



Universidad de Nariño
Facultad de ciencias exactas y naturales
Departamento de física

FORMULACIÓN DE HAMILTON-JACOBI PARA TEORÍAS GAUGE TOPOLOGICAS

TRABAJO DE GRADO

Para optar por el título profesional de

Físico:

Christian Martínez Benavides

Universidad de Nariño

Universidad de Nariño
Facultad de ciencias exactas y naturales
Departamento de física

Formulación de Hamilton-Jacobi para teorías gauge topológicas

Christian Martínez Benavides

TRABAJO DE GRADO

Director:

Dr. Germán Enrique Ramos Zambrano
Ph.D. en física teórica

San Juan de Pasto, Colombia
17 de Octubre del 2023

©2023 - Christian Martínez Benavides

«Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores»

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo
de la Universidad de Nariño

Todos los derechos reservados.

Nota de Aceptación

Dr. Germán Enrique Ramos Zambrano

Director

Dr. Juan Carlos Salazar Montenegro

Jurado

Dr. Yithsbe Giraldo Usuga

Jurado

San Juan de Pasto, 17 de Octubre del 2023

Agradecimientos

Agradezco de corazón a todas las personas que generosamente han cedido de su tiempo para permitirme dedicarlo a mis estudios. Su apoyo ha sido invaluable y demuestra un genuino deseo por verme progresar. También quiero expresar mi gratitud a mi compañero de estudio, Cristian Muñoz, cuya colaboración fue fundamental en este camino.

Sin lugar a dudas, el agradecimiento más profundo es para mi amada madre, quien ha sido un pilar fundamental en mi corta vida. Su apoyo incondicional ha sido el motor que me impulsó a llegar hasta este punto. Cada logro alcanzado es también suyo, pues ha estado a mi lado en cada momento.

Este logro no solo es mío, sino de todas las personas que me brindaron su aliento, comprensión y apoyo durante este proceso. A cada uno de ustedes, les debo una parte de mi éxito y les agradezco de todo corazón.

Con gratitud infinita, me dispongo a enfrentar nuevos horizontes, sabiendo que su apoyo siempre será mi ancla en el camino del progreso y la realización personal.

*A la memoria de mi amado padre, quien me enseñó a luchar
por mis sueños y a perseverar en los momentos más difíciles.
Aunque tu ausencia duele, tu amor y recuerdos son mi fortaleza.
Te extraño, querido padre.*

*«Se hacen las cosas
bien o no se hacen»*

*Sergio Martínez Leon
(1962-2021)*

Resumen

Las teorías gauge abelianas de Chern-Simons (CS) y Maxwell-Chern-Simons (MCS) son estudiadas en el presente trabajo. El método de Hamilton-Jacobi con la formulación de Lagrangianos equivalentes de Carathéodory es empleado para su análisis. La simetría de gauge local de la teoría se refleja en la presencia de ligaduras que restringen el espacio de fase. Estas ligaduras se interpretan como ecuaciones diferenciales parciales que deben satisfacer condiciones de integrabilidad. Estas condiciones dan origen a un nuevo conjunto de ecuaciones diferenciales parciales, que junto con las iniciales, constituyen el conjunto completo de ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi (EDPHJ). La solución de las EDPHJ implica determinar sus ecuaciones características, lo que permite establecer los grados de libertad de la teoría. A partir de los campos fundamentales, se deducen las ecuaciones de campo que son consistentes con otras formulaciones.

Palabras Claves: Teorías gauge abelianas, Método de Hamilton-Jacobi, Simetría de gauge local.

Abstract

In this paper there is the study of the abelian gauge theories of Chern-Simons and Maxwell-Chern Simons. The Hamilton-Jacobi method was used for the analysis.

In this theory, the local gauge symmetry of the theory is presented as the existence of constraints that restrict the phase space, these constraints are interpreted as partial differential equations that must comply with the integrability conditions. With these conditions there is the rise of a new set of partial differential equations and along with the initial conditions completes the set of Hamilton-Jacobi's partial differential equations (HJPDE's). Solving the HJPDE's involves determining their characteristic equations which establishes the degrees of freedom of the theory. From the fundamental fields, the field equations consistent with other formulations are deduced.

Palabras Claves: Abelian gauge theories, Hamilton-Jacobi method, local gauge symmetry.

Contenido

1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del Problema	2
1.2. Objetivos	3
2. Método de Hamilton-Jacobi	4
2.1. Lagrangianas equivalentes	4
2.2. Ecuación de Hamilton-Jacobi	6
2.2.1. Sistemas regulares	7
2.2.2. Sistemas singulares	8
3. Teoría de Chern-Simons Pura	12
3.1. Invarianza de la densidad Lagrangiana	13
3.2. Formulación Lagrangiana	13
3.3. Formulación Hamiltoniana	14
4. Aplicación del método de HJ a la teoría de CS	16
4.1. Ecuación de Hamilton-Jacobi	16
4.2. Condiciones de integrabilidad	17
4.3. Ecuaciones características	21
5. Gauge de radiación para la teoría de CS	24
5.1. Independencia lineal de las EDP	24
5.1.1. Identificación de la EDP linealmente independiente	25
5.1.2. Paréntesis generalizados	26
5.2. Gauge de radiación	28
5.2.1. Paréntesis generalizados en el gauge de radiación	29
6. Teoría de Maxwell-Chern-Simons	30
6.1. Formalismo Lagrangiano	31
6.1.1. Ecuaciones de Maxwell-Chern-Simons	31
6.1.2. Término masivo debido a contribuciones topológicas	32
6.2. Formulación Hamiltoniana	33
7. Aplicación del método de HJ a la teoría de MCS	34
7.1. Ecuación de Hamilton-Jacobi	34
7.2. Condiciones de integrabilidad	35
7.3. Ecuaciones características	36
8. Gauge de Coulomb para la teoría de MCS	39
8.1. Gauge de Coulomb	39
8.1.1. Paréntesis generalizados en el gauge de Coulomb	40



9. Resultados	42
9.1. Teoría de Chern-Simons Pura	42
9.2. Teoría de Maxwell-Chern-Simons	44
10. Conclusiones	47
Apéndices	48
A. Teoría de Chern-Simons Pura	48
A.I. Demostración ecuación de equivalencia 3.1.2	48
A.II. Demostración del Hamiltoniano canónico CS	49
B. Aplicación del método de HJ a la teoría de CS	50
B.I. Cálculo de los PP presentes en la tabla 4.2.1	50
B.II. Cálculo de los PP presentes en la tabla 4.3.1	52
C. Teoría de Maxwell-Chern-Simons	54
C.I. Teoría de Maxwell restringida en $(2 + 1)$ dimensiones	54
C.II. Cálculo de la matriz Hessiana	55
C.III. Cálculo de las ecuaciones de campo para la teoría MCS	56
C.IV. Cálculo de las leyes de Maxwell-Chern-Simons	56
C.V. Demostración de la ecuación de Campo para el vector $\tilde{F}^\alpha(x)$	57
C.VI. Cálculo del Hamiltoniano MCS	58
D. Aplicación del método de HJ a la teoría de MCS	61
D.I. Cálculo de los PP de la tabla 7.2.1	61
D.II. Cálculo de los PP de la tabla 7.3.1	63

Índice de figuras

2.1.1.Trayectoria dinámica de una curva de comparación en el espacio de configuración.	5
2.2.1.Interpretación geométrica de la relación (2.2.1).	6

Índice de tablas

4.2.1.Paréntesis de Poisson entre las EDP.	19
4.3.1.PP de las variables dinámicas de la teoría CS.	21
7.2.1.Paréntesis de Poisson entre los vínculos de la teoría MCS.	35
7.3.1.PP de los campos canónicos con el conjunto de EDPHJ en la teoría de MCS.	36

Glosario

Campo: Un campo es una función matemática que asigna un valor a cada punto del espacio-tiempo.

Ecuaciones de Campo: Las ecuaciones de campo son ecuaciones en derivadas parciales que describen cómo cambian los campos en el espacio-tiempo. Estas ecuaciones gobiernan la dinámica de los campos.

Transformaciones gauge locales: Grupo de simetría infinito que depende de un conjunto de r parámetros definidos en el espacio-tiempo. Son transformaciones de algún grado de libertad interno, que no modifican ninguna propiedad de las observables físicas.

Ligaduras: Las ligaduras son ecuaciones que imponen restricciones entre los campos fundamentales de un sistema físico. Estas relaciones reducen el número de grados de libertad del sistema y pueden surgir de limitaciones geométricas o físicas que deben ser satisfechas por el sistema durante su evolución.

Sistema singular: En un sistema singular existen relaciones entre los campos fundamentales de un sistema físico, por lo que las ecuaciones de movimiento no proporcionan una solución única para todas las variables de campo y se requiere un tratamiento especial para describir adecuadamente la dinámica del sistema.

Matriz Hessiana: La Matriz Hessiana es una matriz cuadrada de segundas derivadas parciales de una función escalar respecto a las variables de campo. Es utilizada para analizar si una teoría es singular o no.

Condiciones gauge: Son restricciones arbitrarias que se imponen al sistema para eliminar la independencia lineal de las ligaduras de la teoría.

EDP: Siglas de ecuaciones diferenciales parciales, las cuales son expresiones matemáticas que poseen una función desconocida de más de una variable independiente y una o más de sus derivadas parciales.

EDPHJ: Siglas de ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi y son un conjunto de ecuaciones EDP que permiten encontrar la dinámica de sistemas regulares y singulares.

Paréntesis de Poisson (PP): Los paréntesis de Poisson en mecánica analítica corresponde a operadores diferenciales que actúa como pieza fundamental en la definición de la evolución temporal de un sistema dinámico en la formulación Hamiltoniana.

Paréntesis de Dirac (PD): Los paréntesis de Dirac son una generalización de los PP, esto se debe a que los PD permiten definir la evolución temporal de una variable dinámica en sistemas singulares, donde los campos fundamentales de la teoría no son completamente independientes debido a la presencia de ligaduras.



Paréntesis Generalizados (PG): Los paréntesis generalizados definidos en la formulación de Hamilton-Jacobi, representan una extensión de los paréntesis de Poisson aplicados a sistemas singulares y presentan una equivalencia con los paréntesis de Dirac.

PG en el gauge de Radiación (PGR): Son paréntesis generalizado que poseen toda la información de las EDP de una teoría singular estudiada en el gauge de Radiación.

PG en el gauge de Coulomb (PGC): Son paréntesis generalizado que poseen toda la información de las EDP de una teoría singular estudiada en el gauge de Coulomb.

Capítulo 1

Introducción

Existen diversos sistemas en los que la dinámica se desarrolla sólo en 2 dimensiones espaciales, ejemplos de estos sistemas se ven reflejados en estudios de superconductividad, materia condensada, efecto Hall cuántico, entre otros y han permitido darle una gran importancia a las teorías que se desarrollan en (2+1) dimensiones, es decir 2 dimensiones espaciales y una temporal [1–4], tal es el caso que su importancia se compara con las teorías desarrolladas en un espacio tiempo ordinario. Las teorías gauge que estudian a las partículas fundamentales en 2 dimensiones espaciales presentan diversas diferencias con las teorías en 3 dimensiones, de tal forma que si se desarrolla la teoría electromagnética para este espacio bidimensional será una teoría completamente diferente a la realizada por Maxwell. Esta teoría recibe el nombre de teoría de Chern-Simons (CS) y es invariante bajo transformaciones de Lorentz además de presentar una simetría de gauge local.

La Lagrangiana de la teoría CS puede ser considerada como un elemento de acople, que al unirlo con la teoría de Maxwell se forma una nueva teoría gauge denominada teoría de Maxwell-Chern-Simons (MCS), de la cual se destaca el surgimiento de un término topológico de masa que está asociado a los fotones [5,6]. Por otro lado, las teorías gauge se describen mediante densidades Lagrangianas singulares, con un determinante de la Matriz Hessiana asociada a la Lagrangiana igual a cero. Esto genera ecuaciones que relacionan las variables del espacio, reduciendo los grados de libertad del sistema y requiriendo un método efectivo para trabajar con ellos.

En este trabajo,¹ se estudió la aplicación del método de Hamilton-Jacobi (HJ) con la formulación de Lagrangianas equivalentes de Carathéodory a las teorías de campos de CS y MCS. La organización del trabajo es la siguiente:

En el Capítulo 2 se desarrolló el formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas que cumplen la condición Hessiana. Luego, se estudió las implicaciones del rompimiento de esta condición y cómo esto determina la existencia de ligaduras en la definición de momentos canónicos conjugados las cuales se las interpreta como ecuaciones diferenciales parciales (EDP). La estructura de estas restricciones se analizaron mediante las condiciones de integrabilidad, lo que permitió determinar si el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi (EDPHJ) está en involución.

En el Capítulo 3 se estudia la invarianza gauge de la teoría de CS y se desarrolla el estudio canónico de la misma. En el Capítulo 4 se aplica el método de HJ a la teoría de CS para estudiar el surgimiento de las relaciones entre las variables fundamentales de la teoría conformando así el conjunto de EDPHJ, después se estudia la involución de dicho conjunto y se calculan las ecuaciones características para dar solución a la dinámica del sistema.

En el Capítulo 5 se aborda la teoría de CS en el gauge de radiación, lo que constituye un análisis adicional a los objetivos principales de este trabajo. Este enfoque adicional se centró en la evaluación de la independencia lineal de las EDP de la teoría. Como la teoría CS posee EDP linealmente dependientes se construyen unos paréntesis generalizados evaluados a tiempos iguales (PG) que poseen la información de estas, finalmente se introducen las condiciones del gauge de radiación y se construyen los paréntesis generalizados evaluados a tiempos iguales en este gauge (PGR)

¹Quien esté interesado en revisar el documento L^AT_EX de este trabajo, lo puede hacer mediante el siguiente enlace: <https://www.overleaf.com/read/ddyqjznrjzwn>.



que involucran todas las EDP de la teoría revelando similitudes notables con los paréntesis de Dirac construidos en el gauge de radiación.

En el Capítulo 6, se analiza la teoría de MCS desde su formulación Lagrangiana. Se explora el origen del término topológico de masa asociado a los fotones, representados por el campo fundamental $A_\mu(t, \mathbf{x})$. En el Capítulo 7 se realiza un estudio equivalente al expuesto en el Capítulo 4, pero con un enfoque específico en la teoría de MCS.

En el Capítulo 8 se aborda un desarrollo adicional aplicando las restricciones que impone el gauge de Coulomb a la teoría de MCS, las cuales reducen los grados de libertad del sistema y permiten fijar los parámetros indeterminados que surgen en la teoría. Además, se construyen los paréntesis generalizados evaluados a tiempos iguales en el gauge de Coulomb (PGC) para definir la dinámica del sistema, encontrando similitudes con los paréntesis de Dirac.

Finalmente en los Capítulos 9 y 10 se presenta los resultados mas relevantes del trabajo y las conclusiones, respectivamente.

1.1. Planteamiento del Problema

El presente trabajo tiene como objetivo el estudio de teorías gauge topológicas mediante la formulación de Hamilton-Jacobi, centrándose en las teorías abelianas de Chern-Simons y Maxwell-Chern-Simons en (2+1) dimensiones. Estas teorías presentan densidades Lagrangianas singulares, lo que da lugar a la existencia de ecuaciones que restringen los grados de libertad del sistema.

Mediante el método de Hamilton-Jacobi con la formulación de las Lagrangianas equivalentes de Carathéodory se pretende determinar todas EDP que surgen en las teorías de CS y MCS, analizar las condiciones bajo las cuales estas EDP se encuentren en involución e identificar la arbitrariedad en las ecuaciones de campo generada por las mismas.

Este estudio se centrará en el enfoque clásico presentando un método alternativo a la formulación de Dirac, su relevancia radica en su contribución al campo de la física teórica ya que contribuirá al entendimiento de las teorías gauge topológicas en (2+1) dimensiones, siendo una herramienta útil para analizar los sistemas singulares y comprender su dinámica en el contexto de la teoría clásica de campos.



1.2. Objetivos

General

Realizar un estudio de teorías gauge topológicas mediante la formulación de Hamilton Jacobi.

Específicos

- Analizar el método de Hamilton Jacobi para sistemas singulares.
- Estudiar la teoría de Chern-Simons Pura en (2+1) dimensiones aplicando el modelo de Hamilton Jacobi.
- Aplicar el método de Hamilton Jacobi a la teoría de Maxwell-Chern-Simons.

Capítulo 2

Método de Hamilton-Jacobi

Schrödinger introduce la mecánica ondulatoria en cuatro artículos publicados en 1926 [7, 8], sentando las bases teóricas de la mecánica cuántica junto con Heisenberg y Dirac, utilizando la analogía óptico-mecánica de Hamilton. La analogía óptico-mecánica se basa en el hecho de que ambas disciplinas, óptica y mecánica, son derivadas de principios variacionales.

El formalismo de Hamilton-Jacobi (HJ) se basa en la conexión entre tres disciplinas matemáticas: *la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)*, *la teoría de ecuaciones diferenciales parciales (EDP)* y *el cálculo variacional*. Esta conexión se basa en una interpretación geométrica sólida conocida como «cuadro completo de Carathéodory». Aunque en la mecánica clásica tradicional la ecuación de HJ se relaciona con el formalismo Hamiltoniano a través de transformaciones canónicas, en el «cuadro completo» se demuestra que el análisis de HJ es independiente de dicho enfoque, constituyendo una teoría completa, autónoma y con resultados muy generales [7, 9].

En este capítulo, se explorará el enfoque de las Lagrangianas equivalentes de Carathéodory, que proporciona una ruta alternativa para obtener la formulación de Hamilton-Jacobi sin depender del formalismo hamiltoniano; así mismo, se analizará el método de Cauchy o de las ecuaciones características, que se utilizan para resolver EDP.

2.1. Lagrangianas equivalentes

En mecánica analítica se puede realizar el estudio dinámico de un sistema mediante el uso de su correspondiente Lagrangiana, por cuanto esta función contiene información relevante acerca de la energía cinética y potencial asociadas al sistema, permitiendo un análisis completo de su comportamiento dinámico.

Para determinar la dinámica del sistema físico, se emplea el principio de mínima acción, también conocido como principio de Hamilton, a partir del cual se derivan las ecuaciones de Euler-Lagrange. Sin embargo, existe una familia de Lagrangianas que generan las mismas ecuaciones de campo [7], es decir, dos Lagrangianas $L(t, q^i, \dot{q}^i)$ y $\bar{L}(t, q^i, \dot{q}^i)$ son equivalentes siempre que se cumpla la siguiente condición¹ [9]:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t \partial \dot{q}^i} - \dot{q}^j \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q^i \partial q^j} - \dot{q}^j \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} = 0, \quad (2.1.1)$$

donde $\Lambda(t, q^i, \dot{q}^i) = L(t, q^i, \dot{q}^i) - \bar{L}(t, q^i, \dot{q}^i)$ debe cumplir con la condición (2.1.1), además, de satisfacer que cada elemento de la anterior relación sea nulo, de esta manera se asegura que las Lagrangianas $L(t, q^j, \dot{q}^j)$ y $\bar{L}(t, q^j, \dot{q}^j)$

¹En algunas ecuaciones, la dependencia de las funciones no se expresará explícitamente con el fin de evitar sobrecargar las ecuaciones, además cabe destacar que se utiliza el convenio de suma de Albert Einstein cuando hay dos índices contraídos en un mismo término.

2.1. LAGRANGIANAS EQUIVALENTES

sean equivalentes. Para determinar la forma funcional de $\Lambda(t, q^i, \dot{q}^i)$ se parte del último término de la ecuación (2.1.1), tal que

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^i} = 0,$$

se propone que $\Lambda(t, q^i, \dot{q}^i)$ sea de la forma [9]:

$$\Lambda = \dot{q}^i A_i(q^j, t) + B(q^j, t).$$

Al sustituir $\Lambda(t, q^i, \dot{q}^i)$ en (2.1.1) resulta

$$\left(\frac{\partial A_j}{\partial q^i} - \frac{\partial A_i}{\partial q^j} \right) \dot{q}^j + \left(\frac{\partial B}{\partial q^i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) = 0.$$

Por la independencia lineal de cada paréntesis, se establece que estos deben ser igual a cero. Por lo tanto, debe existir una función $S(t, q^i)$ que relacione a $A_i(q^i, t)$ y $B(q^i, t)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\partial S}{\partial q^i}, \\ B &= \frac{\partial S}{\partial t}. \end{aligned}$$

A partir de lo anterior se reescribe $\Lambda(t, q^i, \dot{q}^i)$ como

$$\Lambda(t, q^i, \dot{q}^i) = \dot{q}^i \frac{\partial S}{\partial q^i} + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{dS}{dt}, \quad (2.1.2)$$

de forma que las Lagrangianas equivalentes deben satisfacer que

$$\bar{L} = L - \frac{dS}{dt}. \quad (2.1.3)$$

Es necesario ahora realizar un análisis variacional para determinar una curva que extremize tanto la acción definida por la Lagrangiana original como para la Lagrangiana modificada [9], en consecuencia se utiliza el principio de mínima acción y se calcula la acción de la Lagrangiana modificada $\bar{A}_{[\bar{C}]}$ alrededor de una curva de comparación \bar{C} que interseca con la curva original C en los puntos t_1 y t_2 (Ver fig. 2.1.1) [7]:

$$\bar{A}_{[\bar{C}]} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[L - \frac{dS}{dt} \right].$$

Si la curva C representa el máximo de la acción y por lo tanto la trayectoria natural del sistema, implica que al comparar esta curva con cualquier otra curva \bar{C} en su vecindad, matemáticamente se debe cumplir que [7]

$$|A_{[C]}| > |\bar{A}_{[\bar{C}]}|.$$

La condición asegura que la curva C sea un extremo de la acción, lo cual es ventajoso para sistemas no conservativos con acción dependiente del tiempo de manera explícita [7]. El principio de acción estacionaria no requiere condiciones adicionales y solo exige calcular la integral entre dos puntos fijos de la trayectoria [9]. De modo que la variación $\delta q^i(t_1) = 0 = \delta q^i(t_2)$ y

$$\delta \bar{A} = \delta A - [\delta S(t_2, q^i) - \delta S(t_1, q^i)],$$

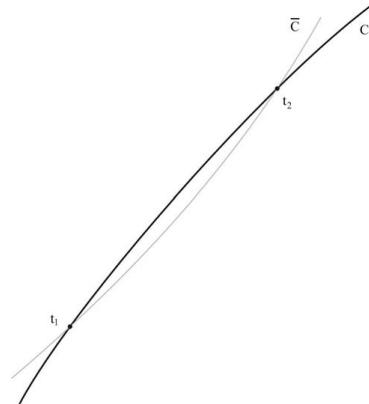


Figura 2.1.1: Trayectoria dinámica de una curva de comparación en el espacio de configuración.

pero considerando que $\delta S = \frac{\partial S}{\partial q^i} \delta q^i$, al evaluar esta variación en los tiempos t_1 y t_2 que son puntos fijos, la variación se anula, por lo que resulta

$$\delta \bar{A} = \delta A.$$

Con esto se demuestra que la curva que extremiza la acción de la Lagrangiana original es la misma que extremiza la Lagrangiana modificada, lo que implica que ambas Lagrangianas son equivalentes.

A través de la función S , se construye una Lagrangiana $\bar{L}(t, q^i, \dot{q}^i)$ que al evaluarla en una curva $\dot{q}^i = \varphi^i(t, q^i)$ sea nula, mientras que para otro valor de \dot{q}^i , la Lagrangiana $\bar{L}(t, q^i, \dot{q}^i)$ sea positiva [7, 9]. Por lo tanto, el problema se reduce a determinar una función S que cumpla

$$\bar{L}(t, q^i, \varphi^i) = 0, \quad (2.1.4a)$$

$$\bar{L}(t, q^i, \dot{q}^i) > 0. \quad (2.1.4b)$$

2.2. Ecuación de Hamilton-Jacobi

Al calcular la derivada respecto a $\dot{q}^i \equiv \varphi^i$ a la Lagrangiana \bar{L} , considerando la condición (2.1.4) y recordando que $S(t, q^i)$ no depende de las velocidades generalizadas, se puede determinar que [9]

$$\frac{\partial S}{\partial q^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \equiv p_i. \quad (2.2.1)$$

Al expresar el lado izquierdo de la igualdad como el gradiente de $S(t, q^i)$, se obtiene $\nabla S(t, q^i) = p_i$, esta igualdad implica que los momentos canónicos son ortogonales a la familia de superficies descritas por $S(t, q^i) = \sigma_i$ en el espacio de configuración.² Lo anterior se ilustra en la siguiente imagen [7]:

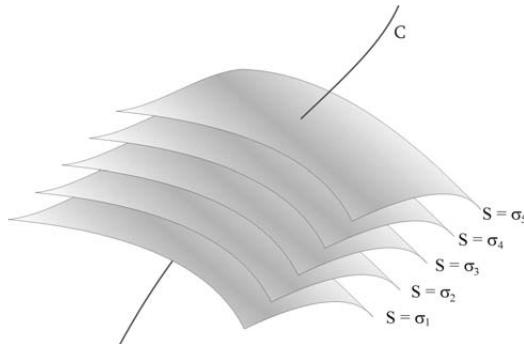


Figura 2.2.1: Interpretación geométrica de la relación (2.2.1).

