Permutaciones restringidas

Bilson Castro López

Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia

ALTENCOA, Agosto 2014
Pasto-Nariño.

Permutaciones restringidas

Patrón de una permutación

- Sea $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_n$ una permutación del grupo simétrico S_n. La permutación σ contiene el patrón $p = p_1 \ldots p_k \in S_k$ si existe una subsucesión $\sigma_{i1} \ldots \sigma_{ik}$ de σ, $1 \leq i_1 < i_2 \ldots < i_k$, tal que $\sigma_{is} < \sigma_{it}$ si y sólo si $p_s < p_t$, para $1 \leq s, t \leq k$

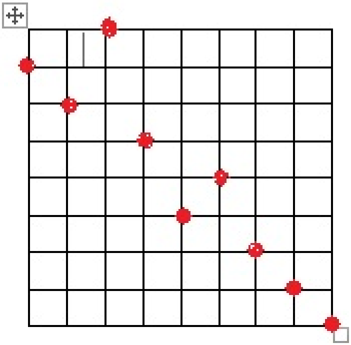
Patrón de una permutación

- Sea $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_n$ una permutación del grupo simétrico S_n. La permutación σ contiene el patrón $p = p_1 \ldots p_k \in S_k$ si existe una subsucesión $\sigma_{i1} \ldots \sigma_{ik}$ de σ, $1 \leq i_1 < i_2 \ldots < i_k$, tal que $\sigma_{is} < \sigma_{it}$ si y sólo si $p_s < p_t$, para $1 \leq s, t \leq k$
- El número de permtaciones de S_n que evitan la permutación p se denotará como $F_n(p)$.

Representación de las permutaciones

Representación de una permutación de S_9 en la región del plano $[1,9]x[1,9]$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 9 & 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



Algunos aportes importantes

- Sea $n, k \in \mathbb{N}$ y $e = 12\dots k$ la permutación identidad de S_k entonces

$$F_n(e) \leq ((k-1)^2)^n.$$

Algunos aportes importantes

- Sea $n, k \in \mathbb{N}$ y $e = 12 \ldots k$ la permutación identidad de S_k entonces
$$F_n(e) \leq ((k-1)^2)^n.$$
- Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $p \in S_3$ tenemos que $F_n(p) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

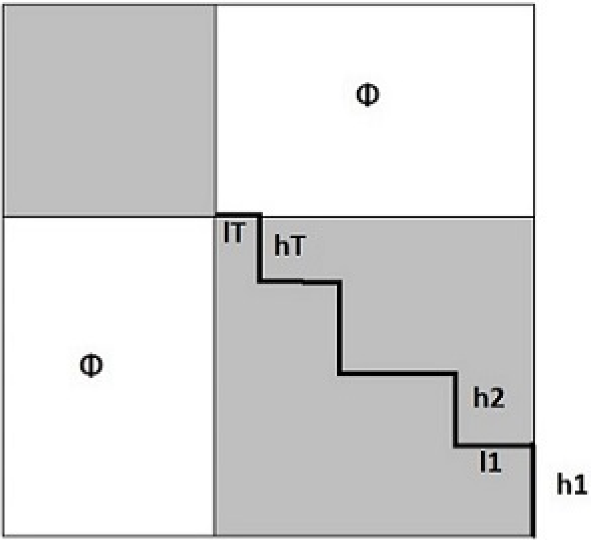
Stanley-Wilf-Marcus-Tardos

Theorem

Para cada $p \in S_k$ *existe* $C(p) \in \mathbb{R}^+$ *tal que*

$$F_n(p) \leq C^n(p)$$

Modelo geométrico



Resultados de la distribución geométrica

Theorem

Sea $S(h_1, R)$ el conjunto de permutaciones que evitan el patrón (123) y que tienen R escalones terminales.
Definamos $\alpha_L = \frac{(L+1)(L+2)}{R(R+1)}$ para $L = 0, \ldots, R-1$.
Si es el caso en que $h_1 \leq \frac{2}{R+2}\, n$, entonces.

$$\frac{\#\, \sigma : |x_{R-L} - \alpha_L h_1| \leq n^{\alpha}, L \in [0, R-1]}{\# S(h1, R)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

donde $\alpha > 1/2$.