidad IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 0^{\circ}$

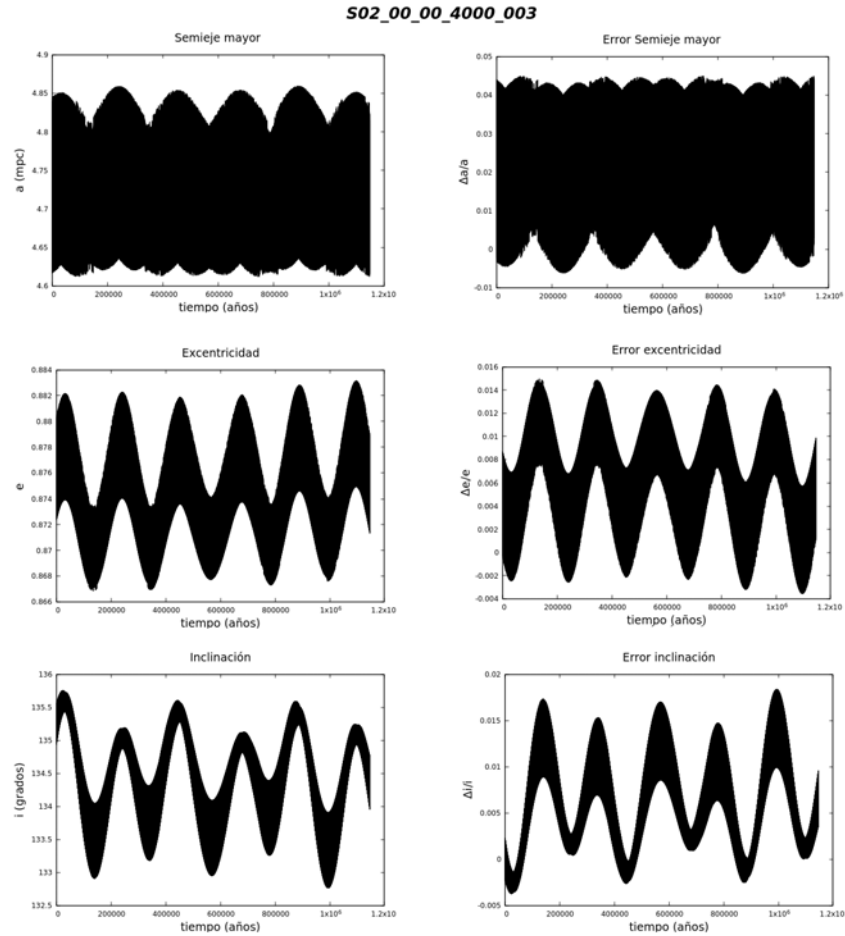


Figura 5.91: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^{\circ}$, masa IMBH $m = 4000M_{\odot}$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$

