

LECCIONES DE GEOMETRÍA ELEMENTAL

Libardo Manuel Jácome
Segundo Javier Caicedo-Zambrano
Oscar Fernando Soto-Agreda



Editorial
Universidad de Nariño



Editorial

Universidad de **Nariño**

LECCIONES DE
GEOMETRÍA
ELEMENTAL

LECCIONES DE GEOMETRÍA ELEMENTAL

Libardo Manuel Jácome
Segundo Javier Caicedo-Zambrano
Oscar Fernando Soto-Agreda



Editorial
Universidad de **Nariño**

Jácome, Libardo Manuel

Lecciones de geometría elemental /Libardo Manuel Jácome, Segundo Javier Caicedo Zambrano, Oscar Fernando Soto Agreda –1ª. Ed.-- San Juan de Pasto : Editorial Universidad de Nariño, 2024
186 páginas : ilustraciones, gráficas, ejercicios.

Incluye referencias bibliográficas p. 171-178

ISBN: 978-628-7679-60-3

1. Geometría--Enseñanza 2. Geometría euclidiana 3. Geometría—Ejercicios 4. Planos, rectas, segmentos 5. Polígonos 6. Triángulos 7. Circunferencia. I. Caicedo Zambrano, Segundo Javier. II. Soto Agreda, Oscar Fernando.

516 J179 – SCDD-Ed. 22



SECCIÓN DE BIBLIOTECA

LECCIONES DE GEOMETRÍA ELEMENTAL

- © Editorial Universidad de Nariño
- © Libardo Manuel Jácome
- © Segundo Javier Caicedo-Zambrano
- © Oscar Fernando Soto-Agreda

ISBN: 978-628-7679-60-3

Primera Edición

Corrección de estilo: German Chaves Jurado

Diseño y diagramación: Jenny Alexandra Narváez

Fecha de publicación: Enero de 2024

San Juan de Pasto, Nariño, Colombia

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o cualquier propósito, sin la autorización escrita de sus autores o de la Editorial Universidad de Nariño

CONTENIDO



INTRODUCCIÓN XV

CAPÍTULO 1. ELEMENTOS DE GEOMETRÍA EUCLIDIANA	17
1.1 CONCEPTOS DE GEOMETRÍA	17
1.2 PLANO, PUNTOS, RECTAS, SEGMENTOS Y RAYOS	17
1.2.1 Términos indefinido.....	17
1.2.2 Elementos geométrico.....	19
1.3 LA RECTA DE CANTOR-DEDEKIND.....	23
1.3.1 Números construibles.....	24
1.4 PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO.....	25
1.5 ÁNGULOS.....	28
1.6 RAYOS DE INCIDENCIA Y REFLEXIÓN.....	32
1.7 LAS PERPENDICULARES DE MICHELSON MORLEY.....	33
1.8 LAS PARALELAS DE ERATÓSTENES.....	34
1.9 EJERCICIOS.....	37
CAPÍTULO 2. TRIÁNGULOS PARA LA ETERNIDAD	39
2.1 DEFINICIONES.....	40

2.1.1 Clases de triángulos.....	40
2.1.2 Segmentos destacados.....	40
2.1.3 Puntos destacados.....	41
2.2 EL TRIÁNGULO SAGRADO EGIPCIO.....	41
2.3 LA RECTA DE EULER.....	43
2.4 EL TRIÁNGULO INFINITESIMAL.....	45
2.5 EL TRIÁNGULO ISÓSCELES DE LA RELATIVIDAD.....	46
2.6 EL TRIÁNGULO IMPOSIBLE DE PENROSE-REUTERSVÄRD.....	48
2.7 EL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI.....	50
2.8 EL TRIÁNGULO EN INGENIERÍA CIVIL.....	52
2.9 EL TRIÁNGULO DE MORLEY.....	53
2.10 EL TRIÁNGULO DE NAPOLEÓN.....	55
2.11 EL TRIÁNGULO DE PASCAL.....	56
2.12 EL TRIÁNGULO DE THALES.....	58
2.13 EL TRIÁNGULO DE VIVIANI.....	58
2.14 TRIÁNGULO DE KANIZSA.....	60
2.15 EJERCICIOS.....	61
CAPÍTULO 3. POLÍGONOS.....	65
3.1 DEFINICIÓN Y ELEMENTOS DE UN POLÍGONO.....	65
3.2 CUADRILÁTEROS.....	66
3.3 TEOREMA DE MARLEN.....	67
3.4 TEOREMA DE ARQUÍMEDES.....	68
3.5 TEOREMA DE FAURE.....	69
3.6 TEOREMA DE CHADU.....	70
3.7 CUADRADO DE KANIZSA.....	70
3.8 CUADRADO DE EHRENSTEIN.....	71
3.9 PARALELOGRAMO DE SANDER.....	72

3.10 EL POLÍGONO EN LA SUMA DE VECTORES.....	75
3.11 SUCESIÓN DE POLÍGONOS REGULARES.....	74
3.12 PARALELOGRAMO DE VARIGNON.....	76
3.13 LOS CUADRADOS DE VAN AUBEL.....	77
3.14 EL CUADRILÁTERO DE SACHERI.....	78
3.15 HEXAGRAMA MÍSTICO DE PASCAL.....	79
3.16 LA RECTA DE NEWTON.....	80
3.17 TEOREMA DE PTOLOMEO.....	81
3.18 EL CUADRILÁTERO DE BRAHMAGUPTA.....	82
3.19 EJERCICIOS.....	83
CAPÍTULO 4. LA CIRCUNFERENCIA.....	85
4.1 DEFINICIONES.....	86
4.2 ROMBO GENERADOR DE UNA CIRCUNFERENCIA.....	88
4.3 GENERATRICES DE UNA SEMICIRCUNFERENCIA.....	89
4.4 MÁS GENERATRICES DE UNA SEMICIRCUNFERENCIA.....	90
4.5 EL CÍRCULO DE APOLONIO.....	91
4.6 LA CIRCUNFERENCIA DE FEUERBACH.....	92
4.7 DISCO DE POINCARÉ.....	94
4.8 DISCO DE BELTRAMI-KLEIN.....	96
4.9 LAS CIRCUNFERENCIAS DE RIEMANN.....	96
4.10 CÍRCULO DE JOHNSON.....	97
4.11 CÍRCULOS DE FORD.....	98
4.12 CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO.....	99
4.13 EL DISCO DE NEWTON.....	100
4.14 SISTEMA PLANETARIO FICTICIO.....	101
4.15 TRANSFORMACIÓN DEL MOVIMIENTO RECTILÍNEO A CIRCULAR.....	102

4.16 EL MECANISMO DE PEAUCELLIER-LIPKIN.....	102
4.17 MECANISMO DE YUGO ESCOCÉS.....	103
4.18 EJERCICIOS.....	104
CAPÍTULO 5. CONGRUENCIAS.....	107
5.1 PROPIEDADES DE LA CONGRUENCIA.....	108
5.2 CONGRUENCIA DE SEGMENTOS.....	108
5.3 CONGRUENCIA DE ÁNGULOS.....	109
5.4 CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS.....	109
5.5 DOBLANDO EL CÍRCULO.....	111
5.6 DOBLANDO EL CUADRADO.....	112
5.7 DOBLANDO EL HEXÁGONO REGULAR.....	112
5.8 DIVIDIENDO EL CUADRADO.....	113
5.9 DIVIDIENDO EL PARALELOGRAMO.....	114
5.10 DIVIDIENDO EL TRIÁNGULO.....	115
5.11 LA CAPA DEL MOTOCICLISTA.....	116
5.12 RECICLAJE DEL OCTÁGONO REGULAR.....	116
5.13 RECICLAJE DE HEXÁGONOS REGULARES.....	117
5.14 EJERCICIOS.....	118
CAPÍTULO 6. SEMEJANZA.....	121
6.1 DEFINICIONES.....	122
6.2 TEOREMA DE THALES.....	122
6.3 LAS PARALELAS DE THALES DE MILETO.....	123
6.4 LA MEDIA PROPORCIONAL.....	124
6.5 CUERDAS QUE SE CORTAN EN EL INTERIOR DE UNA CIRCUNFERENCIA.....	125
6.6 TANGENTE Y SECANTE.....	125
6.7 TEOREMA DE LA BISECTRIZ.....	126

6.8 SEMEJANZA DE DOS CUADRADOS.....	127
6.9 LA LUPA SIMPLE.....	127
6.10 EL PANTÓGRAFO INFINITO.....	129
6.11 LA PROPORCIÓN DIVINA.....	131
6.12 DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN MEDIA Y EXTREMA RAZÓN.....	132
6.13 RECTÁNGULO ÁUREO.....	135
6.14 EL OJO DE DIOS.....	136
6.15 DECÁGONO REGULAR.....	137
6.16 EL PENTÁGONO REGULAR.....	138
6.17 LA TAZA DE ORO.....	141
6.18 LOS TRIÁNGULOS DE KEPLER.....	141
6.19 EJERCICIOS.....	144
CAPÍTULO 7. ÁREAS.....	147
7.1 DEFINICIONES.....	147
7.2 LA METAMORFOSIS DEL TRIÁNGULO.....	148
7.3 LA METAMORFOSIS DE UN PARALELOGRAMO.....	149
7.4 LA METAMORFOSIS DE UN RECTÁNGULO.....	151
7.5 LA METAMORFOSIS DE UN CUADRILÁTERO.....	152
7.6 EL TEOREMA DE PITÁGORAS.....	152
7.7 DEMOSTRACIÓN DE PAPPUS DEL TEOREMA DE PITÁGORAS.....	154
7.8 PROBLEMA PITAGÓRICO.....	155
7.9 PARALELOGRAMO ELÁSTICO.....	156
7.10 PARALELOGRAMO DE VARIGNON.....	157
7.11 LAS LÚNULAS DE HIPÓCRATES.....	159
7.12 EL TEOREMA DE ANNE.....	160

7.13 CUERDAS QUE SE CORTAN EN EL INTERIOR DE UNA CIRCUNFERENCIA.....	161
7.14 CONSTRUCCIÓN DE UN CUADRADO EQUIVALENTE A UN RECTÁNGULO.....	161
7.15 LA CUADRATURA DEL TRIÁNGULO EQUILÁTERO.....	162
7.16 EL TANGRAM.....	164
7.17 EL STOMACHIÓN DE ARQUÍMEDES.....	165
7.18 EJERCICIOS.....	166
CONCLUSIONES.....	169
BIBLIOGRAFÍA.....	171
LISTA DE FIGURAS.....	179

INTRODUCCIÓN



“No hay camino real para la geometría”



*(Figura 1. Euclides)
Fuente: Stewart, 2018.*

Euclides de Alejandría. Nació aproximadamente, en el año 365 AC y murió cerca del año 265 AC. A pesar de la gran importancia de su investidura como geómetra, muy poco se sabe de él. Se dice que era un hombre muy amable con sus semejantes, en particular, con las personas que mostraban interés por las matemáticas. Su obra inmortal se ha traducido como Elementos; obra que, junto con la Biblia, la Divina comedia, el Fausto, y el Quijote, figuran como los libros más leídos por la humanidad (Stewart, 2018).

Lecciones de Geometría Elemental, es un libro de texto diseñado como material de apoyo para el curso de Geometría Euclidiana, dirigido a estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y del Programa de Física de la Universidad de Nariño.

El objetivo de este libro, es ampliar los horizontes de los estudiantes, abordando temas que no pueden ser desarrollados en las clases presenciales debido a limitaciones de tiempo. El libro abarca varios temas, desde los conceptos básicos de geometría, como plano, puntos, rectas, segmentos y rayos, hasta temas más avanzados, como triángulos especiales, polígonos, la circunferencia y congruencias, semejanzas y áreas.

El libro está estructurado en siete capítulos, a saber: Elementos de Geometría Euclidiana, Triángulos para la Eternidad, Polígonos, La Circunferencia, Congruencias, Semejanza y Áreas; cada uno con múltiples subtemas, cuyos conceptos, propiedades y teoremas, son ilustrados con representaciones geométricas, elaboradas por los autores con el software Cabri II Plus, de la cual dispone licencia la Institución.

En resumen, Lecciones de Geometría Elemental es un recurso valioso para estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y del Programa de Física en la Universidad de Nariño, que busca ampliar los horizontes de aprendizaje en geometría euclidiana. Con su enfoque riguroso pero accesible, ejemplos ilustrativos, ejercicios prácticos y aplicaciones interdisciplinarias, el libro proporciona a los estudiantes una sólida base en geometría y les permite explorar conceptos y aplicaciones geométricas interesantes y desafiantes, promoviendo el desarrollo de habilidades de resolución de problemas, pensamiento crítico y razonamiento geométrico.

Los autores
Abril de 2023

CAPÍTULO 1.

ELEMENTOS DE GEOMETRÍA EUCLIDIANA

1.1 CONCEPTOS DE GEOMETRÍA

La Geometría estudia las propiedades y medidas de las figuras en el plano y el espacio. Heródoto, quien vivió en Grecia en el siglo V a de J.C, cuenta el origen de la Geometría, en los desbordamientos que cada año tenía el río Nilo. Esto hacía que se borraran los linderos de los campos, lo cual tenía como consecuencia que, los especialistas, es decir, los “tensores de cuerda”, realizarán nuevas mediciones de las tierras (Escudero, s.f.).

Para dicho estudio se necesitan objetos matemáticos, una buena definición para ellos, la definición de operaciones, relaciones entre ellos, postulados; y como se trata de medidas de las figuras, se requiere de las propiedades de cuerpo y orden de los números reales, como también, de una lógica para razonar y argumentar sobre las propiedades de las figuras, estudiándolas desde un punto de vista ideal.

1.2 PLANO, PUNTOS, RECTAS, SEGMENTOS Y RAYOS

1.2.1 Términos indefinidos

Según los Elementos de Euclides, punto, es lo que no tiene partes; línea recta, es la que yace por igual sobre sus puntos.

En los tiempos en que se escribieron los Elementos de Euclides, muy seguramente estaba muy clara la expresión *yacer por igual*. Hoy en día, se debe tener una idea más cercana al concepto de recta, pero no para dar una definición precisa, sino para realizar una aproximación al concepto.

En el enfoque moderno, se aceptan ciertos objetos básicos, clasificados como términos indefinidos; no se hace intento alguno por definirlos; de este modo, se evita un retroceso sin fin, de una definición a otra y el círculo vicioso, donde dos conceptos se definen uno en términos del otro.

Así pues, por ahora, se toman como términos indefinidos punto, recta y plano.

Actualmente, es mejor tener una idea intuitiva de estos objetos y concebir un punto como la huella que deja en un papel un lápiz muy afilado.

Los puntos se denotan con letras mayúsculas como A, B, C, \dots ; las rectas con letras minúsculas l, m, n, \dots ; y la recta que pasa por los puntos A, B se denota por \overleftrightarrow{AB} .

La idea de recta, se puede tomar como el borde del tablero de un salón de clase, la cual se prolonga de manera indefinida por sus dos extremos. Por su parte, la idea de plano es la de una mesa o una laguna cuando está en calma, el cual se extiende indefinidamente en todas direcciones.

Como se ve, al prolongar la recta y el plano de manera indefinida, ya se incluye la idea de infinito (Figura 2).

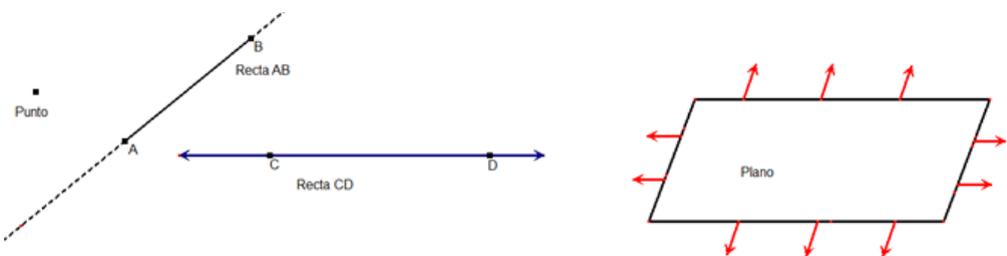


Figura 2. Representación de punto, segmento, recta y plano

Fuente: adaptación de Mi tutorial Digital (s.f.)

1.2.2 Elementos geométricos

Los elementos geométricos se tornan muy interesantes cuando interactúan entre ellos.

Es inevitable trazar rectas en espacios pequeños o grandes. Cuando se trata de espacios pequeños, no se presentan mayores dificultades, ya que, por ejemplo, se puede apoyar con una cuerda o una regla. En espacios grandes, ubicando como puntos, por ejemplo, la tierra, marte, la recta sería un rayo luminoso, de la tierra a marte. No obstante, hoy en día se sabe que el sol tiene un campo gravitatorio muy intenso y curva los rayos luminosos como lo muestra la Figura 3.

Frente a estos hechos se puede decir que, la recta tal como la concebimos no es real, solo está en la imaginación del ser humano o en un mundo ideal fuera de él, donde existen estos objetos matemáticos.

El segmento \overline{AB} será el conjunto de puntos X de la recta AB tales que X está entre A y B , incluidos A y B , esto es, $X \in [A,B]$.

Un punto X está entre A y B , si X está en la recta AB y $AX + XB = AB$.

El segmento abierto AB será el conjunto de puntos X de la recta AB tales que X está entre A y B , excluyendo A y B ; esto es, $X \in (A,B)$ (Hemmerling, 2005).

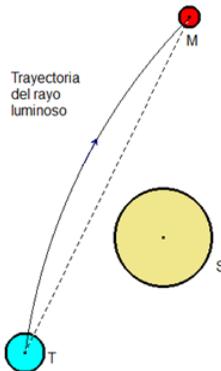


Figura 3. Curvatura de rayos luminosos

Fuente: adaptación de Gamow, G. (1983).

El rayo AB es el conjunto de puntos X de la recta AB tal que X está del mismo lado de A que está B , incluyendo A .

La semirrecta AB es el conjunto de puntos X tales que X está del mismo lado de A que está B , sin incluir A .

De otra parte, cuando se dibuja una recta sobre un plano se observa que el plano queda dividido en dos semiplanos, es decir, en dos regiones no acotadas; y ocurre un instante mágico, en el cual se piensa ¡qué tal si se agrega otra recta que corte a la primera!, se la traza y el plano queda dividido en 4 regiones no acotadas. Si se agrega otra recta que corte a las anteriores, se forman 6 regiones no acotadas y una región acotada (Figura 4).

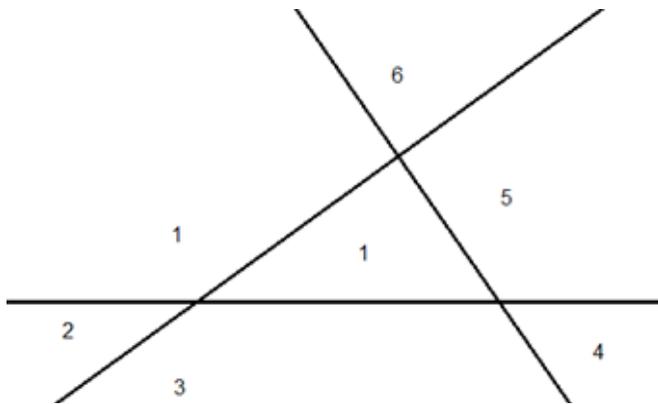


Figura 4. Regiones no acotadas de un plano por intersección de rectas

Fuente: elaboración propia

Se la traza y el plano queda dividido en 4 regiones no acotadas. Si se agrega otra recta que corte a las anteriores, se forman 6 regiones no acotadas y una región acotada (Figura 4).

Si se continúa el proceso de agregar una recta al plano de manera que corte a las anteriores, pero sin pasar por los puntos de intersección, se obtiene la siguiente tabla de valores (Tabla 1):

Tabla 1. Rectas y determinación de regiones acotadas y no acotadas

Número de rectas	Regiones no acotadas	Regiones acotadas
1	2	0
2	4	0
3	6	1
4	8	3
5	10	6
6	12	10
7	14	15

Es claro que, si es posible realizar la tarea de agregar una recta más que corte a las anteriores, pero sin pasar por los puntos de intersección, el número de regiones no acotadas es $2n$, donde n es el número de rectas.

Por su parte, el número de regiones acotadas merece estudiarse detenidamente; con lo cual, aparece un problema muy interesante, ya que la solución no es tan evidente, tal como el caso del número de regiones no acotadas.

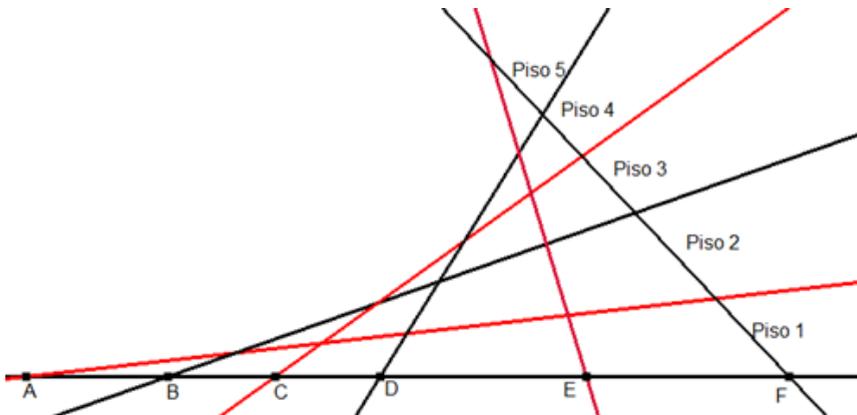


Figura 5. Número de regiones no acotadas por intersección de rectas

Fuente: elaboración propia

Una manera de resolver el problema, es formar una escalinata como se ve en la Figura 5; es decir, se da una recta horizontal y en ella los puntos A, B, C, D, E, F, G , etc. Por cada punto se traza una recta con las condiciones requeridas; y se observa que, en el primer piso hay $n - 2$ regiones, en el segundo piso $n - 1$, hasta llegar al último piso que es 1, donde n es el número de rectas.

La suma queda así:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n - 2 = \frac{(n - 1)(n - 2)}{2}, n > 2.$$

También se puede contar el número de puntos, para lo cual, se tiene como ayuda la secuencia que aparece en la Figura 6:

$$1 + 2 + \dots + n - 2 = \frac{n(n - 1)}{2}, n > 1.$$

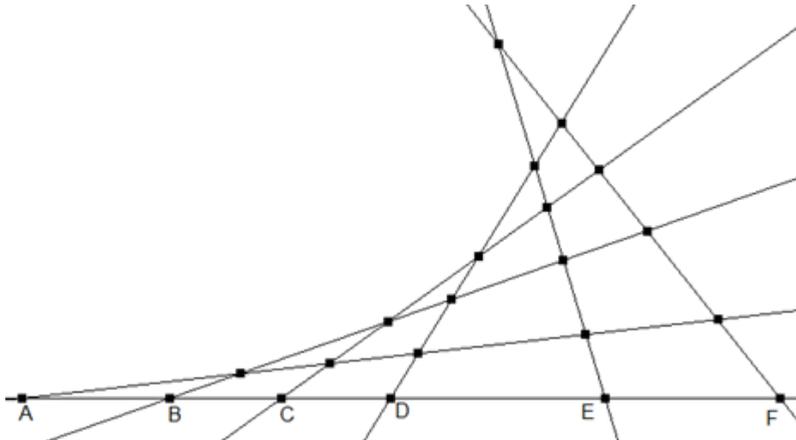


Figura 6. Número de puntos por intersección de rectas

Fuente: elaboración propia

El lector puede contar el número de segmentos, como también el número de rayos que se generan.

1.3 LA RECTA DE CANTOR-DEDEKIND

Se puede denominar así, a la recta que se menciona en el postulado de Cantor-Dedekind (*Postulado de la regla*): a cada punto de la recta le corresponde un número real y a cada número real le corresponde un punto en la recta.

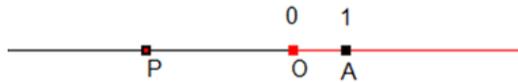


Figura 7. Recta de Cantor-Dedekind

Fuente: adaptación de Hemerling (2005).

Si l es una recta y O, A son puntos distintos de l , entonces existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de l y los números reales (Figura 7), tal que:

- a) Al punto O le corresponde el 0 y al punto A le corresponde el 1.
- b) Si al punto P le corresponde, el número real x , y a Q el número real y , entonces, $d(P, Q) = |x - y| = PQ$.

De lo anterior se puede plantear el problema de que, dado un número real x , determinar el punto que le corresponde en la recta.

Si el número x es entero positivo, basta utilizar el compás y, con centro en A y radio AO que corta a la recta en un punto B , que corresponde al número 2; con centro B y radio BA , se traza una circunferencia que corta a la recta, en C , que corresponde al número 3. Se continúa este proceso hasta obtener el punto que corresponda a x . Se procede de manera similar, si x es un número entero negativo.

Si x es un número racional, basta aplicar el teorema fundamental del paralelismo, y con esto se puede encontrar el punto con regla y compás.

Se puede determinar puntos que corresponden a números irracionales, pero no a todos. Se puede hallar puntos que estén cercanos al punto que le corresponde por el postulado (Hemmerling, 2005).

1.3.1 Números construibles

Cuando se puede determinar en la recta, con regla y compás, el punto que le corresponde al número real x , se está hablando de números construibles, que de manera sorprendente forman un subcuerpo de los números reales.

Para la construcción de dichos números, se puede utilizar reiteradamente el teorema de Pitágoras, y el hecho que en un triángulo rectángulo su altura es media proporcional al producto de los segmentos que determina la altura sobre la hipotenusa.

Para profundizar en el tema, el lector puede consultar y aplicar el Teorema de *Wantzel*, donde se establecen las condiciones necesarias y suficientes para que un número sea construible (Navarro, s.f).

Hay una versión más sencilla del teorema y es la siguiente: “Un número real es construible, si y solo si, es solución de una ecuación algebraica de coeficientes construibles, de grado a lo sumo 2” (Gentile, 2021).

Por ejemplo,

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$$

es construible, ya que si,

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = c, x = c + \sqrt{c - 1}.$$

Al eliminar el radical, se obtiene $x^2 - 2cx + 2 = 0$; los coeficientes $1, -2c, 2$ son construibles, por tanto, x es construible.

La ecuación en la variable x y sin radicales, queda así: $x^4 - 2x^3 - 4x + 4 = 0$.

Si el problema es: dado el punto, hallar el número real x que le corresponde, entonces, el caso se torna dramático, ya que nuestros instrumentos de medida son muy precarios.

Cuando se ubica un segmento en la recta l , se determinan 3 conjuntos de puntos: dos semirrectas y el segmento que, por el *postulado de la regla*, les corresponde a los conjuntos de números reales:

$$P = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\} = [a, b]$$

$$Q = \{x \in \mathbb{R} / x < b\} = (-\infty, b)$$

$$R = \{x \in \mathbb{R} / x > b\} = (b, +\infty)$$

Al realizar un procedimiento semejante con intervalos semiabiertos, se obtienen los siguientes intervalos de números reales:

$(-\infty, a]$, $(a, b]$, $[a, b)$, $[b, +\infty)$.



Figura 8. Intervalos de números reales

Fuente: elaboración propia

Cuando se ubica en la recta un intervalo abierto por los dos extremos, como en la Figura 8, se obtiene los intervalos correspondientes a los conjuntos $(-\infty, a]$, (a, b) , $[b, +\infty)$.

1.4 PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Un punto M es el punto medio del segmento AB si $M \in \overline{AB}$ y $AM=MB$.

Actualmente, existe una gran contribución en el tema de construcciones con el Teorema de Mohr-Mascheroni: "Todo punto constructible con regla y compás es constructible sólo con compás" (Navarro, s.f.).

A continuación, se presenta la construcción del punto medio (Figura 9):

- 1) Se da el segmento AB , puede estar trazado o solo los puntos A y B .
- 2) Con centro A y radio AB , se traza la circunferencia c .
- 3) Con centro B y radio BA , se traza la circunferencia d que corta c en C .

- 4) Con centro C y radio CB , se traza la circunferencia e que corta d en D .
- 5) Con centro D y radio DB , se traza la circunferencia f que corta d en E .
- 6) Con centro E y radio EA , se traza la circunferencia g que corta c en F, G .
- 7) Con centro F y radio FA , se traza la circunferencia h .
- 8) Con centro G y radio GA , se traza la circunferencia i que corta h en M .
- 9) M es el punto medio del segmento AB .

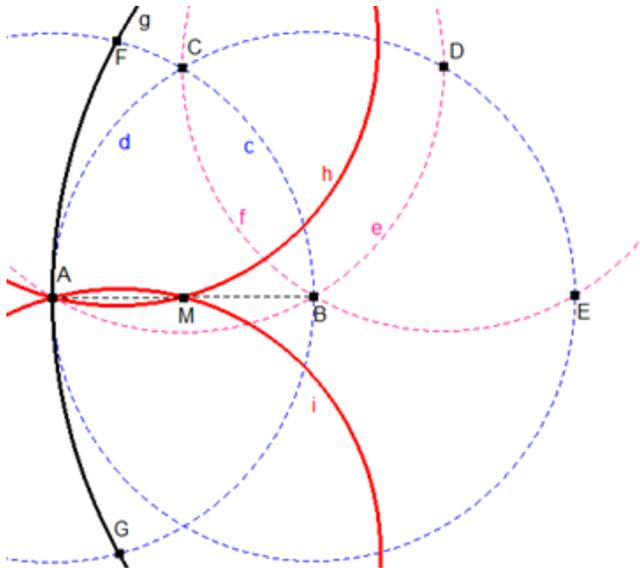


Figura 9. Construcción del punto medio de un segmento

Fuente: adaptación de Kostovski (1980).

Si en el segmento AB se considera el punto arbitrario P , de inmediato se puede establecer que $AP + PB = AB$; lo cual, se puede interpretar como la descomposición del número real AB en dos sumandos AP y PB (Figura 10).



Figura 10. Descomposición de un número real

Fuente: elaboración propia

Si se ubica el punto medio M y se halla el punto P' como la reflexión del punto P sobre el punto M , se observa que se cumple la propiedad conmutativa de la adición de los números reales positivos.

Se tiene $AP + PB = AB$ pero $AP' + P'B = AB$ y además $AP = P'B$, $PB = AP'$, por lo que, $AP + PB = AP' + P'B = PB + AP = PB + PA$ (Figura 11).

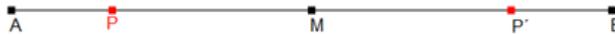


Figura 11. Propiedad conmutativa de adición de números reales positivos

Fuente: elaboración propia

En la Figura 12, moviendo el punto P a lo largo del segmento AB , se observa la propiedad conmutativa de la adición de los números reales.

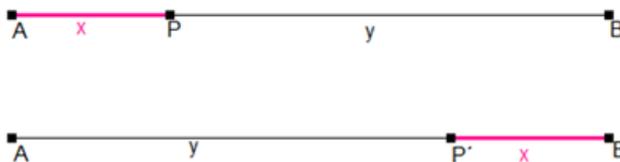


Figura 11. Propiedad conmutativa de adición de números reales positivos

Fuente: elaboración propia

También aparece la propiedad de elemento neutro para suma de números reales no negativos.

Cuando P coincide con A , se tiene $AA + AB = AB$, es decir, $0 + AB = AB$; y también por lo demostrado, se cumple que, $0 + AB = AB + 0 = AB$.

El punto medio de un segmento, como aplicación, por ejemplo, en Física, se tiene la balanza para equilibrar los pesos; en Matemáticas, sirve para trazar la mediana de un triángulo.

La relación $AP + PB = AB$ también evoca el lugar geométrico de la elipse.

La cantidad $AM = \frac{AB}{2}$, que se deriva del punto medio, como cosa curiosa e innovadora, se utiliza sabiamente en la solución de la ecuación de segundo grado por parte del profesor de Carnegie Mellon Po-Shen Loh (Standen Math, 2022).

Muchas fórmulas en matemáticas llevan esta forma $\frac{x}{2}$; por ejemplo, aparece esta expresión en la fórmula de la ecuación de segundo grado.

1.5 ÁNGULOS

Un ángulo es la unión de dos rayos que tienen el mismo punto extremo; los rayos son los lados y el punto común es el vértice. Se denota \widehat{AOB} y su medida por $m\widehat{AOB}$.

Para medir un ángulo, se puede seguir el método utilizado en Babilonia, que consiste en trazar una circunferencia de centro O y radio r, y se divide la circunferencia en 360 arcos de igual longitud, comenzando en un punto A. Cada arco representa un ángulo de un grado. Si el arco de un grado se divide en 60 partes, cada uno representa un minuto, y si uno de estos arcos se divide en 60 partes iguales, se obtiene un segundo (Hemmerling, 2005).

Lo extraño, es que no se puede dividir la circunferencia en exactamente 360 partes iguales ya que de lo contrario se pudiera construir el polígono regular de nueve lados.

Es por eso que es de particular interés hablar sobre los ángulos que sí se pueden construir exactamente con regla y compás, y los que se pueden trisecar; esto por el contenido histórico que evocan.

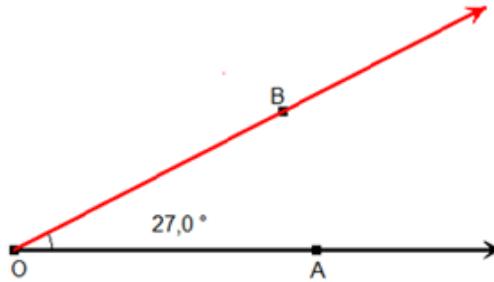


Figura 13. Ángulos con regla y compás

Fuente: elaboración propia

En la Figura 13, moviendo el punto B se generan ángulos cuya medida está entre 0 y 180 grados.

Por trigonometría, se sabe que,

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Si se quiere trisecar el ángulo de medida 3α , se requiere el valor de α y ver si ese resultado es un número construible.

Haciendo $\cos(3\alpha) = k$, $\cos\alpha = x$, se tiene $4x^3 - 3x - k = 0$.

De aquí, se obtiene que:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (*)$$

Donde,

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}; \quad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}.$$

Para la presente ecuación,

$$p = -\frac{3}{4}, q = -\frac{k}{4}.$$

Al reemplazar en (*) y simplificar, se obtiene:

$$x = \frac{1}{2} \sqrt[3]{k + \sqrt{k^2 - 1}} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{k - \sqrt{k^2 - 1}}.$$

Dado que, $\cos(3\alpha) = k$, entonces:

$$x = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{\cos(3\alpha) + i \operatorname{sen}(3\alpha)} + \sqrt[3]{\cos(3\alpha) - i \operatorname{sen}(3\alpha)} \right).$$

A la anterior ecuación, se la puede denominar *ecuación de verificación*. Se reemplaza el ángulo que se quiere trisecar y se mira si el resultado es un número construible.

Se considera,

$$\sqrt[3]{a + ib} = u + iv, \sqrt[3]{a - ib} = u - iv.$$

Entonces,

$$a + ib = (u + iv)^3.$$

Al desarrollar e igualar las partes reales e imaginarias, se tiene:

$$\begin{cases} u^3 - 3uv^2 = a \\ 3u^2v - v^3 = b \end{cases}$$

Se debe tener en cuenta que en la solución u, v deben ser reales.

Con este método se mira si el ángulo $\frac{\pi}{4}$ se puede trisecar.

$$x = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}} \right) \quad \text{Se resuelve el sistema} \quad \begin{cases} u^3 - 3uv^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3u^2v - v^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Y se obtiene $u = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$, $v = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$, que, como se ve, son construibles.

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} + i \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) + \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} - i \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \right) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Con este método se mira si el ángulo se puede trisecar.

$$x = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}} \right) \quad \text{Se resuelve el sistema} \quad \begin{cases} u^3 - 3uv^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3u^2v - v^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Y se obtiene $u = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$, $v = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$, que, como se ve, son construibles.

