

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física



Formulación de Hamilton-Jacobi para la ecuación de Proca

TRABAJO DE GRADO

Para optar por el título profesional de:

Físico

Juan Felipe Portillo Zambrano

San Juan de Pasto, Colombia
30 de septiembre del 2023

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Formulación de Hamilton-Jacobi para la ecuación de Proca

Juan Felipe Portillo Zambrano

TRABAJO DE GRADO

Director:

Dr. Germán Enrique Ramos Zambrano

San Juan de Pasto, Colombia
7 de Junio del 2024

©2024 - Juan Felipe Portillo Zambrano

«Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores»

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño

Todos los derechos reservados.

Nota de aceptación

Dr. Germán Enrique Ramos Zambrano

Director

Dr. Eduardo Rojas Peña

Jurado

Dr. Juan Carlos Salazar Montenegro

Jurado

San Juan de Pasto, Mes del grado 2024

Agradecimientos

Mi madre, mi padre y mi hermano me han brindado la posibilidad de dedicarme a aquello que me apasiona en todo aspecto de mi vida, agradezco a ellos la comprensión, amor y apoyo que he sentido a través de los años para llegar hasta esta instancia y que me permitirá seguir progresando.

La consecución de este trabajo ha sido posible principalmente por la guía de mi director, el Dr. Germán Ramos, a él agradezco la colaboración en este proceso y sobre todo el empeño y dedicación en su labor de enseñanza.

*Tu y yo entramos en ese camino escondido para
regresar al brillante mundo, olvidando lo demás,
treparemos hasta que ver las bellezas que trae el
universo, nuevamente contemplaremos las estrellas.*

Resumen

En este trabajo se aplica la formulación de Hamilton-Jacobi al campo de Proca, tanto para campos reales como complejos. La ecuación de Proca, una extensión de las ecuaciones de Maxwell, describe el comportamiento de partículas bosónicas masivas. Este estudio busca proporcionar una descripción alternativa a la teoría canónica tradicional mediante el uso del formalismo de Hamilton-Jacobi. Se han derivado las condiciones de integrabilidad, las ecuaciones características y se han construido corchetes generalizados para ambos tipos de campo. Además, se exploran las implicaciones de introducir una simetría de gauge local, lo cual ofrece una comprensión más profunda de la dinámica de los campos bosónicos. Los resultados confirman que la formulación de Hamilton-Jacobi es una herramienta efectiva para analizar y comprender la dinámica de los campos de Proca, validando su equivalencia con el enfoque canónico y ampliando el conocimiento en este campo.

Abstract

This work applies the Hamilton-Jacobi formulation to the Proca field, both for real and complex fields. The Proca equation, an extension of Maxwell's equations, describes the behavior of massive bosonic particles. This study aims to provide an alternative description to the traditional canonical theory using the Hamilton-Jacobi formalism. The conditions of integrability, characteristic equations, and generalized brackets have been derived for both types of fields. Additionally, the implications of introducing a local gauge symmetry are explored, offering a deeper understanding of the dynamics of bosonic fields. The results confirm that the Hamilton-Jacobi formulation is an effective tool for analyzing and understanding the dynamics of Proca fields, validating its equivalence with the canonical approach and expanding knowledge in this area.

Contenido

Aceptación	II
Agradecimientos	III
Dedicatoria	IV
Resumen	V
Abstract	VI
Glosario	IX
1. Introducción	1
2. Planteamiento del Problema	3
3. Objetivos	4
4. Campo de Proca real	5
4.1. Formulación de Hamilton-Jacobi	9
4.1.1. Condiciones de integrabilidad para el campo de Proca real	10
4.1.2. Ecuaciones características	13
4.2. Corchetes generalizados para el caso de Proca real	15
5. Campo de Proca complejo	19
5.1. Formulación de Hamilton-Jacobi	22
5.1.1. Condiciones de integrabilidad para el campo de Proca complejo	23
5.1.2. Ecuaciones características	25
5.2. Corchetes generalizados para el campo de Proca complejo	26
6. Campo de Proca con simetría de gauge	30
6.1. Invariancia de gauge local	30
6.2. Formulación Hamiltoniana	31
6.3. Formulación de Hamilton-Jacobi	32
6.3.1. Condiciones de integrabilidad	33
6.3.2. Ecuaciones características	35
6.3.3. Condiciones gauge	36
6.4. Corchetes generalizados	37