S02_00_00_4000_010

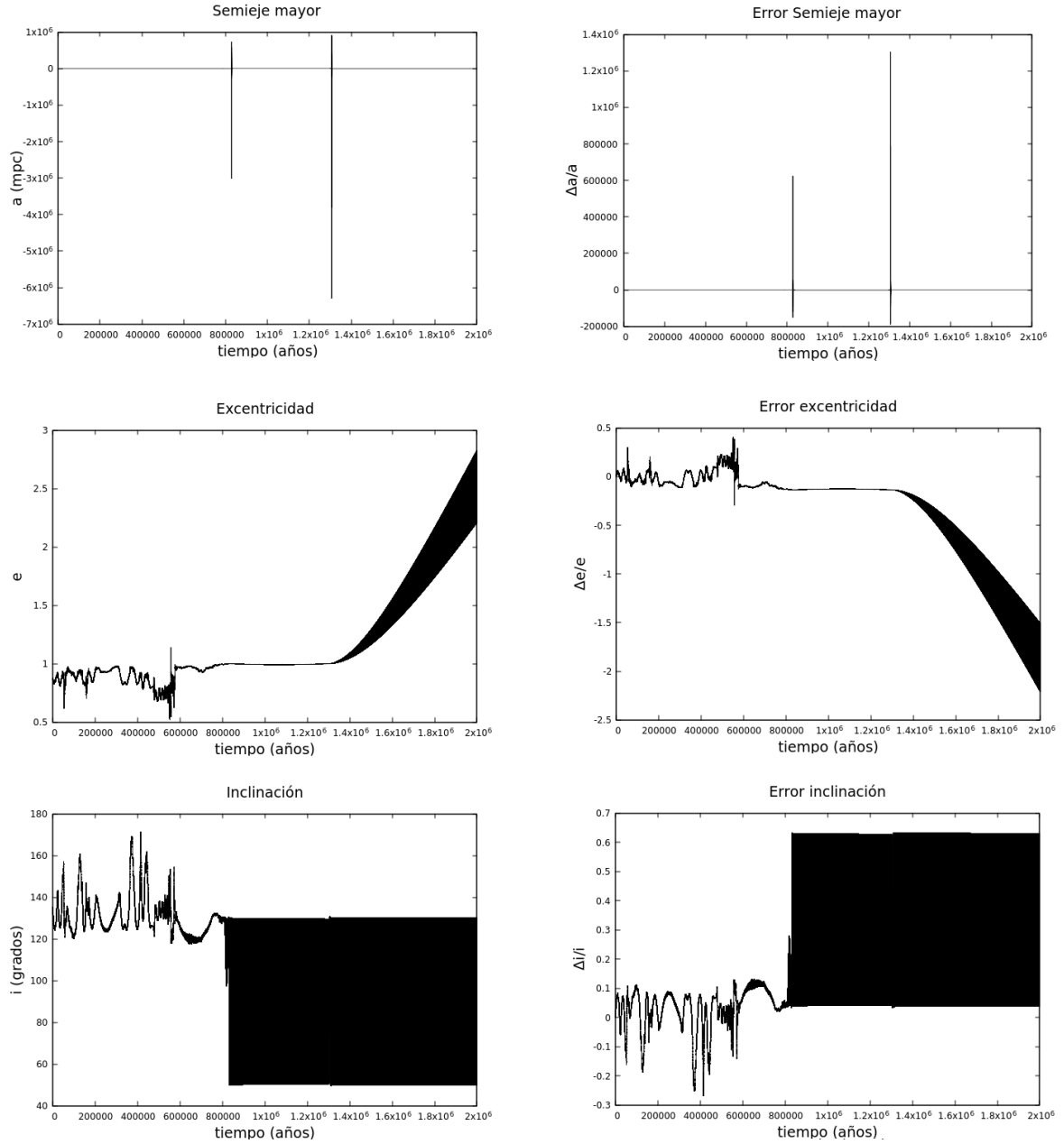


Figura 5.92: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

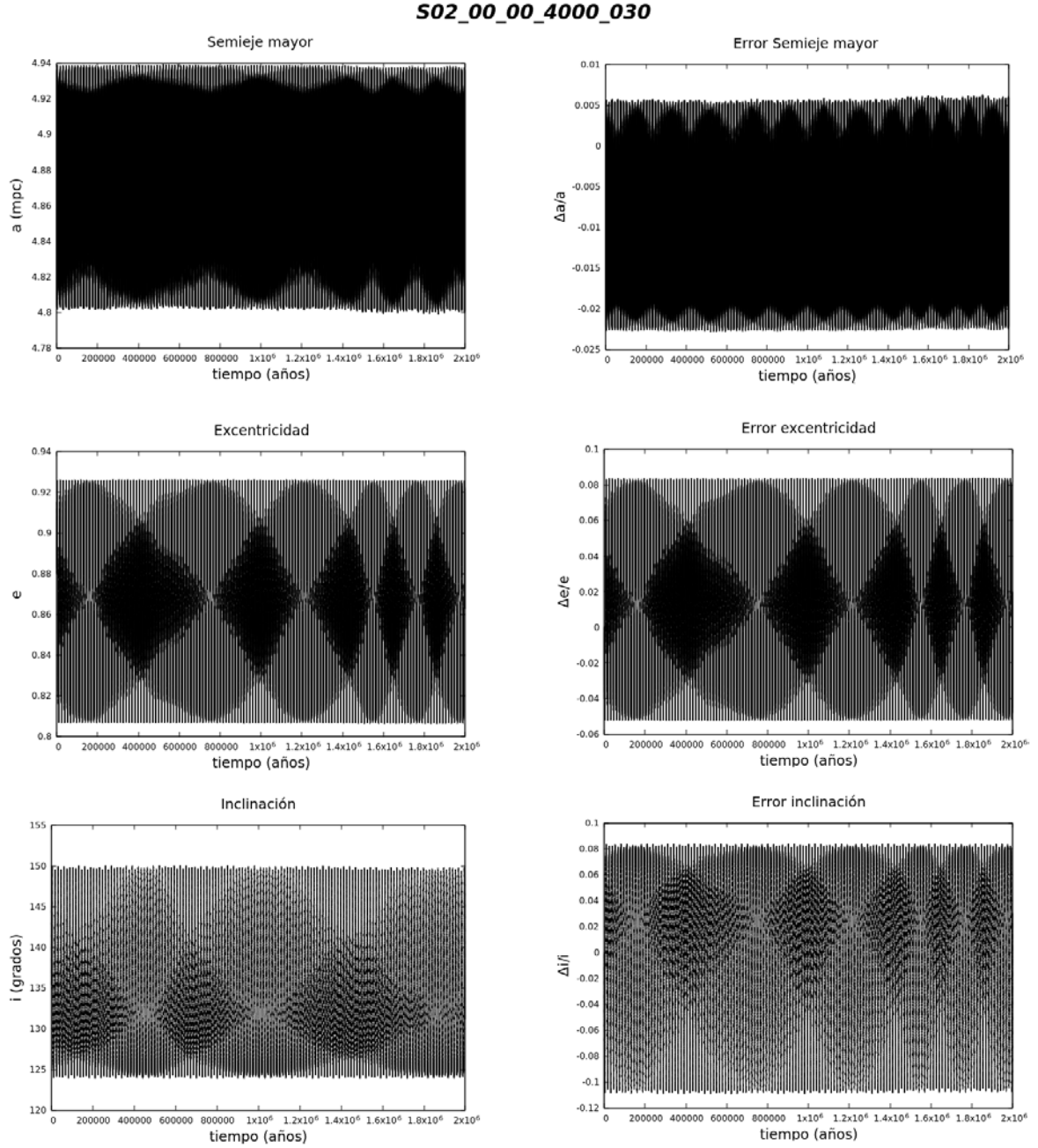


Figura 5.93: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$

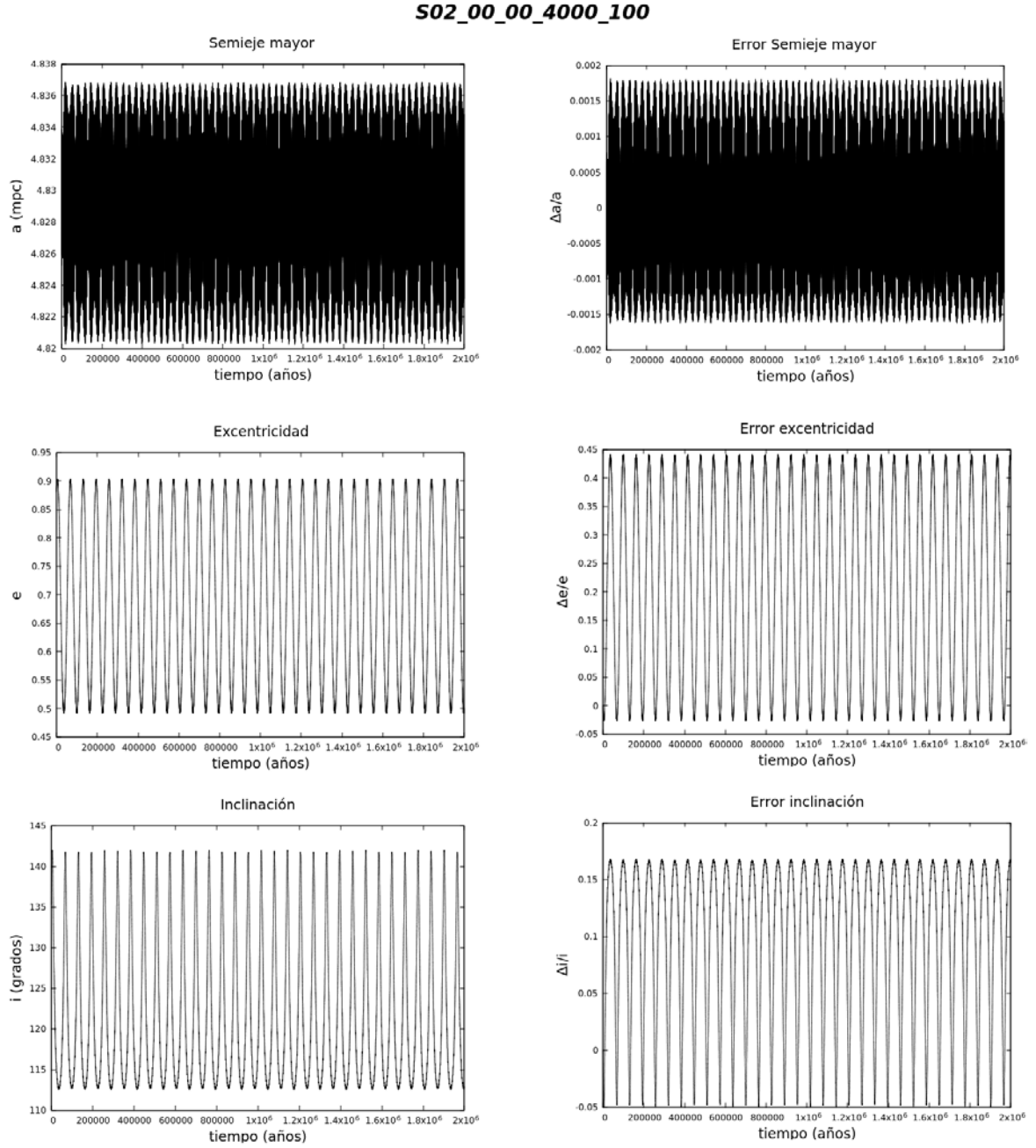


Figura 5.94: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$

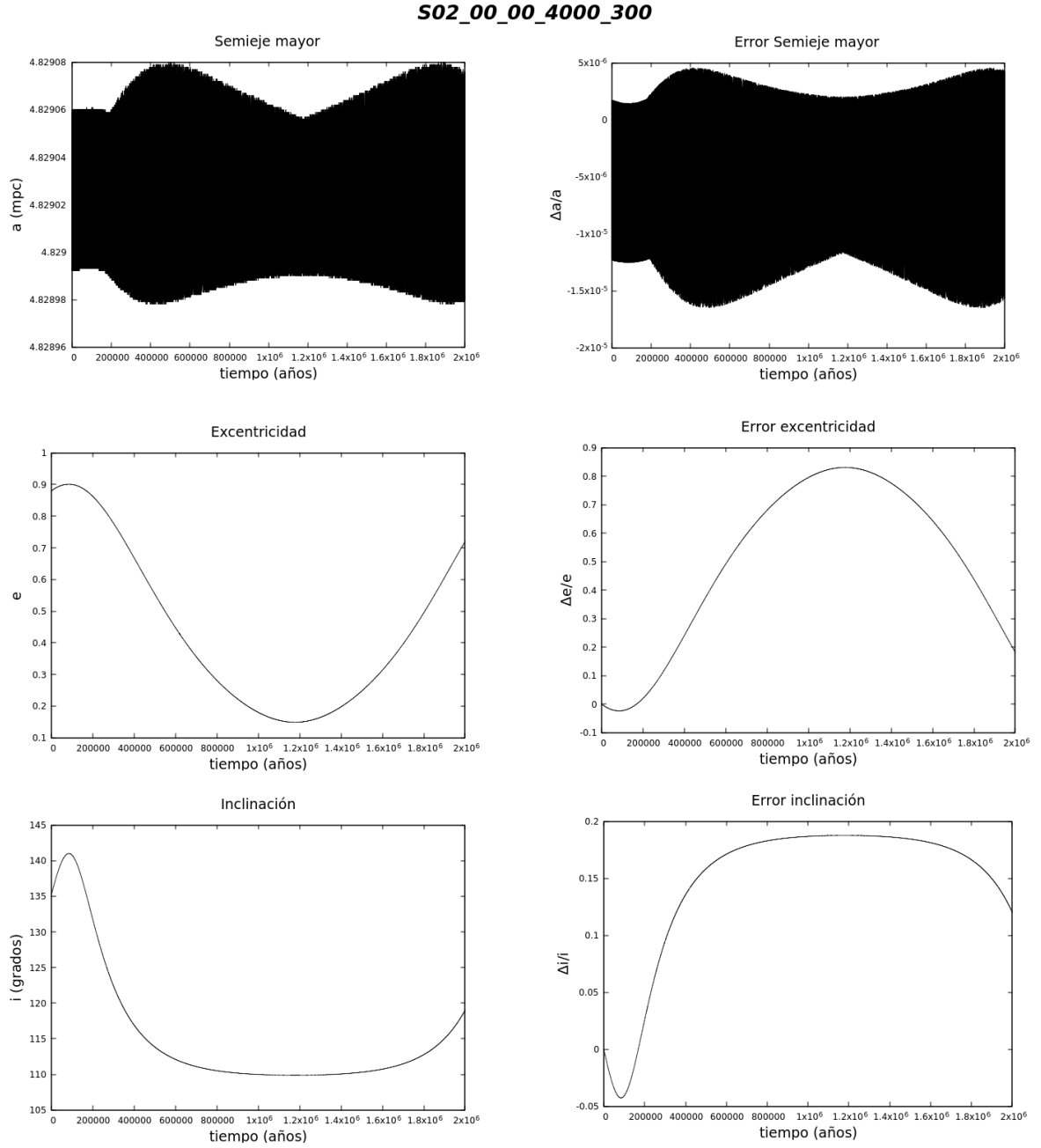


Figura 5.95: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$

Excentricidad IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 45^\circ$

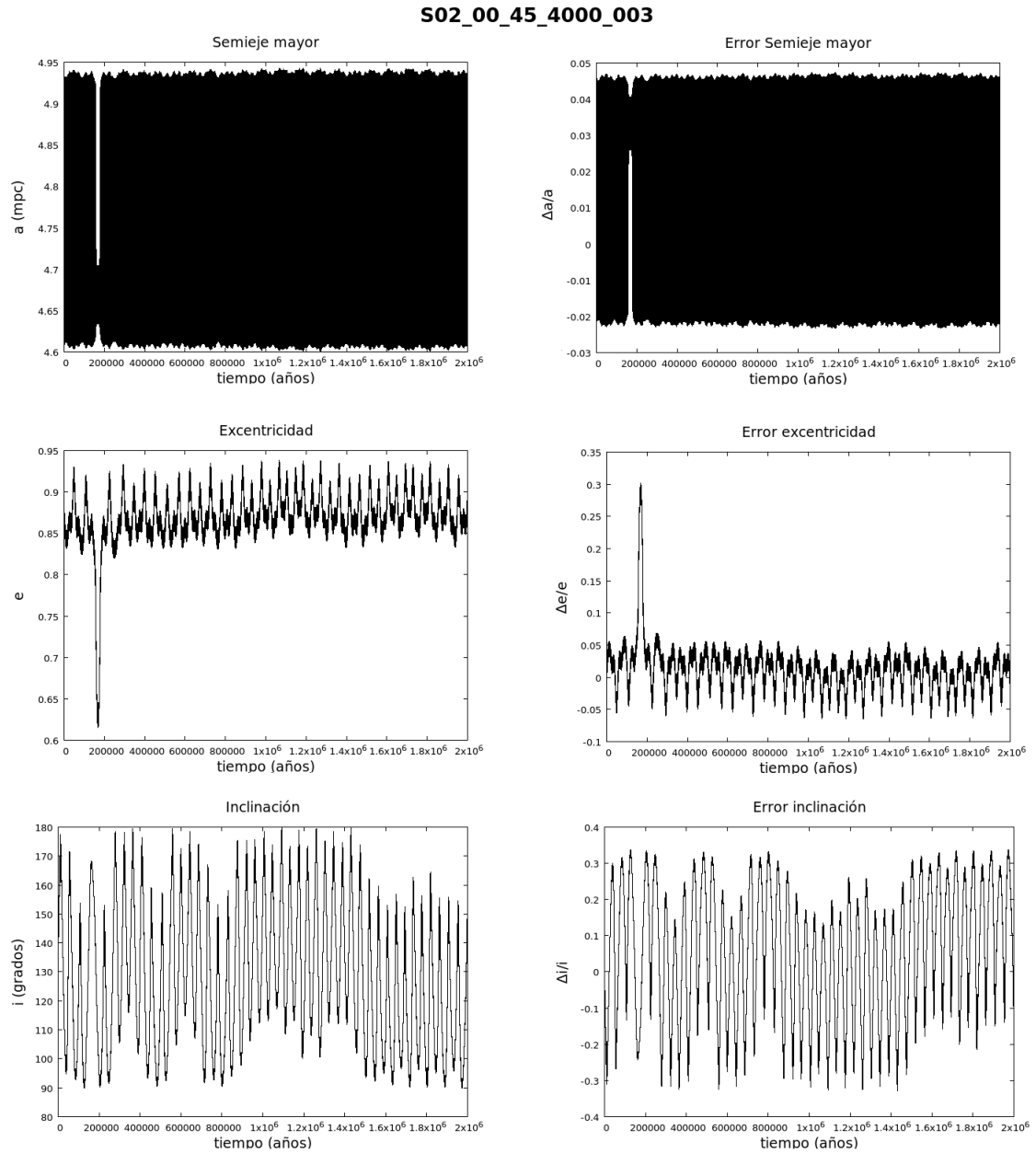


Figura 5.96: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$

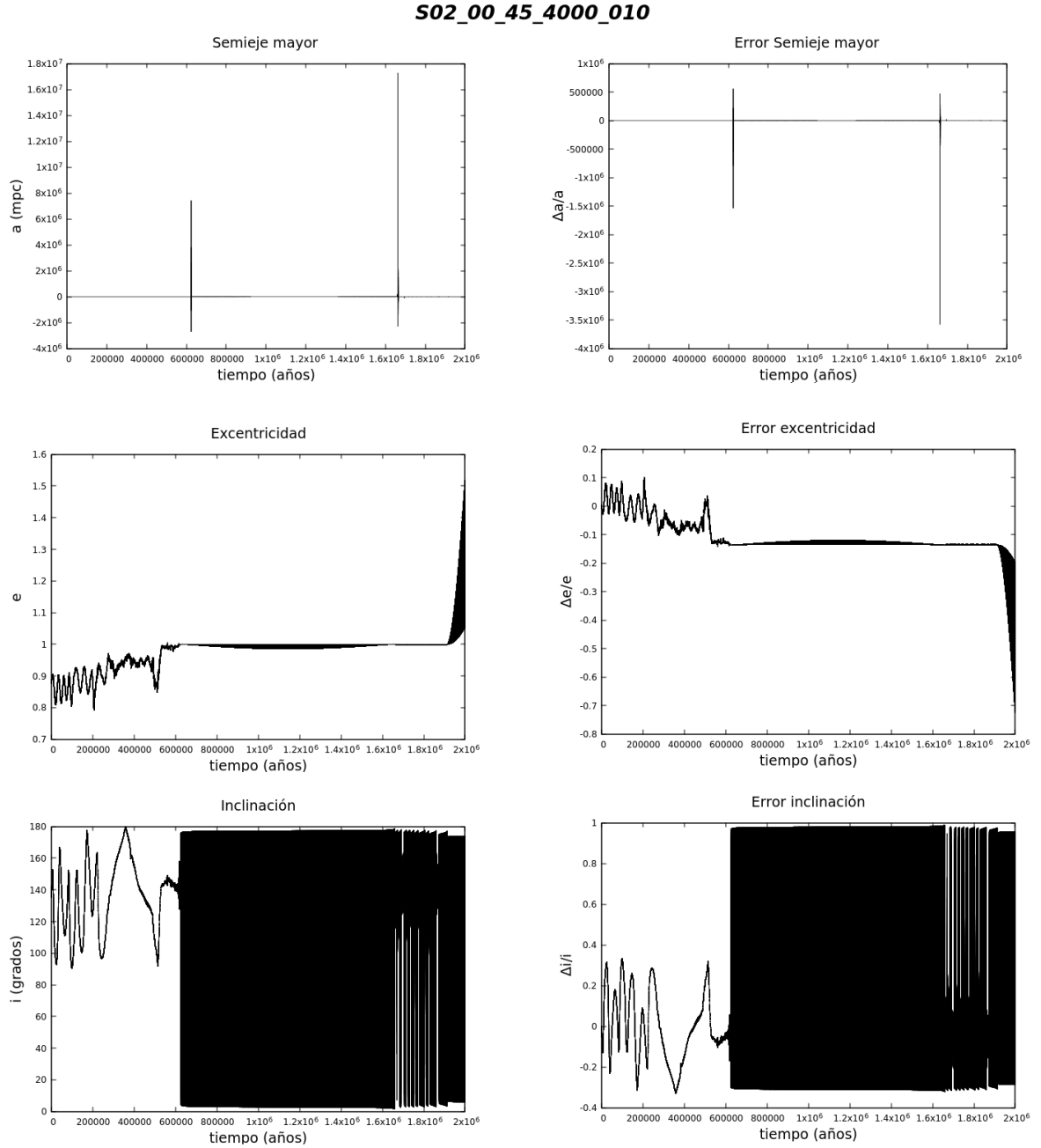


Figura 5.97: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

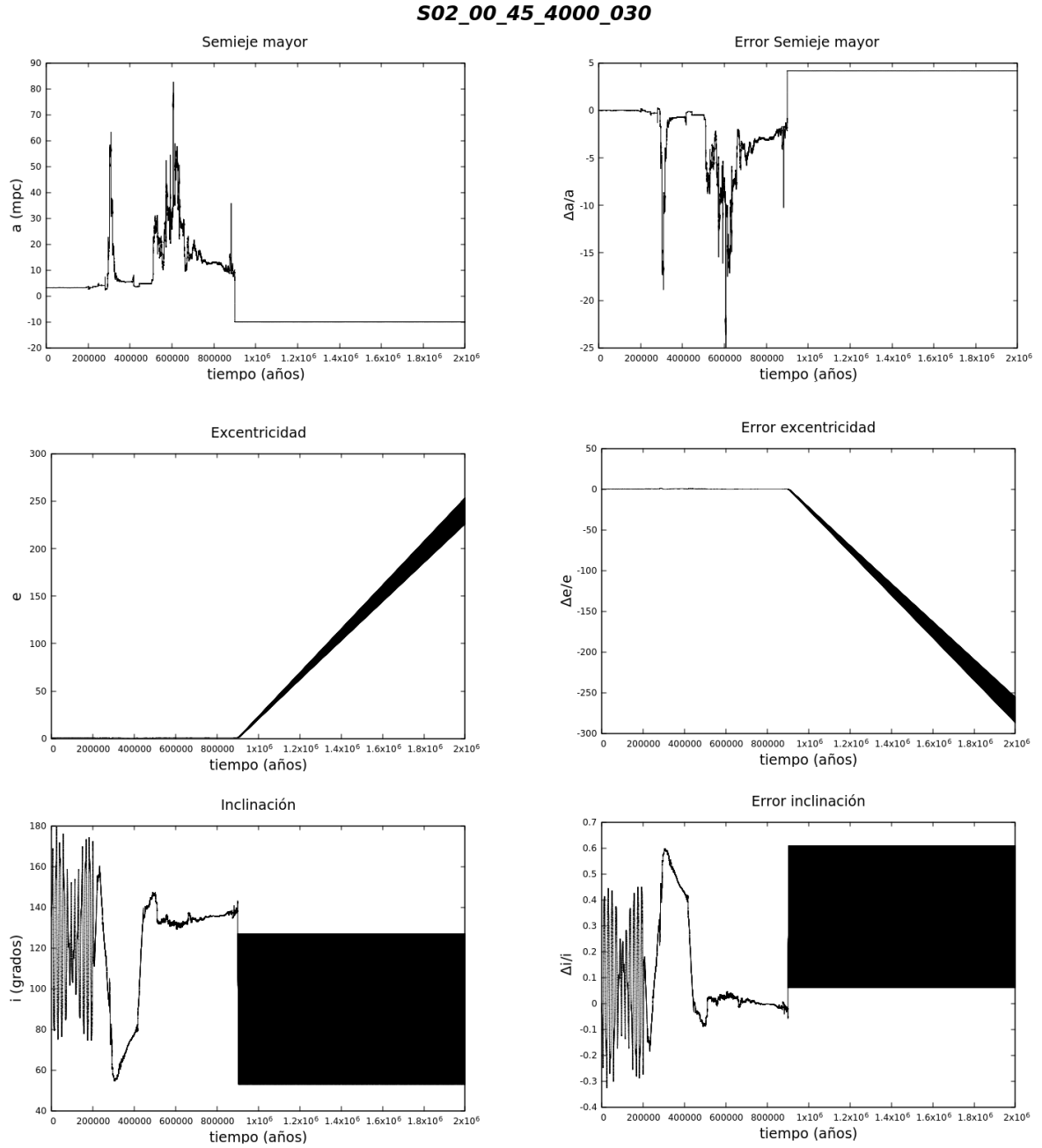


Figura 5.98: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$

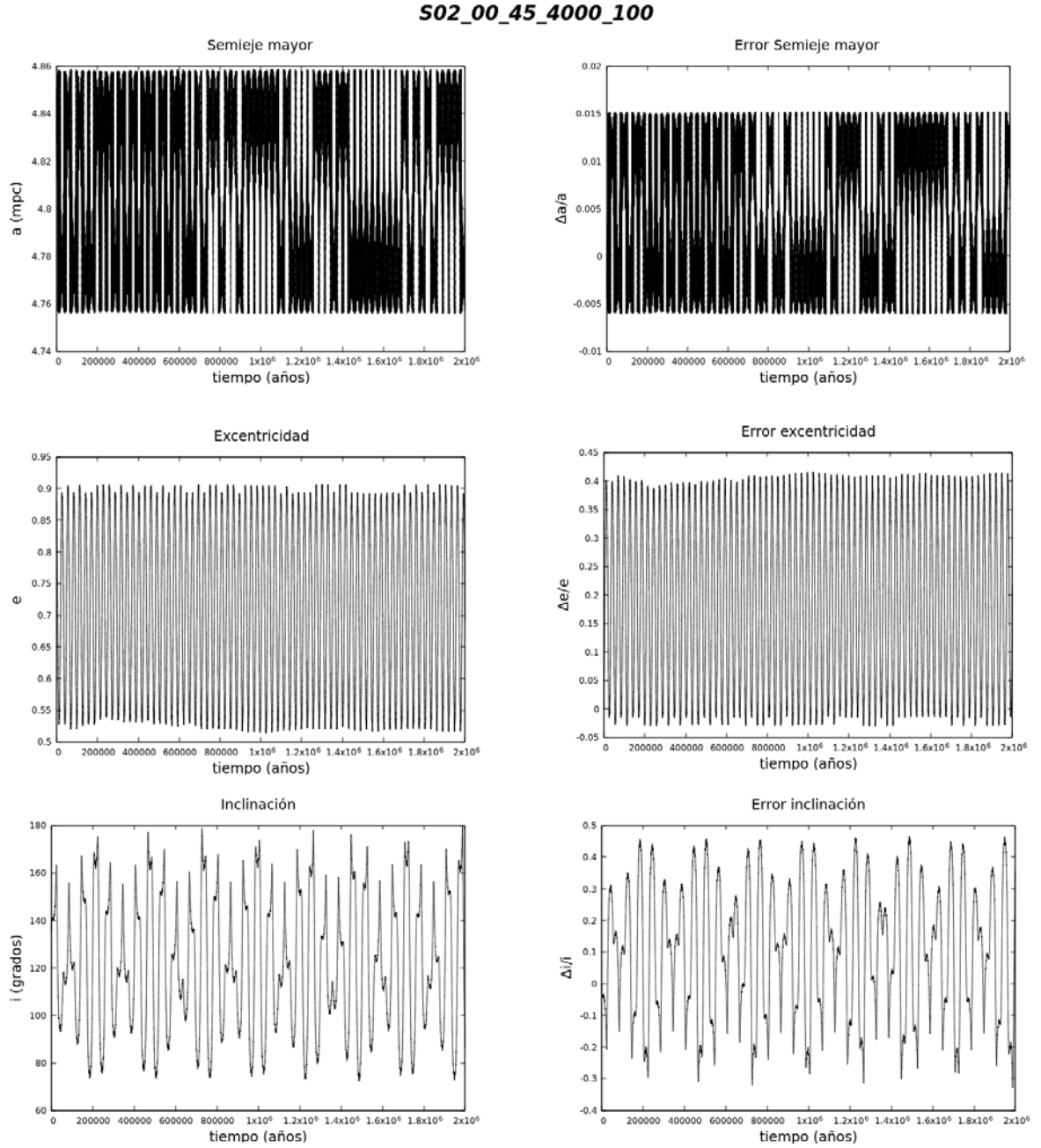


Figura 5.99: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$

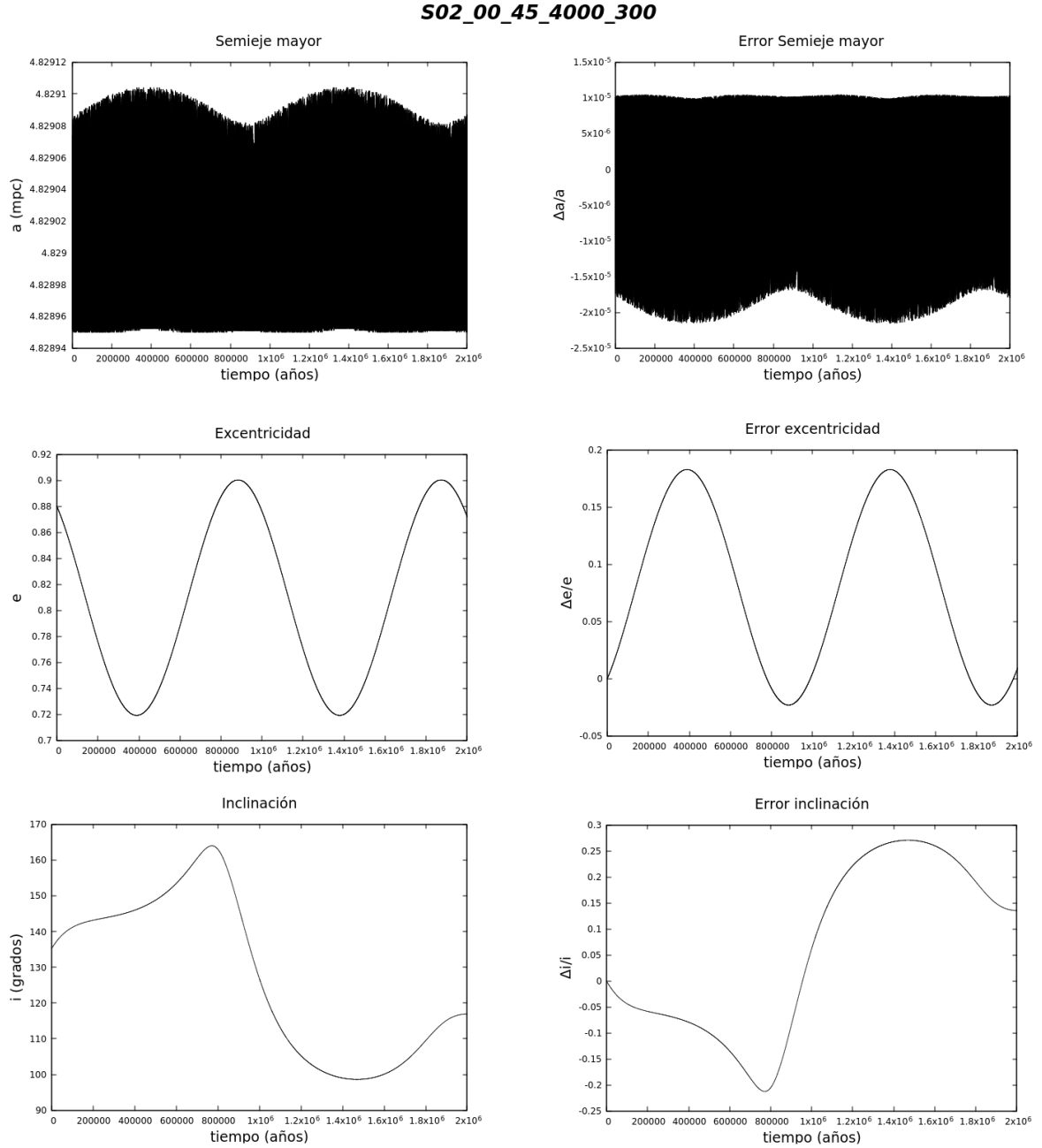


Figura 5.100: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$

Excentricidad IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 90^\circ$

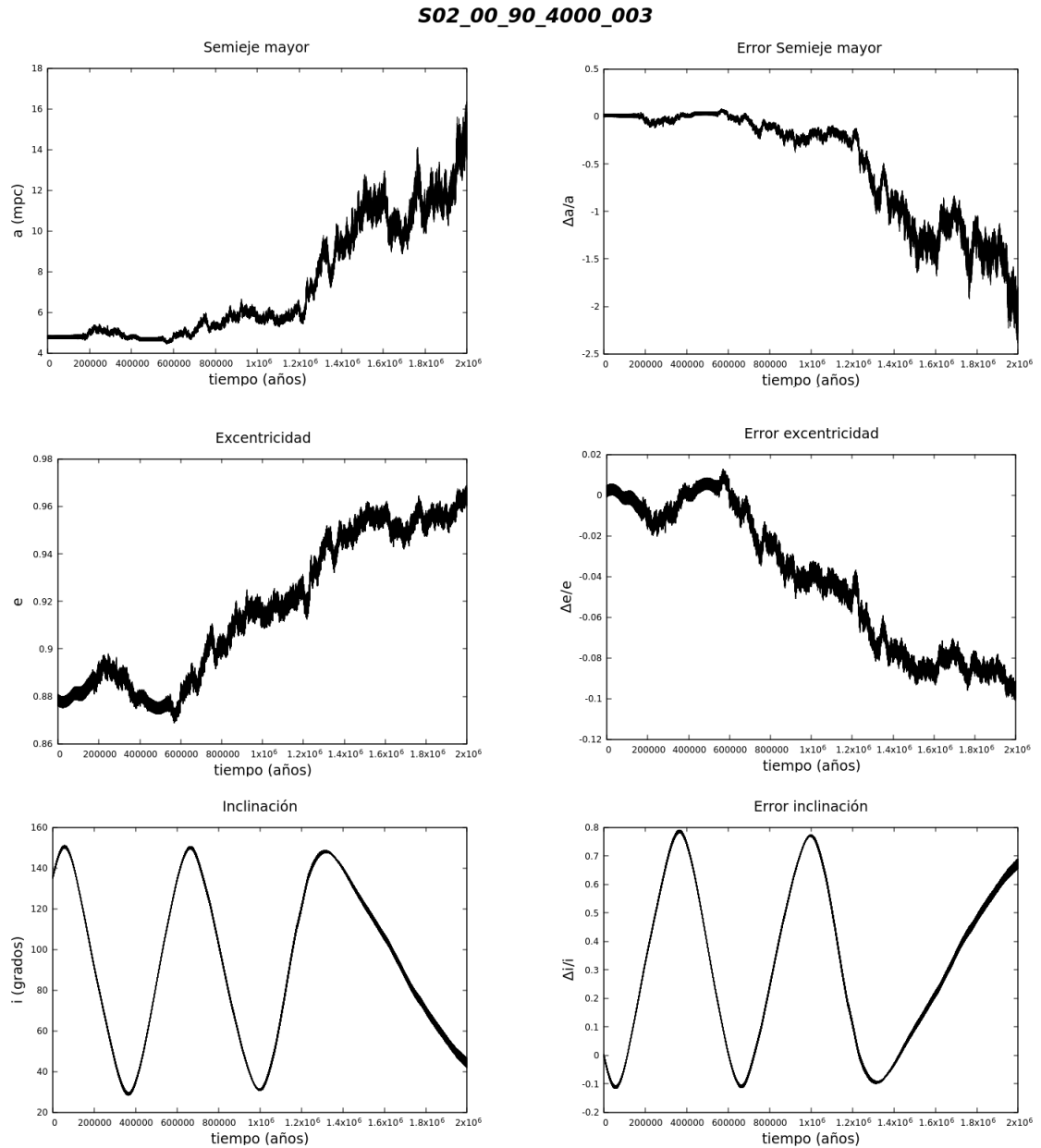


Figura 5.101: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$

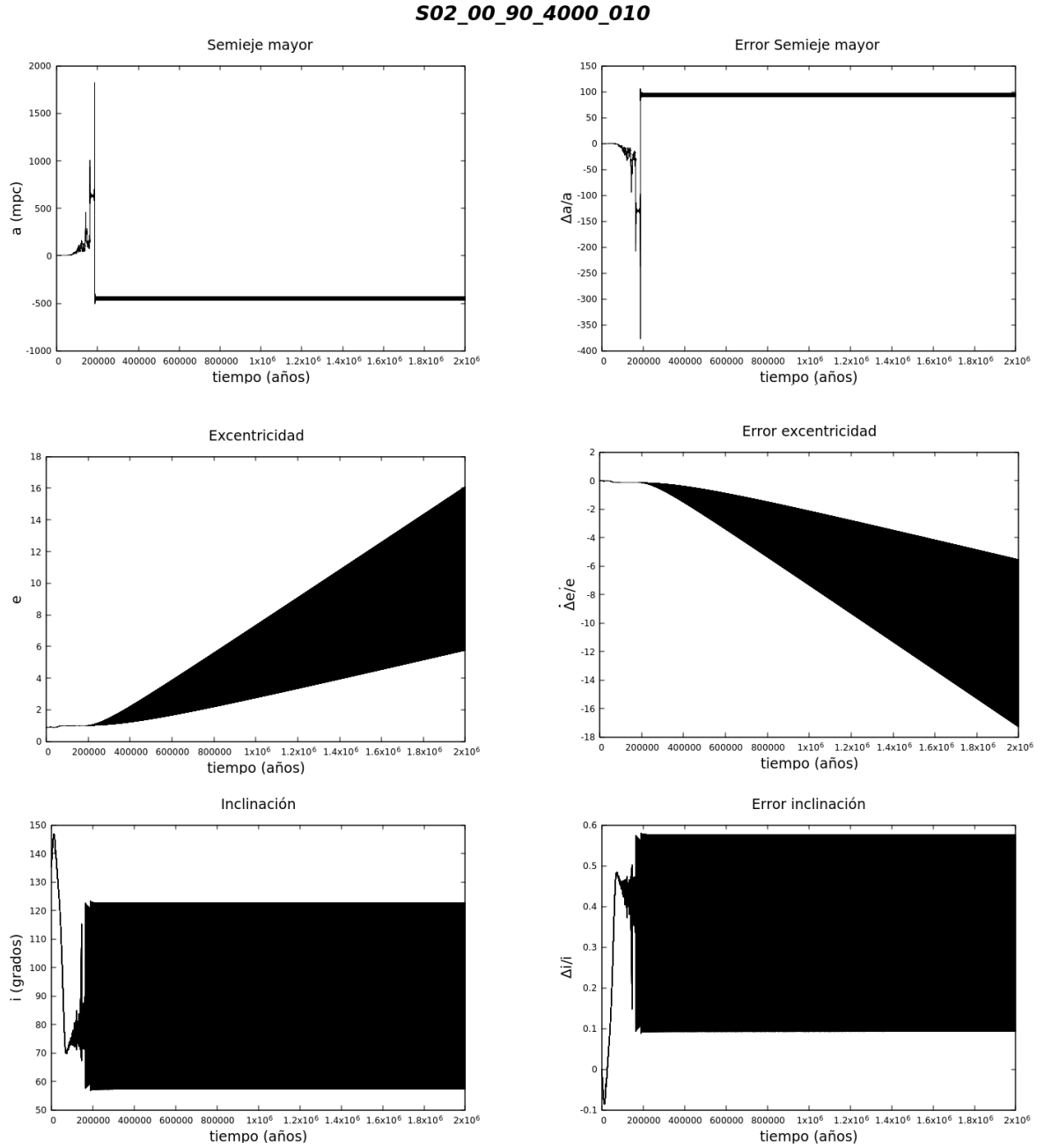


Figura 5.102: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

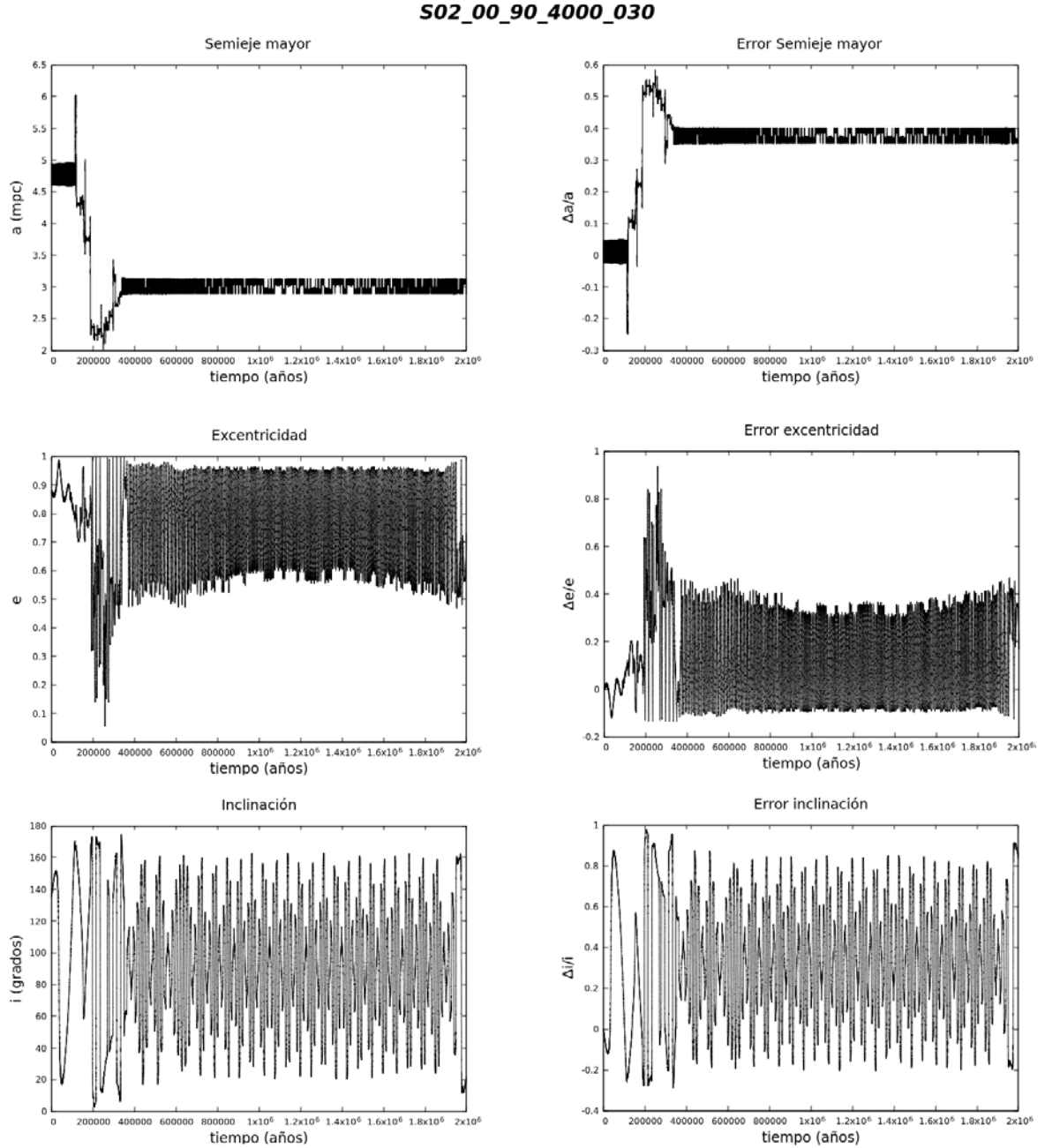


Figura 5.103: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$

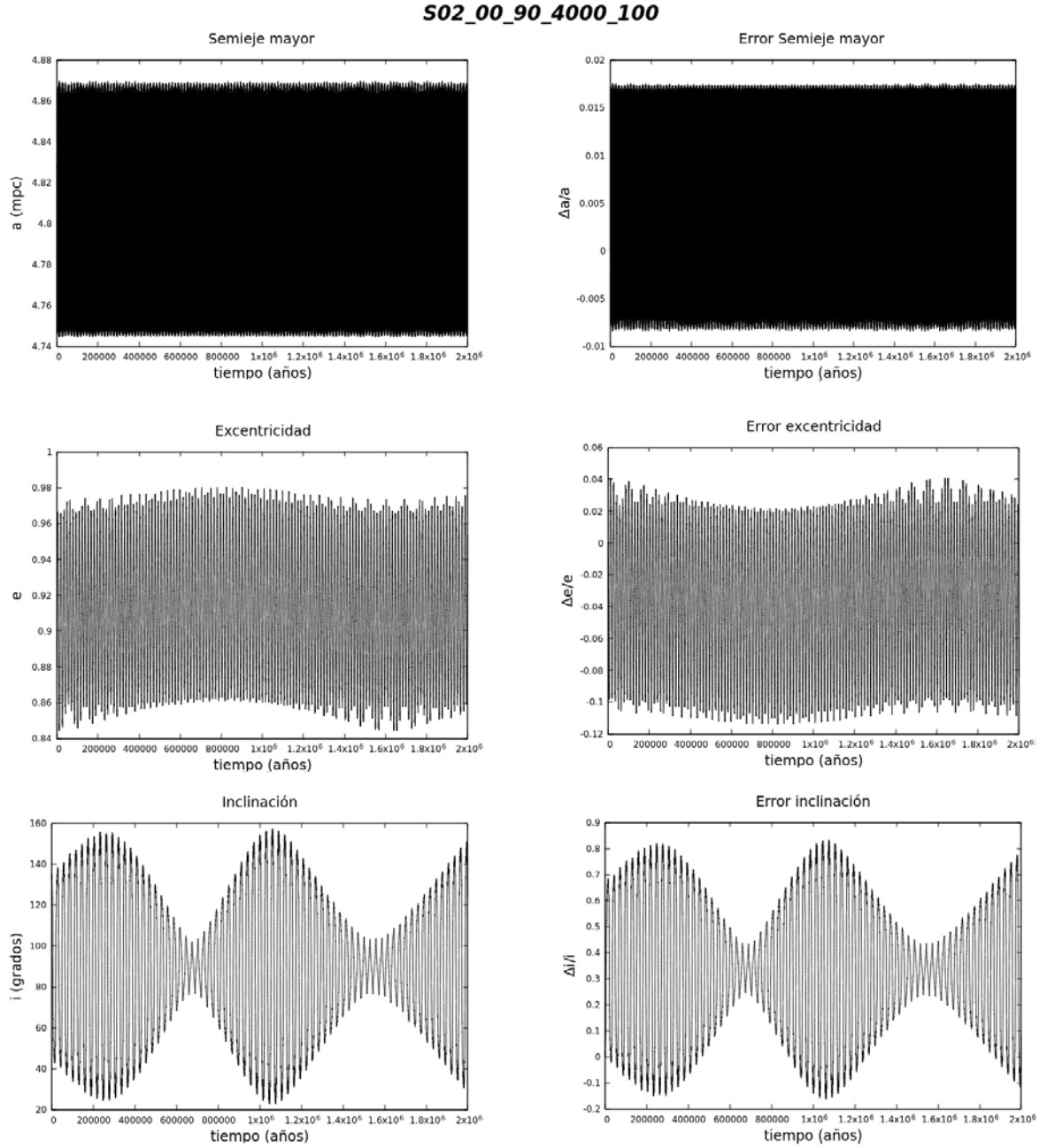


Figura 5.104: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$

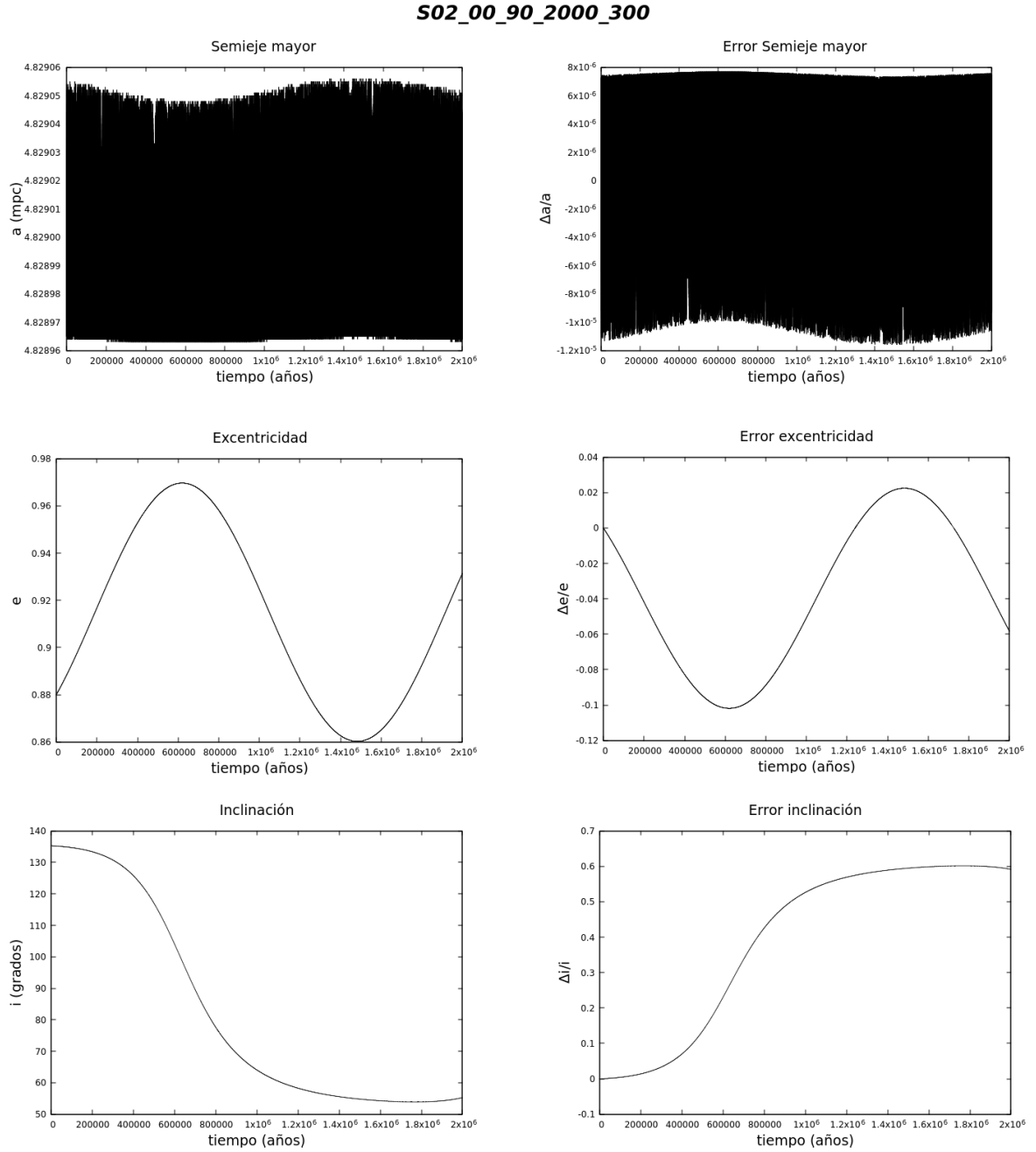


Figura 5.105: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$; Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$

Excentricidad IMBH $e = 0,7$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 0^\circ$