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} + i \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) + \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} - i \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \right) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Con este método se mira si el ángulo $\frac{\pi}{2}$ se puede trisecar.

$$x = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{0+i} + \sqrt[3]{0-i} \right).$$

Se resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} u^3 - 3uv^2 = 0 \\ 3u^2v - v^3 = 1 \end{cases}$$

Y se obtiene $u = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $v = \frac{1}{2}$ que, como se ve, son construibles:

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Es fácil ver que el ángulo de medida 3α se puede trisecar, entonces, el ángulo de medida $\frac{3\alpha}{2}$ también se puede trisecar.

Si $\cos \alpha$ es construible, entonces también es construible $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, ya que por trigonometría se tiene que,

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \text{ el cual es un número construible.}$$

El ángulo de medida π se puede trisecar, por tanto se puede trisecar el ángulo de medida

El ángulo de medida $\frac{2\pi}{5}$ se puede trisecar, por tanto se puede trisecar el ángulo de medida $\frac{\pi}{2^n}, n = 1, 2, \dots$

También entran en la lista de ángulos con esta propiedad, los de la siguiente medida: $\frac{2\pi}{5^n}, n = 1, 2, \dots$

$$\frac{2\pi}{2^m 5^n}, n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots$$

1.6 RAYOS DE INCIDENCIA Y REFLEXIÓN

Es interesante cómo se utilizan las figuras y conceptos geométricos en Física. Por ejemplo, son importantes los ángulos de incidencia y reflexión. Cuando un rayo incide sobre una superficie reflectante, que puede ser cóncava o convexa, el ángulo de incidencia es el formado por el rayo incidente y la normal a la superficie en el punto de incidencia; y el ángulo de reflexión, es el que se forma por la normal y el rayo reflejado (Figura 14).

Las leyes de reflexión son las siguientes (Acosta, 1953):

- 1) El rayo incidente i , a normal n y el rayo reflejado r y están en el mismo plano, llamado plano de incidencia.
- 2) El ángulo de incidencia es congruente con el ángulo de reflexión

$$\widehat{FMN} \cong \widehat{NMP}.$$

Se presenta una animación con Cabri II Plus, donde, arrastrando el punto P a lo largo del segmento AB , el rayo luminoso incide en varios puntos de la superficie reflectante, y hay variación en la medida de los ángulos, manteniéndose la ley de reflexión.

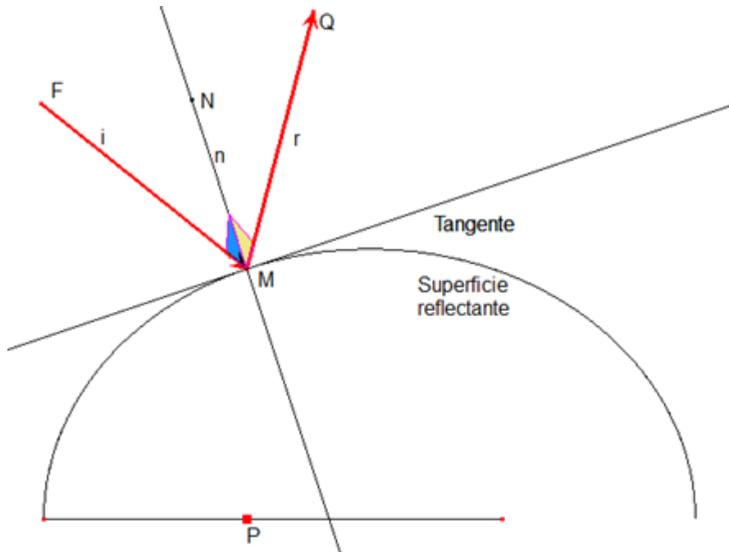


Figura 14. Leyes de reflexión de la luz

Fuente: adaptación de Lehmann (1989)

1.7 LAS PERPENDICULARES DE MICHELSON MORLEY

Otro ejemplo de aplicación en la Física, donde se hace uso de elementos y conceptos geométricos, es el experimento de Michelson-Morley, donde se utilizan los ángulos de 45 y 90 grados.

En Física para probar la existencia o no del éter, el físico Albert Michelson (1852,1931) y el químico Edward Morley (1836, 1923) realizaron el experimento conocido como el Experimento de Michelson-Morley (Figura 15).

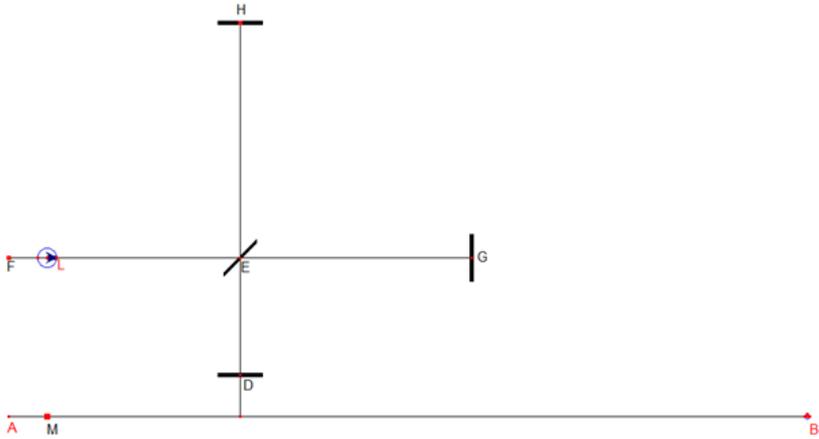


Figura 15. Perpendiculares de Michelson Morley

Fuente: adaptación de Experimento de Michelson-Morley: https://galileoandeinstein.phys.virginia.edu/lectures/Michelson-Morley_Sp.htm

El experimento consiste en lo siguiente: un haz de luz monocromática parte de la fuente F y llega al espejo semitransparente E puesto a 45 grados con respecto a la horizontal \overrightarrow{FG} que divide al haz en dos rayos perpendiculares entre sí, uno que atraviesa el espejo y se dirige al espejo G y otro que se refleja en E siguiendo la ley de la reflexión de la luz y se dirige al espejo H. Los rayos reflejados en G y H, respectivamente, se dirigen a E donde los rayos son reflejados nuevamente. En el punto D se pone un detector, donde se realizan las respectivas observaciones y conclusiones como producto de la interferencia (Fowler, *s.f.*).

Se realiza una construcción en Cabri II Plus, donde, en cámara superlenta, se recrea el viaje épico de los rayos, que llevan a un resultado importante de la Física. El viaje se realiza moviendo el punto M a lo largo del segmento AB; cuando el pulso de luz L llega a D, se muestra la conclusión del experimento.

1.8 LAS PARALELAS DE ERATÓSTENES

Se cuenta que un alumno le preguntó a Euclides sobre qué ganaba él con sus enseñanzas y Euclides le contesta: "Denle tres monedas a este alumno para que gane algo con lo que aprende".

Eran otros tiempos, y hoy en día los profesores están en la misma posición del maestro Euclides, ya que la pregunta la han cambiado los estudiantes, y en su lugar, preguntan: ¿En qué se aplica?

La sociedad hoy en día reclama que, lo que se aprende, debe tener una aplicación en la realidad.

Desde la antigüedad se estaban aplicando los conocimientos geométricos, y es así, como Eratóstenes, en el imposible problema para la época, aplica un teorema de las rectas paralelas y la transversal, para medir el radio de la tierra.

La historia relata que, a Eratóstenes le contaron que, en cierta época del año, en la ciudad de Siena, al medio día los obeliscos no proyectaban sombra, y en cambio, en Alejandría, donde él trabajaba, sí; y el agua de los pozos reflejaba la luz del sol.

Entonces, Eratóstenes dedujo lo siguiente: si el sol estaba muy lejos, podría considerar que los rayos que llegan a la tierra son paralelos, y así podría medir el radio de la tierra, midiendo el ángulo que marcaba la sombra de un palo ubicado perfectamente vertical en los jardines de la biblioteca de Alejandría.

El ángulo que midió es de $7,2^\circ$. Necesita la distancia de Alejandría a Siena, y paga con sus propios recursos a los jefes de caravanas para obtener la medición. Esa medición fue de 5000 estadios, y un estadio egipcio mide 158,75 metros.

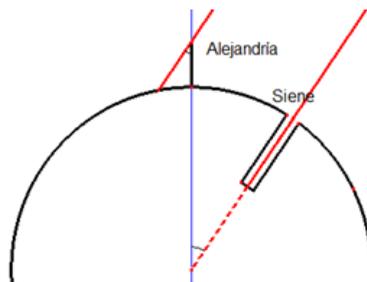


Figura 16. Paralelas de Eratóstenes
Fuente: adaptación de Lozano (007)

Lo demás, ya lo sabemos hoy en día, aplicando regla de tres.

$$\alpha \quad d$$

$$x \quad 360^\circ$$

$$x = \frac{360^\circ}{\alpha} d = \frac{360^\circ}{7.2^\circ} 5000(158,75) = 39687,500 \text{ Km}$$

Lo que da un radio $r=6316,461$ Km.

El lector puede comparar este resultado con los que se obtienen hoy en día, y verá que el resultado es asombroso. Es una labor imposible para aquella época.

Se realiza una representación gráfica, al estilo Ptolemaico con *Cabri II Plus*, sobre el fenómeno de los rayos paralelos del sol (Figura 16).

En resumen, Eratóstenes aplica: conocimientos de física, teorema de congruencia de los ángulos alternos internos de las paralelas y la transversal y regla de tres, acompañado de mucho interés por el problema y una gran genialidad para resolverlo.

A continuación, se realiza la demostración del teorema que se aplica en el trabajo de Eratóstenes.

TEOREMA. Si dos rectas paralelas se cortan mediante una transversal, los ángulos alternos internos son congruentes.

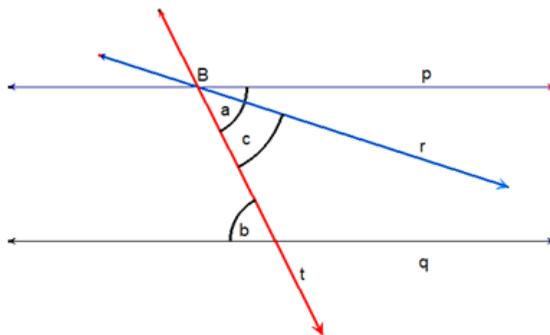


Figura 17. Demostración de la congruencia de ángulos alternos internos en rectas paralelas

Fuente. Adaptación de Hemerling (2005)

Hipótesis: p, q rectas cortadas por la transversal t , $p \parallel q$ (Figura 17).

Tesis: $\angle a \cong \angle b$

Demostración.

Proposición

- 1) $p \parallel q$
- 2) $\angle a \cong \angle b$ o $\angle a \not\cong \angle b$
- 3) Suponer que $\angle a \not\cong \angle b$
- 4) Sea r una recta que pasa por B tal que de los ángulos alternos internos son congruentes, es decir $\angle b \cong \angle c$
- 5) $r \parallel q$
- 6) Imposible.
- 7) $\angle a \cong \angle b$

Argumentos

- 1)) Hipótesis
- 2) Ley de tercero excluido
- 3) Suposición temporal.
- 4) Postulado de la construcción de ángulos
- 5) Teorema de ángulos alternos internos.
- 6) 1 y 5 contradicen el postulado de Playfair
- 7) Regla para negar la suposición.

1.9 EJERCICIOS

Resolver los siguientes ejercicios:

1. Dividir un segmento en 3 partes congruentes de dos maneras distintas.
2. Dividir un ángulo en dos partes iguales de dos maneras distintas.
3. Por un punto que esté por fuera de una recta r , trazar una recta perpendicular a r de dos maneras distintas.
4. Por un punto por fuera de la recta r trazar una recta paralela a r de dos maneras distintas.
5. La suma de las medidas de tres ángulos que están en progresión geométrica es 14 grados y la medida de uno de ellos es 4 grados. Hallar las medidas correspondientes. ¿Cuántas soluciones hay?
6. La suma de las longitudes de tres segmentos que están en proporción aritmética suma 45 centímetros. Hallar las medidas de cada segmento. ¿Cuántas soluciones hay?

7. La suma de las medidas de 3 ángulos está en progresión armónica y uno de ellos mide 10 grados. Hallar la medida de cada uno de ellos. ¿Cuántas soluciones hay?
8. La suma de las medidas de dos ángulos de un triángulo es 49 grados y su producto es 551.25. Hallar las medidas de los tres ángulos.

Resolver los siguientes ejercicios (Landaverde, s.f.):

1. ¿Cuánto mide un ángulo que es el doble de su complemento?
2. ¿Cuánto mide un ángulo que es el doble de su suplemento?
3. Una barra de hierro mide 9 m de longitud a la temperatura de 12 grados; ¿cuál será la longitud a la temperatura de 37 grados, si por cada metro y por cada grado aumenta .014 mm?
4. Dados los ángulos adyacentes AOB y BOC , y la bisectriz OD del ángulo BOD , probar que $2AOD = AOB + AOC$
5. ¿Cuánto mide el ángulo que describe el minutero de un reloj en 20 minutos? ¿y el horario?

CAPÍTULO 2.



TRIÁNGULOS PARA LA ETERNIDAD

“Las leyes de la naturaleza están escritas en el lenguaje de las matemáticas ... los símbolos son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin cuya ayuda es imposible comprender una sola palabra”.

Galileo Galilei.
(Figura 18).

Este capítulo se ha denominado “Triángulos para la eternidad”, para destacar la importancia de dicha figura geométrica y de los científicos que han utilizado este objeto matemático para avanzar en las matemáticas, la física, la ingeniería y otras ciencias, y que ha perdurado a través del tiempo. Se dan ejemplos de triángulos que han sido cruciales en el estudio de esta disciplina (Vera, 2023),

Es amplio el menú de triángulos que, de una u otra manera, contribuyen al avance de la ciencia. En este documento se tratará brevemente sobre algunos de ellos y el lector podrá buscar en otras fuentes, triángulos que sean de su interés o lo que sería fabuloso contribuir con un triángulo que llame la atención de alguien que esté buscando ese conocimiento.

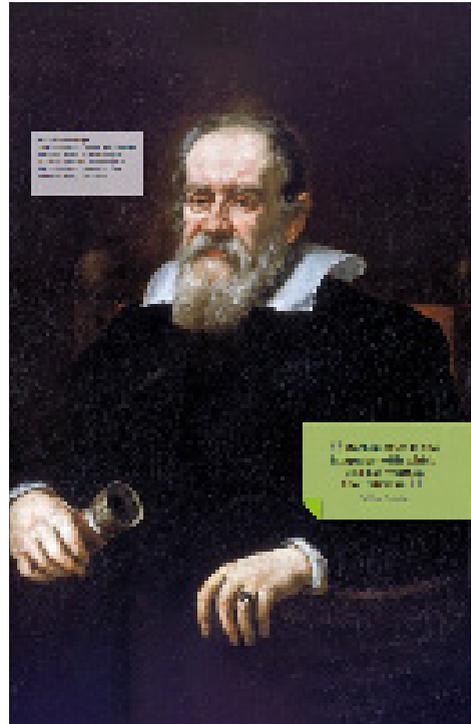


Figura 18. Galileo Galilei

Fuente: <https://culturacientifica.com/2020/05/13/vida-de-galileo/>

2.1 DEFINICIONES

2.1.1 Clases de triángulos

Triángulo. Sean los puntos A, B, C no colineales. $\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$.

Cada punto se llama vértice y cada segmento, lado. El lado opuesto a cada vértice se lo denota con la misma letra del vértice, pero minúscula.

Triángulo escaleno. Un triángulo es escaleno, si y solo sí, no tiene dos lados que sean congruentes.

Triángulo isósceles. Un triángulo es isósceles, si y solo sí, tiene dos lados congruentes.

Triángulo equilátero. Un triángulo es equilátero, si y solo sí, tiene sus lados congruentes.

Triángulo rectángulo. Un triángulo es rectángulo, si y solo sí, tiene un ángulo recto; el lado opuesto al ángulo recto es la hipotenusa, los otros dos lados se llaman catetos.

Triángulo acutángulo. Un triángulo es acutángulo si, y solo si no tiene tres ángulos agudos.

Triángulo obtusángulo. Un triángulo es obtusángulo, si y solo sí, tiene un ángulo obtuso.

Triángulo equiángulo. Un triángulo es equiángulo, si y solo sí, tiene tres ángulos congruentes.

(Fuentes: Hemerling (2005) y Landaverde (s.f.)).

2.1.2 Segmentos destacados

Mediana de un triángulo. Es el segmento de recta que une un vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto.

Altura. Una altura de un triángulo es un segmento perpendicular desde un vértice de un triángulo a la recta que contiene al lado opuesto.

Mediatriz de un segmento. Es la perpendicular en el punto medio del segmento.

2.1.3 Puntos destacados

Las fuentes de estos conceptos: Hemerling (2005) y Landaverde (s.f.).

Circuncentro. Punto de intersección de las mediatrices de los lados de un triángulo; corresponde al centro de la circunferencia circunscrita.

Incentro. Es el punto de intersección de las bisectrices de un triángulo; corresponde al centro de la circunferencia inscrita.

Ortocentro. Es el punto de intersección de las alturas de un triángulo.

Excentros. Puntos de intersección de la bisectriz de un ángulo interior y las bisectrices de los ángulos exteriores de los otros dos vértices.

Centroide. Es el punto de intersección de las medianas de un triángulo.

2.2 EL TRIÁNGULO SAGRADO EGIPCIO

Los egipcios contaban con una cuerda cuyos extremos estaban unidos y que contaba con doce nudos separados a distancias iguales.

Se cree que, para trazar perpendiculares, los expertos en esta tarea, tensaban la cuerda y quedaba formado un triángulo rectángulo cuyos catetos medían 3 y 4 unidades, y la hipotenusa 5 unidades. Dicho triángulo, y los que tienen como medidas $3k, 4k, 5k$, donde k es un entero positivo, se utilizan en los ejercicios de trigonometría, en cálculo de fuerzas por la facilidad en el manejo de números enteros, entre otros casos (Wikipedia, 2022a; Maikelnai, 2011).

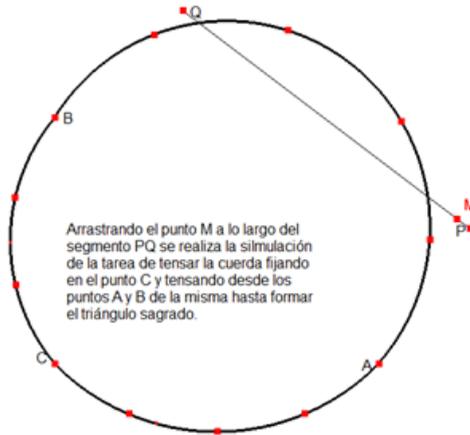


Figura 19. Cuerda con 12 nudos a distancias iguales, cuyos extremos están unidos

Fuente: elaboración propia

En la Figura 19, arrastrando el punto M a lo largo del segmento PQ, se realiza la simulación de la tarea de tensar la cuerda fijando el punto C y tensando desde los puntos a y B de la misma, hasta formar el triángulo sagrado (Figura 20)

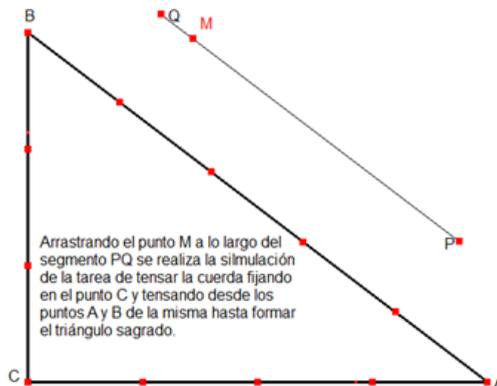


Figura 20. Triángulo sagrado egipcio

Fuente: Triángulo sagrado egipcio: https://es.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A1ngulo_sagrado_egipcio

2.3 LA RECTA DE EULER

La recta de Euler, es aquella que, de manera asombrosa pasa por el ortocentro, baricentro y circuncentro de un triángulo.

Se puede decir que, un triángulo es variable, cuando alguno de sus elementos es variable.

Se puede realizar la prueba en un triángulo variable, para ver qué pasa con los puntos de la recta de Euler, cuándo el triángulo varía.

Se construye un triángulo ABM , de manera que, la altura se mantenga constante y puedan variar los lados del mismo, cuando se mueve el vértice M a lo largo de una recta paralela al lado AB . Se trata de demostrar que, los puntos de la recta de Euler, describen parábolas cuando se mueve el punto M (Figura 21).

En el triángulo ABM se tienen las siguientes coordenadas:

$$A=(0,0), B = (a, 0), M = (t, h).$$

Las coordenadas del baricentro, circuncentro y ortocentro del triángulo ABM son respectivamente: $V = \left(\frac{a+t}{3}, \frac{h}{3}\right)$, $C = \left(\frac{a}{2}, \frac{t^2-at+h^2}{2h}\right)$. $O = \left(t, \frac{t(a-t)}{h}\right)$.

Al calcular el siguiente determinante:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{a+t}{3} & \frac{h}{3} & 1 \\ \frac{a}{2} & \frac{t^2-at+h^2}{2h} & 1 \\ t & \frac{t(a-t)}{h} & 1 \end{vmatrix}$$

se obtiene $|D|=0$, lo cual indica que los puntos están alineados.

En efecto, la recta que pasa por los tres puntos es:

$$y - \frac{h}{3} = \frac{\frac{t^2 - at + h^2}{2h} - \frac{h}{3}}{\frac{a}{2} - \frac{a+t}{3}} \left(x - \frac{a+t}{3} \right)$$

$$= \frac{3at - h^2 - 3t^2}{h(2t - a)} \left(x - \frac{a+t}{3} \right);$$

de donde,

$$y = \frac{3at - h^2 - 3t^2}{h(2t - a)} \left(x - \frac{a+t}{3} \right) + \frac{h}{3}.$$

Para el ortocentro:

$$x = t, y = -\frac{1}{h}x^2 - \frac{a}{h}x;$$

representa una parábola que pasa por $(0,0), (a,0)$.

Para el circuncentro:

$$x = \frac{a}{2}, y = \frac{1}{2h}t^2 - \frac{a}{2h}t + \frac{h}{2}.$$

Para el baricentro:

$$x = \frac{a+t}{3}, y = \frac{h}{3}.$$

representa una recta paralela al eje x que pasa por el baricentro.

Realizando el cambio,

$$x - \frac{a+t}{3} = k(2t - a);$$

se obtiene,

$$y = \frac{k}{h}(3at - h^2 - 3t^2) + \frac{h}{3}$$

que corresponde a una parábola.

Para los valores de $k = \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, 0$, se obtienen las parábolas correspondientes al ortocentro, circuncentro y baricentro, respectivamente.

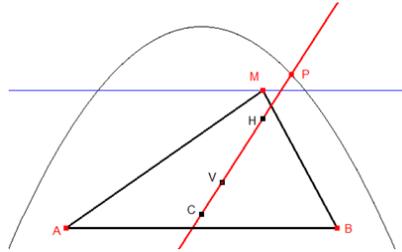


Figura 21. Recta de Euler

Fuente: adaptación de Cexeter (1971)

En la Figura 21, se recrea el triángulo ABM , cuyo vértice M se mueve sobre una recta paralela al eje x , manteniendo constante la altura y de esta manera los puntos P de la recta de Euler y por supuesto V , O y C adquieren movimiento generando curvas parabólicas (Cexeter, 1971).

2.4 EL TRIÁNGULO INFINITESIMAL

En los cursos de Cálculo Diferencial, para trabajar el concepto de derivada es necesario abordar el problema de trazar una recta tangente en un punto de una curva; el problema se puede resolver con cierta facilidad en algunos casos, por ejemplo, para el caso de las curvas cónicas; pero, en la mayoría de curvas, no es posible hallar exactamente la tangente en un punto de la curva.

La idea para trazar la tangente en el punto P de una curva continua, es trazar primero la secante $s = \overline{PM}$ y debido a la continuidad de la curva desplazar el punto M a lo largo de la curva, de manera que se aproxime a P .

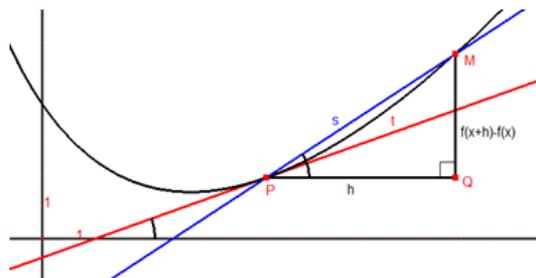


Figura 22. Triángulo infinitesimal

Fuente: adaptado de Banach (1967)

En la Figura 22, a medida que el punto M se aproxima a P a través de la curva, la secante s se va aproximando a la tangente t . Se puede considerar el triángulo PQM , con ángulo recto en Q , con catetos paralelos a los ejes coordenados que se va haciendo cada vez más pequeño.

Sea $\alpha_s = m\angle MPQ$, α la medida del ángulo que forma la tangente t con el semieje positivo de las x . En el paso al límite cuando el punto M coincide con P , se habrá trazado la tangente. Se puede decir que,

$$\tan \alpha = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (\tan \alpha_s).$$

En el archivo triángulo infinitesimal, se pone como ejemplo de curva a una parábola, donde t es la tangente exacta en el punto P . Se arrastra el punto M a través de la curva, en dirección a P ; en el paso al límite, se observa en primer plano que, la secante s coincide con la tangente t ; y según el curso de Cálculo Diferencial, se sabe que, la pendiente de la recta t , es la derivada de la función en ese punto.

2.5 EL TRIÁNGULO ISÓSCELES DE LA RELATIVIDAD

Un tema que ha revolucionado la Física y la forma de mirar nuestra posición en el universo es la teoría de la relatividad. Una de sus aristas es la distorsión del tiempo, las magnitudes que estén en función de él.

Se considera un vagón que va en movimiento a velocidad v constante, en línea recta, y dentro, un observador A . De la fuente F del piso del vagón sale un rayo luminoso y llega hasta el techo, se refleja en el espejo E y llega a la fuente F (Figura 23).

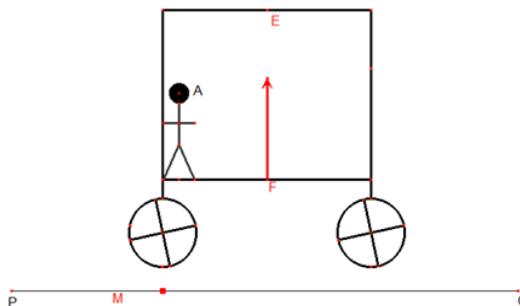


Figura 23. Vagón con rayo luminoso

Fuente: adaptación de Bert (2005).

El observador A sabe que la velocidad de la luz es constante, y calcula el tiempo total en recorrer el espacio, y obtiene: $t = \frac{2FE}{c} = \frac{2l}{c}$; lo que observa es cómo el rayo de luz viaja perpendicularmente al piso del vagón hacia el espejo F y desciende de la misma manera.

Por su parte, para el observador B las cosas son diferentes, ya que él mira que el rayo que sale de la fuente F recorre un camino más extenso, debido al movimiento del vagón, que, corresponde exactamente la hipotenusa de un triángulo rectángulo; es claro que, la hipotenusa es mayor que cualquiera de los dos catetos. Se presentan dos posibilidades: la luz viaja más rápido o tarda más tiempo (Figura 24).

La primera no puede darse, dado que uno de los postulados que establece Einstein para la teoría de la relatividad especial, es: *la velocidad de la luz en el vacío es siempre la misma, independientemente de quién la emita y quién la mida; por tanto, la luz tarda más tiempo en recorrer el camino, que se lo puede llamar t' .*

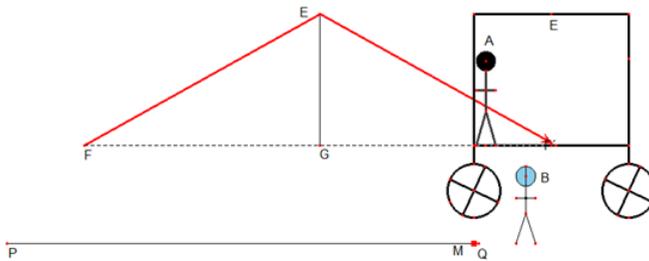


Figura 24. Triángulo de la relatividad

El espacio recorrido por la luz es:

$$FE + FF' = 2FE.$$

Ahora bien, en la Figura 24, aplicando teorema de Pitágoras, se tiene:

$$FG^2 + GE^2 = FE^2, \text{ donde } FG = v \frac{t}{2}, GE = c \frac{t}{2}, FE = c \frac{t'}{2}.$$

Es decir,

$$\left(v \frac{t'}{2}\right)^2 + \left(c \frac{t}{2}\right)^2 = \left(c \frac{t'}{2}\right)^2.$$

Al realizar operaciones y simplificar, se llega a la siguiente expresión:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

De la relación anterior se concluye que $t' > t$.

Supongamos que el vagón va a una velocidad $v = \frac{99}{100}c$, entonces,

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \left(\frac{99}{100} \frac{c}{c}\right)^2}} = \frac{100\sqrt{99}}{199} t \approx 7.1t$$

Esto es, según el observador B el tiempo en que la luz realiza el recorrido $2FE$ es más largo que el que mide el observador A , y más notorio cuando la velocidad del vagón es cercana a la velocidad de la luz (Bert, 2005).

En Física, entre otros, son notables el plano inclinado, que fue estudiado por primera vez por Simón Stevin en 1585; la cuña inventada por Herón de Alejandría; máquinas que, en esencia, son triángulos, rectángulo e isósceles, respectivamente (Fernández & Tamaro, 2004a).

2.6 EL TRIÁNGULO IMPOSIBLE DE PENROSE-REUTERSVÄRD

Se dice que, el artista Oscar Reutersvärd, en 1934, en tiempos de estudiante, inventó la figura que parece ser un triángulo sólido, pero si se mira detenidamente no puede existir. En la Figura 25, se mira una figura en el

espacio: moviendo el punto M a lo largo del arco hasta que coincida con N , se forma el triángulo imposible de Penrose (Grupo Alquerque, 2013).

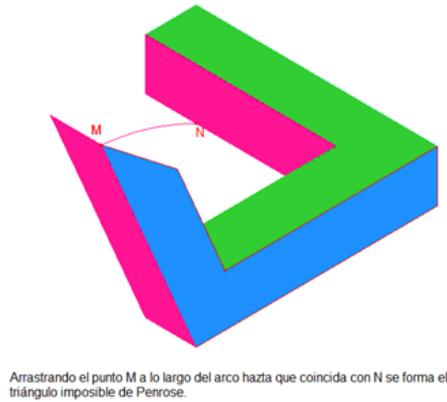


Figura 25. Triángulo imposible de Penrose-Reutersvärd (a)

Fuente: adaptación de Grupo Alquerque (2013).

Este triángulo fue redescubierto por el físico Roger Penrose en 1950 y le llamó “la imposibilidad en su más pura forma”.

Es fantástico ver que esa figura geométrica se puede dibujar, pero en la realidad no existe, es para asombrarse y deleitarse mirando (Figura 26).

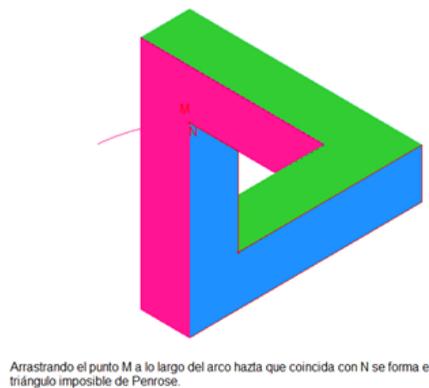


Figura 26. Triángulo imposible de Penrose-Reutersvärd (b)

Fuente: adaptación de Grupo Alquerque (2013).

2.7 EL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

En la actualidad, se conocen muchas geometrías y entre ellas aparece la *geometría fractal*. Un fractal, es aquella figura que conserva su forma si se le cambia de escala (Trueba, 2009).

Una de aquellas figuras, es el triángulo de Sierpinski, cuya construcción se realiza de la siguiente manera:

Se construye un triángulo equilátero, se trazan los segmentos que unen los puntos medios de sus lados y somborean los triángulos formados, a excepción del triángulo central. Con cada triángulo sombreado que es equilátero, se realiza la misma tarea, es decir, se traza los segmentos que unen los puntos medios de sus lados y se sombrea los triángulos formados, a excepción del triángulo central. Este proceso se efectúa indefinidamente (Figura 27).

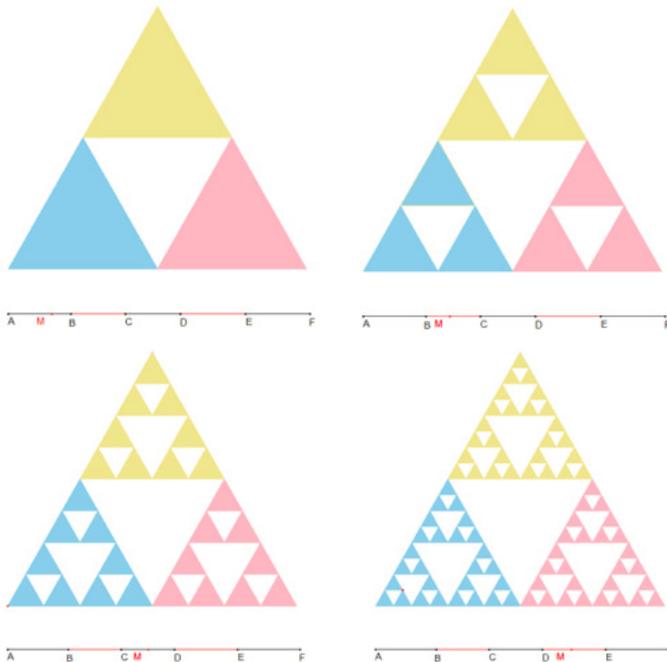


Figura 27. Triángulos de Sierpinski

Fuente: Trueba (2009).

Además de visualizar una linda figura, se puede estudiar sucesiones y series, contando cuántos triángulos sombreados y sin sombrear, la suma de las áreas de los triángulos y la suma de los perímetros de las dos clases de triángulos.

Los triángulos sombreados, se los puede llamar tipo A, los sin sombrear, tipo B; y se puede estudiar, cuántos se generan de cada clase, en cada paso, e investigar la suma de las áreas y sus perímetros.

Sea $p=3l$ el perímetro del triángulo inicial.

Se denota por:

- M : número de triángulos tipo A
- N : número de triángulos tipo B
- S : suma de las áreas de los triángulos tipo A
- T : suma de las áreas de los triángulos tipo B
- U la suma de los perímetros de los triángulos tipo A
- V la suma de los perímetros de los triángulos tipo B.