7. Resultados	39
8. Conclusiones	43
Apéndices	44
A. Cálculos para el campo de Proca real	45
A.1. Cálculos preliminares	45
A.2. Corchetes de Poisson entre los vínculos	47
A.3. Corchetes de Poisson entre los vínculos y los campos fundamentales	50
A.4. Cálculo de los corchetes generalizados	51
B. Cálculos para el campo de Proca complejo	57
B.1. Cálculos preliminares	57
B.2. Corchetes de Poisson entre los vínculos	60
B.3. Integrabilidad con el diferencial fundamental	64
B.4. Corchetes de Poisson entre las variables de espacio de fase y los vínculos	66
B.5. Cálculo de los corchetes generalizados	68
C. Cálculos para el campo de Proca con simetría gauge	73
C.1. la densidad Lagrangiana de Proca no es invariante de gauge	73
C.2. Deducción de la densidad Lagrangiana	74
C.3. Corchetes de Poisson entre los vínculos	76
C.4. Evolución dinámica de las variables del espacio de fase	78
C.5. Ecuaciones de Euler-Lagrange a nivel Hamiltoniano	82
C.6. Construcción de los corchetes generalizados	84
C.7. Cálculo de los corchetes generalizados	86
C.8. Deducción de las ecuaciones de movimiento	89

Glosario

- Bosón:** Partícula fundamenta de espín entero que obedece el principio de indistinguibilidad.
- Grados de libertad:** Número mínimo de coordenadas generalizadas para determinar el estado de un sistema físico.
- Densidad Lagrangiana:** Es una función que describe la dinámica de un campo en teoría de campos.
- Cuadrivector potencial:** Cuadrivector que combina los potenciales eléctrico y magnético en un vector de cuatro dimensiones.
- Vínculos:** Condiciones que ciertos campos o funciones deben satisfacer debido a simetrías, leyes de conservación o la estructura de la teoría misma.
- Matriz Hessiana:** Matriz cuadrada formada por las segundas derivadas parciales de una función de n variables.
- Transformación de Legendre:** Es una técnica matemática utilizada para cambiar la variable dependiente en una función a su derivada respecto de una variable independiente.
- Hamiltoniano canónico:** Función fundamental en la mecánica hamiltoniana, describe la energía total de un sistema físico en función de las coordenadas generalizadas y los momentos conjugados.
- Lagrangiano equivalente:** Es un Lagrangiano que describe la misma física y produce las mismas ecuaciones de movimiento para un sistema dado que el Lagrangiano original de la teoría.
- Corchetes de Poisson:** Estructura matemática fundamental en la mecánica clásica y en la teoría de sistemas dinámicos. Se utilizan para describir la evolución temporal de las funciones en el espacio de fases de un sistema dinámico y tienen una relación estrecha con las ecuaciones de movimiento de Hamilton.

- Derivada funcional:** Una derivada funcional es un concepto extendido de la derivada clásica, esta mide cómo cambia un funcional en respuesta a pequeñas variaciones de la función sobre la cual opera.
- EDPHJ:** Siglas para ecuaciones de diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi. Estas son utilizadas en la mecánica clásica para encontrar soluciones y describir la dinámica de sistemas físicos conservativos.
- Condición de integrabilidad:** Condición matemática que asegura que un sistema de ecuaciones diferenciales tiene una solución única y consistente.
- Ecuaciones características:** Son un conjunto de ecuaciones diferenciales totales derivadas de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de Hamilton-Jacobi (EDPHJ). Estas ecuaciones características permiten encontrar soluciones del sistema original mediante la determinación de una congruencia de curvas en el espacio de configuración.
- Corchetes generalizados:** Extensión de los corchetes de Poisson que se utilizan en sistemas con vínculos no involutivos dentro del formalismo de Hamilton-Jacobi. Los corchetes generalizados se introducen para proporcionar una estructura consistente para el análisis de la evolución del sistema.
- Vínculos no involutivos:** Los vínculos son no involutivos cuando no conmutan entre sí bajo los corchetes de Poisson. Esto significa que los corchetes de Poisson entre las restricciones no son cero, lo cual implica que las restricciones no forman un álgebra cerrada.
- Simetría de gauge local:** Grupo de simetría infinito que depende de un conjunto de parámetros definidos en el espacio-tiempo.
- Transformaciones gauge locales:** Son transformaciones de algún grado de libertad interno, que no modifican ninguna propiedad de las observables físicas.

Capítulo 1

Introducción

En teoría cuántica de campos, las interacciones fundamentales entre partículas se describen mediante campos que pertenecen a grupos de simetría específicos en concordancia con el modelo estándar de partículas. El más sencillo de ellos corresponde a la teoría de Maxwell del campo electromagnético, este es un campo gauge asociado a la simetría $U(1)$ que se estudia en la electrodinámica cuántica (QED). Aquí se establece una restricción sobre la masa en reposo del fotón, la cual es propuesta para ser cero, esto es consecuencia de que la inclusión de un término de masa generaría inconsistencias con el hecho de que la fuerza electromagnética es de largo alcance (en caso de tener masa habría un decaimiento exponencial de la fuerza). No obstante, al considerar una interacción de corto alcance se podría sugerir la implementación de una QED masiva [1].