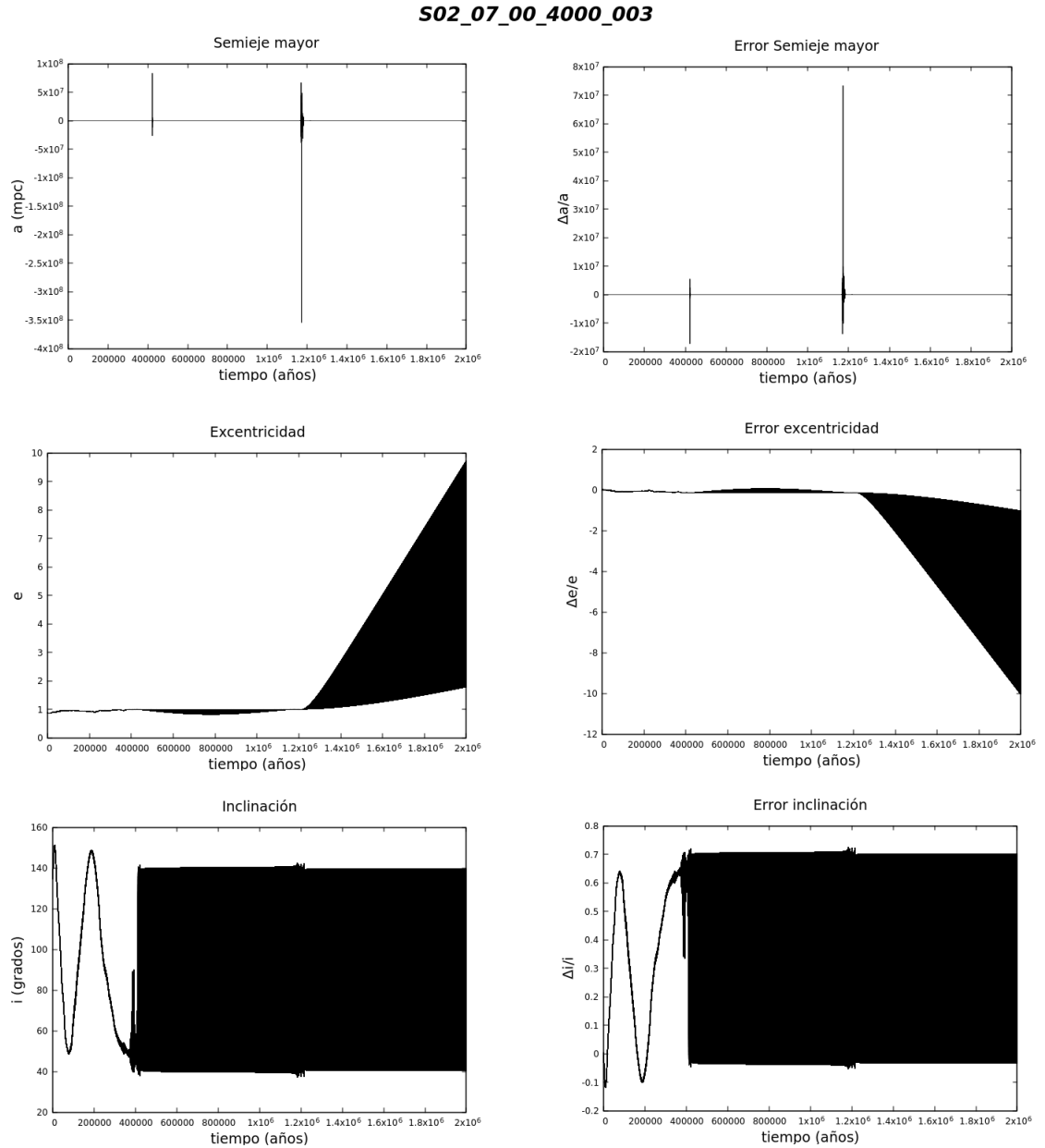


Figura 5.106: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$

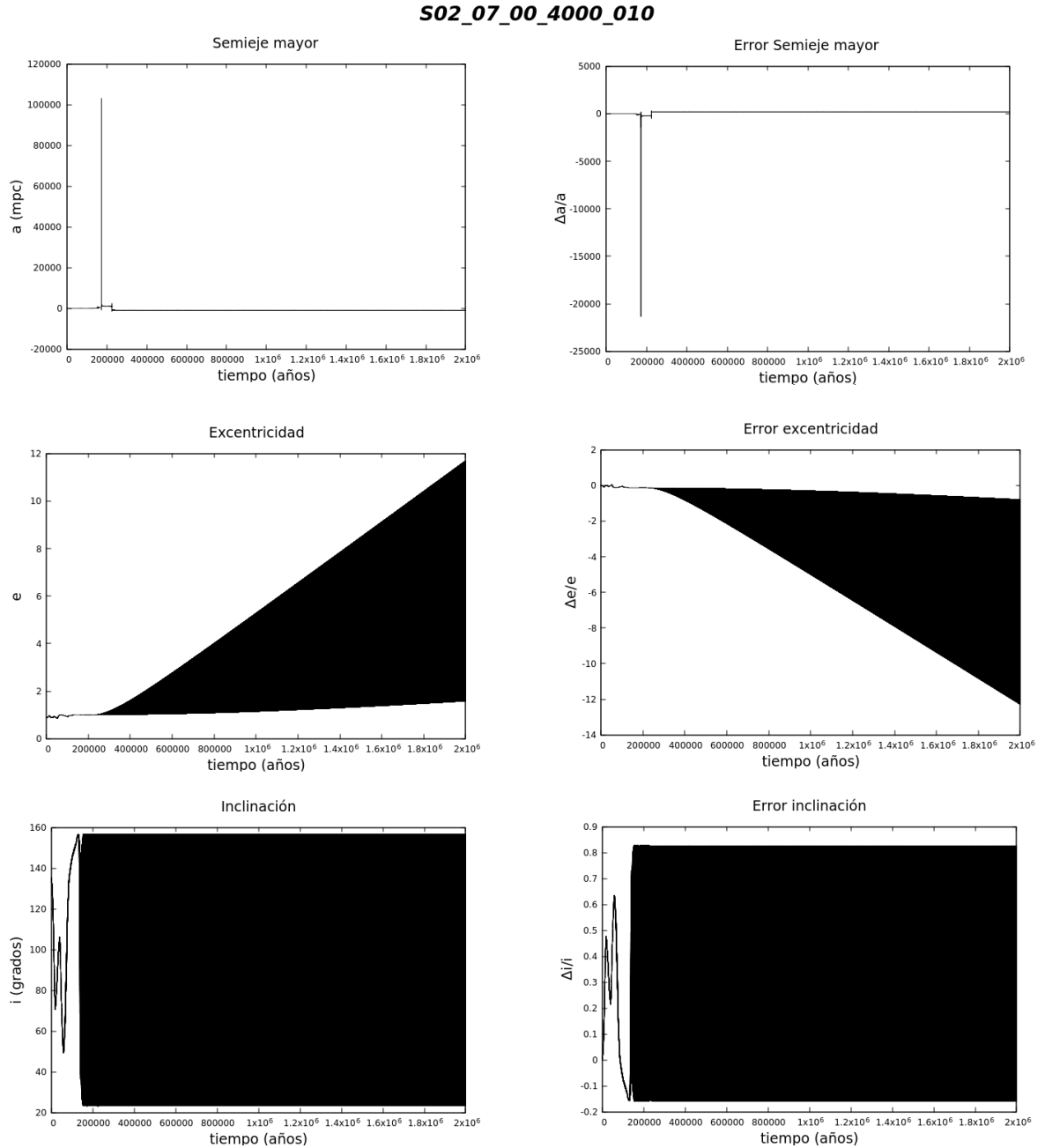


Figura 5.107: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

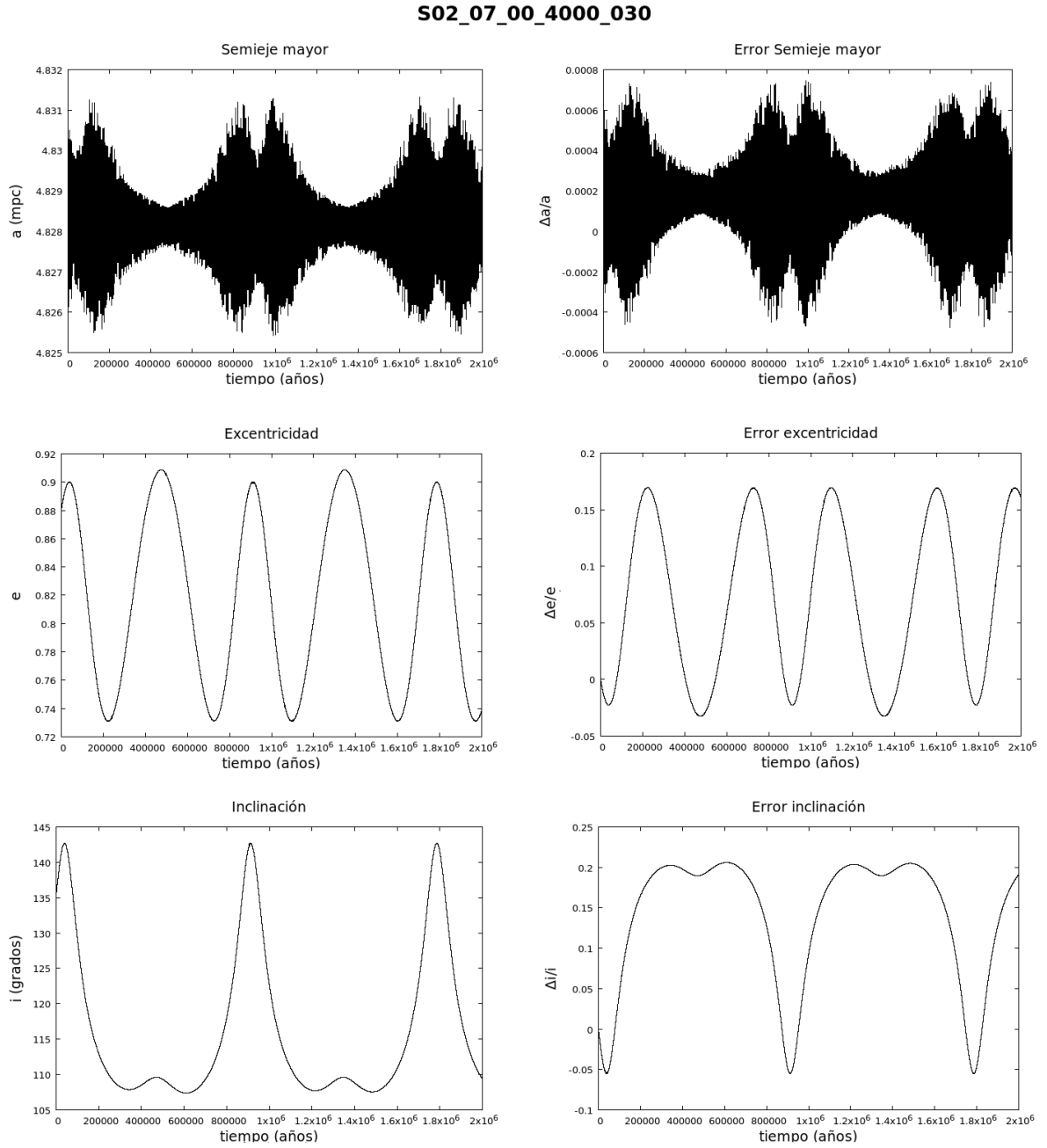


Figura 5.108: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$

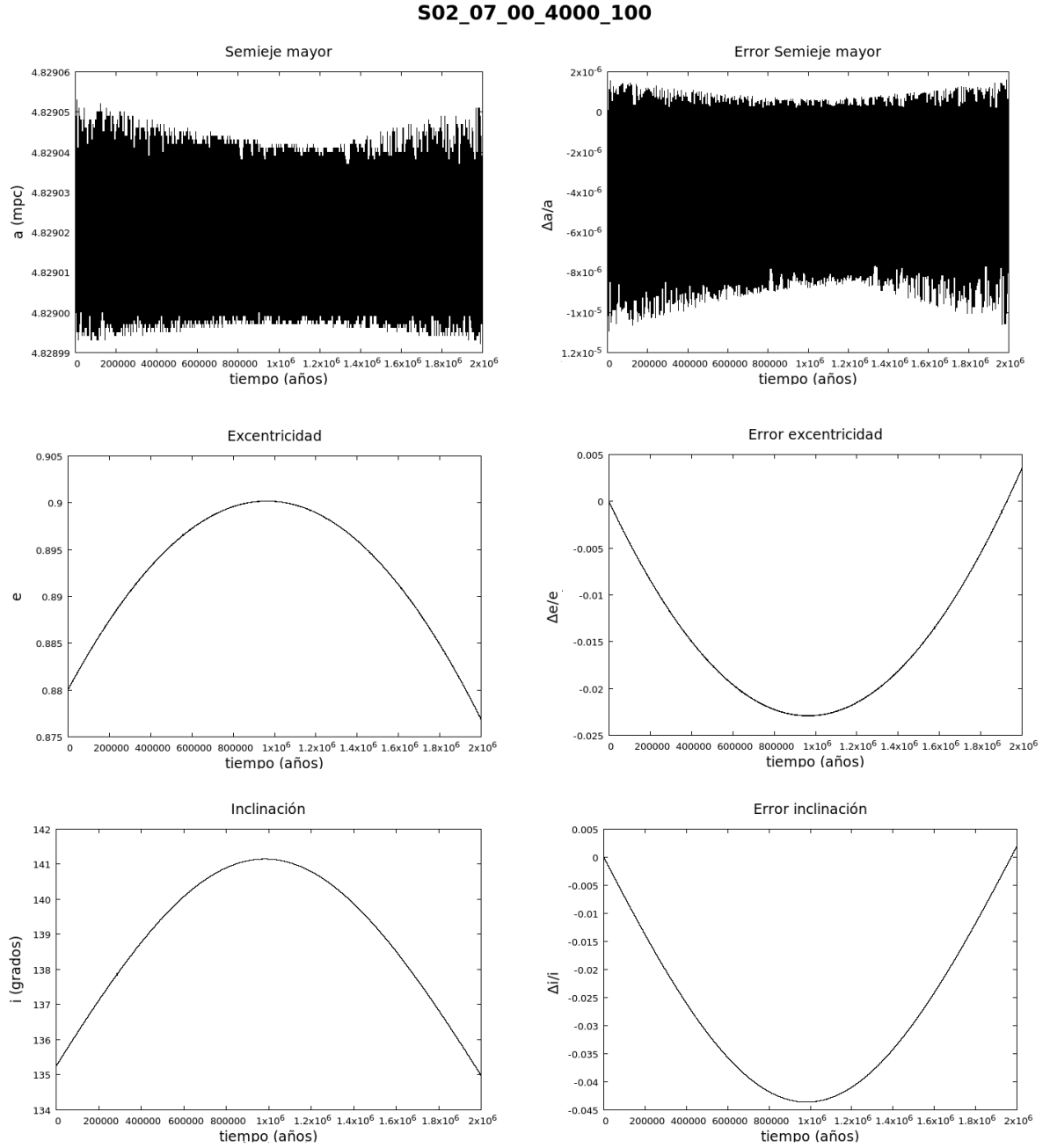


Figura 5.109: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$

S02_07_00_4000_300

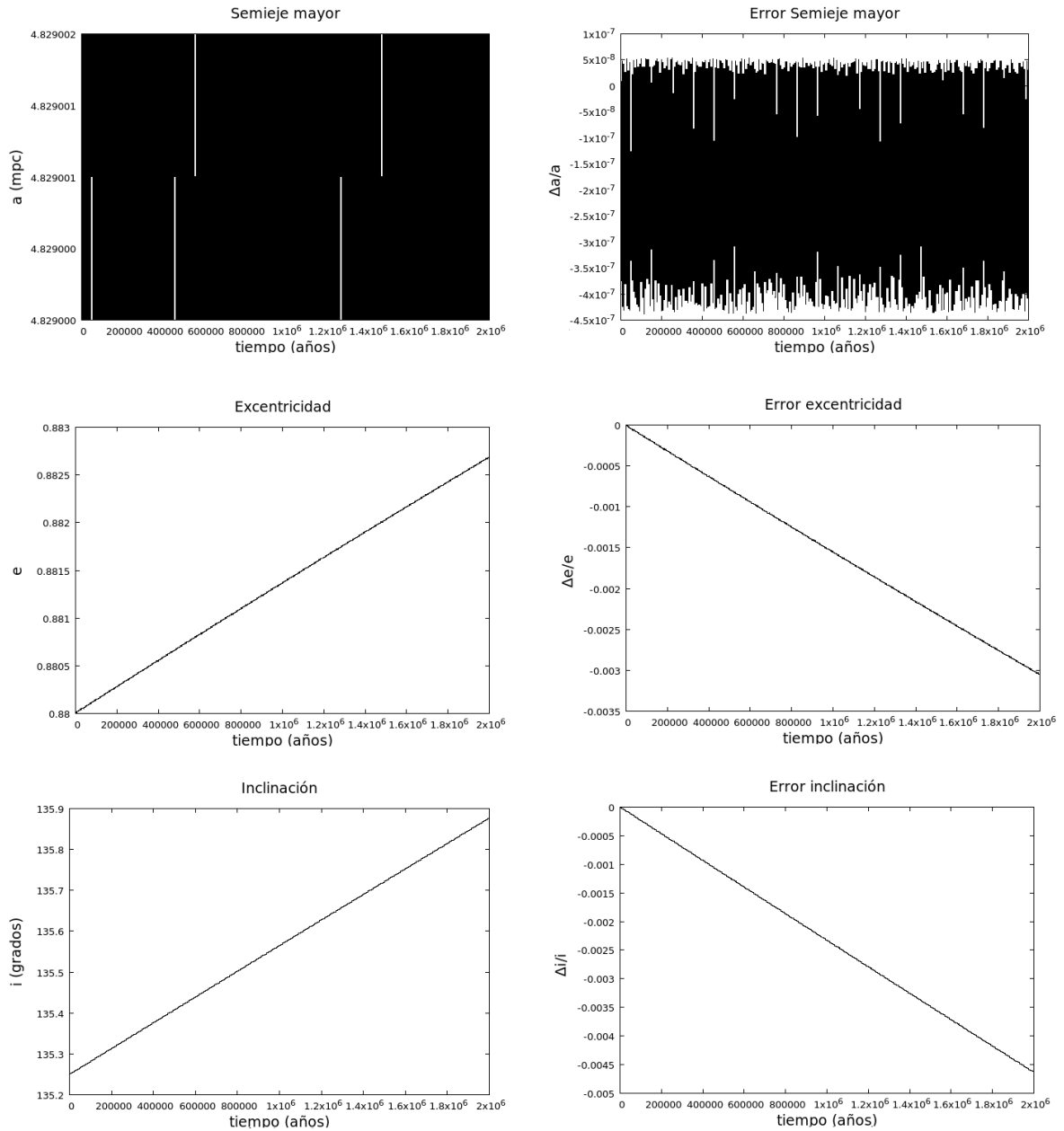


Figura 5.110: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$

Excentricidad IMBH $e = 0,7$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 45^\circ$