Por otro lado, al reemplazar las ecuaciones (2.1.2) y (2.2.1) en (2.1.3), se obtiene la ecuación de Hamilton-Jacobi en términos de la Lagrangiana. Esta ecuación se expresa como

$$\dot{q}^i p_i - L + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (2.2.2)$$

Sin embargo, la ecuación de Hamilton-Jacobi se formula específicamente en términos del Hamiltoniano que debe estar bien definido en el espacio de fase; para lograrlo, es necesario determinar si la Lagrangiana que describe el

²Esta interpretación guarda similitud con el vector de Poynting $S(t, q^i)$ en la teoría ondulatoria de la luz, el cual siempre es ortogonal al frente de onda [7].

2.2. ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI

sistema es singular o regular, ya que esto determinará si es posible o no despejar las velocidades generalizadas. Por esta razón, se introduce la matriz Hessiana:

$$W_{ij} \equiv \frac{\delta^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}. \quad (2.2.3)$$

La regularidad o singularidad del sistema puede ser determinada mediante el análisis de la matriz Hessiana. Al considerar la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0,$$

y trabajando con un sistema conservativo,³ esta ecuación puede ser reescrita de manera análoga a la segunda ley de Newton [9, 10]:

$$W_{ij} \ddot{q}^j = F_i(q^k, \dot{q}^k),$$

siendo W_{ij} la matriz Hessiana y $F_i = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} \dot{q}^j$ una equivalente de la fuerza en el espacio de configuración. Para obtener todas las aceleraciones, es necesario que la matriz Hessiana sea invertible, para ello es conveniente diagonalizar esta matriz, lo cual es posible debido a la simetría que posee, de manera que cada elemento de la diagonal representa un autovalor de la matriz, por lo tanto, si existen autovalores nulos, implicará que la matriz no es invertible, reduciendo el rango de la matriz y dificultando la solución de la ecuación diferencial parcial [11].

2.2.1. Sistemas regulares

Para sistemas regulares, se satisface la condición Hessiana, es decir, $\det W \neq 0$, lo cual implica que todas las velocidades generalizadas pueden expresarse como función de los momentos canónicos $\dot{q}^i = \eta^i(t, q^i, p_i)$. Por lo tanto, se puede identificar una transformación de Legendre en los dos primeros términos de (2.2.2) [7, 10], lo que define la función Hamiltoniana $H_0(t, q^i, p_i)$ como

$$H_0(t, q^i, p_i) \equiv \eta^i p_i - L,$$

bajo la definición de la Hamiltoniana y utilizando la relación (2.2.1), la ecuación de Hamilton-Jacobi (2.2.2) puede ser reescrita así

$$\frac{\partial}{\partial t} S(t, q^i) + H_0 \left(t, q^i, \frac{\partial S}{\partial q^i} \right) = 0. \quad (2.2.4)$$

La ecuación (2.2.4) corresponde a la ecuación diferencial parcial de Hamilton-Jacobi (EDPHJ).

Se ha considerado la existencia de una función $S(t, q^i)$ que no depende de las velocidades generalizadas, con el propósito de lograr que la acción asociada a $\bar{L}(t, q^i, \dot{q}^i)$ sea estacionaria y satisfaga la condición $\bar{L}(t, q^i, \varphi^i) = 0$. De esta manera, la función $S(t, q^i)$ que cumple con estas condiciones se convierte en la solución de la ecuación diferencial parcial de Hamilton-Jacobi (2.2.4).

Ecuaciones características

Utilizando el método de las ecuaciones características de Cauchy, es posible obtener las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) que describen la dinámica del sistema a partir de $S(t, q^i)$ [9, 10]. Mediante este método, se puede demostrar que para sistemas regulares con n grados de libertad, existen $2n + 1$ EDO de primer orden [7, 9, 10]:

$$dq^j = \frac{\partial H_0}{\partial p_j} dt, \quad (2.2.5a)$$

$$dp_i = -\frac{\partial H_0}{\partial q^i} dt, \quad (2.2.5b)$$

$$dS = \left(\frac{\partial H_0}{\partial p_i} p_i - H_0 \right) dt. \quad (2.2.5c)$$

³es decir, que la Lagrangiana no tiene una dependencia explícita del tiempo



Es posible recuperar el formalismo Hamiltoniano a partir de las dos primeras ecuaciones de (2.2.5). Al calcular el diferencial total de una función dinámica $F(t, q^i, p_i)$ definida en el espacio de fase, se tiene

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i.$$

Al derivar respecto a dt y emplear las relaciones (2.2.5a) y (2.2.5b), se puede expresar la evolución temporal de la variable dinámica en términos de los paréntesis de Poisson (PP) [7, 10]:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H_0\}.$$

2.2.2. Sistemas singulares

En mecánica analítica, un sistema singular es aquél que no satisface la condición Hessiana, es decir que $\det W = 0$. Esto implica que el sistema no puede determinar de manera única todas las coordenadas generalizadas a través de las ecuaciones de movimiento. En otras palabras, existen restricciones entre las coordenadas generalizadas interpretadas como EDP, lo que limita los grados de libertad del sistema.

Debido a que la ecuación de Hamilton-Jacobi requiere que todos los momentos canónicos sean invertibles y las EDP presentes en el sistema impiden expresar todas las velocidades generalizadas en términos de esos momentos, se hace necesario aplicar un tratamiento especial para manipular estos sistemas singulares.

Sistema de ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi

Sea W una matriz singular de rango m y dimensión n , donde $m \leq n$. Según la definición (2.2.3), se destaca que la matriz Hessiana es simétrica y por lo tanto diagonalizable, por ello, existen $k = n - m$ autovalores nulos.

Los autovalores nulos indican la existencia de k momentos canónicos que no pueden expresarse en términos de las velocidades generalizadas. Estos momentos canónicos se denotarán entonces

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^z}; \quad \{x, y, z\} = \{1, \dots, k\}.$$

Las relaciones anteriores imponen restricciones en los grados de libertad del sistema, lo cual se manifiesta como EDP. Si se denota a $H_z \equiv -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^z}$, estas EDP pueden expresarse como [11]

$$\phi_z \equiv p_z + H_z(q^i, \eta^a) = 0.$$

En cuanto a los momentos canónicos conjugados asociados a la parte invertible de la matriz Hessiana, se pueden expresar en términos de las velocidades generalizadas. Por lo tanto, estos momentos canónicos se calcularán mediante la siguiente expresión [11]:

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \rightarrow \dot{q}^a = \eta^a(q^i, p_b),$$

donde $\{a, b\} = \{1, \dots, m\}$. Con el propósito de determinar la ecuación de Hamilton-Jacobi, se propone que la Hamiltoniana del sistema esté dada por [11]

$$H_0(q^i, p_a) \equiv p_a \eta^a(q^i, p_b) + p_z \dot{q}^z - L. \quad (2.2.6)$$

Cabe destacar que, a pesar de la existencia de velocidades generalizadas no invertibles \dot{q}^z , el hamiltoniano no depende de ellas en un espacio en donde los vínculos sean respetados, es decir, cuando se cumple que $\phi_y \equiv 0$. Para demostrar esto, se calculará la derivada de la Hamiltoniana respecto a estas velocidades [11]:

$$\frac{\partial H_0}{\partial \dot{q}^y} = \phi_y \equiv 0,$$

2.2. ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI

por lo tanto, bajo la definición de la Hamiltoniana (2.2.6), la ecuación de Hamilton-Jacobi (2.2.2) puede ser expresada como

$$\phi_0 \equiv \frac{\partial S}{\partial t} + H_0(q^i, \eta^a) = 0. \quad (2.2.7)$$

Esta ecuación se la considera como una ligadura del sistema. Por lo tanto, si se define p_0 como el momento canónico conjugado al tiempo, con $p_0 \equiv \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial q^0}$, es posible combinar este resultado con ϕ_z de la siguiente manera [10, 11]:

$$\phi_\alpha \equiv p_\alpha + H_\alpha(q^i, p_a) = 0; \quad \{\alpha, \beta\} = \{0, 1, \dots, k\}.$$

Las ecuaciones antes descritas se conoce como el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi y se denota como EDPHJ.

Ecuaciones características

Cada sistema de EDP está asociado a un conjunto de EDO que describe su dinámica. Al utilizar el método de las ecuaciones características de Cauchy es posible determinar este conjunto de EDO. En el caso de un sistema singular, el número de autovalores nulos de la matriz Hessiana reducen los grados de libertad del sistema. Por lo tanto, es necesario definir un espacio de fase reducido con $2m$ coordenadas dependientes, denotadas como (q^a, p_a) . Las variables q^z , al ser indeterminadas, tienen una importancia similar a la del tiempo y junto con éste, parametrizan el espacio de fase reducido $[q^a(q^z, t), p_a(q^z, t)]$. Por ende, las $2m + 1$ EDO de primer orden se expresan de la siguiente manera⁴ [9–11]:

$$dq^a = \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_a} dq^\alpha, \quad (2.2.8a)$$

$$dp_a = -\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} dq^\alpha, \quad (2.2.8b)$$

$$dS = \left(p_a \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_a} - H_\alpha \right) dq^\alpha. \quad (2.2.8c)$$

Al utilizar las relaciones (2.2.8), es posible reescribir la evolución de una variable dinámica $F(t, q^a, p_a)$ definida en el espacio de fase reducido. Al calcular el diferencial total de $F(t, q^a, p_a)$, se obtiene

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial q^a} dq^a + \frac{\partial F}{\partial p_a} dp_a.$$

Al sustituir las ecuaciones (2.2.8a) y (2.2.8b), se determina que el diferencial fundamental estará dado por [11]

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \{F, \phi_\alpha\} dq^\alpha. \quad (2.2.9)$$

Ahora bien, al integrar la tercera ecuación característica (2.2.8c), se puede interpretar esta relación como una acción canónica con q^α variables independientes. Esto conduce a la expresión [11]:

$$S = \int [p_a dq^a - H_\alpha dq^\alpha]. \quad (2.2.10)$$

En el caso de que el sistema no posea ninguna ligadura, entonces este se caracteriza por $\alpha = 0$, $dq^\alpha = dt$ y $\phi_\alpha = H_0$. Las ecuaciones (2.2.9) y (2.2.10) se reducen a las ecuaciones de acción y de evolución de una variable dinámica que se obtuvieron para un sistema regular, respectivamente. Esto lleva a la conclusión de que los sistemas regulares son un caso particular de los sistemas singulares [11].

⁴En este trabajo, se citarán los resultados de los cálculos obtenidos mediante el método de las ecuaciones características de Cauchy para determinar las ecuaciones (2.2.8), sin incluir la demostración. Se recomienda consultar las siguientes referencias [9–11], donde se presentan los cálculos correspondientes.

Condiciones de integrabilidad

Hasta el momento se ha pasado por alto el hecho de que el conjunto de EDPHJ sea completo y por tanto el sistema sea soluble y sus ecuaciones características integrables. En el caso de que el conjunto de EDPHJ no sea completo, es necesario identificar qué condiciones debe satisfacer el sistema para que al menos exista una solución integrable y completa [10, 11].

Las condiciones que el sistema debe cumplir para que el conjunto de EDPHJ sea completo, se aborda mediante un análisis geométrico. Sin embargo, este trabajo se limitará a citar los resultados derivados de este enfoque.⁵ Por consiguiente, se define un conjunto de operadores base \hat{X}_α que forman un grupo continuo y satisfacen la siguiente relación:

$$[\hat{X}_\alpha, \hat{X}_\beta](F) = C_{\alpha\beta}^\gamma \hat{X}_\gamma(F), \quad (2.2.11)$$

donde $C_{\alpha\beta}^\gamma$ es conocida como la constante de estructura del grupo formado por los operadores \hat{X}_α . Por otro lado, $[\hat{X}_\alpha, \hat{X}_\beta]$ representa los corchetes de Lie, los cuales se definen como [10, 11]

$$[\hat{X}_\alpha, \hat{X}_\beta](F) = \hat{X}_\alpha\{\hat{X}_\beta(F)\} - \hat{X}_\beta\{\hat{X}_\alpha(F)\}.$$

La ecuación (2.2.11) se conoce como la condición de integrabilidad de Frobenius, la cual establece que cualquier corchete de Lie que no pueda ser expresado como una combinación lineal de las bases \hat{X}_α , debe ser añadido al conjunto de operadores base. Una vez que se ha ampliado el conjunto de operadores, es necesario calcular nuevamente todos los corchetes de Lie hasta que todos los operadores resultantes del cálculo satisfagan la ecuación (2.2.11), logrando así el cierre del álgebra de Lie [10, 12].

El operador base \hat{X}_α se relaciona con el conjunto de EDPHJ a través de la siguiente expresión [11]:

$$\hat{X}_\alpha F(q^a, p^a) = \{F, \phi_\alpha\}.$$

Mediante esta relación entre los operadores base, el conjunto de EDPHJ y utilizando la identidad de Jacobi para PP:

$$\{\{A, B\}, C\} + \{\{C, A\}, B\} + \{\{B, C\}, A\} = 0,$$

es posible demostrar que el conjunto de EDPHJ debe cumplir con la siguiente condición de integrabilidad de Frobenius [10, 11]:

$$\{\phi_\alpha, \phi_\beta\} = C_{\alpha\beta}^\gamma \phi_\gamma. \quad (2.2.12)$$

Ahora, dado que el conjunto de EDPHJ debe ser invariante, la evolución de cada EDP debe ser nula. Por lo tanto, su evolución se puede expresar utilizando el diferencial fundamental de la siguiente manera [10, 11]:

$$d\phi_\alpha = \{\phi_\alpha, \phi_\beta\} dq^\beta = C_{\alpha\beta}^\gamma \phi_\gamma dq^\beta = 0. \quad (2.2.13)$$

Donde se asume la validez de $\phi_\gamma = 0$. Es necesario que se cumpla la condición $d\phi_\alpha = 0$, para garantizar que el conjunto de EDPHJ se mantenga inalterado a lo largo de la trayectoria dinámica del sistema. Esto asegura que el conjunto de EDPHJ es completo, esté en involución y que sus ecuaciones características sean integrables [10]. Sin embargo, en la mayoría de los sistemas físicos, el conjunto de EDPHJ calculado a partir de la definición de los momentos canónicos conjugados no satisface las condiciones (2.2.12) y (2.2.13). Como resultado, el sistema no está en involución y las ecuaciones características del conjunto de EDPHJ no son integrables. Por lo tanto, es necesario calcular la condición de Frobenius (2.2.12) para el conjunto de EDPHJ, lo que da lugar a nuevas EDP que deben ser agregadas al conjunto de EDPHJ. Este proceso debe repetirse hasta que el sistema sea cerrado.

A las nuevas EDP se les debe asociar una nueva variable independiente τ , lo cual implica una expansión del espacio de parámetros independientes de la teoría, esto debe reflejarse en la definición del diferencial fundamental de la siguiente manera:

$$dF(q^a, p^a) = \{F, \phi_\alpha\} d\tau^\alpha, \quad (2.2.14)$$

⁵El análisis respectivo se puede encontrar en las siguientes referencias [9, 11].

2.2. ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI

aquí, τ^α representa todos los parámetros independientes arbitrarios de la teoría que están asociados a cada EDPHJ, es decir, si el conjunto de EDPHJ se compone de $1 + P$ EDP, entonces

$$\alpha = \{0, 1, \dots, P\}.$$

Paréntesis generalizados

La ecuación (2.2.14) muestra que la evolución de una variable dinámica en el espacio de fase es indeterminada, por la dependencia de los parámetros arbitrarios τ^P asociados al conjunto de EDPHJ. Por lo tanto, es de interés expresar la evolución de dicha variable únicamente en función del tiempo $t \equiv \tau^0$, para esto, se calcula la evolución de ϕ^P utilizando la ecuación (2.2.14) [9, 13]:

$$d\phi_P = \{\phi_P, \phi_\alpha\} d\tau^\alpha,$$

expandiendo el índice griego y considerando la condición de integrabilidad (2.2.13), la expresión anterior se puede escribir como

$$d\phi_P = \{\phi_P, \phi_0\} dt + \{\phi_P, \phi_H\} d\tau^H = 0.$$

Al definir una matriz antisimétrica $\Phi_{PH} \equiv \{\phi_P, \phi_H\}$ construida a partir de los paréntesis de Poisson entre las EDP y siempre y cuando esta sea invertible, se pueden relacionar las variables independientes del sistema entre sí, en este caso, la relación anterior se puede expresar de la siguiente manera:

$$d\tau^H = -(\Phi^{-1})^{HP} \{\phi_P, \phi_0\} dt.$$

Por lo tanto, al reemplazar los parámetros arbitrarios $d\tau^H$ en el diferencial fundamental (2.2.14), se obtiene

$$\begin{aligned} dF(q^a, p^a) &= \{F, \phi_0\} dt + \{F, \phi_H\} d\tau^H \\ &= \underbrace{[\{F, \phi_0\} - \{F, \phi_H\}(\Phi^{-1})^{HP} \{\phi_P, \phi_0\}]}_{\{F, \phi_0\}^\star} dt, \end{aligned}$$

donde se define a los Paréntesis generalizados (PG) entre dos variables dinámicas $F(q^a, p^a)$ y $G(q^a, p^a)$ como [13]

$$\{F, G\}^\star \equiv \{F, G\} - \{F, \phi_H\}(\Phi^{-1})^{HP} \{\phi_P, G\}.$$

De esta manera, al introducir los PG, todos los parámetros arbitrarios a excepción del tiempo t , se eliminan. Por ello, la evolución de una variable dinámica $F(q^a, p^a)$ definida en el espacio de fase se expresa como [13]

$$dF(q^a, p^a) = \{F, \phi_0\}^\star dt.$$

Es importante destacar que la condición de integrabilidad en términos de los PG sigue siendo válida [9, 13], es decir, $\{\phi_\alpha, \phi_0\}^\star = 0$.

Capítulo 3

Teoría de Chern-Simons Pura

La teoría de CS es una teoría de acople que en conjunto con otras teorías de campos añade un término topológico de masa a sus campos fundamentales, la característica principal del término de acople es que es invariante gauge lo que permite mantener todas las simetrías al acoplarla con la teoría de Maxwell en el espacio topológico de $(2+1)$ dimensiones, la teoría de CS fue introducida por primera vez por Shiing-Shen Chern y James Harris Simons y ha demostrado ser de gran importancia en diversas áreas de la física, como la teoría de campos cuánticos y la teoría de la materia condensada [1, 4].

La teoría de CS se caracteriza por tener una Lagrangiana singular, que depende del campo gauge y sus derivadas espacio-temporales en $(2+1)$ dimensiones [5], esta singularidad conduce a una serie de propiedades notables, como la aparición de relaciones entre los campos fundamentales de la teoría [6, 14].

En este capítulo se realiza el estudio canónico de la teoría, donde se determina la ecuación de campo y se define el espacio de fase de la teoría,¹ por lo tanto, es apropiado comenzar con la Lagrangiana que describe la teoría de Chern-Simons pura, la cual se expresa así²

$$L_{CS} = \int d^2x \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} [\partial_\alpha A_\beta(x)] A_\gamma(x); \quad \{\alpha, \beta, \gamma\} \equiv \{0, 1, 2\}, \quad (3.0.1)$$

donde $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ corresponde al tensor de Levi-Civita, $A_\mu(x)$ es el campo gauge de la teoría de CS y la densidad Lagrangiana se define como

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} [\partial_\alpha A_\beta(x)] A_\gamma(x). \quad (3.0.2)$$

Teniendo en cuenta la definición del tensor electromagnético dada por la ecuación (C.I.2) dada en el apéndice §C.I, se puede usar la antisimetría del tensor de Levi-Civita para reescribir la densidad Lagrangiana en términos de $F_{\alpha\beta}(x)$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{k}{8\pi} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} F_{\alpha\beta}(x) A_\gamma(x).$$

¹Para una mejor comprensión del capítulo, se recomienda al lector consultar el apéndice §C.I.

²Cabe destacar que se maneja la siguiente notación $A(t, \mathbf{x}) \equiv A(x)$ y $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

3.1. Invarianza de la densidad Lagrangiana

Surge naturalmente la duda de que como el tensor electromagnético es invariante bajo una transformación de gauge local de la forma³ $A'_\alpha(x) = A_\alpha(x) + \frac{1}{e}\partial_\alpha\Lambda(x)$ [6], entonces ¿la Lagrangiana de Chern-Simons pura también es una invariante bajo una transformación de gauge local?

Para determinar si (3.0.2) es invariante bajo esta transformación, es necesario calcular la densidad Lagrangiana asociada al campo primado $A'_\alpha(x)$ [15], que se denota como \mathcal{L}'_{CS} . La densidad Lagrangiana \mathcal{L}'_{CS} resultante es

$$\mathcal{L}'_{CS} = \mathcal{L}_{CS} + \frac{k}{8\pi e} \{ \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\gamma [F_{\alpha\beta}(x)\Lambda(x)] - 2\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\gamma \partial_\beta A_\beta(x)\Lambda(x) \},$$

que por la antisimetría del tensor de Levi-Civita y la simetría de las derivadas, el último término es cero, obteniendo

$$\mathcal{L}'_{CS} = \mathcal{L}_{CS} + \frac{k}{8\pi e} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\gamma [F_{\alpha\beta}(x)\Lambda(x)]. \quad (3.1.1)$$

Dado que la diferencia entre las dos Lagrangianas es una derivada de una función $[\partial_\gamma G(x)]$, se puede demostrar mediante el principio de mínima acción que las dos Lagrangianas conducen a las mismas ecuaciones de campo y por lo tanto, son equivalentes.⁴ En consecuencia, se establece que

$$\mathcal{L}_{CS} \equiv \mathcal{L}'_{CS}. \quad (3.1.2)$$

La invarianza bajo transformaciones de gauge locales dada por la anterior ecuación, implica que la Lagrangiana de la teoría CS es singular, para demostrarlo se procede a determinar la matriz Hessiana asociada a la teoría, la cual se define como [6, 16]

$$W_{\mu\nu}(x, y) = \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta[\partial_0 A_\mu(\mathbf{x})] \delta[\partial_0 A_\nu(\mathbf{y})]} \equiv \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 A_\mu) \delta(\partial_0 A_\nu)} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.1.3)$$

Es conveniente tener presente los siguientes resultados:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{CS}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\mu\nu\gamma} A_\gamma,$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_{CS}}{\partial(\partial_\mu A_\nu) \partial(\partial_\alpha A_\beta)} = 0.$$

Por la relación anterior, es claro que la matriz Hessiana es nula $W_{\mu\nu}(x, y) = 0$, por lo que su determinante es cero. Como resultado, existen relaciones entre las variables del sistema, reduciendo así los grados de libertad de la teoría, lo que hace que la Lagrangiana de la teoría CS sea singular [6, 16].

3.2. Formulación Lagrangiana

Por medio de la formulación Lagrangiana se determinan las ecuaciones de movimiento de la teoría en cuestión. Para la teoría de campos de Chern-Simons, la ecuación de movimiento describe cómo cambian en el tiempo los campos cuánticos asociados a partículas que exhiben estadísticas fraccionarias y se conocen como anyones, los cuales son relevantes para el estudio de fenómenos como la superconductividad y la teoría cuántica de la información [1–3].

Para obtener las ecuaciones de campo, se parte de la definición de la acción [6, 16]:

$$\mathcal{A}(A_\gamma(x), \partial_\alpha A_\beta(x)) = \int \mathcal{L}(A_\gamma(x), \partial_\alpha A_\beta(x)) d^3x,$$

³donde e es la carga del electrón y $\Lambda(x)$ es un campo escalar arbitrario

⁴Este resultado se muestra en el apéndice §A.I.

la cual es un parámetro que indica la evolución espacio-temporal del campo gauge. En el caso de la teoría de CS, la acción asociada es

$$\mathcal{A}(A_\gamma(x), \partial_\alpha A_\beta(x)) = \int d^3x \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} [\partial_\alpha A_\beta(x)] A_\gamma(x),$$

dado que existen muchas trayectorias posibles definidas por una acción, se elige la trayectoria que extremiza la acción, es decir, aquella para la cual la variación de la acción es cero:

$$\delta \mathcal{A}(A_\gamma(x), \partial_\alpha A_\beta(x)) = \int d^3x \delta \mathcal{L}_{CS}(A_\gamma(x), \partial_\alpha A_\beta(x)) = 0.$$

El principio de Hamilton o mínima acción, establece que al extremizar la acción se obtienen las ecuaciones de movimiento del sistema, conocidas como ecuaciones de Euler-Lagrange. En el caso de la teoría de campos de CS, las ecuaciones de Euler-Lagrange se expresan de la siguiente manera [6, 16]:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \partial_\beta \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta A_\alpha)} \right] = 0,$$

al calcular las derivadas correspondientes y remplazándolas en la ecuación de Euler-Lagrange, se determina la ecuación de campo que sigue la teoría de CS pura:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma}(x) = 0, \quad (3.2.1)$$

cabe destacar que la invarianza gauge en la teoría CS se ve reflejada en la aparición del tensor de campo electromagnético en las ecuaciones de campo, además, el tensor de campo sólo posee primeras derivadas temporales sobre el campo gauge $A_\mu(x)$, **quitando el carácter dinámico a la teoría de CS**, resaltando que la importancia de esta teoría radica en su estudio como una teoría de acople a otras teorías particulares.