Producto de esto surge la electrodinámica masiva de Proca, en ella se constituye el modelo más simple en el que se implementa una masa pequeña a los fotones [2]. A partir de esto, es posible describir en ella la propagación y las interacciones de partículas bosónicas de espín 1 [3]. El estudio de esta teoría a nivel clásico parte de la densidad Lagrangiana singular propuesta por Proca [4], la cual involucra una extensión de las ecuaciones de Maxwell. La singularidad de la teoría deviene en la aparición de ligaduras que no permiten la solución directa de las ecuaciones de movimiento.

Para determinar la dinámica que rige el comportamiento del campo de Proca se ha trabajado, en el marco de la teoría clásica de campos, mediante el método canónico propuesto por Dirac para sistemas con vínculos [5]. Sin embargo, existe un método alternativo y complementario a este para tratar las particularidades que presenta el estudio del sistema en cuestión, la formulación de Hamilton-Jacobi. En este trabajo se aplicará la teoría de Hamilton-Jacobi en tres casos diferentes de la teoría de Proca que ya han sido analizados con el método canónico, de tal forma que sea posible establecer la equivalencia entre ambos métodos.

En el capítulo 4 se desarrollará el método de Hamilton-Jacobi para el campo de Proca real, este se enfoca en el estudio de partículas sin carga. Aquí, partiendo de corroborar la singularidad de la densidad Lagrangiana propuesta para el campo real, se discutirán las condiciones de integrabilidad, las ecuaciones características y la construcción de corchetes generalizados según se propone

en el trabajo de grado, *Formulación de Hamilton-Jacobi en teoría clásica de campos* [6] y en el artículo *Non-Involutive Constrained Systems and Hamilton-Jacobi Formalism* [7]. Luego, el capítulo 5 se centrará en un procedimiento análogo aplicado al campo de Proca complejo, en el cual se trata con partículas cargadas. En ambos casos el propósito es determinar las ecuaciones de movimiento para los grados de libertad del sistema.

En el capítulo 6, considerando que es posible construir un Lagrangiano invariante de gauge según se establece en el informe técnico, *Teoría de fotones masivos en las coordenadas de plano nulo* [2], se propone un objetivo adicional a los planteados en primera instancia. Estudiar, a través de la aplicación de la formulación de Hamilton-Jacobi, las consecuencias que implica modificar la densidad Lagrangiana de Proca para satisfacer la simetría de gauge local en las ecuaciones de movimiento, incluyendo en ellas condiciones gauge que sean coherentes con los vínculos del sistema.

Finalmente en los capítulos 7 y 8 se presentarán los resultados y las conclusiones referentes al desarrollo del trabajo y los objetivos propuestos.

Capítulo 2

Planteamiento del Problema

La ecuación de Proca es una extensión de las ecuaciones de Maxwell, capaz de describir el comportamiento de vectores bosónicos masivos tal como su propagación e interacciones, conceptos directamente relacionados con el desarrollo del modelo estándar de la física. Usualmente su descripción parte de una densidad Lagrangiana singular, la cual puede complicar la interpretación de la dinámica del sistema.

En orden de ampliar el conocimiento en este campo, en este trabajo se pretende aplicar la formulación de Hamilton-Jacobi al campo de Proca con el propósito de realizar una descripción alternativa al estudio canónico tradicional, con esto surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Como se describe la teoría del campo de Proca bajo la formulación de Hamilton-Jacobi?

Capítulo 3

Objetivos

Objetivo General

Estudiar el campo de Proca mediante la formulación de Hamilton-Jacobi.

Objetivos específicos

- Aplicar la teoría de Hamilton-Jacobi a la ecuación de Proca para el campo real.
- Aplicar la teoría de Hamilton-Jacobi a la ecuación de Proca para el campo complejo.
- Encontrar la equivalencia de la formulación de Hamilton-Jacobi con el método canónico.

Capítulo 4

Campo de Proca real

En el año 1936, el físico rumano Alexandru Proca, propone una teoría para el estudio de partículas masivas de spin 1, añadiendo un término de masa como una extensión a las ecuaciones de Maxwell [4], inaugurando así el concepto de lo que hoy se conoce como *ecuación de Proca*. Para llegar a ella, comúnmente, se desarrolla un estudio del campo de Proca por medio del método de Dirac para sistemas con vínculos [5], sin embargo, la teoría de Hamilton-Jacobi propone un método alternativo para tratar con este tipo de sistemas. Este capítulo se centra en aplicar la formulación de Hamilton-Jacobi en el campo de Proca real (neutro), donde se consideran las interacciones de partículas sin carga, con el fin de reproducir los resultados del método canónico.