S02_07_45_4000_003

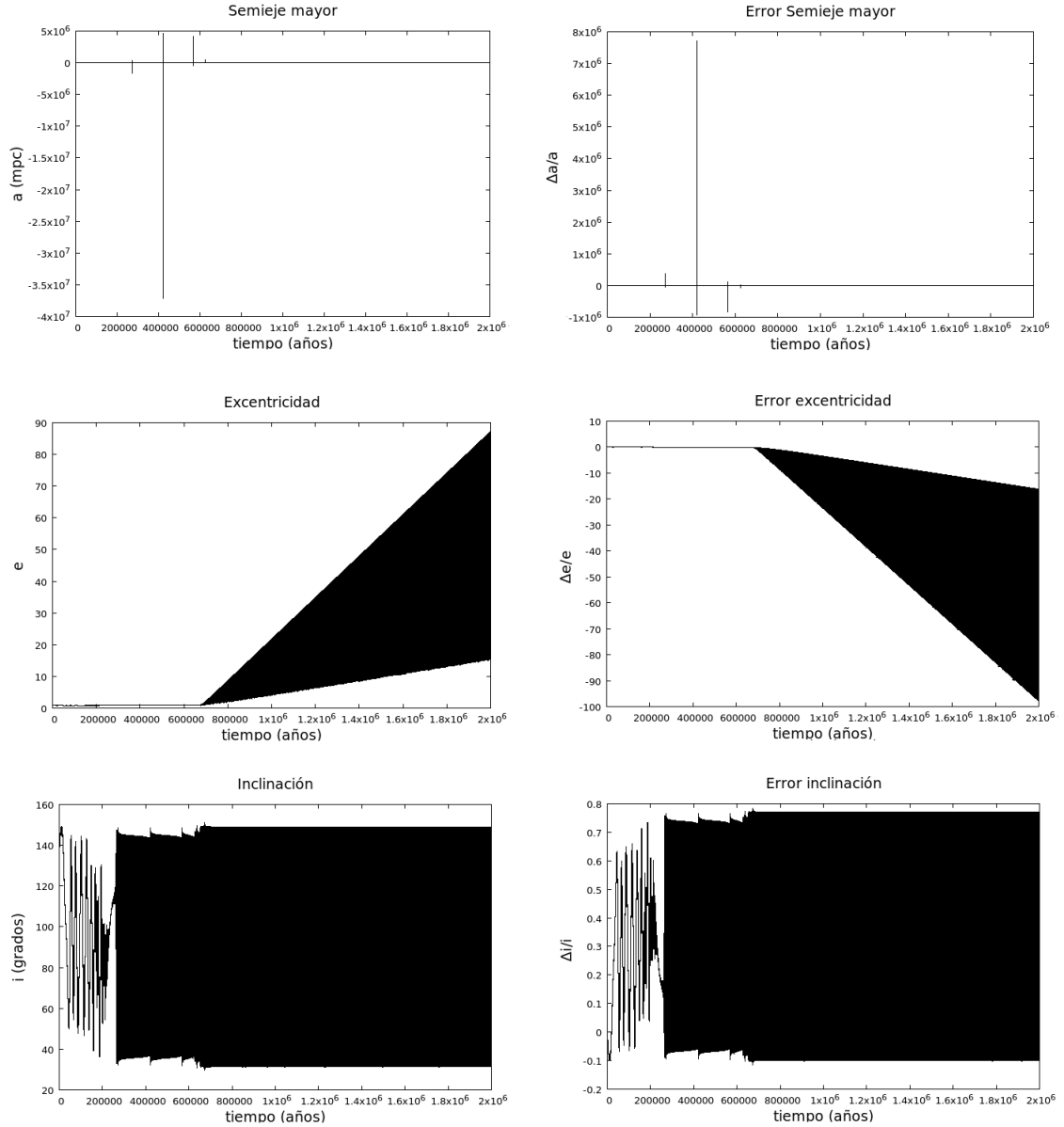


Figura 5.111: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$

S02_07_45_4000_010

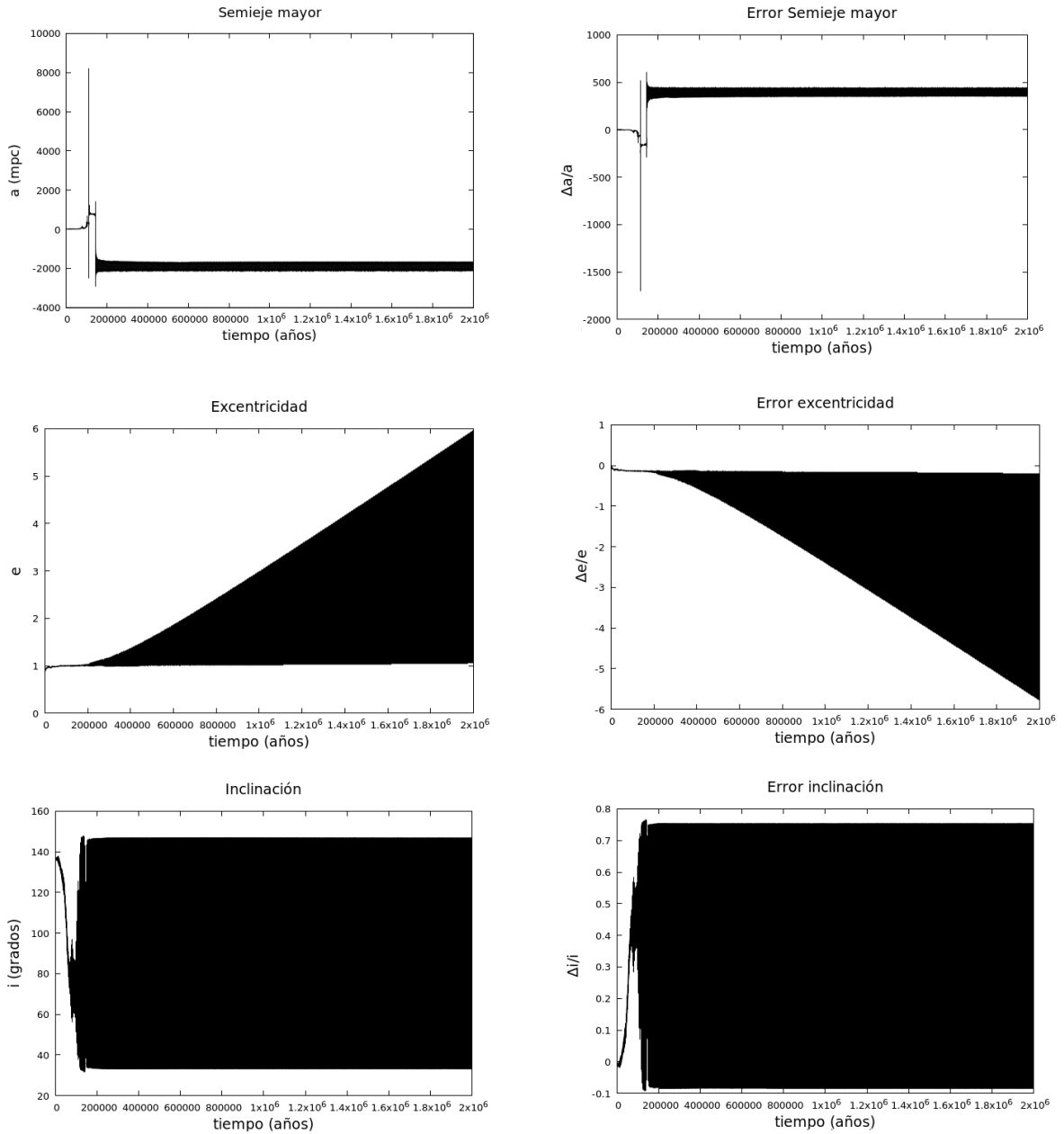


Figura 5.112: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

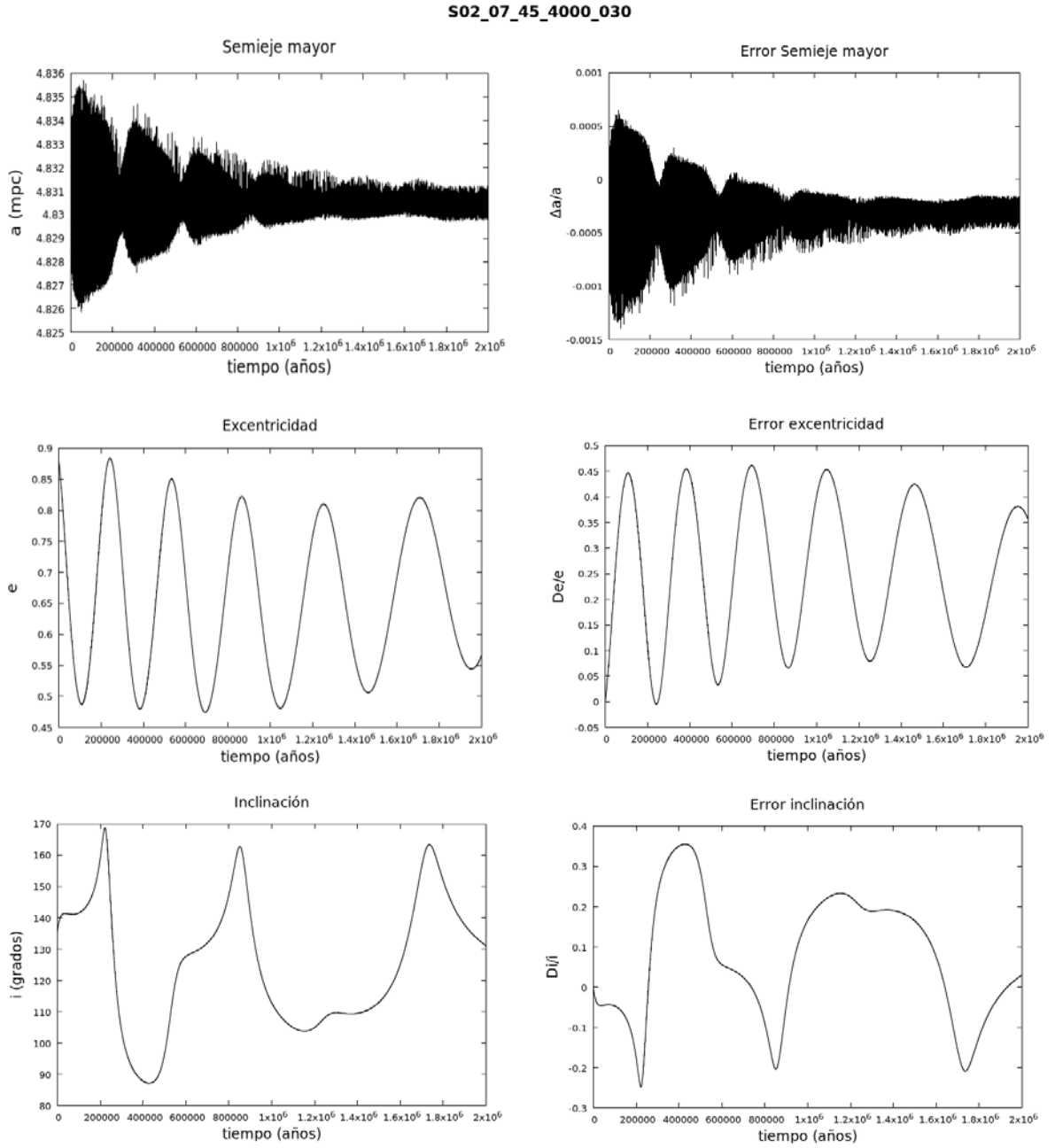


Figura 5.113: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$

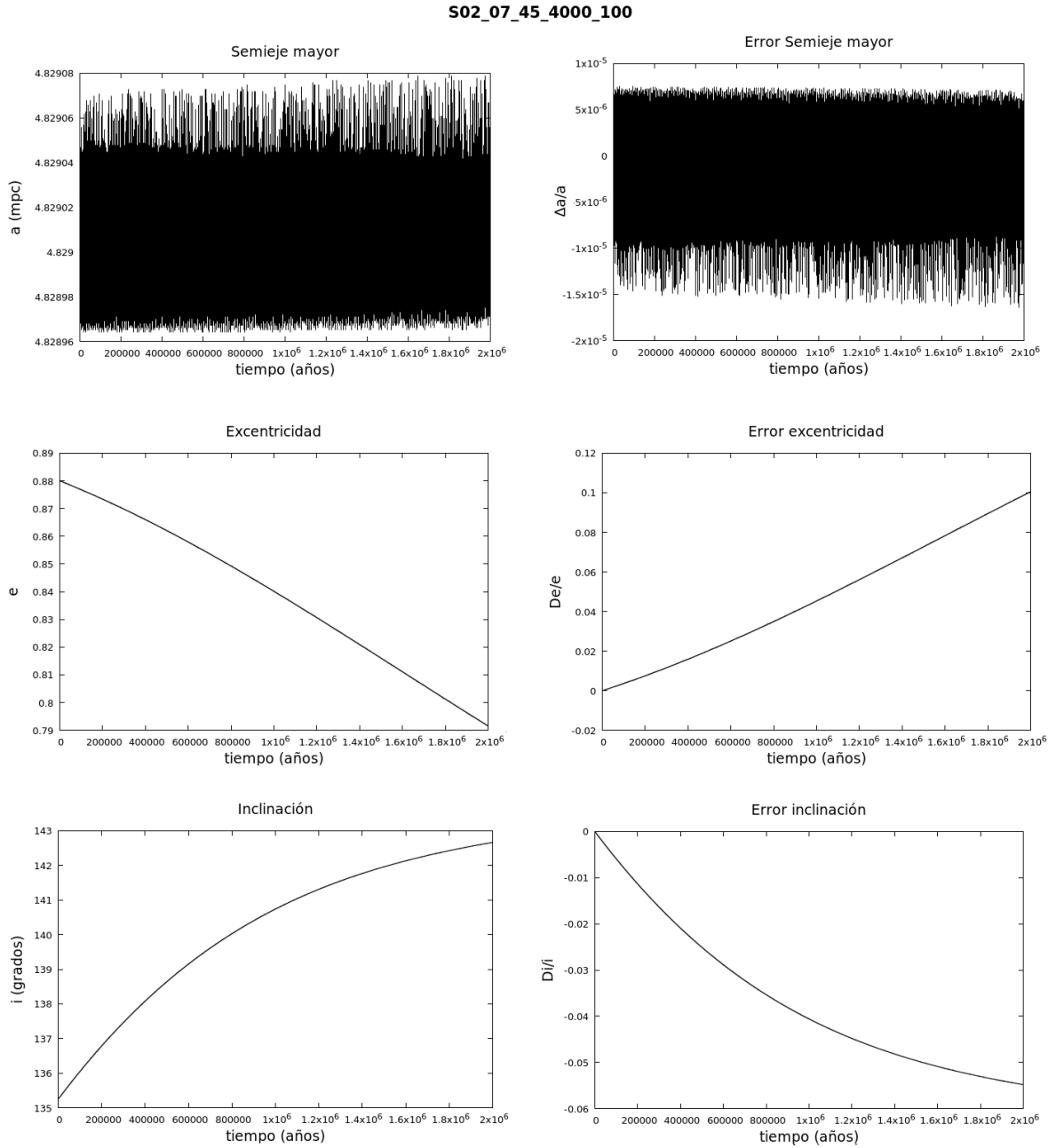


Figura 5.114: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$

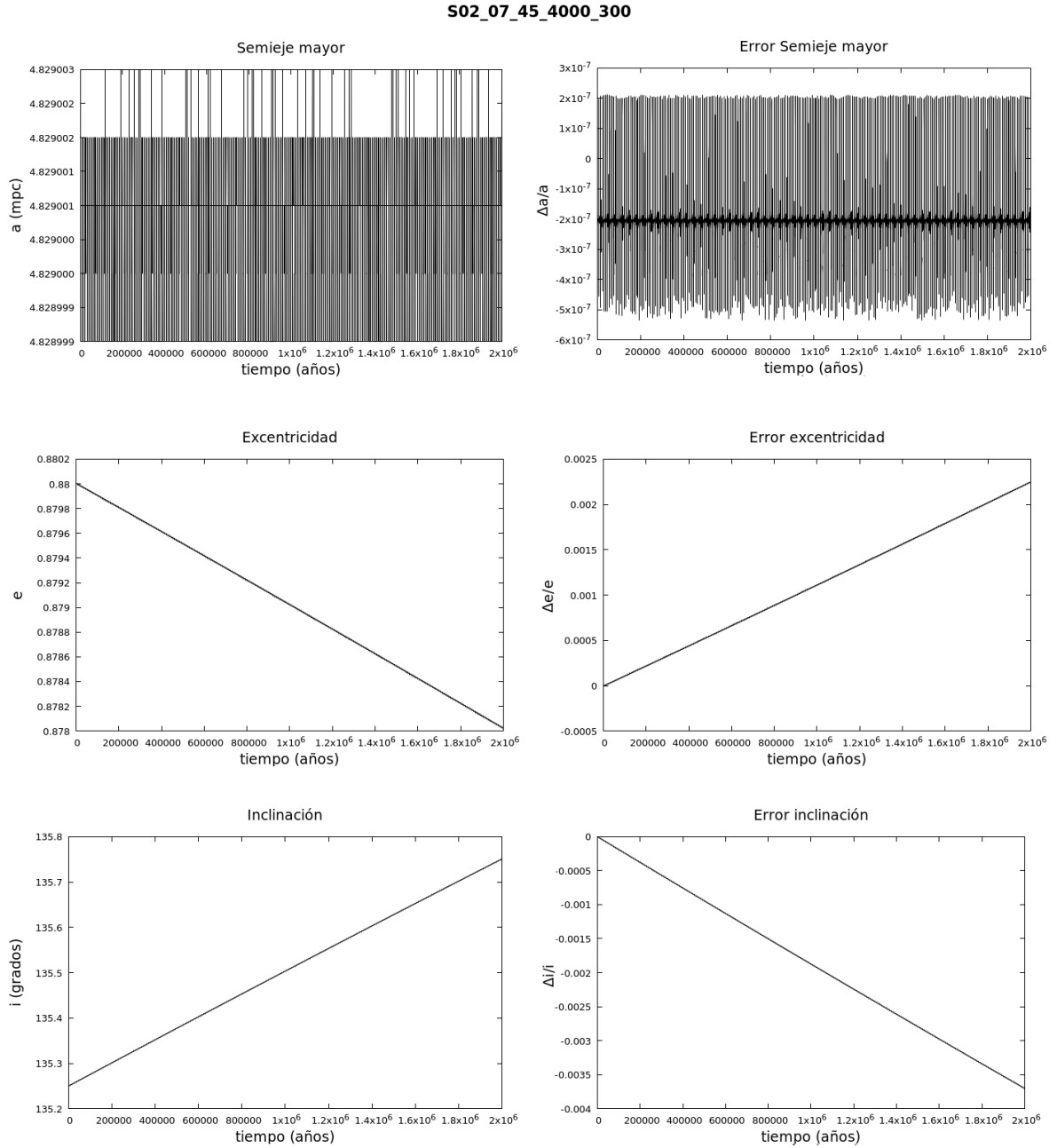


Figura 5.115: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$

Excentricidad IMBH $e = 0,7$; Ángulo de inclinación IMBH $i = 90^\circ$

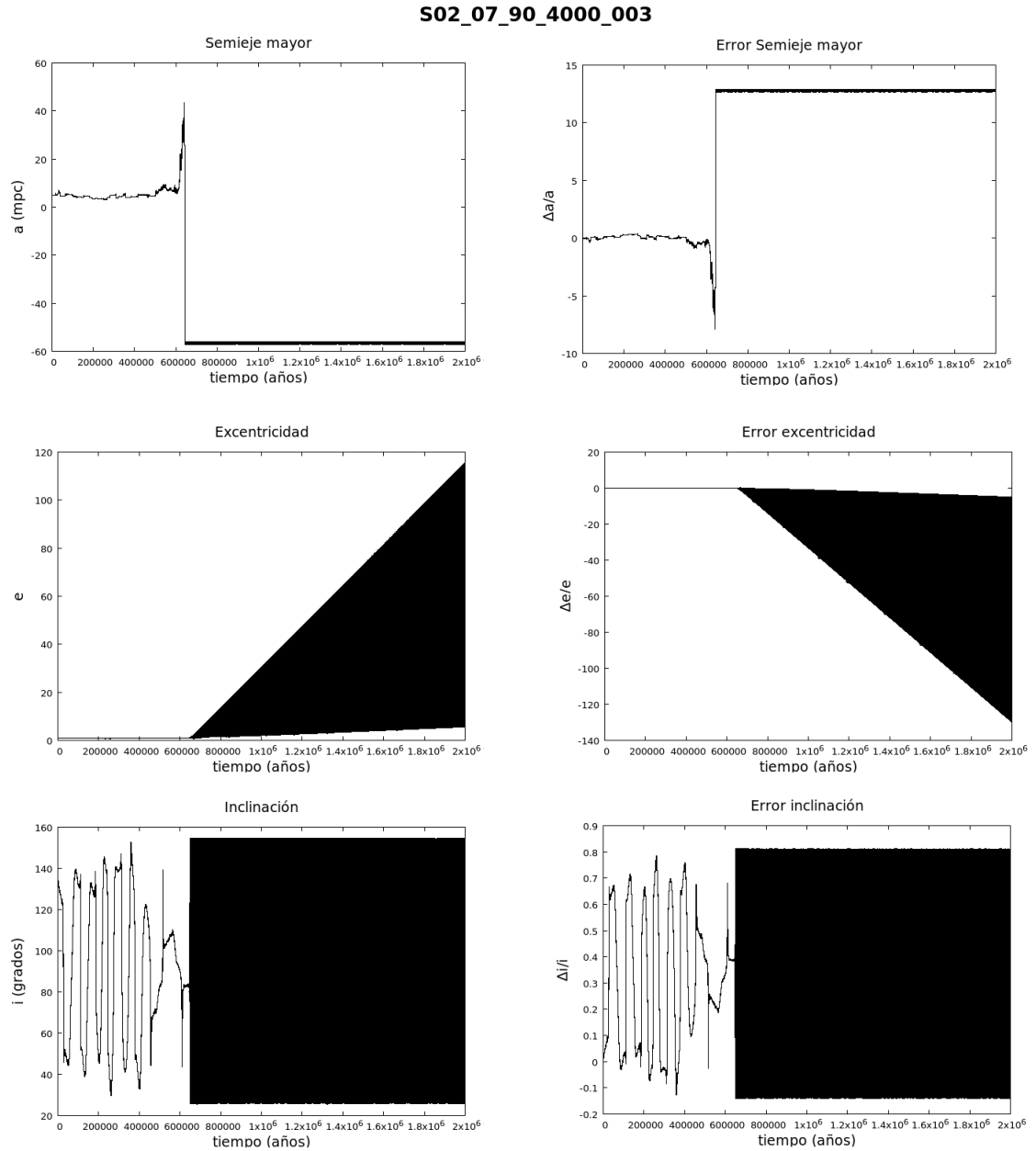


Figura 5.116: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$

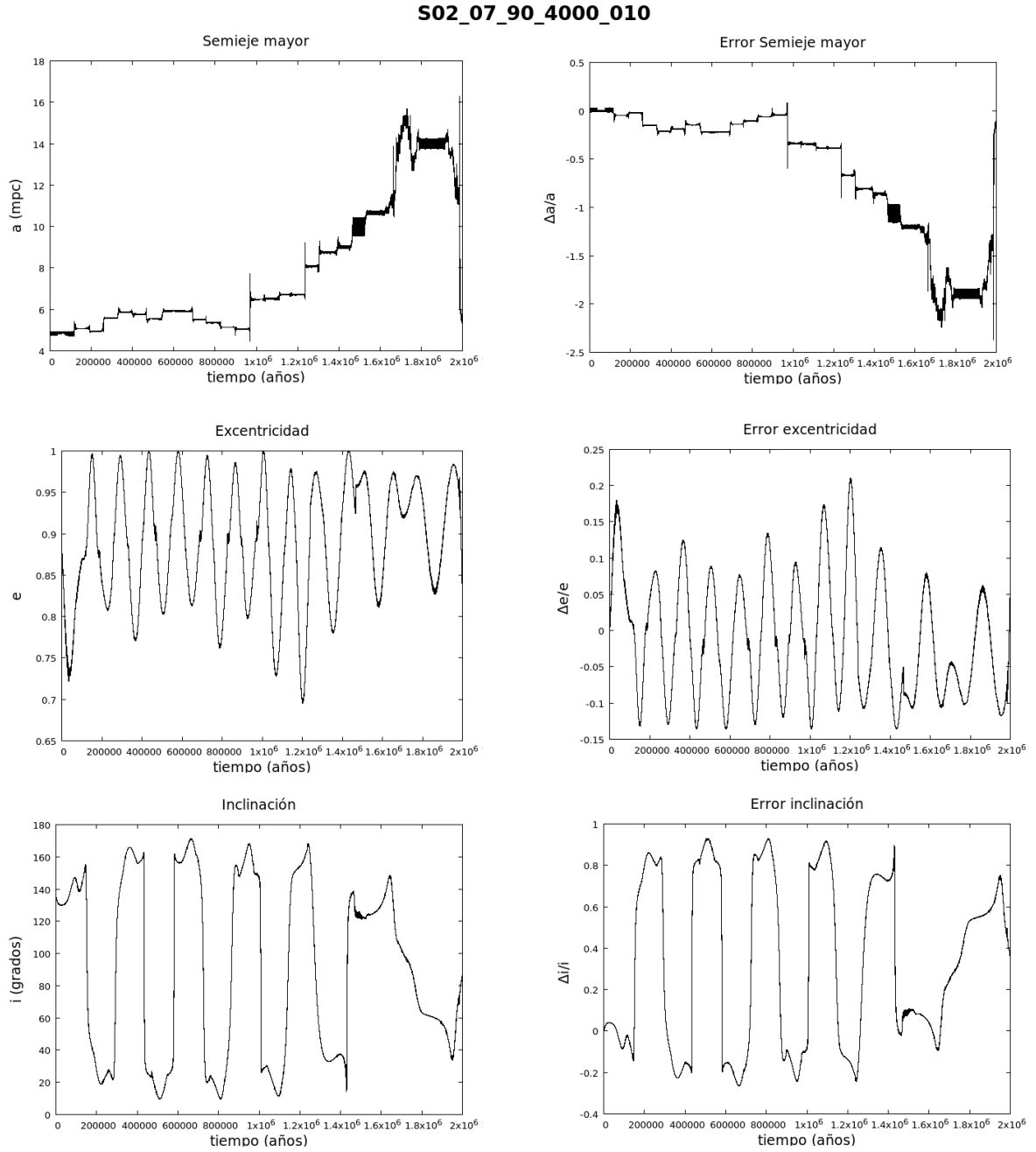


Figura 5.117: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

S02_07_90_4000_030

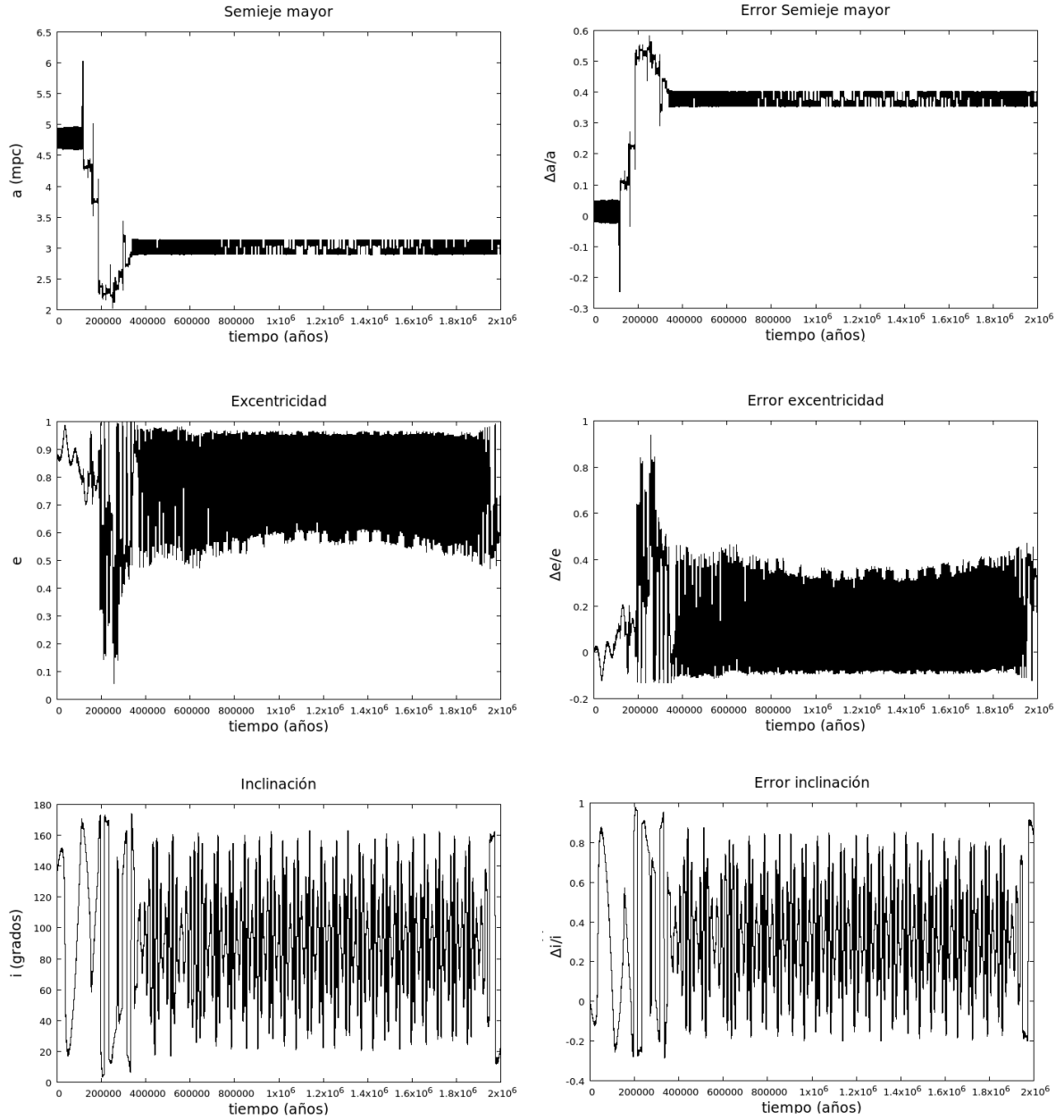


Figura 5.118: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$

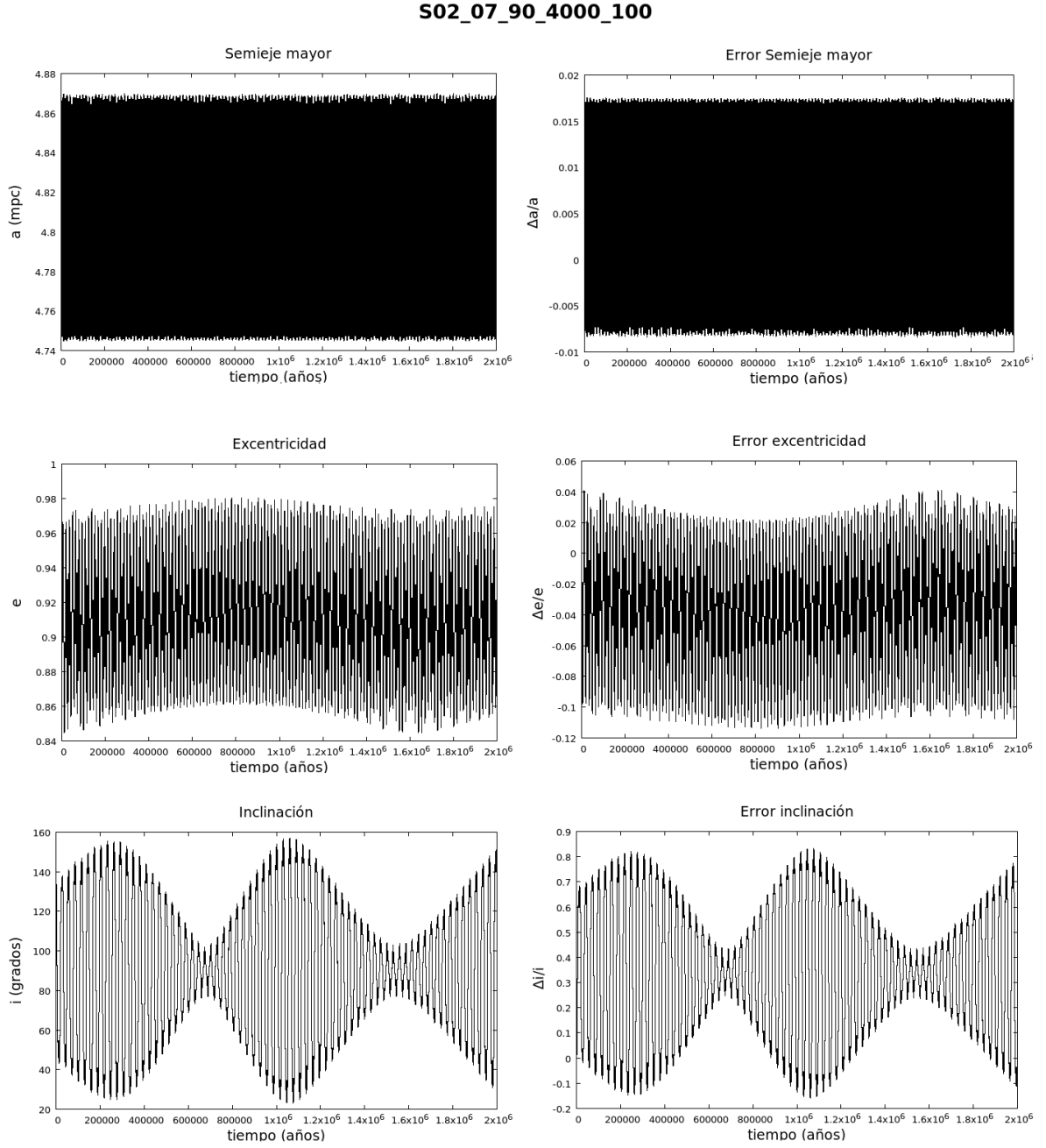


Figura 5.119: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 10\text{mpc}$

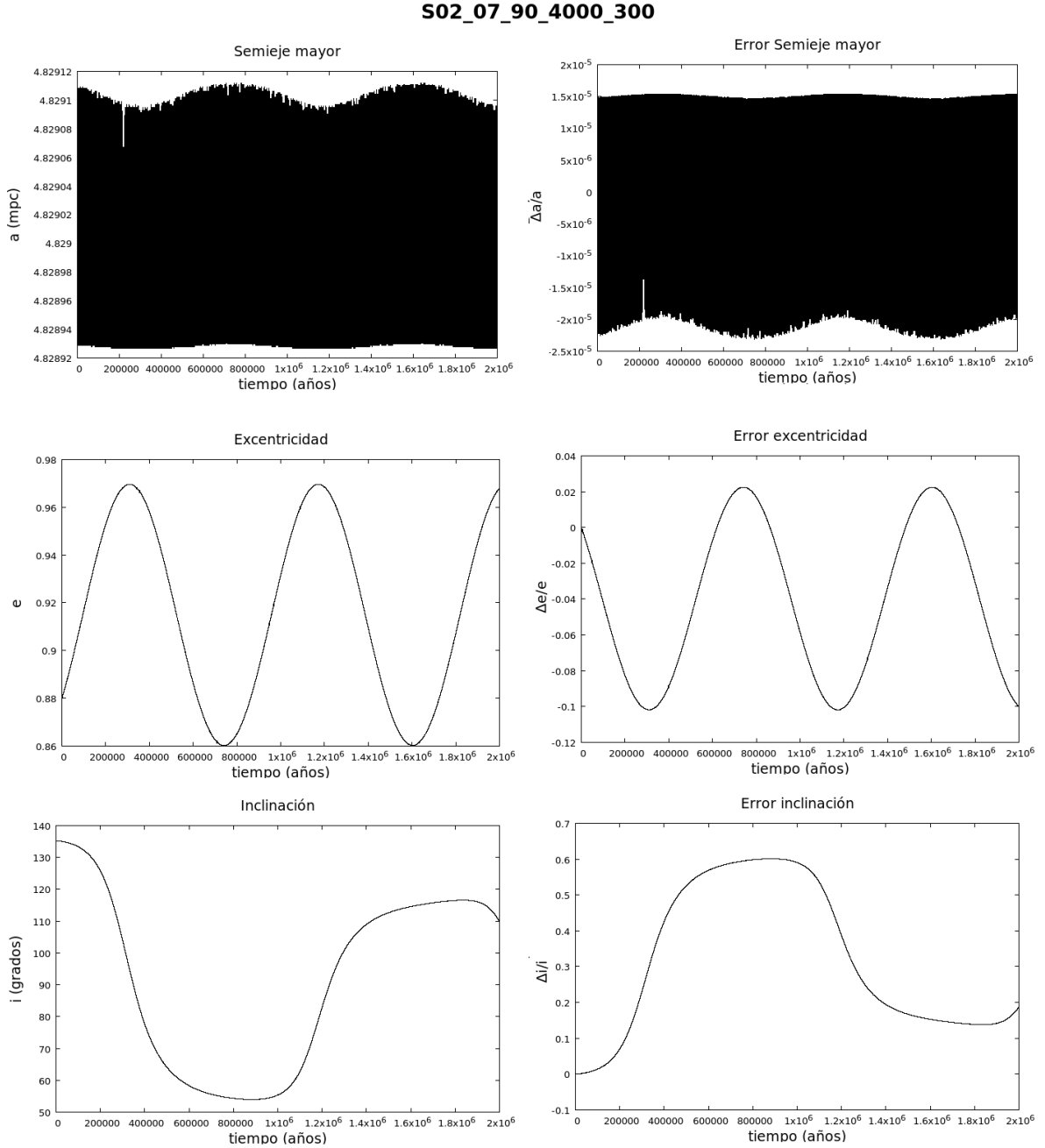


Figura 5.120: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, Ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 30\text{mpc}$

Capítulo 6

Análisis de resultados

Con el fin de cuantificar las perturbaciones debidas al IMBH sobre S2, se hizo el siguiente procedimiento:

- Se calcularon los máximos valores que alcancen los errores de cada parámetro orbital.
- Se graficaron estos valores de las máximas perturbaciones en función de la masa del IMBH.
- Se realizó transformada de Fourier a las señales donde se cree existe mecanismo Kozai.
- Se graficó la frecuencia principal en función de la masa del IMBH.
- Se seleccionaron aquellas simulaciones donde existe escape de órbitas.

Perturbación debida a órbitas internas

Perturbación sobre el semieje mayor

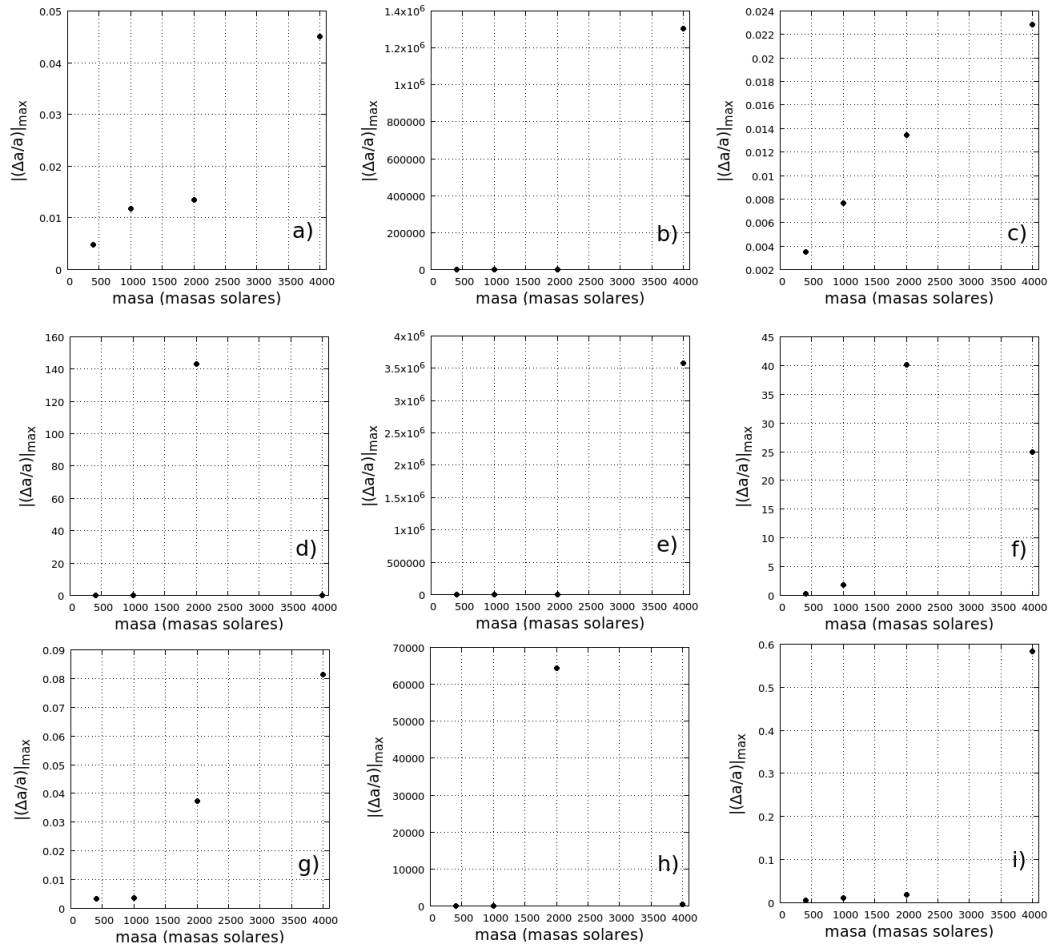


Figura 6.1: a) $e = 0, i = 0, a = 0,3\text{ mpc}$, b) $e = 0, i = 0, a = 1\text{ mpc}$, c) $e = 0, i = 0, a = 3\text{ mpc}$, d) $e = 0, i = 45, a = 0,3\text{ mpc}$, e) $e = 0, i = 45, a = 1\text{ mpc}$, f) $e = 0, i = 45, a = 3\text{ mpc}$, g) $e = 0, i = 90, a = 0,3\text{ mpc}$, h) $e = 0, i = 90, a = 1\text{ mpc}$, i) $e = 0, i = 90, a = 3\text{ mpc}$

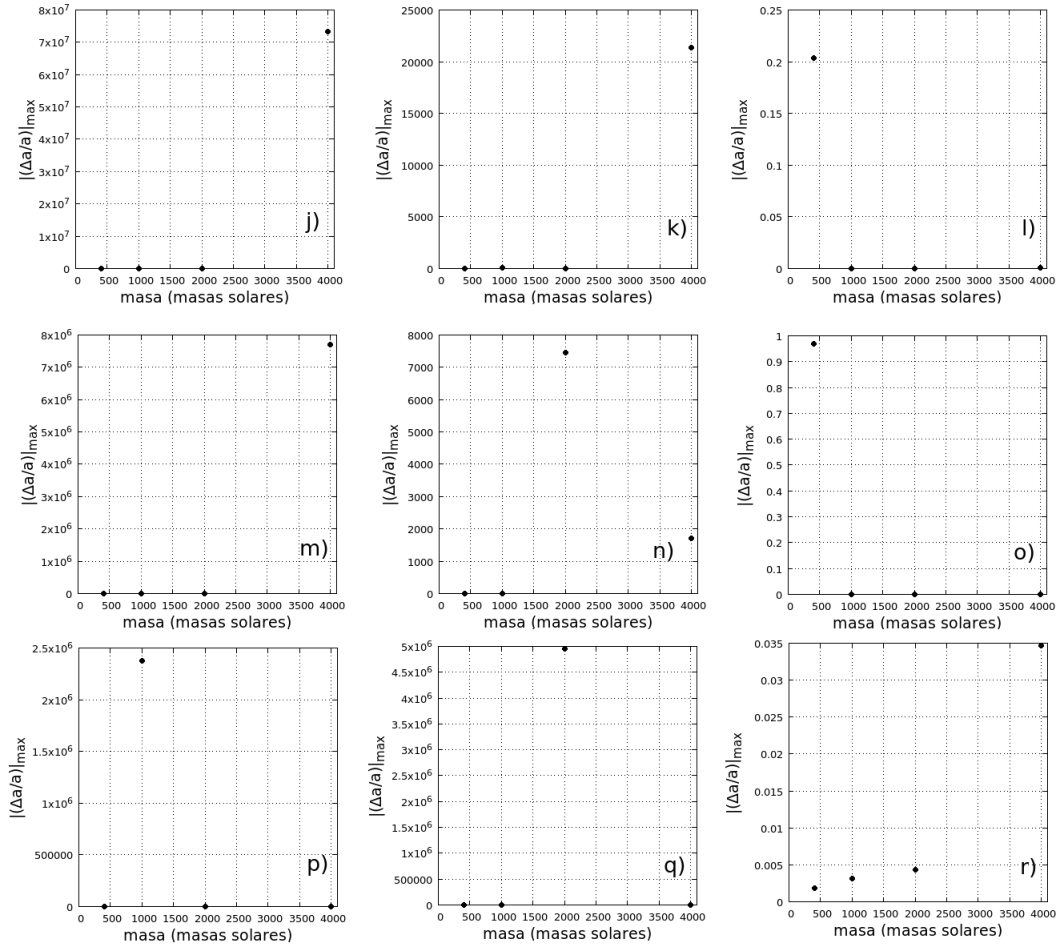


Figura 6.2: j) $e = 0,7, i = 0, a = 0,3mpc$, k) $e = 0,7, i = 0, a = 1mpc$, l) $e = 0,7, i = 0, a = 3mpc$, m) $e = 0,7, i = 45, a = 0,3mpc$, n) $e = 0,7, i = 45, a = 1mpc$, o) $e = 0,7, i = 45, a = 3mpc$, p) $e = 0,7, i = 90, a = 0,3mpc$, q) $e = 0,7, i = 90, a = 1mpc$, r) $e = 0,7, i = 90, a = 3mpc$