3.3. Formulación Hamiltoniana

Para hacer el estudio canónico de la teoría CS es necesario determinar los momentos canónicos conjugados asociados a los campos $A_\nu(x)$, definidos como [6, 16]

$$\Pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}_{CS}}{\partial [\partial_0 A_\mu(x)]} = \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0\mu\nu} A_\nu(x).$$

Al analizar la componente temporal del momento canónico, se puede determinar una relación entre los campos del espacio de fase, es decir

$$\Pi^0(x) = \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{00\nu} A_\nu(x) = 0, \quad (3.3.1)$$

y se la denota como

$$\phi_1^0(x) = \Pi^0(x) = 0. \quad (3.3.2)$$

Al desarrollar la parte espacial del momento canónico $\Pi^\beta(x)$, se determina su i -ésima componente:

$$\Pi^i(x) \equiv \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0i\nu} A_\nu(x),$$

debido al carácter antisimétrico del tensor de Levi-Civita, el único valor no nulo se da cuando $\nu = j$:

$$\Pi^i(x) = \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} A_j(x), \quad (3.3.3)$$

la expresión anterior muestra que el momento canónico no depende de las derivadas temporales del campo gauge, esto relaciona directamente las variables del espacio de fase imponiendo una restricción sobre los grados de libertad del sistema y se la denotada por

$$\phi_2^i(x) \equiv -\Pi^i(x) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} A_j(x) = 0. \quad (3.3.4)$$

3.3. FORMULACIÓN HAMILTONIANA

Al disponer de los momentos canónicos, es posible realizar una transformación de Legendre a la Lagrangiana de la teoría de CS para obtener el Hamiltoniano canónico correspondiente [6, 16]:

$$H_{CS}^0 = \int d^2x \mathcal{H}_{CS}^0 = \int d^2x [\Pi^\mu \partial_0 A_\mu - \mathcal{L}_{CS}],$$

donde \mathcal{H}_{CS}^0 es la densidad del Hamiltoniano canónico y \mathcal{L}_{CS} es la densidad Lagrangiana. Sustituyendo los momentos canónicos obtenidos anteriormente se determina que el Hamiltoniano es⁵

$$H_{CS}^0 = -\frac{k}{2\pi} \int d^2x \varepsilon^{0ij} (\partial_i A_j) A_0. \quad (3.3.5)$$

⁵La demostración del Hamiltoniano se encuentra en el apéndice §A.II.

Capítulo 4

Aplicación del método de Hamilton-Jacobi a la teoría de Chern-Simons Pura

La teoría de CS se caracteriza por tener una simetría gauge local, que genera la existencia de relaciones entre los campos fundamentales de la teoría y reduce los grados de libertad del sistema. Esta reducción de grados de libertad da lugar a arbitrariedades en la evolución de los campos fundamentales, lo que plantea un desafío en su tratamiento.

Mediante la formulación de Hamilton-Jacobi se determinan todas las restricciones presentes en la teoría, las cuales se trabajan como EDP que junto con la ecuación de Hamilton-Jacobi conforman un conjunto completo de ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi y también permite identificar la evolución de la teoría por medio de las ecuaciones características.

4.1. Ecuación de Hamilton-Jacobi

La ecuación de Hamilton-Jacobi asociada al Hamiltoniano (3.3.5) es [9]

$$P_0(x) + H_{CS}^0(x) = 0,$$

donde $H_{CS}^0(x)$ es el Hamiltoniano de la teoría de CS calculado en la ecuación (3.3.5), P_0 es el momento canónico conjugado a la coordenada $x^0 = t$ y se define como $P_0 \equiv \frac{\partial S}{\partial t}$ [11]. Además, por conveniencia se define este momento canónico en términos de una densidad de momento:

$$P_0(x) = \int d^2x p_0(x).$$

De esta forma, la ecuación de Hamilton-Jacobi puede expresarse en términos de la densidad del Hamiltoniano canónico y la del momento asociado al tiempo, siendo [10]

$$P_0(x) + H_{CS}^0(x) = \int d^2x \underbrace{[p_0(x) + \mathcal{H}_{CS}^0(x)]}_{\phi_0^0(x)} = 0,$$

esta expresión se la identifica como una EDP¹ y se denota mediante $\phi_0^0(x)$ [10, 11]:

$$\phi_0^0(x) \equiv p_0(x) + \mathcal{H}_{CS}^0(x) = 0. \quad (4.1.1)$$

En particular, las ecuaciones (3.3.2), (3.3.4) y (4.1.1) constituyen el sistema de EDPHJ.

¹Se recomienda revisar antes el capítulo §2.

4.2. CONDICIONES DE INTEGRABILIDAD

La ecuación (4.1.1) está relacionada con la variable temporal, ya que P_0 es el momento canónico conjugado del tiempo y además $\phi_0^0(x)$ contiene al Hamiltoniano canónico que está relacionado con la dinámica del sistema. Las ecuaciones (3.3.2) y (3.3.4) se deben relacionar con una variable arbitraria que dependa del espacio-tiempo, las cuales se denotan como $\tau_{01}(x)$ y $\tau_{i2}(x)$ respectivamente, donde el primer índice se refiere a la componente vectorial del campo arbitrario y el segundo índice hace referencia a la EDPHJ asociada a este, de tal forma que las variables independientes que describen la evolución del sistema físico son $[t, \tau_{01}(x), \tau_{i2}(x)]$.

En teoría de campos cada punto en el espacio-tiempo introduce una nueva ligadura en razón de que se trabaja con variables continuas, como resultado, se definen los paréntesis de Poisson entre dos variables dinámicas $F(A(x), \Pi(x)) \equiv F(x)$ y $G(A(x), \Pi(x)) \equiv G(x)$ evaluados en tiempos iguales como [6, 16]

$$\{F(x), G(y)\}_{x_0=y_0} \equiv \int d^2z \left[\frac{\delta F(x)}{\delta A_\mu(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \Pi^\mu(z)} - \frac{\delta G(y)}{\delta A_\mu(z)} \frac{\delta F(x)}{\delta \Pi^\mu(z)} \right]. \quad (4.1.2)$$

A partir de los PP, se puede definir la evolución espacio-temporal de una variable dinámica arbitraria asociada al sistema. Es decir, la evolución espacio-temporal de $F(x)$ está dada por [9, 11]

$$dF(x) = \int d^2y [\{F(x), \phi_0^0(y)\} dt + \{F(x), \phi_0^0(y)\} d\tau_{01}(y) + \{F(x), \phi_2^i(y)\} d\tau_{i2}(y)]. \quad (4.1.3)$$

De acuerdo con la ecuación (4.1.2), es posible demostrar que los PP fundamentales corresponden a

$$\begin{aligned} \{A_\mu(x), \Pi^\nu(y)\} &= \delta_\mu^\nu \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \{A_\mu(x), A^\nu(x)\} &= 0, \\ \{\Pi_\mu(y), \Pi^\nu(y)\} &= 0, \end{aligned}$$

por medio de los cuales es posible calcular la evolución de las variables dinámicas y de los campos fundamentales.

4.2. Condiciones de integrabilidad

Las condiciones de integrabilidad implican que las EDPHJ sean constantes en todo el espacio-tiempo. Con el fin de garantizar que el conjunto de EDPHJ sea completo y por consiguiente sus ecuaciones características integrables, dicho conjunto debe cumplir la condición de Frobenius introducida en la sección §2.2.2, es decir, las EDP deben satisfacer las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} d\phi_1^0(x) &= 0, \\ d\phi_2^i(x) &= 0. \end{aligned}$$

Calculando la evolución espacio-temporal de cada EDPHJ mediante el diferencial fundamental (4.1.3), se obtiene

- La evolución de $\phi_1^0(x)$ es

$$\begin{aligned} d\phi_1^0(x) &= \int d^2y [\{\phi_1^0(x), \phi_0^0(y)\} dt + \underbrace{\{\phi_1^0(x), \phi_1^0(y)\}}_0 d\tau_{01}(y) + \underbrace{\{\phi_1^0(x), \phi_2^i(y)\}}_0 d\tau_{i2}(y)] \\ &= \int d^2y \left\{ \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} [\partial_i^y A_j(y)] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right\} dt \\ &= \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} dt \int d^2y [\partial_i^y A_j(y)] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} [\partial_i^x A_j(x)] dt = 0. \end{aligned}$$

La condición de integrabilidad de $\phi_1^0(x)$ da lugar a una nueva ecuación diferencial parcial denotada por $\phi_3^0(x)$, la cual debe ser incluida en el conjunto de EDPHJ. Esta ecuación se define como

$$\phi_3^0(x) \equiv \varepsilon^{0ij} \partial_i^x A_j(x). \quad (4.2.1)$$

- La evolución de $\phi_2^i(x)$ es

$$\begin{aligned} d\phi_2^i(x) &= \int d^2y [\{\phi_2^i(x), \phi_0^0(y)\} dt + \underbrace{\{\phi_2^i(x), \phi_1^0(y)\}}_{0} d\tau_{01}(y) + \{\phi_2^i(x), \phi_2^k(y)\} d\tau_{k2}(y)] \\ &= \int d^2y \left\{ \left[\frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ki} A_0(y) \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] dt + \left[\frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ki} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] d\tau_{k2}(y) \right\} \\ &= \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ki} \left[dt \partial_k^x \int d^2y A_0(y) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \int d^2y d\tau_{k2}(y) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] \\ &= \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ik} [dt \partial_k^x A_0(x) + d\tau_{k2}(x)] = 0. \end{aligned}$$

La evolución de $\phi_2^i(x)$ establece una relación entre el tiempo t y el campo arbitrario $\tau_{i2}(x)$, de modo que

$$\varepsilon^{0ik} d\tau_{k2}(x) = -\varepsilon^{0ik} dt \partial_k^x A_0(x),$$

al aplicar a ambos lados de la igualdad ε_{0ij} :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0ij} \varepsilon^{0ik} d\tau_{k2}(x) &= -\varepsilon_{0ij} \varepsilon^{0ik} dt \partial_k^x A_0(x), \\ (\delta_i^i \delta_j^k - \delta_i^k \delta_j^i) d\tau_{k2}(x) &= -(\delta_i^i \delta_j^k - \delta_i^k \delta_j^i) dt \partial_k^x A_0(x), \\ (2-1) \delta_j^k d\tau_{k2}(x) &= -(2-1) \delta_j^k dt \partial_k^x A_0(x), \\ d\tau_{j2}(x) &= -dt \partial_j^x A_0(x). \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

La ecuación (4.2.2) permite establecer la dependencia del parámetro $\tau_{i2}(x)$ respecto al tiempo.

Es necesario calcular la condición de integrabilidad para la nueva EDPHJ (4.2.1). Por lo tanto, se procede a realizar dicho cálculo.

- La evolución de $\phi_3^0(x)$ es

$$\begin{aligned} d\phi_3^0(x) &= \int d^2y [\underbrace{\{\phi_3^0(x), \phi_0^0(y)\}}_0 dt + \underbrace{\{\phi_3^0(x), \phi_1^0(y)\}}_0 d\tau_{01}(y) + \{\phi_3^0(x), \phi_2^k(y)\} d\tau_{k2}(y)] \\ &= \int d^2y [-\varepsilon^{0ij} \partial_i^x \delta_j^k \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})] d\tau_{k2}(y) \\ &= -\varepsilon^{0ik} \partial_i^x \int d^2y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\tau_{k2}(y) \\ &= -\varepsilon^{0ik} \partial_i^x d\tau_{k2}(x), \end{aligned}$$

reemplazando (4.2.2) en la anterior expresión resulta

$$\begin{aligned} d\phi_3^0(x) &= -\varepsilon^{0ik} \partial_i^x [-dt \partial_k^x A_0(x)] = dt \varepsilon^{0ik} \partial_i^x \partial_k^x A_0(x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

la anterior relación establece que la EDP $\phi_3^0(x)$ es constante en el espacio-tiempo, por lo que ya no surgen mas EDPHJ.

Se ha demostrado que para cumplir con la condición de integrabilidad de $\phi_1^0(x)$, es necesario imponer una nueva restricción al sistema, denominada $\phi_3^0(x)$. Esta nueva restricción no amplía el número de EDPHJ, ya que es invariante en el espacio-tiempo. Por otro lado, la condición de integrabilidad para la segunda EDP establece una relación entre

4.2. CONDICIONES DE INTEGRABILIDAD

el campo $\tau_{i2}(x)$ y el tiempo t . Las anteriores condiciones de integrabilidad indican la necesidad de imponer la nueva restricción $\phi_3^0(x)$ para lograr un sistema completo de EDPHJ. Esto implica que el conjunto inicial de variables independientes es incompleto y requiere la introducción de nuevas variables independientes que se relacionen con cada EDP. Por lo tanto, es necesario introducir un nuevo parámetro en la teoría denominado $\tau_{03}(x)$ que dependa del espacio-tiempo. De esta manera, el conjunto de EDP con sus respectivas variables son

$$\phi_0^0(x) \equiv p^0(x) - \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} [\partial_i^x A_j(x)] A_0(x) = 0 \quad \rightarrow t, \quad (4.2.3a)$$

$$\phi_1^0(x) \equiv \Pi^0(x) = 0 \quad \rightarrow \tau_{01}(x), \quad (4.2.3b)$$

$$\phi_2^i(x) \equiv -\Pi^i(x) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} A_j(x) = 0 \quad \rightarrow \tau_{i2}(x), \quad (4.2.3c)$$

$$\phi_3^0(x) \equiv \varepsilon^{0ij} \partial_i^x A_j(x) = 0 \quad \rightarrow \tau_{03}(x). \quad (4.2.3d)$$

Al ampliar el número de parámetros independientes del sistema, es necesario incorporarlos a la definición del diferencial fundamental (4.1.3), el cual gobierna la evolución de las variables dinámicas. De este modo, la evolución espacio-temporal de una variable dinámica $F(x)$ se expresa de la siguiente forma:

$$dF(x) = \int d^2y [\{F(x), \phi_0^0(y)\} dt + \{F(x), \phi_1^0(y)\} d\tau_{01}(y) + \{F(x), \phi_2^i(y)\} d\tau_{i2}(y) + \{F(x), \phi_3^0(y)\} d\tau_{03}],$$

que de forma compacta se lo reescribe como

$$dF(x) = \int d^2y [\{F(x), \phi_0^0(y)\} dt + \{F(x), \phi_P^\nu(y)\} d\tau_{\nu P}(y); P \equiv \{1, 2, 3\}]. \quad (4.2.4)$$

Los PP entre las EDP presentes en la anterior definición se muestran en la siguiente tabla²:

Tabla 4.2.1: Paréntesis de Poisson entre las EDP.

$\{\cdot, \cdot\}$	$\phi_0^0(y)$	$\phi_1^0(y)$	$\phi_2^k(y)$	$\phi_3^0(y)$
$\phi_0^0(x)$	0	$-\frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} [\partial_i^x A_j(x)] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	$\frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ik} A_0(x) \partial_i^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	0
$\phi_1^0(x)$	$\frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} [\partial_i^y A_j(y)] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	0	0	0
$\phi_2^i(x)$	$\frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ki} A_0(y) \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	0	$\frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ki} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	$-\varepsilon^{0ki} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$
$\phi_3^0(x)$	0	0	$-\varepsilon^{0ik} \partial_i^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	0

Bajo la nueva definición de la evolución espacio-temporal se espera que el conjunto de EDPHJ sea involutivo, por lo que se debe corroborar nuevamente la evolución del conjunto de EDPHJ, haciendo uso de la tabla 4.2.1.

La evolución de $\phi_1^0(x)$ viene dada por

$$\begin{aligned} d\phi_1^0(x) &= \int d^2y [\{\phi_1^0(x), \phi_0^0(y)\} dt + \{\phi_1^0(x), \phi_P^\nu(y)\} d\tau_{\nu P}(y)] \\ &= \int d^2y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_i^y A_j(y) dt \\ &= -\frac{k}{2\pi} dt \varepsilon^{0ij} \partial_i^x A_j(x) \\ &= -\frac{k}{2\pi} dt \phi_3^0(x), \end{aligned}$$

este resultado es consistente con la condición de Frobenius para el conjunto de EDPHJ, dado que la evolución de $\phi_1^0(x)$ está directamente relacionada con uno de los elementos de dicho conjunto. A continuación, se desarrolla la

²El cálculo de los PP entre las EDP se lo desarrolla en el apéndice §B.I

evolución de $\phi_2^i(x)$:

$$\begin{aligned}
 d\phi_2^i(x) &= \int d^2y [\{\phi_2^i(x), \phi_0^0(y)\} dt + \{\phi_2^i(x), \phi_P^\nu(y)\} d\tau_{\nu P}(y)] \\
 &= \int d^2y \left\{ \left[\frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ki} \partial_k^x A_0(y) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] dt \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ki} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] d\tau_{k2}(y) + [\varepsilon^{0ki} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})] d\tau_{03}(y) \right\} \\
 &= \varepsilon^{0ki} \left\{ \frac{k}{2\pi} \left[\int d^2y d\tau_{k2}(y) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \partial_k^x \int d^2y A_0(y) dt \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \partial_k^x \int d^2y d\tau_{03}(y) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right\} \\
 &= \varepsilon^{0ki} \left\{ \frac{k}{2\pi} [d\tau_{k2}(x) + \partial_k^x A_0(x) dt] + \partial_k^x d\tau_{03}(x) \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

De la evolución de $\phi_2^i(x)$ se determina una relación entre las variables $[t, \tau_{k2}(x), \tau_{03}(x)]$, a partir de la cual se puede expresar $d\tau_{k2}$ en términos de dt y $d\tau_{03}$ de la siguiente manera:

$$d\tau_{k2}(x) = -\partial_k^x A_0(x) dt - \frac{2\pi}{k} \partial_k^x d\tau_{03}(x). \quad (4.2.5)$$

Por lo tanto, el campo $\tau_{k2}(x)$ ya no se considera como una variable arbitraria, sino como una variable dependiente de los parámetros $[t, \tau_{03}(x)]$. Finalmente, la consistencia de $\phi_3^0(x)$ es

$$\begin{aligned}
 d\phi_3^0(x) &= \int d^2y [\{\phi_3^0(x), \phi_0^0(y)\} dt + \{\phi_3^0(x), \phi_P^\nu(y)\} d\tau_{\nu P}(y)] \\
 &= \int d^2y [-\varepsilon^{0ik} \partial_i^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})] d\tau_{k2}(y) = -\varepsilon^{0ik} \partial_i^x d\tau_{k2}(x) \\
 &= \cancel{\varepsilon^{0ik} \partial_i^x \partial_k^x} \overset{0}{A_0(x) dt} + \cancel{\frac{2\pi}{k} \varepsilon^{0ik} \partial_i^x \partial_k^x} \overset{0}{d\tau_{03}(x)} = 0,
 \end{aligned}$$

al utilizar la antisimetría del tensor de Levi-Civita y la simetría de las derivadas, se demuestra que la evolución de la última EDPHJ es idénticamente cero, por lo tanto, bajo la nueva definición de la evolución espacio-temporal [ec. (4.2.4)], se logra que las EDPHJ sean constantes en el espacio-tiempo.

Como la ecuación (4.2.5) proporciona una reducción en el número de grados de libertad del sistema, quedando restringido a las variables $[t, \tau_{01}(x), \tau_{03}(x)]$, esta reducción se debe reflejar en la evolución de una variable dinámica del sistema, de modo que la ecuación (4.2.4) debe ser reescrita:

$$\begin{aligned}
 dF(x) &= \int d^2y \left\{ [\{F(x), \phi_0^0(y)\} - \{F(x), \phi_2^k(y)\} \partial_k^y A_0(y)] dt \right. \\
 &\quad \left. + [\{F(x), \phi_3^0(y)\} - \frac{2\pi}{k} \{F(x), \phi_2^k(y)\} \partial_k^y] d\tau_{03}(y) \right. \\
 &\quad \left. + \{F(x), \phi_1^0(y)\} d\tau_{01}(y) \right\}.
 \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

4.3. Ecuaciones características

Se procede al cálculo de las ecuaciones características del conjunto de EDPHJ, para ello es necesario determinar los paréntesis de Poisson entre los campos $[A_\mu(x), \Pi^\mu(x)]$ y el conjunto de EDPHJ, los cuales se presentan a continuación³:

Tabla 4.3.1: PP de las variables dinámicas de la teoría CS.

$\{\cdot, \cdot\}$	$\phi_0^0(y)$	$\phi_1^0(y)$	$\phi_2^k(y)$	$\phi_3^0(y)$
$A_0(x)$	0	$\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	0	0
$A_i(x)$	0	0	$-\delta_i^k \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	0
$\Pi^0(x)$	$\frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} [\partial_i^y A_j(y)] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	0	0	0
$\Pi^i(x)$	$-\frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ki} \partial_k^x A_0(y) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	0	$-\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ki} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	$\varepsilon^{0ki} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$

Dado que las ecuaciones (4.2.4) y (4.2.6) son equivalentes, se puede utilizar cualquiera de ellas para calcular la evolución de los campos canónicos.

Por la presencia de EDP en la teoría CS, la dinámica del sistema presenta arbitrariedades debido a la inclusión de los parámetros $\tau_{\mu P}(x)$ asociados al conjunto de EDPHJ, lo anterior se refleja directamente en la evolución espacio-temporal de los campos $A_\mu(x)$ y $\Pi^\mu(x)$. Al calcular la ecuación característica del campo $A_0(x)$ utilizando la definición (4.2.4), se obtiene

se observa que la evolución del campo $A_0(x)$ es indeterminada debido a su dependencia con el parámetro arbitrario $\tau_{01}(x)$. Para calcular la evolución espacio-temporal del campo $A_i(x)$, se aplica la ecuación (4.2.6) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 dA_i(x) &= \int d^2y \left\{ [\{A_i(x), \phi_0^0(y)\} - \{A_i(x), \phi_2^k(y)\} \partial_k^y A_0(y)] dt \right. \\
 &\quad + [\{A_i(x), \phi_3^0(y)\} - \frac{2\pi}{k} \{A_i(x), \phi_2^k(y)\} \partial_k^y] d\tau_{03}(y) \\
 &\quad \left. + \{F(x), \phi_1^0(y)\} d\tau_{01}(y) \right\} \\
 &= \int d^2y \delta_i^k \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) [\partial_k^y A_0(y) dt + \frac{2\pi}{k} \partial_k^y d\tau_{03}(y)] \\
 &= \boxed{\partial_i^x A_0(x) dt + \frac{2\pi}{k} \partial_i^x d\tau_{03}(x)},
 \end{aligned}$$

dado que la evolución del campo $A_i(x)$ está relacionada tanto con el tiempo t como con el parámetro arbitrario $\tau_{03}(x)$, su evolución es indeterminada hasta que se fije dicho parámetro. Por otro lado, utilizando los PP de la tabla 4.3.1 y la ecuación (4.2.4) el diferencial del campo $\Pi^0(x)$ es

$$\begin{aligned}
 d\Pi^0(x) &= \int d^2y [\{\Pi^0(x), \phi_0^0(y)\} dt + \{\Pi^0(x), \phi_{\nu P}^0(y)\} d\tau_{\nu P}(y)] \\
 &= \int d^2y \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} [\partial_i^y A_j(y)] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dt \\
 &= \boxed{\frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} [\partial_i^x A_j(x)] dt},
 \end{aligned}$$

³Los cálculos de los PP entre los campos que definen el espacio de fase con el conjunto de EDPHJ se encuentran en el apéndice §B.II.

como la evolución de $\Pi^0(x)$ depende del campo indeterminado $A_j(x)$, éste también será indeterminado, finalmente calculando la evolución de $\Pi^i(x)$ mediante la ecuación (4.2.6) resulta

$$\begin{aligned}
 d\Pi^i(x) &= \int d^2y \left\{ [\{\Pi^i(x), \phi_0^0(y)\} - \{\Pi^i(x), \phi_2^k(y)\} \partial_k^y A_0(y)] dt \right. \\
 &\quad + [\{\Pi^i(x), \phi_3^0(y)\} - \frac{2\pi}{k} \{\Pi^i(x), \phi_2^k(y)\} \partial_k^y] d\tau_{03}(y) \\
 &\quad \left. + \{F(x), \phi_1^0(y)\} d\tau_{01}(y) \right\} \\
 &= \int d^2y \left\{ \left[-\frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ki} \partial_k^x A_0(y) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ki} \partial_k^y A_0(y) \right] dt + \right. \\
 &\quad \left. \left[\varepsilon^{0ki} \partial_k^x + \frac{1}{2} \varepsilon^{0ki} \partial_k^y \right] d\tau_{03}(y) \right\} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= \boxed{-\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ki} \partial_k^x A_0(x) dt + \frac{3}{2} \varepsilon^{0ki} \partial_k^x d\tau_{03}(x)},
 \end{aligned}$$

nuevamente se observa que la evolución de $\Pi^i(x)$ queda indeterminada debido a la presencia del parámetro $\tau_{03}(x)$ en el último término.

A partir de las ecuaciones características es posible determinar las ecuaciones de campo en el espacio de fase de la teoría de CS, las cuales corresponden a las derivadas temporales de primer orden de los campos y se determinan diferenciando las ecuaciones características respecto al tiempo dt , de esta manera se determina que la evolución temporal de los campos fundamentales toma la siguiente forma:

$$\dot{A}_0(x) = \dot{\tau}_{01}(x), \quad (4.3.1a)$$

$$\dot{A}_i(x) = \partial_i^x A_0(x) + \frac{2\pi}{k} \partial_i^x \dot{\tau}_{03}(x), \quad (4.3.1b)$$

$$\dot{\Pi}^0(x) = \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_i^x A_j(x) = \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} F_{ij}(x), \quad (4.3.1c)$$

$$\dot{\Pi}^i(x) = -\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{i0k} \partial_k^x A_0(x) + \frac{3}{2} \varepsilon^{0ki} \partial_k^x \dot{\tau}_{03}(x), \quad (4.3.1d)$$

donde se maneja la notación $\dot{\tau}(x) \equiv d\tau(x)/dt$. Es posible obtener las ecuaciones de campo en el espacio de configuración a partir de la evolución temporal de los campos $\dot{\Pi}^0(x)$ y $\dot{\Pi}^i(x)$.

