

**ESTUDIO FISICO-MATEMATICO DE LA ESTRUCTURA ESTELAR MEDIANTE
EL MODELO "POLYTROPE"**

**PABLO EDILSON CERON MUÑOZ
MAURICIO GERMAN JURADO PORTILLA**

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE FÍSICA
PASTO
2005**

**ESTUDIO FISICO-MATEMATICO DE LA ESTRUCTURA ESTELAR MEDIANTE
EL MODELO "POLYTROPE"**

**PABLO EDILSON CERON MUÑOZ
MAURICIO GERMAN JURADO PORTILLA**

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR EL TÍTULO DE FÍSICO

**Director:
ALBERTO QUIJANO VODNIZA
Master en Física. Director de la línea de investigación en Astrofísica.**

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE FÍSICA
PASTO
2005**

“Las ideas y conclusiones aportadas en este trabajo de grado, son responsabilidad exclusiva de los autores”.

Artículo primero del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966, emanado del Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de Aceptación

Director Trabajo de Grado

Jurado

Jurado

San Juan de Pasto, Mayo de 2005

AGRADECIMIENTOS

A nuestras familias que incondicionalmente nos brindaron su apoyo.

A Rosita María Rosero, Luis Angel Echeverry y Aleyda Muñoz por su inmensa calidad humana.

Al Master Alberto Quijano Vodniza quien es un ejemplo para nosotros y para las generaciones futuras.

A la Universidad de Nariño por brindarnos educación de gran calidad.

DEDICATORIA

Este trabajo lo dedico de todo corazón a mi madre Luz Marina, a mi tía Cecilia del Carmen, a mis hermanos y a mis amados sobrinos.

Mauricio Jurado Portilla.

DEDICATORIA

A mis padres, Graciela Muñoz y Segundo Cerón quienes siempre me brindaron confianza y proyectaron seguridad para el logro de mis propósitos.

A mi hija, Steffany Cerón y a mi familia por su valiosa comprensión y ayuda.

Para ustedes de todo corazón este trabajo.

Pablo Edilson Cerón Muñoz.

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCION	18
1. OBJETIVOS	19
1.1 OBJETIVO GENERAL	19
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	19
2. FISICA DEL INTERIOR ESTELAR	20
2.1 PROCESOS POLITRÓPICOS	20
2.2 ECUACIÓN DE ESTADO DE UN GAS IDEAL	26
2.3 PRESIÓN DE RADIACIÓN	28
2.4 PESO MOLECULAR MEDIO	29
2.5. ECUACIÓN DE ESTADO PARA UN GAS DEGENERADO	31
2.5.1 Caso no relativista para un gas degenerado	34
2.5.2 Caso relativista para un gas degenerado	35
2.6. FUENTES DE ENERGÍA EN EL INTERIOR ESTELAR	37
2.6.1 Ciclo del carbono	38
2.6.2 La cadena protón-protón	39
3. ECUACIONES DE LA ESTRUCTURA ESTELAR	41
3.1 EQUILIBRIO HIDROSTÁTICO	41
3.2 ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE LA MASA	43
3.3 ECUACIÓN DE LA PRODUCCIÓN DE ENERGÍA	43
3.4 ECUACIÓN DE TRANSFERENCIA RADIA TIVA	44

3.5. PROCESOS DE ABSORCIÓN Y DISPERSIÓN DE FOTONES	46
3.5.1 Absorción limite-limite (línea atómica de absorción)	46
3.5.2 Absorción limite libre (fotoionización)	46
3.5.3 Absorción libre-libre (Bremsstrahlung)	47
3.5.4 Dispersión	47
3.6 TEOREMA DEL VIRIAL	47
3.7 TEMPERATURA MEDIA MÍNIMA DE UNA ESTRELLA	51
3.8 GENERACIÓN DE LA ENERGÍA	53
3.9. TRANSFERENCIA DE ENERGÍA	54
3.9.1 Convección	54
3.9.2 Conducción	54
3.9.3 Radiación	54
4. ECUACIÓN DE LANE-EMDEN DE ÍNDICE n	56
4.1. SOLUCIÓN ANALÍTICA DE LA ECUACIÓN DE LANE-EMDEN	59
4.1.1 Caso $n=0$	59
4.1.2 Caso $n=1$	60
4.1.3 Caso $n=5$	62
4.2. PROCEDIMIENTO NUMÉRICO PARA LA SOLUCIÓN	72
5. EL PROGRAMA DE CÁLCULO	75
5.1 ESTRUCTURA DEL PROGRAMA	75
5.2 CÁLCULO DE ERRORES	80

6. CONCLUSIONES	82
BIBLIOGRAFIA	83
ANEXOS	86

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Resultados de la solución numérica de la ecuación de Lane-Emden para algunos valores de índices polytropes.	79

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Esquemas de los ciclos: (a) del carbono y (b) protón-protón	40
Figura 2. Las tres fuerzas que balancean el equilibrio hidrostático	41
Figura 3. Pantalla de presentación general del programa	72
Figura 4. Pantalla principal del programa	76
Figura 5. Soluciones numéricas de la ecuación de Lane-Emden para algunos índices polytropes	77

LISTA DE ANEXOS

	Pág.
Anexo A. Código del programa en Microsoft Visual Basic 6.0	86
Anexo B. Constantes físicas fundamentales, cantidades astronómicas y notación.	93

RESUMEN

A partir de principios termodinámicos se deduce la ecuación de Lane-Emden de índice n la cual es resuelta con ayuda de métodos numéricos. Dicha ecuación es establecida a partir del modelo Polytrope de estructura estelar, que con las condiciones iniciales adecuadas nos muestra una buena aproximación del interior de las estrellas.

ABSTRACT

From the thermodynamic premises the Lane-Emden equation of n -index, which is solved with the aid of numerical methods, is deduced. Such equation is established from the Polytrope model of stellar structure, which shows, along with the necessary initial conditions, a good approach from the stars' interior.

INTRODUCCION

Todos sentimos gran curiosidad por las cosas que observamos en el mundo que nos rodea, continuamente nos formulamos preguntas acerca de ello. A veces las respuestas no nos satisfacen y la única manera de acercarse a la verdad es llevando a cabo un estudio científico. Dicho estudio realizado por innumerables astrónomos y astrofísicos ha podido construir una base teórica que de alguna forma da una idea del universo al que pertenecemos. Por análisis espectrales y por consiguiente de energía, la ciencia ha obtenido mucha información acerca de la superficie de una estrella, y gracias a ello, se tiene un conocimiento físico y se han diseñado modelos del interior estelar para un mejor entendimiento de su estructura y evolución.

Las estrellas se forman en nubes moleculares compuestas de hidrogeno y polvo interestelar que por acción de la gravedad se contraen hasta llegar a un estado de equilibrio llamado *equilibrio hidrostático* en el cual la presión ejercida por la fuerza de la gravedad se equilibra con la presión ejercida por la radiación emitida en las regiones centrales de la estrella como producto de la fusión nuclear. Las estrellas en primera instancia se ubican en una etapa llamada *secuencia principal* en la cual el hidrógeno se transforma en helio como resultado de la fusión de los núcleos; cuando todo este hidrogeno se ha transformado, las estrellas han acumulado una masa característica y dependiendo de ella existirán cambios significativos en su estructura. Se convertirán en gigantes rojas, en enanas blancas y si son muy masivas en estrellas de neutrones o agujeros negros.

En este trabajo se describe un modelo de la estructura estelar que con ayuda de un programa computacional, brinda una idea aproximada del proceso de formación de las estrellas, el proceso de mantenimiento de las fusiones y la formación de cuerpos celestes que durante su existencia modifican el espacio-tiempo. Este modelo es llamado *polytrope* que considera una estrella como una esfera gaseosa cuyo comportamiento puede estudiarse considerando la teoría cinética de los gases y otras formulaciones. Este modelo es únicamente espacial, es decir, todas las variables están en función de la distancia al centro de la estrella y no se tienen en cuenta las variaciones temporales. La estructura de las estrellas ha sido desarrollada por muchos científicos como Lane, Lord Kelvin, Eddington y Emden y posteriormente Chandrasekhar y Eddington quienes por muchas décadas se dedicaron a construir modelos estelares.

1. OBJETIVOS

1.1 OBJETIVO GENERAL

Realizar un estudio físico-matemático de la estructura estelar.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

? Estudiar el modelo "Polytrope" de estructura estelar.

? Resolver la ecuación de Lane-Emden para algunos valores del índice politrópico.

? Diseñar un programa computacional en el lenguaje de programación Microsoft Visual Basic 6.0 para simular el modelo de la estructura estelar con base en el estudio físico-matemático.

2. FISICA DEL INTERIOR ESTELAR

En el proceso de formación de una estrella, partículas de hidrógeno y gas interestelar se condensan y por acción de la gravedad, se contraen. Esta contracción produce una gran cantidad de calor que permitirá que las reacciones nucleares tengan lugar en el interior de la estrella, y una gran cantidad de energía se libere en forma de radiación. La presión ejercida por la radiación mantiene la estrella en equilibrio, al balancearse con la presión debida a la contracción producida por la gravedad. Es así como en este capítulo se mostrarán algunos principios físicos que servirán para construir un modelo de la estructura de una estrella. La teoría cinética de los gases, la termodinámica y la mecánica en general, son las bases físicas que sustentan el estudio del modelo politrópico a discutir, que con las condiciones apropiadas proporcionan una idea aproximada del proceso de automantenimiento de las estrellas.

2.1 PROCESOS POLITRÓPICOS

Una estrella experimenta expansiones y contracciones a lo largo de su evolución, y lo hace cuasiestáticamente, es decir que el material estelar cambia lentamente de estado a través de una sucesión de estados de equilibrio. Los procesos politrópicos son cambios de estado cuasiestáticos en los cuales un sistema termodinámico cambia a capacidad calorífica constante, esto es¹:

$$C = \frac{dQ}{dT} = \text{cte} \quad (1)$$

donde las unidades de la capacidad calorífica son: $\frac{J}{K}$, es por eso que procesos cuasiestáticos en los cuales la presión P y el volumen V se mantienen constantes son politrópicos. Los procesos politrópicos fueron introducidos por primera vez en termodinámica por G. Zeuner, y fueron ampliamente utilizados por Emden y Helmholtz en el estudio de la estructura interna de esferas gaseosas en equilibrio hidrostático².

Un proceso adiabático es politrópico con capacidad calorífica nula. Un proceso isotérmico es un proceso politrópico con capacidad calorífica infinita. Este primer

¹ PINZÓN, Giovanni. Un modelo politrópico perturbado del sol para el estudio de oscilaciones no radiales. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2000. p. 28

² CHANDRASEKHAR, Subrahmanyan. An introduction to the study of stellar structure. Chicago: Dover publications, 1957. p. 40

tema permitirá comprender que tipo de procesos se llevan a cabo en el modelo polytrope a tratar. A partir de la primera ley de la termodinámica que establece la conservación de la energía para sistemas que tienen un número muy grande de partículas se tiene:

$$dQ = dU + PdV \quad (2)$$

Si el proceso es adiabático, entonces $dQ = 0$, por lo tanto:

$$dU = -PdV \quad (3)$$

y dado que la energía interna es función de la temperatura,

$$U = U(T) \quad (4)$$

entonces la ecuación (2) se puede escribir en la forma:

$$dQ = \frac{dU}{dT} dT + PdV \quad (5)$$

Definiendo C_p como una función de variables físicas. Entonces la capacidad calorífica es:

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_{p,cte} \quad (6)$$

Así la capacidad calorífica a volumen constante es:

$$C_v = \left(\frac{dU}{dT} \right) \quad (7)$$

Para determinar la capacidad calorífica a presión constante se debe tener en cuenta la ecuación de estado:

$$PV = nRT \quad (8)$$

donde n es el número de moles y $R = 8.31 \cdot 10^3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ es la constante universal de los gases; para una mol la relación general (8) se reduce a:

$$PV = RT \quad (9)$$

diferenciando se obtiene:

$$PdV + VdP = RdT \quad (10)$$

de (5) y (10) se deduce:

$$dQ = \frac{dU}{dT} + R dT + VdP \quad (11)$$

de la cual se tiene que a P constante, la capacidad calorífica viene dada por:

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_{P \text{cte}} = \frac{dU}{dT} + R \quad (12)$$

Las relaciones pertinentes a capacidad calorífica, son también válidas para calor específico ya que este no es más que la capacidad calorífica por unidad de masa o por número de moles. Combinando (7) y (12) se tiene que:

$$C_p = C_v + R \quad (13)$$

La teoría cinética de los gases y su modelo molecular del gas ideal, determina que la energía cinética translacional total de N moléculas de gas, es N veces la energía promedio por molécula:

$$Q = U(T) = \frac{3}{2} nRT \quad (14)$$

definiendo también el calor específico molar como.

$$c_p = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT} \quad \text{y} \quad c_v = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT} \quad (15)$$

medidos en $J \text{ mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ (es importante resaltar que el calor específico es la capacidad calorífica por unidad de masa, es por eso que los resultados posteriores son los mismos tanto para C_p como para C_v).