Perturbación sobre la excentricidad

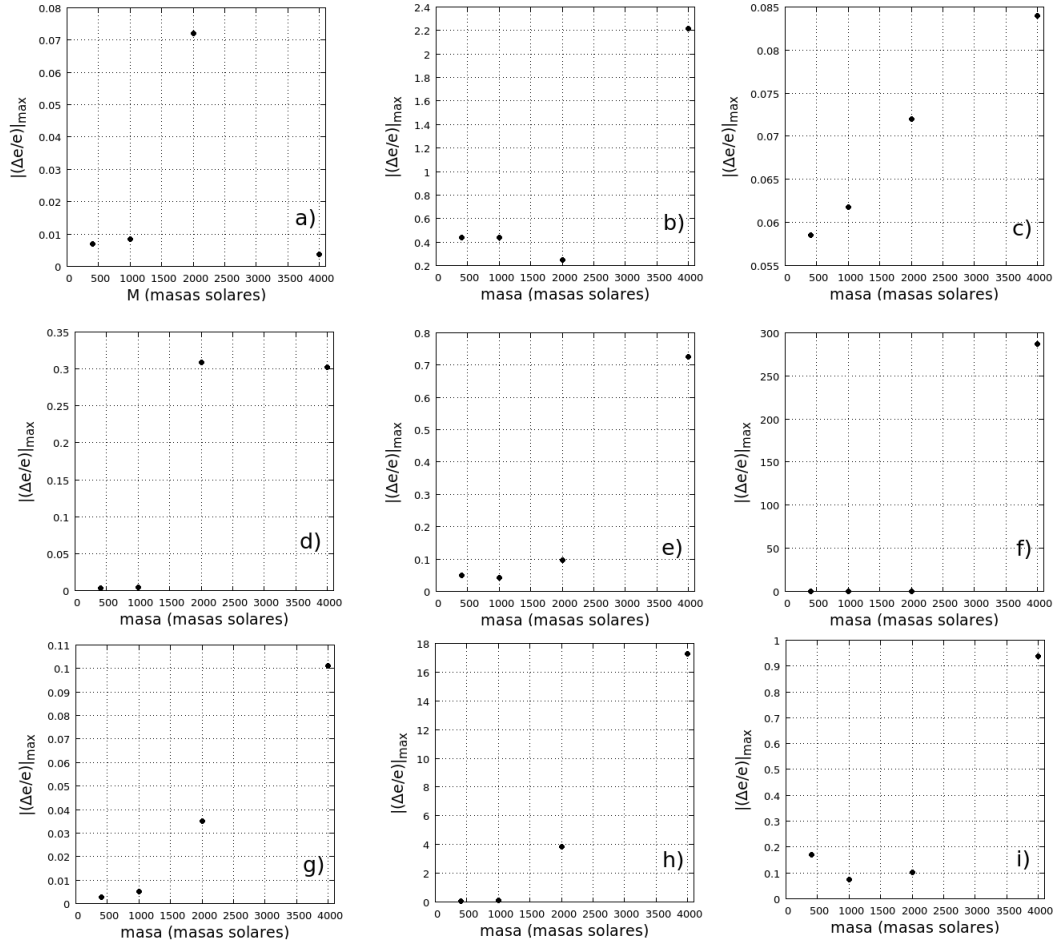


Figura 6.3: a) $e = 0, i = 0, a = 0,3\text{pc}$, b) $e = 0, i = 0, a = 1\text{pc}$, c) $e = 0, i = 0, a = 3\text{pc}$, d) $e = 0, i = 45, a = 0,3\text{pc}$, e) $e = 0, i = 45, a = 1\text{pc}$, f) $e = 0, i = 45, a = 3\text{pc}$, g) $e = 0, i = 90, a = 0,3\text{pc}$, h) $e = 0, i = 90, a = 1\text{pc}$, i) $e = 0, i = 90, a = 3\text{pc}$

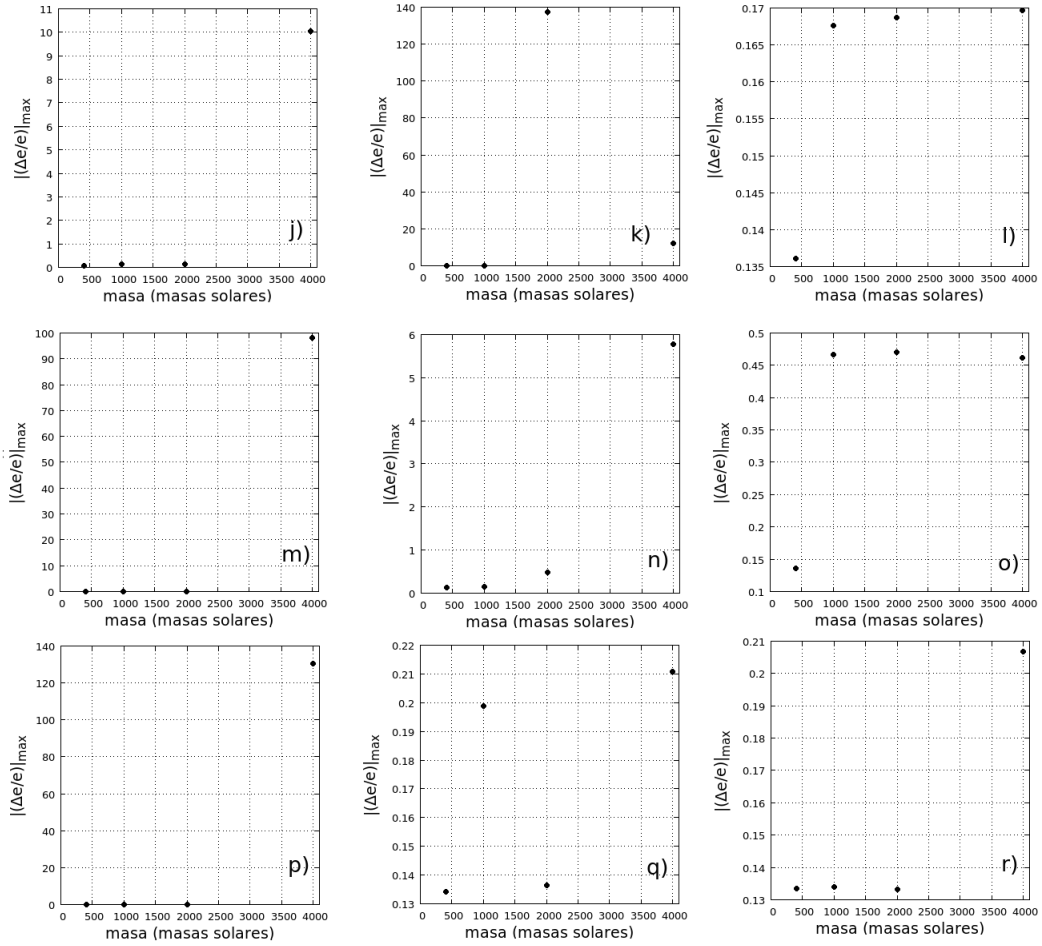


Figura 6.4: j) $e = 0,7, i = 0, a = 0,3mpc$, k) $e = 0,7, i = 0, a = 1mpc$, l) $e = 0,7, i = 0, a = 3mpc$, m) $e = 0,7, i = 45, a = 0,3mpc$, n) $e = 0,7, i = 45, a = 1mpc$, o) $e = 0,7, i = 45, a = 3mpc$, p) $e = 0,7, i = 90, a = 0,3mpc$, q) $e = 0,7, i = 90, a = 1mpc$, r) $e = 0,7, i = 90, a = 3mpc$

Perturbación sobre la inclinación

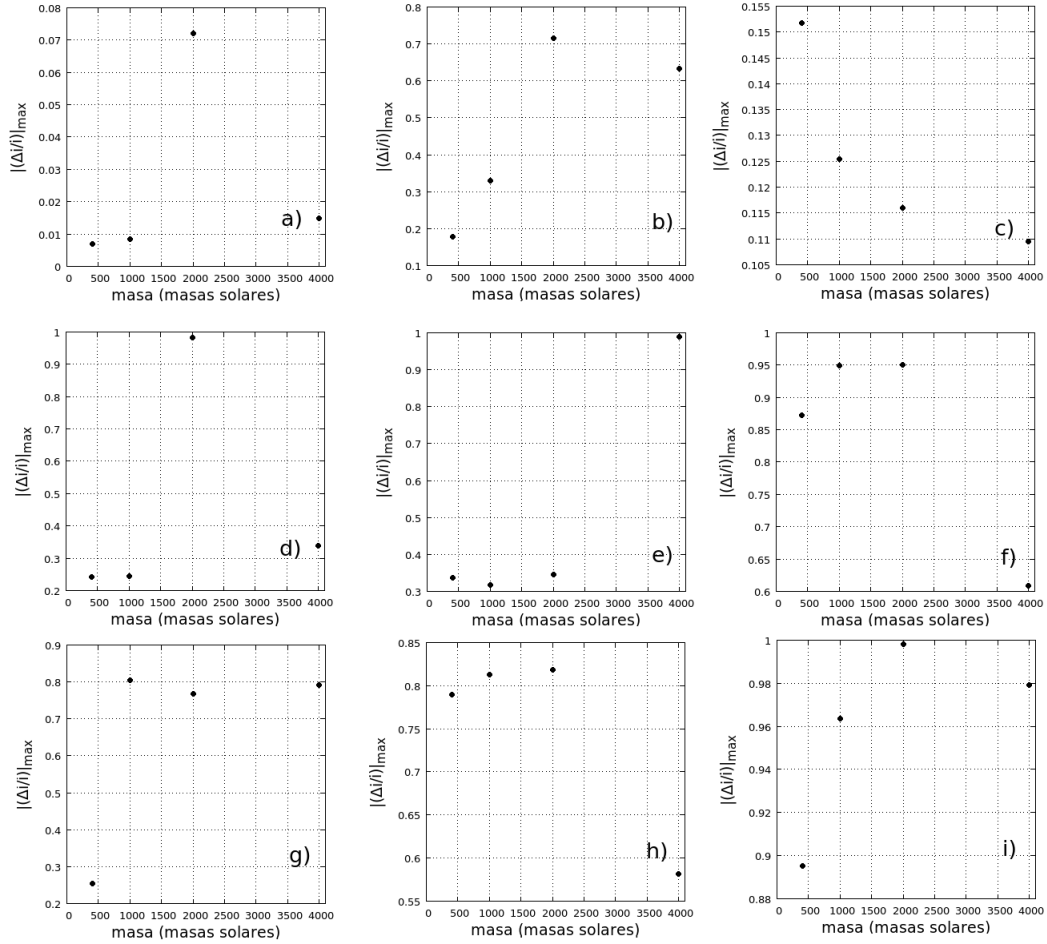


Figura 6.5: a) $e = 0, i = 0, a = 0,3\text{ mpc}$, b) $e = 0, i = 0, a = 1\text{ mpc}$, c) $e = 0, i = 0, a = 3\text{ mpc}$, d) $e = 0, i = 45, a = 0,3\text{ mpc}$, e) $e = 0, i = 45, a = 1\text{ mpc}$, f) $e = 0, i = 45, a = 3\text{ mpc}$, g) $e = 0, i = 90, a = 0,3\text{ mpc}$, h) $e = 0, i = 90, a = 1\text{ mpc}$, i) $e = 0, i = 90, a = 3\text{ mpc}$

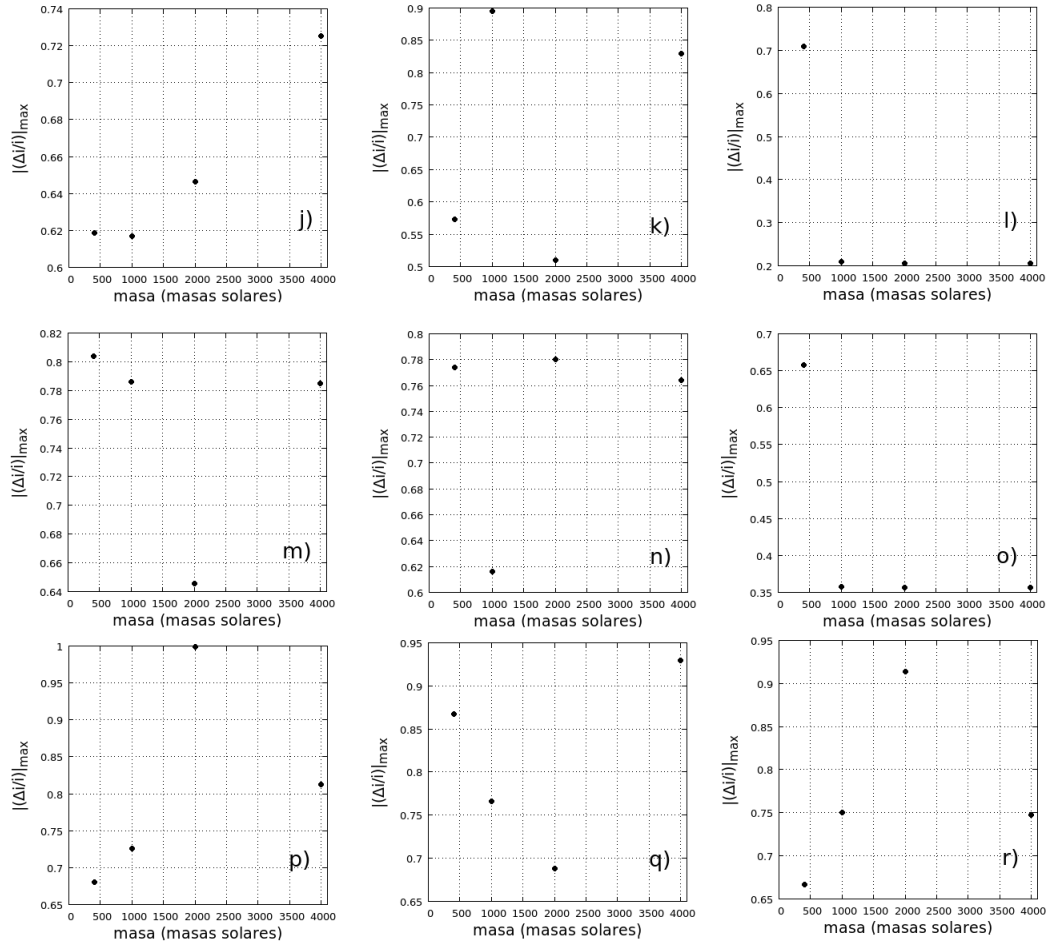


Figura 6.6: j) $e = 0,7, i = 0, a = 0,3mpc$, k) $e = 0,7, i = 0, a = 1mpc$, l) $e = 0,7, i = 0, a = 3mpc$, m) $e = 0,7, i = 45, a = 0,3mpc$, n) $e = 0,7, i = 45, a = 1mpc$, o) $e = 0,7, i = 45, a = 3mpc$, p) $e = 0,7, i = 90, a = 0,3mpc$, q) $e = 0,7, i = 90, a = 1mpc$, r) $e = 0,7, i = 90, a = 3mpc$

Perturbación debida a órbitas Externas

Perturbación sobre el semieje mayor

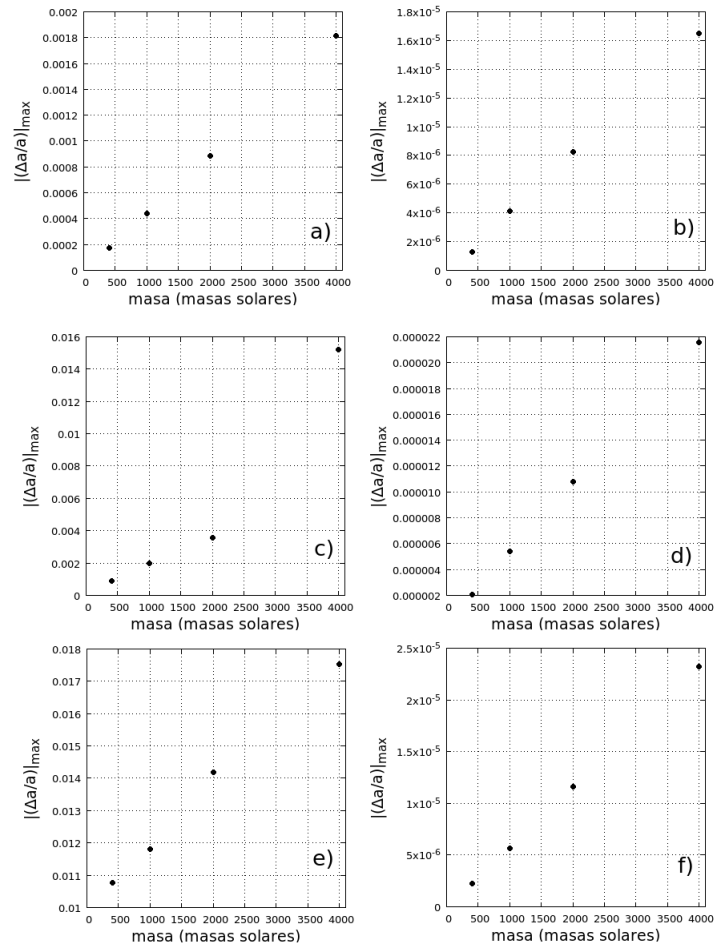


Figura 6.7: a) $e = 0, i = 0, a = 10\text{ mpc}$, b) $e = 0, i = 0, a = 30\text{ mpc}$, c) $e = 0, i = 45, a = 10\text{ mpc}$, d) $e = 0, i = 45, a = 30\text{ mpc}$, e) $e = 0, i = 90, a = 10\text{ mpc}$, f) $e = 0, i = 90, a = 30\text{ mpc}$

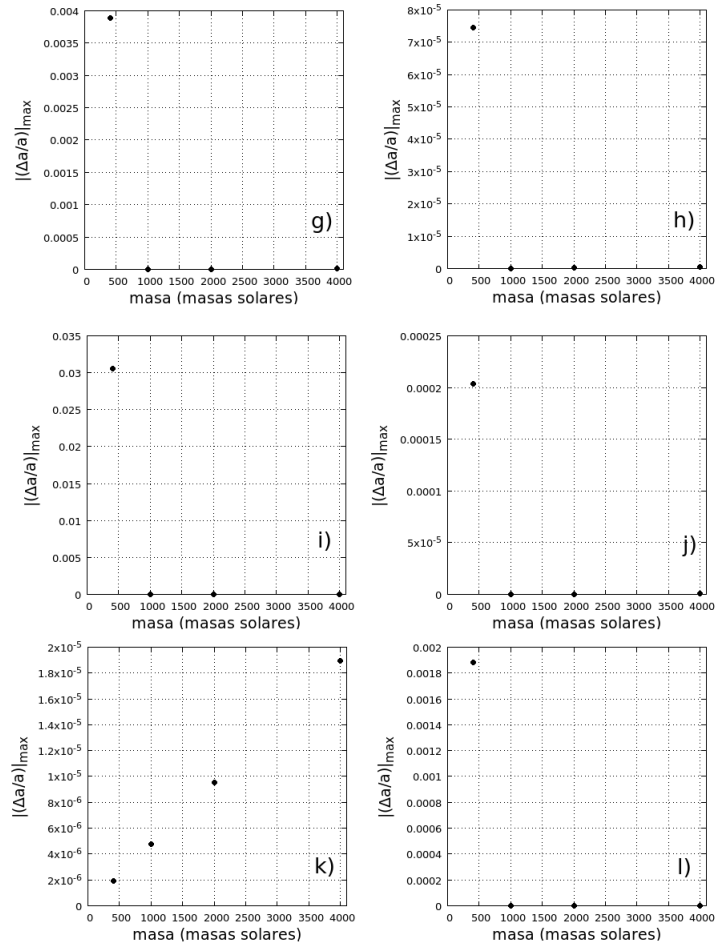


Figura 6.8: g) $e = 0,7, i = 0, a = 10\text{mpc}$, h) $e = 0,7, i = 0, a = 30\text{mpc}$, i) $e = 0,7, i = 45, a = 10\text{mpc}$, j) $e = 0,7, i = 45, a = 30\text{mpc}$, k) $e = 0,7, i = 90, a = 10\text{mpc}$, l) $e = 0,7, i = 90, a = 30\text{mpc}$

Perturbación sobre la excentricidad

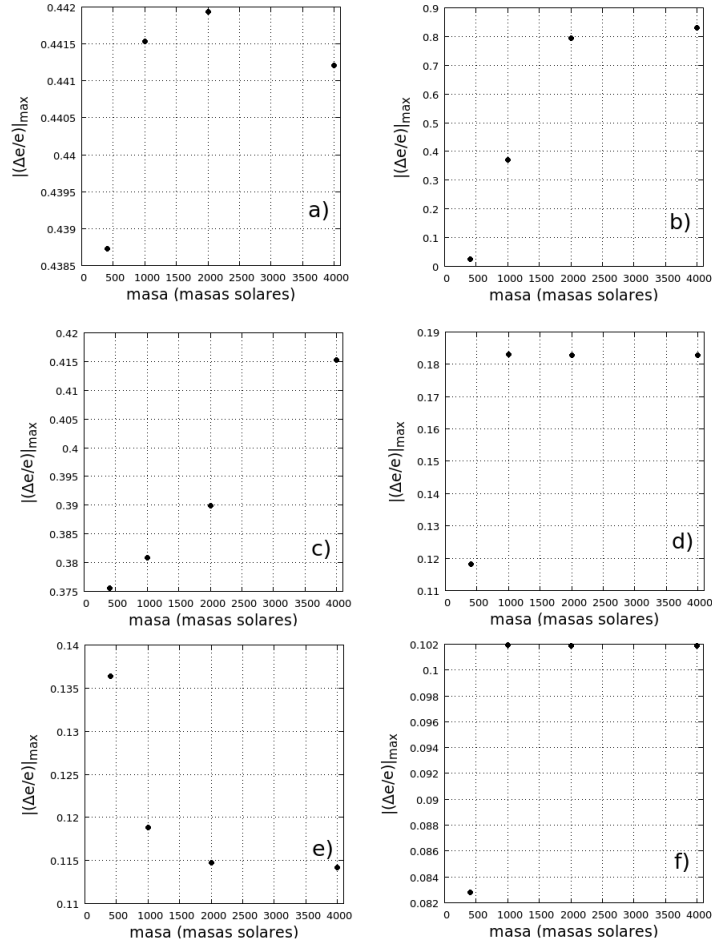


Figura 6.9: a) $e = 0, i = 0, a = 10\text{mpc}$, b) $e = 0, i = 0, a = 30\text{mpc}$, c) $e = 0, i = 45, a = 10\text{mpc}$, d) $e = 0, i = 45, a = 30\text{mpc}$, e) $e = 0, i = 90, a = 10\text{mpc}$, f) $e = 0, i = 90, a = 30\text{mpc}$

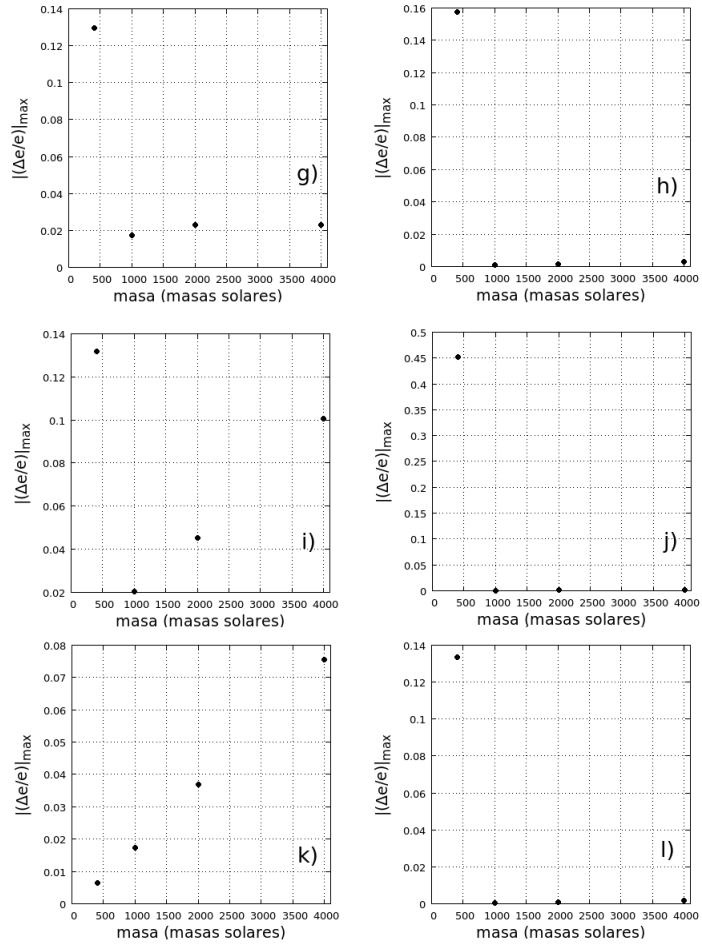


Figura 6.10: g) $e = 0,7, i = 0, a = 10mpc$, h) $e = 0,7, i = 0, a = 30mpc$, i) $e = 0,7, i = 45, a = 10mpc$, j) $e = 0,7, i = 45, a = 30mpc$, k) $e = 0,7, i = 90, a = 10mpc$, l) $e = 0,7, i = 90, a = 30mpc$

Perturbación sobre la inclinación

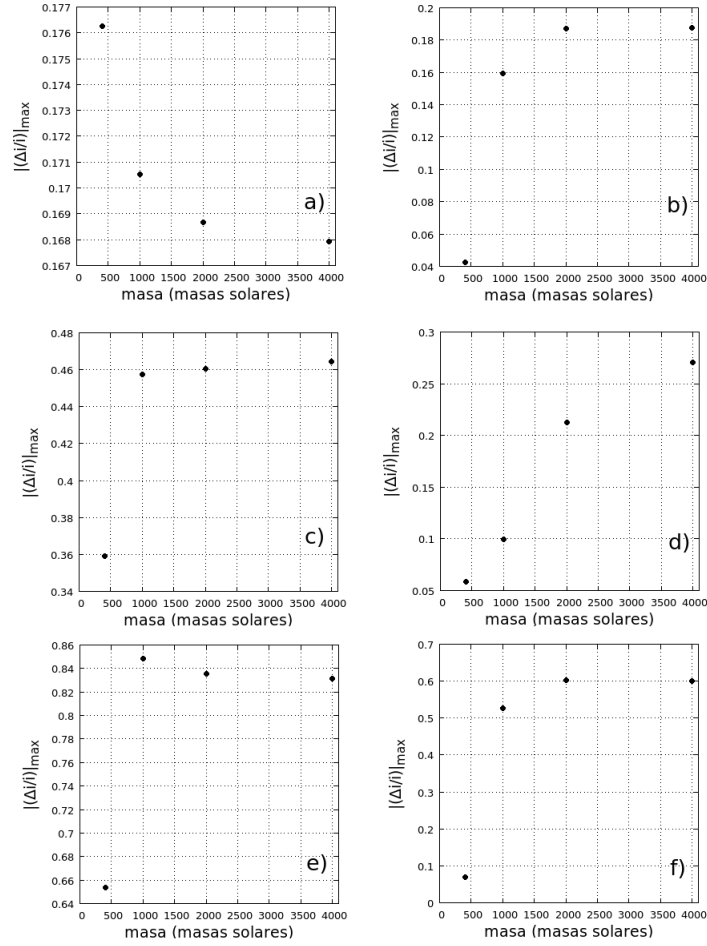


Figura 6.11: a) $e = 0,0, i = 0, a = 10\text{mpc}$, b) $e = 0,0, i = 0, a = 30\text{mpc}$, c) $e = 0,0, i = 45, a = 10\text{mpc}$, d) $e = 0,0, i = 45, a = 30\text{mpc}$, e) $e = 0,0, i = 90, a = 10\text{mpc}$, f) $e = 0,0, i = 90, a = 30\text{mpc}$

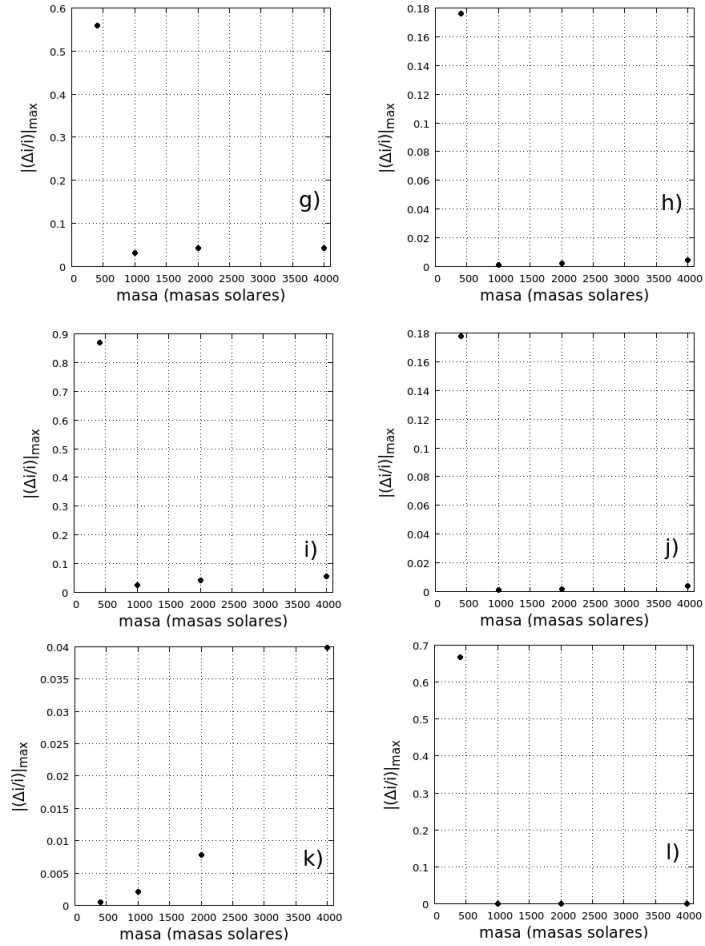


Figura 6.12: g) $e = 0,7, i = 0, a = 10\text{mpc}$, h) $e = 0,7, i = 0, a = 30\text{mpc}$, i) $e = 0,7, i = 45, a = 10\text{mpc}$, j) $e = 0,7, i = 45, a = 30\text{mpc}$, k) $e = 0,7, i = 90, a = 10\text{mpc}$, l) $e = 0,7, i = 90, a = 30\text{mpc}$

Análisis del mecanismo Kozai

En esta sección se estudia el posible mecanismo Kozai debido a la perturbación externa del agujero negro de masa intermedia.

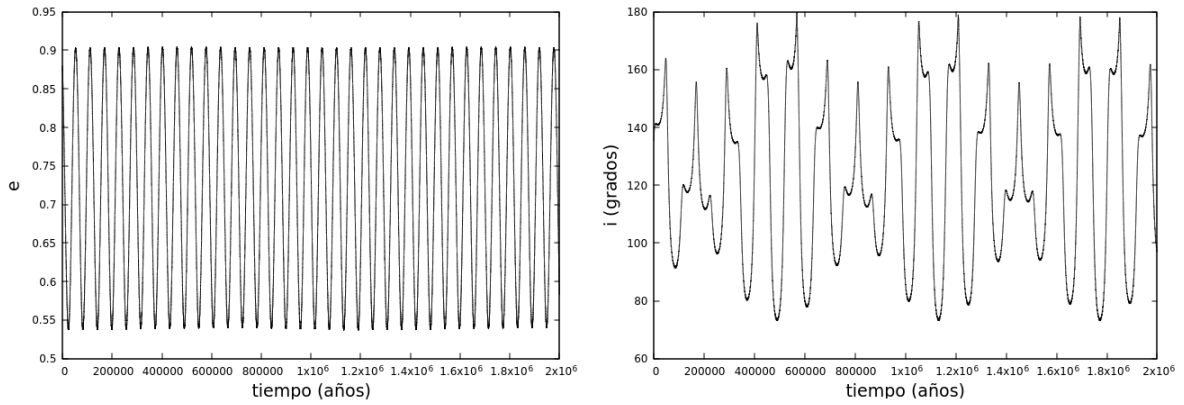


Figura 6.13: $e = 0,0, i = 0,0, a = 10mpc$

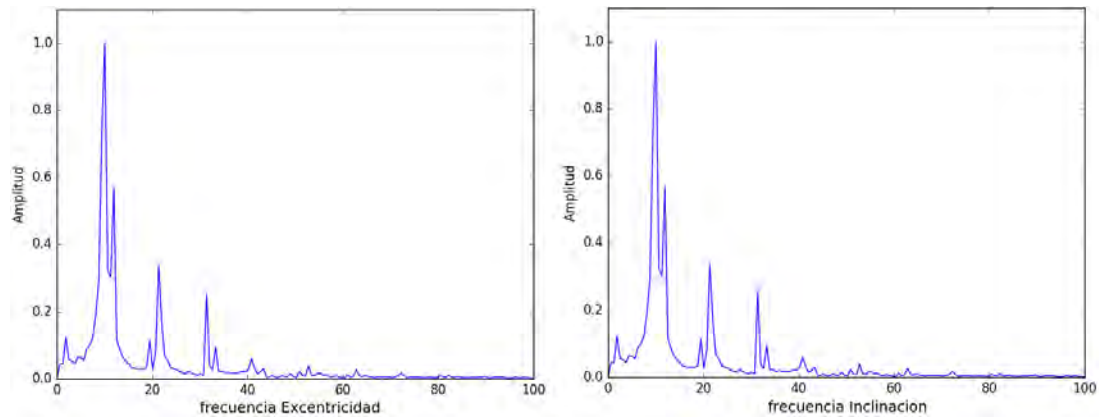


Figura 6.14: *espectros: Excentricidad e inclinación*

Para mostrar que nuestros cálculos son correctos se hizo la reconstrucción de las señales a partir de las frecuencias obtenidas con la TF. En la figura 6.15 se muestra la superposición de las señales originales y construidas. En los resultados se observa claramente que la transformada de Fourier esta bien hecha debido a que las señales concuerdan perfectamente con las artificiales.