Para la componente temporal del momento canónico generalizado se debe tener presente que $\Pi^0(x) = 0$, de manera que la ecuación (4.3.1c) se reduce a

$$\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} F_{ij}(x) = 0, \quad (4.3.2)$$

expresión equivalente a la ecuación de campo (3.2.1) para la componente temporal $\alpha = 0$. De igual forma, para obtener las ecuaciones de campo restantes se deriva respecto al tiempo la ecuación (3.3.3) y se reemplaza $\dot{\Pi}^i(x)$ en la ecuación (4.3.1d), como se observa a continuación:

$$\begin{aligned}
 \frac{k}{4\pi} \underbrace{\varepsilon^{0ik} \partial_0 A_k(x)}_{-\varepsilon^{i0k} \partial_0 A_k(x)} + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{i0k} \partial_k^x A_0(x) &= \frac{3}{2} \varepsilon^{0ki} \partial_k^x \dot{\tau}_{03}(x), \\
 2 \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{i0k} F_{0k} &= -3 \varepsilon^{0ki} \partial_k^x \dot{\tau}_{03}(x), \\
 \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{i0k} F_{0k} + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{ij0} F_{j0} &= -3 \varepsilon^{0ki} \partial_k^x \dot{\tau}_{03}(x),
 \end{aligned}$$

el lado izquierdo de la anterior ecuación corresponde a las ecuaciones de campo (3.2.1) para $\alpha = i$, es decir

$$\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{i\mu\nu} F_{\mu\nu} = -3 \varepsilon^{0ki} \partial_k^x \dot{\tau}_{03}(x), \quad (4.3.3)$$

4.3. ECUACIONES CARACTERÍSTICAS

ahora bien, sumando las ecuaciones (4.3.2) y (4.3.3) se identifica que las ecuaciones de campo en el espacio de configuración no son idénticamente cero:

$$\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma}(x) = -3\varepsilon^{0ki} \partial_k^x \dot{\tau}_{03}(x). \quad (4.3.4)$$

Como consecuencia de que de la dependencia con los parámetros indeterminados en las ecuaciones de campo en el espacio de fase (4.3.1) y de configuración (4.3.4) la dinámica del sistema no es unívoca.

Capítulo 5

Gauge de radiación para la teoría de Chern-Simons Pura

En el anterior capítulo, se logró establecer que la evolución espacio temporal de los campos gauge en la teoría de CS depende de los parámetros arbitrarios $\tau_{01}(x)$ y $\tau_{03}(x)$, por lo que se propone la introducción de condiciones gauge en la teoría de CS, ya que dichas condiciones permiten definir de manera única la evolución de las variables dinámicas y eliminar la arbitrariedad asociada a los parámetros $\tau_{01}(x)$ y $\tau_{03}(x)$.

Las condiciones gauge son restricciones que se imponen al sistema, lo que resulta en una reducción de sus grados de libertad. El número de condiciones gauge a imponer coincide con la cantidad de ligaduras que sean linealmente independientes [6, 16], por tanto, se vuelve esencial identificar esta independencia lineal.

5.1. Independencia lineal de las ecuaciones diferenciales parciales

Con el fin de simplificar los cálculos, se introduce el siguiente cambio de notación para el conjunto completo EDPHJ¹:

$$\theta_0(x) \equiv \phi_0^0(x) = p^0(x) - \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} [\partial_i^x A_j(x)] A_0(x) \quad \rightarrow t, \quad (5.1.1a)$$

$$\theta_1(x) \equiv \phi_1^0(x) = \Pi^0(x) \quad \rightarrow \tau_1(x), \quad (5.1.1b)$$

$$\theta_2(x) \equiv \phi_2^1(x) = -\Pi^1(x) + \frac{k}{4\pi} A_2(x) \quad \rightarrow \tau_2(x), \quad (5.1.1c)$$

$$\theta_3(x) \equiv \phi_2^2(x) = -\Pi^2(x) - \frac{k}{4\pi} A_1(x) \quad \rightarrow \tau_3(x), \quad (5.1.1d)$$

$$\bar{\theta}_4(x) \equiv \phi_3^0(x) = \varepsilon^{0ij} \partial_i^x A_j(x) \quad \rightarrow \tau_4(x). \quad (5.1.1e)$$

Al examinar la tabla 4.2.1, se deduce que la EDP $\theta_1(x)$ es linealmente independiente, ya que el único PP distinto de cero es con la ecuación de Hamilton-Jacobi $\theta_0(x)$, sin embargo, para evaluar la independencia lineal del conjunto

¹El conjunto completo de EDPHJ corresponde a la ecuación (4.2.3).

5.1. INDEPENDENCIA LINEAL DE LAS EDP

de EDP restante, es necesario construir una submatriz con estas EDP y calcular su determinante:

$$\begin{aligned}\Theta_{Sub}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \begin{pmatrix} \{\theta_2(x), \theta_2(y)\} & \{\theta_2(x), \theta_3(y)\} & \{\theta_2(x), \bar{\theta}_4(y)\} \\ \{\theta_3(x), \theta_2(y)\} & \{\theta_3(x), \theta_3(y)\} & \{\theta_3(x), \bar{\theta}_4(y)\} \\ \{\bar{\theta}_4(x), \theta_2(y)\} & \{\bar{\theta}_4(x), \theta_3(y)\} & \{\bar{\theta}_4(x), \bar{\theta}_4(y)\} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{2\pi} & \partial_2^x \\ \frac{k}{2\pi} & 0 & -\partial_1^x \\ \partial_2^x & -\partial_1^x & 0 \end{pmatrix} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),\end{aligned}$$

la anterior submatriz tiene componentes funcionales lo que podría complicar el cálculo de su determinante, por lo tanto es necesario transferir dicha matriz al espacio de los momentos aplicando una transformada de Fourier [15]:

$$\Theta_{Sub}(p_1, p_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{2\pi} & ip_2 \\ \frac{k}{2\pi} & 0 & -ip_1 \\ ip_2 & -ip_1 & 0 \end{pmatrix},$$

al expresar $\Theta_{Sub}(p_1, p_2)$ en el espacio de momentos, sus componentes están en términos de las variables del espacio mas no de funciones, lo que permite verificar que el determinante de la matriz es nulo:

$$\det[\Theta_{Sub}(p_1, p_2)] = 0.$$

Como la matriz es singular se deduce que existe al menos una EDP linealmente independiente. Identificar esta EDP resulta fundamental, ya que el número de condiciones gauge que se incorporan a una teoría está vinculado con la cantidad de EDP linealmente independientes presentes.

5.1.1. Construcción de la ecuación diferencial parcial linealmente independiente

Para determinar la EDP linealmente independiente se realiza una combinación lineal de las EDP que conforman la submatriz Θ_{Sub} de la siguiente manera [15]:

$$\theta_4(x) = \int dy^2 [C_a(\mathbf{x}, \mathbf{y})\theta_a(y) + C_4(\mathbf{x}, \mathbf{y})\bar{\theta}_4(y)], \quad (5.1.2)$$

con $\{a, b\} = \{2, 3\}$, para garantizar la independencia lineal de $\theta_4(x)$, se deben calcular los coeficientes funcionales $C_a(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $C_4(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de manera que las siguientes condiciones sean satisfechas:

$$\begin{aligned}\{\theta_4(y), \theta_a(y)\} &= 0, \\ \{\theta_4(y), \bar{\theta}_4(x)\} &= 0,\end{aligned}$$

bajo estas condiciones los coeficientes funcionales $C_a(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $C_4(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ adoptan la forma [15]:

$$\begin{aligned}C_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{2\pi}{k} \partial_1^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ C_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{2\pi}{k} \partial_2^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ C_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),\end{aligned}$$

reemplazando los coeficientes funcionales en (5.1.2), se obtiene

$$\begin{aligned}\theta_4(x) &= \int dy^2 \left[-\frac{2\pi}{k} \partial_1^x \theta_2(y) - \frac{2\pi}{k} \partial_2^x \theta_3(y) + \bar{\theta}_4(y) \right] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= -\underbrace{\frac{2\pi}{k} \partial_1^x \theta_2(x) - \frac{2\pi}{k} \partial_2^x \theta_3(x)}_{-\frac{2\pi}{k} \partial_i^x \phi^i_2(x)} + \bar{\theta}_4 \\ &= -\frac{2\pi}{k} \partial_i^x \left[-\Pi^i(x) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} A_j(x) \right] + \varepsilon^{0ij} \partial_i^x A_j(x) \\ &= \frac{2\pi}{k} \partial_i^x \Pi^i(x) + \frac{1}{2} \varepsilon^{0ij} \partial_i^x A_j(x).\end{aligned}$$

Finalmente, la teoría de Chern-Simons está conformada por el conjunto de EDP:

$$\begin{aligned}\theta_1(x) &= \Pi^0(x), \\ \theta_2(x) &= \Pi^1(x) - \frac{k}{4\pi} A_2(x), \\ \theta_3(x) &= \Pi^2(x) + \frac{k}{4\pi} A_1(x), \\ \theta_4(x) &= \frac{2\pi}{k} \partial_i^x \Pi^i(x) + \frac{1}{2} \varepsilon^{0ij} \partial_i^x A_j(x),\end{aligned}$$

donde las EDP $\theta_1(x)$ y $\theta_4(x)$ son linealmente independientes. Ahora, es necesario analizar nuevamente si existe alguna otra EDP linealmente independiente, por lo que se construye la submatriz:

$$\Theta_{Sub} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{2\pi} \\ \frac{k}{2\pi} & 0 \end{pmatrix} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

como $\Theta_{Sub}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tiene una inversa dada por

$$\Theta_{Sub}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2\pi}{k} \\ -\frac{2\pi}{k} & 0 \end{pmatrix} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (5.1.3)$$

implica que el determinante $\det[\Theta_{Sub}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \neq 0$, lo que a su vez significa que no existen más EDP linealmente independientes.

Debido a la existencia de la matriz inversa (5.1.3) es posible construir paréntesis generalizados evaluados a tiempos iguales que involucren solo estas EDP, por lo que es conveniente separar éstas EDP en la definición del diferencial fundamental (4.2.4) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}dF(x) &= \int d^2y [\{F(x), \theta_0(y)\} dt + \{F(x), \theta_H(y)\} d\tau_H(y)]; \{H\} = \{1, 2, 3, 4\} \\ &= \int d^2y [\underbrace{\{F(x), \theta_0(y)\} dt}_{\{F(x), \theta_\rho(y)\} d\tau_\rho(y)} + \{F(x), \theta_{\bar{a}}(y)\} d\tau_{\bar{a}}(y) \\ &\quad + \{F(x), \theta_b(y)\} d\tau_b(y)]; \{\bar{a}\} = \{1, 4\}; \{b\} = \{2, 3\} \\ &= \int d^2y [\{F(x), \theta_\rho(y)\} d\tau_\rho(y) + \{F(x), \theta_b(y)\} d\tau_b(y)]; \{\rho, \sigma\} = \{0, 1, 4\}. \quad (5.1.4)\end{aligned}$$

5.1.2. Paréntesis generalizados

El propósito de los paréntesis generalizados es expresar el diferencial fundamental (5.1.4) en términos de las EDP linealmente independientes y el tiempo, por lo que se calcula la evolución espacio-temporal de $\theta_c(v)$:

$$d\theta_c(v) = \int d^2u [\{\theta_c(v), \theta_\sigma(u)\} d\tau_\sigma(u) + \{\theta_c(v), \theta_d(u)\} d\tau_d(u)],$$

debido a que la condición de consistencia $d\theta_c(v) = 0$ se debe cumplir, entonces la anterior ecuación puede ser reescrita como

$$\begin{aligned}\int d^2u \underbrace{\{\theta_c(v), \theta_d(u)\}}_{\Theta_{Sub}^{cd}(\mathbf{v}, \mathbf{u})} d\tau_d(u) &= - \int d^2u \{\theta_c(v), \theta_\sigma(u)\} d\tau_\sigma(u), \\ \int d^2u \Theta_{Sub}^{cd}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) d\tau_d(u) &= - \int d^2u \{\theta_c(v), \theta_\sigma(u)\} d\tau_\sigma(u),\end{aligned}$$

5.1. INDEPENDENCIA LINEAL DE LAS EDP

para despejar $d\tau_d(u)$, es necesario aplicar la inversa de la matriz de EDP $[\Theta_{Sub}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{v})]_{bc}$ e integrar respecto a v a ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned} \int d^2v [\Theta_{Sub}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{v})]_{bc} \int d^2u \Theta_{Sub}^{cd}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) d\tau_d(u) &= - \int d^2v [\Theta_{Sub}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{v})]_{bc} \int d^2u \{\theta_c(v), \theta_\sigma(u)\} d\tau_\sigma(u), \\ \int d^2u d\tau_d(u) \int d^2v [\Theta_{Sub}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{v})]_{bc} \Theta_{Sub}^{cd}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) &= - \iint d^2v d^2u [\Theta_{Sub}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{v})]_{bc} \{\theta_c(v), \theta_\sigma(u)\} d\tau_\sigma(u), \\ \int d^2u d\tau_d(u) \delta_b^d \delta^2(\mathbf{y} - \mathbf{u}) &= - \iint d^2v d^2u [\Theta_{Sub}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{v})]_{bc} \{\theta_c(v), \theta_\sigma(u)\} d\tau_\sigma(u), \\ d\tau_b(y) &= - \iint d^2v d^2u [\Theta_{Sub}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{v})]_{bc} \{\theta_c(v), \theta_\sigma(u)\} d\tau_\sigma(u), \end{aligned}$$

reemplazando lo anterior en el diferencial fundamental (5.1.4) resulta

$$\begin{aligned} dF(x) &= \int d^2y \left[\{F(x), \theta_\sigma(y)\} d\tau_\sigma(y) - \{F(x), \theta_b(y)\} \iint d^2v d^2u [\Theta_{Sub}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{v})]_{bc} \{\theta_c(v), \theta_\sigma(u)\} d\tau_\sigma \right] \\ &= \int d^2y \left[\{F(x), \theta_\sigma(y)\} d\tau_\sigma(y) - \iint d^2v d^2u \{F(x), \theta_b(y)\} [\Theta_{Sub}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{v})]_{bc} \{\theta_c(v), \theta_\sigma(u)\} d\tau_\sigma \right], \end{aligned}$$

realizando el cambio de variables $y \leftrightarrow u$, en el segundo sumando se obtiene

$$\begin{aligned} dF(x) &= \int d^2y \{F(x), \theta_\sigma(y)\} d\tau_\sigma(y) - \iint \iint d^2u d^2v d^2y \{F(x), \theta_b(u)\} [\Theta_{Sub}^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v})]_{bc} \{\theta_c(v), \theta_\sigma(y)\} d\tau_\sigma(y) \\ &= \int d^2y \left[\{F(x), \theta_\sigma(y)\} - \iint d^2u d^2v \{F(x), \theta_b(u)\} [\Theta_{Sub}^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v})]_{bc} \{\theta_c(v), \theta_\sigma(y)\} \right] d\tau_\sigma(y), \end{aligned}$$

el término entre corchetes de la anterior ecuación se define como los Paréntesis generalizados evaluados a tiempos iguales entre dos variables dinámicas $F(x)$ y $G(x)$ definidas en el espacio de fase y se denotan como

$$\{F(x), G(y)\}_1^\star \equiv \{F(x), G(y)\} - \iint d^2u d^2v \{F(x), \theta_b(u)\} [\Theta_{Sub}^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v})]_{bc} \{\theta_c(v), G(y)\}. \quad (5.1.5)$$

Bajo la definición de los PG, la dinámica del sistema es regida únicamente por las EDP linealmente independientes y por el tiempo, por lo que el diferencial fundamental queda

$$dF(x) = \int d^2y \{F(x), \theta_\sigma(y)\}_1^\star d\tau_\sigma(y).$$

Como los PG incorporan la información proveniente de las EDP (5.1.1c) y (5.1.1d) se reducen dos grados de libertad en la teoría CS, la elección de grados de libertad es arbitraria por lo que se elige que el espacio de fase del sistema sea conformado por $[A^\alpha(x), \Pi_0(x)]$. Dada la equivalencia funcional de los PG (5.1.5) con los Paréntesis de Dirac construidos con los vínculos de segunda clase, se puede demostrar que los PG fundamentales son

$$\begin{aligned} \{A^\mu(x), A^\nu(y)\}_1^\star &= \frac{2\pi}{k} \varepsilon^{0\mu\nu} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \{A^0(x), \Pi^0(y)\}_1^\star &= \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \{A^i(x), \Pi^j(y)\}_1^\star &= \frac{1}{2} \delta^{ij} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \{\Pi^\mu(x), \Pi^\nu(y)\}_1^\star &= \frac{k}{8\pi} \varepsilon^{0\mu\nu} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Para añadir la información de las EDP restantes, se vuelve crucial añadir restricciones al sistema, con el fin de que todas la EDP sean linealmente dependientes, ya que esto permite la construcción de una matriz de EDP invertible.

5.2. Gauge de radiación

Dado que la teoría de CS posee dos EDP linealmente independientes, se requiere la imposición de dos condiciones de gauge [6, 16], en consecuencia se propone realizar el análisis de la teoría de CS en el gauge de radiación, el cual se caracteriza por imponer las siguientes restricciones [15, 17]:

$$\begin{aligned} A_0(x) &= 0, \\ \partial_i^x A_i(x) &= 0, \end{aligned}$$

las anteriores ecuaciones son tratadas como nuevas EDP que necesitan ser incorporadas en el conjunto de EDPHJ y se les deben asignar parámetros arbitrarios que dependen del espacio-tiempo, de este modo el conjunto completo de EDPHJ se compone de

$$\begin{aligned} \theta_0(x) &\equiv p^0(x) - \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} [\partial_i^x A_j(x)] A_0(x) && \rightarrow t, \\ \theta_1(x) &\equiv \Pi^0(x) && \rightarrow \tau_1(x), \\ \theta_2(x) &\equiv \frac{2\pi}{k} \partial_i^x \Pi^i(x) + \frac{1}{2} \varepsilon^{0ij} \partial_i^x A_j(x) && \rightarrow \tau_2(x), \\ \theta_3(x) &\equiv A_0(x) && \rightarrow \tau_3(x), \\ \theta_4(x) &\equiv \partial_i^x A_i(x) && \rightarrow \tau_4(x). \end{aligned}$$

La introducción de éstos nuevos parámetros requiere que el diferencial fundamental se modifique

$$dF(x) = \int d^2y \left[\{F(x), \theta_0(y)\}_1^\star dt + \{F(x), \theta_H(y)\}_1^\star d\tau_H(y) \right]; \quad \{P, H\} = \{1, \dots, 4\}. \quad (5.2.1)$$

Al incluir las condiciones gauge, se logra eliminar la independencia lineal de las EDP $\theta_1(x)$ y $\theta_2(x)$, ya que al construir la matriz de EDP antisimétrica [15]:

$$\Theta_{PH}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \{\theta_P(x), \theta_H(y)\}_1^\star := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k}{2\pi} \nabla_x^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{2\pi} \nabla_x^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

es posible demostrar que dicha matriz posee la siguiente inversa [15]:

$$\Theta^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k}{2\pi} \frac{1}{\nabla_x^2} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{2\pi} \frac{1}{\nabla_x^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

donde el operador $\frac{1}{\nabla_x^2}$ denota la función de Green asociada al operador Laplaciano en dos dimensiones y se expresa como [15, 18]

$$F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{\nabla_x^2} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \ln(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2.$$

Al poder formar la inversa de la matriz de EDP es posible calcular unos PG que involucren todas las EDP del sistema.

5.2. GAUGE DE RADIACIÓN

5.2.1. Paréntesis generalizados en el gauge de radiación

Como las EDP son linealmente dependientes, es posible incorporar la información de todas las EDP en los PG y por medio de la condición de Frobenius (2.2.13) encontrar la forma funcional de los parámetros $\tau_H(x)$, eliminando la arbitrariedad del sistema, de este modo, al calcular la evolución espacio-temporal de $\phi_P(v)$ resulta

$$d\theta_P(v) = \int d^2u [\{\theta_P(v), \theta_0(u)\}_1^\star dt + \underbrace{\{\theta_P(v), \theta_J(u)\}_1^\star}_{\Theta_{PJ}(\mathbf{v}, \mathbf{u})} d\tau_J(u)] = 0,$$

la anterior ecuación se puede representar como

$$\int d^2u \{\theta_P(v), \theta_0(u)\}_1^\star dt = - \int d^2u \Theta_{PJ}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) d\tau_J(u),$$

aplicando $\Theta_{HP}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{v})$, integrando respecto a v y despejando $d\tau_H(y)$ se obtiene

$$d\tau_H(y) = - \iint d^2u d^2v \Theta_{HP}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{v}) \{\theta_P(v), \theta_0(u)\}_1^\star dt,$$

relación que muestra la dependencia de los parámetros arbitrarios $\tau_P(x)$ con el tiempo.

Reemplazando $d\tau_H(y)$ en el diferencial fundamental (5.2.1) resulta

$$\begin{aligned} dF(x) &= \int d^2y \{F(x), \theta_0(y)\}_1^\star dt - \iint \underbrace{d^2u d^2y d^2v \{F(x), \theta_H(y)\}_1^\star \Theta_{HP}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{v}) \{\theta_P(v), \theta_0(u)\}_1^\star}_{u \longleftrightarrow y} dt \\ &= \int d^2y \left[\{F(x), \theta_0(y)\}_1^\star - \iint d^2u d^2v \{F(x), \theta_H(u)\}_1^\star \Theta_{HP}^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \{\theta_P(v), \theta_0(y)\}_1^\star \right] dt, \end{aligned}$$

el término entre corchetes se lo identifica como los paréntesis generalizados evaluados en tiempos iguales en el gauge de radiación (PGR). Así, los PGR entre dos variables dinámicas $F(x)$ y $G(y)$ son

$$\{F(x), G(y)\}_1^\star \equiv \{F(x), G(y)\}_1^\star - \iint d^2u d^2v \{F(x), \theta_H(u)\}_1^\star \Theta_{HP}^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \{\theta_P(v), G(y)\}_1^\star,$$

dada la equivalencia funcional de los PGR con los Paréntesis de Dirac evaluados a tiempos iguales construidos en el gauge de radiación,² se puede demostrar que los únicos PGR fundamentales distintos de cero son [15]

$$\{A_i(x), A_j(y)\}_1^\star = \frac{2\pi}{k} \varepsilon_{0ij} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \frac{2\pi}{k} [\varepsilon_{0mj} \partial_m^x \partial_i^x - \varepsilon_{0mi} \partial_m^x \partial_j^x] \frac{1}{\nabla_x^2} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Mediante los PGR se expresa el diferencial fundamental en términos del tiempo, estableciendo que la dinámica del sistema es regida por

$$dF(x) = \int d^2y \{F(x), \theta_0(y)\}_1^\star dt.$$

Por medio de las condiciones gauge se logra eliminar la arbitrariedad producida por los parámetros $\tau_P(x)$, como los PGR involucran a todas las EDP, los grados de libertad de la teoría de Chern-Simons pura se suprimen completamente, hecho que resalta la importancia del estudio de esta teoría como un término de acople a otras teorías particulares.

²La forma funcional de los Paréntesis de Dirac evaluados a tiempos iguales construidos en el gauge de radiación se encuentran en la pagina 31 de la referencia [15].

Capítulo 6

Teoría de Maxwell-Chern-Simons

La teoría de Maxwell-Chern-Simons (MCS) surge al añadir el término Lagrangiano (3.0.1) de la teoría de Chern-Simons (CS) al Lagrangiano que describe la teoría electromagnética en $(2 + 1)$ dimensiones definido en la ecuación (C.I.1) del apéndice¹ §C.I [15]. De esta manera, la Lagrangiana de MCS se define como

$$\mathcal{L}_{MCS} = \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{CS} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}(\partial_\alpha A_\beta)A_\gamma.$$

La Lagrangiana de la teoría de Maxwell se construye con el tensor de intensidad de campo, el cual es invariante bajo transformaciones de gauge locales de la forma $A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)$ [6, 16]. Además, se demostró que la teoría CS es invariante bajo esta transformación, por lo que se concluye de manera directa que la teoría MCS es invariante bajo una transformación de gauge local; es decir, al identificar \mathcal{L}'_{MCS} como la transformación gauge de \mathcal{L}_{MCS} , se debe satisfacer

$$\mathcal{L}'_{MCS} = \mathcal{L}_{MCS}.$$

De manera similar a la teoría de CS, MCS presenta singularidades debido a su invarianza bajo transformaciones de gauge locales, lo que implica que el determinante de la matriz Hessiana es cero [6, 16]. Según la definición dada en (3.1.3), esta matriz adopta la siguiente forma²:

$$W(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}), \quad (6.0.1)$$

la presencia de un autovalor igual a cero implica que el determinante de la matriz Hessiana sea idénticamente cero $\det|W_{\mu\nu}(x, y)| = 0$ [6, 16], lo que establece la existencia de singularidades, las cuales son de gran relevancia y requieren un tratamiento especial al estudiar la dinámica de la teoría.