Si se transfiere energía por calor al sistema a volumen constante, no se realiza trabajo sobre el sistema, entonces de la primera ley de la termodinámica se nota que si: $PdV = 0$, entonces:

$$dQ = dU \quad (16)$$

En otras palabras, toda la energía transferida por calor se utiliza en aumentar la energía interna del sistema, entonces de acuerdo con (15) y (16) se obtiene que:

$$c_v = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT} = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} \quad (17)$$

Al sustituir (14) en (17) C_v tiene el valor numérico:

$$c_v = \frac{3}{2} R = 12.47 J \text{ mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad (18)$$

para gases monoatómicos, de donde fácilmente por medio de (13) se obtiene un valor para C_p que es:

$$c_p = \frac{3}{2} R + R = \frac{5}{2} R = 20.77 J \text{ mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad (19)$$

La razón entre calores específicos, γ , viene dada por:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{R}{c_v} \quad (20)$$

Fácilmente se puede notar que para gases monoatómicos³:

³ FLEURY, P y Mathieu J. Calor, termodinámica, estados de la materia. Madrid: Paraninfo, 1964. p. 195

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{5}{3} = 1.67$$

De la ecuación (7) para la energía interna U se tiene:

$$dU = C_V dT \quad (21)$$

dado que $R = Nk$ y con ecuación (13) es claro que la ecuación (9) de estado queda:

$$PV = NkT = (C_P - C_V)T \quad (22)$$

Donde N es el número de partículas, $k = 1.3805 \cdot 10^{-23} \text{ J } \cdot \text{K}^{-1}$ es la constante de Boltzmann y C_P es la capacidad calorífica a presión constante, diferenciando es claro que.

$$PdV + (C_P - C_V)dT = VdP \quad (23)$$

Combinando las ecuaciones (3), (21) y (23) se produce:

$$C_V dT = (C_P - C_V)dT + VdP \quad (24)$$

por tanto:

$$C_P = V \frac{dP}{dT} \quad (25)$$

y dado que

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} \quad (26)$$

Definiendo el índice politrópico n como:

$$n = \frac{1}{\gamma - 1} \quad (27)$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{n}{n + 1} \quad (28)$$

De las ecuaciones (22) y (25) se obtiene:

$$\frac{1}{T} dT = \frac{C_P - C_V}{C_P} \frac{1}{P} dP = \frac{\frac{C_P}{C_V} - 1}{\frac{C_P}{C_V}} \frac{1}{P} dP \quad (29)$$

$$\frac{1}{T} dT = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{P} dP \quad (30)$$

con la ecuación (28) se deduce que:

$$\frac{1}{T} dT = \frac{1}{n + 1} \frac{1}{P} dP \quad (31)$$

integrando y posteriormente realizando algunas operaciones sencillas se tiene:

$$\log T = \frac{1}{n + 1} \log P \quad (32)$$

$$(n + 1) \log T = \log P \quad (33)$$

$$\log T^{(n+1)} = \log P \quad (34)$$

$$P = T^{(n+1)} \quad (35)$$

Considerando la ecuación de estado termodinámica:

$$P = \frac{k}{m_H} T \quad (36)$$

$$T = \frac{m_H P}{k}$$

Donde \bar{m} es el peso molecular medio (masa media de las partículas en términos de la masa del átomo de hidrógeno) y $m_H = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$ es la masa del hidrógeno, de aquí (35) puede escribirse:

$$P = \frac{\bar{m} P}{k} \quad \text{y} \quad P = P P^n \frac{\bar{m} P}{k} \quad \text{y} \quad P = \frac{k}{\bar{m}} \frac{P^n}{n} \quad (37)$$

donde $K = \frac{k}{\bar{m}} \frac{P^n}{n}$, y dado que $P = \frac{n-1}{n}$, entonces de aquí se obtiene la relación polytrope, donde n es llamado el índice politrópico⁴:

$$P = K P^n \quad (38)$$

2.2 ECUACIÓN DE ESTADO DE UN GAS IDEAL

sea la ecuación de estado:

$$P_{gas} = nkT \quad (39)$$

donde $n = N/V$ es el número de partículas por unidad de volumen y k es la constante de Boltzmann. Se puede describir esta ecuación en la forma:

⁴ FLUGGE, S. Structure stellar, Volumen 51. Berlín: Springer – Verlag OHG, 1958. p. 13

$$P = P(\rho, T, \text{composición química}) \quad (40)$$

lo cual significa que se requiere una expresión para ρ , en términos de la densidad y la composición química. Se define la densidad de partículas por metro cúbico como:

$$\rho = n m \quad (41)$$

donde m es la masa media de la partícula, que en términos de la masa del átomo de hidrógeno, queda:

$$m = m_H \bar{m} \quad (42)$$

Por lo tanto la ecuación para la presión del gas se convierte en:

$$P_{gas} = \frac{kT}{m} \rho = \frac{kT}{m_H \bar{m}} \rho \quad (43)$$

Si se define la constante de los gases, R , como:

$$R = \frac{k}{m_H} \quad (44)$$

se obtiene la siguiente ecuación:

$$P_{gas} = \frac{R \rho T}{\bar{m}} \quad (45)$$

Esta es conocida como la ecuación de estado del gas ideal para el material estelar⁵.

⁵ Tomado de la página de Internet: http://www.shef.ac.uk/physics/people/vdhillon/teaching/phy213_eqnstate.htm

2.3 PRESIÓN DE RADIACIÓN

El camino libre medio de un fotón es del orden de centímetros. En este rango los cambios de temperatura son despreciables frente a la posibilidad de colisiones con otras partículas.

El material estelar se puede estudiar no solo a través de las propiedades de un gas de partículas, sino considerando a un gas de partículas sumado con un gas de fotones. La presión que ejerce el gas de fotones se denomina presión de radiación y es responsable del equilibrio térmico de la estrella.

Suponiendo que el material estelar contiene un número finito de elementos de volumen, cada elemento de volumen de este material emite un espectro de radiación de cuerpo negro. Mediante la fórmula de Planck para la densidad de energía ρ_{ν} emitida por un cuerpo negro a una cierta temperatura T y a una frecuencia ν , se puede obtener una expresión para la presión de radiación. Por la fórmula de distribución de Planck para la radiación de cuerpo negro:

$$\rho_{\nu}, T = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3 e^{h\nu/kT} - 1} \quad (46)$$

donde ν está medida en s^{-1} y $h = 6.6256 \cdot 10^{-34} J s$ es la constante de Planck, Integrando (46) resulta:

$$\int_0^{\infty} \frac{8\pi h\nu^3}{c^3 e^{h\nu/kT} - 1} d\nu = \frac{15\pi^5 k^4 T^4}{15 \cdot c^3} = aT^4 \quad (47)$$

Esta ecuación muestra que la energía de radiación de cuerpo negro aumenta rápidamente con la temperatura. Esta expresión constituye la ley de Stefan-Boltzmann para la radiación. Esta ley permite también estimar la temperatura de los cuerpos calientes, aproximando su radiación a la de un cuerpo negro, donde:

$$a = \frac{15\pi^5 k^4}{15 \cdot c^3} = \frac{4\pi^5}{15} = 7.5643 \cdot 10^{-16} J m^{-2} K^{-4} \quad (48)$$

es la constante de radiación y $\sigma = 5.76051 \cdot 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$ es la constante de Stefan - Boltzmann. La energía emitida en un volumen V es igual a aVT^4 , por consiguiente la energía para un gas de fotones es:

$$F = \frac{1}{3} aVT^4 \quad (49)$$

Por lo tanto la presión de radiación resulta ser⁶:

$$P_{rad} = \frac{dF}{dV} = \frac{1}{3} aT^4 \quad (50)$$

Ahora, la presión total se calcula a partir de:

$$P = P_{gas} + P_{rad} \quad (51)$$

Y por lo tanto:

$$P = \frac{R^*T}{\mu} + \frac{1}{3} aT^4 \quad (52)$$

Esta es conocida como la ecuación de estado para interiores estelares.

2.4 PESO MOLECULAR MEDIO

Es la masa media de las partículas en el gas en términos de la masa del átomo de hidrógeno, m_H . Un cálculo exacto del peso molecular medio, μ , es muy complicado ya que depende de la ionización fraccionaria de todos los elementos en todas las partes de una estrella. Se puede simplificar alguna cosa si se asume que todo el material en una estrella está ionizado completamente. Esto es muy válido porque el hidrógeno y el helio son más abundantes que todos los otros elementos y se ionizan completamente en el interior de una estrella, entonces:

$X =$ fracción por peso del hidrógeno

Si: $Y =$ fracción por peso del helio

$Z =$ fracción de los otros elementos

entonces se puede utilizar la siguiente relación:

⁶ HERRERA, Miguel. Para que sirve la física. México: Universidad Nacional Autónoma De Ciudad de México, 2001. p. 206

$$X + Y + Z = 1 \quad (53)$$

Esto significa que en un metro cúbico de material estelar de densidad ρ , hay una masa de:

$X\rho$ de hidrógeno

$Y\rho$ de helio y

$Z\rho$ de los otros elementos más pesados.

Ahora, en un gas completamente ionizado, cada átomo contribuye con $(e + 1)/A$ partículas (e electrones y un núcleo), donde A es el número de partículas del núcleo. Para conocer el número total de partículas que conforman la estrella se debe tener en cuenta que:

ρ El hidrogeno da 2 partículas por m_H (un núcleo que contiene un protón y un electrón)

ρ El helio da $3/4$ de partícula por m_H (un núcleo que contiene 2 protones y 2 neutrones = $4m_H$ y 2 electrones), y

ρ Elementos más pesados dan $\rho/2$ de partícula por m_H .

El término constante $1/2$, es aproximado. $(e + 1)/A \approx e/A + 1/2$. El número total de partículas por metro cúbico debido a hidrógeno, helio y otros elementos es:

$$\text{hidrógeno} \approx \frac{2X\rho}{m_H}$$

$$\text{helio} \approx \frac{3Y\rho}{4m_H} \quad \text{y}$$

$$\text{elementos más pesados} \approx \frac{Z\rho}{2m_H}$$

El número total de partículas por metro cúbico es entonces dado por la suma anterior:

$$n = \frac{1}{4m_H} (8X + 3Y + 2Z) \quad (54)$$

Ahora $X + Y + Z = 1$, y por lo tanto $Z = 1 - X - Y$, obteniendo:

$$n = \frac{1}{4m_H} (6X + Y + 2) \quad (55)$$

Recordando que $\rho = nm_H$, entonces⁷:

$$\rho = \frac{4}{6X + Y + 2} \quad (56)$$

2.5. ECUACIÓN DE ESTADO PARA UN GAS DEGENERADO

La ecuación (45) de estado para un gas ideal a una temperatura T es insuficiente para cálculos e investigaciones más exactas, por dos razones: la presión de la radiación electromagnética en las regiones centrales de las estrellas pueden hacerse comparables con la presión debida a las partículas, y además el gas formado por los electrones puede estar degenerado. La característica dual onda-corpúsculo de la materia implica que dos electrones no pueden hallarse más cercanos que aproximadamente una longitud de onda, y la longitud de onda disminuye cuando la velocidad relativa aumenta. La fuerza gravitatoria que contrae la estrella trata de juntar a sus electrones y estos se mueven rápidamente suministrando la presión para mantener la estrella que de esa forma queda equilibrada.

Los núcleos en la estrella no resultan afectados por esta gran compresión, ya que la longitud de onda de una porción de materia es inversamente proporcional a su masa, y los núcleos son miles de veces mas pesados que los electrones. Se dice que un gas esta degenerado, cuando la densidad de las partículas se hace tan grande, que estas pueden producir una distorsión en la función de distribución. Esto sucede en estrellas que ya terminaron su etapa en la secuencia principal y se transformaron en enanas blancas o estrellas de neutrones⁸.

⁷ FLEURY, Op. Cit., p. 195

⁸ HENBEST, Nigel. El Universo en Explosión. Madrid: Debate, 1982. p. 134

Primero que todo se considera que los electrones deben obedecer el principio de exclusión de Paulí (dos partículas no pueden tener el mismo estado cuántico en el mismo instante).

El estado cuántico de un electrón es dado por los seis valores que describen su posición y su momentum, es decir, X, Y, Z, p_x, p_y, p_z . No es posible, sin embargo, saber la posición y el momentum con completa exactitud al mismo tiempo. Hay una incertidumbre Δx y Δp (de acuerdo con el principio de Incertidumbre de Heisemberg) en la correspondiente coordenada de momentum y posición, tal que:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi} \quad (57)$$

En el centro de la estrella la densidad de electrones aumenta y los electrones se acercarán cada vez más y tenderán a ocupar la misma posición.

Si se considera un grupo de electrones ocupando un volumen V en el espacio de momentum comprendido entre p y $p + \Delta p$, entonces el volumen de una cáscara esférica de radio p y espesor Δp es:

$$V_m \approx 4\pi p^2 \Delta p \quad (58)$$

El volumen del espacio de fase ocupado por estos electrones está dado por el volumen que ocupan en el espacio de la posición multiplicado por el volumen que ocupan en el espacio del momentum, es decir:

$$V_f \approx 4\pi p^2 V_p \Delta p \quad (59)$$

El número de estados cuánticos en este volumen del espacio de fase es entonces:

$$N_{ec} \approx \frac{4\pi p^2 V_p \Delta p}{h^3} \quad (60)$$

Definiendo N_p como el número de electrones en V con momentum comprendido entre p y $p + dp$, el principio de exclusión de Paulí nos dice que⁹:

$$N_p = \frac{8p^2 V}{h^3} dp \quad (61)$$

Un gas totalmente degenerado es aquel en el cual todos los estados de momentum tienden a un valor crítico p_0 (estos resultados son también deducidos teniendo en cuenta que los electrones son partículas de espín semientero, que obedecen, la estadística de Fermi-Dirac. Un gas de fermiones degenerado es aquel que no interacciona, o lo hace muy débilmente bajo condiciones de energía y concentración tales que la temperatura T sea baja en comparación con la energía de Fermi e_F . En este caso p_0 coincide con el momentum de Fermi p_F)¹⁰, mientras que los estados con momentum mayor que p_0 son vacíos. Esto ocurre en el cero absoluto. Por lo tanto:

$$p \leq p_0 \quad N_p = \frac{8p^2 V}{h^3}, \quad \text{y para} \\ p > p_0 \quad N_p = 0 \quad (62)$$

El número total de electrones, N , en el volumen V está dado por:

$$N = \frac{8V}{h^3} \int_0^{p_0} p^2 dp = \frac{8p_0^3 V}{3h^3} \quad (63)$$

La presión, P , de un gas es la relación media de transporte de momentum que pasa a través de una unidad de área. Esto puede escribirse como:

⁹ CHANDRASEKHAR, Op. Cit., p. 358

¹⁰ KITTEL, Charles. Física térmica. España. Reverté, 1973. p. 243

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{p_0} \frac{N_p v_p p}{V} dp \quad (64)$$

Donde v_p es la velocidad de un electrón con momentum p . Para evaluar esta integral, se debe utilizar la relación entre p y v_p dadas por la teoría especial de la relatividad:

$$p = \frac{m_e v_p}{\sqrt{1 - \frac{v_p^2}{c^2}}} \quad (65)$$

$$v_p = \frac{p}{m_e \sqrt{1 - \frac{p^2}{m_e^2 c^2}}} \quad (66)$$

donde $m_e = 9.109389 \times 10^{-31} \text{ Kg}$ es la masa en reposo del electrón, combinando las tres expresiones para P , N_p y v_p se obtiene:

$$P = \frac{8}{3h^3 m_e} \int_0^{p_0} \frac{p^4}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{m_e^2 c^2}}} dp \quad (67)$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación de la presión de un gas totalmente degenerado. Se debe ahora tener en cuenta dos casos:

2.5.1 Caso no relativista para un gas degenerado. (Es decir $p_0 \ll m_e c$), en este caso:

$$\sqrt{1 - \frac{p^2}{m_e^2 c^2}} \approx 1 \quad (68)$$

por tanto:

$$P \approx \frac{8\pi}{3h^3 m_e} \int_0^{p_0} p^4 dp \approx \frac{8\pi p_0^5}{15h^3 m_e} \quad (69)$$