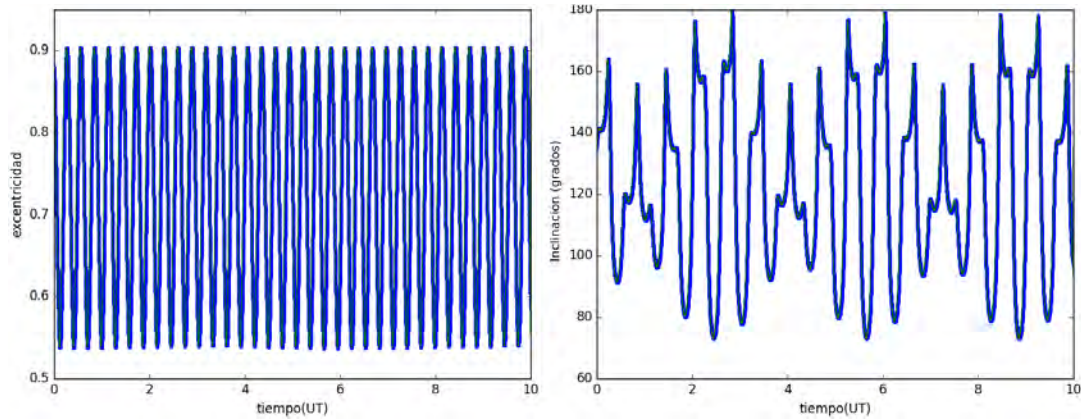


Figura 6.15: señales: Excentricidad e inclinación

Con el fin de corroborar que en realidad las oscilaciones de la excentricidad y la inclinación se deben a mecanismo Kozai, se calculó el coeficiente HK (ecuación 4.1). La teoría del efecto Kozai predice que en la practica esta cantidad oscilará alrededor de un valor constante durante la integración. Claramente la figura 6.16 muestra que efectivamente HK cumple esta condición, lo cual nos confirma que las perturbaciones debidas a la órbita externa cuando la diferencia de inclinaciones es alta son de naturaleza Kozai.

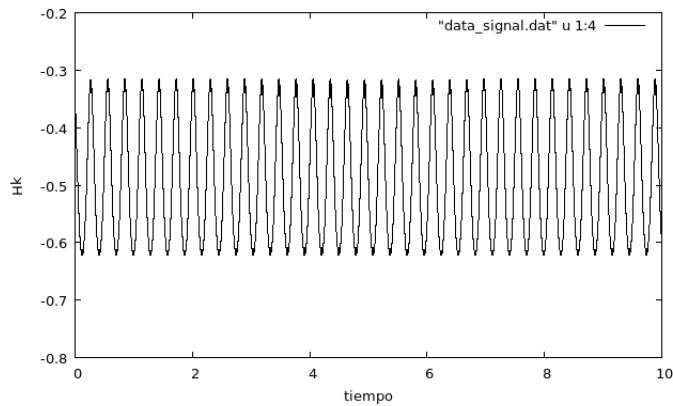


Figura 6.16: señal - coeficiente H_K del efecto Kozai ecuación 4.1

En las simulaciones donde se encontró efecto Kozai se realizaron las transformadas de Fourier para las señales de e e i . A partir de los resultados se encontraron los valores

de las máximas frecuencias de oscilación en cada caso y con el fin de encontrar una correlación se realizaron las gráficas de las máximas frecuencias de oscilación como función de la masa del IMBH. Las figuras 6.17 , 6.18 y 6.19 muestran los resultados

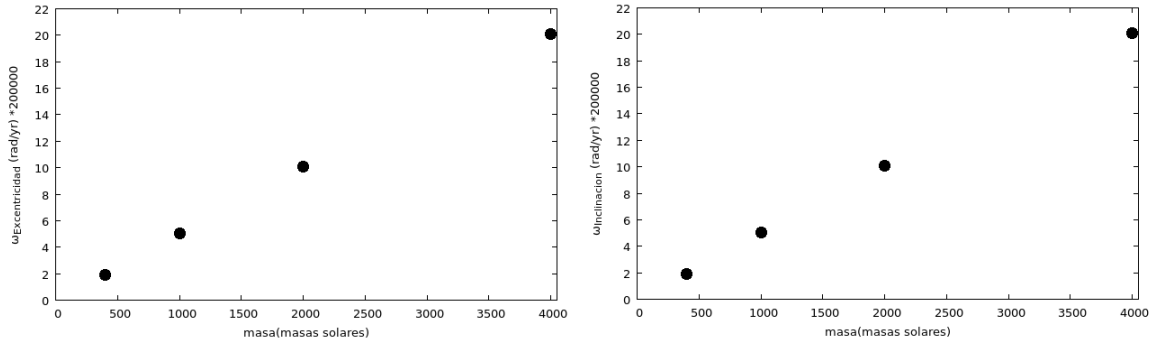


Figura 6.17: *Parámetros orbitales del IMBH: $e = 0,0, i = 0,0, a = 10\text{mpc}$*

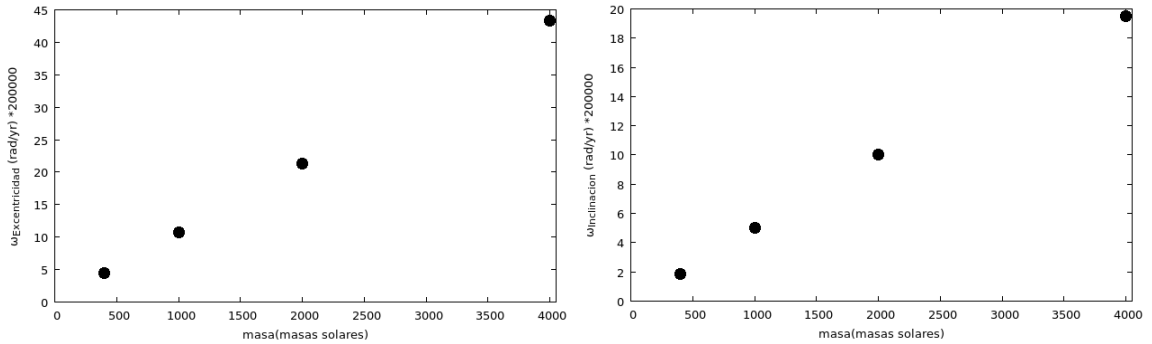


Figura 6.18: *Parámetros orbitales del IMBH: $e = 0,0, i = 45, a = 10\text{mpc}$*

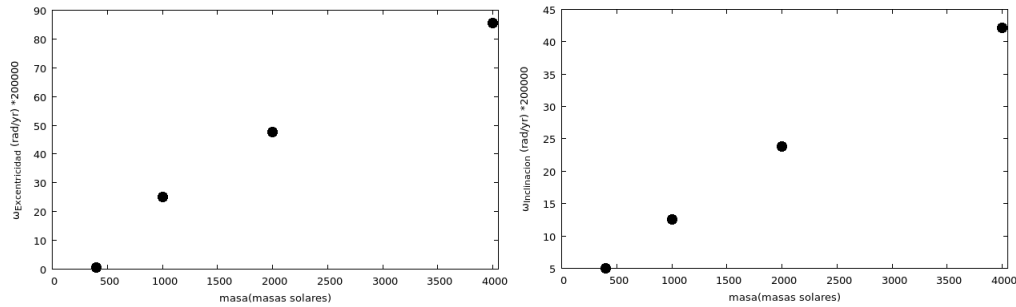


Figura 6.19: Parámetros orbitales del IMBH: $e = 0,0, i = 90, a = 10\text{mpc}$

Escape de órbitas

La teoría de la mecánica celeste predice que las orbitas en el problema de dos cuerpos son cónicas, por lo tanto, se puede encontrar: elipse, hipérbola y parábola:

$$\text{elipse: } 0 < e < 1, \quad p = a(1 - e^2).$$

$$\text{parábola: } e = 1, \quad p = 2q.$$

$$\text{hipérbola: } e > 1, \quad p = a(e^2 - 1).$$

Entonces, cuando la excentricidad es mayor que uno la órbita se abre y hay un escape de la estrella S2. A continuación se muestran las simulaciones para las cuales se encontró escape de orbitas.

Escape de la estrella S2

$$m_{IMBH} = 1000M_{\odot}$$

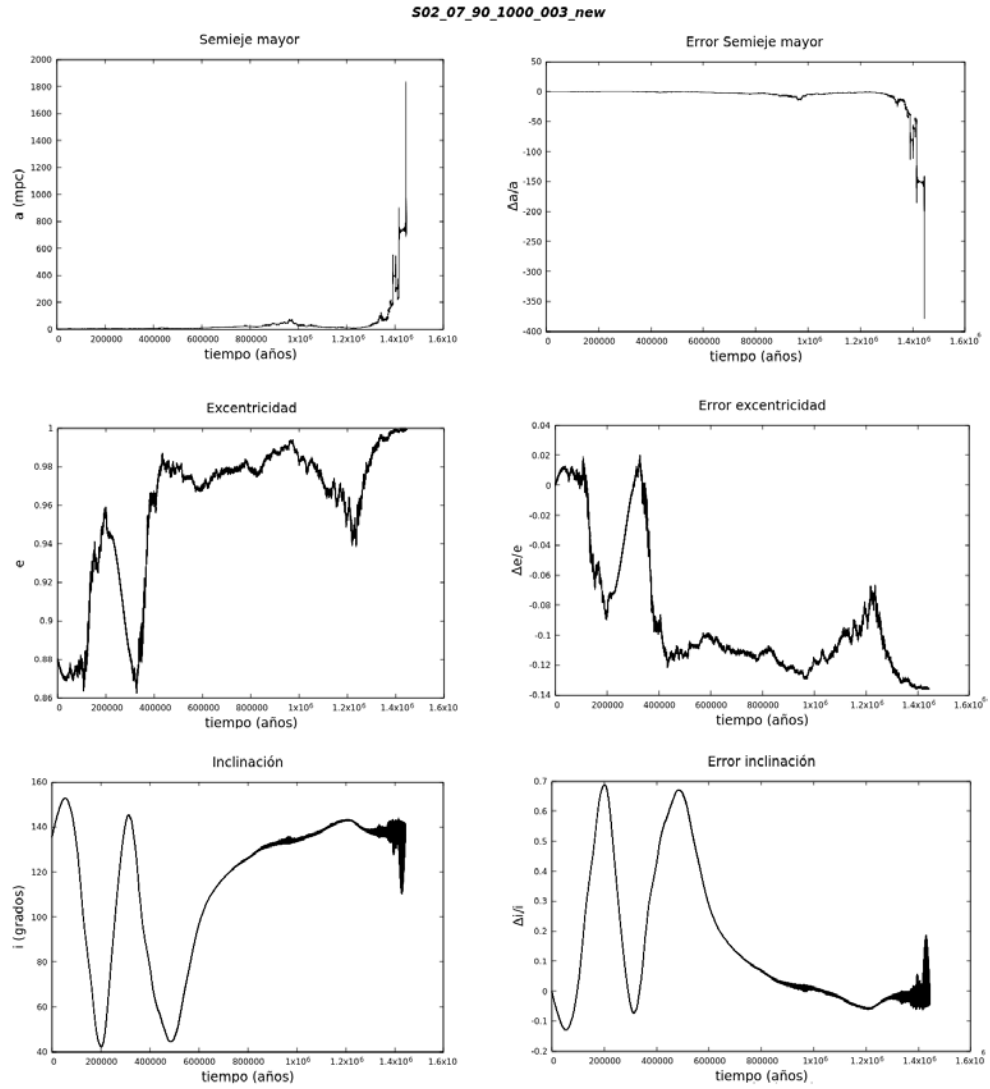


Figura 6.20: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_{\odot}$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$

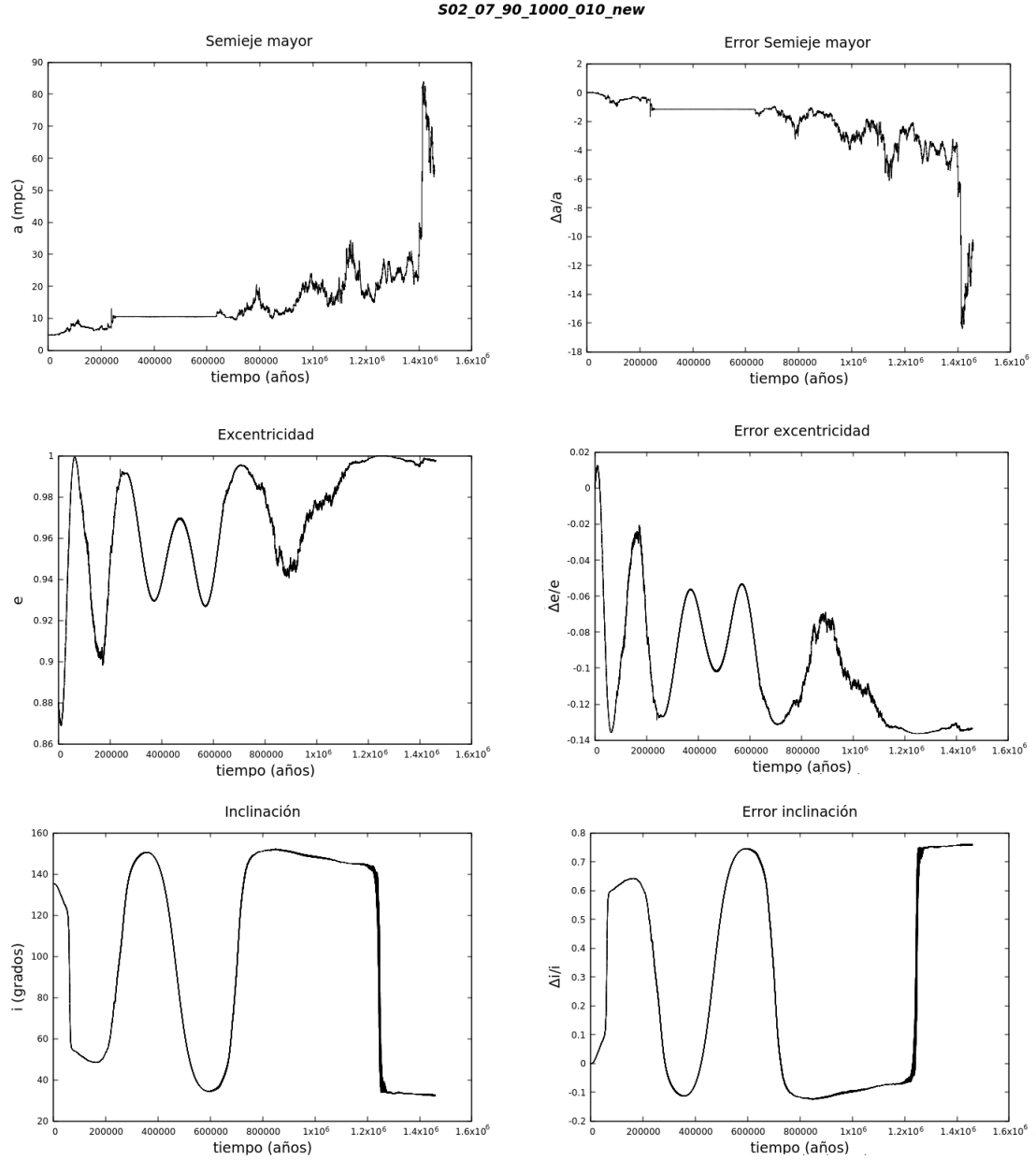


Figura 6.21: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 1000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

$$m_{IMBH} = 2000M_{\odot}$$

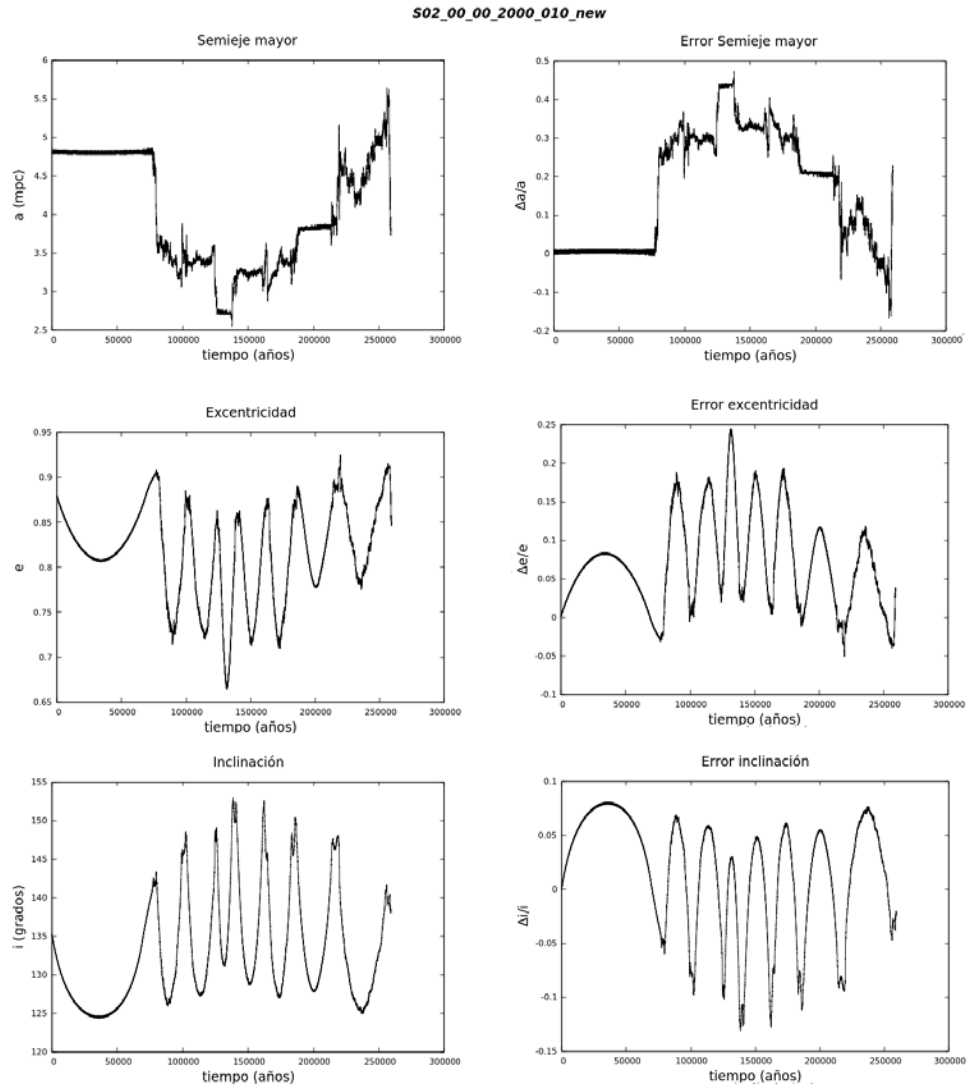


Figura 6.22: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$, ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_{\odot}$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

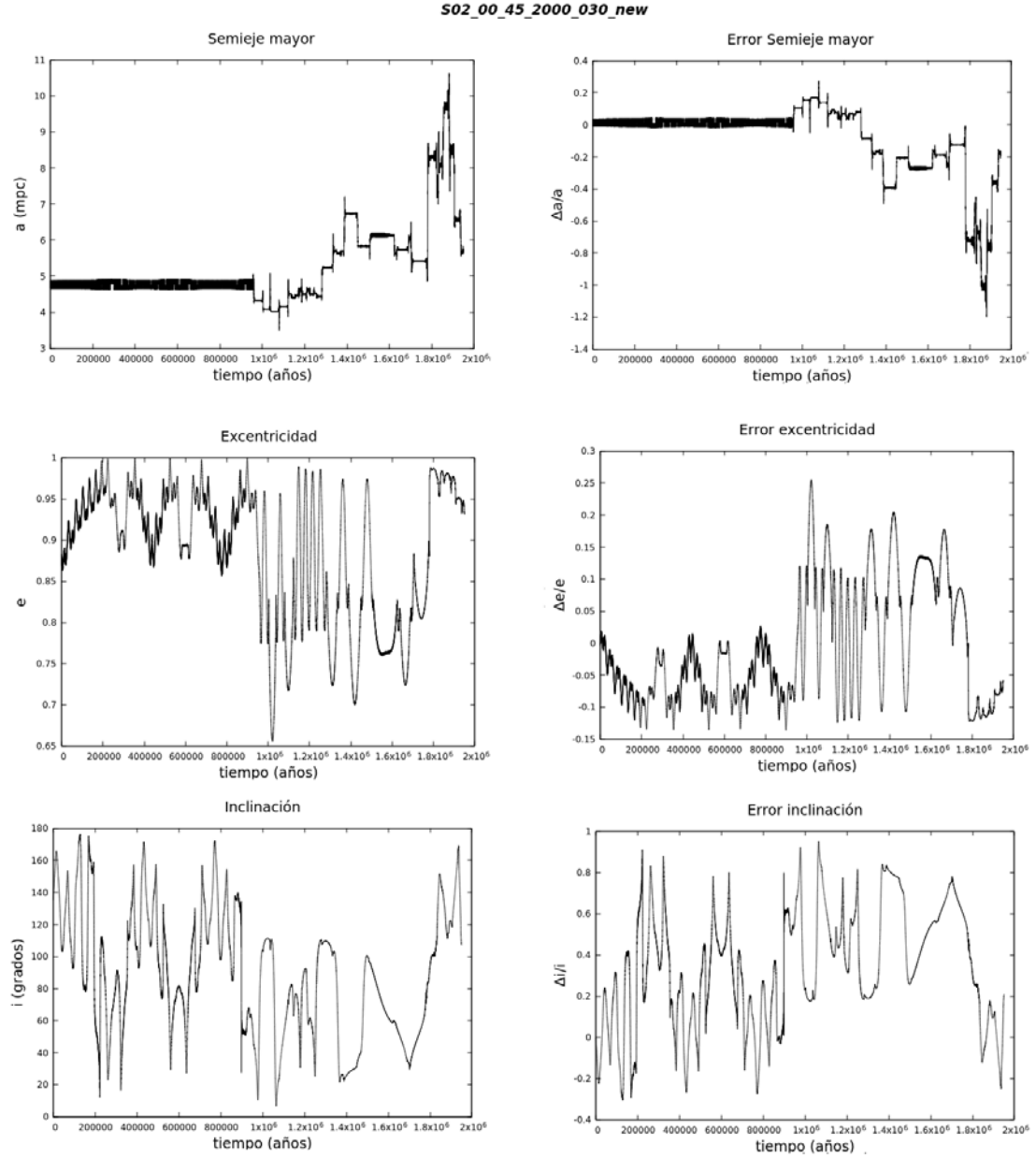


Figura 6.23: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$, ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$

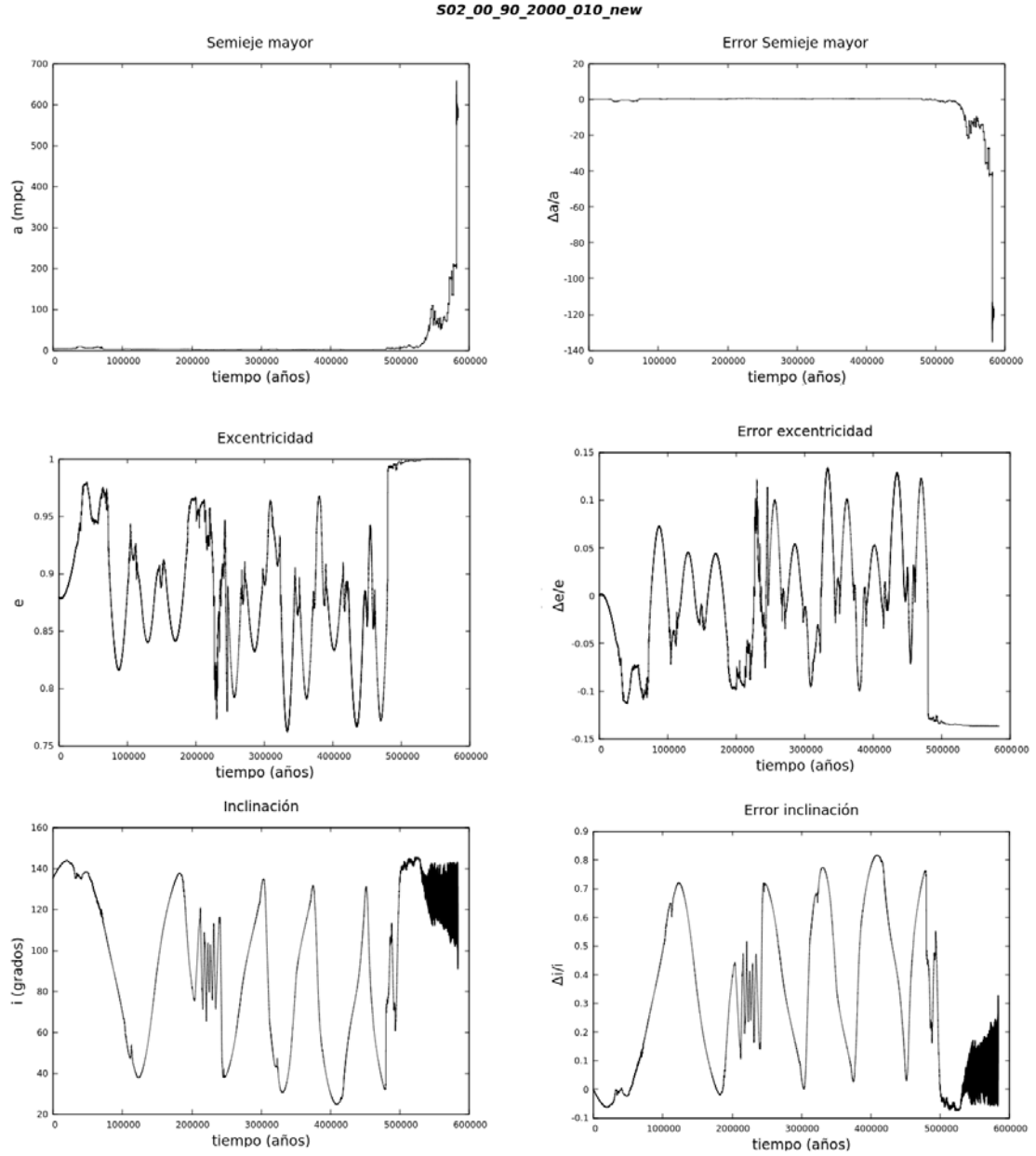


Figura 6.24: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$, ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