Se obtiene la Tabla 2:

Tabla 2. Datos triángulos de Sierpinski

Pasos	M	N	S	T	U	V
1	3^1	1	$3 \frac{\alpha}{4}$	$\frac{\alpha}{4}$	$\frac{3}{2}p$	$\frac{1}{2}p$
2	3^2	$3(1) + 1$	$3^2 \frac{\alpha}{4^2}$	$7 \frac{\alpha}{4^2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 p$	$\frac{3(1) + 2^2}{2^2} p$
3	3^3	$3(4) + 1$	$3^3 \frac{\alpha}{4^3}$	$37 \frac{\alpha}{4^3}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 p$	$\frac{3(37) + 2^4}{2^3} p$
4	3^4	$3(13) + 1$	$3^4 \frac{\alpha}{4^4}$	$175 \frac{\alpha}{4^4}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4 p$	$\frac{3(175) + 2^6}{2^4} p$
5	3^5	$3(40) + 1$	$3^5 \frac{\alpha}{4^5}$	$781 \frac{\alpha}{4^5}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^5 p$	$\frac{3(781) + 2^8}{2^5} p$
...
n	3^n	t_{n+1} $= 3t_n + 1$	$3^n \frac{\alpha}{4^n}$	$\frac{(4^n - 3^n)\alpha}{4^n}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^n p$	$\frac{3a_n + 2^{2(n-1)}}{2^n} p$

En cuanto al número de triángulos tipo B , resulta una fórmula recursiva; esto es, para saber cuántos triángulos hay en un paso, se debe tener el resultado del paso anterior. Esto se puede solucionar de la manera siguiente.

$$t_1 = 1,$$

$$t_2 = 3 + 1,$$

$$t_3 = 3(3 + 1) + 1 = 3^2 + 3 + 1,$$

$$t_4 = 3(3^2 + 3 + 1) + 1 = 3^3 + 3^2 + 3 + 1,$$

$$t_n = 3^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + 1 = \frac{3^{n-1}3 - 1}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Como se puede observar en la tabla, la suma de las áreas de los triángulos sombreados es:

$$A_n = 3^n \frac{\alpha}{4^n}.$$

Además,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \frac{\alpha}{4^n} = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \alpha \cdot 0 = 0.$$

En la tabla se puede observar que la suma de las áreas de los triángulos en blanco es:

$$B_n = \frac{(4^n - 3^n)\alpha}{4^n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4^n - 3^n)\alpha}{4^n} = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4^n - 3^n)}{4^n} = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = \alpha \cdot 1 = \alpha.$$

La suma de los perímetros en ambas clases de triángulos es ∞ .

2.8 EL TRIÁNGULO EN INGENIERÍA CIVIL

Otra aplicación del triángulo, se presenta en Ingeniería Civil, debido a la propiedad de ser indeformable. Esto se puede comprobar, uniendo tres

regletas o barras, de manera que formen un triángulo y que puedan girar libremente en los extremos A, B, C . Se puede ejercer una fuerza en cualquier punto y el marco triangular permanece rígido.

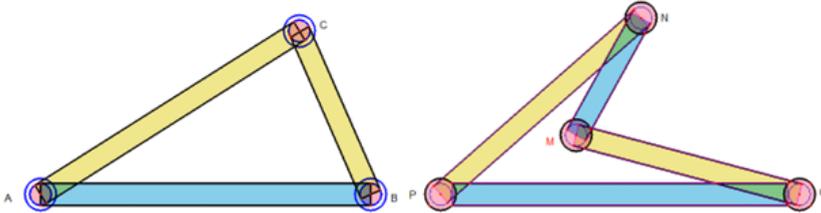


Figura 28. Triángulos en Ingeniería Civil

Fuente: adaptación de Thomsom (1961)

En cambio, en la figura $PQMN$ la unión en M se puede mover libremente hacia afuera o hacia adentro. Es decir, se puede deformar (Figura 28).

La propiedad de la rigidez del triángulo, se aplica en algunas estructuras, como puentes, armaduras de tejados, edificios.

2.9 EL TRIÁNGULO DE MORLEY

El triángulo de Morley o milagro de Morley, como lo denominan algunos, es el triángulo formado por los puntos de corte de las trisectrices más cercana a los lados de un triángulo arbitrario. Resulta que dicho triángulo así formado es equilátero (Coxeter, 1971).

Frank Morley (1860-1937) lo concibió como ejemplo de una teoría geométrica, que estaba investigando, y lo planteó como una conjetura.

El teorema establece que, los puntos de intersección de las trisectrices interiores de los ángulos de un triángulo, situadas cerca de los tres lados, respectivamente, forman un triángulo equilátero, llamado triángulo de Morley (*Blog Revista digital de matemáticas Sacit Ámetan (s.f.)*).

Para realizar esta construcción, se traza la base de un triángulo \overline{AB} , el ángulo A se lo construye de manera que sea el triple de otro con medida α , el ángulo

B se lo construye de manera que sea el triple de otro con medida β . Como la idea es construir un triángulo, se debe cumplir que $m\angle A + m\angle B < \pi$, entonces debe ser $3\alpha + 3\beta < \pi$ y por ello $\alpha + \beta < \frac{\pi}{3}$; de esta manera se obtiene el vértice C .

Ahora, $m\angle A + m\angle B + m\angle C = \pi$,

Luego, $\frac{m\angle C}{3} = \frac{\pi}{3} - \alpha - \beta$ que se puede realizar con regla y compás. Con esto, en el vértice se construye el ángulo de medida $\frac{\pi}{3} - \alpha - \beta$, con lo cual, queda trisecado el ángulo C y se puede construir el triángulo de Morley (Figura 29).

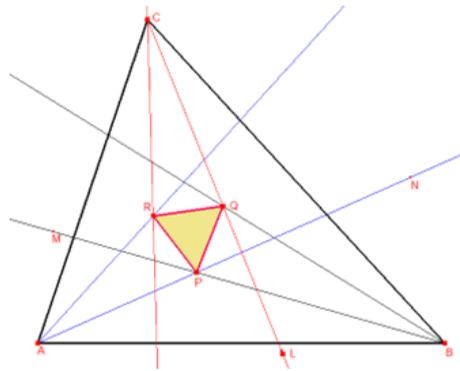


Figura 29. Triángulos de Morley (a)

Fuente: adaptación de Coxeter, H. (1971)

Los puntos B, M, N permiten modificar los ángulos y los lados del triángulo ABC , y la trisección se mantiene perfecta en los tres ángulos.

Aplicando la fórmula de la distancia, el lector puede calcular las longitudes PQ, QR, RP y verificar que el triángulo de Morley es equilátero.

El teorema de Morley se puede extender a las trisectrices de los ángulos externos, y para llevar a cabo esa tarea, se debe tener en cuenta que, $m\angle A + m\angle A' = \pi$, donde A' es el ángulo exterior correspondiente al ángulo A ; y así, $m\angle A' = \pi - \alpha$, que es construible con regla y compás. Lo demás ángulos exteriores se trisecan de la misma manera y resultan más triángulos de Morley (Figura 30).

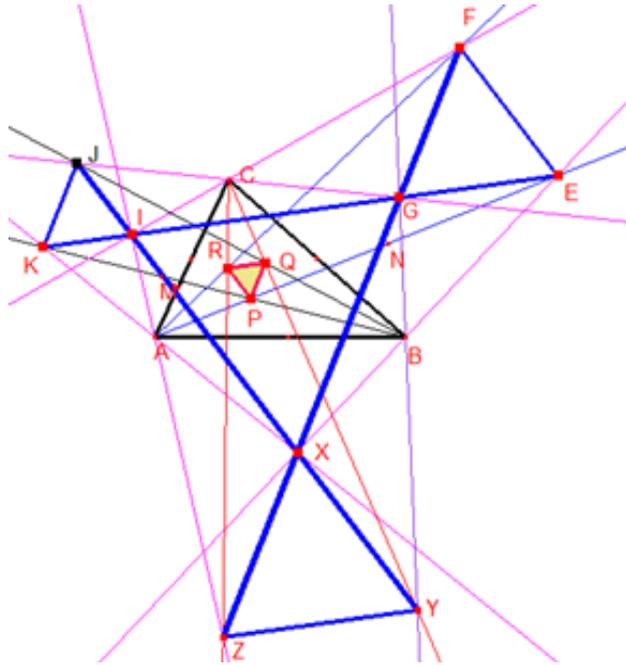


Figura 30. Triángulos de Morley (b)

Fuente: Blog Revista digital de matemáticas Sacit Ámetan (s.f).
<http://revistasacitametam.blogspot.com/2013/02/el-triangulo-de-morley-otra-maravilla.html>

2.10 EL TRIÁNGULO DE NAPOLEÓN

Es un triángulo equilátero, determinado por los baricentros de los triángulos equiláteros construidos sobre los lados de un triángulo arbitrario, a partir de los lados del mismo (Figura 31).

Esta idea se la atribuye a Napoleón Bonaparte (1769-1821), pero al parecer, el autor fue Lorenzo Mascheroni (1750-1800) (Días, 2012).

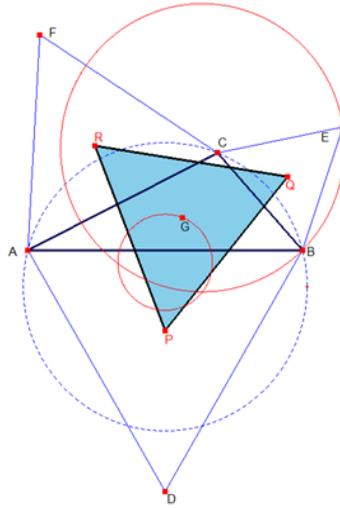


Figura 31. Triángulo de Napoleón

Fuente: adaptación de Díaz, M. (2012).

Se construye un triángulo ABC donde el ángulo C sea constante. De esta manera, el punto C se mueve sobre una circunferencia y se puede hallar el lugar geométrico que generan, por ejemplo, los vértices y el baricentro del triángulo de Mascheroni, y se observa que son circunferencias (Figura 31).

2.11 EL TRIÁNGULO DE PASCAL

Es un triángulo que se debe a Blaise Pascal, quien lo presentó en el año 1654.

En los cursos de matemáticas generales, se estudia el binomio de Newton $(a + b)^n$ y su desarrollo; se aprende que, para hallar los coeficientes es muy fácil escribiendo un 1 en un renglón; en el segundo renglón, escribir dos veces el 1; en un tercer renglón, escribir el 1 luego el dos, que es el resultado de sumar los unos del renglón anterior, y luego el uno; en el cuarto renglón, se escribe el 1 y luego la suma de dos consecutivos del renglón y el ultimo será un 1. Este triángulo se debe a Blaise Pascal quien lo presentó en el año 1654. Estos números se escriben de manera que vayan generando un triángulo, tal como lo muestra la Figura 32 (Wikipedia, s.f.).

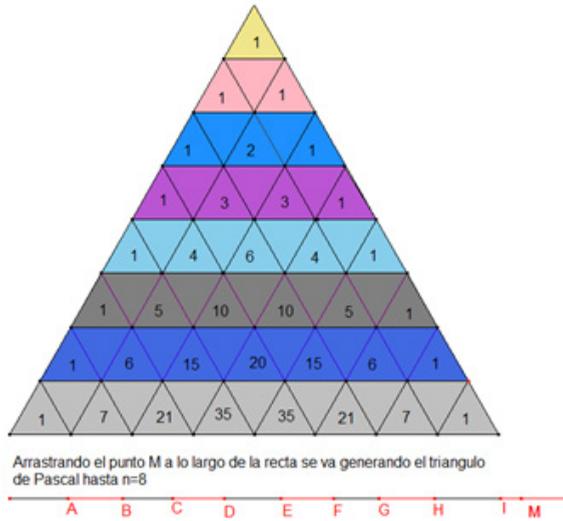


Figura 32. Triángulos de Pascal

Fuente: adaptación de Wikipedia. (s.f.).

Estos números que van apareciendo en cada fila, se denominan números combinatorios y se representan por:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m \geq n.$$

Una fórmula que se desprende de la formación por renglones del Triángulo de Pascal, es:

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}.$$

Si se suman los elementos de cada fila, se obtiene: $1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1}$ es decir,

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \dots + \binom{n-1}{n-1} = 2^{n-1}.$$

Hay muchas más propiedades en el triángulo de Pascal, para lo cual, se puede consultar el siguiente enlace: https://es.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A1ngulo_de_Pascal#Construcci%C3%B3n

2.12 EL TRIÁNGULO DE THALES

A Thales de Mileto se lo conoce más por el teorema fundamental de las proporciones, pero hay otro teorema que se atribuye a Thales. Si P es un punto de la circunferencia c de centro O y diámetro AB entonces el $\triangle APB$ es rectángulo en P (Figura 33). (Wikipedia, 2023a).

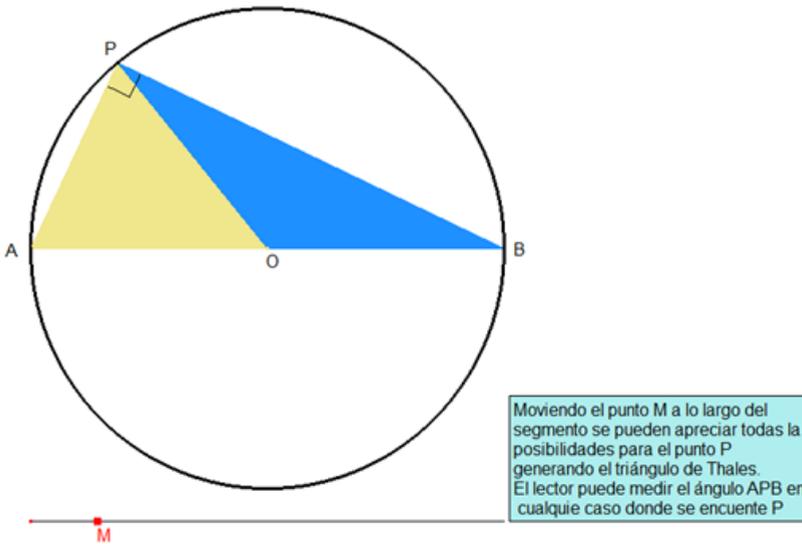


Figura 33. Teorema de Thales

Fuente: adaptación de Prepa8.unam.mx. (s.f.)

2.13 EL TRIÁNGULO DE VIVIANI

Se puede decir, en este caso, que, todo triángulo equilátero es de Viviani ya que se cumple con la afirmación siguiente: en todo triángulo equilátero, y un punto P en el interior del mismo, la suma de las distancias del punto P a cada uno de los lados, es constante, e igual a la altura del triángulo (Diamond, 2021) (Figura 34).

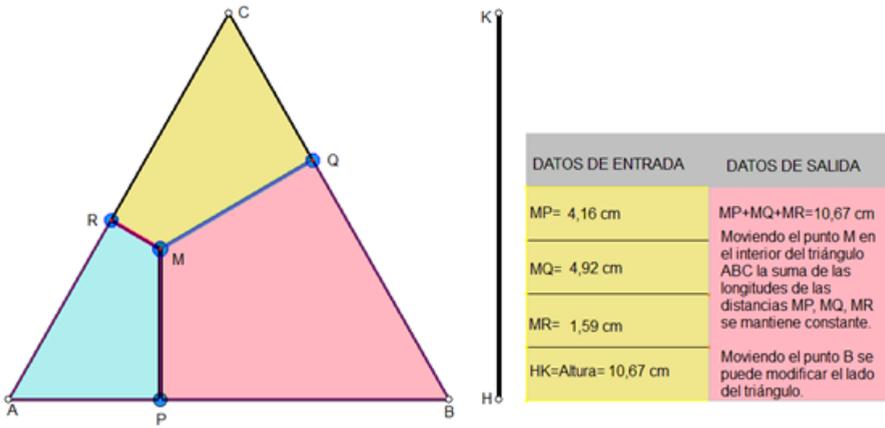


Figura 34. Triángulo de Viviani
Fuente: adaptación de Diamond. (2021).

A continuación, se realiza una demostración utilizando áreas (Figura 35) (Cultura científica, s.f.).

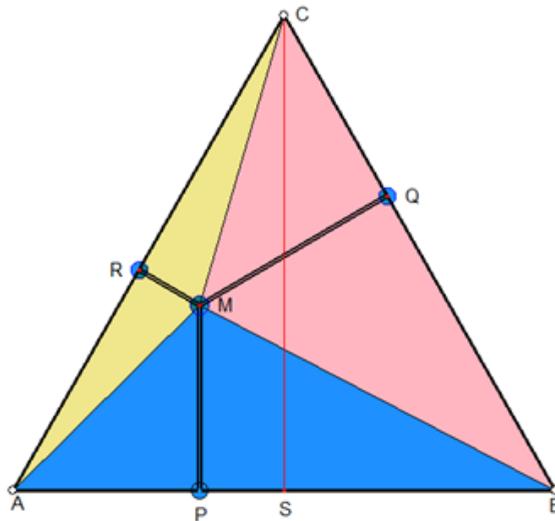


Figura 35. Demostración Triángulo de Viviani
Fuente: adaptación de Cultura científica(s.f.)

El área del triángulo ABC es igual a la suma de las áreas de los triángulos AMB , BMC y AMC .

$$\text{área } \Delta ABC = \text{área } \Delta AMB + \text{área } \Delta BMC + \text{área } \Delta AMC$$

Se sabe que el área de un triángulo es igual a base por altura sobre dos; entonces:

$$\begin{aligned} \text{área } \Delta ABC &= \frac{(AB)(HK)}{2}; \text{área } \Delta AMB = \frac{(AB)(MP)}{2}; \text{área } \Delta BMC = \frac{(BC)(MQ)}{2}; \\ \text{área } \Delta AMC &= \frac{(AC)(MR)}{2}. \end{aligned}$$

Como el triángulo ABC es equilátero, se tiene que $AB=BC=AC$; con lo cual se obtiene la siguiente igualdad:

$$\frac{(AB)(HK)}{2} = \frac{(AB)(MP)}{2} + \frac{(AB)(MQ)}{2} + \frac{(AB)(MR)}{2}.$$

De aquí se llega a la igualdad:

$$\frac{(AB)}{2}(HK) = \frac{(AB)}{2}[MP + MQ + MR].$$

Se cancela $\frac{(AB)}{2}$ y finalmente $HK=MP+MQ+MR$.

2.14 TRIÁNGULO DE KANIZSA

Es una ilusión óptica descrita por primera vez por el psicólogo italiano Gaetano Kanizsa (Wikipedia, 2023b) en 1955. En la gráfica se mira triángulos que no existen. el triángulo blanco y el triángulo de lados incompletos (Figura 36).

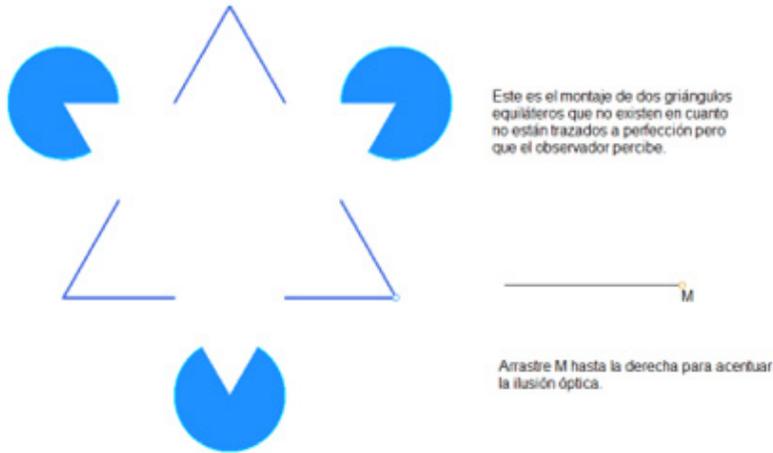


Figura 36. Triángulo de Kanizsa

Fuente: adaptación Wikipedia. (2023b).

2.15 EJERCICIOS

Resolver los siguientes ejercicios (Landaverde, s.f.):

1. Las medidas de los ángulos interiores de un triángulo están en proporción geométrica y uno de ellos es de 30 grados. Hallar todas las soluciones posibles.
2. Las medidas de los ángulos interiores de un triángulo están en proporción aritmética y uno de ellos es de 50 grados. Hallar todas las soluciones posibles.
3. Las medidas de los ángulos interiores de un triángulo están en proporción aritmética y uno de ellos es de 20 grados. Hallar todas las soluciones posibles.
4. La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 60 grados y el producto es 800. Hallar todas las soluciones posibles de las medidas.
5. Se da un ángulo ABC se pide construir un triángulo donde la medida de un ángulo sea el doble de la medida del ángulo ABC. Hallar el intervalo

- de números reales para la medida del ángulo ABC.
6. Se da un triángulo ABC. Construir otro distinto que tenga la misma área. Considerar varios casos.
 7. Se tiene un segmento de longitud 48 centímetros. Se divide en 3 segmentos de manera que se pueda construir un triángulo con las siguientes condiciones si es posible:
 - a. Las longitudes de los lados están en progresión aritmética.
 - b. Las longitudes de los lados están en progresión geométrica.
 - c. Las longitudes de los lados están en progresión armónica.
 8. Determinar las longitudes de los lados en cada caso.
 9. Construir si es posible un triángulo ABC donde la mediana relativa al lado AB forme 15 grados con el lado AC y la altura relativa al lado AB forme 30 grados con el lado AC.
 10. Escriba los pasos para construir un triángulo rectángulo donde un ángulo agudo mida 3.75 grados.

(Ejercicios propuestos por los autores)

1. Escriba los pasos para calcular la altura de un árbol utilizando una escuadra a 45 grados.
2. Probar que las bisectrices de dos ángulos iguales de un triángulo isósceles son iguales.
3. Probar que dos triángulos isósceles son iguales si tienen respectivamente iguales los ángulos en el vértice y las alturas correspondientes a las bases.
4. Construir un triángulo isósceles cuyo perímetro mida 15 cm y la base 4 cm.
5. Probar que si un triángulo tiene la altura que sea al mismo tiempo bisectriz, dicho triángulo es isósceles.
6. Construir un triángulo isósceles dada la base y un ángulo.
7. Demostrar que en todo triángulo isósceles las medianas relativas a los lados iguales son iguales.
8. Construir un triángulo ABC conocidos dos lados AB y BC, y la mediana AD.
9. Dado el triángulo ABC en que los ángulos A y B son iguales, se trazan desde O, punto medio de la base AB, dos rectas que forman con ella dos

ángulos iguales y que cortan los otros dos lados en B y E; demostrar que $OD=OE$.

10. En un triángulo ABC se traza la mediana BD, que se prolonga en una longitud DE igual a BD, y se une E con A demostrar que $AE=BC$.
11. Se traza la bisectriz CD en un triángulo ABC y se toman sobre los lados CA y CB longitudes CE y CF iguales. Demostrar que CD es bisectriz del ángulo EDF y que $DE=DF$.
12. En un triángulo ABC, cuyos lados están en la siguiente relación: $AC=BC=2AB$, se trazan la mediana AD, y la bisectriz BE del ángulo ABD donde E está en el segmento AD; ¿qué clase de triángulo es ABD y que propiedades tiene BE?

CAPÍTULO 3.



POLÍGONOS

La vida: el círculo, la mente: el cuadrado, el alma: el polígono,
la sabiduría: la Gran Cara de la Vida (Akifrases, 2023).

Hi ju

3.1 DEFINICIÓN Y ELEMENTOS DE UN POLÍGONO

Sea α un plano y en él los puntos $V_1, V_2, V_3, \dots, V_{n-1}, V_n$, $n \in \mathbb{N} - \{1,2\}$; se exige que tres puntos consecutivos no sean colineales (Figura 37).

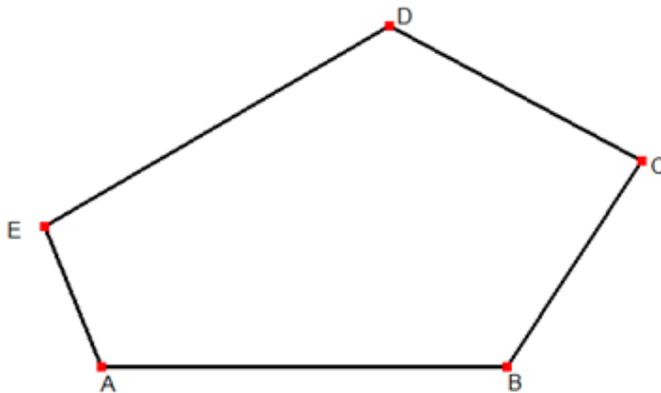


Figura 37. Polígono

Fuente: modificación Hemmerling (2005)

Se llama polígono al objeto matemático $\overline{V_1V_2} \cup \overline{V_2V_3} \cup \overline{V_3V_4} \cup \dots \cup \overline{V_{n-1}V_n}$. Los puntos V_i se llaman vértices y los segmentos $\overline{V_iV_{i+1}}, \overline{V_nV_1}$ se denominan lados.

$m\overline{V_1V_2} + m\overline{V_2V_3} + m\overline{V_3V_4} + \dots + m\overline{V_{n-1}V_n} = p$, es el perímetro del polígono. $\angle V_1, \angle V_2, \dots, \angle V_{n-1}, \angle V_n$ se llaman ángulos del polígono.

Lados adyacentes, son los pares de lados que comparten un vértice.

Vértices adyacentes, son aquellos que son extremos de un mismo segmento.

Ángulos adyacentes, son aquellos cuyos vértices son adyacentes.

Un polígono se llama simple, si $V_i \neq V_j$ para $i \neq j$, ningún lado intercepta a otro en un punto interior y ningún vértice está en el interior de un lado.

La diagonal de un polígono, es el segmento que une dos vértices no consecutivos.

Polígono equilátero, es el que tiene sus lados congruentes.

Polígono equiángulo, es aquel que tiene los ángulos congruentes.

Angulo externo de un polígono, es aquel que es adyacente y suplementario de un ángulo de un polígono.

Polígono regular, es aquel que es equilátero y equiángulo. Según el número de lados, se tiene el triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono heptágono, octógono, etc., n-ágono (Hemmerling, 2005).

3.2 CUADRILÁTEROS

Un cuadrilátero, es un polígono de cuatro lados; se tienen los siguientes (Hemmerling, 2005):

Trapezio. Cuadrilátero de solo un par de lados opuestos paralelos.

Trapezio isósceles. Trapecio de lados no paralelos iguales.

Paralelogramo. Cuadrilátero de lados opuestos paralelos.

Rombo. Paralelogramo equilátero.

Rectángulo. Paralelogramo de un ángulo recto.

Cuadrado. Rectángulo de cuatro lados congruentes.

Hay teoremas completamente desconocidos cuando se cursa la asignatura de Geometría Elemental, y son de gran belleza, ya que su contenido, demostración, es muy sencilla, además, se debe tener en cuenta que detrás de una construcción, de una demostración, está una persona o un grupo de personas de carne y hueso, y es importante resaltar su nombre. Gracias a la apertura de la información que ofrece internet, se puede rastrear a los autores o inventores de un concepto, de un objeto matemático.

En todos los capítulos se menciona la circunferencia a pesar de esto se tendrá un espacio aparte para ella.

3.3 TEOREMA DE MARLEN

Sea el rectángulo $ABCD$ y P un punto cualquiera del plano del rectángulo, entonces, $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$ (Figura 38).

La idea para demostrar este resultado, es aprovechar que Cabri II Plus posee una herramienta para medir segmentos y ángulos, y por esto, se puede construir dos triángulos rectángulos con catetos PA, PC y PB, PD . Si los triángulos tienen la misma hipotenusa, quedará demostrado el teorema. Se construye el triángulo rectángulo NQM tal que, $QN=PA, QN=PC$, y se traza la circunferencia c que pasa por los tres puntos; con centro N y radio PD , se traza una circunferencia d que que corta a c en R .

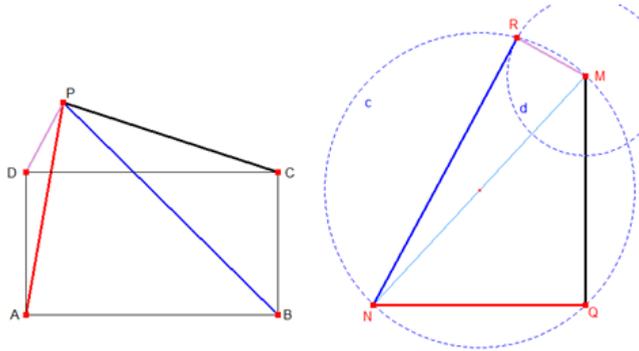


Figura 38. Teorema de Marlen

Fuente: modificación de ds-analitika.com (s.f.)

En el archivo Teorema de Marlen, el lector puede comprobar que el triángulo NRM es rectángulo y $RN=PB$; moviendo el punto P de manera errática, se cumple lo dicho anteriormente.

3.4 TEOREMA DE ARQUÍMEDES

En un cuadrilátero inscrito en una circunferencia con diagonales perpendiculares, la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados opuestos, son iguales, e iguales a cuatro (4) veces el cuadrado de la longitud del radio de la circunferencia (Figura 39) (Amauteach, s.f.).

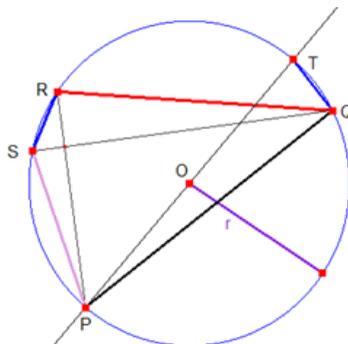


Figura 39. Teorema de Arquímedes

Fuente: adaptación de Orihuela J. (s.f.)

Sea el cuadrilátero $PQRS$ con las diagonales perpendiculares, inscrito en la circunferencia c de centro O y radio r . Se traza \overrightarrow{PO} que corta a c en T . El lector puede comprobar que $TQ = SR$, midiendo los segmentos con la herramienta distancia, y que $m\angle PQT = 90^\circ$, con medida de ángulo.

Por tanto, $PQ^2 + QT^2 = PT^2 = (2r)^2 = 4r^2$.

De manera similar, se prueba la otra parte.

3.5 TEOREMA DE FAURE

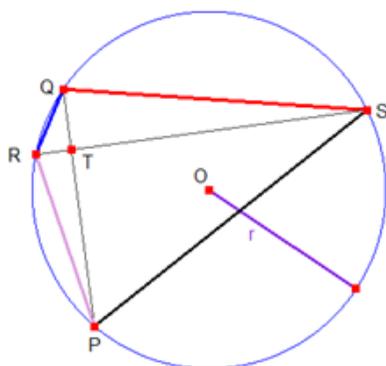


Figura 40. Teorema de Faure

Fuente: modificación de ds-analitika.com (s.f.)

Sean las cuerdas PQ y RS que se cortan en T (Figura 40). Se trazan los segmentos PS, SQ, QR, RP .

Se cumple que $PT^2 + QT^2 + RT^2 + TS^2 = 4r^2$.

Por el Teorema de Arquímedes se puede escribir $PS^2 + RQ^2 = PR^2 + QS^2 = 4r^2$; además, por la perpendicularidad se cumple que:

$$PS^2 + RQ^2 = PT^2 + TS^2 + QT^2 + RT^2 = 4r^2.$$

3.6 TEOREMA DE CHADU

Si PQR es un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia c , de centro O y radio r , M un punto del arco PSQ , entonces, se cumple que $MR=MP+MQ$ (Figura 41).

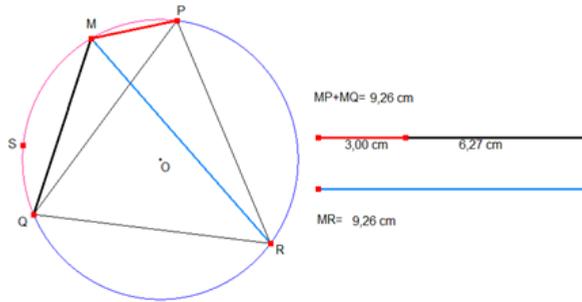


Figura 41. Teorema de Chadu

Fuente: adaptación de Orihuela (s.f.)

La demostración con Cabri II Plus es simple. Por un lado, se suman las longitudes de los segmentos $MP+MQ$, y por otro lado, se mide la longitud del segmento PQ . Arrastrando el punto M sobre el arco PSQ , se muestra que la igualdad prevalece (Matemáticas y ciencias, 2020).

Hay otros polígonos famosos que entran en la categoría de ilusiones ópticas, donde se mira una figura falsa o engañosa en relación a la forma, dimensión, color etc.

Curiosamente, las figuras que se presentan a continuación no fueron estudiadas por físicos, como se podría pensar, ni por matemáticos, sino por psicólogos.

3.7 CUADRADO DE KANIZSA

Es una ilusión óptica inventada por el psicólogo italiano Gaetano Kanizsa en el año de 1955, donde el observador mira un cuadrado que no existe, y se forma con cuatro círculos que se les ha quitado un sector circular de 90°

y se los ubica de manera que, mirando en su conjunto, las partes recortadas dan la forma de un cuadrado (Figura 42).



Figura 42. Cuadrado de Kanizsa

Fuente: adaptación de Paolera (s.f.)

Al parecer, a los gatos también les encantan los cuadrados; en el enlace que sigue, se mira un gato que identifica el falso cuadrado de Kanizsa y se sienta cómodamente en él: <https://paolera.wordpress.com/2021/05/12/la-ilusion-de-kanizsa-en-gatos-domesticos/>

En el archivo, Cuadrado de Kanizsa, aparece un punto M; se debe arrastrar a la derecha hasta formar el cuadrado que aparece en la gráfica.

3.8 CUADRADO DE EHRENSTEIN

Es una ilusión óptica que se debe al psicólogo Walter Ehrenstein (1899, 1961). Consiste en un cuadrado y una serie de circunferencias concéntricas, cuyo centro es el corte de las diagonales del cuadrado (Figura 43).

Inicialmente, cuando el cuadrado está solo, se lo mira común y corriente, pero cuando se construyen las circunferencias concéntricas, se mira un fenómeno extraordinario, ya que, los lados del cuadrado parecen curvos (Hmong, s.f.).

En el archivo, cuadrado de Ehrenstein, se inicia pulsando los botones con el cuadrado y luego se van agregando las circunferencias y, poco a poco, se van curvando los lados.

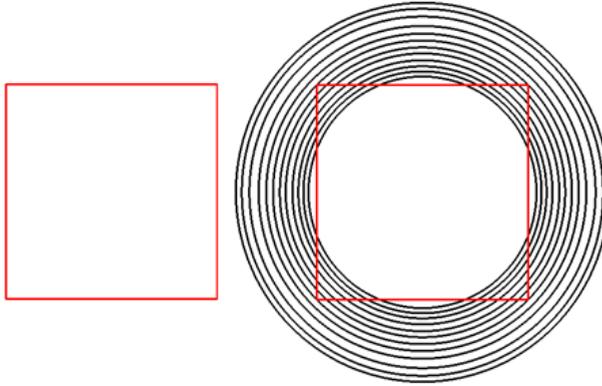


Figura 43. Cuadrado de Ehrenstein

Fuente: adaptación de Hmong (s.f.)

3.9 PARALELOGRAMO DE SANDER

Es una figura engañosa, estudiada en 1926 por el psicólogo Friedrich Sander (1889-1971). Consiste en dos segmentos congruentes, enmarcados en un paralelogramo; da la apariencia que, la medida de un segmento es mayor que la del otro (Figura 44) (Wikipedia, 2019).

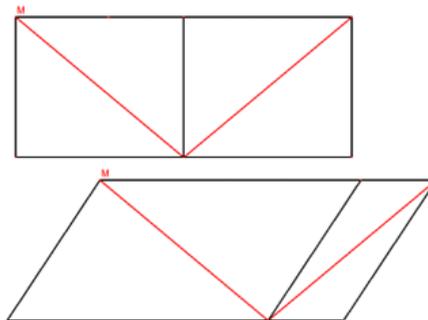


Figura 44. Paralelogramo de Sander

Fuente: adaptación de Wikipedia (2019).

Se presenta, en Cabri II Plus, los dos primeros segmentos enmarcados en un rectángulo, donde se ve claramente que los segmentos en color rojo son iguales y, luego, moviendo el punto M, el rectángulo se transforma en el paralelogramo de Sander, donde se observa la distorsión de los segmentos.

3.10 EL POLÍGONO EN LA SUMA DE VECTORES

De las clases de física de bachillerato, se sabe que, para sumar vectores, se ubica un vector inicial cualquiera y, el origen de otro vector, se lo hace coincidir con el extremo del primero, trasladándolo de forma paralela; el extremo de un tercer vector se lo traslada paralelamente, de manera que, su origen coincida con el extremo del segundo que ya se trasladó, y así sucesivamente, hasta poner todos los vectores. El vector resultante de la suma de los vectores, es aquel que va del origen del primero al extremo del último vector (Figura 45).