Como

$$N \approx \frac{8\pi p_0^3 V}{3h^3} \quad (70)$$

y dado que la concentración de electrones es:

$$n_e \approx \frac{N}{V} \quad (71)$$

Se puede concluir que :

$$p_0 \approx \frac{h}{2} \sqrt[3]{\frac{3n_e}{\pi}} \quad (72)$$

Combinando las ecuaciones (69) y (72) se tiene:

$$P \approx \frac{h^2}{20m_e} \sqrt[3]{n_e^5} \sqrt[3]{\frac{9}{\pi^2}} \quad (73)$$

2.5.2 Caso relativista para un gas degenerado. (Es decir $p_0 \gg m_e c$), esto sucede cuando la velocidad del electrón se aproxima a la velocidad de la luz, debido a que el gas está sometido a unas condiciones de presión extremas, en este caso su momento se aproxima al infinito porque la energía de las partículas se incrementa, entonces se puede despreciar 1 en comparación con el término $p^2 / m_e^2 c^2$ de la ecuación (67), es decir

$$\sqrt[3]{1 + \frac{p^2}{m_e^2 c^2}} \approx \sqrt[3]{\frac{p^2}{m_e^2 c^2}} \approx \frac{p}{m_e c} \quad (74)$$

Por lo tanto:

$$P = \frac{(8\pi^2 c)^{p_0}}{3h^3} \int_0^{p_0} p^3 dp = \frac{8\pi^2 c p_0^4}{12h^3} \quad (75)$$

Recordando que:

$$p_0 = \frac{h}{2} \left(\frac{3n_e}{\pi} \right)^{1/3} \quad (76)$$

Y sustituyendo en la ecuación (75) resulta:

$$P = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} h c n_e^{4/3} \quad (77)$$

El objetivo es obtener una ecuación de estado para un gas degenerado. Para esto se debe convertir la concentración de electrones n_e a densidad ρ . Se puede hacer un argumento similar teniendo en cuenta el peso molecular medio. Por cada masa de hidrógeno, hay un electrón. Para el helio y en los elementos mas pesados hay aproximadamente la mitad de un electrón por cada masa de hidrógeno. Así:

$$n_e = \frac{\rho X}{m_H} \left(\frac{1-X}{2m_H} \right) \quad (78)$$

donde X es la fracción de masa de hidrógeno, entonces utilizamos esta expresión para escribir:

$$P_{gas} = K_1 \rho^{5/3} \quad \text{Ecuación de estado para el caso no relativista} \quad (79)$$

$$P_{gas} = K_2 \rho^{4/3} \quad \text{Ecuación de estado para el caso relativista} \quad (80)$$

en las cuales:

$$K_1 \approx (h^2 / 20m_e)(3/\pi)^{2/3} (1 - X) / 2m_H \rho^{5/3} \quad \text{y} \quad (81)$$

$$K_2 \approx (hc / 8)(3/\pi)^{1/3} (1 - X) / 2m_H \rho^{4/3}$$

Por lo tanto en un gas degenerado, la presión depende solamente de la densidad y es independiente de la temperatura. Las enanas blancas y las estrellas de neutrones son ejemplos de estrellas en las cuales la presión debida a las partículas puede hacerse comparable con la presión de radiación.

2.6. FUENTES DE ENERGÍA EN EL INTERIOR ESTELAR

En el proceso de fusión nuclear, elementos ligeros se transforman en pesados. Los productos de estas reacciones poseen una masa que es menor a la suma de las masas de los elementos iniciales y la diferencia de masa es convertida en energía bajo la relación de Einstein:

$$E \approx mc^2 \quad (82)$$

La masa de un núcleo siempre es menor que la suma de las masas de sus partículas constituyentes, a la diferencia se le denomina la energía de ligadura.

Por núcleo esta energía se expresa como:

$$Q \approx \frac{1}{A} [Zm_p + Nm_n - m(Z, N)] c^2 \quad (83)$$

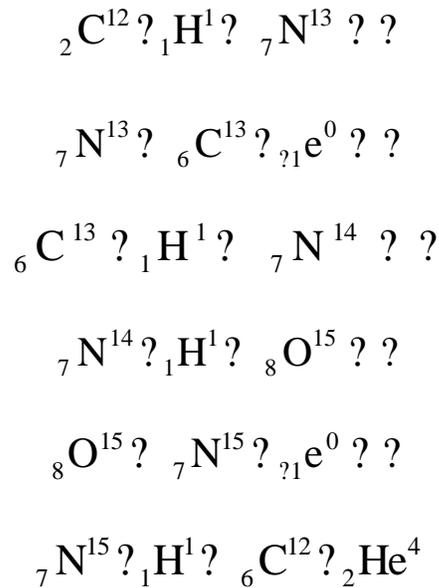
Donde m_p es la masa del protón, m_n es la masa del neutrón, A es el número atómico y corresponde a la suma de la carga nuclear Z y el número de electrones N y $m(Z, N)$ es la masa del núcleo¹¹.

La astrofísica muestra que la partícula más abundante en el sol o las estrellas es el núcleo del átomo de hidrógeno, o sea, el protón, que al fusionarse con otro se obtiene la fuente principal de energía en el interior solar, que es la conversión de hidrogeno en helio. Los dos mecanismos más importantes en este proceso de

¹¹ Tomado de la página de Internet: http://www.shef.ac.uk/physics/people/vdhillon/teaching/phy213_fusion1.html

producción de energía son “el ciclo de Bethe o del carbono” y el “ciclo de Critchfield o protón-protón”¹².

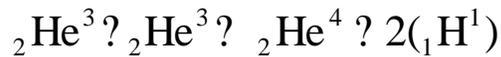
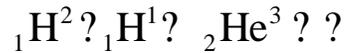
2.6.1 Ciclo del carbono. A temperaturas inferiores a los 20 millones de grados, la cadena protón-protón es el principal medio de producción de energía, pero a temperaturas mayores, con masas $M \approx 1,5M_{\odot}$, domina el ciclo del carbono como fuente de energía estelar. Las reacciones del ciclo del carbono son las siguientes:



El proceso empieza con la colisión de un protón con un núcleo de carbono, la cual produce una partícula ${}_7\text{N}^{13}$ con la emisión simultánea de un rayo gamma. La partícula ${}_7\text{N}^{13}$ decae en un isótopo del carbono, emitiendo un positrón y un neutrino. El positrón se aniquilará con el primer electrón que encuentre, y el neutrino abandona la estrella. A continuación, un segundo protón colisiona con el isótopo de carbono y se forma un núcleo de nitrógeno común. El cuarto paso ocurre cuando otro protón colisiona con el nitrógeno y forma una partícula inestable ${}_8\text{O}^{15}$, la cual decae formando un isótopo del nitrógeno, con la emisión de un positrón y un neutrino. El paso final ocurre cuando un cuarto protón colisiona con el núcleo del isótopo del nitrógeno, formando ${}_6\text{C}^{12}$, mas un núcleo de helio. En esta reacción, la cantidad de energía producida por núcleo de helio formado es de 25,0 Mev.

¹² CASTAÑEDA, Mauricio y Ewert De Geus, Jeannine. Introducción a la física moderna. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 1997. p. 323-325

2.6.2 La cadena protón-protón. En las estrellas con masas menores o iguales a la masa solar, la energía se produce por la cadena protón-protón. Las reacciones del ciclo protón-protón son las siguientes¹³:



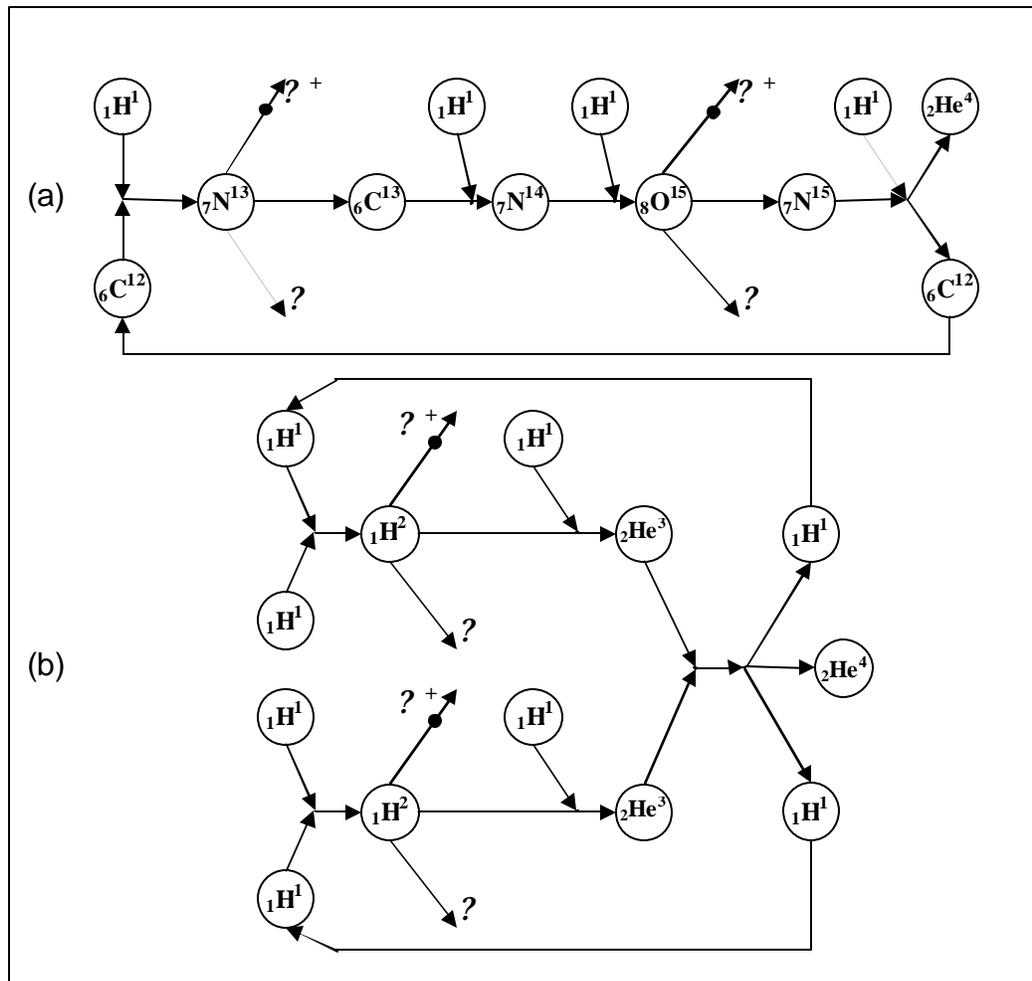
En el primer paso, dos protones colisionan y producen un deuterón, un positrón y un neutrino, este último escapa de la estrella llevándose parte de la energía producida; el positrón se aniquila con un electrón y se emiten dos rayos gamma.

El proceso continua con la colisión entre el deuterón y otro protón, de la cual se forma el helión que es un isótopo del helio, con la emisión simultanea de un rayo gamma. Esta reacción es muy rápida; por esta razón no se encuentra abundancia de deuterones en las estrellas. El último paso se da cuando dos partículas de helión colisionan y forman helio con la reemisión de dos protones.

El esquema de estos ciclos se muestra en la siguiente figura:

¹³ CASTAÑEDA, Op. cit., p. 323 - 325

Figura 1. Esquemas de los ciclos: (a) del carbono y (b) protón-protón.



Tomada del libro de Mauricio García Castañeda & Jeannine Ewert. *Introducción a la física moderna*. Pág. 325

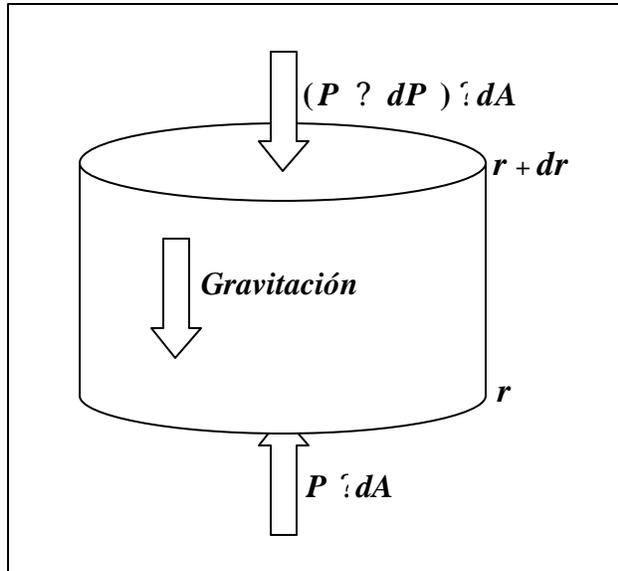
3. ECUACIONES DE LA ESTRUCTURA ESTELAR

El modelo más simple de una estrella, normalmente está descrito por un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales acopladas y tres ecuaciones algebraicas. Las ecuaciones diferenciales muestran la variación de $M(r)$ (es decir, la masa dentro de una esfera de radio r), la presión $P(r)$, la temperatura T y la luminosidad $L(r)$, como funciones de la distancia radial al centro de la estrella. Las tres ecuaciones algebraicas son: La ecuación de estado que asocia la presión, la temperatura, la densidad ρ y la composición química; la ecuación de la opacidad y por último la ecuación para la producción de energía.

3.1 EQUILIBRIO HIDROSTÁTICO

Considerando una estrella como una esfera gaseosa, y teniendo en cuenta un cilindro pequeño en el interior de la esfera, se tiene:

Figura 2. Las tres fuerzas que balancean el equilibrio hidrostático



La altura del cilindro es dr y la superficie de la base superior e inferior es dA . Dado que la variación dr es muy pequeña, suponemos una densidad constante

dentro del cilindro, entonces, existen tres fuerzas que actúan sobre el cilindro cuya magnitud es :

1. Una fuerza hacia arriba sobre la superficie de la base inferior que se denota \vec{F}_1 :

$$\vec{F}_1 = \int P(r) d\vec{A} \quad (84)$$

2. Una fuerza hacia abajo sobre la base superior del cilindro a una distancia $r + dr$, desde el centro de la estrella:

$$\vec{F}_2 = - \int P(r + dr) d\vec{A} \quad (85)$$

3. Una fuerza gravitacional actuando hacia abajo sobre el cilindro:

$$\vec{F}_3 = - \int G \frac{M(r)}{r^2} \vec{r} dr d\vec{A} \quad (86)$$

Por equilibrio hidrostático y teniendo en cuenta únicamente la magnitud de los vectores se obtiene:

$$P(r) dA - P(r + dr) dA - G \frac{M(r)}{r^2} \int \vec{r} dr dA = 0 \quad (87)$$

Y teniendo en cuenta que:

$$P(r + dr) = P(r) + \frac{dP}{dr} dr \quad (88)$$

Reemplazando la ecuación (88) en la ecuación (87) resulta :

$$\frac{dP}{dr} = - G \frac{M(r)}{r^2} \int \vec{r} \quad (89)$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación de equilibrio hidrostático (porque se dedujo originalmente para fluidos); es una de las ecuaciones básicas que describen la estructura de una estrella¹⁴. Implica que ninguna de las variables

¹⁴ HERRERA Op. cit., p. 217

físicas (macroscópicas) de la estrella cambia rápidamente en el tiempo, y muestra el equilibrio que existe entre la fuerza asociada a la presión de las partículas internas hacia la superficie de la estrella y la fuerza gravitacional.