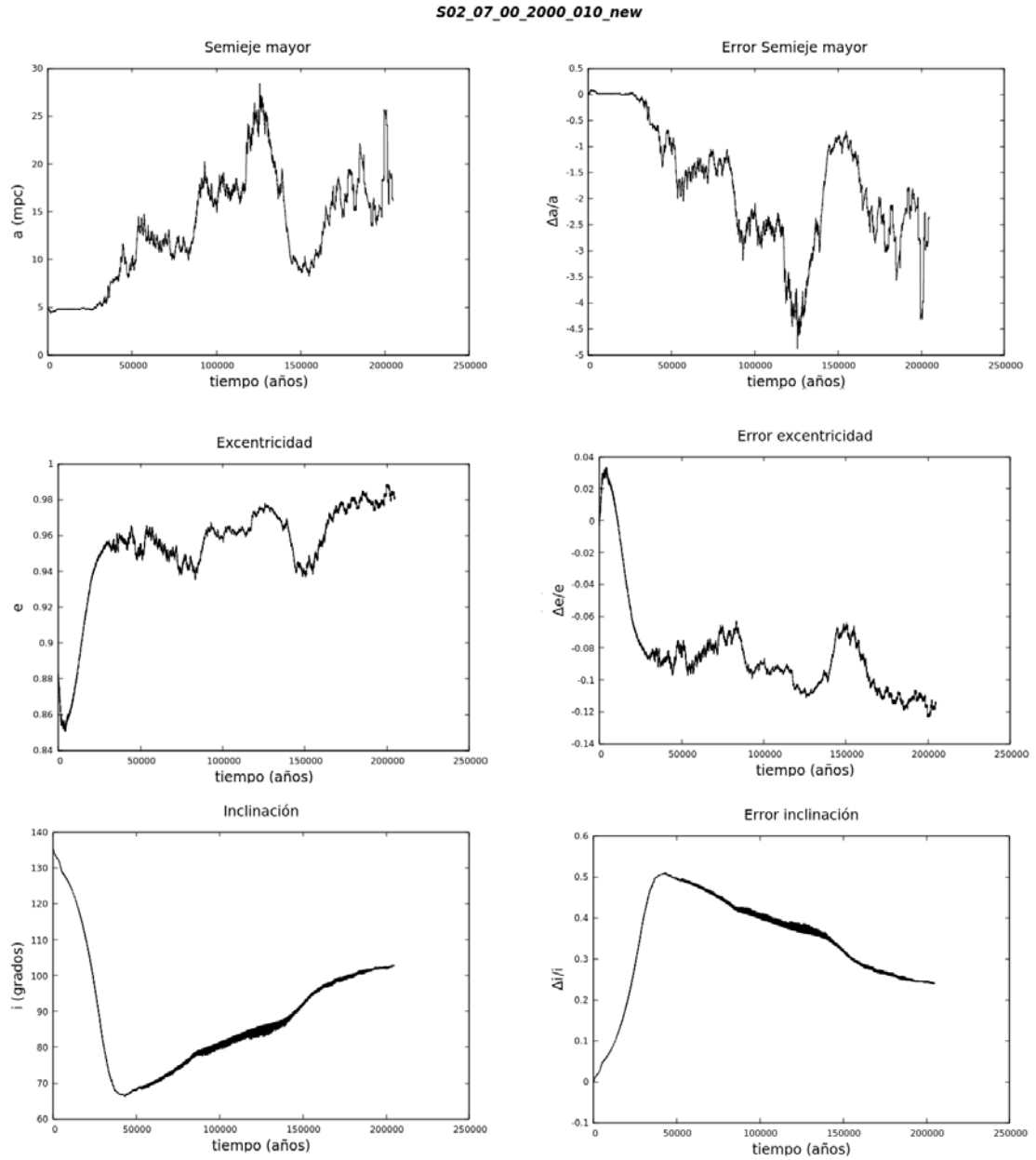


Figura 6.25: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

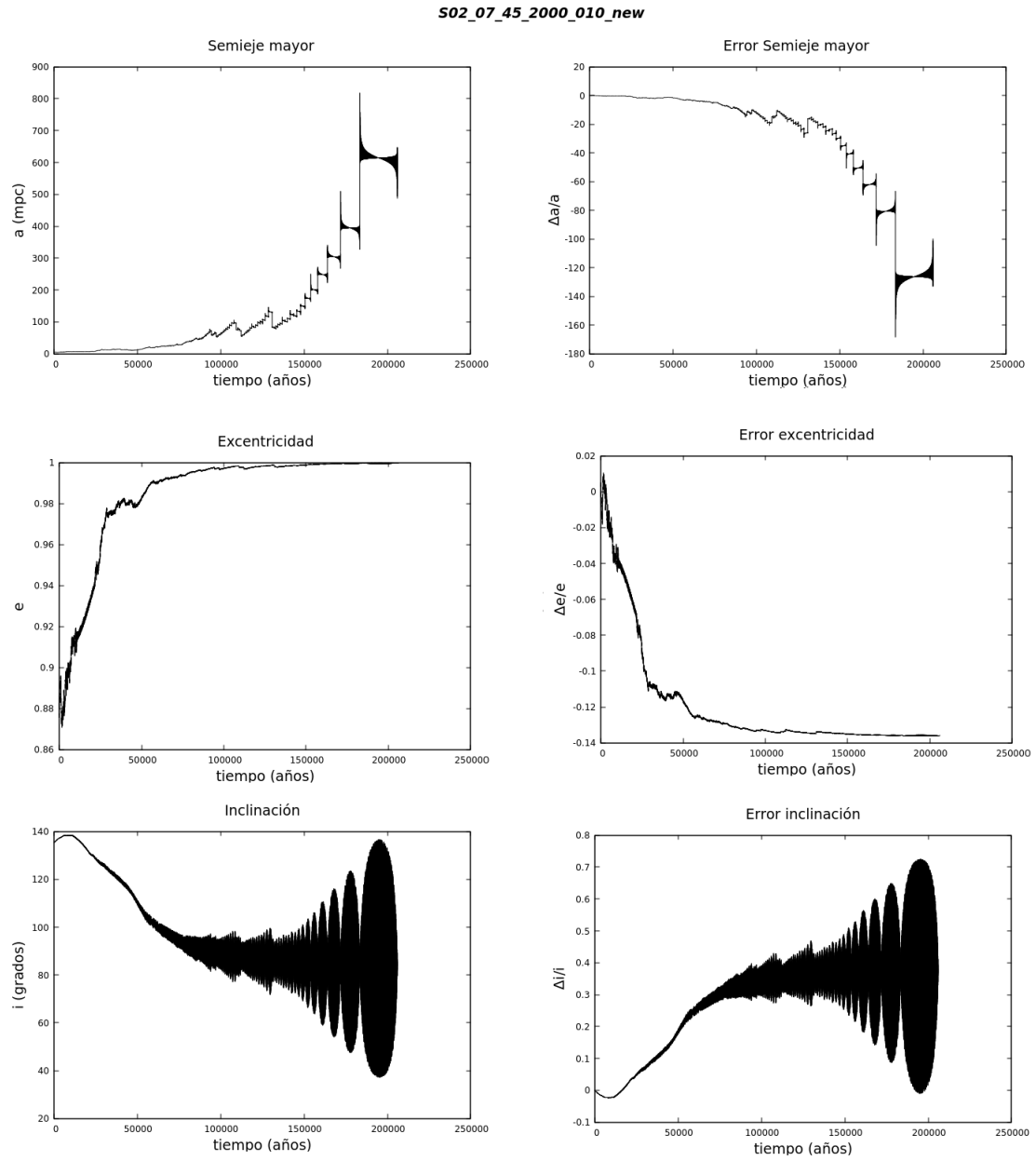


Figura 6.26: *Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$*

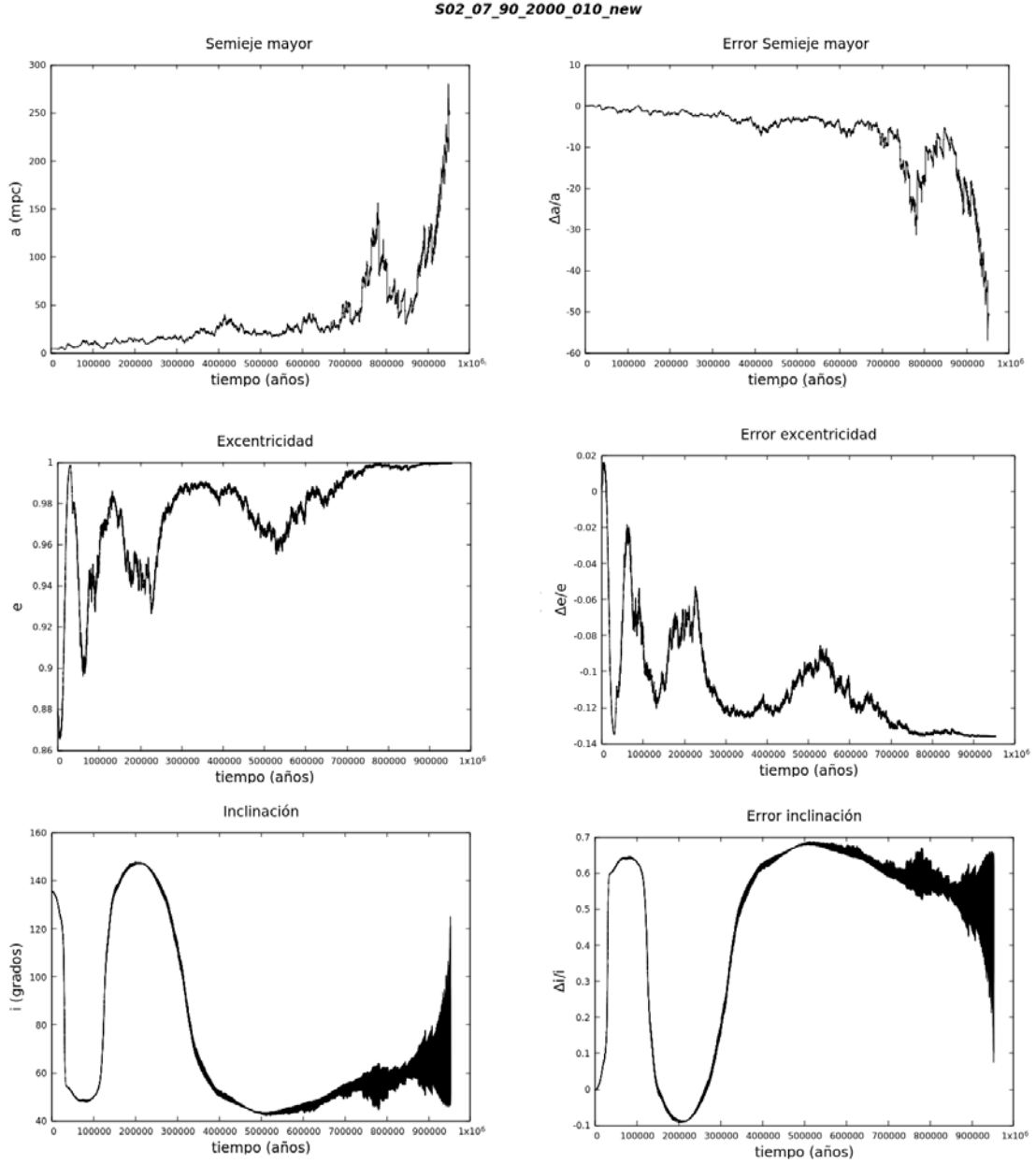


Figura 6.27: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 2000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

$$m_{IMBH} = 4000M_{\odot}$$

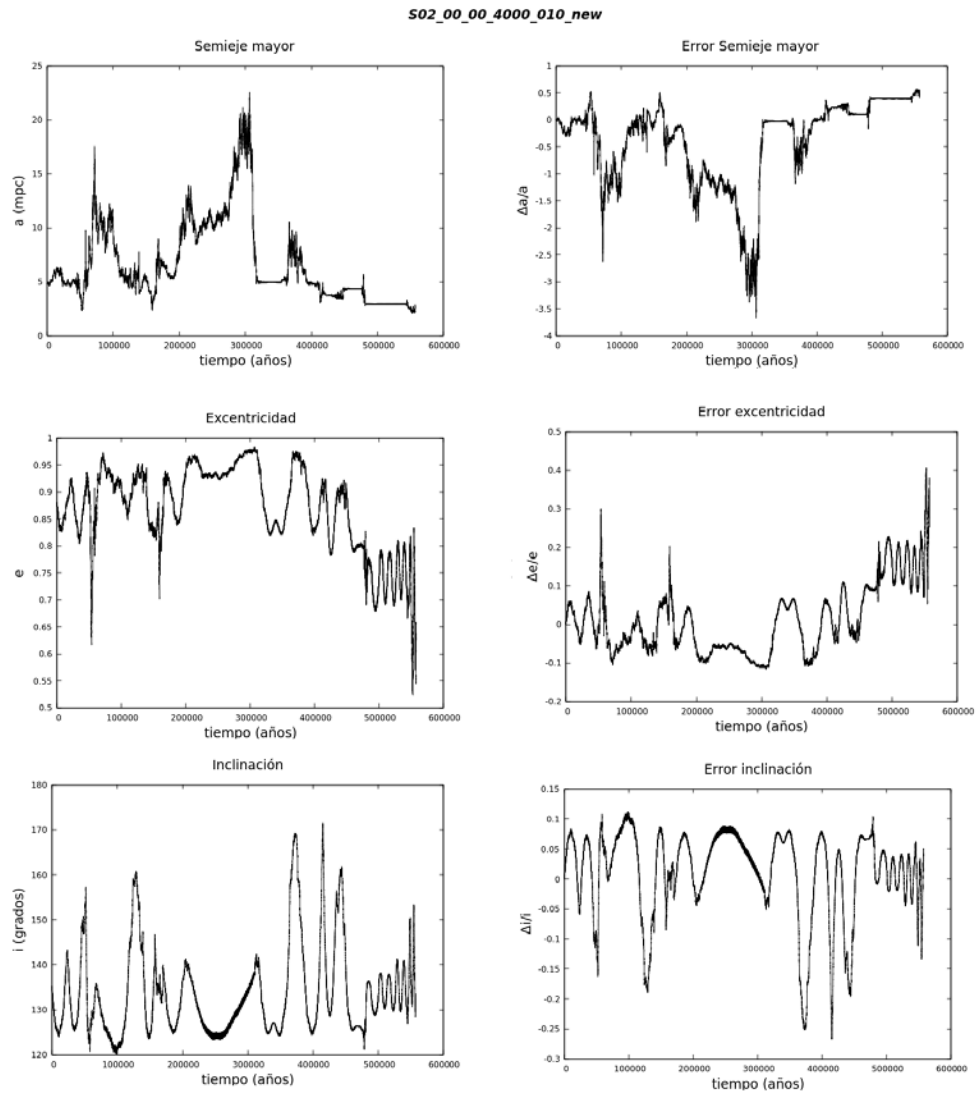


Figura 6.28: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$, ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_{\odot}$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

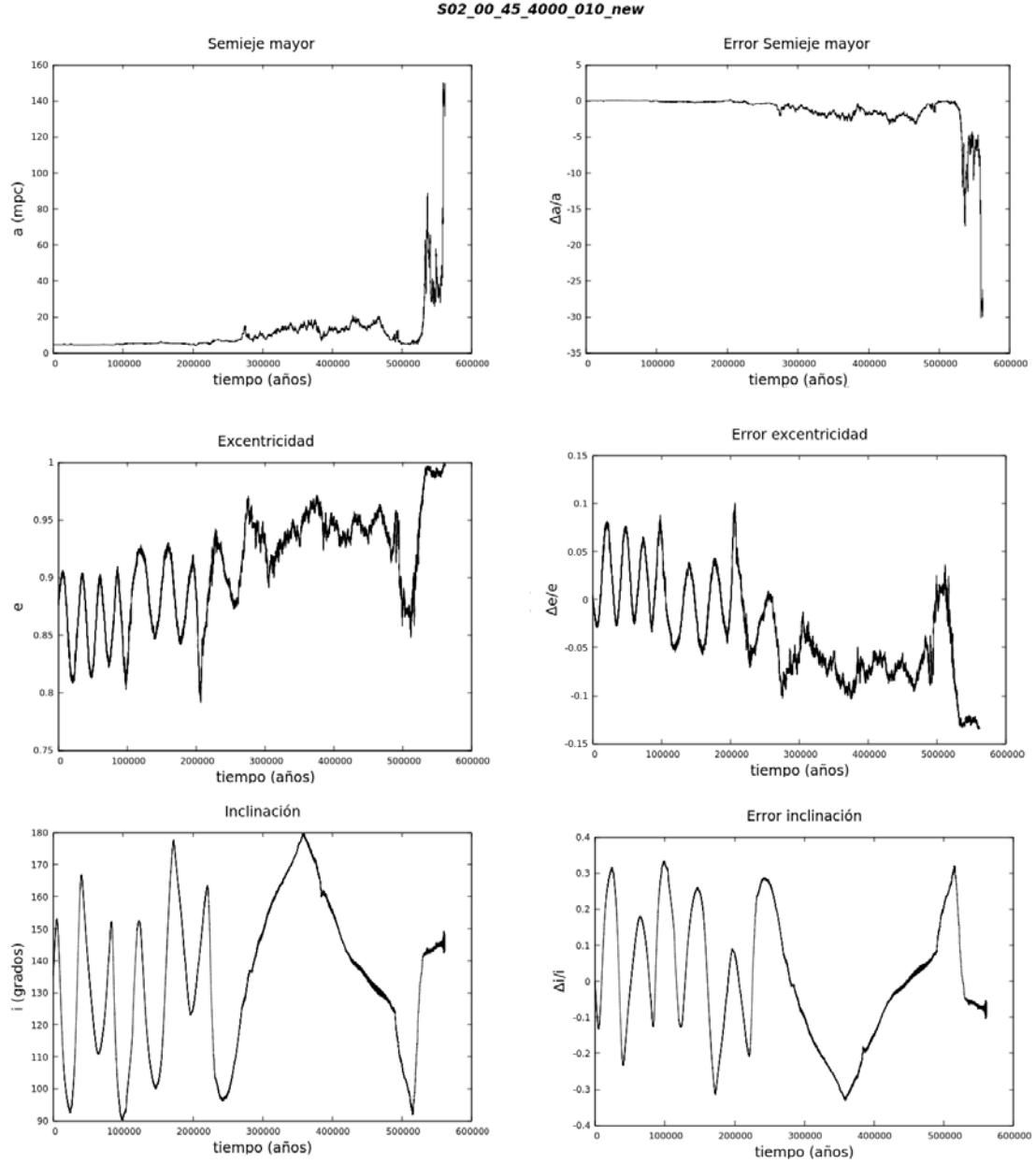


Figura 6.29: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$, ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

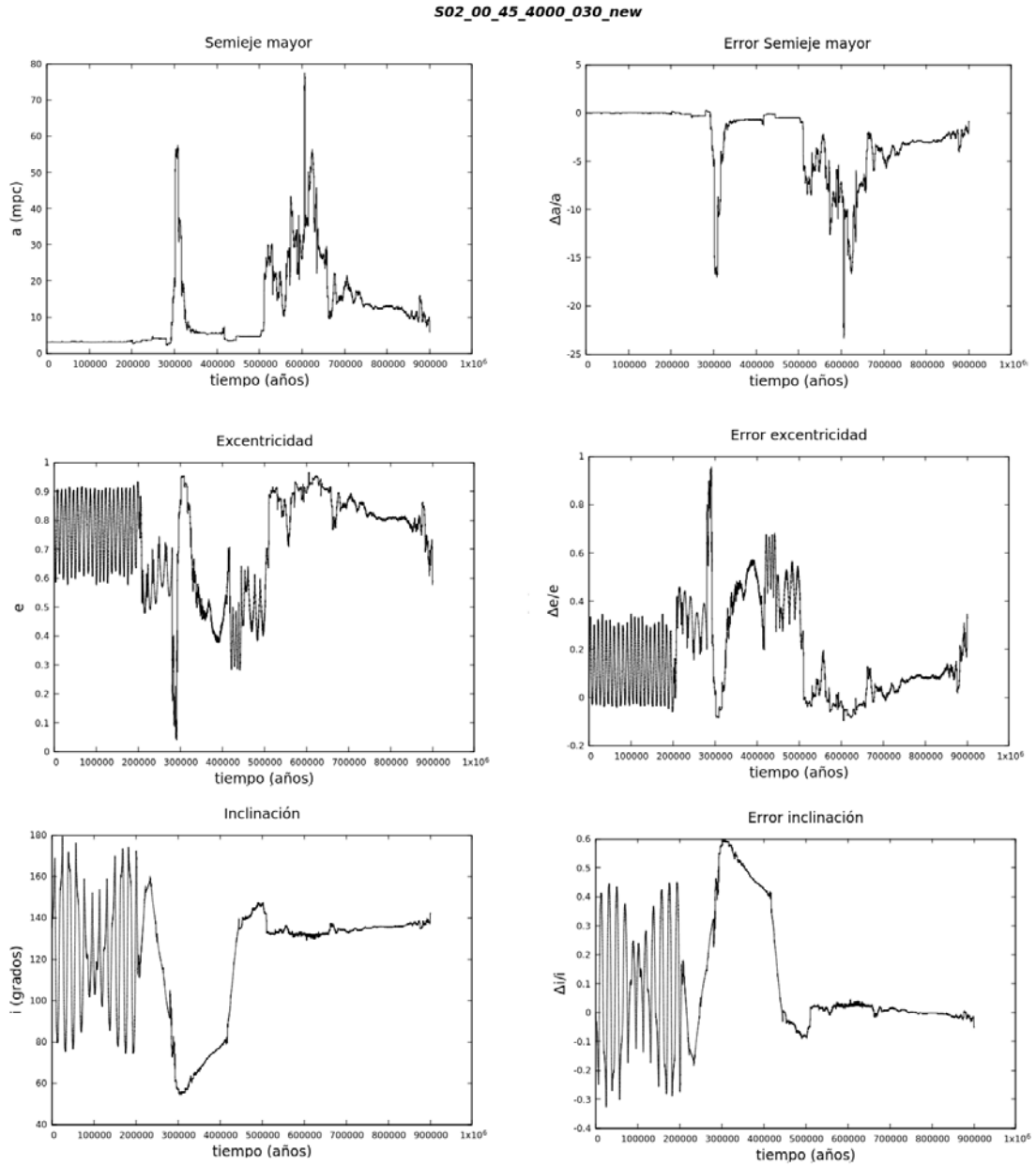


Figura 6.30: *Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$, ángulo de inclinación $i = 45^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 3,0\text{mpc}$*

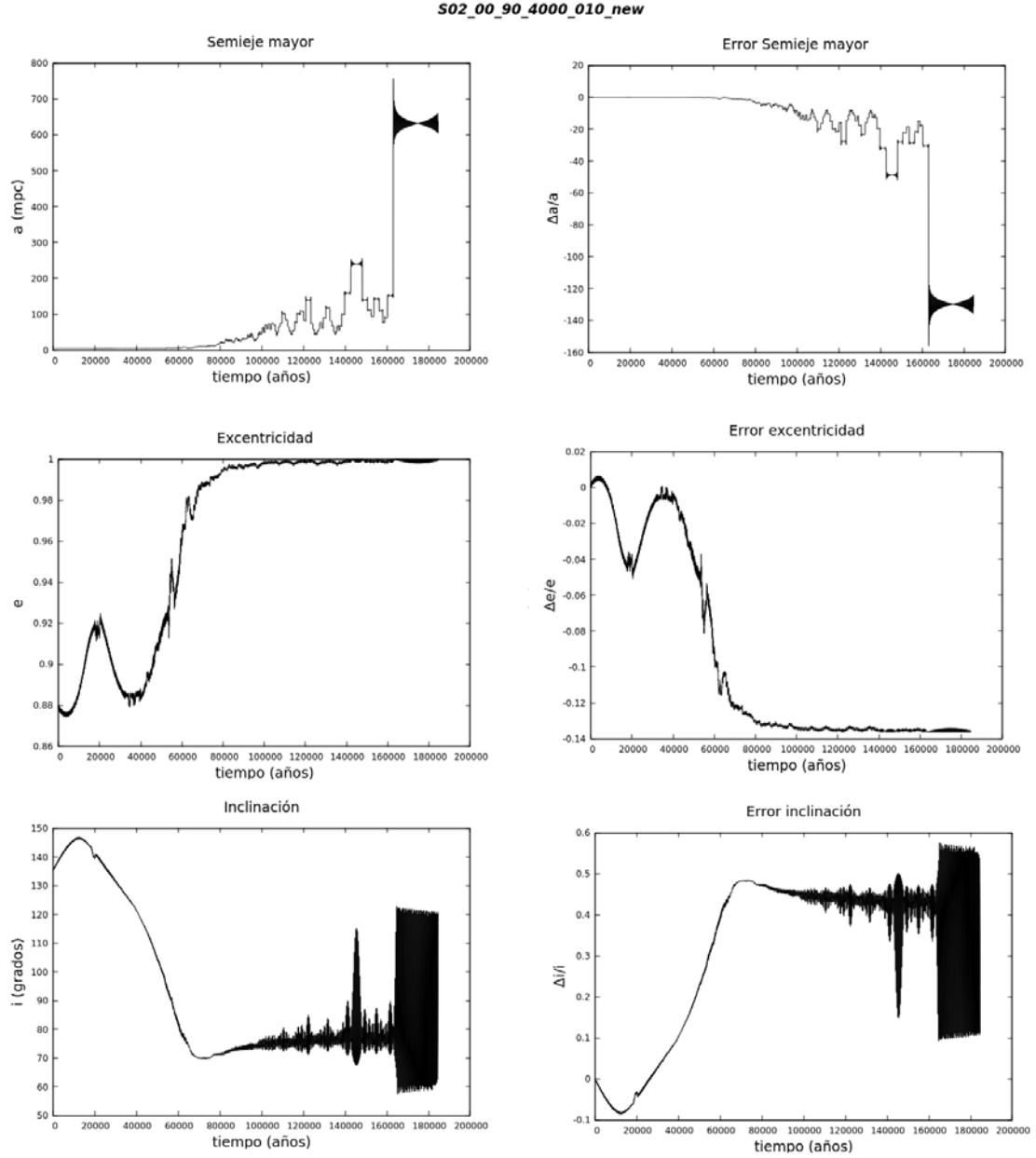


Figura 6.31: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,0$, ángulo de inclinación $i = 90^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

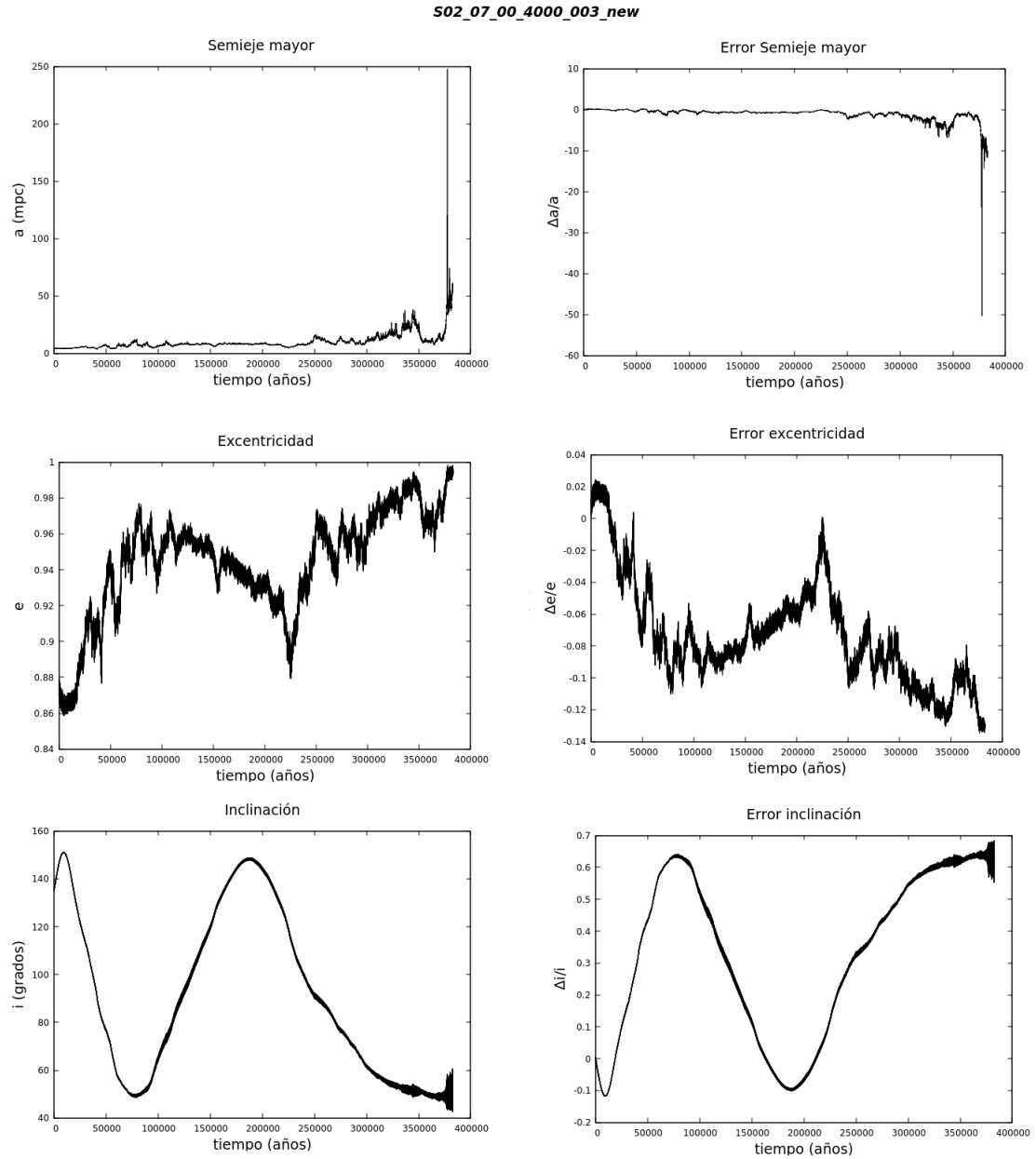


Figura 6.32: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 0,3\text{mpc}$

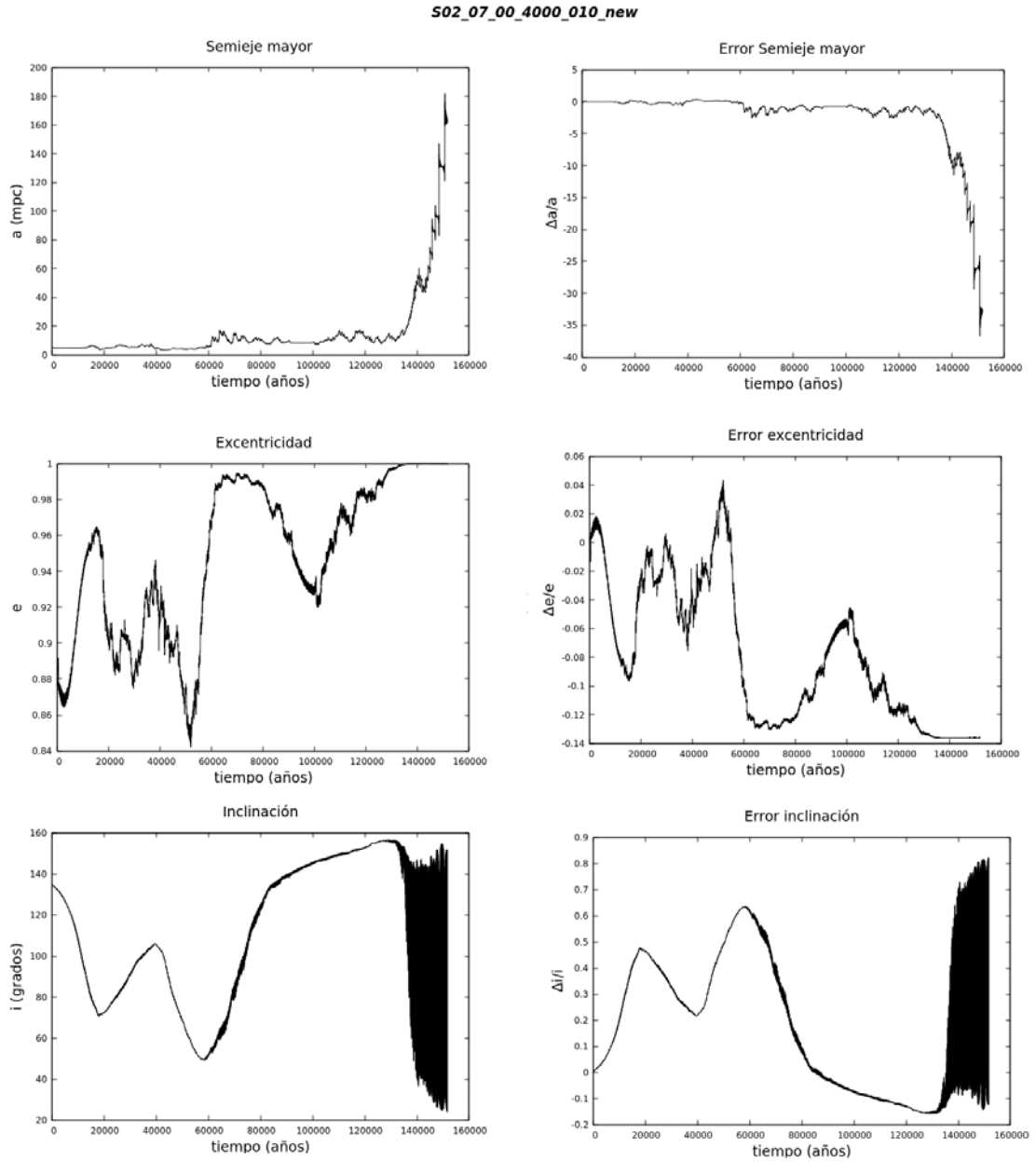


Figura 6.33: Parámetros orbitales de la estrella S2 cuando: excentricidad de IMBH $e = 0,7$, ángulo de inclinación $i = 0^\circ$, masa IMBH $m = 4000M_\odot$, semieje mayor IMBH $a = 1,0\text{mpc}$

La variación de los parámetros orbitales particularmente cuando el semieje mayor es 1mpc, (que en cada gráfica se muestra en el nombre como 010 (ej. $S02 - 00 - 00 - 2000 - 010$)), independientemente del valor de la masa como por ejemplo en las Figuras: 5.7, 5.8, 5.12, 5.18, 5.27, 5.32, 5.38, 5.42, 5.47, entre otras, presentan alteraciones en forma de picos que al parecer se deben a la naturaleza de las perturbaciones para ese valor del semieje mayor. No es posible en este trabajo presentar mas detalles para este comportamiento ya que se necesita un análisis estadístico mas detallado.