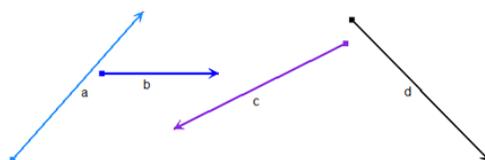


Figura 45. Polígono en la suma de vectores (a)

Fuente: elaboración propia

Se puede realizar la suma de vectores $a+c+b+d$, arrastrando los vectores según la regla descrita anteriormente, y se obtiene la Figura 46. En ella, el vector suma está en color rojo y se encarga de cerrar el polígono. Se puede cambiar el orden de los vectores, pero el vector resultante será el mismo. $b+c+d+a$.

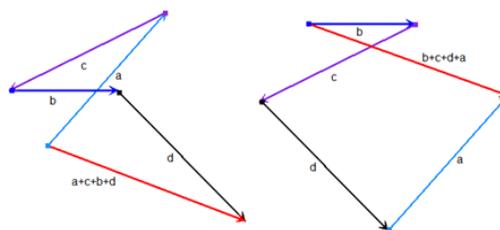


Figura 46. Polígono en la suma de vectores (b)

Fuente: elaboración propia

Se debe tener en cuenta que, las figuras resultantes no son polígonos simples.

3.11 SUCESIÓN DE POLÍGONOS REGULARES

En una circunferencia de radio $r = r_1$ se inscribe un cuadrado; en él, se inscribe una circunferencia de radio r_2 , en ella, se inscribe un octágono regular; y en él, se inscribe una circunferencia de radio r_3 . En esta circunferencia, se inscribe un hexadécagono regular, y así sucesivamente (Figura 47).

Se pide calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$.

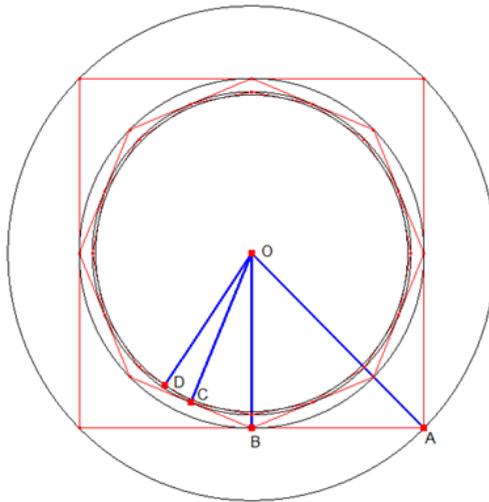


Figura 47. Sucesión de polígonos regulares

Fuente: Kasner (1994)

Se calcula r_2 .

En la Figura 47, se tiene $\alpha_1 = m\angle AOB = \frac{\pi}{4}$, $r_1 = AO = r$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \frac{OB}{OA} = \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow r_2 = r_1 \cos \alpha_1 = r \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \\ &= r \cos \left(\frac{\pi}{2^2} \right). \end{aligned}$$

Ahora,

$$\alpha_2 = m\angle COD = \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2^3}, r_2 = OB, r_3 = OC.$$

De aquí,

$$\cos\alpha_2 = \frac{OC}{OB} = \frac{r_3}{r_2} \Rightarrow r_3 = r_2 \cos\alpha_2 = r \cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right).$$

También,

$$\alpha_3 = m\angle COD = \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{2^4}, r_3 = OC, r_4 = OD.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \cos\alpha_3 &= \frac{OD}{OC} = \frac{r_4}{r_3} \Rightarrow r_4 = r_3 \cos\alpha_3 \\ &= r \cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2^4}\right). \end{aligned}$$

Generalizando se tiene,

$$\begin{aligned} r_n &= r \cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2^4}\right) \dots \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \\ &= r \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right). \end{aligned}$$

Zl realizar estos cálculos en derive, se obtiene:

$$\begin{aligned} r_{10000} &= r \prod_{k=1}^{10000} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right) = r \left[\prod_{k=1}^{1000} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right) \right] \left[\prod_{k=1001}^{10000} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right) \right] \\ &\approx (0.6366197879)(1)r. \end{aligned}$$

Lo anterior significa que, el radio de las respectivas circunferencias no tiende a 0, y que existe $\gamma \in (0,1)$, tales que:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n.$$

3.12 PARALELOGRAMO DE VARIGNON

Es el cuadrilátero que se forma trazando los segmentos que unen los puntos medios de los lados adyacentes de un cuadrilátero $PQRS$ (Figura 48) (Ocampo, 2021).

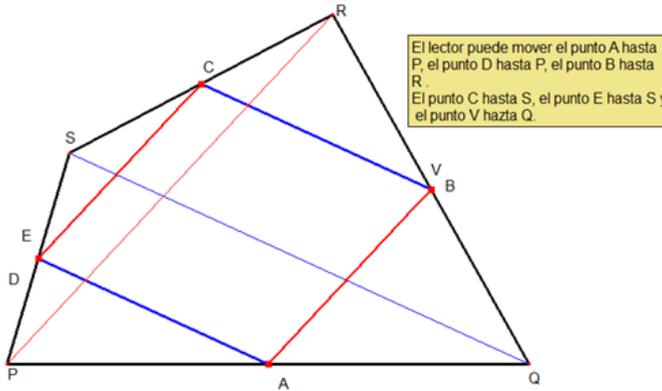


Figura 48. Cuadrilátero de Varignon

Fuente: adaptación de Ocampo-Arellano. (s.f.)

Dicho paralelogramo tiene propiedades importantes, por ejemplo, que el perímetro es igual a la suma de las medidas de las diagonales, y que el área del paralelogramo es igual a la mitad del área del cuadrilátero $PQRS$. La segunda propiedad se estudiará en el capítulo de áreas.

En el archivo Paralelogramo de Varignon 1, trabajado en Cabri II Plus, se presenta esta figura, y no importa cómo se muevan los puntos Q, R, S , se conserva la propiedad.

Por su parte, la propiedad del perímetro, se presenta en el archivo Paralelogramo de Varignon 2.

El lector puede arrastrar los puntos A, B, C, D para hacer coincidir los lados del paralelogramo con las diagonales del cuadrilátero, guiándose por el color.

Se realiza la demostración de la primera parte, las otras se dejan al lector.

Sean P, Q, R y S los vértices del paralelogramo y A, B, C y D los puntos medios de los lados PQ, QR, RS y SP respectivamente.

Los puntos D, C son los puntos medios de los lados RS, PS del triángulo PRS y por el teorema de Tales los segmentos DC y PR son paralelos.

De manera similar se demuestra que los segmentos PR y AB son paralelos. Luego los segmentos DC y AB son paralelos.

Realizando un razonamiento parecido se demuestra que los segmentos AD y BC son paralelos.

Por tanto, el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo por tener los lados opuestos paralelos (Wikipedia, s.f.d).

3.13 LOS CUADRADOS DE VAN AUBEL

Los centros de los cuadrados construidos alrededor de cualquier cuadrilátero, son extremos de dos segmentos de igual longitud, que se cortan perpendicularmente. Los puntos medios de vértices externos de esos cuadrados vecinos, también determinan dos segmentos iguales y perpendiculares, que confluyen en el punto de corte de los primeros, de mayor longitud que ellas y cuya razón en magnitud es $\sqrt{2}$ (Figura 49).

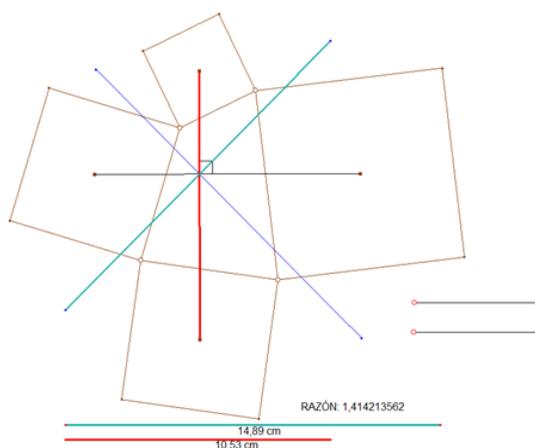


Figura 48. Cuadrilátero de Varignon

Fuente: adaptación de Ocampo-Arellano. (s.f.)

Se ha creado el archivo Teorema de Van Aubel, en Cabri II Plus. Cuando se arrastra los puntos sobre los deslizadores, se comprueba la igualdad de los segmentos verde y azul y la igualdad de los segmentos rojo y negro. Para ver que los segmentos son perpendiculares, se selecciona la herramienta pregunta, y en el menú, se pulsa ¿Perpendicular? Luego se hace clic en cada segmento y aparecerá un mensaje. “Los objetos son perpendiculares”.

3.14 EL CUADRILÁTERO DE SACHERI

El quinto postulado de Euclides dice: “Si una recta, al incidir sobre otras dos, forma del mismo lado, ángulos internos menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas al infinito, se encontrarán en el lado que estén los ángulos menores que dos rectos”.

Para algunos estudiosos de la geometría, este enunciado no es tan obvio, entre ellos, el jesuita Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733) que, supone que la proposición es falsa, para llegar a una contradicción.

El cuadrilátero de Saccheri se construye de la manera siguiente:

Se traza el segmento AB que se denomina base del cuadrilátero; por los puntos A, B se trazan los brazos $\overline{AC}, \overline{BD}$ de manera que sean perpendiculares a \overline{AB} , y $AC = BD$, finalmente se traza la cumbre \overline{CD} (Figura 50).

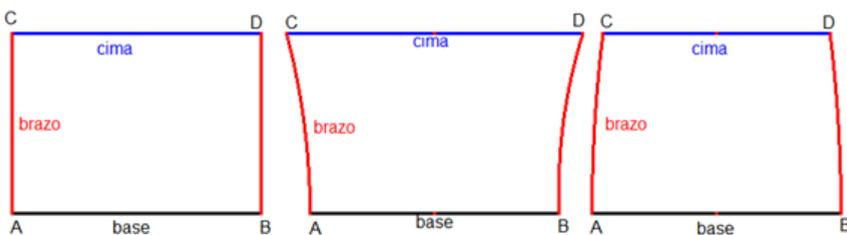


Figura 50. Los cuadriláteros de Saccheri
Fuente: modificación de Martínez (2007)

Con respecto a la suma de los ángulos internos del cuadrilátero ABDC, Saccheri formula tres hipótesis, con lo cual se presentan tres casos para los ángulos en la cumbre o cima, así:

$$a) \angle ACD \cong \angle ABD, m\angle ACD = m\angle ABD < 90^\circ$$

$$b) \angle ACD \cong \angle ABD, m\angle ACD = m\angle ABD = 90^\circ$$

$$c) \angle ACD \cong \angle ABD, m\angle ACD = m\angle ABD > 90^\circ$$

La posibilidad *c)*, presenta contradicciones, pero la posibilidad *a)*, de manera sorprendente, no presenta problemas, y es así, que, de esta manera, Saccheri construye la primera Geometría no Euclidiana (Martínez, 2007).

3.15 HEXAGRAMA MÍSTICO DE PASCAL

Un polígono de gran belleza matemática, es el hexágono irregular, que se inscribe en una cónica; los tres pares de lados opuestos concurren en tres puntos que son colineales y la recta que los contiene se llama recta de Pascal, dado que Blaise Pascal lo enunció teniendo apenas 16 años (Figura 51).

Se puede verificar con Cabri II Plus, utilizando la herramienta pregunta, y elegir en el menú ¿Alineados?, luego seleccionar los puntos P, Q, R y se obtendrá una respuesta por parte del asistente geométrico: “Los puntos están alineados” (Carrillo, 2020).

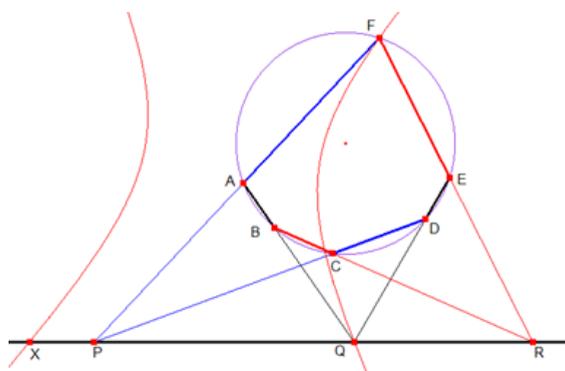


Figura 51. Hexagrama Místico de Pascal

Fuente: adaptación de Carrillo (2020)

Además, este polígono, es de gran riqueza geométrica, ya que, una vez realizada la construcción en Cabri II Plus tomando como cónica la circunferencia, se puede experimentar tomando un punto de la recta de Pascal y ver qué lugar geométrico se genera cuando se mueve alguno de los vértices del polígono.

Si se toma un punto X de la recta de Pascal y se halla el lugar geométrico que se genera cuando se mueve el punto A ; se puede postular que, dicho lugar es una recta paralela al lado CD .

Si se toma un punto X de la recta de Pascal y se halla el lugar geométrico que se genera cuando se mueve el punto C , se puede postular que dicho lugar es una hipérbola que se muestra en la Figura 51.

El lector puede postular, qué lugares se generan cuando se toma un punto en la recta de Pascal y se mueve cada uno de los demás vértices de polígono de pascal y, si es posible, realizar las demostraciones correspondientes.

3.16 LA RECTA DE NEWTON

A Isaac Newton se lo relaciona popularmente con el Cálculo y la Física, y poco se conoce en los cursos de bachillerato y en la universidad de sus contribuciones en la Geometría (Ubeda, 2017). El teorema dice que, “en un cuadrilátero los puntos medios de las diagonales y el centro de la circunferencia inscrita están alineados”.

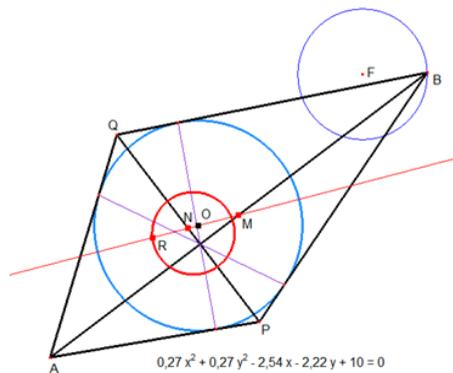


Figura 52. Recta de Newton

Fuente: adaptación de Ubeda (2017).

Se ha construido tangentes desde los puntos A, B a la circunferencia de centro O y radio r que se cortan respectivamente en los puntos P, Q para conformar el cuadrilátero $APBQ$ (Figura 52).

El punto B , se mueve en la circunferencia de centro F y radio ρ (Figura 52). M, N son los puntos medios de $\overline{AB}, \overline{PQ}$, respectivamente. Para ver que O está en la recta MN , en la herramienta de preguntas de Cabri II Plus, se selecciona ¿Alineados? y se pulsan los puntos N, O, M , y la respuesta es, los puntos están alineados.

Cuando se utiliza la herramienta lugar, se halla el lugar geométrico de los puntos que genera R cuando se mueve B por la circunferencia.

El resultado, son figuras que no las identifica el programa; pero moviendo el centro F y modificando el radio ρ , se logra identificar un lugar geométrico conocido que identifica el asistente geométrico como una circunferencia cuya ecuación aparece en la Figura 52.

3.17 TEOREMA DE PTOLOMEO

En todo cuadrilátero cíclico, el producto de la longitud de las diagonales, es igual a la suma de los productos de las longitudes de los lados opuestos (Figura 53). (Amauteach, s.f.).

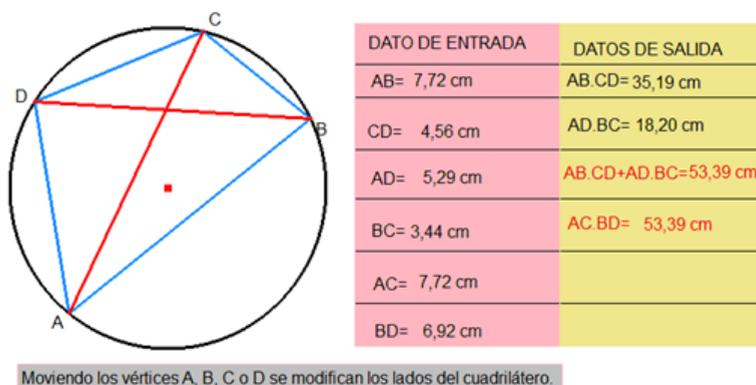


Figura 53. Teorema de Ptolomeo

Fuente: adaptación de ds-analitika.com (s.f.)

En el archivo, Teorema Ptolomeo, el lector puede comprobar el teorema, moviendo sobre la circunferencia cualesquiera de los puntos A, B, C, D , de manera que el polígono se mantenga convexo, y los datos de entrada y salida se verán en la calculadora, conservando la igualdad en los datos en rojo.

3.18 EL CUADRILÁTERO DE BRAHMAGUPTA

El cuadrilátero de Brahmagupta (590,670) es tan sorprendente que, dadas las condiciones que se le exigen, parece que no existiera. El Cálculo de probabilidades indica que, cuando más condiciones se exigen para que un evento suceda, la probabilidad de que se cumpla, es cada vez más pequeña.

El cuadrilátero de Brahmagupta, es un cuadrilátero cíclico, que tiene lados enteros, diagonales enteras y como si esto fuera poco, área entera y como consecuencia de tener los lados enteros, el perímetro también resulta entero (Wikipedia, 2022b).

En el artículo *Brahmagupta Quadrilaterals*, el autor presenta un listado de cuadriláteros que cumplen esas propiedades “imposibles”. Se ha tomado un ejemplo para ilustrar este hecho insólito.

En el cuadrilátero $ABCD$ se tiene $AB = 25, BC = 15, CD = 7, DA = 15$. El diámetro de la circunferencia es 25 (Figura 54).

Se traza una circunferencia c de diámetro $AB = 25$ y se tiene un lado del cuadrilátero que es el diámetro; luego, con centro en B y radio de longitud 15, se traza una circunferencia que corta a c en C ; con centro C y radio de longitud 7, se traza una circunferencia que corta a c en el punto D .

Estos tres (3) lados se construyen fácilmente; lo sorprendente es que, DA debe ser forzosamente 15, y ahora, forzosamente las medidas de las diagonales y del área, deben ser números enteros.

El lector puede comprobar que estos hechos se cumplen en el archivo cuadrilátero de Brahmagupta.

Midiendo las diagonales y calculando el área.

2. Construir un cuadrado, si se conocen uno de sus vértices y dos puntos ubicados en los dos lados, o sus continuaciones, que no pasan por el vértice dado (Lidski, 1972).
3. Construir un paralelogramo dados un lado y las dos diagonales.
4. Construir un paralelogramo dadas las diagonales y el ángulo que forman.
5. Construir un rectángulo dados un lado y la diagonal.
6. Construir un rombo dadas las diagonales.
7. Construir un cuadrado dada la diagonal.
8. Construir un trapecio dados los cuatro lados.
9. Construir un trapecio isósceles dadas las bases y un ángulo.
10. Calcular el valor de los ángulos de un cuadrilátero si valen:
 $x, 1,25x, 2x$ y $1,25x$.
11. Calcular el valor del ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos consecutivos A y B de un paralelogramo.
12. Demostrar que las bisectrices de los ángulos de un paralelogramo forman un rectángulo en todo rectángulo.
13. Demostrar que, en todo rectángulo, las bisectrices de sus ángulos forman un cuadrado.
14. Probar que, si la diagonal de un paralelogramo es bisectriz de uno de los ángulos, el paralelogramo es un rombo.
15. Demostrar que, si se unen consecutivamente los puntos medios de los lados de un rombo, resulta un rectángulo.

CAPÍTULO 3.



LA CIRCUNFERENCIA

“El universo es una esfera infinita cuyo centro está en todas partes y la circunferencia en ninguna.” (Figura 55)

Pascal.



Figura 55. Blaise Pascal

Fuente: Fernández & Tamaro (2004b).

Es probable que, las primeras circunferencias fueron vistas en el disco lunar y solar; en los ojos de la persona que pudo estar al frente de otra, algunas frutas, luego se miró a la tierra y, de alguna manera, el hombre descubrió que la tierra era redonda; pero si no fuera por las fotografías que toman los astronautas de nuestro planeta cuando exploran el espacio, es posible que no podamos imaginar que nuestro planeta es así.

Hoy en día, por medio de los telescopios, se evidencia que los planetas del sistema solar son redondos (Fernández & Tamaro, 2004b).

Una pregunta viable, es ¿por qué son redondos?

Sin la ayuda de la ciencia, esto sería un misterio; claro, además de todos los misterios existentes en el universo. La física explica la forma de los planetas aplicando el concepto de gravedad.

Una de las grandes aplicaciones de la circunferencia, en todos los tiempos, ha sido la rueda; y en la actualidad aparece en muchas representaciones.

En la antigüedad, se plantea el problema de construir un cuadrado con regla y compás que tenga la misma área de un círculo dado, lo cual se conoce como la cuadratura del círculo. Por su parte, Eratóstenes consideraba que la tierra era redonda y se propuso calcular qué tan grande era, y midió la circunferencia de la tierra con un error del 1%.

4.1 DEFINICIONES

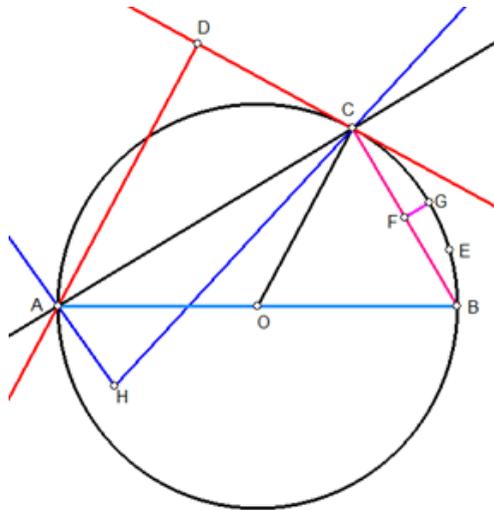


Figura 56. Algunos elementos de una circunferencia

Fuente: elaboración propia

Circunferencia: conjunto de puntos de un plano que equidistan de otro llamado centro.

Circulo: superficie plana limitada por la circunferencia que incluye el centro.

Radio: segmento de recta, en el cual, uno de cuyos extremos es el centro y el otro es cualquier punto de la circunferencia. Ejemplo: Figura 56, \overline{OC} , \overline{OB} .

Cuerda: segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia. Ejemplo: Figura 56, \overline{AC} , \overline{BC} , \overline{AB} , \overline{OB} .

Flecha o sagita: es la parte del radio perpendicular en el punto medio de una cuerda comprendida entre esta y el arco subtendido por ella.

Ejemplo: Figura 56, \overline{FG}

Diámetro: segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro. Ejemplo: Figura 56, \overline{AB} .

Circunferencias congruentes: dos circunferencias son congruentes si tienen radios congruentes.

Circunferencias concéntricas: dos circunferencias son concéntricas si están en el mismo plano y tienen el mismo centro.

Tangente: una recta es tangente a una circunferencia si se encuentra en el mismo plano de ella y la toca en un solo punto. Ejemplo: Figura 56, \overline{CD} .

Secante: es una recta que intercepta a una circunferencia en dos puntos. Ejemplo: Figura 56, \overline{AC} , \overline{BC} .

Arco: es una parte determinada de una circunferencia. Ejemplo: Figura 56, Arcos GCA , BEG .

Angulo central: es aquel que tiene como lados, radios de la circunferencia, y cuyo vértice está en el centro de dicha circunferencia.

Ejemplo: Figura 56, $\angle AOC$, $\angle BOC$.

Se dice que el ángulo $\angle BOC$ intercepta al arco BEC y que el arco BEC subtiende al ángulo central $\angle BOC$ (Figura 56).

Angulo inscrito: es aquel que tiene el vértice en un punto de la circunferencia y sus lados son dos cuerdas. Ejemplo: Figura 56, $\angle BCA, \angle CAB$.

Angulo semi-inscrito: ángulo que está formado por una cuerda y una tangente. Ejemplo: Figura 56, $\angle BCD$.

Angulo interior: es aquel que tiene el vértice en el interior del círculo. Ejemplo: Figura 56, $\angle AHC$.

Angulo exterior: es aquel que tiene el vértice en el exterior del círculo y está formado por dos secantes, o por una secante y una tangente, o por dos tangentes. Ejemplo: Figura 56, $\angle CDA$.

Sector circular: parte del círculo comprendida entre dos radios y el arco interceptado por ellos. Ejemplo: Figura 56, $OBGC$

Segmento circular: parte del círculo comprendida entre una cuerda y su arco correspondiente. Ejemplo: Figura 56, $CFBGC$ (Hemmerling, 2005; Landaverde, s.f.).

4.2 ROMBO GENERADOR DE UNA CIRCUNFERENCIA

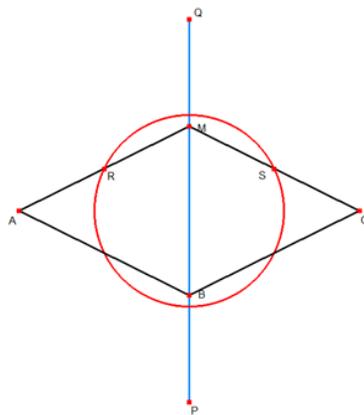


Figura 57. Rombo generador de una circunferencia

Fuente: elaboración propia

Se parte del rombo $ABCM$ de la Figura 57, el cual se puede deformar arrastrando el punto M a lo largo del segmento PQ ; y sean R, S los puntos medios de los lados $\overline{AM}, \overline{CM}$; se determinan los lugares geométricos que se generan por los puntos R, S cuando se mueve el punto M , y se encuentra que son la semicircunferencia izquierda y derecha, respectivamente.

Por la propiedad pitagórica, se tiene que:

$$x^2 + y^2 = l^2 (*).$$

Se invita al lector a descubrir x, y, l .

Además, $S = (u, v) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$; así que, $\frac{x}{2} = u, \frac{y}{2} = v$; entonces, $x = 2u, y = 2v$.

Al reemplazar en (*), se tiene:

$$u^2 + v^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

4.3 GENERATRICES DE UNA SEMICIRCUNFERENCIA

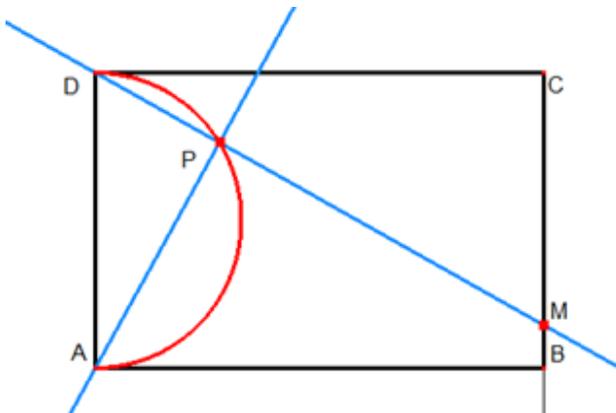


Figura 58. Generatrices de una semicircunferencia

Fuente: adaptación de Wikipedia (2023a)

Es interesante que se puedan trazar circunferencias sin el uso del compás. En este caso, según la Figura 58, se trazan: un rectángulo arbitrario $ABCD$, la semirrecta \overrightarrow{CB} y se toma un punto M en ella, luego se traza la recta \overleftrightarrow{DM} .

Por A se traza una recta perpendicular a \overleftrightarrow{DM} que la corta en P . Finalmente, se determina el lugar geométrico que genera P cuando se mueve M .

Sean $A = (0,0), D = (0, b), C = (a, b), M = (a, v), v \leq b$

La ecuación de \overleftrightarrow{DM} es $y = \frac{v-b}{a}x + b$, la ecuación de \overleftrightarrow{AP} es $y = \frac{a}{b-v}x$.

El punto de intersección de las dos rectas es

$$P = (x, y) = \left(\frac{ab(b-v)}{a^2+(b-v)^2}, \frac{a^2b}{a^2+(b-v)^2} \right).$$

Por simple observación, el centro debe ser $\left(0, \frac{b}{2}\right)$, al realizar la operación $(x - 0)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$ que es la ecuación de una circunferencia.

Según la figura adjunta se tiene: $(AP)^2 + (PD)^2 = (AD)^2$ que reemplazando por coordenadas y realizando operaciones algebraicas se llega a la ecuación

$(x - 0)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$ que es la ecuación de una circunferencia de centro $\left(0, \frac{b}{2}\right)$ y radio $\frac{b}{2}$.

A las rectas $\overleftrightarrow{DM}, \overleftrightarrow{AP}$ se las puede llamar generatrices de la semicircunferencia encontrada.

4.4 MÁS GENERATRICES DE UNA SEMICIRCUNFERENCIA

En el caso anterior, las rectas $\overleftrightarrow{DM}, \overleftrightarrow{AP}$ forman un ángulo de 90 grados (Figura 59). ¿Cuál será el lugar geométrico generado por P , si las rectas forman un ángulo menor o mayor a 90 grados?

En este espacio, se dará un ángulo entre 0 y 90 grados; para lo cual, se ha construido un ángulo $\angle EFG$, en el cual se puede modificar su medida moviendo el punto J .

Se utiliza la herramienta coordenadas o ecuación y se selecciona la curva roja; en este caso aparece la ecuación $0,76x^2 + 0,76y^2 - 10x - 4,31y = 0$ que corresponde a una circunferencia.

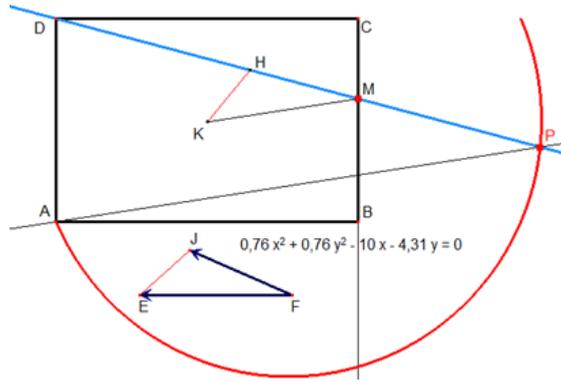


Figura 59. Más Generatrices de una semicircunferencia
Fuente: elaboración propia

4.5 EL CÍRCULO DE APOLONIO

Otra forma de generar la circunferencia, es a partir de dos circunferencias cuyos radios están en la razón $\frac{R}{r} = k$ y dos puntos fijos F, G llamados focos (Pereira, 2014).

Esta forma de obtener una circunferencia se debe a Apolonio de Pérgamo (266 a .C.-190 a. C)

En la gráfica se tiene $\frac{R}{r} = \frac{FA}{GB} = k$ (Figura 60)

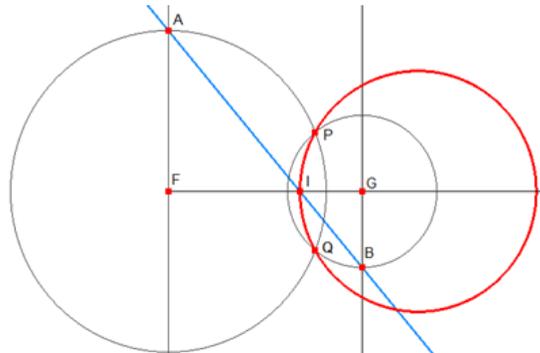


Figura 60. Círculo de Apolonio
Fuente: modificación de Profesorenlinea. (2015).

Se trazan las circunferencias de radios FA, GB , que se cortan en P, Q , cuyos lugares geométricos generados, cuando se mueve A , es la gráfica en color rojo que parece ser una circunferencia. Veamos que, en efecto, lo es.

Si se hace coincidir $\overleftrightarrow{FG}, \overleftrightarrow{FA}$ con los ejes x, y , respectivamente, se tiene que los puntos P, Q son la intersección de dos circunferencias.

Como $\frac{R}{r} = k$, entonces $R = kr$; luego, $\sqrt{x^2 + y^2} = k\sqrt{(x - d)^2 + y^2}$.

Al realizar operaciones algebraicas, se tiene que:

$(1-d^2)x^2 - 2ad^2x + (1-d^2)y^2 - c^2cd^2 = 0$. Expresión que corresponde a la ecuación de una circunferencia.

4.6 LA CIRCUNFERENCIA DE FEUERBACH

Si se traza una circunferencia que pase por los puntos medios de los lados de un triángulo, resulta que, dicha circunferencia pasa también por los pies de las perpendiculares en los lados del triángulo, además, también pasa por los puntos medios de los segmentos que unen los vértices del triángulo con el ortocentro (Ocampo, 2021).

Se le adjudica a Karl Wilhelm Feuerbach el descubrimiento de la circunferencia de los 6 puntos, es decir, la circunferencia que pasa por los puntos P, Q, R, X, Y, Z (Figura 61).

El matemático Olry Terquem demostró que, el círculo que pasa por los 6 puntos anteriores, también pasa por los puntos U, W, H (Figura 61).

En Cabri II Plus, se ha construido la circunferencia de los nueve puntos, en un triángulo que tiene la longitud de la mediana constante. Un punto de la circunferencia, genera un lugar geométrico cuando se mueve M .

La circunferencia pasa con certeza por P, Q, R , para los demás puntos se realiza la pregunta en Cabri ¿Pertenece? Y obtendremos la respuesta: el punto está sobre el objeto.

Se dan las coordenadas de los vértices $A = (0,0), B = (a, 0), C = (b, c)$.

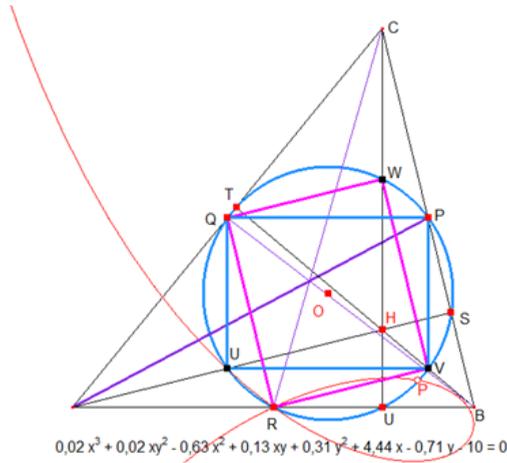


Figura 61. Circunferencia de Feuerbach
 Fuente: modificación de Ocampo (2021)

Las coordenadas de los puntos medios de los lados, son:

$$P = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right), Q = \left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right), R = \left(\frac{a}{2}, 0\right).$$

Las coordenadas del pie de la altura \overline{BT} es:

$$T = \left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{abc}{a^2 + b^2}\right).$$

De los cursos de Geometría Analítica, se sabe que la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos: $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), P_3 = (x_3, y_3)$, está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Al reemplazar en el determinante, las coordenadas de T , se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{abc}{a^2+b^2}\right)^2 & \frac{ab^2}{a^2+b^2} & \frac{abc}{a^2+b^2} & 1 \\ \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 & \frac{a+b}{2} & \frac{c}{2} & 1 \\ \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} & 1 \\ \left(\frac{a}{2}\right)^2 & \frac{a}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Lo cual indica que T está en la circunferencia de Feuerbach.

Al medir los ángulos en los vértices, se encuentra que los cuadriláteros $UVPQ, RVWQ$ son rectángulos (Figura 61).

4.7 DISCO DE POINCARÉ

Jules Henri Poincaré (1854-1912) (García, 2005), propone un modelo de Geometría no-Euclídea con elementos geométricos de geometría Euclídea: el modelo de disco de Poincaré para la geometría hiperbólica, donde los puntos están en el disco y las rectas son arcos de circunferencia contenidos en el disco y ortogonales a la frontera del disco o bien diámetros del disco (Ruiz, 1997).

El método para construir una circunferencia ortogonal a una circunferencia determinada, es localizar dos puntos P en la frontera y un punto R en el interior del disco. Con la herramienta inversión, se determina el inverso de R , que se lo puede denotar por S . Se trazan las mediatrices de los segmentos \overline{PR} , \overline{RS} , con lo cual, el punto de corte S , será el centro de la circunferencia ortogonal (Figura 62 y Figura 63).