3.2 ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE LA MASA

La generación de energía en el interior estelar se debe a la síntesis de elementos químicos, sin embargo esta conversión ocurre a una escala tan relativamente lenta que considerar la masa total del sol como constante es una buena aproximación.

Considerando una estrella como una esfera de volumen V y masa m . El volumen de un elemento esférico contenido dentro de la estrella es:

$$dV = 4\pi r^2 dr \quad (90)$$

Y la masa contenida dentro de ese elemento es:

$$dm_r = \rho dV = 4\pi r^2 \rho dr \quad (91)$$

por lo tanto:

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad (92)$$

Esta ecuación recibe el nombre de ecuación de conservación de la masa, donde $M(r)$ es la masa incidente en una estrella de radio r y $dM(r)$ es el incremento de la masa¹⁵.

3.3 ECUACIÓN DE LA PRODUCCIÓN DE ENERGÍA

La energía que se genera en el interior de las estrellas es transferida hacia la superficie y después es irradiada hacia el espacio. En este proceso la energía que se pierde por radiación, es compensada por los procesos nucleares que se presentan en el interior.

Considerando una estrella con simetría esférica en la cual la transferencia de energía es únicamente radial, es decir, las variaciones temporales no se tienen en cuenta. Si $L(r)$ es la tasa del flujo de energía a través de una esfera de radio

¹⁵ HERRERA, Op. Cit., p. 217

r (luminosidad) y $L(r \rightarrow dr)$ es la tasa del flujo de energía a través de una esfera de radio $r \rightarrow dr$. El volumen de un cascarón esférico está dado por:

$$dV = 4\pi r^2 dr \quad (93)$$

la masa del cascaron será entonces:

$$dm_r = 4\pi r^2 \rho dr \quad (94)$$

la energía liberada por el cascarón se puede escribir:

$$dL(r) = 4\pi r^2 \epsilon dr \quad (95)$$

donde ϵ es el coeficiente de producción de energía y se define como la energía liberada por unidad de masa por unidad de tiempo ($W Kg^{-1}$).

Por conservación de energía se tiene:

$$dL(r) = L(r \rightarrow dr) = L(r) + 4\pi r^2 \epsilon dr \quad (96)$$

de donde fácilmente se puede mostrar que:

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon \quad (97)$$

Esta ecuación es llamada la ecuación de la producción de energía o ecuación de luminosidad. Esta ecuación muestra que la tasa de producción de energía depende de la distancia al centro estelar¹⁶.

3.4 ECUACIÓN DE TRANSFERENCIA RADIATIVA

La radiación se propaga a través de un medio material interaccionando con él. Los fotones de un haz pueden ser absorbidos o dispersados; es así como la interacción materia-radiación puede añadir o sustraer energía de un haz de radiación. La energía transferida por metro cuadrado por segundo, es decir, el flujo

¹⁶ HIGUERA, Mario. Un laboratorio llamado Universo. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2003. p. 121

radiativo F_{rad} , se puede expresar en términos del gradiente de temperatura y de un coeficiente de conductividad radiativa, κ_{rad} cuyas unidades son $J m^{-1} s^{-1} K^{-1}$ como sigue:

$$F_{rad} = -\kappa_{rad} \frac{dT}{dr} \quad (98)$$

Los astrónomos generalmente trabajan con lo contrario a la conductividad radiativa conocido como opacidad que mide la disminución en la intensidad de los rayos de luz cuando atraviesan un medio, entonces, una estrella con opacidad baja, puede radiar su energía rápidamente. Esta opacidad κ , medida en $m^2 kg^{-1}$ es definida por:

$$\kappa = \frac{4acT^3}{3\kappa_{rad}} \quad (99)$$

Donde $a = 7.55 \times 10^{-16} J m^{-3} K^{-4}$ es la constante de densidad de radiación y c es la velocidad de la luz. Combinando las relaciones (98) y (99) se obtiene:

$$F = -\frac{4acT^3}{3\kappa_{rad}} \frac{dT}{dr} \quad (100)$$

Como el flujo y la luminosidad están relacionados mediante la ecuación:

$$L = 4\pi r^2 F \quad (101)$$

Se puede escribir:

$$L = -\frac{16\pi acr^2 T^3}{3\kappa_{rad}} \frac{dT}{dr} \quad (102)$$

De donde se obtiene:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{16} \frac{L}{4\pi r^2 T^3} \quad (103)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de transferencia radiativa y es el gradiente de temperatura que se presentaría en una estrella si toda la energía fuese transferida por radiación.

3.5. PROCESOS DE ABSORCIÓN Y DISPERSIÓN DE FOTONES

Si un haz de radiación se propaga a través de un medio en una dirección determinada, existe una probabilidad de que un fotón sea absorbido o dispersado (la interacción radiación-materia tiene un carácter estadístico). Existen cuatro procesos para dispersar y absorber fotones de los cuales tres implican la desaparición de un fotón, mientras que el cuarto altera la dirección del fotón¹⁷.

3.5.1 Absorción límite-límite (línea atómica de absorción). Ocurre cuando un electrón se mueve a partir de un nivel de energía a otro con energía más alta debido a la absorción de un fotón. Si la energía de los dos niveles es E_2 y E_1 , un fotón de frecuencia ν_{bb} producirá una transición si:

$$E_2 - E_1 = h\nu_{bb} \quad (104)$$

Este proceso es responsable de las líneas espectrales visibles en los espectros estelares que se forman en las atmósferas estelares. Los átomos están altamente ionizados y solamente una fracción pequeña contiene electrones en sus niveles. Además, la mayoría de los fotones en interiores estelares son tan energéticos que es probable causar absorciones libres como lo veremos en el segundo proceso.

3.5.2 Absorción límite libre (fotoionización). Este proceso implica la expulsión de un electrón de una órbita debido a la absorción de un fotón. Un fotón de frecuencia ν_{bf} convertirá un electrón con energía E_1 en un electrón libre con energía E_3 si:

$$E_3 = E_1 + h\nu_{bf} \quad (105)$$

¹⁷ COLLINS, George. The fundamentals of the stellar astrophysics. New York: W.H. Freeman And Company, 2003. p. 80

Con tal que el fotón tenga suficiente energía para quitar el electrón del átomo o del ion.

3.5.3 Absorción libre-libre (Bremsstrahlung). Ocurre cuando un electrón libre con energía E_3 absorbe un fotón de frecuencia ν_{ff} y se mueve a un estado de energía E_4 , donde:

$$E_4 = E_3 + h\nu_{ff} \quad (106)$$

Este proceso ocurre tanto en atmósferas estelares como interiores estelares.

3.5.4 Dispersión. Es un proceso en el cual un fotón colisiona con un núcleo y no pierde su identidad después de la colisión, y se cumple si la energía del fotón satisface:

$$h\nu \gg mc^2 \quad (107)$$

Donde m es la masa de la partícula que produce la dispersión.

3.6 TEOREMA DEL VIRIAL

Una de las necesidades inmediatas de este trabajo es determinar el estado físico del interior estelar. Además de la densidad, y otros parámetros, es muy importante conocer la temperatura del material estelar que puede calcularse si se conoce la energía total (térmica más gravitatoria) de una estrella. Si se divide la ecuación de equilibrio hidrostático entre la ecuación de la conservación de la masa, se tiene que:

$$\frac{dP}{dM} = -G \frac{M(r)}{4\pi r^4} \quad (108)$$

Donde $G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ Kg}^{-2}$ es la constante de gravitación universal. Multiplicando ambos lados de la ecuación por $4\pi r^3$, la ecuación (108) se puede escribir:

$$4\pi r^3 dP = -G \frac{M(r)}{r} dM \quad (109)$$

Integrando esta ecuación sobre toda la estrella, se encuentra:

$$\int_{P_c}^{P_s} \gamma V dP = \int_0^{M_s} \gamma G \frac{M(r)}{r} dM \quad (110)$$

El lado izquierdo de esta última ecuación se puede integrar por partes, dando:

$$\int_{V_c}^{V_s} P dV = \int_0^{M_s} \gamma G \frac{M(r)}{r} dM \quad (111)$$

Dado que la masa en el centro de la estrella es igual a cero, el volumen de la misma será igual a cero, y además la presión en la superficie de la estrella es cero. Por lo tanto la ecuación (111) se puede escribir como:

$$\int_0^{V_s} P dV = \int_0^{M_s} \gamma G \frac{M(r)}{r} dM \quad (112)$$

Ahora el trabajo realizado para traer un elemento de masa dM desde el infinito hasta r será:

$$\gamma G \frac{M(r)}{r^2} dM dr = \gamma G \frac{M(r)}{r} dM \quad (113)$$

La energía potencial gravitacional total de la estrella es la integral de la ecuación (113), es decir:

$$\int_0^{M_s} \gamma G \frac{M(r)}{r} dM \quad (114)$$

Por lo tanto la ecuación (112) se puede escribir:

$$\int_0^{V_s} P dV = 0 \quad (115)$$

Esta ecuación que es de gran importancia en astrofísica se conoce con el nombre de **Teorema del virial** y relaciona la energía potencial gravitacional de una estrella con su energía térmica¹⁸. La ecuación (115) es el resultado del teorema del virial generalizado de naturaleza estadística¹⁹, donde $\int 3P dV$ resulta ser el virial de Clausius, P es la presión externa sobre la superficie del sistema y dV representa un elemento de volumen arbitrario tomado en la región donde P es aplicada.

Dentro de todas las interacciones posibles entre las partículas del sistema se considera solo la gravitacional, para este caso el virial de Clausius coincide con la energía potencial Φ como lo muestra la ecuación (114).

Una forma alternativa de este teorema puede escribirse como:

$$2T_c + \Phi = 0 \quad (116)$$

Donde T_c es la energía cinética y Φ la energía potencial de las partículas.

Una de las aplicaciones directas del teorema del Virial es el cálculo de la energía total de la estrella, de la siguiente manera:

Considerando un elemento de masa dm a una temperatura T . De la Teoría Cinética de los gases, la energía cinética media de una molécula en este elemento es:

$$E = \frac{3}{2} kT \quad (117)$$

Donde k es la constante de Boltzmann. Si existen dN moléculas en el elemento de masa bajo consideración²⁰. La contribución de la energía cinética debido a este elemento de masa está dado por:

¹⁸ Tomado de la página de Internet: http://www.shef.ac.uk/physics/people/vdhillon/teaching/phy213_virial.html

¹⁹ GOLDSTEIN, Herbert. Mecánica clásica. España: Reverté, 1979. p. 101

²⁰ CHANDRASEKHAR, Op. Cit., p. 51

$$dT_c = \frac{3}{2}kTdN = \frac{3}{2}RTdm = \frac{3}{2}(C_P - C_V)Tdm \quad (118)$$

pero la energía interna, dU , del elemento de masa es:

$$dU = c_V Tdm \quad (119)$$

de aquí:

$$dT_c = \frac{3}{2}(C_P - C_V) \frac{dU}{C_V} \quad (120)$$

Reemplazando en la ecuación (118) y teniendo en cuenta que:

$$C_P - C_V = R \quad (121)$$

se obtiene:

$$dT_c = \frac{3}{2} \frac{R}{C_V} dU \quad (122)$$

Reemplazando en $2T_c = \frac{3}{2} \frac{R}{C_V} U$, se tiene:

$$3 \frac{R}{C_V} U = 2T_c \quad (123)$$

Teniendo en cuenta que la energía total E es igual a:

$$E = U + 2T_c \quad (124)$$

Entonces, según las ecuaciones (122) y (123) se deduce que:

$$E = \frac{3}{2} \frac{R}{C_V} U + 2T_c = \frac{3}{2} \frac{R}{C_V} U + 2 \left(\frac{3}{2} \frac{R}{C_V} U \right) = \frac{3}{2} \frac{R}{C_V} U + 3 \frac{R}{C_V} U = \frac{9}{2} \frac{R}{C_V} U \quad (125)$$

A medida que la estrella radia, su energía gravitatoria disminuye (se hace más negativa) y, además, la estrella se calienta. En el caso de un gas ideal completamente ionizado ($\gamma = 5/3$), parte de la energía liberada en la contracción se radia al exterior y otra parte se almacena como energía interna de la estrella [9]. La energía total de las partículas E (no se incluye fotones) debe ser negativa pues las partículas que conforman la esfera están confinadas a ella, esto ocurre solamente si $\gamma < 4/3$. Para $\gamma = 4/3$ la energía total se hace cero y las partículas, libres de toda interacción se mueven con velocidad constante apartándose unas de otras; por lo tanto es de esperar que ocurran inestabilidades dinámicas en la esfera si por alguna circunstancia γ cambia súbitamente alrededor de²¹ $4/3$.