En el contexto de la teoría de campos, las singularidades implican que existen relaciones entre las variables dinámicas de la teoría, las que surgirán naturalmente al realizar el estudio canónico de la teoría de MCS [6, 16]. Para llevar a cabo dicho estudio, es necesario desarrollar el formalismo Lagrangiano adecuado.

¹Para una mejor comprensión del capítulo, se recomienda al lector consultar el apéndice §C.I.

²El cálculo de la Matriz Hessiana se muestra en el apéndice §C.II.

6.1. FORMALISMO LAGRANGIANO

6.1. Formalismo Lagrangiano

La densidad Lagrangiana de la teoría MCS depende del campo gauge $A_\mu(x)$ y de su derivada temporal $\partial_0 A_\mu(x)$, de modo que el espacio de configuración se define por el conjunto de variables $[A_\mu(x), \partial_0 A_\mu(x)]$ con $\{\mu\} = \{0, 1, 2\}$. La dinámica del sistema se determina mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange para infinitos grados de libertad, que se deducen del principio de mínima acción o principio de Hamilton [6, 16]:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{MCS}}{\partial A_\alpha} - \partial_\beta \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{MCS}}{\partial (\partial_\beta A_\alpha)} \right] = 0, \quad (6.1.1)$$

de la cuál se determina que las ecuaciones de campo son³

$$\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\alpha\beta\nu} F_{\beta\nu}(x) + \partial_\beta F^{\beta\alpha}(x) = 0, \quad (6.1.2)$$

como las ecuaciones de campo presentan explícitamente al tensor de intensidad de campo, se puede ver la invarianza gauge natural de la teoría. Esta simetría local implica que se puede hacer una elección de un campo de gauge $A'_\mu(x)$ que no afecte las propiedades físicas de la teoría. De esta forma, la teoría presenta una gran cantidad de soluciones físicamente equivalentes, que se diferencian entre sí por la elección de una función escalar $\Lambda(x)$. La invarianza gauge permite describir la misma física de forma equivalente en términos de diferentes potenciales de gauge, lo que resulta en una gran herramienta para simplificar el análisis de la teoría.

6.1.1. Ecuaciones de Maxwell-Chern-Simons

Por la adición del término topológico (3.0.1) en la teoría electromagnética, las ecuaciones de Maxwell se ven alteradas [15, 19], siendo de interés conocer cuál es la expresión de estas leyes en la teoría de MCS descrita en $(2+1)$ dimensiones.

A partir de las ecuaciones de campo (6.1.2), se pueden determinar los análogos a la ley de Gauss para el campo eléctrico y la ley de Ampère, en tanto que, para obtener la ley de Faraday, se recurre al segundo teorema de Noether y se utiliza la invarianza gauge local. De acuerdo con este teorema, se concluye que el tensor de campo electromagnético satisface la identidad de Bianchi y es a partir de esta identidad que se obtiene la ley de Faraday [20]. En consecuencia, las leyes de Maxwell se expresan de la siguiente manera⁴:

- Ley de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{k}{2\pi} B_0. \quad (6.1.3)$$

- Ley de Ampère

$$\frac{\partial E_i}{\partial t} + \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} E_j + (\nabla \times B_0)_i = 0. \quad (6.1.4)$$

- Ley de Faraday

$$\frac{\partial B^0}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{E})^0 = 0. \quad (6.1.5)$$

En la teoría de Maxwell en $(2+1)$ dimensiones, el campo magnético se representa como un escalar dado por la ecuación (C.I.4). Por lo tanto, no existe un análogo a la ley de Gauss para el campo magnético en la teoría de MCS, ya que dicha ley es producto de una identidad vectorial [21].

³El cálculo de la ecuación de campo se encuentra en el apéndice §C.III.

⁴La deducción de las leyes de Maxwell-Chern-Simons se encuentran en §C.IV.

6.1.2. Término masivo debido a contribuciones topológicas

Uno de los resultados más interesantes de la teoría MCS es la aparición de un término de masa asociado al campo fundamental $A_\mu(x)$ debido a contribuciones topológicas [15], la cual se puede observar directamente al reescribir las ecuaciones de campo (6.1.2) en términos del vector dual del tensor de intensidad de campo, que se define como [15,19]

$$\tilde{F}^\alpha(x) = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}F_{\beta\gamma}(x),$$

aplicando a ambos lados de la igualdad $\varepsilon_{\alpha\beta\delta}$, se puede reescribir el tensor de intensidad de campo en términos de su vector dual de la siguiente manera:

$$F_{\beta\delta}(x) = \varepsilon_{\beta\delta\alpha}\tilde{F}^\alpha(x). \quad (6.1.6)$$

Remplazando (6.1.6) en la ecuación de campo (6.1.2) se llega a

$$\left(\frac{k}{2\pi}\eta^{\alpha\beta} + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\gamma\right)\tilde{F}_\beta = 0, \quad (6.1.7)$$

donde $\eta^{\alpha\beta}$ es la métrica en el espacio de Minkowski en $(2+1)$ dimensiones [19]:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

No obstante, la ecuación de campo (6.1.7) no indica a priori la contribución de masa por la presencia del término topológico. Con la finalidad de llegar a la ecuación de Klein-Gordon⁵ (KG), es necesario aplicar a ambos lados de la igualdad el operador $\left(\frac{k}{2\pi}\eta_{\mu\alpha} - \varepsilon_{\mu\alpha\nu}\partial^\nu\right)$ y realizar las respectivas simplificaciones⁶ [15]:

$$\partial^\gamma\partial_\gamma\tilde{F}_\mu - \partial^\nu\partial_\mu\tilde{F}_\nu + \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2\tilde{F}_\mu = 0.$$

Finalmente, al denotar $u \equiv \frac{k}{2\pi}$ y $\square \equiv \partial^\gamma\partial_\gamma$ y teniendo en cuenta la siguiente identidad:

$$\begin{aligned} \partial_\nu\tilde{F}^\nu &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\nu\beta\gamma}\partial_\nu F_{\beta\gamma} \\ &= 0, \end{aligned}$$

la ecuación de campo se simplifica como:

$$(\square + u^2)\tilde{F}_\mu = 0, \quad (6.1.8)$$

llegando así a la ecuación de Klein-Gordon para un campo vectorial de masa u , lo que permite afirmar que las componentes del vector dual se propagan como partículas libres con masa u , que surge como consecuencia de añadir el término topológico de CS a la teoría electromagnética restringida a $(2+1)$ dimensiones.

⁵La ecuación de KG en teoría cuántica de campos describe una partícula libre, relativista y de masa m [16].

⁶La demostración de la ecuación de campo en términos del vector dual del tensor electromagnético se desarrolla en el apéndice §C.V.

6.2. FORMULACIÓN HAMILTONIANA

6.2. Formulación Hamiltoniana

Dentro del análisis clásico de la teoría de MCS en el formalismo Hamiltoniano, se busca determinar las ecuaciones de Hamilton para el sistema. Sin embargo, al estudiar una teoría que se caracteriza por ser singular, es necesario analizar las relaciones que surgirán entre las variables que definen el espacio de configuración $[A_\alpha(x), \Pi^\alpha(x)]$, razón por la cual se hace necesario calcular los momentos canónicos de la teoría MCS, los cuales se definen mediante [6, 16]:

$$\Pi^\alpha(x) = \frac{\partial \mathcal{L}_{MCS}}{\partial [\partial_0 A_\alpha(x)]} = -F^{0\alpha}(x) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0\alpha\rho} A_\rho(x),$$

se observa que debido a la antisimetría del tensor de intensidad de campo y del tensor de Levi-Civita, la componente temporal del momento canónico es nula:

$$\Pi^0(x) = -F^{00}(x) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{00\rho} A_\rho(x) = 0, \quad (6.2.1)$$

determinado la primera restricción para la teoría, la cual será denotada como

$$\phi_1(x) \equiv \Pi^0(x) = 0, \quad (6.2.2)$$

en cambio la parte espacial del campo $\Pi^i(x)$ es

$$\Pi^i(x) = \partial_i A_0(x) - \partial_0 A_i(x) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} A_j(x). \quad (6.2.3)$$

Como las componentes espaciales del momento canónico presentan derivadas temporales del campo gauge $A_\alpha(x)$, esta expresión se considera como una ecuación dinámica en el espacio de fase y por lo tanto no reduce los grados de libertad de la teoría.

Usando los momentos canónicos $\Pi^\alpha(x)$ y la densidad Lagrangiana \mathcal{L}_{MCS} , se puede obtener el Hamiltoniano canónico de la teoría MCS mediante una transformación de Legendre [6, 16]:

$$H_{MCS}^0 = \int d^2x \mathcal{H}_{MCS}^0 = \int d^2x [\Pi^\mu \partial_0 A_\mu - \mathcal{L}_{MCS}],$$

al remplazar los momentos canónicos conjugados al campo gauge calculados anteriormente, se obtiene el siguiente Hamiltoniano⁷:

$$H_{MCS}^0 = \int d^2x \left[\frac{1}{2} \left(\Pi^i - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} A_j \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\varepsilon^{0ij} \partial_i A_j \right)^2 - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} A_0 (\partial_i A_j) - A_0 \partial_i \Pi^i \right]. \quad (6.2.4)$$

⁷La demostración del Hamiltoniano se presenta en el apéndice §C.VI.

Capítulo 7

Aplicación del método de Hamilton-Jacobi a la teoría de Maxwell-Chern-Simons

La formulación de Hamilton-Jacobi permite determinar todas las restricciones presentes en la teoría de MCS, las cuales restringen los grados de libertad del sistema y se interpretan como ecuaciones diferenciales parciales. Estas EDP junto con la ecuación de Hamilton-Jacobi, conforman el conjunto completo de ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi.

7.1. Ecuación de Hamilton-Jacobi

Siguiendo un análisis similar a lo expuesto en el capítulo §4, se demuestra que la ecuación de Hamilton-Jacobi se puede reescribir en términos de densidades [10]. Esta relación se interpreta como una EDPHJ, por lo tanto, el análogo de la ecuación (4.1.1) para la teoría de MCS se expresa mediante:

$$\phi_0(x) = p_0(x) + \mathcal{H}_{MCS}^0(x) = 0. \quad (7.1.1)$$

La expresión (7.1.1) es la ecuación de Hamilton-Jacobi y su variable relacionada es el tiempo, mientras que la EDP (6.2.2) es una EDP que hace parte del conjunto de EDPHJ y la variable arbitraria asociada a esta se denotada como $\tau_1(x)$, donde el subíndice se relaciona con su EDPHJ correspondiente. En consecuencia, la dinámica del sistema se describe mediante las variables independientes $[t, \tau_1(x)]$.

Utilizando la definición de los PP entre dos variables dinámicas evaluadas en tiempos iguales [ver ec. (4.1.2)], se define la evolución espacio-temporal de una variable dinámica $F(A(x), \Pi(x)) \equiv F(x)$ como [9, 11]

$$dF(x) = \int d^2y [\{F(x), \phi_0(y)\} dt + \{F(x), \phi_1(y)\} d\tau_1(y)]. \quad (7.1.2)$$

Según la ecuación (4.1.2), se puede determinar los PP fundamentales de la teoría:

$$\begin{aligned} \{A_\mu(x), \Pi^\nu(y)\} &= \delta_\mu^\nu \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \{A_\mu(x), A^\nu(x)\} &= 0, \\ \{\Pi_\mu(y), \Pi^\nu(y)\} &= 0. \end{aligned}$$

7.2. Condiciones de integrabilidad

Con el propósito de garantizar la integrabilidad del sistema descrito por la teoría de MCS, se requiere que las relaciones entre las variables que lo componen sean involutivas en todo el espacio-tiempo, es decir, que su evolución sea nula. Por lo tanto, es necesario calcular la evolución de la EDPHJ $\phi_1(x)$, que corresponde a

$$\begin{aligned} d\phi_1(x) &= \int d^2y [\{\phi_1(x), \phi_0^0(y)\} dt + \overbrace{\{\phi_1(x), \phi_1(y)\}}^0 d\tau_1(y)] \\ &= \int d^2y \left[\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^y A_l(y) + \partial_k^y \Pi^k(y) \right] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dt \\ &= \left[\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^x A_l(x) + \partial_k^x \Pi^k(x) \right] dt = 0. \end{aligned}$$

La condición de integrabilidad para la EDP $\phi_1(x)$ da lugar a la aparición de una relación entre los campos del sistema. Para asegurar que la expresión anterior se cumpla siempre, se debe satisfacer $\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^x A_l(x) + \partial_k^x \Pi^k(x) = 0$, dicha condición debe ser interpretada como una nueva EDP y añadida al conjunto de EDPHJ, definiéndola como

$$\phi_2(x) \equiv \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_i^x A_j(x) + \partial_i^x \Pi^i(x) = 0.$$

Es importante asegurar la consistencia de esta nueva relación entre las variables dinámicas del sistema, por lo tanto, se debe imponer que

$$d\phi_2(x) = 0.$$

La evolución de una variable dinámica se calcula mediante (7.1.2), resultando:

$$\begin{aligned} d\phi_2(x) &= \int d^2y [\{\phi_2(x), \phi_0^0(y)\} dt + \overbrace{\{\phi_2(x), \phi_1(y)\}}^0 d\tau_1(y)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Se ha demostrado que para cumplir con la condición de integrabilidad de $\phi_1(x)$, es necesario imponer una restricción adicional al sistema, denominada $\phi_2(x)$. Esta nueva condición no genera una nueva EDPHJ, ya que es invariante en el espacio-tiempo. El agregar una nueva EDPHJ al sistema, implica que el conjunto inicial de variables independientes es incompleto y requiere la introducción de nuevas variables independientes que se relacionen con cada restricción. Por lo tanto, es necesario introducir un nuevo parámetro en la teoría, denominado $\tau_2(x)$, que dependa del espacio-tiempo. De esta manera, el conjunto de EDPHJ junto con sus respectivas variables independientes será

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= p^0 + \mathcal{H}_{MCS}^0 = 0 & \rightarrow t, \\ \phi_1(x) &= \Pi^0 = 0 & \rightarrow \tau_1(x), \\ \phi_2(x) &= \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_i^x A_j(x) + \partial_i^x \Pi^i(x) = 0 & \rightarrow \tau_2(x). \end{aligned}$$

Es útil considerar los PP entre los vínculos del sistema, los cuales se expresan en la siguiente tabla¹:

Tabla 7.2.1: Paréntesis de Poisson entre los vínculos de la teoría MCS.

$\{\cdot, \cdot\}$	$\phi_0(y)$	$\phi_1(y)$	$\phi_2(y)$
$\phi_0(x)$	0	$-\phi_2(x) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	0
$\phi_1(x)$	$\phi_2(y) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	0	0
$\phi_2(x)$	0	0	0

¹El cálculo de los PP entre los vínculos se desarrolla en el apéndice §D.I.

Por la adición de la variable $\tau_2(x)$ asociada a $\phi_2(x)$, es necesario ampliar la definición de la evolución espacio-temporal de una variable dinámica $F(x)$. Por lo tanto, la expresión (7.1.2) será redefinida como

$$dF(x) = \int d^2y [\{F(x), \phi_0(y)\}dt + \{F(x), \phi_1(y)\}d\tau_1(y) + \{F(x), \phi_2(y)\}d\tau_2(y)] \quad (7.2.1a)$$

$$= \int d^2y [\{F(x), \phi_0(y)\}dt + \{F(x), \phi_H(y)\}d\tau_H(y)]; \quad \{P, H\} \equiv \{1, 2\}. \quad (7.2.1b)$$

Una vez que se ha definido la evolución de una variable dinámica utilizando el diferencial fundamental, es necesario verificar nuevamente las condiciones de integrabilidad de las restricciones.

A continuación se procede a calcular la evolución del conjunto de EDPHJ utilizando los PP calculados en la tabla 7.2.1. La evolución de $\phi_1(x)$ es entonces:

$$\begin{aligned} d\phi_1(x) &= \int d^2y [\{\phi_1(x), \phi_0(y)\}dt + \{\phi_1(x), \phi_H(y)\}d\tau_H(y)]^0 \\ &= \int d^2y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left[\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^y A_l(y) + \partial_k^y \Pi^k(y) \right] \\ &= \left[\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^x A_l(x) + \partial_k^x \Pi^k(x) \right] dt = \phi_2(x)dt, \end{aligned}$$

el resultado es consistente con lo esperado, ya que la evolución de $\phi_1(x)$ es proporcional a un elemento del conjunto de EDPHJ. Ahora trabajando con $\phi_2(x)$:

$$\begin{aligned} d\phi_2(x) &= \int d^2y [\{\phi_2(x), \phi_0(y)\}dt + \{\phi_2(x), \phi_H(y)\}d\tau_H(y)]^0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

se observa que la evolución espacio-temporal de $\phi_2(x)$ es idénticamente cero, lo que demuestra que no surgen nuevas relaciones entre las variables al calcular las condiciones de integrabilidad.

7.3. Ecuaciones características

Por la existencia de relaciones entre los campos fundamentales de la teoría de MCS, la dinámica del sistema presenta una arbitrariedad que se deriva por las EDP que conforman el conjunto de EDPHJ.

Como las ecuaciones características del conjunto de EDPHJ corresponden a la evolución espacio-temporal de los campos canónicos $[A_\mu(x), \Pi^\mu(x)]$, es necesario calcular los PP de los campos con las EDPHJ² presentados en la siguiente tabla:

Tabla 7.3.1: PP de los campos canónicos con el conjunto de EDPHJ en la teoría de MCS.

$\{\cdot, \cdot\}$	$\phi_0(y)$	$\phi_1(y)$	$\phi_2(y)$
$A_0(x)$	0	$\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	0
$A_i(x)$	$[\Pi^i(y) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0im} A_m(y) + \partial_i^x A_0(y)] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	0	$-\partial_i^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$
$\Pi^0(x)$	$[\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^y A_l(y) + \partial_k^y \Pi^k(y)] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	0	0
$\Pi^i(x)$	$[\partial_k^x F^{ki}(y) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon_{0ik} \Pi^k(y) - (\frac{k}{4\pi})^2 A_i(y) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ik} \partial_k^x A_0(y)] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	0	$-\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ik} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$

De este modo al calcular la evolución espacio-temporal de los campos fundamentales de la teoría mediante la definición del diferencial fundamental (7.2.1), se obtiene lo siguiente:

²Los PP de los campos canónicos con el conjunto de EDPHJ se desarrollan en el apéndice §D.II.

7.3. ECUACIONES CARACTERÍSTICAS

- Para $A_0(x)$:

$$\begin{aligned}
 dA_0(x) &= \int d^2y \underbrace{[\{A_0(x), \phi_0(y)\} dt + \{A_0(x), \phi_H(y)\} d\tau_H(y)]}_0 \\
 &= \int d^2y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\tau_1(y) \\
 &= \boxed{d\tau_1(x)},
 \end{aligned}$$

dado que la evolución del campo es proporcional al parámetro arbitrario $\tau_1(x)$, su evolución se vuelve indeterminada hasta que se fije dicho parámetro.

- Para $A_i(x)$:

$$\begin{aligned}
 dA_i(x) &= \int d^2y [\{A_i(x), \phi_0(y)\} dt + \{A_i(x), \phi_H(y)\} d\tau_H(y)] \\
 &= \int d^2y \left\{ \left[\Pi^i(y) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0im} A_m(y) + \partial_i^x A_0(y) \right] dt - \partial_i^x d\tau_2(y) \right\} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= \boxed{\left[\Pi^i(x) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0im} A_m(x) + \partial_i^x A_0(x) \right] dt - \partial_i^x d\tau_2(x)},
 \end{aligned}$$

como la evolución espacio-temporal de $A_i(x)$ depende del parámetro arbitrario $\tau_2(x)$ su dinámica no es única.

- Para $\Pi^0(x)$:

$$\begin{aligned}
 d\Pi^0(x) &= \int d^2y \underbrace{[\{\Pi^0(x), \phi_0(y)\} dt + \{\Pi^0(x), \phi_H(y)\} d\tau_H(y)]}_0 \\
 &= \int d^2y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left[\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^y A_l(y) + \partial_k^y \Pi^k(y) \right] dt \\
 &= \boxed{\left[\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^x A_l(x) + \partial_k^x \Pi^k(x) \right] dt},
 \end{aligned}$$

la presencia de los campos gauge indeterminados $A_l(x)$ en el diferencial de $\Pi^0(x)$ produce implícitamente una arbitrariedad en la evolución de este campo.

- Finalmente para $\Pi^i(x)$ resulta:

$$\begin{aligned}
 d\Pi^i(x) &= \int d^2y [\{\Pi^i(x), \phi_0(y)\} dt + \{\Pi^i(x), \phi_H(y)\} d\tau_H(y)] \\
 &= \int d^2y \left\{ \left[\partial_k^x F^{ki}(y) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon_{0ik} \Pi^k(y) - \left(\frac{k}{4\pi} \right)^2 A_i(y) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ik} \partial_k^x A_0(y) \right] dt \right. \\
 &\quad \left. - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ik} \partial_k^x d\tau_2(y) \right\} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= \boxed{\left[\partial_k^x F^{ki}(x) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon_{0ik} \Pi^k(x) - \left(\frac{k}{4\pi} \right)^2 A_i(x) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ik} \partial_k^x A_0(x) \right] dt - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ik} \partial_k^x d\tau_2(x)},
 \end{aligned}$$

por lo que la trayectoria que sigue el campo $\Pi^i(x)$ es indeterminada debido a que su evolución depende del parámetro arbitrario $\tau_2(x)$.

Las ecuaciones de campo en el espacio de fase corresponden a derivadas temporales de primer orden de los campos gauge y de sus momentos canónicos conjugados; entonces, mediante las ecuaciones características del sistema es

possible determinar dichas ecuaciones de campo, de este modo, al derivar las ecuaciones características de la teoría de MCS respecto al tiempo se llega a

$$\dot{A}_0(x) = \dot{\tau}_1(x), \quad (7.3.1a)$$

$$\dot{A}_i(x) = \left[\Pi^i(x) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0im} A_m(x) + \partial_i^x A_0(x) \right] - \partial_i^x \dot{\tau}_2(x), \quad (7.3.1b)$$

$$\dot{\Pi}^0(x) = \left[\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^x A_l(x) + \partial_k^x \Pi^k(x) \right], \quad (7.3.1c)$$

$$\dot{\Pi}^i(x) = \partial_j^x F^{ji}(x) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon_{0ij} \Pi^j(x) - \left(\frac{k}{4\pi} \right)^2 A_i(x) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_j^x A_0(x) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_j^x \dot{\tau}_2(x), \quad (7.3.1d)$$

donde se maneja la notación $\dot{\tau}(x) \equiv d\tau(x)/dt$. Para determinar las ecuaciones de campo en el espacio de configuración se parte de la evolución temporal de los campos $\dot{\Pi}^0(x)$ y $\dot{\Pi}^i(x)$, de manera que al considerar $\Pi^0(x) = 0$ la ecuación característica (7.3.1c) se simplifica

$$\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_i^x A_j(x) + \partial_i^x \Pi^i(x) = 0,$$

al derivar espacialmente la ecuación (6.2.3) y reemplazar $\partial_i^x \Pi^i(x)$ en lo anterior:

$$\begin{aligned} \partial_i^x F^{i0}(x) + 2 \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_i^x A_j(x) &= 0, \\ \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} F_{ij}(x) + \partial_i^x F^{i0}(x) &= 0, \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

expresión que es equivalente a la ecuación de campo (6.1.2) para la componente $\alpha = 0$, mientras que para llegar a las ecuaciones de campo para el caso $\alpha = i$ se sustituye la ecuación (6.2.3) en (7.3.1d):

$$\dot{\Pi}^i(x) = \partial_j^x F^{ji}(x) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon_{0ij} F^{0j}(x) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_j^x A_0(x) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_j^x \dot{\tau}_2(x),$$

al derivar respecto al tiempo (6.2.3) y reemplazar $\dot{\Pi}^i(x)$ en lo anterior, resulta:

$$\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{i0k} F_{0k}(x) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{ij0} F_{j0}(x) + \partial_0 F^{0i}(x) + \partial_j^x F^{ji}(x) = \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_j^x \dot{\tau}_2(x). \quad (7.3.3)$$

Con base en los resultados deducidos en (7.3.2) y (7.3.3) la ecuación de campo en el espacio de configuración completa es

$$\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\alpha\beta\nu} F_{\beta\nu} + \partial_\beta F^{\beta\alpha} = \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_j^x \dot{\tau}_2(x). \quad (7.3.4)$$

Puesto que la teoría de Hamilton-Jacobi permitió identificar la dependencia de las ecuaciones de campo con los parámetros arbitrarios $\tau_H(x)$ tanto en el espacio de fase (7.3.1) como en el espacio de configuración (7.3.4), se establece que la dinámica de la teoría de MCS es indeterminada.

Capítulo 8

Gauge de Coulomb para la teoría de Maxwell-Chern-Simons

La presencia de los parámetros arbitrarios en el diferencial fundamental (7.2.1) genera que la evolución de cualquier variable dinámica definida en el espacio de fase no sea unívoca. Para evitar la indeterminación en la dinámica del sistema, es necesario establecer ecuaciones que relacionen los parámetros arbitrarios $\tau_H(x)$ con el tiempo, de modo que puedan ser despejados y reemplazados en la definición del diferencial fundamental.