Conclusiones

Con el fin de entender la dinámica de la estrella S2 alrededor del MBH se realizaron ciento veinte simulaciones computacionales. Los trabajos realizados por Gualandris et al. (2009) indican la existencia de otro agujero negro de masa intermedia en el sistema. Por lo tanto nuestras simulaciones incluyeron la presencia de tres cuerpos (MBH, IMBH y S2). Para cuantificar los efectos perturbativos de IMBH sobre S2 se realizaron las gráficas de a vs t , e vs t e i vs t , además de sus errores. las conclusiones generales del trabajo se describen a continuación.

- Se cuantificaron las perturbaciones ejercidas por el IMBH sobre a , e e i , calculando las máximas variaciones sobre estos parámetros en función de la masa del IMBH. Para órbitas internas del IMBH los resultados indican que no hay correlación de estas cantidades en función de la masa. En el caso de órbitas externas del IMBH, cuando la excentricidad del mismo es nula, parece existir una correlación lineal en las gráficas $|\Delta a/a|_{max}$ vs $masa_{IMBH}$ (esto se debe a que no hay suficiente peso estadístico para demostrar que existe una relación lineal, ya que para esto se necesitan mas simulaciones). En caso contrario, cuando la excentricidad es 0.7, no se encuentra dicha correlación. En el caso de la excentricidad y la inclinación no se encontró correlación en ninguno de los dos casos.
- Cuando la órbita del IMBH es externa y su excentricidad cero, se encontró mecanismo Kozai, el efecto de este mecanismo es más notorio cuando la diferencia de inclinaciones es alta. La frecuencia de oscilación de la excentricidad y la inclinación es mas alta en los casos donde la órbita es externa pero no tan alejada de la órbita de S2. en estos casos se pudo realizar transformada de Fourier sobre las señales y se encontraron las principales frecuencias de oscilación. En todos los casos, se observa de forma visual existir correlación lineal entre la máxima frecuencia de oscilación y la masa del IMBH, esto se encontró tanto en la excentricidad como en la inclinación.

- Se encontró escape de la estrella S2 solo cuando la órbita del IMBH es interna a la órbita de S2.

Trabajo futuro

- Desarrollar un número mayor de simulaciones con las condiciones donde hay mecanismo Kozai (Kozai 1962) para poder realizar el análisis estadístico adecuado y así comprobar si en realidad existe correlación lineal entre $|\Delta a/a|_{max}$ vs $masa_{IMBH}$, w_{Ke} vs $masa_{IMBH}$ y w_{Ki} vs $masa_{IMBH}$.
- Incluir la presencia del resto de estrellas tipo S.
- Incluir términos relativistas en las ecuaciones de movimiento.
- Hacer un análisis mas profundo del escape de órbitas para poder determinar si estas corresponden a las estrellas de alta velocidad que se encuentran en el halo Galáctico.

Bibliografía

- [1] ALLEN, D. A. *et al.* (1990), The source of luminosity at the Galactic Centre. *Montly Notices of the Royal Astronomical Society*, 244..706A.
- [2] BOULET, DAN L. AND WILLMANN-BELL. (1991), *Methods of orbit determination for the microcomputer*. 1ed, pag 780.p.
- [3] CHEN, X., AND LIU, F. K. (2013), *Is there an intermediate massive Black Hole in the Galactic Center: imprints on the stellar tidal-disruption rate*. *The Astrophysical Journal*, The American Astronomical Society, 762:95 (6pp).
- [4] DANBY, J. M. A. *et al.* (1997), *Computer Modeling: From Sports to Spaceflight, from Order to Chaos*. Willmann-Bell, U.S.A.
- [5] ECKART, A. AND GENZEL, R. (1996), *Observations of stellar proper motions near the Galactic Centre*. *Nature*, Volume 383, Issue 6599, pp. 415-417.
- [6] ECKART, A. AND GENZEL, R. (1997), *Stellar proper motions in the central 0.1 PC of the Galaxy*. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 284, Issue 3, pp. 576-598.
- [7] EISENHAUER, F. (2005), *SINFONI in the Galactic Center: Young Stars and Infrared Flares in the Central Light-Month*. Max-Planck Institut für extraterrestrische Physik.
- [8] GENZEL, R. *et al.* (2000), *Stellar dynamics in the Galactic Centre: proper motions and anisotropy*. *Montly Notices of the Royal Astronomical Society*, 317..348G.
- [9] GENZEL, R. (2001), *The Nuclear Star Cluster of the Milky Way* *Astronomical Society of the Pacific*. ISBN: 1-58381-060-9.
- [10] GILLESSEN, S. *et al.* (2009), *Monitoring stellar orbits around the massive black hole in the galactic center*. *The american Astronomical Society*, U.S.A.

-
- [11] GHEZ, A. M. (2005), Stellar Orbits around the Galactic Center Black Hole. UCLA Division of Astronomy and Astrophysics, Los Angeles.
- [12] GUALANDRIS, A., AND MERRITT, D. (2009), Perturbations of intermediate-mass black holes on stellar orbits in the galactic center. *The Astrophysical Journal*, 705:361–371 p.
- [13] GUALANDRIS, A. *et al.* (2010), The Galactic Centre star S2 as a dynamical probe for intermediate-mass black holes. *R. Astron. Soc.*
- [14] HANSEN, B., AND MILOSAVIJEVIC, M. (2003), *The need for a second Black Hole at the Galactic Center*. *The Astrophysical Journal*, The American Astronomical Society, 593:L77–L80.
- [15] HASSANI, S. (2001), *Mathematical Physics, A Modern Introduction to Its Foundations*. Springer, New York. 208-210 p.
- [16] KOZAI, Y. (1962), *Secular Perturbations of Asteroids with High Inclination and Eccentricity*. Smithsonian Astrophysical Observatory, Cambridge, Massachusetts.
- [17] KRABBE, A. *et al.* (1995), The Nuclear Cluster of the Milky Way: Star Formation and Velocity Dispersion in the Central 0.5 Parsec. *The Astrophysical Journal*, The American Astronomical Society, 447L:95K.
- [18] MERRITT, D. M. *et al.* (2009), Explaining the orbits of the galactic center S-stars. *The Astrophysical Journal*, The American Astronomical Society, 693:L35–L38.
- [19] MEZGER, P. G. *et al.* (1996), The Galactic Center: a laboratory for AGN?. *The Astronomy and Astrophysics Review*, Volume 7, Issue 4, pp. 289-388.
- [20] MORRIS, M. AND SERABYN, E. (1996), *The Galactic Center Environment*. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Volume 34, 1996, pp. 645-702.
- [21] MURRAY, C. D., AND DERMOTT, S. F. (1999), *Solar System Dynamics*. Cambridge, p. 63-106.

- [22] SCHÖDEL, R. *et al.* (2002), Sest Star Seen Orbiting the Supermassive Black Hole at the Centre of the Milky Way. Dept.of Physics, University of California, U.S.A.
- [23] SCHÖDEL, R. *et al.* (2003), Stellar Dynamics in the Central Arcsecond of Our Galaxy. The Astrophysical Journal, Volume 596, Issue 2, pp. 1015-1034.

Anexos

Anexo A. Integración del problema de tres cuerpos

Este código simula el problema de los tres cuerpos: La estrella S2, el IMBH y el MBH.

```
1 //Este programa integra tres cuerpos tomando como referencia la masa m1 (masa del IMBH).
2
3 #include <iostream>
4 #include <stdio.h>
5 #include <cmath>
6
7 #include <gsl/gsl_errno.h>
8 #include <gsl/gsl_matrix.h>
9 #include <gsl/gsl_odeiv2.h>
10
11 //definición de las masas
12
13 #define m1 1. //masa del SMBH (4.31e6 Msol) unidad.
14 #define m2 92.80742459e-6 //masa del IMBH en terminos de la unidad
15 //#define m2 0. //Masa para calcular conservación de energía en problema de
    dos cuerpos.
16 #define m3 3.480278422e-6 //masa de la estrella S2 en términos de la Unidad
17
18 //Ecuaciones diferenciales
19 int ode(double t, const double x[], double dx[], void *params) //declaración de
    vectores
20 {
21     double G = *(double *)params;
22     double x2, x3, y2, y3, z2, z3, vx2, vx3, vy2, vy3, vz2, vz3;
23     double R2;
24     double R3;
25     double R32;
26
27     //double m1 = *(double *)params;
28     //double m2 = *(double *)params;
29     //double m3 = *(double *)params;
30
```



```

31  x2=x[0];          //Posici\'on del IMBH en x
32  y2=x[1];
33  z2=x[2];
34  x3=x[3];          //posici\'on de la estrella en x
35  y3=x[4];
36  z3=x[5];
37  vx2=x[6];        //Velocidad el IMBH
38  vy2=x[7];
39  vz2=x[8];
40  vx3=x[9];        //Velocidad de la estrella
41  vy3=x[10];
42  vz3=x[11];
43
44  R2 = sqrt( x2*x2 + y2*y2 + z2*z2 );          //vector posici\'on IMBH
45  R3 = sqrt( x3*x3 + y3*y3 + z3+z3 );          //vector posici\'on estrella
46  R32 = sqrt( pow(x3-x2,2) + pow(y3-y2,2) + pow(z3-z2,2) ); //distancia relativa
47
48  dx[0] = vx2;
49  dx[1] = vy2;
50  dx[2] = vz2;
51  dx[3] = vx3;
52  dx[4] = vy3;
53  dx[5] = vz3;
54  dx[6] = G*m3*((x3-x2)/pow(R32,3) - x3/pow(R3,3)) - G*(m1+m2)*x2/pow(R2,3);
55  dx[7] = G*m3*((y3-y2)/pow(R32,3) - y3/pow(R3,3)) - G*(m1+m2)*y2/pow(R2,3);
56  dx[8] = G*m3*((z3-z2)/pow(R32,3) - z3/pow(R3,3)) - G*(m1+m2)*z2/pow(R2,3);
57  dx[9] = G*m2*((x2-x3)/pow(R32,3) - x2/pow(R2,3)) - G*(m1+m3)*x3/pow(R3,3);
58  dx[10] = G*m2*((y2-y3)/pow(R32,3) - y2/pow(R2,3)) - G*(m1+m3)*y3/pow(R3,3);
59  dx[11] = G*m2*((z2-z3)/pow(R32,3) - z2/pow(R2,3)) - G*(m1+m3)*z3/pow(R3,3);
60
61  return GSL_SUCCESS;
62 }
63
64 //MÃ©todo Runge Kutta Fehlberg
65
66 int main()
67 {
68     // printf("Hola mundo\n");
69     const gsl_odeiv2_step_type *T = gsl_odeiv2_step_rkf45; //integrador RK Fehlberg
70     gsl_odeiv2_step *s = gsl_odeiv2_step_alloc (T, 12); //espacio de memoria del vector
71     gsl_odeiv2_control *c = gsl_odeiv2_control_y_new (1e-16, 1e-16); //error de integraci\'on
72     gsl_odeiv2_evolve *e = gsl_odeiv2_evolve_alloc (12); //espacio de memoria
73
74     FILE * data;

```

```

75  double G = 1.;
76  double x2, x3, y2, y3, z2, z3, vx2, vx3, vy2, vy3, vz2, vz3;
77  double r0, alpha, V, a, P, PI, ai, ei, Wi, wi, Ii, fi, erei, di, ae, ee, We, we, Ie, fe, eree, de, rad, u, mui,
      mue, A;
78  double Ae, Ai, Re, Ri, Ve, Vi, Lex, Ley, Lez, Le, Lix, Liy, Liz, Li, WWe, Fe, wwe, WWi, Fi, wwi, Ee, IIe, Ei, Iii
      ;
79  double Da, De, K, U, r2, r3, H, HC, DH, E, DE, EC, DI, DW, Dw, Dt, Daf;
80  int cnt;
81
82  PI=4*atan(1.);
83  rad=PI/180.;    //factor de conversi'on de grados a radianes
84  //u=4.829;
85
86
87  //parÃ¡metros orbitales del IMBH
88  ai=1.0;
89  ei=0.7;
90  Wi=0.;
91  wi=0.*rad;
92  Ii=90.*rad;
93  fi=0.0;
94
95  //ParÃ¡metros orbitales de la estrella S2
96  //ae=1.609666667; //Semieje mayor de S2 en miliparsec en t'erminos de la unidad (a=3mpc
      de longitud del agujero supermasivo intermedio
97  ae=0.4829;      //Semieje mayor de S2 en miliparsec en t'erminos de la unidad (a=10mpc
      ) de longitud del agujero supermasivo intermedio
98  //ae=0.1609666667; //Semieje mayor de S2 en miliparsec en t'erminos de la unidad (a=30mpc
      ) de longitud del agujero supermasivo intermedio
99  ee=0.880;
100  We=225.39*rad;
101  we=63.56*rad;
102  Ie=135.25*rad;
103  fe=0.0;
104
105  //CONICIONES INICIALES
106
107  mui=G*(m1+m2);
108  mue=G*(m1+m3);
109
110  x2=ai*(1-ei*ei)/(1+ei*cos(fi))*cos(Wi)*cos((fi+wi))-sin(Wi)*sin((fi+wi))*cos(Ii);
111  y2=ai*(1-ei*ei)/(1+ei*cos(fi))*(sin(Wi)*cos((fi+wi))+cos(Wi)*sin((fi+wi))*cos(Ii));
112  z2=ai*(1-ei*ei)/(1+ei*cos(fi)) * (sin( fi+wi)) * sin(Ii));

```

```

113 vx2=-sqrt(mui/(ai*(1-ei*ei)))*(cos(Wi)*(sin((fi+wi))+ei*sin(wi))+sin(Wi)*(cos((fi+wi))+ei*
      cos(wi))*cos(Ii));
114 vy2=-sqrt(mui/(ai*(1-ei*ei)))*(sin(Wi)*(sin((fi+wi))+ei*sin(wi))-cos(Wi)*(cos((fi+wi))+ei*
      cos(wi))*cos(Ii));
115 vz2=sqrt(mui/(ai*(1-ei*ei)))*(cos((fi+wi))+ei*cos(wi))*sin(Ii);
116
117
118 x3=ae*(1-ee*ee)/(1+ee*cos(fe))*(cos(We)*cos((fe+we))-sin(We)*sin((fe+we))*cos(Ie));
119 y3=ae*(1-ee*ee)/(1+ee*cos(fe))*(sin(We)*cos((fe+we))+cos(We)*sin((fe+we))*cos(Ie));
120 z3=ae*(1-ee*ee)/(1+ee*cos(fe))*(sin((fe+we))*sin(Ie));
121 vx3=-sqrt(mue/(ae*(1-ee*ee)))*(cos(We)*(sin((fe+we))+ee*sin(we))+sin(We)*(cos((fe+we))+ee*
      cos(we))*cos(Ie));
122 vy3=-sqrt(mue/(ae*(1-ee*ee)))*(sin(We)*(sin((fe+we))+ee*sin(we))-cos(We)*(cos((fe+we))+ee*
      cos(we))*cos(Ie));
123 vz3=sqrt(mue/(ae*(1-ee*ee)))*(cos((fe+we))+ee*cos(we))*sin(Ie);
124
125 //////////////////////////////////////
126
127 Re=sqrt(x3*x3+y3*y3+z3*z3);
128 Ve=sqrt(vx3*vx3+vy3*vy3+vz3*vz3);
129 Lex=y3*vz3-z3*vy3;
130 Ley=z3*vx3-x3*vz3;
131 Lez=x3*vy3-y3*vx3;
132
133 Le=sqrt(Lex*Lex+Ley*Ley+Lez*Lez); //Momento angular
134
135 Ae=1/((2/Re)-(Ve*Ve/mue));
136
137 Ee=sqrt(1-(Le*Le/(mue*ae)));
138
139 IIe=acos(Lez/Le);
140
141 //WWe=asin(Lex/(Le*sin(IIe)))*180/PI;
142 WWe=-1*asin(Lex/(Le*sin(IIe)))*180/PI+180;
143 //=acos(((ae*(1-ee*ee)/Re)-1)/ee)*180/PI;
144 Fe=acos(((Ae*(1-Ee*Ee)/Re)-1)/Ee)*180/PI;
145 wwe=(asin(z3/(Re*sin(Ie)))-Fe)*180/PI;
146
147 printf("Re= %f, Ve= %f, mue= %f, Ae= %f, Le= %f, Ee= %f, IIe= %f, WWe= %f, Fe= %f, wwe= %f\n", Re, Ve, mue, Ae, Le
      , Ee, IIe, WWe, Fe, wwe);
148
149 Ri=sqrt(x2*x2+y2*y2+z2*z2);
150 Vi=sqrt(vx2*vx2+vy2*vy2+vz2*vz2);
151 Lix=y2*vz2-z2*vy2;

```

```

152   Liy=z2*vx2-x2*vz2;
153   Liz=x2*vy2-y2*vx2;
154
155   Li=sqrt(Lix*Lix+Liy*Liy+Liz*Liz);
156
157   Ai=1/((2/Ri)-(Vi*Vi/mui));
158
159   Ei=sqrt(1-(Li*Li/(mui*ai)));
160
161   Iii=acos(Liz/Li);
162
163   WWi=-1*asin(Lix/(Li*sin(Iii)))*180/PI+180;
164
165   //Fi=acos(((Ai*(1-Ei*Ei)/Ri)-1)/Ei);
166
167   Fi=acos(1.);
168
169   wwi=(asin(z2/(Ri*sin(Ii)))-Fi)*180/PI;
170
171   printf("Ri= %f, Vi= %f, mui= %f, Ai= %f, Li= %f, Ei= %f, Iii= %f, WWi= %f, Fi= %e, wwi= %f\n", Ri, Vi, mui, Ai, Li
172         , Ei, Iii, WWi, Fi, wwi);
173
174   //mu=G*(m1+m3);
175   //intf("Ri= %f, Vi= %f, mui= %f, Ai= %f, vx2= %f, vy2= %f, vz2= %f\n", Ri, Vi, mui, Ai, vx2, vy2, vz2);
176
177   gsl_odeiv2_system sys = {ode, NULL, 12, &G}; //va integrar el sistema de ode. NULL=NO HAY
178         JACOBIAN. &=LLAMA PUNTERO
179
180   double t,tf;
181
182   t=0.0;
183   a=ai;
184   P=2*PI*sqrt(pow(a,3)/(G*(m1+m2)));
185   Dt=46.837/(2*PI); //0.243$=PERIODO IMBH
186   tf=2e6/Dt;
187   Daf=10.; //valor el semieje mayor el IMBH para transformar a mpc
188   //tiempo de integraci'on $2 \times 10^{6}$ a)\sim os.
189   // tf=10000.*P/1.;
190   // double t = 0.0;
191   // double tf = 100.0;
192   double h = 1e-6;
193   // double x[2] = {1.0,0.0};

```

```
194
195 double x[12] = {x2,y2,z2,x3,y3,z3,vx2,vy2,vz2,vx3,vy3,vz3}; //luna
196
197
198 //E = - G*m1/ae;
199 //printf("%f \n",E);
200
201 //r2=sqrt(x[0]*x[0]+x[1]*x[1]+x[2]*x[2]);
202 //r3=sqrt(x[3]*x[3]+x[4]*x[4]+x[5]*x[5]);
203
204 //K = 0.5*m2*(x[6]*x[6]+x[7]*x[7]+x[8]*x[8]) + 0.5*m3*(x[9]*x[9]+x[10]*x[10]+x[11]*x[11]);
205 //U = - G*(m1+m2)/r2 - G*(m1+m3)/r3;
206 //H = K + U;
207
208 //printf("%f %f %f\n", K, U, H);
209
210 data = fopen("SS02_07_90_0400_100.dat","w");
211
212
213 cnt=0;
214
215 while (t < tf)
216 {
217     cnt=cnt+1;
218     int status = gsl_odeiv2_evolve_apply (e, c, s, &sys, &t, tf, &h, x);
219
220     Re=sqrt(x[3]*x[3]+x[4]*x[4]+x[5]*x[5]);
221     Ve=sqrt(x[9]*x[9]+x[10]*x[10]+x[11]*x[11]);
222
223     Ae=1/((2/Re)-(Ve*Ve/mue));
224
225     Lex=x[4]*x[11]-x[5]*x[10];
226     Ley=x[5]*x[9]-x[3]*x[11];
227     Lez=x[3]*x[10]-x[4]*x[9];
228
229     Le=sqrt(Lex*Lex+Ley*Ley+Lez*Lez);
230
231     Ee=sqrt(1-(Le*Le/(mue*Ae)));
232     IIE=acos(Lez/Le);
233     WWe=-1*asin(Lex/(Le*sin(IIE)))*180/PI+180;
234     Fe=acos(((Ae*(1-Ee*Ee)/Re)-1)/Ee)*180/PI;
235     wwe=(asin(x[5]/(Re*sin(Ie)))-Fe)*180/PI;
236
237     Da=(ae-Ae)/ae;
```

```
238     De=(ee-Ee)/ee;
239     DI=(Ie-IIe)/Ie;
240     DW=(We-WWe)/We;
241     Dw=(we-wwe)/we;
242
243     //EC = -G*m1/Ae;
244     //DH = (E - EC)/E;
245
246     //r2=sqrt(x[0]*x[0]+x[1]*x[1]+x[2]*x[2]);
247     //r3=sqrt(x[3]*x[3]+x[4]*x[4]+x[5]*x[5]);
248
249     // K = 0.5*m2*(x[6]*x[6]+x[7]*x[7]+x[8]*x[8]) + 0.5*m3*(x[9]*x[9]+x[10]*x[10]+x[11]*x
        [11]);
250     //U = - G*(m1)/r2 - G*(m1)/r3;
251     //HC = K + U;
252
253     //DH =(H - HC)/H;
254
255     if(cnt>2000){
256         //intf("%.5e %.5e %.5e %.5e %.5e %.5e %.5e\n", t, x[0], x[1],x[2], x[3], x[4], x[5]);
257         fprintf(data,"%e %e %e %e %e %e %e %e %e %e %e %e %e %e %e\n", t*Dt, x[0], x[1],
            x[2], x[3], x[4], x[5], Ae*Daf, Da, Ee, De, IIE*180/PI, DI, WWe, DW , wwe, Dw);
258         //printf("%e %e %e %e %e %e %e\n", t*Dt, x[0], x[1], x[2], x[3], x[4], x[5]);
259         cnt=0;}
260     }
261     fclose(data);
262
263     return 0;
264 }
```

Anexo B. Programa cleaner

```
1
2
3   program cleaner
4   implicit none
5
6   double precision tn(10000000), signal_en(10000000)
7   double precision signal_i(10000000)
8   double precision t(10000000), x(10000000)
9   double precision y(10000000), z(10000000)
10  double precision vx(10000000), vy(10000000)
11  double precision vz(10000000), a(10000000)
12  double precision Da(10000000), e(10000000)
13  double precision De(10000000), in(10000000)
14  double precision Din(10000000), W(10000000)
15  double precision DW(10000000), om(10000000)
16  double precision Dom(10000000), K, PI
17  double precision a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10
18  double precision a11,a12,a13,a14,a15,a16,a17
19
20
21  integer npts, i, cnt,cntb, cntc
22
23  PI = 4.D0*atan(1.D0)
24
25  write(*,*) PI
26
27  !stop
28
29  open(unit=1,file='S02_00_00_1000_100.dat')
30  i = 1
31  10 read(1,*,end=99) a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10
32  $      ,a11,a12,a13,a14,a15,a16,a17
33
34  t(i) = a1
35  x(i) = a2
36  y(i) = a3
37  z(i) = a4
38  vx(i) = a5
```

```
39     vy(i) = a6
40     vz(i) = a7
41     a(i)  = a8
42     Da(i) = a9
43     e(i)  = a10
44     De(i) = a11
45     in(i) = a12
46     Din(i) = a13
47     W(i)  = a14
48     DW(i) = a15
49     om(i) = a16
50     Dom(i) = a17
51
52     i = i + 1
53     goto 10
54 99   close(1)
55
56     npts=i-1
57
58     write(*,*) npts
59
60 c    stop
61
62     cnt  = 0
63     cntb = 0
64     cntc = 0
65     open(unit=1,file='data_signal.dat')
66     do i = 1, npts
67         cnt  = cnt + 1
68         cntb = cntb + 1
69         if (cnt.eq.35) then
70             cntc = cntc + 1
71             tn(cntc) = t(cntb)
72             signal_en(cntc) = e(cntb)
73             signal_i(cntc) = in(cntb)
74             K = dsqrt(1-e(i)*e(i))*cos(signal_i(cnt)*PI/180.D0)
75             write(1,*) tn(cntc)/200000.0D0, signal_en(cntc),
76 $             signal_i(cntc), K
77             cnt = 0
78         end if
79     end do
80     close(1)
81
82     write(*,*) cntc, tn(cntc), signal_en(cntc), signal_i(cntc)
```


83

84

```
end program
```

Anexo C. Programa Transformada de Fourier

```
1 #####
2 #CARGANDO LIBRERIAS:
3 #!/usr/bin/env python
4 # -*- coding: utf-8 -*-
5 from numpy import *
6 from matplotlib.pyplot import *
7 import numpy as np
8 import matplotlib.pyplot as plt
9 #####
10
11 #CARGANDO SENAL:
12 print 'CARGANDO SENAL'
13 signal = loadtxt("data_signal.dat")
14
15 #ASIGNANDO VARIABLES TEMPORAL Y SENAL:
16 t = signal[:,0]
17 s = signal[:,1]
18
19 #LONGITUD DEL VECTOR Y VALOR M PARA REALIZAR FFT:
20 N = len(s)
21 M = (N-1)/2
22 print 'LONGITUD DEL VECTOR DE SENAL:', N
23
24 #REALIZANDO FFT:
25 print 'CALCULANDO TRANSFORMADA DE FOURIER:'
26 ft = fft.fft(s,N)
27
28 #LOCALIZANDO MAX VALOR TEMPORAL
29 T = t[-1]
30
31 #CREANDO VECTORES:
32 w= np.zeros(M)
33 A= np.zeros(M)
34 F= np.zeros(M)
35 Y= np.zeros(1)
36
37 #MAX VALOR DE LA AMPLITUD:
38 Amax = -1000000.
```

```
39
40 #CALCULANDO EL ESPECTRO DE FOURIER:
41 print 'CALCULANDO EL ESPECTRO DE FOURIER:'
42 for k in xrange(1,M):
43     w[k] = 2.*pi*k/T
44     A[k] = np.absolute(ft[k])
45     if A[k]>Amax:
46         Amax = A[k]
47         wmax = w[k]
48
49 F = A/Amax
50 print wmax
51
52 #REALIZANDO FIGURA DEL ESPECTRO DE FOURIER:
53 figure()
54 plot(w,F)
55 plt.axis([0.0,20.,0, 1.1])
56 plt.xlabel('frecuencia')
57 plt.ylabel('Amplitud')
58 savefig('espectro_excentricidad.png')
59
60 #RECUPERANDO SENAL ORIGINAL:
61 print 'RECUPERANDO SENAL:'
62 def signal_teo(t):
63     serie = ft[0]
64     for k in xrange(1,M):
65         w[k] = 2.*pi*k/T
66         serie = serie + 2.*ft[k]*exp(1j*w[k]*t)
67         #print k, serie
68     serie = serie/N
69     return serie
70
71 #REALIZANDO FIGURA DE LA SENAL Y LA RECUPERACION DE SENAL
72 figure()
73 plot(t,s, '.')
74 plot(t,signal_teo(t))
75 plt.xlabel('tiempo(UT)')
76 plt.ylabel('excentricidad')
77 plt.axis([0,10,0.45, 0.95])
78 savefig('excentricidad.png')
```

Anexo D. Programa para recortar gráficas cuando excentricidad es mayor que 1

```
1      program leercol
2      implicit none
3      integer n,i,l
4      parameter (n=5000000)
5      real a01(n),a02(n),a03(n),a04(n),a05(n),a06(n),a07(n),
6      +      a08(n),a09(n),a10(n),a11(n),a12(n),a13(n),a14(n),
7      +      a15(n),a16(n),a17(n)
8
9      ! Nuevo archivo con la senal recortada hasta que la excentricidad es mayor que 1.
10     open(5,file="S02_07_90_1000_003_new.dat",status='new')
11
12     i=1
13     open(1,file="S02_07_90_1000_003.dat",status='old')
14     2  read(1,*,end=3)a01(i),a02(i),a03(i),a04(i),a05(i),a06(i),a07(i)
15     +      ,a08(i),a09(i),a10(i),a11(i),a12(i),a13(i),a14(i),
16     +      a15(i),a16(i),a17(i)
17     c  write(*,*)'sssss',i,a01(i),a02(i)
18     if(i.gt.n.and.a01(i).le.0.)goto 3
19     if(a10(i).ge.1.)goto 3
20     i=i+1
21     goto 2
22     3  close(1)
23
24
25     !ultimo valor es i-1
26     l=i-1
27     write(*,*)'ultimo',i-1,a01(i-1),a02(i-1),a10(i-1),a10(i)
28
29
30     do i=1,l-1,10
31         write(5,*)a01(i),a02(i),a03(i),a04(i),a05(i),a06(i),a07(i),
32     +      a08(i),a09(i),a10(i),a11(i),a12(i),a13(i),a14(i),
33     +      a15(i),a16(i),a17(i)
34     enddo
35     close(5)
36
```

37

end