3.7 TEMPERATURA MEDIA MÍNIMA DE UNA ESTRELLA

Considerando el teorema del virial:

$$3 \int_0^{V_s} P dV + \Omega = 0 \quad (126)$$

Y dado que el término energía potencial gravitacional Ω se puede escribir como:

$$\Omega = - \int_0^{M_s} G \frac{M(r)}{r} dM \quad (127)$$

Considerando que $r \leq r_s$, esto significa:

$$\int_0^{M_s} G \frac{M(r)}{r} dM \leq \int_0^{M_s} G \frac{M(r)}{r_s} dM \leq G \frac{M_s^2}{2r_s} \quad (128)$$

El teorema del virial puede ahora expresarse de la siguiente manera:

$$3 \int_0^{V_s} P dV + 3 \int_0^{M_s} \frac{P}{\rho} dM \quad (129)$$

²¹ PINZÓN, Op. Cit., p. 18

la presión P en esta ecuación está dada por:

$$P = P_{gas} + P_{rad} \quad (130)$$

donde P_{gas} es la presión del gas y P_{rad} es la presión de radiación. Asumiendo por el momento que las estrellas están compuestas por un gas ideal con presión de radiación insignificante, se puede escribir:

$$P = nkT = \frac{kT}{m} \quad (131)$$

donde n es el número de partículas por metro cúbico, m es la masa media de las partículas en el material estelar y k es la constante de Boltzmann. Se puede obtener entonces para el teorema del virial:

$$\int_0^{M_s} 3P dM = \int_0^{M_s} \frac{kT}{m} dM \quad (132)$$

de aquí se puede describir la ecuación (128) como:

$$\int_0^{M_s} \frac{kT}{m} dM = G \frac{M_s^2}{2r_s} \quad (133)$$

De donde:

$$\int_0^{M_s} T dM = G \frac{M_s^2 m}{6kr_s} \quad (134)$$

la integral del lado izquierdo es la suma de las temperaturas de todos los elementos infinitesimales dM . La temperatura media de la estrella está dada por esta integral dividida entre la masa total de la estrella, M_s , es decir:

$$M_s T_{mm} = \int_0^{M_s} T dM \quad (135)$$

Combinando las dos últimas expresiones, se obtiene una desigualdad que nos proporciona la temperatura media mínima de una estrella:

$$T_{mm} \geq G \frac{M_s m}{6k r_s} \quad (136)$$

3.8 GENERACIÓN DE LA ENERGÍA

Existen tres fuentes posibles de generación de energía: la contracción gravitacional, las reacciones químicas y las reacciones nucleares.

La teoría cinética de los gases muestra que en un gas ideal la energía cinética de una partícula se obtiene multiplicando $kT/2$ por el número de grados de libertad, si las partículas se mueven en tres direcciones, se obtiene $3kT/2$. La energía térmica por unidad de volumen está dada por $3nkT/2$, donde n es el número de partículas por unidad de volumen y k es la constante de Boltzmann.

De acuerdo con el teorema del virial, se tiene:

$$\int_0^{V_s} 3P dV \leq 0 \quad (137)$$

Si se asume que el material estelar es un gas ideal; se puede sustituir la expresión $P = nkT$ en la ecuación (137), para obtener:

$$\int_0^{V_s} 3nkT dV \leq 0 \quad (138)$$

Definiendo la energía total térmica de una estrella, U , como la integral sobre todo el volumen de la energía térmica por unidad de volumen, $3nkT/2$, se puede escribir:

$$2U \leq 0 \quad (139)$$

3.9. TRANSFERENCIA DE ENERGÍA

Hay tres maneras por las cuales la energía puede transferirse en las estrellas:

3.9.1 Convección. Transferencia de energía por movimiento total de los elementos del gas.

3.9.2 Conducción. Transferencia de energía por el intercambio de la misma durante colisiones entre las partículas del gas (generalmente electrones).

3.9.3 Radiación. Transferencia de energía por la absorción o emisión de los fotones generados en el gas.

La conducción y la radiación son procesos que implican la transferencia de energía por interacción directa, entre las partículas en el caso de la conducción y los fotones en el caso de la radiación (transferencia radiativa). La energía cinética media llevada por una partícula con tres grados de libertad es $3kT/2$ deducido a través del principio de equipartición de la energía, y es comparable con la que lleva un fotón, $h\nu$; pero la densidad del número de partículas en una estrella es mayor que la de fotones. Un fotón en un punto del interior de una estrella viaja aproximadamente $10^{10} m$ antes de ser absorbido o dispersado, mientras que una partícula sólo viaja alrededor de $10^{10} m$, esto significa que los fotones tienen un transporte mayor de energía. En la energía transferida por conducción el camino libre medio de los electrones no es lo suficientemente largo; este mecanismo de transferencia de energía es por tanto insignificante en casi todas las estrellas de la secuencia principal. La radiación es el mecanismo dominante del transporte de energía en la mayoría de las estrellas ya que el camino libre medio de los fotones es más largo. En la transferencia radiativa de energía, los fotones emitidos en las partes calientes de la estrella son absorbidos en las partes más frías; por lo cual existe un gradiente de temperatura, tal que el flujo neto de radiación es hacia el exterior de la estrella. Se dice que una estrella está en equilibrio radiativo si la energía liberada en su interior es transferida hacia el exterior por radiación²². En una esfera gaseosa, el gradiente de temperatura está relacionado con la luminosidad a través de la siguiente ecuación:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{L_r}{4\pi r^2 T^3} \quad (140)$$

²² PINZÓN, Op. Cit., p. 26

En donde a es la constante de radiación, C la velocidad de la luz, y ρ la densidad. El coeficiente de absorción por unidad de masa κ depende de la densidad, temperatura y composición química.

La transferencia radiativa se hace ineficiente cuando el gradiente de temperatura excede un valor crítico; en este caso, se producen movimientos del gas estelar, que transportan la energía más eficientemente. En estos movimientos convectivos, el gas caliente sube hacia capas más frías, donde pierde su energía y baja nuevamente. Este ascenso y descenso de los elementos del gas mezclan el material estelar, y la composición de las partes convectivas se hace homogénea. Si, además, los cambios de presión debido a los movimientos establecidos en el fluido son despreciables, es decir, se sigue manteniendo el equilibrio hidrostático, se dice que el fluido se encuentra en equilibrio convectivo.

La expresión que determina el gradiente de temperatura para procesos convectivos y por lo tanto el equilibrio convectivo es:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{dT}{dr} \frac{d\rho}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} \quad (141)$$

Donde P es la presión del gas y γ es el exponente adiabático que es la razón de los calores específicos a presión y a volumen constante C_P/C_V . La ecuación anterior se conoce como el gradiente de temperatura adiabático, y representa el hecho de que masas de gases en movimiento deben de estar gobernadas por la ecuación de estado adiabática²³:

$$T = P^{\frac{1}{\gamma}} \quad (142)$$

²³ HIGUERA, Op Cit., p. 123

4. ECUACIÓN DE LANE-EMDEN DE ÍNDICE n

Adoptando la hipótesis de equilibrio hidrostático, se puede considerar la evolución espacial de las estrellas, más no la temporal, debido a que las reacciones nucleares responsables de la evolución son muy lentas. De forma que es posible tratar la evolución como si esta ocurriese a través de una sucesión de configuraciones de equilibrio²⁴.

El modelo para la estructura interna de las estrellas se puede realizar representándolo en un instante de tiempo, despreciando la derivada temporal de las ecuaciones de la hidrodinámica.

Casos más generales tienen lugar cuando la estrella abandona el equilibrio hidrostático, o más aun cuando se considera campos magnéticos y rotación. No se los considera en este modelo estático denominado modelo polytrope.

La ecuación politrópica (37) que relaciona la presión local y la densidad en un cierto punto de la estrella es la siguiente:

$$P(r) = K \rho(r)^{\frac{n+1}{n}} \quad (143)$$

K es una constante, y n es el índice politrópico que dependen del tipo de estrella que se desee estudiar y se encuentra ligado con la densidad; como esta cambia con la evolución entonces n puede considerarse como un parámetro que determina la evolución de las estrellas. Otra forma de escribir la anterior ecuación es:

$$\frac{P(r)}{P_c} = \frac{\rho(r)}{\rho_c}^{\frac{n+1}{n}} \quad (144)$$

Donde ρ_c y P_c son los valores correspondientes a la densidad central y a la presión central. Introduciendo una función auxiliar $\theta(r)$ definida por:

²⁴ PINZÓN, Op. Cit., p. 38

$$\rho(r) = \frac{\rho_c(r)^{\frac{1}{n}}}{P_c} \quad (145)$$

combinando las ecuaciones (144) y (145) se obtiene:

$$\rho(r) = \frac{P(r)^{\frac{1}{n+1}}}{P_c} \quad (146)$$

es decir que:

$$\rho(r) = \rho_c \rho^n \quad (147)$$

y

$$P(r) = P_c \rho^{n+1} \quad (148)$$

derivando la ecuación (148):

$$\frac{dP}{dr} = (n+1)P_c \rho^n \frac{d\rho}{dr} \quad (149)$$

Tomando la ecuación de equilibrio hidrostático:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} = \frac{r^2}{\rho(r)} \frac{d\rho}{dr} \rho \quad GM(r) \quad (150)$$

diferenciando ambos lados de esta última con respecto a r y teniendo en cuenta la ley de conservación de masa (91):

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{d\rho(r)}{dr} \right) = G \frac{dM(r)}{dr} = 4\pi Gr^2 \rho(r) \quad (151)$$

se encuentra que:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} K(r)^{\frac{n+1}{2}} \right) = G(r) \quad (152)$$

como:

$$K(r)^{\frac{n+1}{2}} = \int r^{\frac{1}{n}} r^{n+1} \quad (153)$$

entonces:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} K(r)^{\frac{1}{2}} \right) = G(r)^n \quad (154)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^{\frac{1}{2}} K(n+1) r^2 \right) = \frac{d}{dr} G(r)^n \quad (155)$$

donde $r = r_c$; con el parámetro de distancia a igual a:

$$a^2 = \frac{(n+1)P_c}{4G_c^2} = \frac{K(n+1)r_c^{\frac{1}{2}}}{4G} \quad (156)$$

Al reemplazar (156) en (155) se tiene:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(a^2 r^2 \frac{d}{dr} G(r)^n \right) = G(r)^n \quad (157)$$

Definiendo una nueva variable:

$$r = \frac{r}{a} \quad (158)$$

con

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{d\rho}{dr} \right) + \frac{1}{a} \frac{d}{dr} \left(\frac{d\rho}{dr} \right) \quad (159)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{d\rho}{dr} \right) + \frac{1}{a} \frac{d}{dr} \left(\frac{d\rho}{dr} \right) + \frac{1}{a^2} \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{d\rho}{dr} \right) \quad (160)$$

Finalmente se obtiene la ecuación de Lane-Emden que describe la estructura completa de una estrella polytrope de índice n :

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta^n = 0 \quad (161)$$

Las condiciones iniciales de esta ecuación son independientes del índice n :

$$\theta(0) = 1 \quad (162)$$

$$\left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0 \quad (163)$$

El valor de $\xi = 0$, corresponde también al valor de $r = 0$.

4.1. SOLUCIÓN ANALÍTICA DE LA ECUACIÓN DE LANE-EMDEN

Esta ecuación es crucial en todos los modelos politrópicos y su solución analítica es posible tan solo para algunos casos particulares²⁵, $n = 0$, $n = 1$ y $n = 5$. Para otros valores es necesario utilizar métodos numéricos.

4.1.1 Caso $n = 0$. La ecuación de Lane-Emden es:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta = 0 \quad (164)$$

la cual después de una primera integración queda:

²⁵ PINZÓN, Op. Cit., p. 39

$$x^2 \frac{dy}{dx} - y^3 = A \quad (165)$$

donde A es una constante de integración²⁶. Una segunda integración conduce a:

$$-\frac{1}{2y^2} = \frac{Ax^3}{6} + B \quad (166)$$

B es la segunda constante de integración que al igual que A se determina por la condición inicial:

$$-\frac{1}{2y(0)^2} = 1 \quad (167)$$

en el origen así:

$$A = 0$$

por tanto:

$$B = 1$$

entonces:

$$-\frac{1}{2y^2} = 1 + \frac{x^3}{6} \quad (168)$$

la función y_0 tiene su primera raíz en $x = x_1$ donde:

$$x_1 = \sqrt[3]{6} \quad (169)$$

4.1.2 Caso $n = 1$. La ecuación (170) queda:

$$\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dx} - y^2 \frac{dx}{dy} = 0 \quad (170)$$

²⁶ CHANDRASEKHAR, Op. Cit., p. 91

haciendo el cambio de variable:

$$y = \frac{x}{2} \quad \frac{d^2 y}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{dy}{dy} \right) = \frac{1}{2} \frac{dx}{dx} = \frac{x}{2^2} \quad (171)$$

y reemplazando en la ecuación (170) se tiene:

$$\frac{1}{2^2} \frac{d^2 y}{dy^2} = \frac{dx}{dx} = x \quad \frac{dx}{dx} = \frac{x}{2} \quad (172)$$

realizando operaciones y reduciendo términos semejantes se obtiene que:

$$\frac{d^2 x}{dx^2} = x = 0 \quad (173)$$

ésta ecuación tiene por solución:

$$x = A \operatorname{sen} x + B \operatorname{cos} x \quad (174)$$

luego:

$$y = \frac{x}{2} = A \frac{\operatorname{sen} x}{2} + B \frac{\operatorname{cos} x}{2} \quad (175)$$

A y B son constantes que se determinan por la condición de la ecuación (167), así:

$$B = 0$$

se tiene que:

$$y = \left(\frac{x}{2} + 0 \right) = \frac{x}{2} = A \frac{\operatorname{sen} x}{2} \quad (176)$$

como:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad (177)$$

entonces:

$$A = 1$$

y por tanto:

$$\theta_1 = \frac{\sin \theta}{\theta} \quad (178)$$

de esta calculamos la solución:

$$\theta_1 = \theta \quad (178)$$

4.1.3 Caso $n = 5$. Para éste caso se deben considerar las transformaciones de la ecuación de Lane-Emden, la cuales servirán para encontrar la solución general²⁷.