En teoría de campos, la presencia de infinitos grados de libertad evoca la aparición de la densidad lagrangiana, que, para el campo de Proca real (trabajando con unidades naturales) corresponde a [3]:

$$\mathcal{L} = \frac{m^2}{2} A_\mu(x) A^\mu(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x), \quad (4.1)$$

donde se concibe al cuadvivector potencial $A_\mu(x) = A_\mu(t, \vec{x})$, como la variable dinámica que mejor describe el comportamiento del campo en cuestión. Aquí $F_{\mu\nu}$ se conoce como tensor de campo electromagnético, definido de la forma:

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (4.2)$$

Sin embargo, para obtener una teoría bien definida, se debe considerar que A_μ estará sometido a ciertas condiciones de frontera [1]. En primer lugar, tenderá a cero cuando la parte espacial tienda a infinito,

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} A_\mu(x) \rightarrow 0, \quad (4.3)$$

por otro lado, se busca que la acción sea estacionaria, $\delta \left[\int L dt \right] = 0$, siendo necesario que al hacer una variación infinitesimal arbitraria,

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \delta A_\mu(x),$$

se cumpla que

$$\delta A_\mu(x) |_{t_{inicial}} = \delta A_\mu(x) |_{t_{final}} = 0. \quad (4.4)$$

Se pueden ver explícitamente las componentes del campo $F_{\mu\nu}$ si se sustituyen los valores del cuadvectores potencial $A_\mu = (A_0, -A_k)$ en (4.2), con lo cual las componentes del tensor de campo electromagnético son

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \rightarrow F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

de lo que se infiere que es un tensor antisimétrico; cabe resaltar que se utilizará a lo largo de todo el trabajo el convenio de notación donde los índices de letras griegas toman valores de (0,1,2,3) y los de letras latinas toman valores de (1,2,3).

Es importante resaltar que los sistemas con vínculos son descritos mediante Lagrangianos singulares, el campo de Proca recae sobre la definición de este tipo de sistemas, infiriendo que su correspondiente densidad Lagrangiana (4.1) es singular, cosa que se puede comprobar calculando el determinante de la matriz Hessiana asociada a ella. Se conoce que su expresión matemática es de la forma

$$W^{\nu\beta}(x, y) \equiv \frac{\delta^2 L}{\delta \dot{A}_\beta(x) \delta \dot{A}_\nu(y)} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\beta \partial \dot{A}_\nu} \delta^3(x - y) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\beta) \partial (\partial_0 A_\nu)} \delta^3(x - y) \quad (4.6)$$

donde, por un parte ¹

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta A_\alpha)} = -F^{\beta\alpha}. \quad (4.7)$$

Si $\beta = 0$, entonces se tiene que ²

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\alpha)} = -F^{0\alpha} = F^{\alpha 0}, \quad (4.8)$$

¹En el Apéndice A.1 se pueden ver los cálculos correspondientes a esta sección.

²Nótese la antisimetría del tensor $F^{0\alpha}$ en (4.8).

y derivando de nuevo,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\alpha) \partial(\partial_0 A_\beta)} = \eta^{0\beta} \eta^{\alpha 0} - \eta^{00} \eta^{\alpha\beta}. \quad (4.9)$$

Donde η corresponde a la métrica de Minkowski. Por tanto,

$$W^{\nu\beta}(x, y) = (\eta^{0\nu} \eta^{\beta 0} - \eta^{00} \eta^{\beta\nu}) \delta^3(x - y). \quad (4.10)$$

Recordando que

$$\eta^{\nu\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

la matriz Hessiana será

$$W^{\nu\beta}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^3(x - y). \quad (4.12)$$

Es evidente que el determinante de esta matriz es igual a cero, con lo cual se afirma que la densidad Lagrangiana del campo de Proca real es singular. Se conoce, del estudio de Dirac, que este tipo de densidad Lagrangiana impide, desde el punto de vista Hamiltoniano, la resolución de las ecuaciones que definen los momentos canónicos para expresar todas las velocidades en términos de las coordenadas y los momentos [8]. De esta forma, la singularidad de la densidad Lagrangiana implica ligaduras que modifican el número de grados de libertad del sistema en cuestión, las cuales surgen de la definición de los momentos canónicos conjugados.