En la tabla 7.2.1 se observa que las EDP $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ son linealmente independientes entre si, de modo que la matriz de EDP no es invertible y por tanto la indeterminación de la teoría persiste.¹ Con el fin de generar una dependencia temporal en los parámetros arbitrarios, se propone la implementación de condiciones gauge que hayan sido estudiadas en otros formalismos, pero aplicando dichas restricciones gauge mediante el método de Hamilton-Jacobi.

8.1. Gauge de Coulomb

El gauge de Coulomb convencional [6, 15, 17] se define mediante las siguientes restricciones impuestas sobre los campos:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_i^x \Pi^i(x) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^x A_l(x) + \partial_i^x \partial_i^x A_0(x), \\ 0 &= \partial_i^x A_i(x), \end{aligned}$$

las anteriores ecuaciones se añaden al conjunto de EDPHJ expandiendo los índices $\{P, H\}$ de 1 a 4, esto requiere la introducción de nuevos parámetros arbitrarios, en consecuencia, el conjunto de EDPHJ junto con sus respectivas variables independientes, está compuesto por

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= p^0 + \mathcal{H}_{MCS}^0 & \rightarrow t, \\ \phi_1(x) &= \Pi^0(x) = 0 & \rightarrow \tau_1(x), \\ \phi_2(x) &= \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^x A_l(x) + \partial_k^x \Pi^k(x) = 0 & \rightarrow \tau_2(x), \\ \phi_3(x) &= \partial_i^x \partial_i^x A_0(x) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^x A_l(x) + \partial_k^x \Pi^k(x) = 0 & \rightarrow \tau_3(x), \\ \phi_4(x) &= \partial_i^x A_i(x) = 0 & \rightarrow \tau_4(x). \end{aligned}$$

¹Se realiza un análisis más detallado de la independencia lineal de las EDP en el capítulo §5.

Los únicos PP no nulos entre las EDP $\phi_P(x)$ son [15]

$$\begin{aligned}\{\phi_1(x), \phi_3(y)\} &= -\nabla_x^2 \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \{\phi_2(x), \phi_4(y)\} &= \nabla_x^2 \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).\end{aligned}$$

Al expandir el conjunto de EDPHJ, es necesario redefinir el diferencial fundamental de la teoría de MCS, de esta manera, la evolución espacio-temporal de una variable dinámica $F(x)$ definida en el espacio de fase es

$$dF(x) = \int d^2y [\{F(x), \phi_0(y)\}dt + \{F(x), \phi_H(y)\}d\tau_H(y)]. \quad (8.1.1)$$

Es conveniente definir la matriz antisimétrica $\Phi_{PH}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \{\phi_P(x), \phi_H(y)\}$, la cual se construye mediante los paréntesis de Poisson entre las EDP $\phi_P(x)$ [15]:

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \nabla_x^2 \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

la inversa de la matriz de EDP es [15]

$$C^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \Phi^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\nabla_x^2} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

nuevamente se ha considerado que el operador $\frac{1}{\nabla_x^2}$ corresponde a la función de Green asociada al operador Laplaciano en dos dimensiones y cumple [15, 18]

$$F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{\nabla_x^2} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \ln(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2.$$

8.1.1. Paréntesis generalizados en el gauge de Coulomb

El objetivo de los paréntesis generalizados es expresar el diferencial fundamental (8.1.1) únicamente en función del tiempo, con el fin de determinar de manera única la evolución espacio-temporal de una variable dinámica bajo la condición gauge elegida. Para lograr esto, se procede al cálculo de la evolución de $\phi_P(v)$ y al despejar $d\tau_H(y)$ teniendo en cuenta la condición de Frobenius $d\phi_P(v) = 0$, se obtiene²

$$d\tau_H(y) = - \iint d^2u d^2v \Phi_{HP}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{v}) \{\phi_P(v), \phi_0(u)\} dt,$$

reemplazando $d\tau_H(y)$ en el diferencial fundamental (8.1.1), resulta

$$\begin{aligned}dF(x) &= \int d^2y \{F(x), \phi_0(y)\} dt - \iint \underbrace{d^2u d^2v \{F(x), \phi_H(y)\} \Phi_{HP}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{v}) \{\phi_P(v), \phi_0(u)\}}_{u \longleftrightarrow y} dt, \\ &= \int d^2y \left[\{F(x), \phi_0(y)\} - \iint d^2u d^2v \{F(x), \phi_H(u)\} \Phi_{HP}^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \{\phi_P(v), \phi_0(y)\} \right] dt,\end{aligned}$$

el término entre corchetes de la anterior ecuación se define como los Paréntesis generalizados evaluados a tiempos iguales en el gauge de Coulomb (PGC) entre dos variables dinámicas $F(x)$ y $G(x)$ definidas en el espacio de fase y se denotan mediante:

$$\{F(x), G(y)\} \star \equiv \{F(x), G(y)\} - \iint d^2u d^2v \{F(x), \phi_H(u)\} \Phi_{HP}^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \{\phi_P(v), G(y)\}.$$

²El cálculo explícito se realizó en la sección §5.2.1

8.1. GAUGE DE COULOMB

dada la equivalencia funcional de los PGC con los paréntesis de Dirac construidos en el gauge de Coulomb³ se puede demostrar que los únicos PGC fundamentales no nulos corresponden a [15]

$$\begin{aligned}\{A_i(x), \Pi_j(y)\}^\star &= \left(\delta_{ij} - \partial_i^x \partial_j^x \frac{1}{\nabla_x^2} \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \{\Pi_i(x), \Pi_j(y)\}^\star &= \frac{k}{4\pi} (\varepsilon_{0mi} \partial_m^x \partial_j^x - \varepsilon_{0mj} \partial_m^x \partial_i^x) \frac{1}{\nabla_x^2} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).\end{aligned}$$

A partir de la definición de los PGC el diferencial fundamental depende únicamente del tiempo y toma la siguiente forma:

$$dF(x) = \int d^2y \{F(x), \phi_0(y)\}^\star dt,$$

como los PGC incorporan la información proveniente de las EDP del sistema, los grados de libertad que en principio son seis se reducen a dos.

³La forma funcional de los paréntesis de Dirac construidos en el gauge de Coulomb se encuentran en la pagina 54 de la referencia [15].

Capítulo 9

Resultados

En este capítulo se presentan los resultados más relevantes del estudio del método de Hamilton-Jacobi aplicado a las teorías de campos de Chern-Simons y Maxwell-Chern-Simons de acuerdo a los objetivos planteados en este trabajo, además, se destacan los resultados adicionales obtenidos del análisis de las condiciones gauge aplicadas a dichas teorías.

9.1. Teoría de Chern-Simons Pura

Se logró generalizar la ecuación de Hamilton-Jacobi (2.2.7) de variables discretas a variables continuas, obteniendo una representación en términos de densidades dada por

$$\phi_0^0(x) \equiv p_0 + \mathcal{H}_{CS}^0 = 0.$$

A partir de la definición de los momentos canónicos conjugados de los campos gauge se identificó las EDP $\phi_1^0(x)$ y $\phi_2^i(x)$, a cada una de estas EDP se les asoció un parámetro arbitrario función del espacio-tiempo denotados por $\tau_{01}(x)$ y $\tau_{i2}(x)$ respectivamente.

Para que el sistema sea soluble fue necesario que las EDP satisfagan la condición de integrabilidad de Frobenius, de la cual surgió la necesidad de imponer una nueva restricción $\phi_3^0(x)$ al conjunto de EDPHJ, aumentando el número de parámetros arbitrarios debido a que el número inicial de variables independientes resultó incompleto. Como los parámetros $[t, \tau_{01}(x), \tau_{i2}(x), \tau_{03}(x)]$ determinan la dinámica del sistema, estos fueron incluidos en el diferencial fundamental de la teoría de CS:

$$dF(x) = \int d^2y [\{F(x), \phi_0^0(y)\} dt + \{F(x), \phi_P^\nu(y)\} d\tau_{\nu P}(y); P \equiv \{1, 2, 3\}].$$

El diferencial fundamental está conformado por el conjunto completo de EDPHJ que corresponde a

$$\begin{aligned} \phi_0^0(x) \equiv p^0(x) - \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} [\partial_i^x A_j(x)] A_0(x) &= 0 & \rightarrow t, \\ \phi_1^0(x) \equiv \Pi^0(x) &= 0 & \rightarrow \tau_{01}(x), \\ \phi_2^i(x) \equiv \Pi^i(x) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} A_j(x) &= 0 & \rightarrow \tau_{i2}(x), \\ \phi_3^0(x) \equiv \varepsilon^{0ij} \partial_i^x A_j(x) &= 0 & \rightarrow \tau_{03}(x). \end{aligned}$$

9.1. TEORÍA DE CHERN-SIMONS PURA

Mediante la definición del diferencial fundamental fue posible calcular la evolución espacio-temporal de los campos fundamentales de la teoría:

$$\begin{aligned} dA_0(x) &= d\tau_{01}(x), \\ dA_i(x) &= \partial_k^x A_0(x) dt - \frac{2\pi}{k} \partial_k^x d\tau_{03}(x), \\ d\Pi^0(x) &= \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} [\partial_i^x A_j(x)] dt, \\ d\Pi^i(x) &= -\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ki} \partial_k^x A_0(x) dt + \frac{1}{2} \varepsilon^{0ki} \partial_k^x d\tau_{03}(x), \end{aligned}$$

a partir de las ecuaciones características se logró determinar las ecuaciones de campo que rigen al sistema, estas ecuaciones representadas en el espacio de fase corresponden a derivadas de primer orden de los campos fundamentales:

$$\begin{aligned} \dot{A}_i(x) &= \dot{\tau}_{01}(x), \\ \dot{A}_i(x) &= \partial_i^x A_0(x) + \frac{2\pi}{k} \partial_i^x \dot{\tau}_{03}(x), \\ \dot{\Pi}^0(x) &= \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_i^x A_j(x) = \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} F_{ij}(x), \\ \dot{\Pi}^i(x) &= -\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{i0k} \partial_k^x A_0(x) + \frac{3}{2} \varepsilon^{0ki} \partial_k^x \dot{\tau}_{03}(x), \end{aligned}$$

mientras que en el espacio de configuración las ecuaciones de campo:

$$\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma}(x) = -3 \varepsilon^{0ki} \partial_k^x \dot{\tau}_{03}(x),$$

la presencia de los parámetros $\tau_{01}(x)$ y $\tau_{03}(x)$ en las ecuaciones de campo vuelve arbitraria la evolución del sistema, ésta indeterminación surgió debido a la presencia de dos EDP linealmente independientes dentro del conjunto de EDPHJ,¹ puesto que $\theta_1(x)$ es la única EDP linealmente independiente dentro del sistema, fue necesario construir la otra EDP mediante una combinación lineal de $\theta_2(x)$, $\theta_3(x)$ y $\bar{\theta}_4(x)$, obteniendo como resultado:

$$\theta_4(x) = \frac{3}{2} \varepsilon^{0ij} \partial_i^x A_j(x) - \frac{2\pi}{k} \partial_i^x \Pi^i(x),$$

dicha EDP fue anexada al conjunto de EDPHJ remplazando a $\bar{\theta}_4(x)$, de modo que ahora el conjunto de EDPHJ está conformado por

$$\begin{aligned} \theta_1(x) &= \Pi^0(x), \\ \theta_2(x) &= \Pi^1(x) - \frac{k}{4\pi} A_2(x), \\ \theta_3(x) &= \Pi^2(x) + \frac{k}{4\pi} A_1(x), \\ \theta_4(x) &= \frac{3}{2} \varepsilon^{0ij} \partial_i^x A_j(x) - \frac{2\pi}{k} \partial_i^x \Pi^i(x), \end{aligned}$$

como $\theta_2(x)$ y $\theta_3(x)$ son EDP linealmente dependientes, fue posible construir con ellos una matriz invertible y definir los paréntesis generalizados evaluados a tiempos iguales:

$$\{F(x), G(y)\}_1^\star \equiv \{F(x), G(y)\} - \iint d^2u d^2v \{F(x), \theta_b(u)\} [\Theta_{S\bar{u}b}^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{u})]_{bc} \{\theta_c(v), G(y)\}; \{a, b\} = \{2, 3\},$$

de manera que la dinámica del sistema se pudo reescribir en términos de los PG y reducir así los grados de libertad del sistema:

$$dF(x) = \int d^2y \{F(x), \theta_\sigma(y)\}_1^\star d\tau_\sigma(y); \{\sigma\} = \{0, 1, 4\}.$$

¹Para determinar la independencia lineal de las EDP fue necesario cambiar la notación manejada para representar el conjunto completo de EDPHJ, dicho cambio de notación se lo realizó en el capítulo §5 en la ecuación (5.1.1).

Mediante los PG se logró eliminar las EDP linealmente dependientes, mientras que para eliminar las EDP linealmente independientes se propuso imponer nuevas restricciones a la teoría correspondientes al gauge de radiación, caracterizado por

$$\begin{aligned} A_0(x) &= 0, \\ \partial_i^x A_i(x) &= 0, \end{aligned}$$

las anteriores ecuaciones se añadieron al conjunto de EDPHJ y permitieron que este se caracterice por estar conformado únicamente de EDP linealmente dependientes, las cuales corresponden a

$$\begin{aligned} \theta_1(x) &\equiv \Pi^0(x) & \rightarrow \tau_1(x), \\ \theta_2(x) &\equiv \frac{3}{2} \varepsilon^{0ij} \partial_i^x A_j(x) - \frac{2\pi}{k} \partial_i^x \Pi^i(x) & \rightarrow \tau_2(x), \\ \theta_3(x) &\equiv A_0(x) & \rightarrow \tau_3(x), \\ \theta_4(x) &\equiv \partial_i^x A_i(x) & \rightarrow \tau_4(x), \end{aligned}$$

por lo que fue posible aplicar la condición de Frobenius para despejar todos los parámetros arbitrarios $\tau_H(x)$ en términos del tiempo:

$$d\tau_H(y) = - \int d^2u d^2v \Theta_{HP}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{v}) \{\theta_P(v), \theta_0(u)\}_1^\star dt; \{H, P\} = \{1, \dots, 4\},$$

eliminando así la arbitrariedad del diferencial fundamental:

$$dF(x) = \int d^2y \{F(x), \theta_0(y)\}_1^\star dt,$$

en donde se a definido los paréntesis generalizados evaluados a tiempos iguales en el gauge de radiación entre dos variables dinámicas mediante:

$$\{F(x), G(y)\}_1^\star \equiv \{F(x), G(y)\}_1^\star - \iint d^2u d^2v \{F(x), \theta_H(y)\}_1^\star \Theta_{HP}^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \{\theta_P(v), G(y)\}_1^\star,$$

dada la equivalencia funcional de los PGR con los Paréntesis de Dirac evaluados a tiempos iguales construidos en el gauge de radiación, se determinó que los únicos PGR fundamentales distintos de cero son

$$\{A_i(x), A_j(t)\}_1^\star = \frac{2\pi}{k} \varepsilon_{0ij} \frac{1}{\nabla_x^2} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \frac{2\pi}{k} [\varepsilon_{0mj} \partial_m^x \partial_i^x - \varepsilon_{0m} \partial_m^x \partial_j^x] \frac{1}{\nabla_x^2} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Como los PGR involucran la información de todas las EDP, los grados de libertad del sistema se suprime completamente hecho que resalta que la teoría de Chern-Simons pura toma relevancia al ser estudiada como una teoría de acople.

9.2. Teoría de Maxwell-Chern-Simons

Partiendo del estudio canónico de la teoría de Maxwell-Chern-Simons y mediante un análisis de integrabilidad, se determinaron dos restricciones que junto con la ecuación de Hamilton-Jacobi en términos de densidades, conformaron el conjunto completo de EDPHJ:

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= p^0 + \mathcal{H}_{MCS}^0 = 0 & \rightarrow t, \\ \phi_1(x) &= \Pi^0 = 0 & \rightarrow \tau_1(x), \\ \phi_2(x) &= \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_i^x A_j(x) + \partial_i^x \Pi^i(x) = 0 & \rightarrow \tau_2(x), \end{aligned}$$

9.2. TEORÍA DE MAXWELL-CHERN-SIMONS

donde t y $\tau_H(x)$ corresponden a parámetros independientes asociados a cada elemento del conjunto de EDPHJ, dichos parámetros establecen la dinámica del sistema, mediante el diferencial fundamental definido por

$$dF(x) = \int d^2y [\{F(x), \phi_0(y)\}dt + \{F(x), \phi_H(y)\}d\tau_H(y)]; \quad \{P, H\} \equiv \{1, 2\}.$$

A partir del diferencial fundamental se pudo establecer el conjunto de ecuaciones características del sistema:

$$\begin{aligned} dA_0(x) &= d\tau_1(x), \\ dA_i(x) &= \left[\Pi^i(x) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0im} A_m(x) + \partial_i^x A_0(x) \right] dt - \partial_i^x d\tau_2(x), \\ d\Pi^0(x) &= \left[\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^x A_l(x) + \partial_k^x \Pi^k(x) \right] dt, \\ d\Pi^i(x) &= \left[-\frac{k}{4\pi} \varepsilon_{0ij} \Pi^j(y) - \left(\frac{k}{4\pi} \right)^2 A_i(y) + \partial_j^x F^{ji}(x) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_j^x A_0(y) \right] dt \\ &\quad - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_j^x d\tau_2(x), \end{aligned}$$

mediante estos diferenciales, se logró determinar la dinámica de la teoría de MCS mediante las ecuaciones de campo, que en el espacio de fase corresponde a

$$\begin{aligned} \dot{A}_0(x) &= \dot{\tau}_1(x), \\ \dot{A}_i(x) &= \left[\Pi^i(x) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0im} A_m(x) + \partial_i^x A_0(x) \right] - \partial_i^x \dot{\tau}_2(x), \\ \dot{\Pi}^0(x) &= \left[\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^x A_l(x) + \partial_k^x \Pi^k(x) \right], \\ \dot{\Pi}^i(x) &= \partial_j^x F^{ji}(x) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon_{0ij} \Pi^j(x) - \left(\frac{k}{4\pi} \right)^2 A_i(x) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_j^x A_0(x) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_j^x \dot{\tau}_2(x), \end{aligned}$$

mientras que la ecuaciones de campo en el espacio de configuración se expresan mediante:

$$\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\alpha\beta\nu} F_{\beta\nu} + \partial_\beta F^{\beta\alpha} = \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_j^x \dot{\tau}_2(x).$$

Como consecuencia de la independencia lineal de las EDP surgieron parámetros arbitrarios $\tau_H(x)$ en las ecuaciones de campo, implicando que la dinámica de los campos no sea unívoca, para abordar este problema se propuso realizar el estudio de la teoría de MCS en el gauge de Coulomb, el cual impone las siguientes restricciones sobre los campos fundamentales:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_i^x \Pi^i(x) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^x A_l(x) + \partial_i^x \partial_i^x A_0(x), \\ 0 &= \partial_i^x A_i(x), \end{aligned}$$

estas restricciones permitieron eliminar la independencia lineal de las EDP al añadirlas dentro del conjunto de EDPHJ, el cual está conformado por

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= p^0 + \mathcal{H}_{MCS}^0 & \rightarrow t, \\ \phi_1(x) &= \Pi^0(x) = 0 & \rightarrow \tau_1(x), \\ \phi_2(x) &= \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^x A_l(x) + \partial_k^x \Pi^k(x) = 0 & \rightarrow \tau_2(x), \\ \phi_3(x) &= \partial_i^x \partial_i^x A_0(x) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^x A_l(x) + \partial_k^x \Pi^k(x) = 0 & \rightarrow \tau_3(x), \\ \phi_4(x) &= \partial_i^x A_i(x) = 0 & \rightarrow \tau_4(x). \end{aligned}$$

Nuevamente se recurrió a la condición de Frobenius para obtener una relación entre los parámetros arbitrarios $\tau_H(x)$ y el tiempo:

$$d\tau_H(y) = - \iint d^2u d^2v \Phi_{HP}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{v}) \{\phi_P(v), \phi_0(u)\} dt,$$

dicha relación permitió eliminar la arbitrariedad de la teoría al reescribir el diferencial fundamental únicamente en términos del tiempo:

$$dF(x) = \int d^2y \{F(x), \phi_0(y)\}^\star dt,$$

donde se definió los paréntesis generalizados evaluados a tiempos iguales en el gauge de Coulomb:

$$\{F(x), G(y)\}^\star \equiv \{F(x), G(y)\} - \iint d^2u d^2v \{F(x), \phi_H(y)\} \Phi_{HP}^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \{\phi_P(v), G(y)\},$$

como la dinámica está determinada por los PGC y teniendo presente que estos involucran la información de todas la EDP del sistema, los grados de libertad del sistema se reducen de seis a dos. Dada la equivalencia funcional de los PGC con los paréntesis de Dirac evaluados a tiempos iguales en el gauge de Coulomb se dedujo que los únicos PGC fundamentales no nulos de la teoría son

$$\begin{aligned} \{A_i(x), \Pi_j(y)\}^\star &= \left(\delta_{ij} - \partial_i^x \partial_j^x \frac{1}{\nabla_x^2} \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \{\Pi_i(x), \Pi_j(y)\}^\star &= \frac{k}{4\pi} (\varepsilon_{0mi} \partial_m^x \partial_j^x - \varepsilon_{0mj} \partial_m^x \partial_i^x) \frac{1}{\nabla_x^2} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Capítulo 10

Conclusiones

Las teorías de campos de CS y MCS se caracterizan por ser invariantes bajo transformaciones de gauge locales, lo que tuvo como consecuencia de que la Lagrangiana que las describe sea singular, el tratamiento dinámico que se le da a las teorías singulares es diferente al realizado para teorías regulares debido a la presencia de relaciones entre los campos fundamentales de la teoría que reducen los grados de libertad de la misma, este tratamiento recibe el nombre de método de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares y requiere que las restricciones encontradas se interpreten como ecuaciones diferenciales parciales y se mantengan en involución mediante las condiciones de integrabilidad.

Al someter tanto la teoría de CS como la teoría de MCS a las condiciones de integrabilidad, se determina la necesidad de adicionar nuevas restricciones para mantener involutivas a las EDP de cada sistema, para la teoría de CS se estableció la restricción $\phi_3^0(x)$ para mantener involutiva la EDP $\phi_1^0(x)$, mientras que en la teoría de MCS se impuso $\phi_2(x)$ para mantener a $\phi_1(x)$ en involución, de este modo el conjunto conformado por la ecuación de Hamilton-Jacobi, las primeras EDP de los sistemas y la EDP que surge del análisis de integrabilidad establecen el conjunto completo de EDPHJ en cada teoría.

A cada elemento de los conjuntos de EDPHJ se le asoció un parámetro arbitrario $\tau(x)$ que depende del espacio-tiempo con la finalidad de introducir la información de cada EDP al diferencial fundamental, el cual describe la evolución de las variables dinámicas en el espacio de fase, éste diferencial permitió aplicar la condición de Frobenius a las EDP para garantizar que cada conjunto de EDPHJ sea completo y por consecuencia obtener una solución de los sistemas mediante las ecuaciones características, estas ecuaciones permitieron identificar la indeterminación en la dinámica de los campos debido a la presencia de los parámetros arbitrarios $\tau(x)$ en las ecuaciones de campo en el espacio de fase y de configuración.

Se observó que al aplicar la condición de Frobenius a las EDP $\phi_2^i(x)$ en la formulación de CS se obtuvieron relaciones entre los parámetros arbitrarios $[t, \tau_{i2}(x), \tau_{03}(x)]$, esto es debido a dependencia lineal que poseen estas EDP, lo que permitió introducir la información de dichas EDP al diferencial fundamental mediante el uso de los paréntesis generalizados, reduciendo así los grados de libertad del sistema, por otro lado, la arbitrariedad que caracteriza a las ecuaciones de campo de las teorías de CS y MCS se originó por la presencia de las EDP linealmente independientes.

Con el propósito de eliminar estas arbitrariedades se propuso un análisis adicional mediante la imposición de nuevas restricciones entre los campos fundamentales que permitan eliminar la independencia lineal de las EDP en cada teoría, por lo que se consideraron las condiciones del gauge de radiación y del gauge de Coulomb para las teorías de CS y MCS, respectivamente, lo anterior permitió determinar la dependencia temporal de los parámetros arbitrarios y redefinir la dinámica mediante los PGR y PGC, eliminando las arbitrariedades que poseían estas teorías, además se encontró una equivalencia funcional entre los paréntesis generalizados evaluados a tiempos iguales en cada gauge con los paréntesis de Dirac evaluados a tiempos iguales en sus respectivos gauge.

Como trabajo para futuras investigaciones, se sugiere la extensión de este estudio analizando distintas condiciones gauge en las teorías de CS y MCS, involucrar interacción con otros campos como el campo fermiónico o explorar otras teorías gauge topológicas y sistemas singulares en diferentes dimensiones.