Transformación de Kelvin: se introduce una nueva variable x que dependerá de r :

$$x = \frac{1}{r} \quad \frac{d}{dr} = \frac{dx}{dr} \frac{d}{dx} \quad (180)$$

así:

$$\frac{d}{dr} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dx} = x^2 \frac{d}{dx} \quad (181)$$

y sustituyendo en la ecuación (161) se obtiene la ecuación de Lane-Emden:

$$x^4 \frac{d^2 \theta}{dx^2} = -\theta^n \quad (182)$$

²⁷ CHANDRASEKHAR, Op. Cit., p. 93

Transformación para las soluciones $n \neq 3$: Kelvin propone una solución de la forma:

$$y = ax^2 \quad (183)$$

así:

$$y' = \frac{d}{dx} ax^2 = 2ax$$

$$y'' = a(2 \cdot 1)x^{2-2} = 2a$$
(184)

al reemplazar en (182) se llega:

$$x^4 a(2 \cdot 1)x^{2-2} = a^n x^{n^2} \quad (185)$$

y reduciendo términos se obtiene:

$$2a(1) = a^{n^2} x^{n^2} \quad (186)$$

igualando exponentes se observa que:

$$2 = n^2$$

$$n = \frac{2}{n^2} \quad (187)$$

$$1 = 1 \cdot \frac{2}{n^2}$$

también

$$2a(1) = a^{n^2} \Rightarrow a = \frac{2a}{n^2} \quad (188)$$

utilizando (201) se encuentra que:

$$a = \frac{2(n-3)}{(n-1)^2} \frac{1}{x^{n+1}} \quad (189)$$

para $n \geq 3$ y $\nu \geq 1$ se tiene la solución:

$$s = \frac{2(n-3)}{(n-1)^2} \frac{1}{x^{n+1}} x^{\frac{2}{n+1}} \quad (190)$$

o, en términos de ν :

$$s = \frac{2(n-3)}{(n-1)^2} \frac{1}{x^{n+1}} \frac{1}{x^{\frac{2}{n+1}}} \quad (191)$$

Transformación de Emden: Emden propone una solución del tipo:

$$z = Ax^{\nu} z \quad (192)$$

entonces:

$$\frac{dz}{dx} = \nu Ax^{\nu-1} z + Ax^{\nu} \frac{dz}{dx} \quad (193)$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = A\nu(\nu-1)x^{\nu-2}z + 2A\nu x^{\nu-1} \frac{dz}{dx} + Ax^{\nu} \frac{d^2z}{dx^2}$$

reemplazando en (182) se tiene:

$$A\nu(\nu-1)x^{\nu-2}z + 2A\nu x^{\nu-1} \frac{dz}{dx} + Ax^{\nu} \frac{d^2z}{dx^2} = A^n x^{n\nu} z^n \quad (194)$$

aquí se considera normalmente el caso $A = a$ con la restricción $n \geq 3$ y $\nu \geq 1$, según (187) se tiene que $\nu = 2 - n$, entonces:

$$n \geq 3 \quad \text{y} \quad n \geq 2 \quad (195)$$

sustituyendo estos valores en la relación (194), ésta se transforma en:

$$x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + 2x \frac{dz}{dx} + (n-1)z - A^{n+1} z^n = 0 \quad (196)$$

haciendo un cambio de la variable radial:

$$\frac{1}{x} = e^t$$

$$x^2 = e^{2t} \quad (197)$$

por lo cual:

$$t = \ln x = -\ln \frac{1}{x}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x} \frac{dz}{dt} = -e^{-t} \frac{dz}{dt} \quad (198)$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = e^{-t} \frac{d}{dt} \left(-e^{-t} \frac{dz}{dt} \right) = e^{-2t} \frac{d^2 z}{dt^2} + e^{-2t} \frac{dz}{dt}$$

sustituyendo (197) y (198), (196) toma la forma:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} + (n-1)z - A^{n+1} z^n = 0 \quad (199)$$

con la relación (188) se puede mostrar que:

$$A^{n+1} = a^{n+1} = \left(\frac{1}{2} \right)^n, \quad n \geq 1 \quad (200)$$

y reemplazando en (199) se tiene:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + (2n + 1) \frac{dz}{dt} + (n^2 + 1)z = 0 \quad (201)$$

como:

$$2n + 1 = 2 \cdot \frac{2}{n + 1} + 1 = \frac{5 + n}{n + 1} \quad (202)$$

si $n = 5$, entonces (201) es igual a cero y por tanto $\omega = \frac{1}{2}$, así la ecuación (199) es:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{4}z = 0 \quad (203)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{4}z(1 - z^4) = 0$$

multiplicando a ambos lados por $\frac{dz}{dt}$, se tiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right) + \frac{1}{4}z(1 - z^4) \frac{dz}{dt} \quad (204)$$

en esta última se ha utilizado que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right) = \frac{dz}{dt} \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (205)$$

integrando la ecuación (204):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = D + \frac{1}{4} \int z(1 - z^4) dz$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + D + \frac{1}{8} z^2 + \frac{1}{24} z^6 \quad (206)$$

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{2D + \frac{1}{4} z^2 + \frac{1}{12} z^6}$$

en la cual D es una constante de integración, para buscar una solución analítica exacta se debe cumplir que $D \neq 0$, así:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2} z \sqrt{1 + \frac{1}{3} z^4} \quad (207)$$

$$2 \int \frac{dz}{z \sqrt{1 + \frac{1}{3} z^4}}$$

haciendo el cambio de variable de integración:

$$\frac{1}{3} z^4 = \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$\frac{4z^4}{3z} dz = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta \quad (208)$$

$$4 \frac{dz}{z} \operatorname{sen}^2 \theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} d\theta$$

integrando

$$\int \csc \theta d\theta = \ln |t| + C \quad (209)$$

donde C es una constante de integración, y como:

$$\frac{d}{dt} \left[\ln \tan \frac{t}{2} \right] = \frac{1}{2} \frac{\sec^2 \frac{t}{2}}{\tan \frac{t}{2}} = \csc t \quad (210)$$

luego (209) queda:

$$\ln \tan \frac{t}{2} = t + C \quad (211)$$

$$\tan \frac{t}{2} = Ce^{2t}$$

aplicando las identidades trigonométricas:

$$\sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos t)$$

$$\sin \frac{t}{2} = \frac{\tan \frac{t}{2}}{\sqrt{1 + \tan^2 \frac{t}{2}}} \quad (212)$$

$$\cos \frac{t}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \frac{t}{2}}} \quad (213)$$

el cambio de variable realizado por (208) transforma de la siguiente forma:

$$\frac{1}{3} z^4 \sin^2 \theta = 4 \frac{\tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \quad (214)$$

en virtud de (211) queda que:

$$\frac{1}{3} z^4 = \frac{4C^2 e^{2t}}{1 + C^2 e^{2t}} \quad (215)$$

$$z = \sqrt[4]{\frac{12C^2 e^{2t}}{1 + C^2 e^{2t}}}$$

y en función del cambio de variable realizado en (197), se tiene que:

$$z = \sqrt[4]{\frac{12C^2 r^2}{1 + C^2 r^2}} \quad (216)$$

igualando esta ecuación con (192) y de acuerdo con las ecuaciones (187) y (189) para $n = 5$ en donde $A = a$, se tiene:

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \theta = \frac{1}{2} \quad (217)$$

se obtiene:

$$\frac{1}{2} \frac{dx}{dt} z = \frac{1}{2} \frac{dx}{dt} \sqrt[4]{\frac{12C^2 r^2}{1 + C^2 r^2}} = \sqrt[4]{\frac{3C^2}{1 + C^2 r^2}} \quad (218)$$

y con la condición inicial:

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2 \sqrt{3C^2} \quad (219)$$

entonces:

$$C^2 = \frac{1}{3} \quad (220)$$

y finalmente:

$$\rho_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{3}\rho_0^2}}$$

ésta es la solución de la ecuación de Lane-Emden para $n = 5$, que tiende a cero solamente cuando²⁸:

$$\xi = \xi_5$$

Algunas cantidades físicas de Interés que se pueden obtener cuando se conoce la función de Lane-Emden para un índice dado son:

Radio de la estrella:

$$R = a \xi_5 = \frac{(n+1)K^{1/2}}{4\pi G} \rho_0^{1/n} \quad (221)$$

Masa de la estrella: a partir de la ecuación de la conservación de la masa (92) y teniendo en cuenta (147) y (158), se calcula la masa encerrada dentro de una esfera de radio r :

$$M(r) = 4\pi a^2 \int_0^r \rho(\xi) \xi^2 d\xi \quad (222)$$

reemplazando (159) en (222)

²⁸ CHANDRASEKHAR, Op. Cit., p. 94

$$M(?) = 4a^3 \int_0^a \frac{d}{d} r^{2n} \frac{d}{d} r^{n-1} dr \quad (223)$$

$$M(?) = 4a^3 \int_0^a \frac{d}{d} r^{2n} \frac{d}{d} r^{n-1} dr \quad (224)$$

introduciendo el valor de a en la última ecuación, se obtiene la expresión para la masa total:

$$M_{TOTAL} = 4 \frac{(n-1)K}{4G} \frac{3}{2} \frac{3^{2n}}{2n} \int_0^a \frac{d}{d} r^{2n} \frac{d}{d} r^{n-1} dr \quad (225)$$

eliminando r se obtiene la forma para K :

$$K = N_n GM \frac{n-1}{n} R \frac{3^{2n}}{n} \quad (226)$$

donde N_n es el coeficiente numérico:

$$N_n = \frac{1}{n-1} \frac{4}{\int_0^a \frac{d}{d} r^{2n} \frac{d}{d} r^{n-1} dr} \frac{3^{2n}}{2n} \quad (227)$$

Presión central: la expresión general (37) para la presión $P = K r^{\frac{1}{n}-1} = K r^{\frac{1}{n}-1} r^{n-1}$ como $r = 1$ en $r = 0$, entonces²⁹:

$$P_c = K r^{\frac{1}{n}-1} \quad (228)$$

²⁹ PINZÓN, Op. Cit., p. 44

4.2. PROCEDIMIENTO NUMÉRICO PARA LA SOLUCIÓN

La ecuación (161) de Lane-Emden se puede escribir como:

$$\frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + \eta \tau^n = \frac{2}{\tau} \frac{d\eta}{d\tau} \quad (229)$$

Esta ecuación se resolverá para obtener $\eta(\tau)$, y entonces con las ecuaciones (147) y (148) las relaciones $\rho(r)/\rho_c$ y $P(r)/P_c$. Considerando la primera derivada $d\eta/d\tau$ como una función $\xi(\tau)$ desconocida entonces:

$$\frac{d\xi}{d\tau} + \xi \tau^n = \frac{2}{\tau} \xi \quad (230)$$

y

$$\frac{d\xi(\tau)}{d\tau} + \xi \tau^n = \frac{2}{\tau} \xi \quad (231)$$

Con las condiciones iniciales $\eta(\tau=0) = 1$ y $\xi(\tau=0) = 0$. El procedimiento numérico para resolver este problema, se basa en el método del punto medio (Runge-Kutta) para dos ecuaciones de primer orden entonces:

$$\xi_{i+1/2} = \xi_i + 0.5d\xi \quad (232)$$

$$\eta_{i+1/2} = \eta_i + 0.5d\eta \quad (233)$$

$$\xi_{i+1/2} = \xi_i + 0.5d\left(\xi_i^n + \frac{2}{\tau_i} \xi_i\right) \quad (234)$$

Y luego:

$$\xi_{i+1} = \xi_i + d\xi \quad (235)$$

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) + \lambda y = 0 \quad (236)$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0 \quad (237)$$

Vale la pena notar que la ecuación de Lane-Emden tiene una singularidad regular en el origen $x = 0$ ya que en este caso tendríamos una división por cero, para evitarla, se realiza un desarrollo en serie de potencias de la función $y(x)$ alrededor del origen. Las expresiones para $y(x)$ y $y'(x)$ cerca de $x = 0$, se calculan de la siguiente manera: Se busca las soluciones en forma de serie de Taylor como una suma de funciones pares e impares:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{2k+1} \quad (238)$$

las cuales deben cumplir las condiciones (162) y (163), por lo que las potencias impares desaparecen, entonces:

$$y(x) = 1 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + a_3 x^6 + \dots + a_k x^{2k} \quad (239)$$

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) = 2a_1 x^2 + 4a_2 x^3 + 6a_3 x^5 + \dots \quad (240)$$

reemplazando estos resultados en la ecuación (161), se obtiene:

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) + \lambda y = 2a_1 x^2 + 4a_2 x^3 + 6a_3 x^5 + \dots + \lambda (1 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + a_3 x^6 + \dots)^n \quad (241)$$

así:

$$6a_1 x^2 + 20a_2 x^4 + 42a_3 x^6 + \dots + \lambda x^2 + \lambda a_1 x^4 + \dots \quad (242)$$

para así obtener:

$$\lambda_n = \lambda \left(1 + \frac{1}{6} \lambda x^2 + \frac{n}{120} \lambda^2 x^4 + \dots \right) \quad (243)$$

y

$$\rho_1 (\rho_1) \rho_1 \rho_1 \frac{1}{3} \rho_1 \rho_1 \frac{n}{30} \rho_1^3 \quad (244)$$

El primer paso es hacer que:

$$\rho_1 \rho_1 d \rho_1 \quad (245)$$

$$\rho_1 \rho_1 \rho_1 \rho_1 \frac{1}{6} d \rho_1^2 \rho_1 \frac{n}{120} d \rho_1^4 \quad (246)$$

y

$$\rho_1 \rho_1 \rho_1 \rho_1 \frac{1}{3} d \rho_1 \rho_1 \frac{n}{30} d \rho_1^3 \quad (247)$$

Si ρ_n es conocida, los valores de la densidad relativa y la presión son obtenidos de las ecuaciones (147) y (148).

5. EL PROGRAMA DE CÁLCULO

Para la elaboración del programa de computador que realiza los cálculos para encontrar la solución de la ecuación de Lane-Emden, se eligió el lenguaje de programación Visual Basic Versión 6.0 de la empresa Microsoft Corporation del año 1998, con licencia académica de uso de la Universidad de Nariño, Número: 374-8891493 y Número de Serie: 84091374889149365448; todo esto enmarcado dentro de las normas y acuerdos legales existentes para el uso de los programas en los centros educativos.

Se eligió el lenguaje Visual Basic por la facilidad de su manejo, su potencia y fortaleza computacionales (muy buena precisión en cálculos numéricos), porque es un entorno gráfico y orientado a objetos.

5.1 ESTRUCTURA DEL PROGRAMA

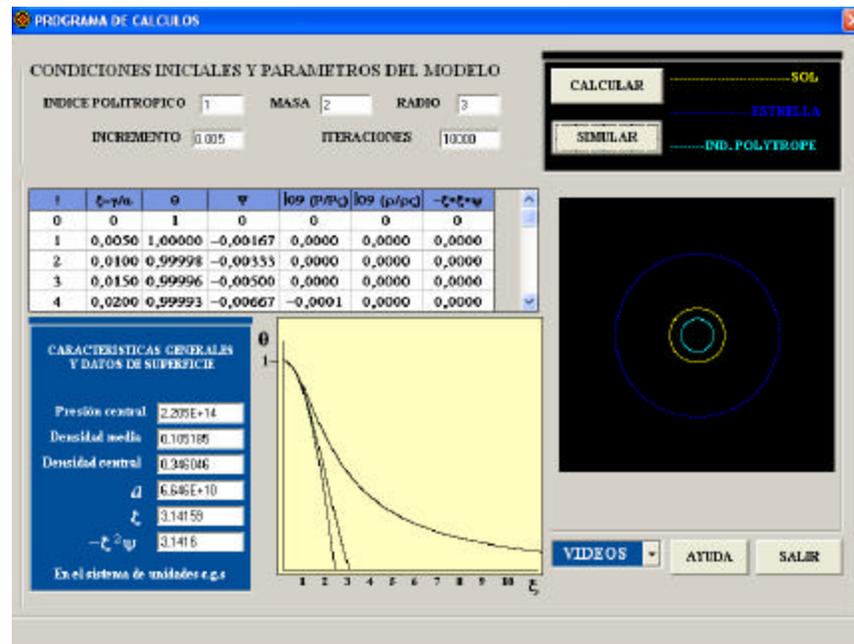
El programa de cálculo de la solución de la Ecuación de Lane-Emden está configurado de la siguiente manera: inicia con la presentación general del programa y los créditos respectivos.