En orden de completar la formulación Hamiltoniana, es menester encontrar los momentos canónicos π^μ asociados a los campos A_μ , para esto es necesario utilizar como parámetro de evolución a la coordenada x^0 , cuyas velocidades relativas asociadas a los campos serán definidas por $\dot{A}_\mu \equiv \partial_0 A_\mu$, con esto se establece que los momentos canónicos se definen como:

$$\pi^\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{A}_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)}.$$

Donde, recordando la definición (4.2), se determina que,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} = F^{\nu 0} = \pi^\nu. \quad (4.13)$$

Es aquí donde surge el primer vínculo del sistema [9], pues, de acuerdo al tensor antisimétrico $F^{\mu\nu}$, se sabe que para el caso $\nu = 0$ se pone de manifiesto que,

$$F^{00} = \pi^0 = 0$$

Esto, permite definir el primer vínculo del sistema como:

$$\phi^1 \equiv \pi^0 = 0. \quad (4.14)$$

Desde el punto de vista de Hamilton-Jacobi se identifica como una ecuación diferencial parcial. En cuánto al caso en que $\nu \neq 0$ se deduce que,

$$\begin{aligned} \pi^k &= F^{k0} = -F_{k0} \\ &= -\partial_k A_0 + \partial_0 A_k \\ &= \dot{A}_k - \partial_k A_0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Con lo cual se logró construir una ecuación dinámica en el espacio de fase, expresando las componentes de las velocidades en función de los momentos canónicos y los campos.

En base a esto, ahora, es posible calcular el Hamiltoniano canónico del sistema por medio de una transformación de Legendre [10]:

$$H_c = \int d^3x \left[\pi^\mu(x) \dot{A}_\mu(x) - \mathcal{L} \right]. \quad (4.16)$$

Luego, lo que está entre corchetes será reconocido como la densidad Hamiltoniana canónica del campo de Proca real,

$$\mathcal{H}_c \equiv \pi^\mu(x) \dot{A}_\mu(x) - \mathcal{L}. \quad (4.17)$$

Recordando (4.1) y en vista de que $\pi^0 = 0$, al expandir la suma sobre índices, se simplifica la expresión anterior como³:

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2} \pi^k \pi^k + \pi^k \partial_k A_0 - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu + \frac{1}{4} F_{ki} F^{ki}. \quad (4.18)$$

Con lo cual el Hamiltoniano canónico será de la forma,

$$H_c = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \pi^k \pi^k + \pi^k \partial_k A_0 - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu + \frac{1}{4} F_{ki} F^{ki} \right],$$

sin embargo, si se considera que,

³Esta simplificación se detalla en el apéndice A.1.

$$\pi^k (\partial_k A_0) = \partial_k (\pi^k A_0) - (\partial_k \pi^k) A_0,$$

el Hamiltoniano se reescribe de tal manera que:

$$\begin{aligned} H_c &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \pi^k \pi^k - (\partial_k \pi^k) A_0 - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu + \frac{1}{4} F_{ki} F^{ki} \right] + \int d^3x [\partial_k (\pi^k A_0)] \\ &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \pi^k \pi^k - (\partial_k \pi^k) A_0 - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu + \frac{1}{4} F_{ki} F^{ki} \right] + \oint d\mathbf{a} \cdot [\nabla (\pi A_0)]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

En lo anterior se empleó el teorema de Gauss en tres dimensiones y, para lidiar con esta integral, se debe recordar la condición de frontera (4.3), con lo cual, la última integral será igual a cero, pues dicho termino no es más que una integral cerrada realizada sobre el contorno de una superficie que se extiende hacia el infinito. Con esto en cuenta, la densidad Hamiltoniana canónica se reduce a,

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2} \pi^k \pi^k - (\partial_k \pi^k) A_0 - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu + \frac{1}{4} F_{ki} F^{ki}. \quad (4.20)$$

4.1. Formulación de Hamilton-Jacobi

Habiendo establecido el Hamiltoniano canónico del sistema, se comienza a implementar la formulación de Hamilton-Jacobi; el primer paso es plantear la ecuación de Hamilton-Jacobi. Para ello, es indispensable definir una función arbitraria que dependerá de las coordenadas y del tiempo, la *función principal de Hamilton* [11]; dicha función, denotada como $S(x)$, es una función generadora de transformaciones canónicas, que se define de tal forma que se pueda formar con ella un Lagrangiano equivalente al Lagrangiano de Proca [12].