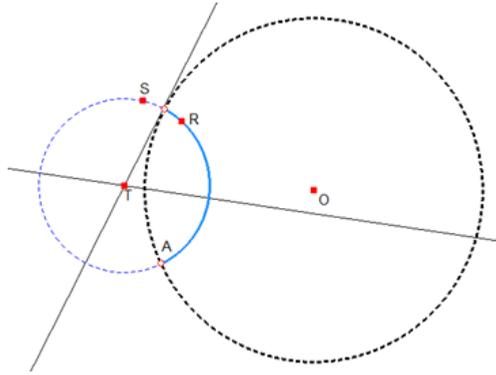


Figura 62. Disco de Poincaré (a)

Fuente: modificación de Hurtado (2019).

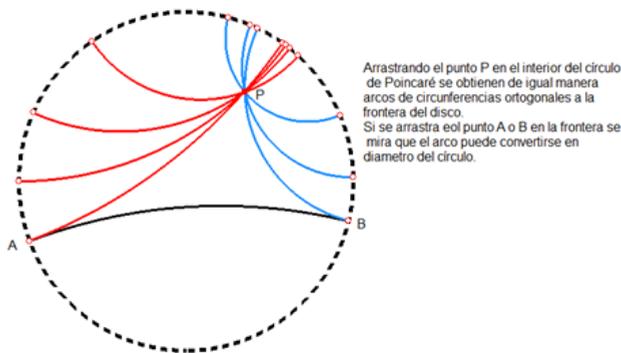


Figura 63. Disco de Poincaré (b)

Fuente: adaptación de Ruiz (1997)

En esta gráfica, se observa el punto P en el interior del disco, la recta AB como circunferencia ortogonal a la frontera del disco, y los arcos en color rojo arterial y azul cielo, que pasan por el punto P , son también ortogonales a la frontera; además, lo más importante, son paralelas a la recta dada AB .

En este corto espacio, se indica al lector el siguiente mensaje de Lobachevski: “Por un punto exterior a una recta pasan infinitas paralelas a la recta dada”

4.8 DISCO DE BELTRAMI-KLEIN

Un modelo de geometría no-Euclidea, fue presentado por Eugenio Beltrami (1835-1900) y Félix Klein (1849-1925). Consiste, en el conjunto de puntos del plano que están en el interior de una circunferencia de centro O y radio r (Figura 64).

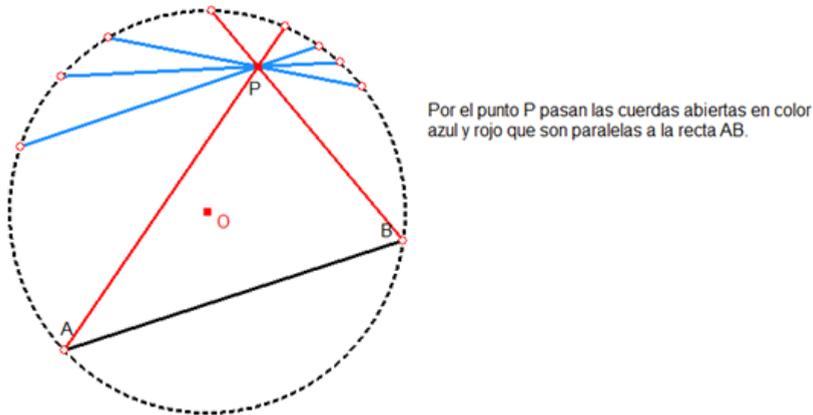


Figura 64. Disco de Beltrami-Klein

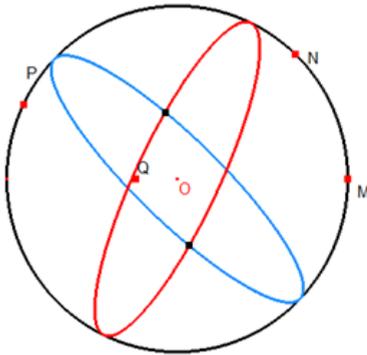
Fuente: adaptación de Ruiz (1997d)

Si se dan dos puntos distintos en la frontera del disco, la cuerda que une los puntos se llama cuerda abierta, ya que se excluyen los extremos. Dicha cuerda, será la recta en este modelo (Ruiz, 1997b).

4.9 LAS CIRCUNFERENCIAS DE RIEMANN

Georg Bernhard Riemann (1826-1866), a semejanza de otros, contribuyó a la creación de geometrías No-Euclídeas. Considera la esfera como el plano y las rectas círculos máximos, que es la intersección de la esfera con un plano que pasa por el centro de la misma (Ruiz, 1997c).

En este caso, dos rectas arbitrarias siempre se cortan, por lo tanto, por un punto exterior a una recta no pasa ninguna paralela (Figura 65).



El punto M permite modificar el radio de la esfera.
 El punto N ubica el círculo máximo en celeste en otra posición.
 El punto P mueve el círculo en color rojo en otra parte de la esfera.
 El punto Q permite mirar las circunferencias máximas desde otro punto de vista.
 No importa como ubique los círculos máximos rojo y celeste, ellos se intersectan.

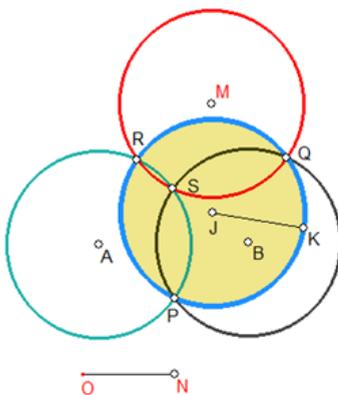
Figura 65. Circunferencias de Riemann

Fuente: adaptación Ruiz (1997c)

4.10 CÍRCULO DE JOHNSON

El Teorema de Johnson, afirma que, dadas tres circunferencias de igual radio y con un punto común, los puntos donde las circunferencias se cortan, determinan una circunferencia del mismo radio que las anteriores (Matemelga.Wordpress, 2018).

Lo anterior permite reflexionar sobre las Matemáticas, y se puede conjeturar que, las Matemáticas ya están hechas y el ser humano simplemente las descubre (Figura 66).



Las circunferencias de centros en A, B, M han sido construidas con el mismo radio ON y tienen como punto común S y se cortan dos a dos y se las denomina circunferencias de Johnson.
 La circunferencia que pasa por los puntos P, Q, R tiene el mismo radio que las anteriores.
 El punto N permite modificar el radio de las circunferencias, Los puntos A, B, M permiten cambiar de posición a los centros de las mismas.

Figura 66. Círculo de Johnson

Fuente: adaptación de Matemelga.Wordpress (2018)

4.11 CÍRCULOS DE FORD

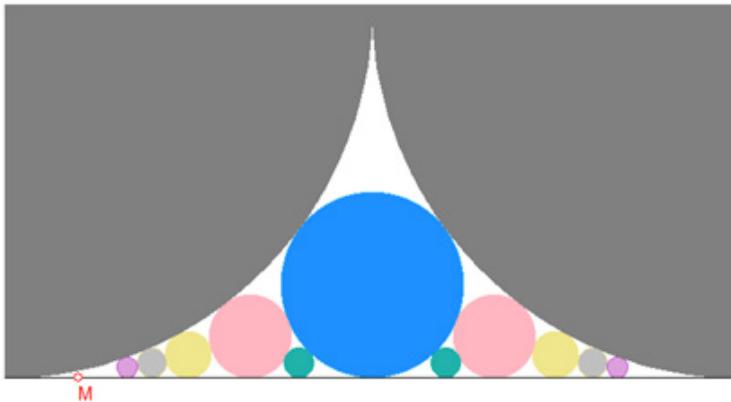
Los círculos de Ford, son círculos tangentes que tienen centro en

$$\left(\frac{i}{j}, \frac{1}{2j^2}\right) \text{ y radio } r = \frac{1}{2j^2} \cdot i, j$$

son números enteros y primos entre sí (Wikipedia, 2019b).

Dichos círculos, llevan el nombre del matemático Lester R. Ford, Sr, que escribió sobre ellos en 1938.

La construcción de estas figuras es dispendiosa, pero la recompensa es poder admirar el cuadro que se presenta a sus ojos (Figura 67).



El punto M permite ampliar el cuadro.

Figura 67. Círculos de Ford

Fuente: adaptación de Wikipedia. (2019b)

La línea recta en la base, se puede considerar como una circunferencia de radio infinito.

Los círculos de Ford se van haciendo cada vez más pequeños, y en ese espacio tan pequeño, caben infinitos círculos.

4.12 CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Es un círculo con centro en $(0,0)$ y radio 1 (Figura 68). Es útil para el estudio de las funciones trigonométricas y la deducción de identidades trigonométricas.

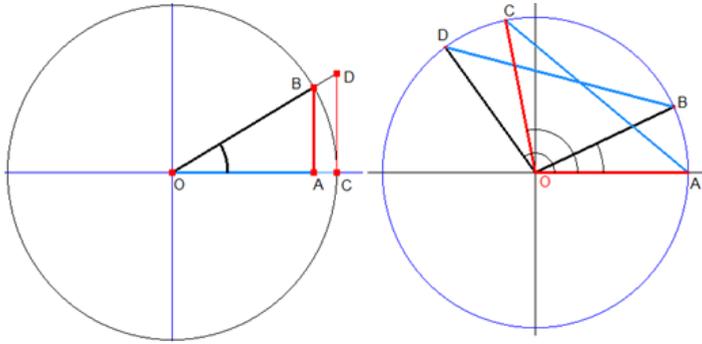


Figura 68. Círculo Trigonómico
Fuente: adaptación de Erazo (1979)

En el círculo trigonométrico izquierdo, se tiene lo siguiente:

$$m\angle AOB = \alpha,$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{AB}{1} = AB,$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{OA}{1} = OA,$$

$$\operatorname{tan} \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC} = \frac{CD}{1} = CD.$$

En el círculo trigonométrico derecho, se tiene:

$$m\angle AOB = \beta,$$

$$m\angle AOD = \alpha,$$

$$m\angle AOC = m\angle BOD = \alpha - \beta,$$

$$A = (1,0), B = (\operatorname{cos} \beta, \operatorname{sen} \beta),$$

$$C = (\cos(\alpha - \beta), \text{sen}(\alpha - \beta)),$$

$$D = (\cos\alpha, \text{sen}\alpha).$$

Con estas consideraciones, se tiene que, $AC=BD$; aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, se tiene la siguiente expresión (Erazo, 1979):

$$\sqrt{[\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + [\text{sen}(\alpha - \beta) - 0]^2} = \sqrt{[\cos(\alpha) - \cos(\beta)]^2 + [\text{sen}(\alpha) - \text{sen}(\beta)]^2}.$$

Elevando al cuadrado y realizando operaciones algebraicas, se obtiene la siguiente identidad:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta).$$

4.13 EL DISCO DE NEWTON

El disco de Newton, es un círculo, que se lo ha dividido en siete sectores circulares, y se los pinta de rojo, violeta, azul, celeste, verde, amarillo y naranja (Colaboraeducacion30, s.f.).

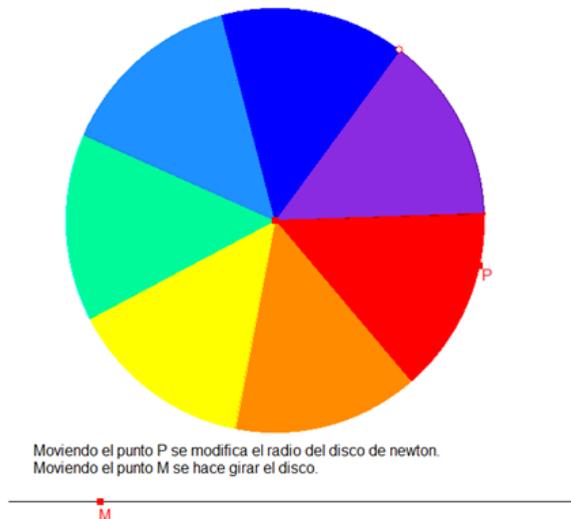


Figura 69. Disco de Newton

Fuente: modificación de IDIS. (2023)

Newton descubrió que, la luz blanca lleva dentro todos los colores que podemos ver, menos el negro, porque es la ausencia de color. Recuerde que, cuando no hay nada de luz, que todo está oscuro, las cosas siempre las vemos negras. El fenómeno que se produce es notorio cuando se lo realiza con un disco físico (Figura 69).

El lector puede hacer girar el Disco de Newton virtual y observar el fenómeno que se produce.

4.14 SISTEMA PLANETARIO FICTICIO

Se presenta un sistema aislado de cuerpos celestes de manera experimental, donde hay una estrella E que, en torno a ella, gira un planeta F , y cuatro satélites que giran alrededor del planeta, a diferentes velocidades, sin que se produzcan colisiones.

El planeta gira en una trayectoria circular, y para un observador en F , los satélites giran en trayectorias circulares; sin embargo, para un observador fuera del sistema, mirará curvas maravillosas, diferentes a circunferencias (Figura 70).

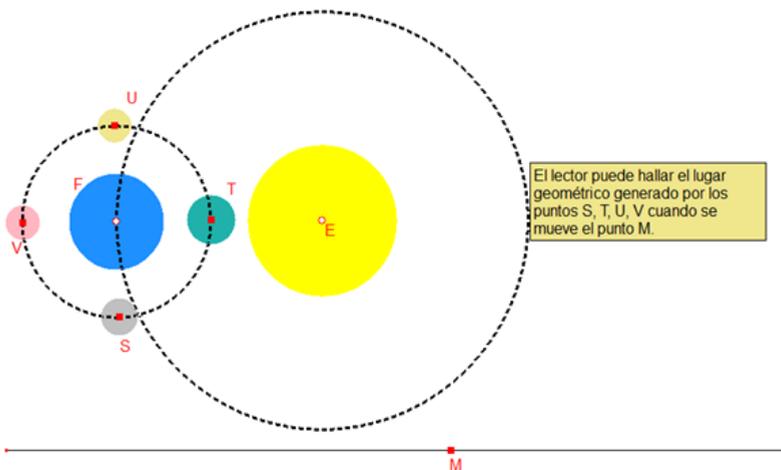


Figura 70. Sistema Planetario Ficticio

Fuente: adaptación de Astrosigma (s.f.)

4.15 TRANSFORMACIÓN DEL MOVIMIENTO RECTILÍNEO A CIRCULAR

La primera máquina de vapor, fue creada por Herón de Alejandría en el siglo I. Esta máquina se denominaba Eolipila. El vapor entra a la cámara C , generando un movimiento de rotación (Figura 71) (Como-funciona, s.f.).

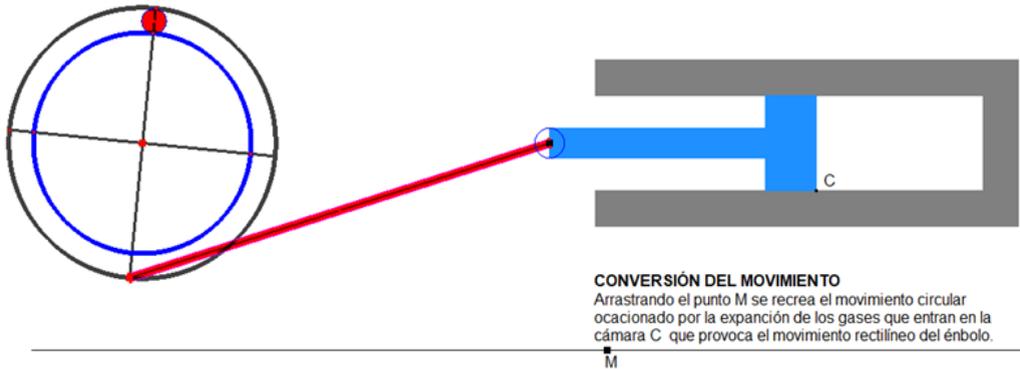


Figura 71. Transformación del Movimiento Rectilíneo a Circular

Fuente: adaptación de Cómo-funciona (s.f.)

4.16 EL MECANISMO DE PEAUCELLIER-LIPKIN

Es un mecanismo compuesto por barras rígidas $OP, OQ, LM, MP, MQ, NQ, NP$ ideado en 1864 por Charles-Nicolás Peaucellier (1832-1913) y Yom Tov Lipman Lipkin, con el fin de transformar el movimiento circular en rectilíneo.

En la Figura 72, se tiene que, $OP = OQ, MP = MQ = NQ = NP$. En este ejemplo, el radio de la circunferencia c es 4 unidades, la circunferencia d pasa por O y debe estar en el interior de c , $OP=5$ unidades, $MP=3$ unidades (Wikipedia, 2023c).

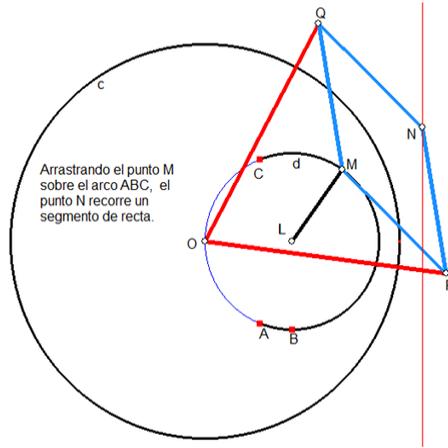
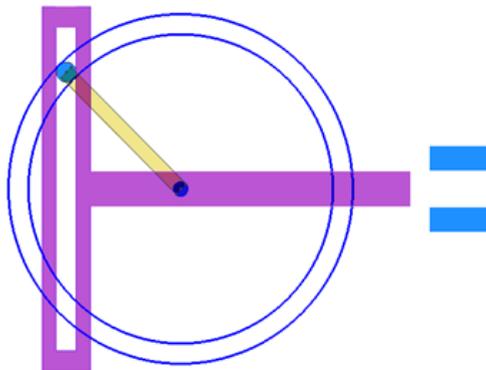


Figura 72. Mecanismo de Peaucellier-Pekin
Fuente: adaptación de Wikipedia (2023c)

4.17 MECANISMO DE YUGO ESCOCÉS

Es un dispositivo mecánico que, transforma el movimiento lineal a circular o viceversa (Figura 73) (Pérez, 2021).



Moviendo el punto M a lo largo de la semirecta se entiende como funciona el mecanismo denominado yugo escocés.



Figura 73. Mecanismo de Yugo Escocés
Fuente: adaptación de Pérez (2021)

4.18 EJERCICIOS

Realizar los siguientes ejercicios (Landaverde, s.f.):

1. Construir una circunferencia que pase por tres puntos no alineados.
2. Determinar el centro de una circunferencia o de un arco.
3. Trazar una tangente a una circunferencia por un punto P , dado en ella
4. Construir una circunferencia que pase por un punto P y sea tangente a una recta AB en un punto A dado en ella.
5. Construir una circunferencia tangente a tres rectas.
6. Trazar una circunferencia que pase por un punto A y que sea tangente a otra circunferencia en un punto B .
7. Trazar una circunferencia tangente a dos rectas, dado el punto de contacto con una de ellas.
8. Demostrar que si por uno de los puntos de intersección de dos circunferencias secantes, se traza una paralela a la línea de los centros, la suma de las cuerdas interceptadas en la paralela es doble de la línea de los centros.
9. Probar que si el ángulo formado por dos cuerdas AB y BC de una misma circunferencia son iguales, el radio OB divide a la cuerda AC y el arco ABC en partes respectivamente iguales.
10. Dado un punto en el interior de una circunferencia, hallar dos puntos de la circunferencia equidistantes del primero.
11. Por dos puntos A y B , dados en la recta, trazar una circunferencia tangente a una paralela CD a la recta dada.
12. Construir dos circunferencias concéntricas, dados dos puntos de cada una de ellas.
13. Por dos puntos A y B , dados en una recta, trazar una circunferencia tangente a una perpendicular a la recta AB .
14. Trazar una circunferencia de radio r que pase por un punto P y que se tangente a una recta AB .
15. Demostrar que todas las cuerdas iguales de una circunferencia son tangentes a otra circunferencia concéntrica a la primera.
16. Dadas una circunferencia O y una recta AB , trazar otra circunferencia de radio r que les sea tangente.
17. Construir una circunferencia de radio r que sea tangente a los lados de un ángulo dado.
18. Demostrar que, si dos circunferencias tangentes exteriormente son

- tangentes a una recta en A y B , su tangente común interior divide al segmento AB en dos partes iguales.
19. Dadas dos tangentes AB y CD a la circunferencia O , paralelas entre sí, y limitadas por otra tangente AC a la misma circunferencia, demostrar que el triángulo AOC es rectángulo.
 20. Demostrar que si por un punto de la bisectriz de un ángulo, se traza una circunferencia que corte los lados del ángulo, las cuerdas determinadas en ellos son iguales.

CAPÍTULO 5.

CONGRUENCIAS

“Estos átomos se mueven en el vacío infinito, separados unos de otros y diferentes entre sí en figuras, tamaños, posición y orden; al sorprenderse unos a otros colisionan y algunos son expulsados mediante sacudidas al azar en cualquier dirección, mientras que otros, entrelazándose mutuamente en consonancia con la congruencia de sus figuras, tamaños, posiciones y ordenamientos, se mantienen unidos y así originan el nacimiento de los cuerpos compuestos.

“Demócrito Filósofo Griego
(Figura 74)



Figura 74. Demócrito de Abdera
Fuente: Fernández & Tamaro
(2004c).

La producción en serie de algún objeto, hoy en día está basada en que ellos tengan la misma forma y el mismo tamaño, ya sea un electrodoméstico o una prenda de vestir. En este contexto, la congruencia tiene un papel fundamental.

Se dice que dos figuras son congruentes, cuando tienen la misma forma y el mismo tamaño; o también, que, son congruentes cuando al superponerlas coinciden.

5.1 PROPIEDADES DE LA CONGRUENCIA

Dos segmentos son congruentes cuando tienen la misma medida.

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \text{ sí y solo sí } m\overline{AB} = m\overline{CD}.$$

5.1.1 Congruencia de Ángulos. Dos ángulos son congruentes, cuando tienen la misma medida.

$$\angle ABC \cong \angle PQR \text{ sí y solo sí } m\angle ABC = m\angle PQR$$

5.1.2 Congruencia de Triángulos. Para determinar si dos triángulos son congruentes, hay 3 criterios: LAL, ALA y LLL.

5.1.3 Teorema LAL Dos triángulos son congruentes, cuando dos lados y el ángulo que forman en uno, son respectivamente congruentes a los dos lados y el ángulo que forman en el otro.

5.1.4 Teorema ALA. Si dos triángulos tienen dos ángulos y el lado incluido de uno congruentes a los dos ángulos y el lado incluido correspondientes del otro, los triángulos son congruentes.

5.1.5 Teorema LLL. Si los lados de un triángulo son congruentes a los de otro, los triángulos son congruentes (Hemmerling, 2005).

5.2 CONGRUENCIA DE SEGMENTOS

Si se miden dos segmentos y las medidas son iguales, o si se superpone uno sobre otro y coinciden en sus partes, se puede concluir que los segmentos son congruentes. $m\overline{AB} = 8.89\text{cm}$, $m\overline{CD} = 8.89\text{cm}$. Por tanto $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (Figura 75).

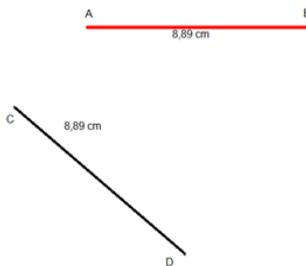


Figura 75. Congruencia de Segmentos

Fuente: elaboración propia

5.3 CONGRUENCIA DE ÁNGULOS

Si se miden dos ángulos y las medidas son iguales, o si se superpone uno sobre otro y coinciden en sus rayos, se puede concluir que los ángulos son congruentes.

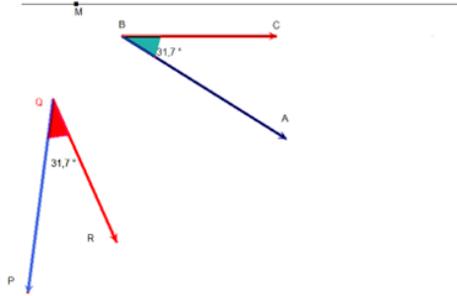


Figura 76. Congruencia de ángulos

Fuente: elaboración propia

En la Figura 76, se observa que $m\angle ABC = 31.7^\circ$, $m\angle PQR = 31.7^\circ$, por lo cual, $\angle ABC \cong \angle PQR$.

5.4 CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Para determinar la congruencia de triángulos, se puede aplicar algún criterio de congruencia de estas figuras o superponer uno sobre otro.

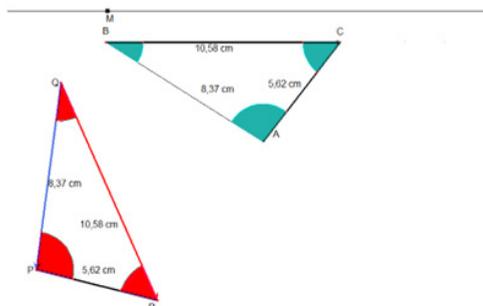


Figura 77. Congruencia de triángulo (a)

Fuente: elaboración propia

En la Figura 77 (a), se tiene que $m\overline{AB} = 8.37\text{cm}$, $m\overline{AC} = 5.62\text{cm}$, $m\overline{BC} = 10.58\text{cm}$.

$m\overline{PQ} = 8.37\text{cm}$, $m\overline{PR} = 5.62\text{cm}$, $m\overline{QR} = 10.58\text{cm}$ se presenta el caso L.L.L, por lo tanto, se puede concluir que, $\Delta ABC \cong \Delta PQR$.

En el caso anterior, para realizar la superposición de una figura sobre otra, se ha utilizado traslaciones y rotaciones.

Se han construido en Cabri II Plus, para la congruencia de segmentos, ángulos y triángulos, dos archivos adicionales para cada una, donde se muestran matices, un tanto mágicos, y otro de corte real. Por ejemplo, en el caso de la congruencia de segmentos, en la construcción de corte mágico, el segmento a superponer, se mueve como por un control remoto M (Figura 75 (b)).

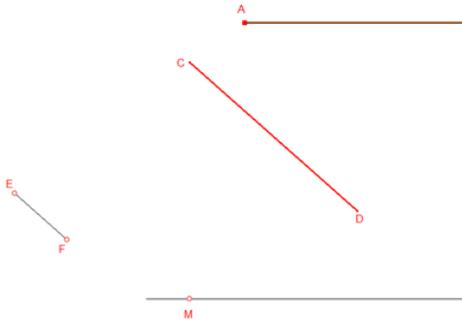


Figura 75. Congruencia de segmentos (b)

Fuente: elaboración propia

La de corte real, es como mover un tronco y colocarlo junto a otro, de la misma longitud.

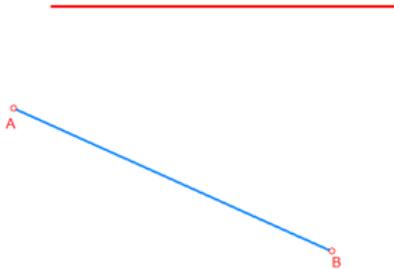


Figura 75. Congruencia de segmentos (c)

Fuente: elaboración propia

El extremo A del tronco en color azul se lo hace coincidir con un extremo izquierdo del tronco en color rojo, extremo B de tronco en azul se lo hace coincidir con el otro extremo del tronco en rojo (Figura 75 (c)).

En el siguiente ejemplo de congruencia de triángulos, se utiliza la reflexión sobre una recta del triángulo ABD , ya que es imposible analizar la congruencia utilizando traslación y rotación (Figura 78). Para el efecto, se mueve el punto D de manera vertical, hasta que coincida con C .

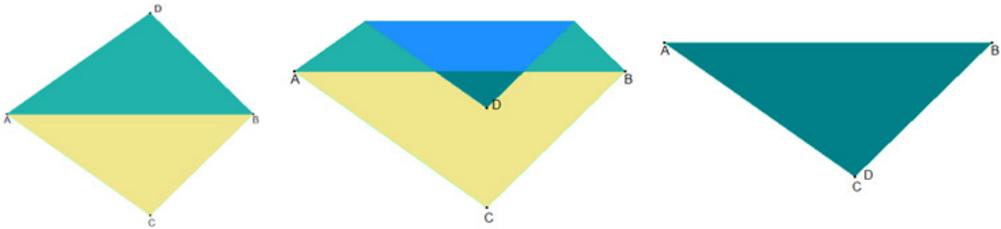


Figura 78. Congruencia de triángulos

Fuente: Hemmerling (2005)

5.5 DOBLANDO EL CÍRCULO

Es notable observar que, el círculo tiene una propiedad muy importante, y es que, trazando cualquier diámetro y doblando por esa línea, coincide una parte con la otra.



Figura 79. Doblando el círculo

Fuente: elaboración propia

Si a la figura resultante se le traza la bisectriz del ángulo llano y se dobla por esa recta, la mitad de la figura coincide con la otra; y si a la parte resultante se le traza la bisectriz al ángulo de 45° y se dobla por dicha recta, las mitades coinciden; este proceso se puede extender hasta el infinito (Figura 79).

5.6 DOBLANDO EL CUADRADO

Es curioso ver que, si el cuadrado $ABCD$ se dobla por una de sus diagonales, el proceso de doblado es semejante al doblado del círculo, y si se continúan los mismos pasos, el doblado es infinito (Figura 80).

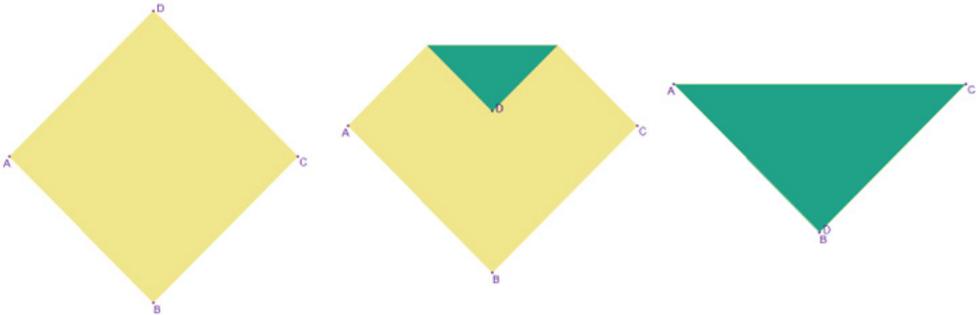


Figura 80. Doblando el cuadrado

Fuente: elaboración propia

5.7 DOBLANDO EL HEXÁGONO REGULAR

Cuando se dobla el cuadrado, queda la sensación de que, al doblar un polígono regular de $2n$ lados, se puede doblar hasta el infinito, de manera que las mitades coincidan.

Sin embargo, cuando se trabaja, por ejemplo, con el hexágono regular, se ve inmediatamente que, el proceso de doblado termina en el segundo paso (Figura 81).

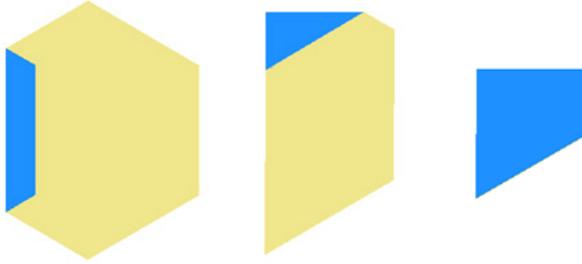


Figura 81. Doblando el hexágono regular

Fuente: elaboración propia

Cuando se ha doblado por segunda vez, de manera que las mitades coincidan, se obtiene la figura en color azul (Figura 81), que, intuitivamente se puede decir que no se puede doblar de manera que las mitades coincidan.

5.8 DIVIDIENDO EL CUADRADO

Si por el punto de corte de las diagonales de un cuadrado, se trazan rectas perpendiculares entre sí, el cuadrado queda dividido en cuatro partes congruentes (Figura 82).

Esta afirmación se puede demostrar, al descomponer los cuadriláteros en triángulos y aplicar los casos de congruencia; también es posible imprimir la figura, recortar los cuadriláteros y superponerlos, para ver si coinciden.



Figura 82. Dividiendo el cuadrado

Fuente: adaptación de Martín (1961)

Se puede utilizar Cabri II Plus y, mediante giros, superponer los cuadriláteros, que deben coincidir, en caso que sean congruentes.

El resultado de realizar esta tarea, después de superponer los cuadriláteros en color verde azul y rojo sobre el cuadrilátero amarillo, es el cuadrilátero en color negro que aparece en la gráfica debido a la mezcla de los colores (Martín, 1961) (Figura 82).

5.9 DIVIDIENDO EL PARALELOGRAMO

Cuando un paralelogramo se divide por una de sus diagonales, queda dividido en dos triángulos congruentes (Figura 83).



Figura 83. Dividiendo el paralelogramo

Fuente: elaboración propia

Utilizando Cabri II Plus y mediante un giro de 90 grados, con centro de giro el punto D , y una traslación en el vector \overrightarrow{DB} , se logra superponer el triángulo CDB sobre el triángulo ADB , concluyendo que son congruentes.

A continuación, se realiza la demostración (Hemmerling, 2005).

Hipótesis: La figura $ABCD$ es un paralelogramo.

Tesis: El triángulo ABD es congruente con el triángulo CDB .

Demostración:

Proposición

Justificación

$$\overline{AB} \cong \overline{CD}$$

Teorema sobre paralelogramos

$$\overline{AD} \cong \overline{CB}$$

Lado común a los dos triángulos y propiedad reflexiva de la congruencia de segmentos.

$$\triangle ABD \cong \triangle CDB$$

Teorema LLL

5.10 DIVIDIENDO EL TRIÁNGULO

Cuando en un triángulo arbitrario, se unen mediante segmentos los puntos medios de los lados, se forman 4 triángulos congruentes (Figura 84 (a)).

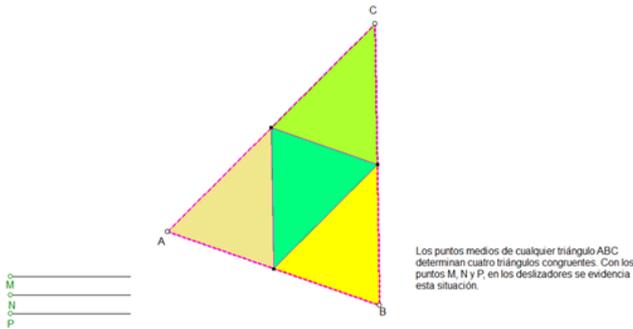


Figura 84. Dividiendo el triángulo (a)

Fuente: adaptación de Wikipedia (2020)

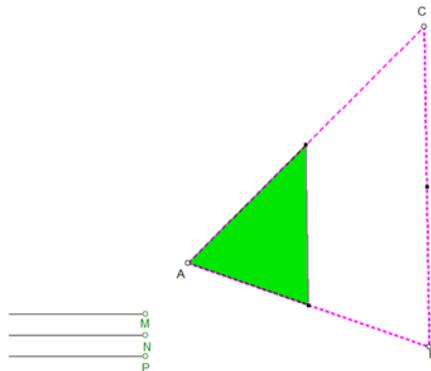


Figura 82. Dividiendo el triángulo (b)

Fuente: adaptación de Wikipedia (2020)

Se superponen los triángulos en color verde oliva y el de color amarillo, mediante una traslación sobre el triángulo en naranja y el triángulo en verde mediante un giro de 180 grados se superpone sobre el triángulo naranja (Figura 84 (b)).

5.11 LA CAPA DEL MOTOCICLISTA

La capa del motociclista tiene forma de un rectángulo, y para guardarla hay que doblarla hasta que alcance en la mochila.

Algo que pasa desapercibido por muchos motociclistas, es el hecho que, en el proceso de doblado, se está utilizando la serie geométrica y la congruencia; por lo cual, con pocos dobleces, se logra empequeñecer la capa y se la guarda.