Figura 3. Pantalla de presentación general del programa.



Una vez esto finaliza, aparece la pantalla principal donde están los diversos menús del programa, que muestra la Figura 4

Figura 4. Pantalla principal del programa.



En esta pantalla se ofrecen todas las posibilidades del programa: una opción para ingresar los datos iniciales y parámetros del modelo, el cálculo de la solución de la ecuación de Lane-Emden, la presión, densidad, expresados en unidades c.g.s y la opción para ver videos sobre estrellas.

La introducción de los datos para realizar los cálculos es muy sencilla: simplemente se introduce un valor de la masa M , radio R , índice politrópeo n e iteraciones en las respectivas casillas, se activa el botón de cálculo y se obtienen los resultados.

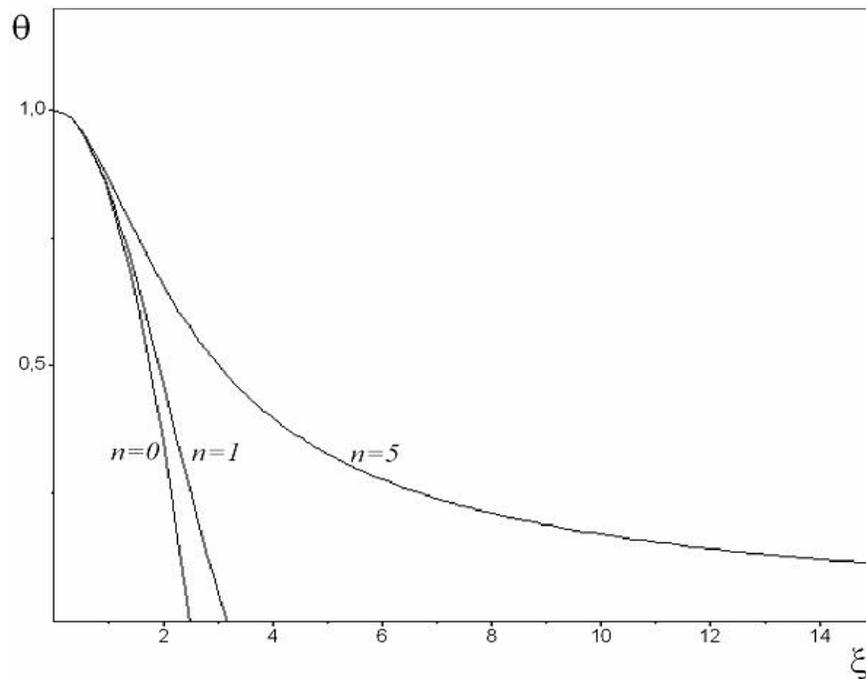
Una de las opciones más interesantes del programa es la que permite la visualización de cada curva $\rho(\xi)$ para cada índice politrópeo y la simulación respectiva de la estrella, tomando como patrón de escala el sol; para ello, se elige la opción simular.

Este programa permite calcular la densidad y la presión central donde los parámetros de entrada son la masa total M , el radio R total y el índice polytropeo n .

Algunas propiedades generales de $\theta(\xi)$, son importantes para la interpretación de los resultados: por cada valor del índice politrópico se obtiene una ecuación de Lane-Emden diferente, desde luego otras soluciones de $\theta(\xi)$, teniendo en cuenta que las condiciones iniciales son independientes del índice n .

Para valores del índice n del polytrope entre 0.0 y 5.0, $\theta(\xi)$ es una función estrictamente decreciente que corta al eje ξ en un cierto punto cero de $\theta(n)$. Por ejemplo $\theta(n=0) = 2.449$; para $n=1$ se tiene $\theta(n=1) = 3.14159$ y para $n=5$ no hay corte con el eje ξ .

Figura 5. Soluciones numéricas de la ecuación de Lane-Emden para algunos índices politropes.



El significado físico es claro ya que en ese punto $\theta(\xi)$ es nula. Esto significa por las ecuaciones (147) y (148) que la densidad y la presión son zeros por lo que se ha llegado a la superficie de la estrella. Si n es más grande que 5, no existiría el punto cero y el modelo no tendría una superficie. La densidad y la presión tendrían entonces que encontrar un mínimo y comienza a aumentar nuevamente, una situación física sin sentido. Por lo tanto n debe ser un número real entre 0 y 5. El programa resuelve la ecuación por iteración hasta que $\theta(\xi)$ sea negativa.

Encontrar el valor exacto de $\rho_c(n)$ requiere resolver la ecuación desde $\rho_c = 0$ hasta $\rho_c = \rho_c(n)$, un proceso potencialmente grande. Por ejemplo utilizando un incremento $d\rho_c = 0.1$ para un polytrope de índice $n = 4$ podría requerir 150 iteraciones. El mismo paso para $n = 0$ necesita sólo 25 iteraciones. Encontrado el punto $\rho_c = \rho_c(n)$ para el cual $\rho_c = 0$, se puede hallar los parámetros pedidos en función de la masa y el radio totales escogidos por el usuario (ambos expresados en unidades solares):

$$P_c = \frac{9.048 \times 10^{14} M^2}{(n+1) (n)^2 R^4} \text{ dinas/cm}^2 \quad (248)$$

$$\rho_m = \frac{1.42M}{R^3} \text{ g/cm}^2 \quad (249)$$

$$\rho_c = \frac{\rho_m \rho_c(n)}{3 \rho_c(n)} \text{ g/cm}^3 \quad (250)$$

$$a = \frac{R}{\rho_c(n)} R_\odot \quad (251)$$

Se calcularon los valores de ρ_c y ρ_m con el programa para varios índices polytropes y se comparó con los resultados del libro de Chandrasekhar²⁷. Estos valores exactos se clasifican en muchos libros de estructura estelar. De esta manera se usaron como una primera prueba para la exactitud del programa. Mirar la tabla 1. de resultados para n entre 0 y 4.9 junto con el incremento usado en el programa y el número de iteraciones que se necesitó para encontrar ρ_c con ese incremento.

De esta manera se calcula la estructura de un polytrope con el programa y los resultados que se obtienen para $n = 5$ y un incremento $d\rho_c = 0.05$ cuando se escoge una masa $m = 2 M_\odot$ y radio $R = 3 R_\odot$ se encuentra el valor $\rho_c = 3.65$, así también se obtiene:

$$P_c \approx 4.330 \times 10^{14} \text{ dinas/cm}^2 \quad (252)$$

$$\rho_m \approx 0.105185 \text{ g/cm}^3 \quad (253)$$

$$\rho_c \approx 0.630583 \text{ g/cm}^3 \quad (254)$$

$$a \approx 0.8210 \text{ radiosolar} \approx 5.714 \times 10^{10} \text{ cm} \quad (255)$$

Tabla 1. Resultados de la solución numérica de la ecuación de Lane-Emden para algunos valores de índices politropes.

n	$d?$	Iter.	$\rho(n)$		$\rho \rho(n)^2 \rho(n)$	
				Chandrasekhar		Chandrasekhar
0.0	0.05	48	2.450	2.449	4.902	4.899
0.5	0.05	55	2.752	2.753	3.789	3.787
1.0	0.05	62	3.141	3.142	3.141	3.142
1.5	0.05	73	3.654	3.654	2.713	2.714
2.0	0.10	43	4.356	4.353	2.407	2.411
2.5	0.10	53	5.362	5.355	2.185	2.187
3.0	0.10	69	6.911	6.897	2.018	2.018
3.5	0.20	48	9.645	9.645	1.893	1.893
4.0	0.05	299	14.983	14.972	1.7977	1.797
4.5	0.05	637	31.867	31.836	1.738	1.738
4.9	0.05	3433	171.686	169.47	1.725	1.7335

Algunos valores para el índice politrópico que fueron desarrollados por varios científicos son:

$n \approx 1.5$ Modelo de una estrella completamente de convección donde la presión de radiación no juega un papel tan importante. Para esto se utilizó el caso no relativista de una enana blanca degenerada.

$n \approx 3$ El modelo uniforme de Eddington, se utilizó para describir una estrella enana blanca con degeneración relativista.

$n \approx 5$ Una aproximación para la distribución de estrellas en el grupo globular. Entonces el modelo se calcula desde una cierta distancia cero. Desde luego que para $n \approx 5$, el punto cero esta en el infinito.

5.2 CÁLCULO DE ERRORES

Cuando se realiza cálculos numéricos con dispositivos electrónicos, bien sea calculadoras pequeñas o computadores, siempre existe la limitación en cuanto a la finitud del dispositivo para realizar las diferentes operaciones matemáticas pertinentes. Estas, muy bien pueden ser infinitas y lo concreto del dispositivo exige que haya un límite para la máquina en cuanto a las operaciones que realiza y a la precisión que puede alcanzar.

Las limitaciones pueden ser de dos tipos: en lo físico, es decir, en la capacidad del manejo de las cantidades numéricas del dispositivo en sí mismo y en lo lógico, es decir, en la capacidad del lenguaje o programa computacional para manejar dichas cantidades³⁰. En el caso del presente trabajo, al abordar el problema de la precisión, la parte física no se tiene en cuenta, pues los computadores actuales son muy potentes y rápidos (aunque no con capacidad infinita), por lo que el análisis se restringe a la capacidad de manejo que tiene el lenguaje en el cual se realizaron los diversos algoritmos de cálculo.

Se desarrollo un algoritmo en el lenguaje Visual Basic 6.0 y se obtuvo como resultado que el número de bits internos significativos de la mantisa de un número real, con los que trabaja el lenguaje es 52; en tanto que el número de dígitos significativos precisos que arroja un proceso de cálculo en este lenguaje es de 15.

En la documentación ofrecida por el programa respecto a la capacidad del manejo numérico, se reporta los siguientes valores:

1.- Rango de números reales negativos de doble precisión que puede manejar: $(-1.79769313486232 \cdot 10^{308}, -4.94065645841247 \cdot 10^{-324})$.

2.- Rango de números reales positivos de doble precisión: $(4.94065645841247 \cdot 10^{-324}, 1.79769313486232 \cdot 10^{308})$.

Como el número de dígitos significativos del lenguaje es 15, esto significa que en operaciones de doble precisión (números reales de coma flotante), todas las operaciones realizadas ofrecen con seguridad por lo menos 15 cifras que son exactas. En el caso de las operaciones trigonométricas, el lenguaje Visual Basic 6.0 ofrece también esta excelente precisión, que fue comprobada y comparada con otros programas de cálculo. El software de cálculo desarrollado para esta tesis, realiza muchas operaciones trigonométricas; por ello todas las variables y constantes implementadas en él son de doble precisión.

³⁰ AKRITAS, Alkiviadis G. Elements of Computer Algebra with applications. New York: John Wiley & Sons Inc. 1989. p. 4.

En la realización del programa software se implementó el procedimiento numérico para la solución de la Ecuación de Lane-Emden descrito en la sección 4.2 que es un método iterativo.

Comparando los datos mostrados en la tabla 1 con los tomados del libro de Shandrasekhar "*An introduction to the study of stellar structure*" y calculando el error de los ρ no es más grande que aproximadamente 1% para estos valores de índice politrope, esto muestra que el programa tiene una exactitud razonable para el incremento usado.

6. CONCLUSIONES

- ? En el desarrollo de este trabajo se ha mostrado como obtener información de la estructura de las estrellas utilizando el modelo polytrope. Las estrellas son sistemas termodinámicos abiertos que no se encuentran en equilibrio. El modelo polytrope considera a las estrellas como sistemas abiertos pero en equilibrio. La ventaja primordial del de este modelo, es la sencillez en el cálculo de las variables físicas que nos muestran de forma aproximada como se comporta el interior estelar. Por consiguiente es un modelo simplemente de acercamiento a la verdadera naturaleza compleja estelar.
- ? El modelo empleado tiene únicamente dependencia espacial, es por eso que para realizar este estudio de la estructura estelar no se tiene en cuenta la dependencia temporal en las ecuaciones y se considera un modelo estático.
- ? El programa que se realizó en el lenguaje de programación Microsoft Visual Basic 6.0 soluciona de forma muy adecuada la ecuación de Lane-Emden para complementar y afianzar el estudio de la estructura de las estrellas. Es una herramienta muy útil desde el punto de vista pedagógico.
- ? Se espera que otros estudiantes de Física interesados en el problema utilicen este trabajo como base para futuras investigaciones.

BIBLIOGRAFIA

AKRITAS, Alkiviadis G. Elements of Computer⁰⁰⁰ Algebra with applications. New York : John Wiley & Sons Inc. 1989.

CASTAÑEDA, Mauricio y Ewert De Geus, Jeannine. Introducción a la física moderna. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 1997.

CHANDRASEKHAR, Subrahmanyan. An introduction to the study of stellar structure. Chicago: Dover publications, 1957.

-----, Stellar structure and stellar atmospheres. Chicago: Universidad de Chicago Press, 1989.

COLLINS, George. The fundamentals of the stellar astrophysics. New York: W.H. Freeman And Company, 2003. [Citado en 24-08-2004]. Disponible en Internet: <http://ads.harvard.edu/books/1989fsa..book>

-----, George. The Virial theorem in stellar astrophysics. Tucson (Arizona): Pachart Publishing House, 1978. [Citado en 24-08-2004]. Disponible en Internet: <http://ads.harvard.edu/books/1978vtsa.book>

DE LA PEÑA, Luis. Introducción a la mecánica cuántica. México: Continental, 1979.

DÍAZ, Ángeles. Curso de estructura estelar. Madrid: UAME, 2003. [Citado en 13-10-2004]. Disponible en Internet: http://astro.ft.uam.es/Docencia/Licenciatura/Astrofísica_5/Documentos

DÍAZ, Joaquín. Las estrellas densas. Investigación y Ciencia. Barcelona: Prensa Científica, 1997. [Citado en 24-08-2004]. Disponible en Internet: http://es.encarta.msn.com/sidebar_961539299/Las_estrellas_densas.html

EDDINGTON, A. The internal constitution of the Stars. New York: Dover publications, 1959.