De esta manera, la ecuación de Hamilton-Jacobi, se expresa como,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_c = 0. \quad (4.21)$$

Para este estudio, es más conveniente trabajar en términos de densidades, por lo que si se define $P^t \equiv \frac{\partial S}{\partial t}$, la ecuación de Hamilton-Jacobi se reescribe como:

$$P^t + H_c = \int d^3x (p^t + \mathcal{H}_c).$$

Así, surge una nueva ligadura del sistema (ϕ^0), a partir de la cual, en conjunción con ϕ^1 , se forma el sistema de ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi (EDPHJ),

$$\begin{aligned}\phi^0 &\equiv p^t + \mathcal{H}_c = 0, \\ \phi^1 &\equiv \pi^0 = 0.\end{aligned}\tag{4.22}$$

Para determinar la evolución dinámica de un sistema de Lagrangiano singular se deben asociar estas ligaduras con variables independientes que, para el caso de ϕ^0 se ha asociado con t debido a su inherente relación con la dinámica del sistema que brinda la densidad Hamiltoniana [6], sin embargo, para ϕ^1 se define una variable que expandirá el espacio de parámetros independientes. Dicha variable se denota como $\omega_1(x)$ que se considera arbitraria. Con esto en cuenta, la evolución de una variable dinámica $F(x)$ se expresa por medio de [7]:

$$dF(x) = \int d^3y [\{F(x), \phi^0(y)\} dt + \{F(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y)]. \tag{4.23}$$

Como consecuencia de la definición del espacio de fase bajo las variables A_μ y π^μ , los corchetes de Poisson entre dos variables dinámicas $F[A_i(x), \pi^i(x)] = F(x)$ y $G[A_i(y), \pi^i(y)] = G(y)$ se definen de la forma,⁴

$$\{F(x), G(y)\} \equiv \int d^3z \left[\frac{\delta F(x)}{\delta A_\mu(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \pi^\mu(z)} - \frac{\delta F(x)}{\delta \pi^\mu(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta A_\mu(z)} \right]_{x_0=y_0}. \tag{4.24}$$

Donde $x_0 = y_0$ indica que los corchetes deben ser calculados en el mismo instante de tiempo. En teoría de campos se tiene una ligadura por cada punto del espacio, es por esta razón que en la expresión (4.23) la integral representa la suma sobre todos estos vínculos en todos los puntos (x) . A partir de esta definición se calculan los corchetes de Poisson fundamentales, que son:

$$\{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\} = \delta_\mu^\nu \delta^3(x - y), \tag{4.25}$$

$$\{A_\mu(x), A_\nu(y)\} = 0 = \{\pi^\mu(x), \pi^\nu(y)\}. \tag{4.26}$$

4.1.1. Condiciones de integrabilidad para el campo de Proca real

En este punto se debe recordar que todo sistema que sea integrable tendrá que cumplir la condición de integrabilidad de Frobenius, para lo cual es preciso poder formar un conjunto de EDPHJ completo que esté en involución con los corchetes de Poisson. Inicialmente el campo de Proca real no cumple con esta propiedad, las condiciones bajo las cuáles se forma dicho conjunto serán dictadas por la evolución dinámica de los vínculos (4.22). Por ende, para verificar la integrabilidad de ϕ^1 se exigirá,

$$d\phi^1(x) = 0, \tag{4.27}$$

⁴Se debe destacar que estas variables dinámicas corresponden a funcionales de A_i y π^i , ello modifica la definición de los corchetes de Poisson, Considerando el concepto de derivadas funcionales [10].

a partir de la ecuación (4.23) se plantea la siguiente integral,

$$d\phi^1(x) = \int d^3y [\{\phi^1(x), \phi^0(y)\} dt + \{\phi^1(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y)] = 0. \quad (4.28)$$

De acuerdo a la definición (4.24), los corchetes de Poisson presentes serán⁵:

$$\{\phi^1(x), \phi^0(y)\} = [\partial_k^y \pi^k(y) + m^2 A^0(y)] \delta^3(x - y). \quad (4.29)$$

$$\{\phi^1(x), \phi^1(y)\} = 0. \quad (4.30)$$

Utilizando estos resultados la ecuación (4.29) se reduce a,

$$d\phi^1(x) = [\partial_k^x \pi^k(x) + m^2 A^0(x)] dt = 0. \quad (4.31)$$

Con lo cual, la condición de integrabilidad ha generado una nueva ligadura, interpretada en el formalismo de Hamilton-Jacobi como una ecuación diferencial parcial de la forma

$$\phi^2 \equiv \partial_k^x \pi^k(x) + m^2 A^0(x) = 0. \quad (4.32)$$

Esta ecuación hará parte del conjunto de EDPHJ, de modo que se debe verificar su integrabilidad exigiendo que

$$d\phi^2(x) = 0. \quad (4.33)$$

Nuevamente, esto conduce a que se cumpla,

$$d\phi^2(x) = \int d^3y [\{\phi^2(x), \phi^0(y)\} dt + \{\phi^2(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y)] = 0. \quad (4.34)$$

Donde:

$$\{\phi^2(x), \phi^0(y)\} = -\partial_i^x \partial_k^x F^{ki}(x) \delta^3(x - y) + m^2 \pi^0(y) \delta^3(x - y). \quad (4.35)$$