Apéndice A

Teoría de Chern-Simons Pura

A.I. Demostración ecuación de equivalencia 3.1.2

Es posible eliminar el segundo sumando de la Lagrangiana primada (ec. 3.1.1), de este modo, se partirá de la integral de la acción asociada a esta Lagrangiana, definida como

$$\mathcal{A}'[A_\beta] = \int d^3x \mathcal{L}_{CS} + \int d^3x \partial_\gamma \left[\frac{k\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}}{8\pi e} F_{\alpha\beta} \Lambda(x) \right]. \quad (\text{A.I.1})$$

Es crucial destacar que la contribución del segundo término en la acción es cero debido a las condiciones de frontera impuestas en el campo gauge $A_\mu(x)$ [6, 16]. Dichas condiciones establecen que

$$\delta A_\mu(\mathbf{x}, t_1) = \delta A_\mu(\mathbf{x}, t_2) = 0, \quad (\text{A.I.2a})$$

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} A_\mu(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (\text{A.I.2b})$$

Al calcular la integral del segundo término de la ecuación (A.I.1) y expandiendo la suma en el índice γ se llega a

$$\begin{aligned} \frac{k\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}}{8\pi e} \int d^3x \partial_\gamma [F_{\alpha\beta} \Lambda(x)] &= \frac{k}{8\pi e} \left[\varepsilon^{\alpha\beta 0} \int d^2x \int_{t_1}^{t_2} dt \partial_0 (F_{\alpha\beta} \Lambda) + \varepsilon^{\alpha\beta i} \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^2x \partial_i (F_{\alpha\beta} \Lambda) \right] \\ &= \frac{k}{8\pi e} \left[\varepsilon^{\alpha\beta 0} \int d^2x (F_{\alpha\beta} \Lambda)_{t_1}^{t_2} + \varepsilon^{\alpha\beta i} \int_{t_1}^{t_2} dt \oint_S dr_i \partial_i (F_{\alpha\beta} \Lambda) \right], \end{aligned}$$

al aplicar la condición de frontera de extremos fijos ec. (A.I.2a), el primer término de la ecuación se anula. En cuanto para el segundo término, se utilizar la Ley de Gauss restringida a dos dimensiones, lo que permite evaluar la integral en una superficie S que se extiende al infinito. No obstante, debido a la condición de frontera (A.I.2b), el segundo término resulta ser cero, de modo que la acción asociada a \mathcal{L}' se reduce a

$$\mathcal{A}'[A_\beta] = \int d^3x \mathcal{L}_{CS}(A_\alpha, \partial A_\beta), \quad (\text{A.I.3})$$

por lo que la acción asociada a la Lagrangiana de la teoría C-S, es la misma que la definida en la ecuación (A.I.3). Este hecho implica que el Lagrangiano del sistema no es único y que existen varias Lagrangianas que conducen a las mismas ecuaciones de campo. Por lo anterior se concluye que

$$\boxed{\mathcal{L}_{CS} \equiv \mathcal{L}'_{CS}},$$

demonstrando así la relación (3.1.2).

A.II. Demostración del Hamiltoniano canónico CS

El Hamiltoniano canónico se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$H^0 = \int d^2x [\Pi^\mu(x) \partial_0 A_\mu - \mathcal{L}_{CS}].$$

Para obtener una expresión explícita, se sustituyen las relaciones (3.0.1), (3.3.1) y (3.3.3) en la transformación de Lagrange y se expande la suma sobre el índice μ . El resultado es el siguiente

$$\begin{aligned} H^0 &= \frac{k}{4\pi} \int d^2x [\varepsilon^{0ij} A_j \partial_0 A_i - \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} (\partial_\alpha A_\beta) A_\gamma] \\ &= \frac{k}{4\pi} \int d^2x [\varepsilon^{0ij} A_j \partial_0 A_i - \varepsilon^{0\beta\gamma} (\partial_0 A_\beta) A_\gamma - \varepsilon^{i\beta\gamma} (\partial_i A_\beta) A_\gamma] \\ &= \frac{k}{4\pi} \int d^2x [\cancel{\varepsilon^{0ij} (\partial_0 A_i) A_j} - \cancel{\varepsilon^{0ij} (\partial_0 A_i) A_j} - \varepsilon^{i0j} (\partial_i A_0) A_j - \varepsilon^{ij0} (\partial_i A_j) A_0] \\ &= \frac{k}{4\pi} \int d^2x [\varepsilon^{0ij} (\partial_i A_0) A_j - \varepsilon^{0ij} (\partial_i A_j) A_0], \end{aligned}$$

teniendo en cuenta la identidad

$$(\partial_i A_0) A_j = \partial_i (A_0 A_j) - (\partial_i A_j) A_0,$$

el Hamiltoniano canónico puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} H^0 &= \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \int d^2x [(\partial_i A_0) A_j - 2(\partial_i A_j) A_0] \\ &= -\frac{k}{2\pi} \int d^2x \varepsilon^{0ij} (\partial_i A_j) A_0 + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \oint_S dr_i A_0 A_j. \end{aligned}$$

La integral de superficie es nula, ya que se evalúan los campos en el infinito y por la condición de frontera (A.I.2b) estos son cero en el infinito. Por lo tanto, se obtiene

$$H^0 = -\frac{k}{2\pi} \int d^2x \varepsilon^{0ij} (\partial_i A_j) A_0.$$

Así demostrando que el Hamiltoniano canónico es igual a la ecuación (3.3.5).

Apéndice B

Aplicación del método de Hamilton-Jacobi a la teoría de Chern-Simons

B.I. Cálculo de los PP presentes en la tabla 4.2.1

- Cálculo de los PP relacionados con $\phi_0^0(x)$:

$$\begin{aligned}
 \{\phi_0^0(x), \phi_0^0(y)\} &= \boxed{0.} \\
 \{\phi_0^0(x), \phi_1^0(y)\} &= \left\{ p^0(x) - \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} [\partial_i^x A_j(x)] A_0(x), \Pi^0(y) \right\} \\
 &= - \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} [\partial_i^x A_j(x)] \{A_0(x), \Pi^0(y)\} \\
 &= \boxed{- \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} [\partial_i^x A_j(x)] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})}. \\
 \{\phi_0^0(x), \phi_2^k(y)\} &= \left\{ p^0(x) - \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} [\partial_i^x A_j(x)] A_0(x), -\Pi^k(y) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} A_l(y) \right\} \\
 &= \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} A_0(x) \partial_i^x \{A_j(x), \Pi^k(y)\} \\
 &= \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} A_0(x) \partial_i^x \delta_j^k \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= \boxed{\frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ik} A_0(x) \partial_i^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})}. \\
 \{\phi_0^0(x), \phi_3^0(y)\} &= \boxed{0.}
 \end{aligned}$$

B.I. CÁLCULO DE LOS PP PRESENTES EN LA TABLA 4.2.1

- Cálculo de los PP relacionados con $\phi_1^0(x)$:

$$\begin{aligned}\{\phi_1^0(x), \phi_0^0(y)\} &= \left\{ \Pi^0(x), p^0(y) - \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0kl} [\partial_k^y A_l(y)] A_0(y) \right\} \\ &= \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} [\partial_i^y A_j(y)] \{A_0(y), \Pi^0(x)\} \\ &= \boxed{\frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} [\partial_i^y A_j(y)] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})}.\end{aligned}$$

$$\{\phi_1^0(x), \phi_1^0(y)\} = \boxed{0}.$$

$$\{\phi_1^0(x), \phi_2^k(y)\} = \boxed{0}.$$

$$\{\phi_1^0(x), \phi_3^0(y)\} = \boxed{0}.$$

- Cálculo de los PP relacionados con $\phi_2^i(x)$:

$$\begin{aligned}\{\phi_2^i(x), \phi_0^0(y)\} &= \left\{ -\Pi^i(x) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} A_j(x), p^0(y) - \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0kl} [\partial_k^y A_l(y)] A_0(y) \right\} \\ &= -\frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0kl} A_0(y) \partial_k^y \{A_l(y), \Pi^i(x)\} \\ &= \boxed{\frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ki} A_0(y) \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})}.\end{aligned}$$

$$\{\phi_2^i(x), \phi_1^0(y)\} = \boxed{0}.$$

$$\begin{aligned}\{\phi_2^i(x), \phi_2^k(y)\} &= \left\{ -\Pi^i(x) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} A_j(x), -\Pi^k(y) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} A_l(y) \right\} \\ &= \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \{A_l(y), \Pi^i(x)\} - \varepsilon^{0ij} \{A_j(x), \Pi^k(y)\} \\ &= \frac{k}{4\pi} [\varepsilon^{0kl} \delta_l^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \varepsilon^{0ij} \delta_j^k \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})] \\ &= \frac{k}{4\pi} (\varepsilon^{0ki} + \varepsilon^{0ki}) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= \boxed{\frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ki} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{\phi_2^i(x), \phi_3^0(y)\} &= \left\{ -\Pi^i(x) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} A_j(x), \varepsilon^{0kl} [\partial_k^y A_l(y)] \right\} \\ &= \varepsilon^{0kl} \partial_k^y \{A_l(y), \Pi^i(x)\} \\ &= \boxed{-\varepsilon^{0ki} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})}.\end{aligned}$$

- Cálculo de los PP relacionados con $\phi_3^0(x)$:

$$\begin{aligned}
 \{\phi_3^0(x), \phi_0^0(y)\} &= \boxed{0.} \\
 \{\phi_3^0(x), \phi_1^0(y)\} &= \boxed{0.} \\
 \{\phi_3^0(x), \phi_2^k(y)\} &= \left\{ \varepsilon^{0ij} [\partial_i^x A_j(x)], -\Pi^k(y) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} A_l(y) \right\} \\
 &= -\varepsilon^{0ij} \partial_i^x \{A_j(x), \Pi^k(y)\} \\
 &= \boxed{-\varepsilon^{0ik} \partial_i^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})}. \\
 \{\phi_3^0(x), \phi_3^0(y)\} &= \boxed{0.}
 \end{aligned}$$

B.II. Cálculo de los PP presentes en la tabla 4.3.1

Para $A_o(x)$:

$$\begin{aligned}
 \{A_o(x), \phi_0^0(y)\} &= \left\{ A_o(x), p^0(y) - \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0kl} [\partial_k^y A_l(y)] A_0(y) \right\} = \boxed{0.} \\
 \{A_o(x), \phi_1^0(y)\} &= \{A_o(x), \Pi^0(y)\} = \boxed{\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})}. \\
 \{A_o(x), \phi_2^k(y)\} &= \left\{ A_o(x), -\Pi^k(y) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} A_l(y) \right\} = \boxed{0.} \\
 \{A_o(x), \phi_3^0(y)\} &= \{A_o(x), \varepsilon^{0kl} [\partial_k^y A_l(y)]\} = \boxed{0.}
 \end{aligned}$$

Para $A_i(x)$:

$$\begin{aligned}
 \{A_i(x), \phi_0^0(y)\} &= \left\{ A_i(x), p^0(y) - \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0kl} [\partial_k^y A_l(y)] A_0(y) \right\} = \boxed{0.} \\
 \{A_i(x), \phi_1^0(y)\} &= \{A_i(x), \Pi^0(y)\} = \boxed{0.} \\
 \{A_i(x), \phi_2^k(y)\} &= \left\{ A_i(x), -\Pi^k(y) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} A_l(y) \right\} \\
 &= \boxed{-\{A_i(x), \Pi^k(y)\} = -\delta_i^k \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})}. \\
 \{A_i(x), \phi_3^0(y)\} &= \{A_i(x), \varepsilon^{0kl} [\partial_k^y A_l(y)]\} = \boxed{0.}
 \end{aligned}$$

Para $\Pi^0(x)$:

$$\begin{aligned}
 \{\Pi^0(x), \phi_0^0(y)\} &= \left\{ \Pi^0(x), p^0(y) - \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0kl} [\partial_k^y A_l(y)] A_0(y) \right\} \\
 &= \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} [\partial_i^y A_j(y)] \{A_0(y), \Pi^0(x)\} \\
 &= \boxed{\frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} [\partial_i^y A_j(y)] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})}. \\
 \{\Pi^0(x), \phi_1^0(y)\} &= \{\Pi^0(x), \Pi^0(y)\} = \boxed{0.} \\
 \{\Pi^0(x), \phi_2^k(y)\} &= \left\{ -\Pi^0(x), \Pi^k(y) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} A_l(y) \right\} = \boxed{0.} \\
 \{\Pi^0(x), \phi_3^0(y)\} &= \{\Pi^0(x), \varepsilon^{0kl} [\partial_k^y A_l(y)]\} = \boxed{0.}
 \end{aligned}$$

B.II. CÁLCULO DE LOS PP PRESENTES EN LA TABLA 4.3.1

Para $\Pi^i(x)$:

$$\begin{aligned} \{\Pi^i(x), \phi_0^0(y)\} &= \left\{ \Pi^i(x), p^0(y) - \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0kl} [\partial_k^y A_l(y)] A_0(y) \right\} \\ &= \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0kl} A_0(y) \partial_k^y \{A_l(x), \Pi^i(y)\} \end{aligned}$$

$$= \boxed{-\frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ki} \partial_k^x A_0(y) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})}.$$

$$\{\Pi^i(x), \phi_1^0(y)\} = \{\Pi^i(x), \Pi^0(y)\} = \boxed{0.}$$

$$\begin{aligned} \{\Pi^i(x), \phi_2^k(y)\} &= \left\{ \Pi^i(x), -\Pi^k(y) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} A_l(y) \right\} \\ &= -\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \{A_l(x), \Pi^i(y)\} \end{aligned}$$

$$= \boxed{-\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ki} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})}.$$

$$\{\Pi^i(x), \phi_3^0(y)\} = \{\Pi^i(x), \varepsilon^{0kl} [\partial_k^y A_l(y)]\}$$

$$= -\varepsilon^{0kl} \partial_k^y \{A_l(x), \Pi^i(y)\}$$

$$= \boxed{\varepsilon^{0ki} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})}.$$

Apéndice C

Teoría de Maxwell-Chern-Simons

C.I. Teoría de Maxwell restringida en $(2 + 1)$ dimensiones

La teoría electromagnética de Maxwell se puede extender a cualquier dimensión espacio-temporal, simplemente modificando el rango del índice espacio-temporal μ del campo fundamental $A_\mu(x)$ a un espacio-tiempo de d dimensiones, donde μ toma valores desde 0 hasta $(d - 1)$. Bajo esta consideración, el tensor de campo electromagnético $F_{\mu\nu}(x)$ conserva su estructura antisimétrica, es decir que satisface $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, además, tanto la densidad Lagrangiana de la teoría como las ecuaciones de campo permanecen inalteradas en este proceso. El cambio más relevante en la teoría es el número de campos independientes contenidos en el tensor $F_{\mu\nu}(x)$, que varía según la dimensión considerada [5].

Es fundamental tener conocimiento de los resultados más importantes de la teoría de Maxwell restringida en $(2 + 1)$ dimensiones. Para ello, es útil partir de los resultados generales de la teoría de Maxwell en d dimensiones espaciales. En esta teoría, el campo gauge fundamental se define como $A_\mu(x) \equiv [A_0(x), A_i(x)]$, donde la componente temporal $A_0(x)$ corresponde al potencial escalar y la componente espacial $\mathbf{A}(x)$ al campo vectorial. La densidad Lagrangiana asociada a esta teoría es

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x), \quad (\text{C.I.1})$$

donde $F_{\mu\nu}(x)$ representa el tensor de intensidad de campo, definido como

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x). \quad (\text{C.I.2})$$

Debido a que la teoría de Maxwell es una teoría gauge abeliana, tanto su densidad Lagrangiana como el tensor $F_{\alpha\beta}(x)$ son invariantes bajo la transformación de gauge local:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x), \quad (\text{C.I.3})$$

aquí, e representa la carga del electrón y $\Lambda(x)$ es un campo escalar arbitrario. Además, las ecuaciones de campo derivadas de la Lagrangiana (C.I.1) también son invariantes bajo la transformación (C.I.3) y se expresan como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = 0.$$

La descripción del campo electromagnético en $(2 + 1)$ dimensiones se realiza cuando se considera el rango del índice espacio-temporal $\mu = \{0, 1, 2\}$, en esta configuración, el tensor de campo electromagnético es una matriz antisimétrica de 3×3 , con tres grados de libertad. Dos de estos grados de libertad corresponden al campo eléctrico, mientras que el tercero se asocia al campo magnético. La representación matricial de $F_{\mu\nu}(x)$ se expresa como sigue [5]

$$F_{\mu\nu}(x) := \begin{pmatrix} 0 & -E_1(x) & -E_2(x) \\ E_1(x) & 0 & B_0(x) \\ E_2(x) & -B_0(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

C.II. CÁLCULO DE LA MATRIZ HESSIANA

Note que al restringir la teoría de Maxwell a $(2+1)$ dimensiones, el campo magnético se describe mediante un grado de libertad, es decir se comporta como un escalar el cuál se define como [5]

$$B^0(x) = F_{12}(x) = \frac{1}{2}\varepsilon^{0ij}F_{ij}(x) = \varepsilon^{0ij}\partial_i A_j(x), \quad (\text{C.I.4})$$

mientras el campo eléctrico será definido mediante la relación

$$E_i(x) = F_{i0}(x). \quad (\text{C.I.5})$$

C.II. Cálculo de la matriz Hessiana

Teniendo en cuenta que la matriz Hessiana se define así

$$W_{\alpha\beta}(x, y) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{MCS}}{\partial(\partial_0 A_\alpha) \partial(\partial_0 A_\beta)} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

entonces es necesario calcular las siguientes derivadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{MCS}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} &= -\frac{1}{4} \frac{\partial(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \frac{\partial(\partial_\mu A_\nu)}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} A_\rho \\ &= -\frac{1}{4} \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\rho} \left[\frac{\partial(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} F_{\lambda\rho} + F_{\mu\nu} \frac{\partial(\partial_\lambda A_\rho - \partial_\rho A_\lambda)}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} \right] + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha A_\rho \\ &= -\frac{1}{4} \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\rho} \left[(\delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha - \delta_\nu^\beta \delta_\mu^\alpha) F_{\lambda\rho} + F_{\mu\nu} (\delta_\lambda^\beta \delta_\rho^\alpha - \delta_\rho^\beta \delta_\lambda^\alpha) \right] + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\beta\alpha\rho} A_\rho \\ &= -F^{\beta\alpha} + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\beta\alpha\rho} A_\rho, \end{aligned} \quad (\text{C.II.1})$$

donde se usó la métrica de Minkowski restringida en $(2+1)$ dimensiones y se expresa como

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculando ahora la segunda derivada de \mathcal{L}_{MCS} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{MCS}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha) \partial(\partial_\mu A_\beta)} &= -\frac{\partial F^{\mu\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} = -\eta^{\mu\nu} \eta^{\beta\gamma} \frac{\partial F_{\nu\gamma}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} \\ &= -\eta^{\mu\nu} \eta^{\beta\gamma} \left[\frac{\partial(\partial_\nu A_\gamma)}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} - \frac{\partial(\partial_\gamma A_\nu)}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} \right] \\ &= -\eta^{\mu\nu} \eta^{\beta\gamma} [\delta_\nu^\mu \delta_\gamma^\alpha - \delta_\gamma^\mu \delta_\nu^\alpha] \\ &= \eta^{\mu\alpha} \eta^{\beta\mu} - \eta^{\mu\mu} \eta^{\beta\alpha}, \end{aligned}$$

de manera que la matriz Hessiana se da cuando $\mu = 0$ y toma la forma de

$$W_{\alpha\beta}(x, y) = \eta^{0\alpha} \eta^{\beta 0} - \eta^{00} \eta^{\beta\alpha} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}),$$

ecuación que corresponde a la expresión (6.0.1).

C.III. Cálculo de las ecuaciones de campo para la teoría MCS

Las ecuaciones de campo se determinan mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange dadas por (6.1.1). Utilizando el resultado obtenido en (C.II.1) y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_{MCS}}{\partial A_\alpha} &= \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\mu\nu\rho} (\partial_\mu A_\nu) \frac{\partial A_\rho}{\partial A_\alpha} = \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\mu\nu\rho} (\partial_\mu A_\nu) \delta_\rho^\alpha \\ &= \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\alpha\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu),\end{aligned}$$

se pueden reemplazar las derivadas correspondientes en las ecuaciones de Euler-Lagrange obteniendo lo siguiente

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial \mathcal{L}_{MCS}}{\partial A_\alpha} - \partial_\beta \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{MCS}}{\partial (\partial_\beta A_\alpha)} \right] \\ &= \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\alpha\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu) - \partial_\beta \left[-F^{\beta\alpha} \left(\frac{k}{4\pi} + \underbrace{\varepsilon^{\beta\alpha\rho} A_\rho}_{\beta \rightarrow \nu, \rho \rightarrow \mu} \right) \right] \\ &= \frac{k}{4\pi} (\varepsilon^{\alpha\mu\nu} \partial_\mu A_\nu - \varepsilon^{\alpha\mu\nu} \partial_\nu A_\mu) + \partial_\beta F^{\beta\alpha} \\ &= \boxed{\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\alpha\mu\nu} F_{\mu\nu} + \partial_\beta F^{\beta\alpha}}.\end{aligned}$$

La cual corresponde a la ecuación de campo (6.1.2).

C.IV. Cálculo de las leyes de Maxwell-Chern-Simons

- Ley de Gauss Tomando el valor particular de $\alpha = 0$ en la ecuación de campo (6.1.2) y expandiendo la suma en los demás índices de tal forma que

$$\partial_i F^{i0} + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} F_{ij} = 0,$$

haciendo uso de las definiciones (C.I.4) y (C.I.5), se obtiene

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{k}{2\pi} B_0.}$$

resultando así la ley de Gauss (6.1.3).

- Ley de Ampère Tomando el valor particular de $\alpha = i$ en la ecuación de campo (6.1.2), y expandiendo la suma en los demás índices de tal forma que

$$\begin{aligned}0 &= \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ij} + \frac{k}{4\pi} \underbrace{(\varepsilon^{i0j} F_{0j} + \varepsilon^{ijo} F_{jo})}_{2\varepsilon^{0ij} F_{jo}} \\ &= \partial_0 F_{i0} + \partial_j F_{ij} + \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} F_{jo},\end{aligned}\tag{C.IV.1}$$

pero considerando las ecuaciones (C.I.4), (C.I.5) y la siguiente identidad:

$$\begin{aligned}(\nabla \times B_0)_i &= -\varepsilon_{ijo} \partial_j B_0 = -\varepsilon_{ijo} \partial_j (\varepsilon_{0kl} \partial_k A_l) \\ &= -(\varepsilon_{0ij} \varepsilon^{okl}) \partial_j \partial_k A_l = -(\delta_i^k \delta_j^l - \delta_i^l \delta_j^k) \partial_j \partial_k A_l \\ &= \partial_j \partial_j A_i - \partial_j \partial_i A_j = \partial_j (\partial_j A_i - \partial_i A_j) \\ &= \partial_j F_{ji},\end{aligned}$$

la ecuación (C.IV.1) se reescribe como

$$\boxed{\frac{\partial E_i}{\partial t} + \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{0ij} E_j + (\nabla \times B_0)_i = 0,}$$

siendo esta la Ley de Ampère (6.1.4).

- Ley de Faraday La identidad de Bianchi para el tensor de intensidad de campo establece que

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha F_{\beta\gamma} = 0,$$

expandiendo los índices griego se llega a

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon^{0ij} \partial_0 F_{ij} + \varepsilon^{i0j} \partial_i F_{0j} + \varepsilon^{ij0} \partial_i F_{j0} \\ &= \frac{1}{2} \partial_0 \varepsilon^{0ij} F_{ij} + \varepsilon^{0ij} \partial_i F_{j0}, \end{aligned}$$

y expresando lo anterior en términos del campo magnético y eléctrico se llega a

$$\boxed{\frac{\partial B^0}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{E})^0 = 0,}$$

demonstrando así la ley de Faraday (6.1.5).