EISBERG, Robert. Fundamentos de física moderna. México: Limusa, 1992.

FLEURY, P y Mathieu J. Calor, termodinámica, estados de la materia. Madrid: Paraninfo, 1964.

- FLUGGE, S. Structure stellar, Volumen 51. Berlín: Springer – Verlag OHG, 1958.
- GOLDSTEIN, Herbert. Mecánica clásica. España: Reverté, 1979.
- HENBEST, Nigel. El Universo en Explosión. Madrid: Debate, 1982.
- HERRERA, Miguel. Para que sirve la física. México: Universidad Nacional Autónoma De Ciudad de México, 2001.
- HIGUERA, Mario. Un laboratorio llamado Universo. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2003. [Citado en 19-02-2004]. Disponible en Internet: <http://www.observatorio.unal.edu.co/miembros/docentes/ahiguera/ahiguera.html>
- Interiores estelares. España: Universidad de Sevilla, (s.n.) (s.f.). [Citado en 23-10-2004]. Disponible en Internet: <http://sakura.us.es/Cursos/astrofisica/cajon/interior.pdf>
- KITTEL, Charles. Física térmica. España. Reverté, 1973.
- LEVICH, V. Curso de física teórica, España: Reverté, 1976
- LIU, F.K. Polytropic gas spheres: An approximate analytic solution of the Lane-Emden equation. Italy: International School for Advanced Studies, 1996. [Citado en 02-04-2004]. Disponible en Internet: http://arxiv.org/PS_cache/astro-ph/pdf/9512/9512061.pdf
- Microsoft Corporation. Visual Basic 6.0. Madrid: McGraw Hill, 1998.
- PEIMBERT, Manuel. 1984, Temas selectos de astrofísica. Ciudad de México: Universidad Autónoma de México, 1984.
- PINZÓN, Giovanni. Un modelo politrópico perturbado del sol para el estudio de oscilaciones no radiales. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2000.
- SOMMERFELD, A. Thermodynamics and statistical mechanics volumen V. New York: Academy Press, (s.f.).
- VIK, Dhillon. Stellar structure & evolution (phy213). United kingdom: University of Sheffield, 2004. [Citado en 15-07-2004]. Disponible en Internet: <http://www.shf.ac.uk/physics/people/vdhillon/teaching>
- VUCETICH, Héctor. Interiores estelares. (s. l.), 2004. [Citado en 23-10-2004]. Disponible en Internet: <http://www.fcaglp.unlp.edu.ar/~acorsico/ie/IntEst2.pdf>

WEINBERG, Steven. Gravitation and cosmology. New York: John Wiley and sons, (s.f.).

WEISSTEIN, Eric. Lane-Emden Differential Equation. (s. l.): (s.n.), 1996. [Citado en 15-07-2004]. Disponible en Internet: <http://icl.pku.edu.cn/yujs/MathWorld/math/l/1077.html>

ZEL'DOVICH, Ya.B., Novikov, I.D. Stars and relativity. New York: Dover publications, Mineola, 1996.

Anexo A. Código del programa en microsoft visual basic 6.0

```
Public x, F, H, i, P, d, m, dr, masa, radio, n  
Public Fila, Columna
```

```
Private Sub CmdCalcular_Click()  
Me.MousePointer = 11
```

```
Dim verdadero As Boolean  
Dim F12, x12, x1, F1, H12, H1  
Dim xm, Hm, Fm, Pc, dm, dc, a
```

```
Fila = 0  
Grid1.Clear  
Grid1.Rows = 2
```

```
'titulos de la tabla  
Grid1.Row = Fila  
Grid1.Col = 0  
Grid1.Text = "i"  
Grid1.Col = 1  
Grid1.Text = "? = r/a"  
Grid1.Col = 2  
Grid1.Text = "? "  
Grid1.Col = 3  
Grid1.Text = "? "  
Grid1.Col = 4  
Grid1.Text = "Log (?/?c)"  
Grid1.Col = 5  
Grid1.Text = "Log (P/Pc)"  
Grid1.Col = 6  
Grid1.Text = "- ? *? *? "
```

```
'entrada de parametros iniciales dados  
n = Val(TxtIndice.Text)  
masa = Val(TxtMasa.Text)  
radio = Val(TxtRadio.Text)  
dr = Val(TxtIncremento.Text)
```

```
If n < 0 Or n > 5 Then  
MsgBox "n DEBE ESTAR ENTRE 0 Y 5"
```

```

Me.MousePointer = 0
Exit Sub
End If

x = 0
F = 1
H = 0
i = 0
P = F ^ (n + 1)
d = F ^ n
m = -x * x * H

Fila = Fila + 1
Grid1.Row = Fila
Grid1.Col = 0
Grid1.Text = i
Grid1.Col = 1
Grid1.Text = x
Grid1.Col = 2
Grid1.Text = F
Grid1.Col = 3
Grid1.Text = H
Grid1.Col = 4
Grid1.Text = lg10(P)
Grid1.Col = 5
Grid1.Text = lg10(d)
Grid1.Col = 6
Grid1.Text = m

x = dr
F = 1! - x ^ 2 / 6 + x ^ 4 * n / 120
H = -x / 3 + x ^ 3 * n / 30
i = i + 1
P = F ^ (n + 1)
d = F ^ n
m = -x * x * H

Grid1.Rows = Grid1.Rows + 1
Fila = Fila + 1
Grid1.Row = Fila

Grid1.Col = 0
Grid1.Text = i
Grid1.Col = 1
Grid1.Text = Format(x, "###0.0000")

```

```

Grid1.Col = 2
Grid1.Text = Format(F, "###0.00000")
Grid1.Col = 3
Grid1.Text = Format(H, "###0.00000")
Grid1.Col = 4
Grid1.Text = Format(lg10(P), "###0.0000")
Grid1.Col = 5
Grid1.Text = Format(lg10(d), "###0.0000")
Grid1.Col = 6
Grid1.Text = Format(m, "###0.0000")

Fila = Fila + 1
Grid1.Rows = Grid1.Rows + 1

'fila 3 inicio el ciclo
i = i + 1
verdadero = True
Do
  x12 = x + 0.5 * dr
  F12 = F + 0.5 * dr * H
  If F12 > 0 Then
    l = 0.5 * dr * (-F ^ n - 2 * H / x)
    H12 = H + l
    x1 = x + dr
    F1 = F + dr * H12
    If F1 > 0 Then
      z = dr * (-F12 ^ n - 2 * H12 / x12)
      H1 = H + z

      P = F1 ^ (n + 1)
      d = F1 ^ n
      m = -x1 * x1 * H1

      x = x1
      F = F1
      H = H1

Grid1.Row = Fila
Grid1.Col = 0
Grid1.Text = i
Grid1.Col = 1
Grid1.Text = Format(x, "###0.0000")
Grid1.Col = 2
Grid1.Text = Format(F, "###0.00000")
Grid1.Col = 3

```

```

If H = 0 Then
  Grid1.Text = H
Else
  Grid1.Text = Format(H, "###0.00000")
End If

```

```

Grid1.Col = 4
Grid1.Text = Format(lg10(P), "###0.0000")
Grid1.Col = 5
Grid1.Text = Format(lg10(d), "###0.0000")
Grid1.Col = 6
Grid1.Text = Format(m, "###0.0000")

```

```

  i = i + 1
Else
  verdadero = False
End If
Else
  verdadero = False
End If

```

```

If i > Val(TxtItera.Text) Then verdadero = False
Fila = Fila + 1 'incrementar la variable fila
Grid1.Rows = Grid1.Rows + 1 'incrementar las filas de la tabla

```

Loop Until verdadero = False

'GENERA PARAMETROS

```

If H <> 0 Then
  xm = x - F / H
Else
  xm = 0
End If

```

```

If x <> 0 Then
  Hm = H + (xm - x) * (-F ^ n - 2 * H / x)
Else
  Hm = 0
End If

```

Fm = 0

Pc = 9048000000000000# * masa ^ 2 / ((n + 1) * (Hm ^ 2 * radio ^ 4))

dm = 1.42 * masa / radio ^ 3

dc = -dm * xm / 3 / Hm

ud = -xm * xm * Hm

```

If xm <> 0 Then
    a = 69600000000# * radio / xm 'radio solar 6.96^10cm
Else
    a = 0
End If

TxtP.Text = Format(Pc, "0.000E+00")
TxtDM.Text = Format(dm, "###0.000000")
TxtDC.Text = Format(dc, "###0.000000")
TxtUm.Text = Format(a, "0.000E+00")
TxtXF.Text = Format(xm, "###0.000000")
TxtX2f.Text = Format(ud, "###0.0000")

PICGRAFICA.ScaleMode = 3
PICGRAFICA.Scale (-0.2, 1.2)-(12.2, -0.02)
PICGRAFICA.Line (0, 0)-(0, 1.1)
PICGRAFICA.Line (0, 0)-(12, 0)
PICGRAFICA.CurrentX = 0
PICGRAFICA.CurrentY = 1.1

For Fila = 1 To Grid1.Rows - 1
    Grid1.Col = 1
    Grid1.Row = Fila
    If Grid1.Text <> "" Then
        px = CDBl(Grid1.Text)
    Else
        px = ""
    End If
    Grid1.Col = 2
    Grid1.Row = Fila
    If Grid1.Text <> "" Then
        py = CDBl(Grid1.Text)
    Else
        py = ""
    End If

    If px <> "" And py <> "" Then
        PICGRAFICA.PSet (px, py), QBColor(0)
    End If
Next

Me.MousePointer = 0
End Sub

Private Sub CmdSalir_Click()

```

```
End
End Sub
```

```
Private Sub Command1_Click()
If n < 0 Or n > 5 Then
    MsgBox "n DEBE ESTAR ENTRE 0 Y 5"
    Me.MousePointer = 0
    Exit Sub
End If
```

```
If Val(TxtRadio.Text) > 5 Then
    factor = 20
Else
    factor = 1
End If
Picture1.ScaleMode = 3
Picture1.Scale (-5 * factor, 5 * factor)-(5 * factor, -5 * factor)
Picture1.Line (-5 * factor, 0)-(5 * factor, 0), QBColor(0)
Picture1.Line (0, -5 * factor)-(0, 5 * factor), QBColor(0)
```

```
'Dibuja el sol
xradio = 1
For angulo = 0 To 360
    px = xradio * Cos(angulo * 3.1415926536 / 180)
    py = xradio * Sin(angulo * 3.1415926536 / 180)
    Picture1.PSet (px, py), QBColor(14)
Next
```

```
'Dibuja la estrella
xradio = Val(TxtRadio.Text)
For angulo = 0 To 360
    px = xradio * Cos(angulo * 3.1415926536 / 180)
    py = xradio * Sin(angulo * 3.1415926536 / 180)
    Picture1.PSet (px, py), QBColor(9)
Next
```

```
'Dibuja distancia de la estrella de acuerdo a índice politrope
z = (Val(TxtRadio.Text) * Val(TxtIndice.Text)) / 5
For angulo = 0 To 360
    px = z * Cos(angulo * 3.1415926536 / 180)
    py = z * Sin(angulo * 3.1415926536 / 180)
    Picture1.PSet (px, py), QBColor(11)
Next
End Sub
```

```
Private Sub Form_Load()
```

```
'Alineacion de las columnas
Grid1.Row = 0
For i = 0 To 6
    Grid1.ColAlignment(i) = 4
Next
```

```
'Ancho de las columnas
Grid1.ColWidth(0) = 800
Grid1.ColWidth(1) = 800
Grid1.ColWidth(2) = 900
Grid1.ColWidth(3) = 1000
Grid1.ColWidth(4) = 1000
Grid1.ColWidth(5) = 1000
Grid1.ColWidth(6) = 1000
```

```
'titulos de la tabla
Grid1.Row = Fila
Grid1.Col = 0
Grid1.Text = "i"
Grid1.Col = 1
Grid1.Text = " $r/a$ "
Grid1.Col = 2
Grid1.Text = "?"
Grid1.Col = 3
Grid1.Text = "? "
Grid1.Col = 4
Grid1.Text = " $\text{Log} (?/?_c)$ "
Grid1.Col = 5
Grid1.Text = " $\text{Log} (P/P_c)$ "
Grid1.Col = 6
Grid1.Text = "-? *? *? "
```

```
End Sub
```

Anexo B. Constantes físicas fundamentales, cantidades astronómicas y notación.

SIMBOLO	CONSTANTE	VALOR
a	constante de densidad de radiación	$7.55 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}$
c	velocidad de la luz	$299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$
G	constante gravitacional	$6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
h	constante de Planck	$6.62 \times 10^{-34} \text{ J s}$
\hbar	constante de Planck reducida	$1.05 \times 10^{-34} \text{ J s}$
k	constante de Boltzmann	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J }^\circ\text{K}^{-1}$
m_e	masa del electrón	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
m_H	masa del átomo de hidrogeno	$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
N_A	número de Avogadro	$6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
s	constante de Stefan Boltzmann	$5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ }^\circ\text{K}^{-4}$
R	constante de gas (k/m_H)	$8.26 \times 10^3 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$
e	carga del electrón	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
σ	constante de radiación	$5.76 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ }^\circ\text{K}^{-4}$
L_\odot	luminosidad del Sol	$3.86 \times 10^{26} \text{ W}$
M_\odot	masa solar	$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
r_\odot	radio solar	$6.96 \times 10^8 \text{ m}$
$T_{e\odot}$	temperatura efectiva del sol	$5780 \text{ }^\circ\text{K}$
parsec	(unidad de distancia)	$3.09 \times 10^{16} \text{ m}$
SIMBOLO	NOMBRE	
Q	calor	
T	temperatura	
$P, P_c, P_s, P_{gas}, P_{rad}$	presión, central, superficial, gas, radiación	
V	volumen	
U	energía térmica total	
C_p, C_v	calor específico a presión, y a volumen constante	
γ	relación entre calores específicos	
n	número de moles	
n	índice polytrope	
μ	peso molecular medio	
ρ, ρ_c, ρ_m	densidad, central, media	
ν	frecuencia	
p	momentum	
X, Y, Z	fracción de masa de hidrógeno, helio, elementos pesados,	

E	energía
ϵ	coeficiente de producción de energía
e^-, e^+	electrón, positrón
κ	opacidad
κ_{rad}	conductividad radiativa
μ	peso molecular medio
Φ	energía potencial gravitacional
$M(r)$	masa incidente en una estrella de radio r
F_{rad}	flujo radiativo