Para doblar la capa, el motociclista “elige” una recta que une los puntos medios de los lados opuestos, y por allí realiza el doblado hasta obtener un tamaño satisfactorio (Figura 85).

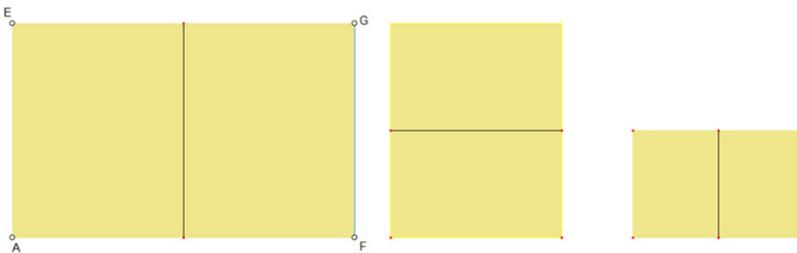


Figura 85. Capa del motociclista

Fuente: elaboración propia

5.12 RECICLAJE DEL OCTÁGONO REGULAR

Hoy en día, está de moda el reciclaje; en este caso, se va a descomponer un octágono regular y utilizar algunas de sus partes para formar un cuadrado. En tal sentido, se descompone el octágono regular en 4 polígonos congruentes y un cuadrado (Figura 86).

La idea es que, con los polígonos congruentes, se debe tratar de formar un cuadrado mediante operaciones de rotación y traslación.

El cuadrado del octágono no se utiliza para la construcción del cuadrado. A simple vista, el lector puede ver que el cuadrado interior (color blanco) del cuadrado, es más grande que el cuadrado interior del octágono (Martín, 1961).

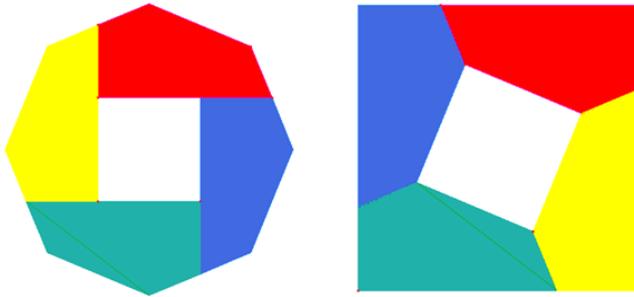


Figura 86. Reciclaje del octágono regular

Fuente: adaptación de Martín (1961)

5.13 RECICLAJE DE HEXÁGONOS REGULARES

Se tiene tres hexágonos regulares congruentes (Figura 87): uno completo y los otros dos descompuestos en triángulos congruentes.

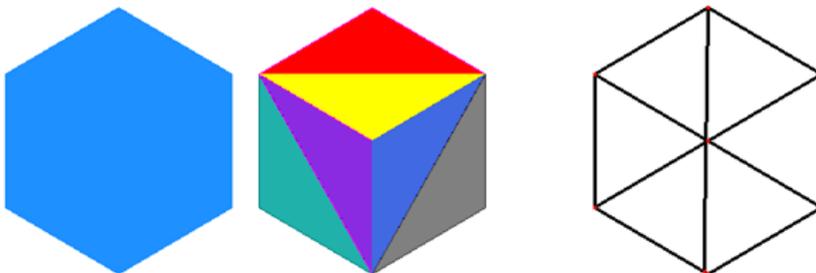


Figura 87. Reciclaje del hexágono regular (a)

Fuente: adaptación de Martín (1961)

Con todas estas piezas, se desea construir un hexágono más grande.

Las piezas consisten, en un hexágono regular completo, un hexágono regular descompuesto en triángulos congruentes coloreados, y un hexágono descompuesto en 6 triángulos equiláteros congruentes, de color blanco.

Aplicando operaciones de traslación a las piezas coloreadas, se obtiene la Figura 88.

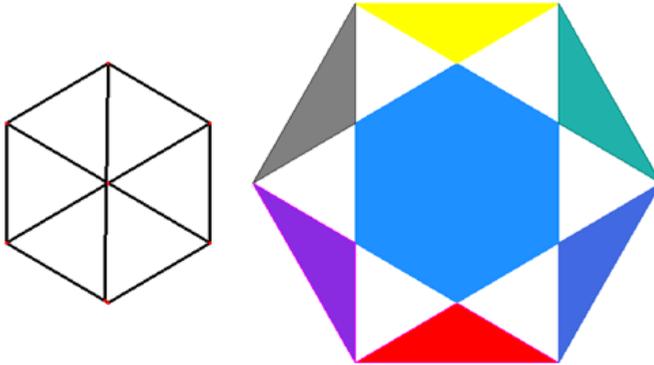


Figura 88. Reciclaje del hexágono regular (b)

Fuente: adaptación de Martín (1961)

Es fácil ver que, los triángulos equiláteros, producto de la descomposición del hexágono regular pequeño, calzan perfectamente en los espacios en blanco en el hexágono regular grande (Martín, 1961).

5.14 EJERCICIOS

Resolver los siguientes ejercicios:

1. Se tiene un maletín de 26 cm de largo y 20 cm de ancho, una capa de motociclista de 2 metros de largo y 1.5 metros de ancho. ¿Cuántas veces se debe doblar la capa para que se pueda guardar en el maletín?
2. ¿Cómo se debe doblar una cartulina de dos metros de lado de manera que se pueda guardar en un maletín de 26 cm de largo y 20 cm de ancho?
3. Se tiene un triángulo equilátero y desde el baricentro se trazan 3

- semirrectas que no pasen por los vértices del triángulo donde el ángulo formado por dos de ellas sea 120 grados. Probar si los 3 cuadriláteros que se forman son congruentes.
4. Se tiene un pentágono regular y desde el centro se trazan 3 semirrectas que no pasen por los vértices del pentágono donde el ángulo formado por dos semirrectas contiguas sea 72 grados. Probar si los 5 cuadriláteros que se forman son congruentes.
 5. Se tiene un hexágono regular de 10 cm de lado, recortar de manera apropiada, ensamblar un rectángulo y determinar sus dimensiones.
 6. Se tiene un octágono regular de 10 cm de lado, recortar de manera apropiada, ensamblar un rectángulo y determinar sus dimensiones.
 7. Recortar un hexágono regular en triángulos equiláteros congruentes, ensamblar otra figura geométrica y determinar las dimensiones.
 8. Recortar de manera adecuada un rectángulo de base 18 cm y altura 2 cm en cuadrados congruentes y ensamblar un cuadrado.
 9. ¿Con un número par de triángulos congruentes qué figura geométrica se puede formar?
 10. ¿Con un número impar de triángulos congruentes, qué figura geométrica se puede formar?

CAPÍTULO 6.



SEMEJANZA

A LA DIVINA PROPORCIÓN

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de medida
que el universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños angulares.
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.

Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera trasparente.

A ti, divina proporción de oro.

Rafael Alberti (Studylib, s.f).

6.1 DEFINICIONES

Se presentan las siguientes definiciones (Hemmerling, 2005):

Razón. Se llama razón, a un número de la forma $\frac{m}{n}$, que se lee *m es a n*, donde, *m, n* son medidas de cantidades semejantes.

Proporción. Se denomina proporción a la igualdad de dos razones. $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, que se lee: *m es a n como p es a q*. Los literales *m, n, p, q* se les denomina primero, segundo, tercero y cuarto términos, respectivamente. El primero y cuarto términos, son los extremos de la proporción; el segundo y tercero, son los medios.

En la siguiente proporción, *x* es la cuarta proporcional de tres cantidades *m, n, p*:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{x}.$$

En la siguiente proporción, *x* es media proporcional entre el primero y cuarto términos:

$$\frac{m}{x} = \frac{x}{q}.$$

En la siguiente proporción, *x* es tercera proporcional entre *m, n*:

$$\frac{m}{n} = \frac{n}{x}.$$

6.2 TEOREMA DE THALES

Si las rectas *a, b* son paralelas y cortan a otras rectas *p, q*, entonces determinan en ellas segmentos proporcionales (Figura 89) (Prepa8.unam.mx, s.f.).

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OQ}{OP} = \frac{AQ}{BP} = r.$$

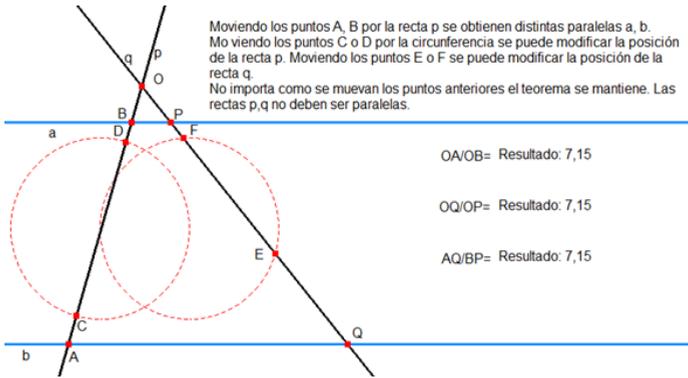


Figura 89. Teorema de Thales

Fuente: adaptación de Prepa8.unam.mx (s.f.)

6.3 LAS PARALELAS DE THALES DE MILETO

Cuenta la historia que se le pidió a Thales de Mileto que midiera la altura de la pirámide de Keops y que él, de manera muy sencilla, les dijo que, cuando la sombra de su cuerpo fuera igual a su estatura, la altura de la pirámide era igual a su sombra, o también, clavando el bastón en la arena tal como lo muestra la Figura 90 (Edu.xunta.gal, s.f.).

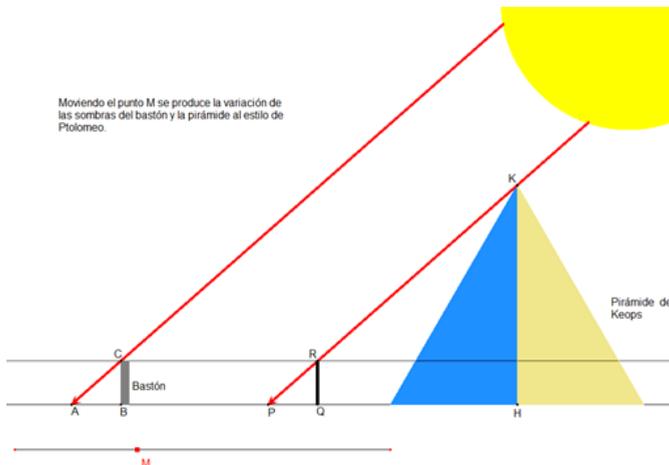


Figura 90. Paralelas de Thales de Mileto

Fuente: adaptación de Quora (2023).

El sol original las sombras AB, PH del bastón BC y la pirámide, respectivamente.

Si por el punto C se traza una recta paralela a AH , ella corta a PK en R y se tiene el teorema de Tales:

$$\frac{PH}{PQ} = \frac{HK}{QR} \therefore HK = \frac{PH \cdot QR}{PQ} = \frac{PH \cdot BC}{PQ}.$$

A Thales, también se le atribuye el método para calcular la distancia de un barco a la costa.

6.4 LA MEDIA PROPORCIONAL

La altura relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es media proporcional entre los segmentos que determina en la hipotenusa.

Para la demostración, basta poner los triángulos rectángulos que se forman al trazar la altura tal como aparece en la figura, y aplicar el Teorema de Tales (Figura 91).

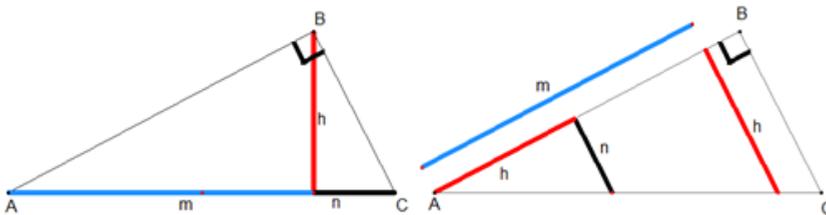


Figura 91. Media proporcional

Fuente: Hemmerling (2005)

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \text{ de donde } h^2 = mn.$$

6.5 CUERDAS QUE SE CORTAN EN EL INTERIOR DE UNA CIRCUNFERENCIA

Si dos cuerdas se interceptan dentro de un círculo, el producto de las medidas de los segmentos de una cuerda es igual al producto de las medidas de los segmentos de la otra.

Para la demostración, basta poner los triángulos que se forman en el interior de la circunferencia, tal como aparece en la figura y aplicar el teorema de Thales (Figura 92).

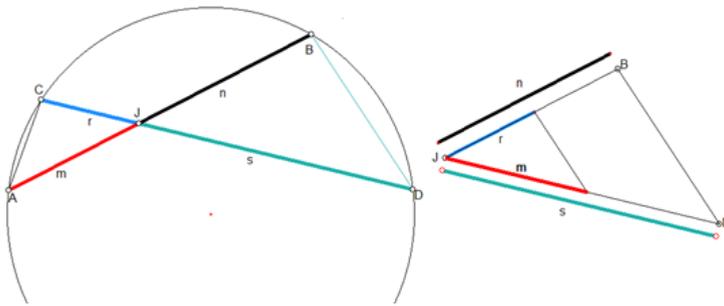


Figura 92. Cuerdas que se cortan en el interior de una circunferencia

Fuente: Hemmerling (2005)

$$\frac{r}{n} = \frac{m}{s}, \text{ de donde } rs = mn.$$

6.6 TANGENTE Y SECANTE

Si se trazan una tangente y una secante desde el mismo punto exterior de una circunferencia, la medida de la tangente es media proporcional entre la medida de la secante y su segmento externo.

Para la demostración, basta poner los triángulos que se forman tal como aparece en la figura y aplicar el teorema de Thales (Figura 93).

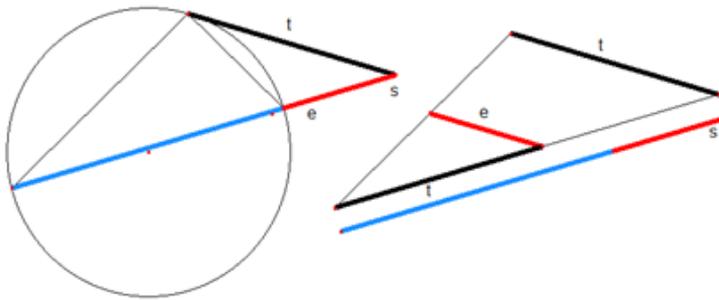


Figura 93. Tangente y secante

Fuente: Hemmerling (2005)

6.7 TEOREMA DE LA BISECTRIZ

La bisectriz de un ángulo de un triángulo, divide el lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.

La bisectriz del ángulo exterior de un triángulo, divide exteriormente el lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados (Figura 94).

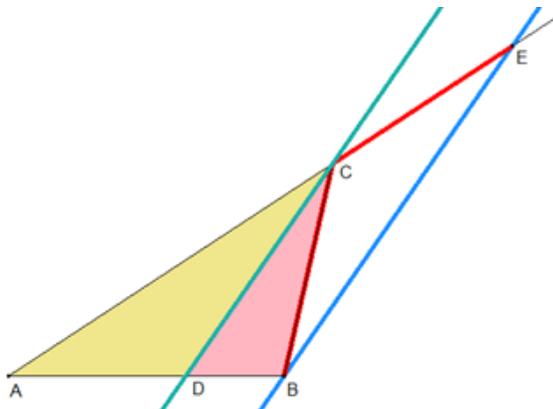


Figura 94. Teorema de la bisectriz

Fuente: Landaverde (s.f.)

Por B se traza una recta paralela a la bisectriz que corta a \overline{AC} en E. Por el paralelismo, $BC=CE$.

Al aplicar el teorema de Tales, se obtiene:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AD}, \text{ entonces } \frac{AE}{AC} - 1 = \frac{AB}{AD} - 1, \text{ luego } \frac{CE}{AC} = \frac{DB}{AD} \text{ finalmente } \frac{BC}{AC} = \frac{DB}{AD}.$$

Para la bisectriz exterior, se procede de manera similar.

6.8 SEMEJANZA DE DOS CUADRADOS

Dados dos cuadrados de lado arbitrario, ellos son semejantes ya que los ángulos son rectos y el cociente de los lados es el mismo (Figura 95).

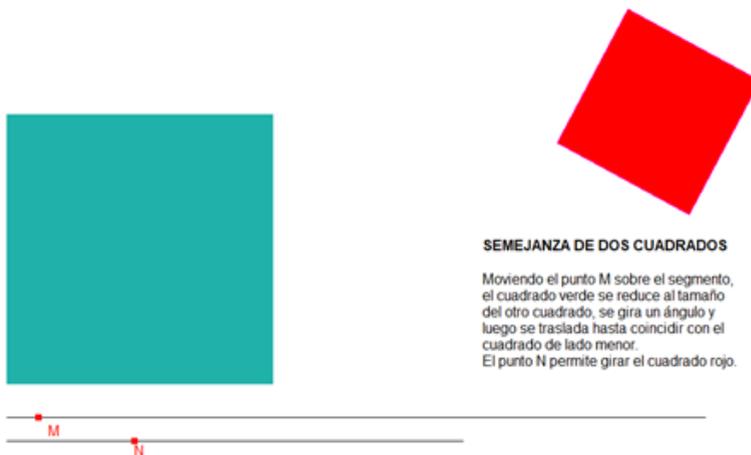


Figura 95. Semejanza de dos cuadrados

Fuente: elaboración propia

6.9 LA LUPA SIMPLE

Es un instrumento óptico que, permite ver, objetos y letras de tamaño pequeño, de manera más grande (Juntadeandalucia, s.f.).

Fue inventada por el inglés Roger Bacón en el año de 1250 (Figura 96).

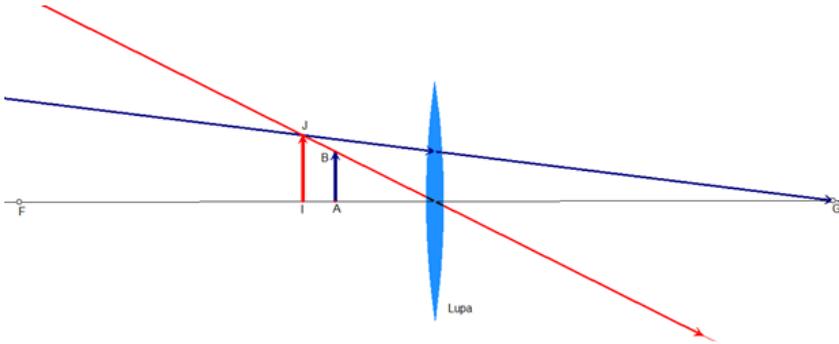


Figura 96. Lupa simple (a)

Fuente: adaptación de Juntadeandalucia (s.f.)

AB es el objeto a ampliar, IJ es la imagen ampliada.

Se presenta un esquema simplificado, donde el objeto a examinar está entre el foco F y la lupa; se mira que, se obtiene una imagen virtual derecha y de mayor tamaño (Figura 97).

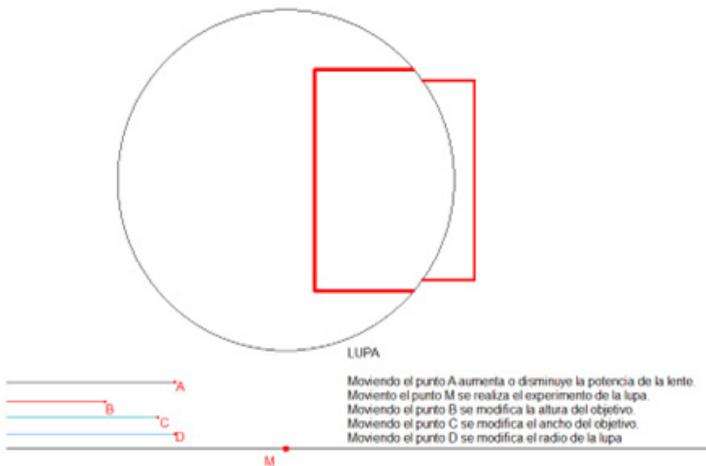


Figura 97. Lupa simple (b)

Fuente: elaboración propia

6.10 EL PANTÓGRAFO INFINITO

Es un mecanismo para dibujar una figura a escala exacta ampliando o reduciendo su tamaño y manteniendo las proporciones (Es.frwiki.wiki, s.f.).

Fue establecido científicamente por el jesuita Christoph Scheiner, en 1603.

En este apartado, se presenta un pantógrafo ideal, consta de 4 barras rígidas infinitas FH, NE, NG, EH (Figura 98).

Las barras FH, NE son paralelas, lo mismo que NG, EH y pueden girar libremente en torno a los pivotes G, N, E, H ; los puntos F, N, M son colineales. Cuando se mueve el punto M a lo largo de una figura, se ponen en movimiento todas las barras y el punto N describe una figura proporcional a la figura original. El punto F es fijo.

Si el punto G está entre F y H , el punto N dibuja una figura reducida; si G coincide con H , N dibuja la misma figura.

Si el punto G está del lado de H que no está G , el punto N dibuja una ampliación de la figura (Figura 99).

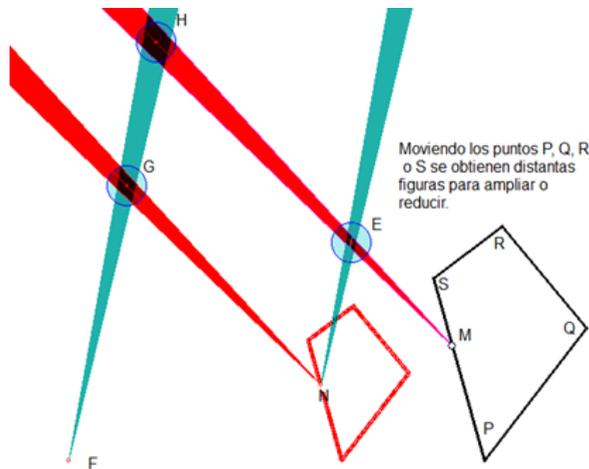


Figura 98. Pantógrafo infinito (a)

Fuente: adaptación de Es.frwiki.wiki (s.f.)

Esto significa que, los trazos que realiza el punto N son proporcionales a los trazos que realiza M , al recorrer la figura.

6.11 LA PROPORCIÓN DIVINA

Es un número que está rodeado por una cortina de misterio, ya que, hasta el nombre lo relaciona con la divinidad; y esa divinidad, para el ser humano, es uno de los misterios más grandes sin resolver, y lo hace reflexionar sobre cómo apareció sobre la tierra y cuál es su destino en el mismo (Bonell, (2000).

A este número, también se lo denomina número de oro, número de Dios, razón extrema y media, razón aurea, razón dorada.

Se representa por φ y su valor es:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \dots$$

La pregunta que cualquier persona se haría es ¿De dónde salió este número?
¿Por qué está relacionado con la divinidad?

Este número se obtiene de la proporción:

$$\frac{a + b}{a} = \frac{a}{b}, a > b.$$

a, b corresponden a medidas de segmentos que conforman un rectángulo, que da lugar a la gráfica adjunta, donde, de manera aproximada, se encuentran ciertos rectángulos (Figura 100) (Galo, 2004).

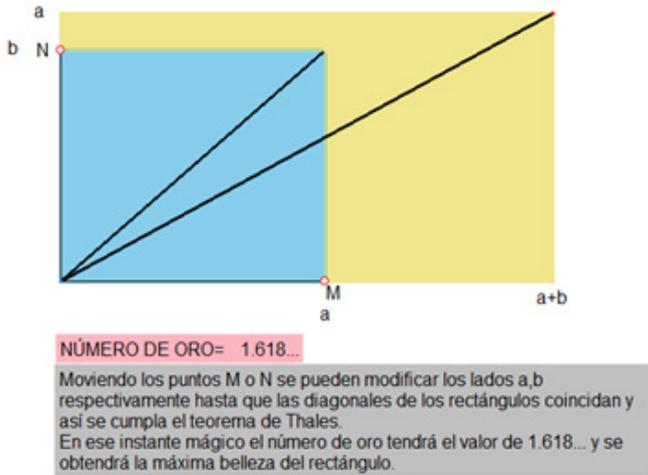


Figura 100. La proporción divina (a)

Fuente: adaptación de Galo (2004)

Según la teoría euclidiana, un rectángulo encierra la máxima belleza si resulta semejante a otro formado por su lado mayor y la suma de sus lados (Figura 101) (Extremiana, s.f.).

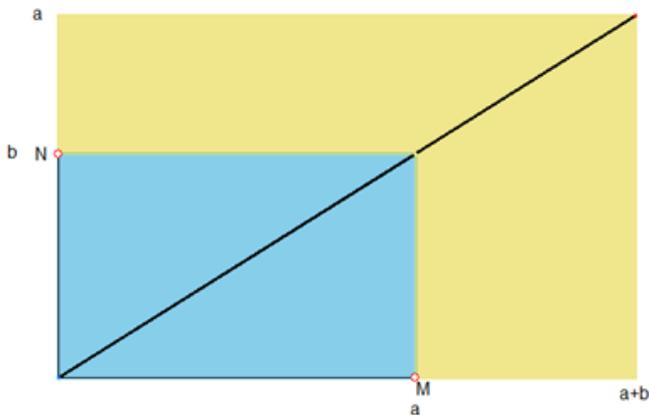


Figura 101. La proporción divina (b)

Fuente: adaptación de Galo (2004)

El número de Dios es $\varphi = \frac{a}{b}$, de manera que la proporción se transforma en:

$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi,$$

de donde, $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Al resolver la ecuación, se obtiene:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618, \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Observe que, $\varphi > 0$ y $\psi < 0$.

La respuesta a la pregunta ¿Por qué está relacionado con la divinidad? Se puede encontrar en el tratado de Luca Pacioli (1509) *Divina propotione; opera a tutti gl'ingegni perspicaci e curiosi necessaria, donde aparece el término Divina*. Tiene relación con la naturaleza y el arte:

- a)** Ella es una y nada más que una, y no es posible asignarle otras especies ni diferencias.
- b)** Así como in divinis hay una misma sustancia entre tres personas, Padre, Hijo y Espíritu Santo, de la misma manera, una misma proporción de esta suerte, siempre se encontrará entre tres términos.
- c)** Dios, propiamente, no se puede definir ni puede ser entendido por nosotros con palabras; de igual manera, esta proporción no puede jamás determinarse con número inteligible, ni expresarse con cantidad racional alguna, sino que, siempre es oculta y secreta y los matemáticos la llaman irracional.
- d)** Así como Dios jamás puede cambiar y es todo en todo, y está todo en todas partes, esta proporción es siempre la misma e invariable y de ninguna manera puede cambiarse.

6.12 DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN MEDIA Y EXTREMA RAZÓN

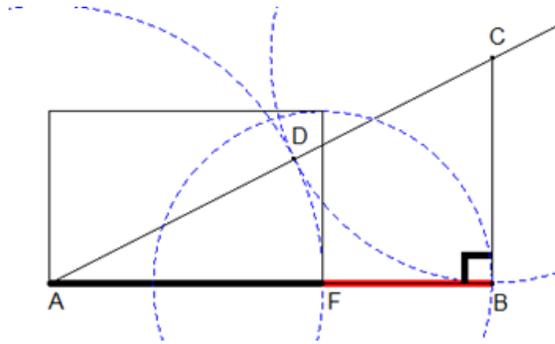


Figura 102. División de un segmento en media y extrema razón

Fuente: adaptación de Landaverde (s.f.)

Sea \overline{AB} el segmento que hay que dividir. Se construye un triángulo rectángulo de catetos $\overline{AB}, \overline{BC}$ donde $BC = \frac{1}{2}AB$, se traza la circunferencia c de centro C y radio CB , se traza la recta \overline{AC} que corta a la circunferencia c en D, E . Se traza la circunferencia d con centro A y radio AD que corta al segmento \overline{AB} en F (Figura 102).

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AB} &\Rightarrow \frac{AB - AD}{AD} = \frac{AE - AB}{AB} \Rightarrow \frac{AB - AF}{AD} \\ &= \frac{AE - DE}{AB} \Rightarrow \frac{FB}{AF} = \frac{AF}{AB}. \end{aligned}$$

Si $AB = a + b, AF = a, FB = b$, se tiene $\frac{b}{a} = \frac{a}{a + b}, \frac{a + b}{a} = \frac{a}{b}$

$$\Rightarrow 1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}.$$

Si $\frac{a}{b} = x$, se obtiene $1 + \frac{1}{x} = x$.

Al resolver la ecuación, se tiene:

Si $AB = c, AF = a, FB = b = c - a$, se tiene $\frac{c - a}{a} = \frac{a}{c}$

$$\Rightarrow a^2 + ca - c^2 = 0.$$

De donde:

$$a = \frac{c}{2}(-1 \pm \sqrt{5}).$$

Por tratarse de segmentos, se toma el signo +, entonces,

$$a = \frac{c}{2}(\sqrt{5} - 1), b = c - a = c - \frac{c}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{c}{2}(3 - \sqrt{5});$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{c}{2}(\sqrt{5} - 1)}{\frac{c}{2}(3 - \sqrt{5})} = \varphi.$$

Esto significa que, el rectángulo áureo tiene como lados, los segmentos que miden a , b (Landaverde, s.f.).

6.13 RECTÁNGULO ÁUREO

Con lo anterior, se puede construir un rectángulo áureo y en él, construir un cuadrado con el lado de longitud menor, y el rectángulo que se obtiene, resulta ser áureo; y proseguir indefinidamente este proceso, con lo cual resulta la Figura 103 (Matema.ujaen, s.f.).

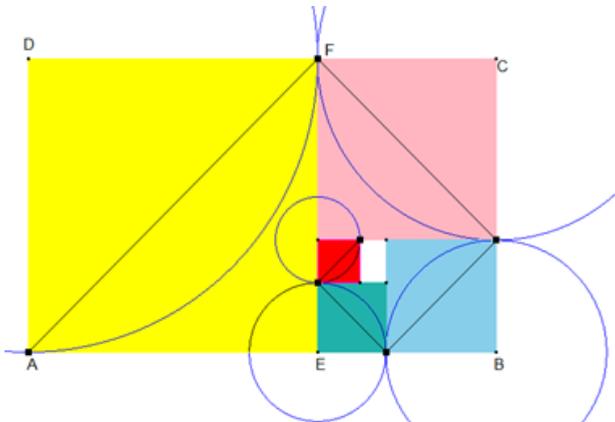


Figura 103. Rectángulo áureo

Fuente: adaptación de Portal académico CCH (s.f.).

$$AB = a, AD = b, \frac{a}{b} = \varphi.$$

El cuadrado amarillo tiene como lado b , en el rectángulo $EBCF$ se tiene:

$$FE = b, EB = a - b.$$

Se halla el resultado del cociente $\frac{b}{a-b}$.

Al dividir todas las cantidades por b , se obtiene:

$$\frac{b}{a-b} = \frac{\frac{b}{b}}{\frac{a}{b} - \frac{b}{b}} = \frac{1}{\varphi - 1} = \frac{1}{\frac{1}{\varphi}} = \varphi.$$

Lo cual demuestra que, el rectángulo $EBCF$ es áureo.

6.14 EL OJO DE DIOS

Es el punto donde convergen todos los rectángulos áureos, que corresponde al corte de las diagonales BD y CE , que resultan ser perpendiculares (Unarubiamatematica, s.f.).

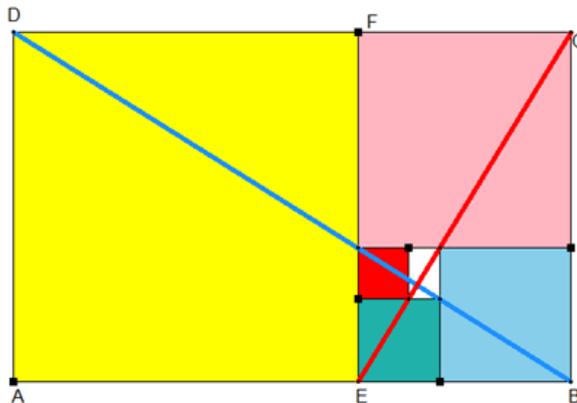


Figura 104. El ojo de Dios

Fuente: adaptación de Cardil (s.f.)

Se puede llamar rectángulo áureo horizontal, al que tiene como base el lado mayor, y rectángulo áureo vertical, al que tiene como base al lado menor (Imborrable, s.f.).

Se puede notar que, la diagonal BD contiene todas las diagonales de los rectángulos horizontales, y la diagonal CE contiene todas las diagonales de los rectángulos verticales, por lo que el punto de corte, será el denominado ojo de Dios o firma de Dios (Figura 104).

6.15 DECÁGONO REGULAR

Suponga que \overline{AB} es el lado del decágono regular, entonces el ángulo central tiene como medida 36° , es decir $m\angle AOB = 36^\circ$; los ángulos iguales miden 72° (Figura 105).

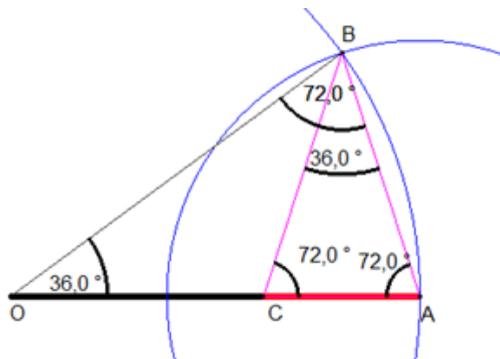


Figura 105. Decágono regular (a)

Fuente: adaptación de Landaverde (s.f.)

Si se traza la bisectriz \overline{BA} del ángulo $\angle ABO$, se tiene $\triangle ABO \cong \triangle CBA$ y se puede establecer la proporción:

$$\frac{AB}{CA} = \frac{OB}{AB}, \text{ es decir, } \frac{AB}{CA} = \frac{OA}{AB}.$$

Esto significa que, se debe dividir el radio en media y extrema razón:

$$AB = l, CA = r - l, OA = r.$$

De manera similar, se puede demostrar que $\overline{EC} \cong \overline{EB}$ y así se puede aplicar el Teorema de Ptolomeo.

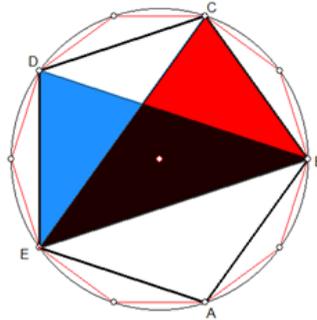


Figura 107. Pentágono regular (a)

Fuente: adaptación de Wikipedia (s.f.a)

Representando por l la longitud del lado del pentágono regular y por d la diagonal, se tiene: $d^2 = l^2 + ld$.

Al dividir todos los términos por l^2 se obtiene:

$$\left(\frac{d}{l}\right)^2 - \frac{d}{l} - 1 = 0.$$

Al resolver la ecuación, se obtiene:

$$\frac{d}{l} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

Se calcula el lado del pentágono regular.

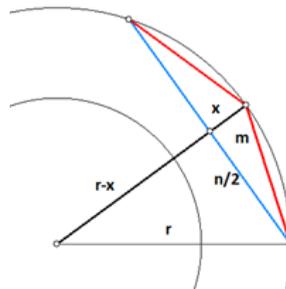


Figura 108. Pentágono regular (b)

Fuente: adaptación Landaverde (s.f.)

En Figura 108, m es el lado del decágono regular inscrito en la circunferencia de radio r , y el lado del pentágono es n .

Se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$\left(\frac{n}{2}\right)^2 = x(2r - x) = 2rx - x^2;$$

de donde

$$\left(\frac{n}{2}\right)^2 + x^2 = 2rx; \text{ también } \left(\frac{n}{2}\right)^2 + x^2 = m^2.$$

De aquí se puede concluir que:

$$2rx = m^2 \therefore x = \frac{m^2}{2r}.$$

Entonces,

$$\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m^2}{2r}\right)^2 = m^2 \Rightarrow n = \frac{m}{r} \sqrt{4r^2 - m^2}.$$

Al reemplazar m , se obtiene:

$$n = \frac{r}{\varphi^2} \sqrt{3 + 4\varphi}.$$

En esta fórmula aparecen 3 y 4, que son los catetos del triángulo sagrado (wikipedia, s.f.a).