C.V. Demostración de la ecuación de Campo para el vector dual del tensor electromagnético

Remplazando (6.1.6) en la ecuación de campo (6.1.2) se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\alpha\mu\nu} F_{\mu\nu} + \partial_\beta F^{\beta\alpha} \\ &= \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\alpha\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu\beta} \tilde{F}^\beta + \partial_\beta \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \tilde{F}_\gamma \\ &= \frac{k}{4\pi} (\delta_\nu^\nu \delta_\beta^\alpha - \delta_\beta^\nu \delta_\nu^\alpha) \tilde{F}^\beta + \partial_\beta \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \tilde{F}_\gamma \\ &= \frac{k}{2\pi} \delta_\beta^\alpha \tilde{F}^\beta + \partial_\beta \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \tilde{F}_\gamma \\ &= \frac{k}{2\pi} \tilde{F}^\alpha + \left(\partial_\beta \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \tilde{F}_\gamma \right)_{(\beta \leftrightarrow \gamma)} \\ &= \left(\frac{k}{2\pi} \eta^{\alpha\beta} + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\gamma \right) \tilde{F}_\beta. \end{aligned}$$

Aplicando a ambos lados de la igualdad el operador $(\frac{k}{2\pi}\eta_{\mu\alpha} - \varepsilon_{\mu\alpha\nu}\partial^\nu)$, resulta

$$\begin{aligned}
 0 &= \left(\frac{k}{2\pi}\eta_{\mu\alpha} - \varepsilon_{\mu\alpha\nu}\partial^\nu \right) \left(\frac{k}{2\pi}\eta^{\alpha\beta} + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\gamma \right) \tilde{F}_\beta \\
 &= \left[\left(\frac{k}{2\pi} \right)^2 \eta_{\mu\alpha}\eta^{\alpha\beta} + \frac{k}{2\pi}\eta_{\mu\alpha}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\gamma - \frac{k}{2\pi}\eta^{\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\alpha\nu}\partial^\nu + \varepsilon_{\alpha\mu\nu}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial^\nu\partial_\gamma \right] \tilde{F}_\beta \\
 &= \left[\left(\frac{k}{2\pi} \right)^2 \delta_\mu^\beta + \frac{k}{2\pi}\varepsilon_\mu^{\beta\gamma}\partial_\gamma - \left(\frac{k}{2\pi}\varepsilon_\mu^{\beta\nu}\partial_\nu \right)_{(\nu\rightarrow\gamma)} + (\delta_\mu^\beta\delta_\nu^\gamma - \delta_\mu^\gamma\delta_\nu^\beta) \partial^\nu\partial_\gamma \right] \tilde{F}_\beta \\
 &= \underbrace{\partial^\gamma\partial_\gamma}_{\square} \tilde{F}_\mu - \partial^\nu\partial_\mu\tilde{F}_\nu + \underbrace{\left(\frac{k}{2\pi} \right)^2}_{u^2} \tilde{F}_\mu \\
 &= \square\tilde{F}_\mu - \partial_\mu \frac{1}{2}\varepsilon^{\nu\beta\gamma}\partial_\nu\tilde{F}_{\beta\gamma} + u^2\tilde{F}_\mu,
 \end{aligned}$$

obteniendo así la ecuación de Klein-Gordon (6.1.8):

$$(\square + u^2)\tilde{F}_\mu = 0.$$

C.VI. Cálculo del Hamiltoniano MCS

Para determinar el Hamiltoniano canónico de la teoría MCS, es necesario calcular las siguientes relaciones:

Partiendo de (6.2.3) resulta

$$\partial_0 A_i = \Pi^i + \partial_i A_0 - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} A_j, \quad (\text{C.VI.1a})$$

$$F^{i0}(x) = \Pi^i(x) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} A_j(x), \quad (\text{C.VI.1b})$$

y de (C.I.4) se obtiene

$$\begin{aligned}
 B^0 &= \frac{1}{2} \varepsilon^{0ij} F_{ij} = \frac{1}{2} (\varepsilon^{012} F_{12} + \varepsilon^{021} F_{21}) \\
 &= \frac{1}{2} (F_{12} + F_{21}) \\
 &= F_{12} = \varepsilon^{0ij} \partial_i A_j,
 \end{aligned} \quad (\text{C.VI.2})$$

cabe aclarar que se usará la notación $T^{ij}T^{ij} \equiv (T^{ij})^2$.

La densidad Hamiltoniana es

$$H_{MCS}^0 = \Pi^\beta \partial_0 A_\beta - L = \Pi^\beta \partial_0 A_\beta + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} (\partial_\alpha A_\beta) A_\gamma,$$

trabajando con cada sumando de la expresión

- Para el primer término:

$$\begin{aligned}
 \Pi^\beta \partial_0 A_\beta &= \Pi^0 \partial_0 A_0 + \Pi^i \partial_0 A_i \\
 &= \Pi^i \left(\Pi^i + \partial_i A_0 - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} A_j \right) \\
 &= \Pi^i \Pi^i - A_0 \partial_i \Pi^i + \partial_i (\Pi^i A_0) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \Pi^i A_j,
 \end{aligned}$$

donde se usó la identidad $\Pi^i \partial_i A_0 = -A_0 \partial_i \Pi^i + \partial_i (\Pi^i A_0)$ y las relaciones (6.2.1), (C.VI.1a).

C.VI. CÁLCULO DEL HAMILTONIANO MCS

- Para el segundo término:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} &= \frac{1}{4}(F_{0\beta}F^{0\beta} + F_{i\beta}F^{i\beta}) \\
 &= \frac{1}{4}(2F_{i0}F^{i0} + 2F_{12}F^{12}) \\
 &= \frac{1}{2}(-F^{i0}F^{i0} + F_{12}F_{12}) \\
 &= -\frac{1}{2}\left(\Pi^i - \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0ij}A_j\right)^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon^{0ij}\partial_iA_j)^2,
 \end{aligned}$$

se remplazaron las relaciones (C.VI.1b) y (C.VI.2).

- Para el tercer sumando:

$$\begin{aligned}
 -\frac{k}{4\pi}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}(\partial_\alpha A_\beta)A_\gamma &= -\frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0\beta\gamma}(\partial_0 A_\beta)A_\gamma - \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{i\beta\gamma}(\partial_i A_\beta)A_\gamma \\
 &= -\frac{k}{4\pi}[\varepsilon^{0ij}(\partial_0 A_i)A_j + \varepsilon^{i0j}(\partial_i A_0)A_j + \varepsilon^{ij0}(\partial_i A_j)A_0] \\
 &= -\frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0ij}[(\partial_0 A_i)A_j - (\partial_i A_0)A_j + (\partial_i A_j)A_0] \\
 &= -\frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0ij}[F^{i0}A_j + (\partial_i A_j)A_0] \\
 &= -\frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0ij}\left[\left(\Pi^i - \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0ik}A_k\right)A_j + (\partial_i A_j)A_0\right] \\
 &= -\frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0ij}\Pi^iA_j + \left(\frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0ij}A_j\right)^2 - \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0ij}A_0(\partial_i A_j).
 \end{aligned}$$

De modo que la densidad Hamiltoniana queda

$$\begin{aligned}
 H_{MCS}^0 &= \Pi^\beta\partial_0 A_\beta + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}(\partial_\alpha A_\beta)A_\gamma \\
 &= \Pi^i\Pi^i - A_0\partial_i\Pi^i + \partial_i(\Pi^iA_0) - \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0ij}\Pi^iA_j - \frac{1}{2}\left(\Pi^i - \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0ij}A_j\right)^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon^{0ij}\partial_iA_j)^2 \\
 &\quad - \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0ij}\Pi^iA_j + \left(\frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0ij}A_j\right)^2 - \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0ij}A_0(\partial_iA_j), \\
 &= \Pi^i\Pi^i - 2(\Pi^i)\left(\frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0ij}A_j\right) + \left(\frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0ij}A_j\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\Pi^i - \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0ij}A_j\right)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\varepsilon^{0ij}\partial_iA_j)^2 - \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0ij}A_0(\partial_iA_j) - A_0\partial_i\Pi^i + \partial_i(\Pi^iA_0)^i, \\
 &= \left(\Pi^i - \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0ij}A_j\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\Pi^i - \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0ij}A_j\right)^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon^{0ij}\partial_iA_j)^2 \\
 &\quad - \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0ij}A_0(\partial_iA_j) - A_0\partial_i\Pi^i + \partial_i(\Pi^iA_0), \\
 &= \frac{1}{2}\left(\Pi^i - \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0ij}A_j\right)^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon^{0ij}\partial_iA_j)^2 - \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0ij}A_0(\partial_iA_j) - A_0\partial_i\Pi^i + \partial_i(\Pi^iA_0),
 \end{aligned}$$

con esto el Hamiltoniano canónico resulta

$$\begin{aligned}
 H_{c(MCS)} &= \int d^2x \left[\frac{1}{2} \left(\Pi^i - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} A_j \right)^2 + \frac{1}{2} (\varepsilon^{0ij} \partial_i A_j)^2 - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} A_0 (\partial_i A_j) - A_0 \partial_i \Pi^i \right] \\
 &\quad + \int d^2x \partial_i (\Pi^i A_0), \\
 &= \int d^2x \left[\frac{1}{2} \left(\Pi^i - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} A_j \right)^2 + \frac{1}{2} (\varepsilon^{0ij} \partial_i A_j)^2 - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} A_0 (\partial_i A_j) - A_0 \partial_i \Pi^i \right] \\
 &\quad + \oint_s^0 da_i (\Pi^i A_0),
 \end{aligned}$$

por las condiciones de frontera (A.I.2) la integral de superficie es nula, por lo tanto

$$H_{c(MCS)} = \int d^2x \left[\frac{1}{2} \left(\Pi^i - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} A_j \right)^2 + \frac{1}{2} (\varepsilon^{0ij} \partial_i A_j)^2 - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} A_0 (\partial_i A_j) - A_0 \partial_i \Pi^i \right].$$

Obteniendo así el Hamiltoniano canónico de la teoría MCS (6.2.4).

Apéndice D

Aplicación del método de Hamilton-Jacobi a la teoría de Maxwell-Chern-Simons

D.I. Cálculo de los PP de la tabla 7.2.1

A continuación se exponen los cálculo de los PP entre el conjunto de EDPHJ:

Para $\phi_0(x)$:

$$\begin{aligned}
 \{\phi_0(x), \phi_1(y)\} &= \left\{ p^0 + \frac{1}{2} \left[\Pi^i(x) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} A_j(x) \right]^2 + \frac{1}{2} [\varepsilon^{0ij} \partial_i^x A_j(x)]^2 - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} A_0(x) \partial_i^x A_j(x) \right. \\
 &\quad \left. - A_0(x) \partial_i^x \Pi^i(x), \Pi^0(y) \right\}, \\
 &= - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \{A_0(x), \Pi^0(y)\} \partial_i^x A_j(x) - \{A_0(x), \Pi^0(y)\} \partial_i^x \Pi^i(x) \\
 &= \boxed{- \left[\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_i^x A_j(x) + \partial_i^x \Pi^i(x) \right] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})}. \\
 \{\phi_0(x), \phi_2(y)\} &= \left\{ p^0 + \frac{1}{2} \left[\Pi^i(x) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} A_j(x) \right]^2 + \frac{1}{2} [\varepsilon^{0ij} \partial_i^x A_j(x)]^2 - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} A_0(x) \partial_i^x A_j(x) \right. \\
 &\quad \left. - A_0(x) \partial_i^x \Pi^i(x), \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^y A_l(y) + \partial_k^y \Pi^k(y) \right\}, \\
 &= - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ki} \left[\Pi^i(x) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0im} A_m(x) \right] \partial_k^y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{k}{4\pi} A_0(x) \varepsilon^{0ki} \partial_k^y \partial_i^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &\quad - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ik} \left[\Pi^i(x) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0im} A_m(x) \right] \partial_k^y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \frac{k}{4\pi} A_0(x) \varepsilon^{0ik} \partial_i^x \partial_k^y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \varepsilon^{0mn} \varepsilon^{0ik} \partial_i^x \partial_k^y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_m^x A_n(x), \\
 &= \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ik} \left\{ \left[\Pi^i(x) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0im} A_m(x) \right] - \left[\Pi^i(x) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0im} A_m(x) \right] \right\} \partial_k^y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= \boxed{0}.
 \end{aligned}$$

Para $\phi_1(x)$:

$$\begin{aligned}
 \{\phi_1(x), \phi_0(y)\} &= \left\{ \Pi^0(x), p^0 + \frac{1}{2} \left[\Pi^k(y) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} A_l(y) \right]^2 + \frac{1}{2} [\varepsilon^{0kl} \partial_k^y A_l(y)]^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} A_0(y) [\partial_k^y A_l(y)] - A_0(y) \partial_k^y \Pi^k(y) \right\}, \\
 &= \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \{A_0(y), \Pi^0(x)\} \partial_k^y A_l(y) + \{A_0(y), \Pi^0(x)\} \partial_k^y \Pi^k(y) \\
 &= \boxed{\left[\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^y A_l(y) + \partial_k^y \Pi^k(y) \right] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})}. \\
 \{\phi_1(x), \phi_1(y)\} &= \{\Pi^0(x), \Pi^0(y)\} = \boxed{0.} \\
 \{\phi_1(x), \phi_2(y)\} &= \left\{ \Pi^0(x), \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^y A_l(y) + \partial_k^y \Pi^k(y) \right\} = \boxed{0.}
 \end{aligned}$$

Para $\phi_2(x)$:

$$\begin{aligned}
 \{\phi_2(x), \phi_0(y)\} &= \left\{ \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_i^x A_j(x) + \partial_i^x \Pi^i(x), p^0 + \frac{1}{2} \left[\Pi^k(y) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} A_l(y) \right]^2 + \frac{1}{2} [\varepsilon^{0kl} \partial_k^y A_l(y)]^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} A_0(y) [\partial_k^y A_l(y)] - A_0(y) \partial_k^y \Pi^k(y) \right\}, \\
 &= \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_i^x \left[\left[\Pi^k(y) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0km} A_m(x) \right] \{A_j(x), \Pi^k(y)\} - A_0(y) \partial_k^y \{A_j(x), \Pi^k(y)\} \right] \\
 &\quad + \partial_i^x \left[\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \left[\Pi^k(y) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0km} A_m(y) \right] \{A_l(y), \Pi^i(x)\} \right. \\
 &\quad \left. - [\varepsilon^{0mn} \partial_m^y A_n(y)] \varepsilon^{0kl} \partial_k^y \{A_l(y), \Pi^i(x)\} + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} A_0(y) \partial_k^y \{A_l(y), \Pi^i(x)\} \right], \\
 &= \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_i^x \left\{ \left[\Pi^k(y) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0km} A_m(x) \right] - A_0(y) \partial_k^y \right\} \delta_j^k \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &\quad + \varepsilon^{0kl} \partial_i^x \left\{ \frac{k}{4\pi} \left[\Pi^k(y) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0km} A_m(y) \right] - [\varepsilon^{0mn} \partial_m^y A_n(y)] \partial_k^y \right. \\
 &\quad \left. + \frac{k}{4\pi} A_0(y) \partial_k^y \right\} \delta_l^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 &= \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ik} \partial_i^x \left\{ \left[\Pi^k(y) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0km} A_m(x) \right] - A_0(y) \partial_k^y \right\} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &\quad + \underbrace{\varepsilon^{0kl} \partial_l^x \left\{ \frac{k}{4\pi} \left[\Pi^k(y) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0km} A_m(y) \right] - [\varepsilon^{0mn} \partial_m^y A_n(y)] \partial_k^y + \frac{k}{4\pi} A_0(y) \partial_k^y \right\} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})}_{l \rightarrow i}, \\
 &= \varepsilon^{0ik} \partial_i^x \left\{ \frac{k}{4\pi} \left[\Pi^k(y) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0km} A_m(x) \right] - \cancel{\frac{k}{4\pi} A_0(y) \partial_k^y} - \cancel{\frac{k}{4\pi} \left[\Pi^k(y) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0km} A_m(y) \right]} \right. \\
 &\quad \left. - [\varepsilon^{0mn} \partial_m^y A_n(y)] \partial_k^y + \cancel{\frac{k}{4\pi} A_0(y) \partial_k^y} \right\} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 &= - \varepsilon^{0ik} \varepsilon^{0mn} [\partial_m^y A_n(y)] \cancel{\varepsilon^{0ik} \partial_i^x \partial_k^y} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \boxed{0.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{\phi_2(x), \phi_1(y)\} &= \left\{ \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_i^x A_j(x) + \partial_i^x \Pi^i(x), \Pi^0(y) \right\} = \boxed{0.} \\
 \{\phi_2(x), \phi_2(y)\} &= \left\{ \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_i^x A_j(x) + \partial_i^x \Pi^i(x), \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^y A_l(y) + \partial_k^y \Pi^k(y) \right\} \\
 &= \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ij} \partial_i^x \partial_k^y \{A_j(x), \Pi^k(y)\} - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_i^x \partial_k^y \{A_l(y), \Pi^i(x)\} \\
 &= \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ik} \partial_i^x \partial_k^y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ki} \partial_i^x \partial_k^y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \boxed{0.}
 \end{aligned}$$

D.II. Cálculo de los PP de la tabla 7.3.1

Calculando los PP entre los campos fundamentales de la teoría MCS con el conjunto de EDPHJ. Comenzando con $A_0(x)$:

$$\begin{aligned}
 \{A_0(x), \phi_0(y)\} &= \left\{ A_0(x), p^0 + \frac{1}{2} \left[\Pi^k(y) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} A_l(y) \right]^2 + \frac{1}{2} [\varepsilon^{0kl} \partial_k^y A_l(y)]^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} A_0(y) [\partial_k^y A_l(y)] - A_0(y) \partial_k^y \Pi^k(y) \right\} = \boxed{0.} \\
 \{A_0(x), \phi_1(y)\} &= \{A_0(x), \Pi^0(y)\} = \boxed{\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).} \\
 \{A_0(x), \phi_2(y)\} &= \left\{ A_0(x), \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^y A_l(y) + \partial_k^y \Pi^k(y) \right\} = \boxed{0.}
 \end{aligned}$$

Para $A_i(x)$:

$$\begin{aligned}
 \{A_i(x), \phi_0(y)\} &= \left\{ A_i(x), p^0 + \frac{1}{2} \left[\Pi^k(y) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} A_l(y) \right]^2 + \frac{1}{2} [\varepsilon^{0kl} \partial_k^y A_l(y)]^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} A_0(y) [\partial_k^y A_l(y)] - A_0(y) \partial_k^y \Pi^k(y) \right\}, \\
 &= \left[\Pi^k(y) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0km} A_m(y) \right] \{A_i(x), \Pi^k(y)\} - A_0(y) \partial_k^y \{A_i(x), \Pi^k(y)\} \\
 &= \boxed{\left[\Pi^i(y) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0im} A_m(y) + A_0(y) \partial_i^x \right] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).} \\
 \{A_i(x), \phi_1(y)\} &= \{A_i(x), \Pi^0(y)\} = \boxed{0.} \\
 \{A_i(x), \phi_2(y)\} &= \left\{ A_i(x), \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^y A_l(y) + \partial_k^y \Pi^k(y) \right\} \\
 &= \partial_k^y \{A_i(x), \Pi^k(y)\} \\
 &= \boxed{-\partial_i^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})}.
 \end{aligned}$$



Para $\Pi^0(x)$:

$$\begin{aligned}
 \{\Pi^0(x), \phi_0(y)\} &= \left\{ \Pi^0(x), p^0 + \frac{1}{2} \left[\Pi^k(y) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} A_l(y) \right]^2 + \frac{1}{2} [\varepsilon^{0kl} \partial_k^y A_l(y)]^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} A_0(y) \partial_k^y A_l(y) - A_0(y) \partial_k^y \Pi^k(y) \right\}, \\
 &= \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \{A_0(y), \Pi^0(x)\} \partial_k^y A_l(y) + \{A_0(y), \Pi^0(x)\} \partial_k^y \Pi^k(y) \\
 &= \boxed{\left[\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^y A_l(y) + \partial_k^y \Pi^k(y) \right] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})}.
 \end{aligned}$$

$$\{\Pi^0(x), \phi_1(y)\} = \{\Pi^0(x), \Pi^0(y)\} = \boxed{0.}$$

$$\{\Pi^0(x), \phi_2(y)\} = \left\{ \Pi^0(x), \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^y A_l(y) + \partial_k^y \Pi^k(y) \right\} = \boxed{0.}$$

Para $\Pi^i(x)$:

$$\begin{aligned}
 \{\Pi^i(x), \phi_0(y)\} &= \left\{ \Pi^i(x), p^0 + \frac{1}{2} \left[\Pi^k(y) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} A_l(y) \right]^2 + \frac{1}{2} [\varepsilon^{0kl} \partial_k^y A_l(y)]^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} A_0(y) [\partial_k^y A_l(y)] - A_0(y) \partial_k^y \Pi^k(y) \right\},
 \end{aligned}$$

con la finalidad de simplificar el cálculo, se procede a desarrollar cada PP no nulo de la anterior relación:

$$\begin{aligned}
 \clubsuit \left\{ \Pi^i(x), \frac{1}{2} \left[\Pi^k(y) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} A_l(y) \right]^2 \right\} &= \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ki} \left[\Pi^k(y) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0km} A_m(y) \right] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= \left[\frac{k}{4\pi} \varepsilon_{0ki} \Pi^k(y) - \left(\frac{k}{4\pi} \right)^2 \left(\delta_k^k \delta_i^m - \delta_k^m \delta_i^k \right) A_m(y) \right] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= - \left[\frac{k}{4\pi} \varepsilon_{0ik} \Pi^k(y) + \left(\frac{k}{4\pi} \right)^2 A_i(y) \right] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \clubsuit \left\{ \Pi^i(x), \frac{1}{2} [\varepsilon^{0kl} \partial_k^y A_l(y)]^2 \right\} &= - [\varepsilon^{0mn} \partial_m^y A_n(y)] \varepsilon^{0kl} \partial_k^y \{A_l(y), \Pi^i(x)\} \\
 &= - \frac{1}{2} \varepsilon_{0ki} \varepsilon^{0mn} F_{mn}(y) \partial_k^y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= \frac{1}{2} \partial_k^x F_{ki}(y) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \frac{1}{2} \partial_k^x F_{ik}(y) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= \partial_k^x F_{ki}(y) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \clubsuit \left\{ \Pi^i(x), - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^y A_l(y) \right\} &= \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} A_0(y) \partial_k^y \{A_l(y), \Pi^i(x)\} \\
 &= \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ik} \partial_k^x A_0(y) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
 \end{aligned}$$

D.II. CÁLCULO DE LOS PP DE LA TABLA 7.3.1

De manera que el PP entre $\Pi^0(x)$ y $\phi_0(y)$ es dado por

$$\{\Pi^i(x), \phi_0(y)\} = \left[-\frac{k}{4\pi} \varepsilon_{0ik} \Pi^k(y) - \left(\frac{k}{4\pi} \right)^2 A_i(y) + \partial_k^x F_{ki}(y) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ik} \partial_k^x A_0(y) \right] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

$$\{\Pi^i(x), \phi_1(y)\} = \{\Pi^i(x), \Pi^0(y)\} = \boxed{0.}$$

$$\begin{aligned} \{\Pi^i(x), \phi_2(y)\} &= \left\{ \Pi^i(x), \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^y A_l(y) + \partial_k^y \Pi^k(y) \right\} \\ &= -\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0kl} \partial_k^y \{\Pi^i(x), A_l(y)\} = \boxed{-\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{0ik} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})}. \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] Shmuel Elitzur, Gregory Moore, Adam Schwimmer, and Nathan Seiberg. Remarks on the canonical quantization of the chern-simons-witten theory. *Nuclear Physics B*, 326(1):108–134, 1989.
- [2] Zhenghan Wang. Topological quantum computation. University of California, Santa Barbara <http://web.math.ucsb.edu/~zhenghwa/data/course/cbms.pdf>, 2010.
- [3] Frank Wilczek. Quantum mechanics of fractional-spin particles. Institute for Theoretical Physics, University of California, Santa Barbara, C https://www.ifi.unicamp.br/~mtamash/f689_mecquant_i/prl49_957.pdf, 1982.
- [4] Marcos Mariño. Chern-simons theory and topological strings. Department of Physics, CERN <https://arxiv.org/abs/hep-th/0406005>, 2005.
- [5] GV Dunne. Aspects of chern–simons theory (1999). *arXiv preprint hep-th/9902115*, 1998.
- [6] Walter Greiner and Joachim Reinhardt. *Field quantization*. Springer Science & Business Media, 1996.
- [7] B.M. Pimentel y P.J: Pompeia M.C. Bertín. Formalismo de hamilton-jacobi à la carathéodory. Revista Brasileira de Ensino de Fisica, 2007.
- [8] Erwin Schrödinger. Collected papers on wave mechanics, 2003.
- [9] João Ricardo Pessoa de Araújo. Formalismo de hamilton-jacobi aplicado a teorias de campos topológicas. Universidade Federal da Bahia – UFBA. Instituto de Física, 2016.
- [10] Luis Alfredo Bravo Huertas. Formulación de hamilton-jacobi en teoría clásica de campos. Universidad de Nariño. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Departamento de Física <https://sired.udenar.edu.co/4629/1/86604.pdf>, 2013.
- [11] B.M. Pimentel y P.J: Pompeia M.C. Bertín. Formalismo de hamilton-jacobi à la carathéodory. parte 2: sistemas singulares. Revista Brasileira de Ensino de Fisica, 2008.
- [12] Badajoz. Apuntes de grupos de lie. <http://matematicas.unex.es/~ricarfr/LibroGLie.pdf>, 12 2017.
- [13] C.E. Valcárcel M.C. Bertín, B.M. Pimentel. Non-involutive constrained systems and hamilton-jacobi formalism. Instituto de Física Teórica - Sao Paulo State University, 2008.
- [14] Elena Oliva Lopez. Electrodinámica cuántica bidimensional, rernormalización. PhD thesis, Universidad de Salamanca, 2001.
- [15] Kevin Alexis Luna Muñoz. Teoría de maxwell-chern-simons libre y en interacción con campo fermiónico. Universidad de Nariño. Facultad de ciencias exactas y naturales. Departamento de física <https://sired.udenar.edu.co/7660/>, 2015.
- [16] Ashok Das. *Lectures on quantum field theory*. World Scientific, 2020.
- [17] Kurt Sundermeyer. Constrained dynamics: Lecture notes in physics. *Lecture Notes in Physics*, 169, 1982.
- [18] A Hanson and T Regge. Teitelboim constrained hamiltonian systems. *Accademia Nazionale Dei Lincei*, 1976.

BIBLIOGRAFÍA

- [19] Qiong-gui Lin and Guang-jiong Ni. Dirac quantization of chern-simons theories in (2+ 1) dimensions. *Classical and Quantum Gravity*, 7(7):1261, 1990.
- [20] Prof. Fiorenzo Bastianelli. On noether's theorems and gauge theories in hamiltonian formulation. Dipartimento di Fisica e Astronomia - Università di Bologna, 2019.
- [21] Walter Greiner. *Classical electrodynamics*. Springer Science & Business Media, 2012.