Recordando que el producto entre un tensor simétrico y uno antisimétrico es nulo, se concluye,

⁵Los cálculos de los corchetes de Poisson entre los vínculos están detallados en el apéndice A.2.

$$\{\phi^2(x), \phi^0(y)\} = m^2 \pi^0(y) \delta^3(x-y). \quad (4.36)$$

Por otra parte,

$$\{\phi^2(x), \phi^1(y)\} = m^2 \delta^3(x-y). \quad (4.37)$$

Sustituyendo estos resultados en (4.34), se llega a,

$$d\phi^2(x) = m^2 \pi^0(x) dt + m^2 d\omega_1(x) = 0. \quad (4.38)$$

Con lo cual, la condición de integrabilidad ha generado una nueva ecuación diferencial parcial entre las variables independientes del sistema,

$$\begin{aligned} m^2 \pi^0(x) dt + m^2 d\omega_1(x) &= 0 \\ -\pi^0(x) dt &= d\omega_1(x) \\ -\pi^0(x) &= \frac{d\omega_1(x)}{dt}. \end{aligned}$$

Siendo que $\phi^1 \equiv \pi^0 = 0$, entonces se puede afirmar que para que se cumpla la condición de integrabilidad, es necesario que ω_1 sea constante respecto al tiempo.

Con la condición de integrabilidad satisfecha, se indica que no hay más ecuaciones diferenciales parciales en el sistema, a su vez formando el sistema completo de EDPHJ compuesto por:

$$\begin{aligned} \phi^0 &\equiv p^0 + \mathcal{H}_c = 0, \\ \phi^1 &\equiv \pi^0 = 0, \\ \phi^2 &\equiv \partial_k^x \pi^k + m^2 A^0 = 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

A raíz de esto se debe expandir el espacio de variables independientes para relacionar un parámetro a ϕ^2 . Esta variable será arbitraria y designada como $\omega_2(x)$ ⁶. Con esto en cuenta, se debe redefinir el diferencial fundamental (4.23) de la forma,

$$dF(x) = \int d^3y [\{F(x), \phi^0(y)\} dt + \{F(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{F(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)]. \quad (4.40)$$

Utilizando esto, se debe verificar nuevamente las condiciones de integrabilidad, cuyo resultado se espera que sean ecuaciones diferenciales que relacionen los campos fundamentales con las variables independientes [13].

⁶La arbitrariedad de ω_1 y ω_2 es fundamental para no modificar la dinámica del sistema al añadir los nuevos vínculos al conjunto de EDPHJ.

Para ϕ^1 :

$$\begin{aligned} d\phi^1(x) &= \int d^3y [\{\phi^1(x), \phi^0(y)\} dt + \{\phi^1(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{\phi^1(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)] \\ &= \phi^2 dt - m^2 d\omega_2(x) = 0, \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$[\partial_k^x \pi^k(x) + m^2 A^0(x)] dt = m^2 d\omega_2(x). \quad (4.41)$$

Para ϕ^2 :

$$\begin{aligned} d\phi^2(x) &= \int d^3y [\{\phi^2(x), \phi^0(y)\} dt + \{\phi^2(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{\phi^2(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)] \\ &= m^2 \pi^0(x) dt + m^2 d\omega_1(x), \end{aligned} \quad (4.42)$$

resultando en

$$\pi^0(x) dt = -d\omega_1(x). \quad (4.43)$$

Se resalta el hecho de que en las ecuaciones (4.41) y (4.43) se ha conseguido una relación entre las variables independientes ω_1 y ω_2 con el tiempo, lo que da pie a la posibilidad de redefinir la dinámica del sistema en términos del parámetro temporal, cosa que será analizada en la sección §4.2.

Estas relaciones, por otra parte, establecen que el conjunto de EDPHJ está completo y las ecuaciones características son integrables.

4.1.2. Ecuaciones características

El método de Hamilton-Jacobi presentado por Carathéodory contiene una poderosa interpretación geométrica de los sistemas dinámicos, pues, a partir del resultado encontrado de la evolución de una variable dinámica $dF(x)$, es posible describir las trayectorias dinámicas del sistema asociadas al conjunto de EDPHJ mediante el método de las ecuaciones características de Cauchy [12], de tal manera que se obtengan las ecuaciones de movimiento para el campo de Proca real. En base a lo anterior, se deberá determinar la evolución de las variables dinámicas del espacio de fase (A_i, π^i) .