Al aplicar las propiedades algebraicas de φ , se puede escribir lo siguiente:

$$n = \frac{r}{\varphi} \sqrt{2 + \varphi}.$$

Se puede observar que los coeficientes del polinomio, dentro del radical, son 1 y 2.

6.17 LA TAZA DE ORO

La taza de oro, es la figura que tiene forma de cáliz y está formada por tres diagonales y un lado del pentágono regular. La copa, es el triángulo amarillo, y la base, el triángulo rojo (Figura 109) (Bonell, 2000).

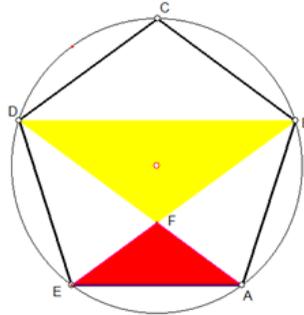


Figura 109. La taza de oro

Fuente: adaptación de Bonell (2000)

Como se vio, la relación entre la diagonal y el lado del pentágono regular, es el número de oro y los triángulos EAF, BDF son semejantes, entonces se puede establecer el cociente:

$$\frac{\text{Área}(\triangle BDF)}{\text{Área}(\triangle EAF)} = \varphi^2.$$

6.18 LOS TRIÁNGULOS DE KEPLER

Recordando que el número de Dios es $\varphi = \frac{a}{b}$, de manera que la proporción (Arenzana, 2020):

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}, a > b,$$

Se transforma, en:

$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi, \text{ de donde } \varphi^2 = \varphi + 1.$$

esto se puede interpretar como:

$$\varphi^2 = (\sqrt{\varphi})^2 + 1^2.$$

Y llevándola a la geometría, en el fondo lo que hay, es un triángulo rectángulo, donde los catetos miden $\sqrt{\varphi}, 1$ y la hipotenusa tiene como medida φ (wikipedia, s.f.a).

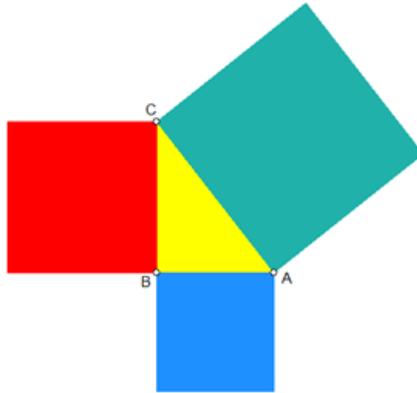


Figura 110. Triángulo de Kepler

Fuente: adaptación de Wikipedia (s.f.a)

En la Figura 110, $AB = 1$ unidad arbitraria, $BC = \sqrt{\varphi}$, $AC = \varphi$.

Esta forma de interpretar la expresión algebraica, se la puede llevar a la suma de números enteros positivos y enunciar la siguiente regla:

Para sumar los números enteros positivos a, b se construye un triángulo rectángulo que tenga como medida de los catetos \sqrt{a}, \sqrt{b} , se traza la hipotenusa, y con ella, se construye un cuadrado, y se calcula el área, que será el resultado de $a + b$.

Ahora

$$CD = \sqrt{OD^2 + OC^2}$$

$$CD = \sqrt{\left(\frac{r}{\varphi}\right)^2 + r^2} = \sqrt{\frac{r^2 + r^2\varphi^2}{\varphi^2}} = \frac{r}{\varphi}\sqrt{1 + \varphi^2} = \frac{r}{\varphi}\sqrt{1 + 1 + \varphi} = \frac{r}{\varphi}\sqrt{2 + \varphi}.$$

Esta expresión corresponde al valor del lado del pentágono regular.

Se sabe que, el radio de la circunferencia es igual al lado del hexágono regular inscrito en ella, es decir OC .

Con esto queda probado el teorema que da lugar a la Figura 112.

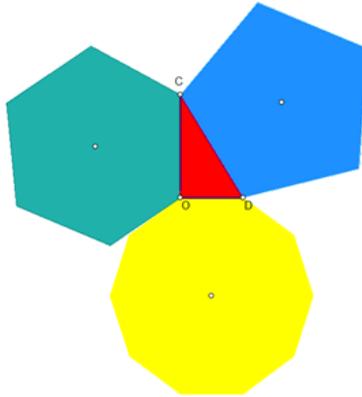


Figura 112. Teorema de Kepler (b)

Fuente: adaptación de Arenzana (2020)

6.19 EJERCICIOS

Resolver los siguientes ejercicios (Landaverde, s.f.):

1. Determinar la cuarta proporcional a tres segmentos dados.
2. Determinar hallar la tercera proporcional a dos segmentos dados.
3. Dada una recta $A'B'$ como homóloga de AB del triángulo ABC , construir un triángulo semejante a este último.
4. Dado un segmento AB , determínense dos puntos M y N que dividan este

- segmento en partes proporcionales a las fracciones $1/2$, $3/5$, $3/7$.
5. Una paralela a un lado de un triángulo determina en uno de los otros dos lados segmentos de 22 y 14 mm; calcular los segmentos determinados en el tercer lado que mide 5 cm.
 6. En un triángulo ABC , $AB = 5$ cm y $BC = 8,5$ cm; desde B , se toma en BA un segmento $BD = 3$ cm, y en BC , otro $BE = 5,1$ cm, y se unen los puntos D y E ; se pregunta si DE es paralela a AC .
 7. La sombra de un monumento mide 10,60 m, y la de una varilla vertical de un m de altura, situada a su lado, mide, en el mismo momento, 40cm; ¿qué altura tiene el monumento?
 8. Demostrar que, si en el triángulo ABC una recta BD divide el lado AC en partes proporcionales a los otros dos lados, dicha recta es bisectriz del ángulo B .
 9. El perímetro de un triángulo es igual a 10,4 cm, y sus lados son entre sí como los números 7,8 y 11; calcular estos lados.
 10. Demostrar que las diagonales de un trapecio se cortan en segmentos proporcionales a las bases del trapecio.
 11. Demostrar que la paralela a las bases de un trapecio, trazada en la intersección de las diagonales, queda dividida por estas en partes iguales.
 12. Demostrar que, si en un triángulo ABC se trazan las alturas AD y CE , el triángulo ADB es semejante al BEC .
 13. En el trapecio $ABCD$ la base $AB = 4$ cm, la $DC = 4$ cm; la altura mide 1,8 cm; calcular la altura EF del triángulo DCE , formado por la base DC y la prolongación de los lados AD y BC .
 14. La cuerda común de dos circunferencias secantes divide la línea de los centros en dos partes cuya razón es $2/3$; demostrar que la razón de las cuerdas paralelas a la línea de los centros, trazadas desde uno de los puntos de contacto de las circunferencias, es también $2/3$.
 15. Probar que si por un punto cualquiera O , situado en el interior de un triángulo ABC , se trazan OA , OB , OC , cuyos puntos medios respectivos A', B', C' se unen ordenadamente, los triángulos ABC y $A' B' C'$ son semejantes.
 16. Demostrar que, si en un triángulo ABC se trazan las alturas BE y CD , se tiene $AE \times AC = AD \times AB$.
 17. Las bases y altura de un trapecio son respectivamente B , B y A ; calcular la altura del triángulo formado por la base mayor y la prolongación de los lados no paralelos.

18. Dadas dos circunferencias O y O' que se cortan en A y B , demostrar que si por B se traza una cuerda que corta las circunferencias en C y D , los triángulos ACD y AOO' son semejantes.
19. Demostrar que los puntos medios de las bases de un trapecio, la intersección de las diagonales y la prolongación de los lados no paralelos, están en línea recta.
20. Por el vértice C de un paralelogramo $ABCD$ se traza una oblicua MN a los lados del paralelogramo y se prolongan los lados AB y AD hasta M y N . Demostrar que los triángulos BMC y DCN son semejantes que el producto $BM \times DN$ es constante, cualquiera que sea la posición de la oblicua MN .

CAPÍTULO 7.



ÁREAS

“La geometría tiene dos grandes tesoros: Uno, es el teorema de Pitágoras, y el otro, es el número áureo. El primero puede compararse a una medida de oro, y el segundo a una piedra preciosa.”

Johannes Kepler (Figura 113)

7.1 DEFINICIONES

Región triangular: unión de un triángulo y su interior.

Región poligonal: unión de un número finito de regiones triangulares.

Unidad de área: región formada por un cuadrado de longitud unitaria y sus puntos interiores.

Área de una región poligonal: es el número que expresa el número veces que una unidad de área dada está contenida en una región poligonal (Hemmerling, 2005).

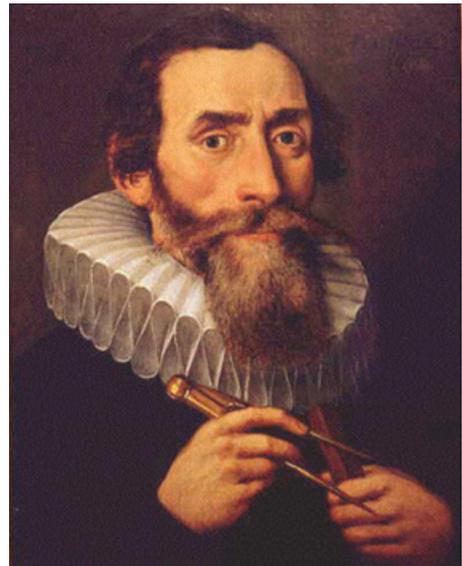


Figura 113. Johannes Kepler

Fuente. Davis (s.f)

Postulados del área

Dada la unidad de área, a cada región le corresponde un único número llamado área de la región.

El área de una región poligonal es igual a la suma de las áreas de las regiones en que pueda dividirse.

Si dos polígonos son congruentes, sus áreas son iguales.

El área de una región rectangular es igual al producto de la longitud de la base y la longitud de la altura ($A = bh$)

Teoremas

El área de un paralelogramo, es igual al producto de su base por su altura.

El área de un triángulo, es igual a la mitad del producto de su base por su altura.

El área de un trapecio, es igual a la mitad del producto de la suma de las bases por su altura (Hemmerling, 2005).

7.2 LA METAMORFOSIS DEL TRIÁNGULO

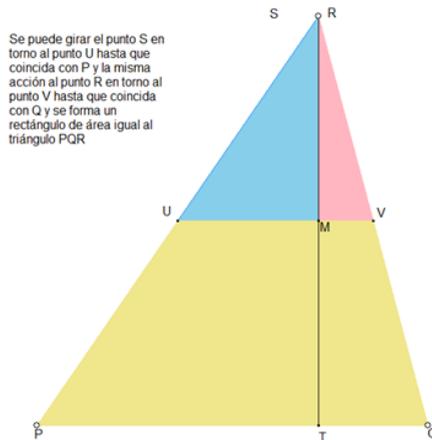


Figura 114. Metamorfosis del triángulo (a)

Fuente: elaboración propia

En el triángulo PQR (Figura 114) se traza la altura TR y en ella el punto medio M . El área del triángulo es $A = \frac{PQ \times TR}{2}$ esta expresión se la puede escribir así: $A = PQ \times \left(\frac{TR}{2}\right)$ y se la puede interpretar como el área de un rectángulo de base PQ y altura $\frac{TR}{2}$. (Figura 115).

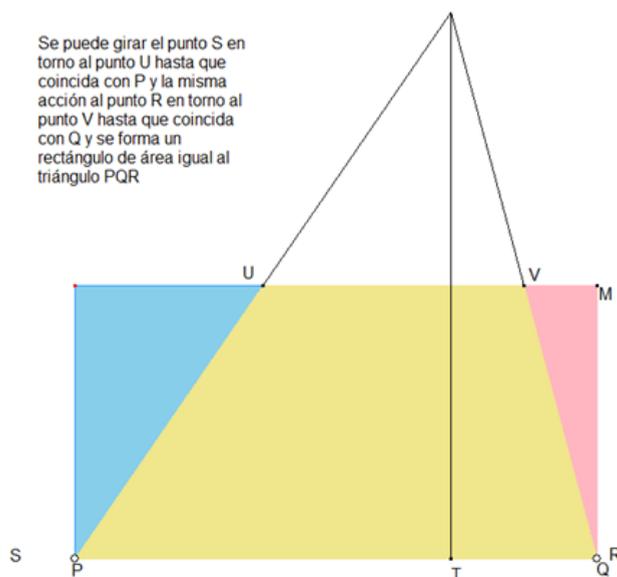


Figura 115. Metamorfosis del triángulo (b)

Fuente: elaboración propia

7.3 LA METAMORFOSIS DE UN PARALELOGRAMO

Un paralelogramo, puede transformarse en un rectángulo y viceversa, siempre que, conserve su base y altura (Figura 116).

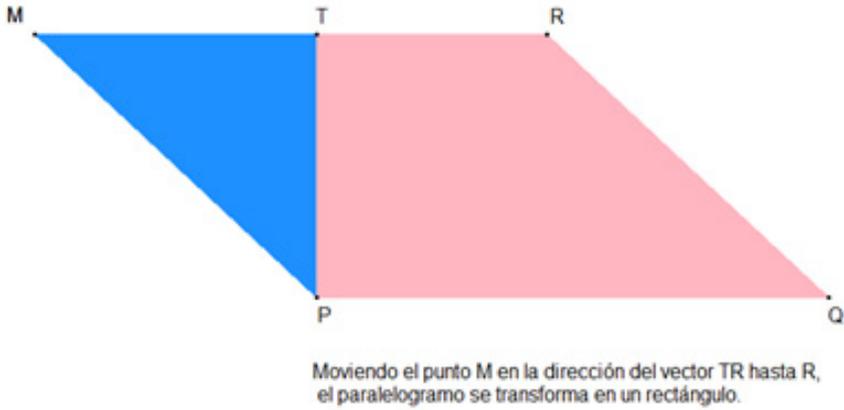


Figura 116. Metamorfosis de un paralelogramo (a)
Fuente: adaptación de Bolt B. (1989).

El rectángulo conserva del paralelogramo la base PQ y la altura PT (Figura 117).

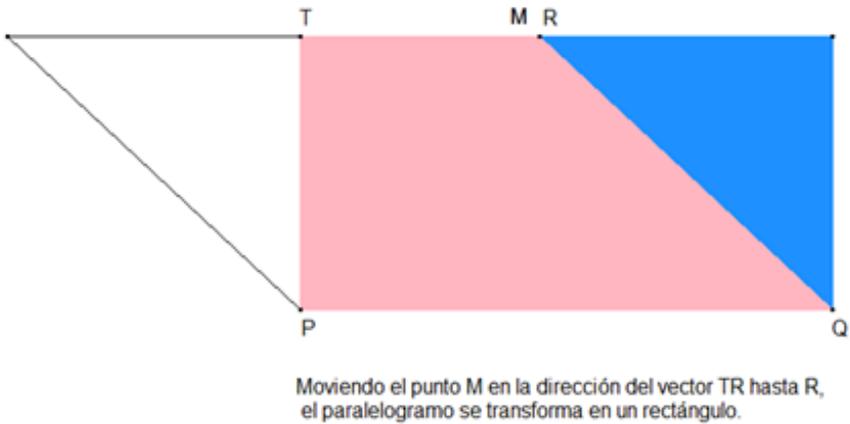


Figura 117. Metamorfosis de un paralelogramo (b)
Fuente: adaptación de Bolt B. (1989).

7.4 LA METAMORFOSIS DE UN RECTÁNGULO

El rectángulo, se puede transformar en un paralelogramo, conservando la base y su altura; en este ejemplo, se lo transforma hasta que el lado menor sea igual a $PT = \sqrt{ab}$, (Figura 118) donde a, b son las medidas respectivas de la base y la altura del rectángulo. El paralelogramo se puede transformar en un cuadrado de lado PT (Figura 119).

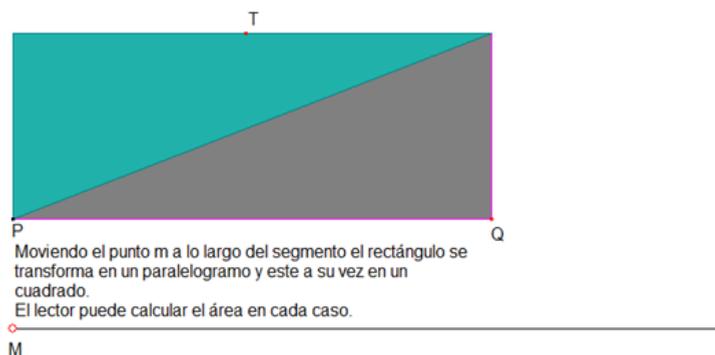


Figura 118. Metamorfosis de un rectángulo (a)

Fuente: adaptación de Mongge, (s.f.)

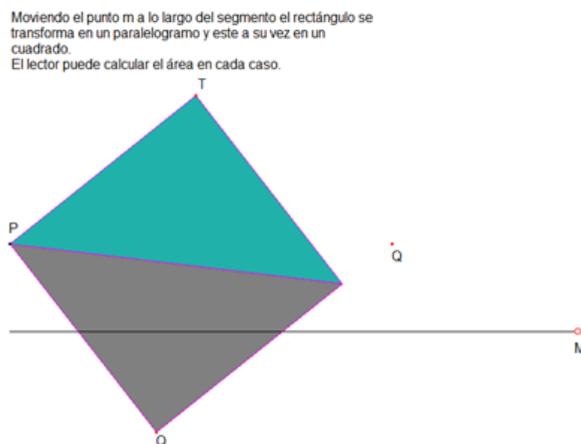


Figura 119. Metamorfosis de un rectángulo (b)

Fuente: adaptación de Mongge, (s.f.)

7.5 LA METAMORFOSIS DE UN CUADRILÁTERO

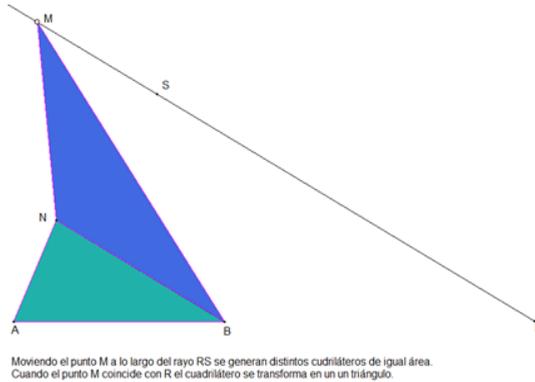


Figura 120. Metamorfosis de un cuadrilátero

Fuente: adaptación de Landaverde (s.f.)

El rayo \overrightarrow{RS} es paralelo a la diagonal BN y, por ello, cuando el punto M se desplaza por el rayo, el ΔBNM conserva la altura y la base, por lo cual, el polígono generado tiene la misma área (Landaverde, s.f.) (Figura 120).

7.6 EL TEOREMA DE PITÁGORAS

El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos (Figura 121).

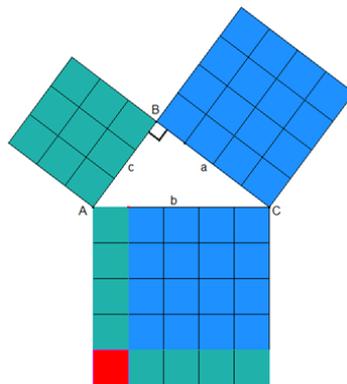


Figura 121. Teorema de Pitágoras (a)

Fuente: adaptación de Wikipedia (s.f.e)

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

o lo que es lo mismo:

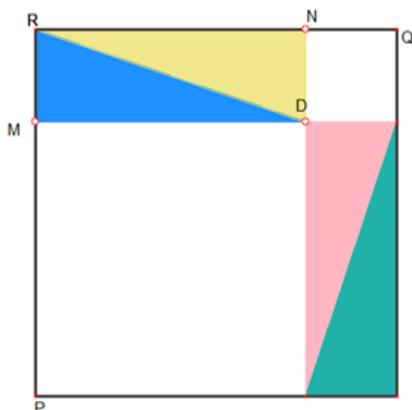
$$b^2 = c^2 + b^2.$$

En la Figura 122, se puede observar en el cuadrado inferior dos propiedades algebraicas, una visible y otra deducible.

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + (b - a)^2 + 2a(b - a), b^2 \\ &= c^2 + (b - c)^2 + 2c(b - c). \end{aligned}$$

El Teorema de Pitágoras, fue demostrado en el siglo VI a. C por el filósofo y matemático Pitágoras (wikipedia, s.f.b). Una demostración muy sencilla que se le atribuye, se basa en descomponer un cuadrado grande en 4 triángulos rectángulos congruentes entre sí y dos cuadrados. Luego se reacomodan los triángulos rectángulos, como si fueran fichas de un rompecabezas, de manera que, sólo quede un cuadrado. Esto es así, ya que las hipotenusas de los triángulos rectángulos, forman el cuadrado, y los ángulos agudos, son complementarios, es decir forman ángulo recto (Figura 123).

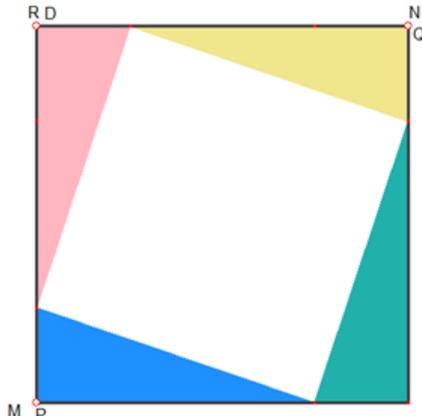
De esta manera, la suma de las áreas de los dos cuadrados, es igual al área del cuadrado que queda solo.



El lector puede desplazar el punto M hasta el vértice P, el punto N hasta Q y el punto D hasta R. Así realizó Pitágoras el teorema que lleva su nombre.

Figura 122. Teorema de Pitágoras (b)

Fuente: adaptación de Landaverde (s.f.)



El lector puede desplazar el punto M hasta el vértice P, el punto N hasta Q y el punto D hasta R. Así realizó Pitágoras el teorema que lleva su nombre.

Figura 123. Teorema de Pitágoras (c)

Fuente: adaptación de Landaverde (s.f.)

7.7 DEMOSTRACIÓN DE PAPPUS DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

La idea de la demostración, es transformar los cuadrados $ABPQ, MCMN$ en paralelogramos y finalmente en rectángulos $UIJA, IBCJ$, respectivamente (Figura 124) (wikipedia, s.f.b).

Se trazan las rectas \overleftrightarrow{QP} , \overleftrightarrow{MN} que se cortan en K .

En el ΔBPK se tiene: $\overline{BP} \cong \overline{AB}$ por ser lados del mismo cuadrado; $\angle BPK \cong \angle ABC$ por ser rectos; $\overline{PK} \cong \overline{BN}$ porque la figura $PBNK$ es un paralelogramo; por tanto, por el postulado LAL, $\Delta BPK \cong \Delta ABC$ y $\overline{BK} \cong \overline{AC}$.

Se traza la recta \overleftrightarrow{UA} que corta a \overleftrightarrow{QP} en L .

Se tiene $A(ABPQ) = A(ABKL)$ porque tienen la misma base y altura.

$A(ABKL) = A(UIJA)$ porque tienen la misma base y altura.

Por propiedad transitiva se cumple: $A(ABPQ) = A(UIJA)$.

El mismo razonamiento se realiza para el cuadrado $CMNB$:
 $A(CMNB) = A(IVCJ)$.

De manera que,

$$A(ABKL) + A(CMNB) = A(UIJA) + A(IVCJ) = A(UVCA).$$

Al realizar la lectura de derecha a izquierda, se tiene que:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

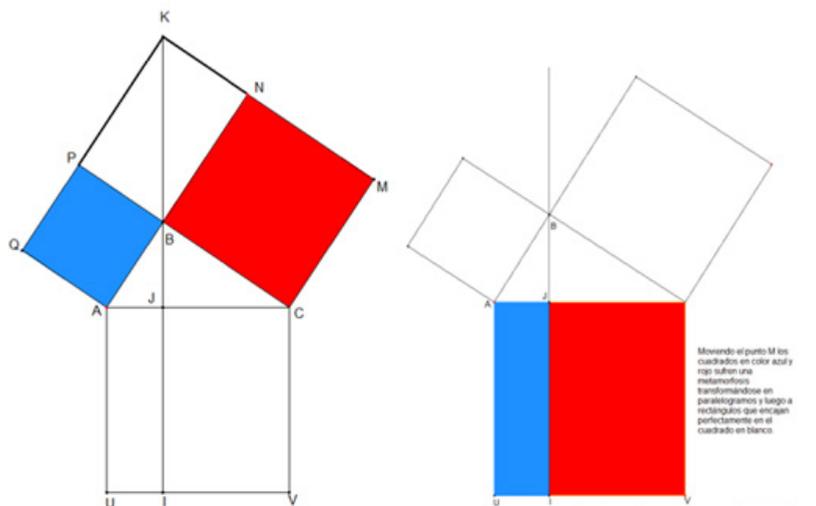


Figura 124. Teorema de Pitágoras – Demostración de Pappus

Fuente: adaptación de Wikipedia. (s.f.b).

7.8 PROBLEMA PITAGÓRICO

En la dirección Dima (2022), se plantea un problema llamativo y consiste, en que, se da un cuadrado arbitrario $PQRS$ y se pide determinar dos puntos en la diagonal \overline{QS} , donde el segmento intermedio, sea la diagonal de un cuadrado, en el cual, su área sea igual a la suma de las áreas de los cuadrados que tengan como diagonal a los segmentos extremos Dima (2022),

Lo que se mira en el enunciado, es que, en el fondo, está presente el Teorema de Pitágoras (Figura 125).

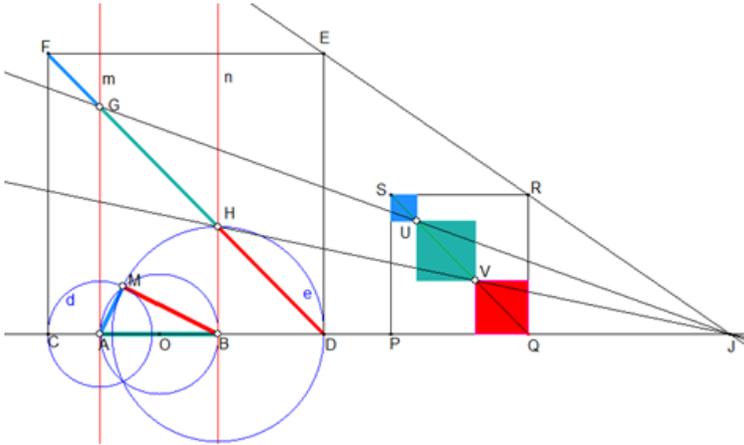


Figura 125. Problema pitagórico

Fuente: adaptación de Dima. (2022)

Se traza una circunferencia c con centro en O y radio arbitrario OA , y en ella se toma un punto M , y se trazan los segmentos \overline{AM} , \overline{BM} , obteniéndose el triángulo de Thales AMB (Figura 125).

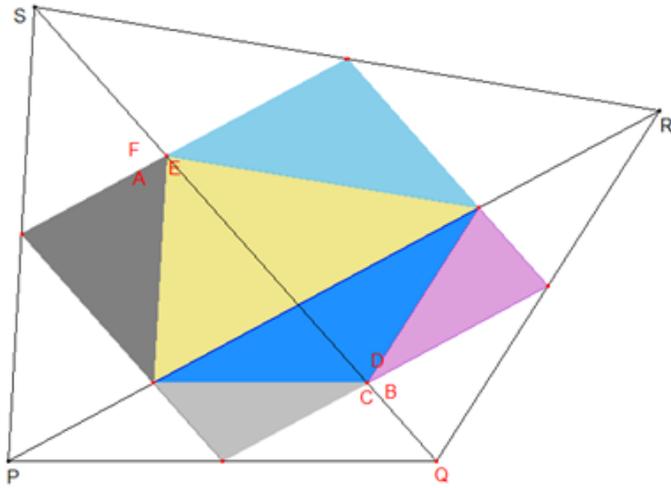
Se trazan las circunferencias d, e con centros en A, B y radios AM, BM , respectivamente, que cortan a \overline{AB} en C, D . Se construye el cuadrado $CDEF$ y se traza \overline{DE} . Por A, B se trazan m, n rectas perpendiculares a \overline{AB} que cortan a \overline{DE} en los puntos G, H . Se traza \overline{ER} .

Si \overline{ER} corta a \overline{AB} en J , se trazan las rectas $\overline{GJ}, \overline{HJ}$ que cortan a \overline{QS} en U, V , que son los puntos pedidos.

Si \overline{ER} no corta a \overline{AB} , se trazan r, s paralelas a \overline{AB} que cortan a \overline{QS} en U, V , que son los puntos pedidos.

7.9 PARALELOGRAMO ELÁSTICO

Sea el paralelogramo $ABCD$ (Figura 126). Se sabe que $\triangle ABD \cong \triangle CDB$. Como se trata de un paralelogramo elástico, se puede alargar \overline{QD} de manera que coincida con \overline{DC} , y achicar \overline{AB} hasta que coincida con \overline{BC} y mantener \overline{BD} ; de esta manera se tendrá $\triangle ABD \cong \triangle CBD$.



Se puede localizar los puntos que permiten retirar los triángulos de distintos colores hasta que el paralelogramo quede en blanco.

Figura 127. Paralelogramo de Varignon (a)

Fuente: adaptación de Ocampo (2021).

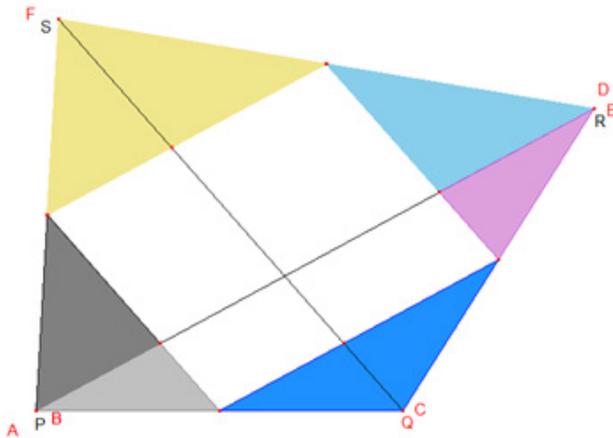


Figura 128. Paralelogramo de Varignon (b)

Fuente: adaptación de Ocampo (2021).

7.11 LAS LÚNULAS DE HIPÓCRATES

Una lúnula, es la región comprendida entre dos arcos de circunferencias de diferente radio que subtienden la misma cuerda (Arenzana, 2019).

El estudio de las lúnulas, se debe al gran geómetra y astrónomo griego Hipócrates de Quíos, quien demostró que, algunos tipos de lúnulas se podían cuadrar, es decir, se podía construir un cuadrado de igual área que la lúnula.

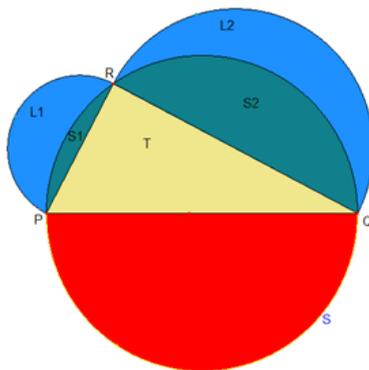


Figura 129. Lúnulas de Hipócrates

Fuente: adaptación de Landaverde (s.f.)

Para el análisis de las lúnulas, se debe recordar un corolario del Teorema de Pitágoras.

Si se construyen tres figuras semejantes, de áreas F_1 , F_2 , F_3 tales como polígonos regulares, semicírculos, etc. sobre los tres lados de un triángulo rectángulo, el área de la figura construida sobre la hipotenusa, es equivalente a la suma de las áreas de las figuras construidas sobre los catetos (Figura 129).

$$\frac{F_1}{a^2} = \frac{F_2}{b^2} = \frac{F_3}{c^2} = k^2, a^2 + b^2 = c^2.$$

Entonces,

$$\frac{F_1}{k^2} + \frac{F_2}{k^2} = \frac{F_3}{k^2}, \text{ de donde } F_1 + F_2 = F_3.$$

En la Figura 129, se puede establecer:

$$S = (S_1 + L_1) + (S_2 + L_2), S = S_1 + S_2 + T.$$

De donde:

$$(S_1 + L_1) + (S_2 + L_2) = S_1 + S_2 + T$$

Finalmente

$$L_1 + L_2 = T.$$

7.12 EL TEOREMA DE ANNE

Es un teorema que relaciona el tema de las áreas en los polígonos y se debe al matemático francés Pierre-León Anne (wikipedia, s.f.e).

Sea el cuadrilátero convexo $ABCD$ que no sea paralelogramo; I, J puntos medios de las diagonales \overline{AC} , \overline{BD} y P un punto en el interior de $ABCD$, que forma cuatro triángulos con los vértices del cuadrilátero (Figura 130).

$\text{Área}(BPC) + \text{Área}(APD) = \text{Área}(APB) + \text{Área}(CPD)$ si y solo si P está en la recta \overleftrightarrow{IJ} , que es la recta de Newton.

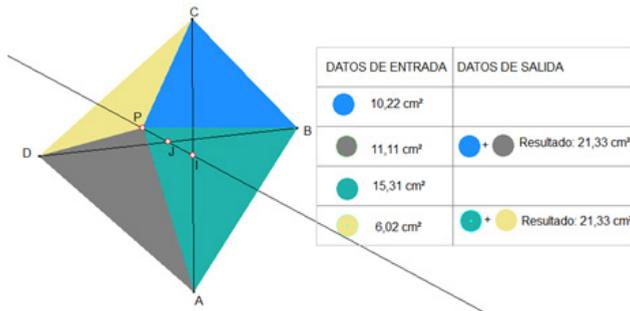


Figura 130. Teorema de Anne

Fuente: adaptación de Wikipedia (s.f.c).

7.13 CUERDAS QUE SE CORTAN EN EL INTERIOR DE UNA CIRCUNFERENCIA

Si dos cuerdas se interceptan dentro de un círculo, el producto de las medidas de los segmentos de una cuerda es igual al producto de las medidas de los segmentos de la otra.

Esta propiedad se demostró aplicando el Teorema de Thales, pero se puede realizar una comprobación, aplicando áreas.

El teorema afirma que $rs = mn$.

Recordar que este producto, es la fórmula del área de dos rectángulos, cuyas medidas de base y altura, aparecen en la Figura 131.

Algo similar se puede realizar con el teorema de las bisectrices internas y externas.

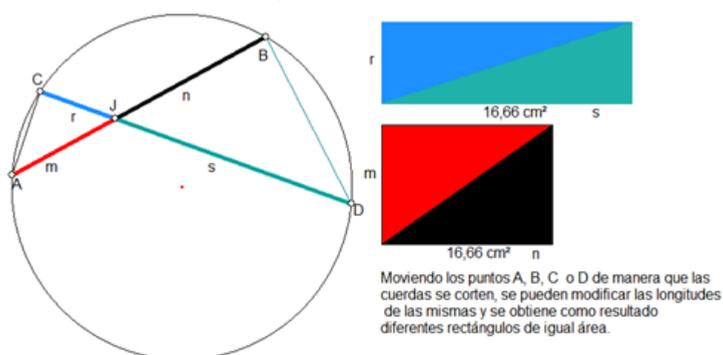


Figura 131. Cuerdas que se cortan en el interior de una circunferencia

Fuente: adaptación de Hemmerling (2005)

7.14 CONSTRUCCIÓN DE UN CUADRADO EQUIVALENTE A UN RECTÁNGULO

Sea el rectángulo $ABCD$. Con centro en R y radio RQ se traza una circunferencia, que corta a \overline{SR} en I . Sea J punto medio de \overline{SI} ; con centro en J y radio JI se traza una circunferencia, y en ella se determina el punto

Sea el triángulo equilátero ABC (Figura 133), se traza la mediana CD ; el triángulo ADC se refleja sobre \overleftrightarrow{AD} y el triángulo resultante se traslada según el vector \overrightarrow{AC} , dando como resultado BCF ; con centro F y radio $l = \frac{\sqrt{3}}{2}u$ se traza una circunferencia que corta a \overline{DC} en G , se traza \overline{FG} que corta a \overline{BC} en I , y se determina $\overline{BH} \perp \overline{FG}$.

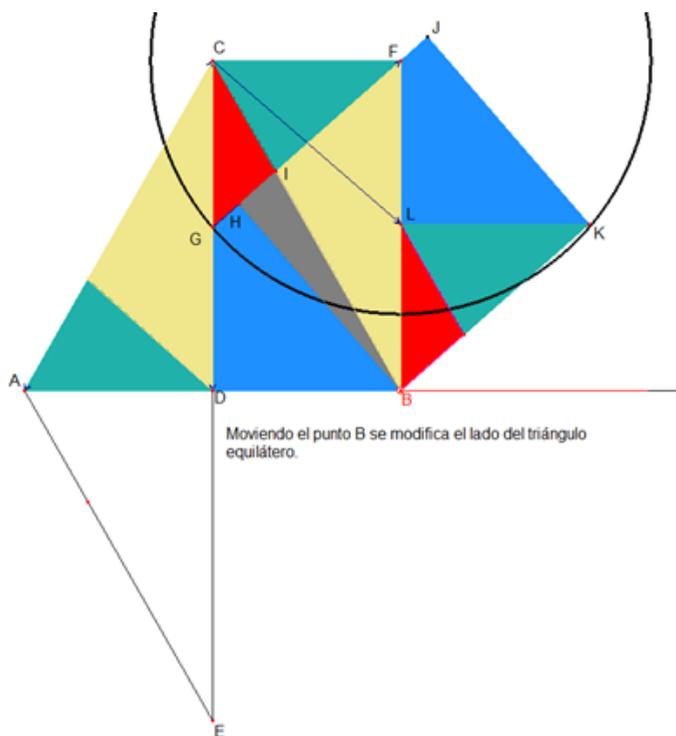


Figura 133. Cuadratura del triángulo equilátero

Fuente: adaptación de Navas (2022)

El polígono $DBHG$ se traslada según el vector \overrightarrow{GF} , resultando el polígono $FJKL$. Los triángulos en color rojo y verde se trasladan según el vector \overrightarrow{CL} (Figura 133).

De esta manera, el triángulo equilátero se puede dividir en piezas que, al ensamblarlas, se puede armar un cuadrado.

7.16 EL TANGRAM

El tangram, es un rompecabezas chino, compuesto por siete fichas: cinco triángulos, un cuadrado y un rombo (Guao.org, s.f.).

Las fichas, se forman al dividir un cuadrado tal como lo muestra la Figura 134, y la tarea consiste en, formar figuras con todas las fichas, sin solaparlas.

Lo sorprendente, es la cantidad tan grande de figuras humanas, de animales y de figuras geométricas, que se pueden armar. Otro detalle del tangram, es que se puede identificar fácilmente, a qué corresponde la figura. Por ejemplo, se puede asegurar que una figura corresponde a un perro o a un gato.

Dado que, en cada figura se utilizan las siete fichas, las áreas de todas las figuras es igual al área del cuadrado de donde se obtuvieron las fichas.

Se pueden ensamblar, el cuadrado como es obvio, el rectángulo, el triángulo rectángulo, el trapecio isósceles, el paralelogramo, el trapecio rectángulo, y parece increíble, el cubo.

Se presenta el ensamblaje del rectángulo.

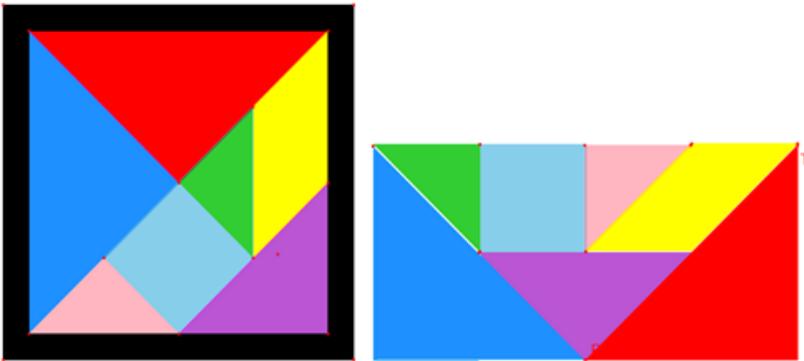


Figura 134. Rectángulo ensamblado con fichas del tangram

Fuente: adaptación de Guao.org (s.f.)

Es divertido jugar a ensamblar figuras, además, ayuda a desarrollar el sentido espacial, la imaginación y la fantasía.

En el archivo tangram, se puede descomponer el rectángulo y formar otras figuras geométricas con las fichas.

7.17 EL STOMACHIÓN DE ARQUÍMEDES

Es un rompecabezas geométrico, atribuido a Arquímedes de Siracusa (Siglo III a. C.). Consiste, en un conjunto de 14 fichas o piezas, que se han recortado de un cuadrado, tal como se ve en la Figura 135 (Educaconbigbang, 2016). El problema consiste en, ensamblar de manera diferente el cuadrado, utilizando todas las fichas; además se pregunta, ¿Cuántas formas distintas de ensamblar un cuadrado existen?

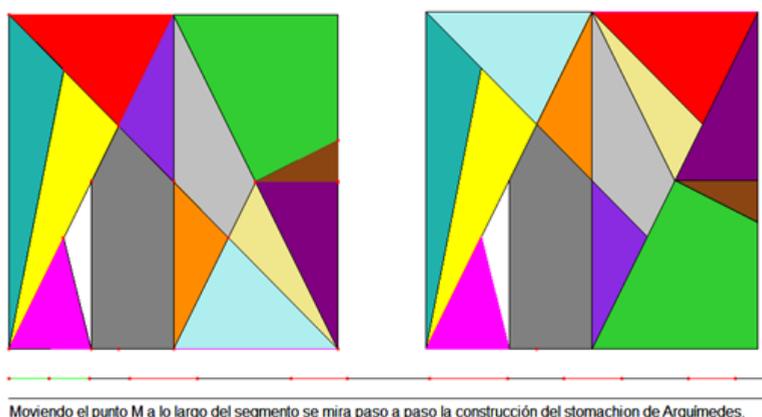


Figura 135. Stomachión de Arquímedes

Fuente: adaptación de Educaconbigbang (2016)

Se presenta una solución, la cual se la observa a simple vista. La idea es mantener fijas algunas fichas y estudiar donde se pueden cambiar otras, de manera que se ensamble un cuadrado.

También se pueden calcular las áreas de las fichas, así como también sus perímetros.

7.18 EJERCICIOS.

Resolver los siguientes ejercicios:

1. Se tiene un cuadrado de lado 12 cm. Determinar las dimensiones de todos los rectángulos de base y altura un número entero que tenga la misma área del cuadrado.
2. Construir un paralelogramo que tenga la misma área de un triángulo. La base del paralelogramo debe ser la del triángulo.

Resolver los siguientes ejercicios (Landaverde, s.f.):

1. Determinar el área de un trapecio isósceles si su altura es igual a h y su lado lateral se ve desde el centro de la circunferencia circunscrita bajo el ángulo α .
2. A un rectángulo dado circunscribir un nuevo rectángulo, el área del cual será igual a m^2 ¿Para cual valor de m será soluble el problema?
3. Calcular el área de una acera de 5 m de ancho que rodea una plaza rectangular de 80 m de largo por 55 m de ancho.
4. Determinar las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que su área es de 10 centímetros cuadrados y la razón de sus dimensiones es $4/3$.
5. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 4,5 cm, y su área es de 13,50 centímetros cuadrados; calcular los tres lados.
6. Si la escala de un plano es de 2 mm por kilómetro, ¿cuál es el área en forma de trapecio cuya base y altura miden, en el plano, respectivamente 4,5, 3 y 2,8 mm?
7. Calcular el perímetro de un terreno cuadrado de 7482.25 metros cuadrados.
8. Dos cuadrados tienen 4 y 5 cm de lado respectivamente; calcular el lado del cuadrado equivalente a su suma; ídem, a su diferencia.
9. Calcular el área de un triángulo cuyos lados miden respectivamente 13, 14 y 15 cm.
10. Calcular el radio de la circunferencia inscrita y circunscrita al triángulo del problema anterior.
11. ¿Cuál es el área de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa $3\sqrt{2}$ cm?
12. Demostrar que el área de un polígono circunscrito a una circunferencia es igual al semiproducto de su perímetro por el radio de la circunferencia.

13. Dados los tres lados de un triángulo, 6, 8 y 10 cm respectivamente, calcular el área del triángulo formado por sus tres alturas.
14. En un círculo de 78,54 centímetros cuadrados y por un punto situado a 3 cm del centro, se trazan un diámetro y una cuerda perpendicular a él, calcular la longitud de ambos segmentos.
15. La diagonal mayor de un rombo mide 5,7 cm, y la menor es igual al lado; calcular el área de este rombo.
16. Un campo cuadrangular tiene dos lados paralelos de 215 m y 175 m respectivamente y sus otros dos lados forman con la base ángulos de 90 y 60 grados; calcular su área.

CONCLUSIONES



La Geometría Elemental es un campo en constante desarrollo, enriqueciéndose a medida que los investigadores descubren nuevos teoremas y propiedades. Los elementos utilizados en la Geometría Elemental, junto con otros recursos adicionales, proporcionan la base para explorar otras geometrías, como la Proyectiva, Hiperbólica, Riemanniana, Homológica y de Transformaciones, entre otras.

Este impacto de la Geometría no pasa desapercibido en la Ingeniería Civil, donde su presencia es evidente en la construcción de edificios, carreteras, polideportivos, puentes y más. Elementos geométricos como segmentos de recta, rectángulos en puertas y canchas deportivas, cuadrados y círculos en ventanas, rombos y triángulos en rejas, son visibles en numerosas estructuras. En el campo de la ingeniería, los conceptos de perpendicularidad y paralelismo desempeñan un papel fundamental.

La Geometría ha sido una herramienta crucial para que la humanidad comprenda la redondez de la tierra y que una zona relativamente pequeña, determine que los rayos solares son paralelos. Además, la geometría nos invita a explorar la belleza de la naturaleza a través del número áureo, tanto en el reino vegetal como en el animal, y en la escala universal, como se observa en las formas de las galaxias.

La Geometría es una compañera constante en nuestra vida cotidiana: en la forma rectangular de los libros y cuadernos de los estudiantes, así como en las llantas circulares de los vehículos. Este libro se presenta como una vitrina geométrica que permite a los observadores explorar diversos aspectos de este campo, despertando su interés por elementos atractivos, interesantes, misteriosos o aparentemente inalcanzables.

Finalmente, la Geometría se asemeja a un alimento para el espíritu; explorar sus conceptos y figuras es un viaje fascinante por un mundo mágico. Aquellos que la estudian y desvelan sus secretos encuentran una fuente inagotable de conocimiento y satisfacción.

BIBLIOGRAFÍA



- Acosta, A. M. (1953). *Introducción a la Física* (Vol. 2). Cultural.
- Akifrases. (2023). *Frases y Citas Célebres de Polígono*.
<https://akifrases.com/frases/pol%C3%ADgono>.
- Akifrases. (s.f.). *Frases y citas célebres de Geometría*.
<https://akifrases.com/frases/geometr%C3%ADa>
- Amauteach. (s.f.). *Relaciones métricas en cuadriláteros*.
https://www.geometria.ds-analitika.com/108_relaciones_mtricas_en_cuadrilteros.html
- Arenzana, V. (2019). *La medida de las lúnulas. El sueño de la cuadratura del círculo*. Vicmat.
<https://vicmat.com/la-medida-las-lunulas-sueno-la-cuadratura-del-circulo/>
- Arenzana, V. (2020). *El triángulo de kepler: el teorema de Pitágoras y el número áureo*. <https://vicmat.com/triangulo-kepler-teorema-pitagoras-numero-aureo/>
- Astrosigma. (s.f.). *Modelos planetarios en la historia*.
<https://astrosigma.com/modelos-planetarios-historia/>
- Banach, S. (1967). *Cálculo Diferencial e Integral*. Uteha.
- Bert. H. (2005). *Breve repaso de la Relatividad Especial*.
<https://www.ugr.es/~bjanssen/text/repaso.pdf>
- Blog Revista digital de matemáticas Sacit Ámetan (s.f.).

- El triángulo de Morley: otra maravilla geométrica:
<http://revistasacitametam.blogspot.com/2013/02/el-triangulo-de-morley-otra-maravilla.html>
- Bolt, B. (1989). *Aún más actividades matemáticas*. Barcelona. Labor.
- Bonell C. (2000). *La divina proporción*. Ediciones UPC.
- Cardil, R. (s.f.). *Matemáticas visuales: el rectángulo áureo*.
<http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/proporcionaurea/rectanguloaureo.html>
- Carrillo, A. (2020). *El Hexagrammun Mysticum*.
<https://www.madrimasd.org/blogsmatematicas/2020/04/23/147742>
- Charles, L. (1989). *Geometría Analítica*. Limusa.
- Colaboraeducacion30. (s.f.). *El disco de newton*. Consultado: febrero 17 de 2023, en: <https://colaboraeducacion30.juntadeandalucia.es/educacion/colabora/documents/15813526/18222998/EL+DISCO+DE+NEWTON/52779253-5211-f399-d0fc-a6719bc65b6b?version=1.0>
- Cómo funciona. (s.f.). *Cómo funciona la máquina de vapor*.
<https://como-funciona.co/una-maquina-de-vapor/>
- Coxeter, H. (1971). *Fundamentos de geometría*. Limusa.
- Cultura científica. (s.f.). *Cuadernos de cultura científica*.
<https://culturacientifica.com/2022/07/13/teoremas-geometricos-sin-palabras-viviani/>
- Davis, E. (s.f.). *Deriving Kepler's Laws of Planetary Motion*.
<https://www.uu.edu/dept/math/SeniorPapers/09-10/DavisEmily.pdf>
- Diamond. (2021). *El teorema de Viviani*. Gaussianos.
<https://www.gaussianos.com/el-teorema-de-viviani/>
- Díaz, M. (2012). *El teorema de napoleón*.
<https://matesmates.wordpress.com/2012/01/16/el-teorema-de-napoleon/>
- Dima. (2022). *Solución a tres cuadrados en otro cuadrado*.
<https://blogs.ua.es/dimates/2022/03/26/solucion-a-tres-cuadrados-en-otro-cuadrado/>
- ds-analitika.com (s.f.). *Relaciones métricas en cuadriláteros*.
https://www.geometria.ds-analitika.com/108_relaciones_mtricas_en_cuadrilteros.html
- ds-analitika.com (s.f.). *Relaciones métricas en la circunferencia*.

- https://www.geometria.ds-analitika.com/101_relaciones_mtricas_en_la_circunferencia.html
- Edu.xunta.gal. (s.f.). *Medición de la altura de la gran pirámide*.
https://www.edu.xunta.gal/espazoAbalar/sites/espazoAbalar/files/datos/1491480036/contido/ud9_teorema_Thales_y_semejanza/33_dos_problemas_muy_antiguos.html
- Educaconbigbang. (2016). *El puzle de Arquímedes: Stomachion*.
<https://educaconbigbang.com/2016/06/el-puzle-de-arquimedes-stomachion/>
- Erazo, L. (1979). *Matemáticas Elementales*. Colombia: Pasto. Universidad de Nariño.
- Es.frwiki.wiki. (s.f.). *Pantógrafo*.
[https://es.frwiki.wiki/wiki/Pantographe_\(dessin\)](https://es.frwiki.wiki/wiki/Pantographe_(dessin))
- Escudero, J. (s.f.). *Origen de la Geometría*.
<http://platea.pntic.mec.es/jescuder/geometr1.htm>
- Extremiana, J. (s.f.). *La divina proporción*.
<http://ucua.ujaen.es/jnavas/mayores/archivos/divina%20proporcion.pdf>
- Fernández, T. & Tamaro, E. (2004a). *Biografías y vidas: Biografía de Herón de Alejandría*. *La enciclopedia biográfica en línea*.
<https://www.biografiasyvidas.com/biografia/h/heron.htm>
- Fernández, T. & Tamaro, E. (2004b). *Biografías y vidas: Biografía de Blaise Pascal*. *La enciclopedia biográfica en línea*.
<https://www.biografiasyvidas.com/biografia/p/pascal.htm>
- Fernández, T. & Tamaro, E. (2004c). *Biografías y vidas: Demócrito de Abdera*. *La enciclopedia biográfica en línea*.
<https://www.biografiasyvidas.com/biografia/d/democrito.htm>
- Fowler, M. (s.f.). *Experimento de Michelson-Morley*.
https://galileoandstein.phys.virginia.edu/lectures/Michelson-Morley_Sp.htm
- Galo, J. (2004). *La proporción áurea, armónica o divina*. Descartes 2D. http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/belleza/canonaureo.htm
- Gamow, G. (1983). *Biografía de la Física*. Alianza Editorial.
- García, J. (2005). *Poincaré, el último matemático universalista*.
<https://imarrero.webs.ull.es/sctm05/modulo2tf>

- /2/jcalcines.html
- Gentile, E. R. (2021). *Construcciones con regla y compás*. Revista De Educación Matemática, 3(2), 1-12.
<https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/11218>
- Grupo Alquerque. (2013). *Triángulo imposible: el triángulo de Penrose*.http://www.grupoalquerque.es/ferias/2013/archivos/c_imposibles/trianguloimposible_papel.pdf
- Guao.org. (s.f.). *El tangram*. <https://www.guao.org/sites/default/files/biblioteca/El%20Tangram.pdf>
- Gusev, V. (1985). *Problemas matemáticos*. Moscú. Mir.
- Hemmerling, E. (2005). *Geometría Elemental*. México. Limusa.
- Hmong (s.f.). *Ilusión de Ehrenstein*.
https://hmong.es/wiki/Ehrenstein_illusion.
- Hurtado E. (2019). *Circunferencias ortogonales*.
https://sistemas.fcencias.unam.mx/~erhc/geometria_moderna_2019_2/inversion_2019.pdf
- IDIS. (2023). *Disco de Newton*.
<https://proyectoidis.org/disco-de-newton/>
- Imborrable. (s.f.). *La proporción áurea: Qué es y cómo se aplica en diseño gráfico*. <https://imborrable.com/blog/proporcion-aurea/>
- Juntadeandalucia. (s.f.). *Óptica física y óptica geométrica*.
<https://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/41008970/helvia/sitio/upload/opticafisicaygeometricafinal.pdf>
- Kasner, E. (1994) *Matemáticas e Imaginación (II)*. Salvat. Barcelona.
- Kostovski. A. (1980). *Construcciones geométricas mediante un compás*. Moscú. Mir.
- Landaverde F. (s.f.). *Curso de Geometría*. Bogotá. Librería F.T.D
- Lehmann (1989). *Geometría Analítica*. Limusa.
- Lidski, V. (1972). *Problemas de matemáticas elementales*. Moscú. Mir.
- Lozano M. (007). *De Arquímedes a Einstein*. DeBolsillo.
- Macho Stadler, M. (2020). *Vida de Galileo*.
Cuaderno de cultura científica.
<https://culturacientifica.com/2020/05/13/vida-de-galileo/>
- Maikelnai. (2011). *Ingenio egipcio*.
<https://naukas.com/2011/11/28/ingenio-egipcio-o-como-adelantarse-a-pitagoras-atando-12-nudos/>

- Martín, H. (1961). *Mathematical Models*. Oxford University press.
- Martínez, A. (2007). *Geometrías no euclidianas*.
<http://geometrias-no-euclideanas.blogspot.com/2007/09/parte-ii-la-primera-geometra-no.html>
- Matemáticas y Ciencias. (2020). *Teorema de Chadu* [Publicación].
Facebook.<https://m.facebook.com/matematicasycienciasuni/photos/teorema-de-chadu/840496513094502/>
- Matemelga.Wordpress. (2018). *Los círculos de Johnson*.
<https://matemelga.wordpress.com/2018/07/28/los-circulos-de-johnson/>
- Mi tutorial digital. (s.f.). *Punto, recta y plano*.
<https://www.youtube.com/watch?v=Me6VcCLZXj4&t=216s>.
- Mongge, (s.f.). *Cuadrado equivalente a un rectángulo*.
<https://www.mongge.com/es/ejercicios/948>
- Navarro, M. (s. f). *Construcciones con regla y compás*.
https://www.um.es/documents/118351/1884002/TFG_NAVARRO+AG%C3%9CERA_Construcciones+con+regla+y+comp%C3%A1s.pdf/bd1c1d55-642c-47ce-812a-93758769fcfd
- Navas, A. (2022). *La cuadratura del triángulo*.
Images des Mathématiques. <https://images.math.cnrs.fr/La-cuadratura-del-triangulo.html?lang=es>
- Ocampo, R. (2021). *Circunferencia de los 9 puntos*.
<https://blog.nekomath.com/geometria-moderna-i-circunferencia-de-los-nueve-puntos/>
- Ocampo, R. (2021). *Geometría Moderna I*.
<https://blog.nekomath.com/geometria-moderna-i-teorema-de-varignon/>
- Ocampo-Arellano. (s.f.). *Geometría Moderna I: Teoremas de Varignon y Van Aubel*. <https://blog.nekomath.com/geometria-moderna-i-teorema-de-varignon/>
- Orihuela, J. (s.f.) *Relaciones métricas. Cuzcan*.
- Pacioli, L. (1509). *La divina proporción*.
(Traductor Resta, R.). Titivillus
- Paolera, P. D. (s.f.). *La ilusión de Kanizsa en gatos domésticos*.
<https://paolera.wordpress.com/2021/05/12/la-ilusion-de-kanizsa-en-gatos-domesticos/>

- Pereira, S. (2014). *Circunferencia de Apolonio y Teorema* [Video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=noA4DnRZbDA>
- Pérez, A. (2021). *Mecanismo de yugo escoces*. http://www.mecapedia.uji.es/pages/mecanismo_de_yugo_escoces.html
- Portal académico CCH. (s.f.). *Rectángulo áureo/espiral*. <https://e1.portalacademico.cch.unam.mx/alumno/matematicas2/unidad1/ecuacionescuadraticas/rectanguloaureo>
- Prepa8.unam.mx. (s.f.). *Teorema de Thales*. http://prepa8.unam.mx/academia/colegios/matematicas/paginacolmate/applets/matematicas_V/Applets_Geogebra/tales.html
- Profesorenlinea. (2015). *Círculo de Apolonio o Circunferencia de Apolonio*. https://www.profesorenlinea.cl/geometria/Circulo_Apolonio.html
- Quora. (2023). *¿Cómo logró Tales de Mileto medir la altura de la piramide de Giza? ¿Cómo logró Tales de Mileto medir la altura de la piramide de Giza? - Quora*
- Ruiz, A. (1997). *Otros modelos geométricos: El otro modelo de Poincaré*. https://www.centroedumatematica.com/arui/libros/No%20euclidianas/Capitulo_07/Cap_07_03.htm
- Ruiz, A. (1997b). *Otros modelos geométricos: Dentro de un disco*. https://www.centroedumatematica.com/arui/libros/No%20euclidianas/Capitulo_07/Cap_07_03.htm
- Ruiz, A. (1997c). *Desarrollos Posteriores*. https://www.centroedumatematica.com/arui/libros/No%20euclidianas/Capitulo_05/Cap_05_01.htm
- Ruiz, A. (1997d). *Dentro de un disco*. https://www.centroedumatematica.com/arui/libros/No%20euclidianas/Capitulo_07/Cap_07_02.htm
- Sastry, K. R. S. (2002). *Brahmagupta Quadrilaterals*. <https://forumgeom.fau.edu/FG2002volume2/FG200221.pdf>
- Standen Math. (2022). *La mejor manera de resolver una ecuación cuadrática* [Video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=GFO6FCbSCyo>
- Stewart, I. (2018). *Mentes maravillosas. Crítica*.
- Studylib. (s.f.). *La divina proporción y el pentagrama pitagórico*.

<https://studylib.es/doc/5337308/la-divina-proporci%C3%B3n-y-el-pentagrama-pitag%C3%B3rico>

Trueba, M. (2009). *Triángulo de Sierpinski*.
<https://docplayer.es/20825005-Triangulo-de-sierpinski.html>

Ubeda, J. (2017). *Teorema de Newton*.
<https://www.geogebra.org/m/up89RfD4>

Unarubiamatematica. (2019). *La belleza del número áureo*.
<http://unarubiamatematica.com/tag/ojo-de-dios>

Vera, R. (2023). *50 mejores frases sobre triángulo*.
<https://expandetumente.com/50-mejores-frases-sobre-triangulo/>

Wikipedia. (2019). *Ilusión de Sander*.
https://es.wikipedia.org/wiki/Ilusi%C3%B3n_de_Sander

Wikipedia. (2019b). *Círculo de Ford*.
https://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%ADrculo_de_Ford

Wikipedia. (2020). *Triángulo medial*.
https://es.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A1ngulo_medial

Wikipedia. (2022). *Triángulo sagrado egipcio*.
https://es.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A1ngulo_sagrado_egipcio

Wikipedia. (2022b). *Cuadriláteros cíclicos*.
https://es.wikipedia.org/wiki/Cuadril%C3%A1tero_c%C3%ADclico

Wikipedia. (2023a). *Teorema de Thales*.
https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Tales

Wikipedia. (2023b). *Triángulo de Kanizsa*.
https://es.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A1ngulo_de_Kanizsa

Wikipedia. (2023c). *Mecanismo de Peaucellier-Lipkin*.
https://es.wikipedia.org/wiki/Mecanismo_de_Peaucellier-Lipkin

Wikipedia. (s.f.). *Triángulo de Pascal*.
https://es.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A1ngulo_de_Pascal#Construcci%C3%B3n

Wikipedia. (s.f.a). *Número áureo*.
https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_%C3%A1ureo

Wikipedia. (s.f.b). *Teorema de Pitágoras*.
https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Pit%C3%A1goras

Wikipedia. (s.f.c). *Teorema de Anne*.

https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Anne#:~:text=El%20teorema%20de%20Anne%2C%20llamado,dentro%20de%20un%20cuadri

Wikipedia. (s.f.d). *Teorema de Varignon*.

https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Varignon

Wikipedia. (s.f.e). *Terna Pitagórica*.

https://es.wikipedia.org/wiki/Terna_pitag%C3%B3rica

LISTA DE FIGURAS



Figura 1. Euclides.....	15
Figura 2. Representación de punto, segmento, recta y plano.....	18
Figura 3. Curvatura de rayos luminosos.....	19
Figura 4. Regiones no acotadas de un plano por intersección de rectas.....	20
Figura 5. Número de regiones no acotadas por intersección de rectas.....	21
Figura 6. Número de puntos por intersección de rectas.....	22
Figura 7. Recta de Cantor-Dedekind.....	23
Figura 8. Intervalos de números reales.....	25
Figura 9. Construcción del punto medio de un segmento.....	26
Figura 10. Descomposición de un número real.....	27
Figura 11. Propiedad conmutativa de adición de números reales positivos.....	27
Figura 12. Propiedad conmutativa de adición de números reales.....	27
Figura 13. Ángulos con regla y compás.....	29
Figura 14. Leyes de reflexión de la luz.....	33
Figura 15. Perpendiculares de Michelson Morley.....	34
Figura 16. Paralelas de Eratóstenes.....	35
Figura 17. Demostración del congruencia de ángulos alternos internos en rectas paralelas.....	36

Figura 18. Galileo Galilei.....	39
Figura 19. Cuerda con 12 nudos a distancias iguales, cuyos extremos están unidos.....	42
Figura 20. Triángulo sagrado egipcio.....	42
Figura 21. Recta de Euler.....	45
Figura 22. Triángulo infinitesimal.....	45
Figura 23. Vagón con rayo luminoso.....	46
Figura 24. Triángulo de la relatividad.....	47
Figura 25. Triángulo imposible de Penrose-Reutersvärd (a).....	49
Figura 26. Triángulo imposible de Penrose-Reutersvärd (b).....	49
Figura 27. Triángulos de Sierpinski.....	60
Figura 28. Triángulos en Ingeniería Civil.....	63
Figura 29. Triángulos de Morley (a).....	64
Figura 30. Triángulos de Morley (b).....	65
Figura 31. Triángulo de Napoleón.....	66
Figura 32. Triángulos de Pascal.....	67
Figura 33. Teorema de Thales.....	68
Figura 34. Triángulo de Viviani.....	69
Figura 35. Demostración Triángulo de Viviani.....	69
Figura 36. Triángulo de Kanizsa.....	61
Figura 37. Polígono.....	65
Figura 38. Teorema de Marlen.....	68
Figura 39. Teorema de Arquímedes.....	68
Figura 40. Teorema de Faure.....	69
Figura 41. Teorema de Chadu.....	70
Figura 42. Cuadrado de Kanizsa.....	71
Figura 43. Cuadrado de Ehrenstein.....	72
Figura 44. Paralelogramo de Sander.....	72
Figura 45. Polígono en la suma de vectores (a).....	43
Figura 46. Polígono en la suma de vectores (b).....	43
Figura 47. Sucesión de polígonos regulares.....	74
Figura 48. Cuadrilátero de Varignon.....	76
Figura 49. Los cuadrados de Van Aubel.....	77
Figura 50. Los cuadriláteros de Sacheri.....	78
Figura 51. Hexagrama Místico de Pascal.....	79
Figura 52. Recta de Newton.....	80
Figura 53. Teorema de Ptolomeo.....	81
Figura 54. Teorema de Brahmagupta.....	83

Figura 55. Blaise Pascal.....	85
Figura 56. Algunos elementos de una circunferencia.....	86
Figura 57. Rombo generador de una circunferencia.....	88
Figura 58. Generatrices de una semicircunferencia.....	89
Figura 59. Más Generatrices de una semicircunferencia.....	91
Figura 60. Círculo de Apolonio.....	91
Figura 61. Circunferencia de Feuerbach.....	93
Figura 62. Disco de Poincaré (a).....	95
Figura 63. Disco de Poincaré (b).....	95
Figura 64. Disco de Beltrame-Klein.....	96
Figura 65. Circunferencias de Riemann.....	97
Figura 66. Círculo de Johnson.....	97
Figura 67. Círculos de Ford.....	98
Figura 68. Círculo Trigonométrico.....	99
Figura 69. Disco de Newton.....	100
Figura 70. Sistema Planetario Ficticio.....	101
Figura 71. Transformación del Movimiento Rectilíneo a Circular.....	102
Figura 72. Mecanismo de Peaucellier-Pekin.....	103
Figura 73. Mecanismo de Yugo Escocés.....	103
Figura 74. Demócrito de Abdera.....	107
Figura 75. Congruencia de Segmentos.....	108
Figura 76. Congruencia de ángulos.....	109
Figura 77. Congruencia de triángulo (a).....	109
Figura 78. Congruencia de triángulos.....	110
Figura 79. Doblando el círculo.....	111
Figura 80. Doblando el cuadrado.....	112
Figura 81. Doblando el hexágono regular.....	113
Figura 82. Dividiendo el cuadrado.....	113
Figura 83. Dividiendo el paralelogramo.....	114
Figura 84. Dividiendo el triángulo (a).....	115
Figura 85. Capa del motociclista.....	115
Figura 86. Reciclaje del octágono regular.....	117
Figura 87. Reciclaje del hexágono regular (a).....	117
Figura 88. Reciclaje del hexágono regular (b).....	118
Figura 89. Teorema de Thales.....	123
Figura 90. Paralelas de Thales de Mileto.....	123
Figura 91. Media proporcional.....	124

Figura 92. Cuerdas que se cortan en el interior de una circunferencia.....	125
Figura 93. Tangente y secante.....	126
Figura 94. Teorema de la bisectriz.....	126
Figura 95. Semejanza de dos cuadrados.....	127
Figura 96. Lupa simple (a).....	128
Figura 97. Lupa simple (b).....	128
Figura 98. Pantógrafo infinito (a).....	129
Figura 99. Pantógrafo infinito (b).....	130
Figura 100. La proporción divina (a).....	132
Figura 101. La proporción divina (b).....	132
Figura 102. División de un segmento en media y extrema razón.....	134
Figura 103. Rectángulo áureo.....	135
Figura 104. El ojo de Dios.....	136
Figura 105. Decágono regular (a).....	135
Figura 106. Decágono regular (b).....	138
Figura 107. Pentágono regular (a).....	139
Figura 108. Pentágono regular (b).....	139
Figura 109. La taza de oro.....	141
Figura 110. Triángulo de Kepler.....	142
Figura 111. Teorema de Kepler (a).....	143
Figura 112. Teorema de Kepler (b).....	144
Figura 113. Johannes Kepler.....	147
Figura 114. Metamorfosis del triángulo (a).....	148
Figura 115. Metamorfosis del triángulo (b).....	149
Figura 116. Metamorfosis de un paralelogramo (a).....	150
Figura 117. Metamorfosis de un paralelogramo (b).....	150
Figura 118. Metamorfosis de un rectángulo (a).....	151
Figura 119. Metamorfosis de un rectángulo (b).....	151
Figura 120. Metamorfosis de un cuadrilátero.....	152
Figura 121. Teorema de Pitágoras (a).....	152
Figura 122. Teorema de Pitágoras (b).....	153
Figura 123. Teorema de Pitágoras (c).....	154
Figura 124. Teorema de Pitágoras – Demostración de Pappus.....	155
Figura 125. Problema pitagórico.....	156
Figura 126. Paralelogramo elástico.....	157
Figura 127. Paralelogramo de Varignon (a).....	158
Figura 128. Paralelogramo de Varignon (b).....	158

Figura 129. Lúnulas de Hipócrates.....	159
Figura 130. Teorema de Anne.....	160
Figura 131. Cuerdas que se cortan en el interior de una circunferencia.....	161
Figura 132. Construcción de un uadrado equivalente a un rectángulo.....	162
Figura 133. Cuadratura del triángulo equilátero.....	163
Figura 134. Rectángulo ensamblado con fichas del tangram.....	164
Figura 135. Stomachión de Arquímedes.....	165



Editorial

Universidad de **Nariño**

Fecha de Publicación: 2024
San Juan de Pasto-Nariño-Colombia



Lecciones de Geometría Elemental, es un libro de texto diseñado como material de apoyo para el curso de Geometría Euclidiana, dirigido a estudiantes del Programa de Licenciatura en Matemáticas y Programa de Física.

El objetivo de este libro, es ampliar los horizontes de los estudiantes, abordando temas que no pueden ser desarrollados en las clases presenciales debido a limitaciones de tiempo; incluye una amplia gama de temas, desde los conceptos básicos de geometría, como plano, puntos, rectas, segmentos y rayos, hasta temas más avanzados, como triángulos especiales, polígonos, circunferencia, congruencias, semejanzas y áreas.

Es un recurso importante para lectores que busca ampliar los horizontes de aprendizaje en geometría euclidiana. Con su enfoque riguroso pero accesible, ejemplos ilustrativos y ejercicios prácticos, el libro proporciona a los estudiantes una sólida base en geometría y les permite explorar conceptos y aplicaciones geométricas interesantes y desafiantes, promoviendo el desarrollo de habilidades de resolución de problemas, pensamiento crítico y razonamiento geométrico.



Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1964

ai

Universidad de Nariño
ACREDITADA EN ALTA CALIDAD
RESOLUCIÓN MEN 000022 - ENERO 11 DE 2023

120

Universidad de Nariño

Editorial
Universidad de Nariño