El diferencial de A_i será:

$$dA_i(x) = \int d^3y [\{A_i(x), \phi^0(y)\} dt + \{A_i(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{A_i(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)]. \quad (4.44)$$

Donde los corchetes de Poisson corresponden a⁷:

⁷Los cálculos de los corchetes de Poisson entre A_i , π^i y los vínculos están detallados en el apéndice A.3.

$$\{A_i(x), \phi^0(y)\} = [\pi^i(y) - \partial_i^y A_0(y)] \delta^3(x-y), \quad (4.45)$$

$$\{A_i(x), \phi^1(y)\} = 0, \quad (4.46)$$

$$\{A_i(x), \phi^2(y)\} = \partial_i^y \delta^3(x-y). \quad (4.47)$$

Por otra parte, para el diferencial de π^i se tiene:

$$d\pi^i(x) = \int d^3y [\{\pi^i(x), \phi^0(y)\} dt + \{\pi^i(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{\pi^i(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)]. \quad (4.48)$$

Donde:

$$\{\pi^i(x), \phi^0(y)\} = \left[\frac{1}{2} (\delta_j^i \partial_k^x - \delta_k^i \partial_j^x) F^{kj}(y) + m^2 A^i(y) \right] \delta^3(x-y), \quad (4.49)$$

$$\{\pi^i(x), \phi^1(y)\} = \{\pi^i(x), \pi^0(y)\} = 0, \quad (4.50)$$

$$\{\pi^i(x), \phi^2(y)\} = \{\pi^i(x), \partial_k^y \pi^k(y) + m^2 A^0(y)\} = 0. \quad (4.51)$$

Utilizando estos resultados en (4.44) se determina que:

$$dA_i(x) = [\pi^i(x) - \partial_i^x A_0(x)] dt - \partial_i^x d\omega_2(x). \quad (4.52)$$

Definiendo $\dot{A}_i(x) \equiv \partial_0 A_i$ y $\dot{\omega}_2(x) \equiv \partial_0 \omega_2(x)$ se llega a,

$$\dot{A}_i(x) = [\pi^i(x) + \partial_i^x A_0(x)] - \partial_i^x \dot{\omega}_2(x). \quad (4.53)$$

Si se compara con (4.15) (que surge de la definición de momentos canónicos), se puede establecer para el campo independiente $\omega_2(x)$ la condición,

$$\partial_i^x \dot{\omega}_2(x) = \partial_i^x \partial_0 \omega_2(x) = 0,$$

con lo cual (4.53) se convierte en

$$\dot{A}_i(x) = \pi^i(x) + \partial_i^x A_0(x). \quad (4.54)$$

De igual manera, la evolución dinámica del campo $\pi^i(x)$ en (4.48), se reduce a

$$d\pi^i(x) = [\partial_k^x F^{ki}(x) + m^2 A^i(x)] dt, \quad (4.55)$$

Que se puede escribir como

$$\dot{\pi}^i(x) = \partial_k^x F^{ki}(x) + m^2 A^i(x). \quad (4.56)$$

La expresión anterior se puede escribir de la siguiente manera:

$$\partial_\mu F^{\mu i} + m^2 A^i = 0, \quad (4.57)$$

pero, reescribiendo el vínculo ϕ^2 como,

$$\partial_\mu F^{\mu 0} + m^2 A^0 = 0, \quad (4.58)$$

donde se ha sumado el término $F^{00} = 0$, y sumando con (4.57) se consigue:

$$\partial_\mu F^{\mu 0} + m^2 A^0 + \partial_\mu F^{\mu i} + m^2 A^i = 0,$$

Esta expresión se puede compactar en lo que se conoce como la ecuación de campo de Proca [14],

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0. \quad (4.59)$$

4.2. Corchetes generalizados para el caso de Proca real

El método de Hamilton-Jacobi propone redefinir la dinámica a través de los corchetes generalizados (CG), de tal manera que las variables independientes sean reescritas en términos de t con el propósito de eliminar la arbitrariedad generada por la expansión del espacio de variables independientes [7].

Ahora, con todos los vínculos encontrados, podemos formar un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} \phi^0 &= p^t + \mathcal{H} = 0, \\ \phi^1 &= \pi^0 = 0, \\ \phi^2 &= \partial_k \pi^k + m^2 A^0 = 0. \end{aligned}$$

Para verificar si este sistema de EDPHJ se encuentra en involución, se deben calcular los corchetes de Poisson entre los vínculos no relacionados al parámetro temporal.

$$\begin{aligned} \{\phi^1(x), \phi^1(y)\} &= 0, \\ \{\phi^1(x), \phi^2(y)\} &= -m^2 \delta^3(x-y), \\ \{\phi^2(x), \phi^2(y)\} &= 0, \\ \{\phi^2(x), \phi^1(y)\} &= m^2 \delta^3(x-y). \end{aligned}$$

Con lo cual se afirma que se trabaja con un sistema no involutivo [7]. Es posible definir una matriz antisimétrica con estos resultados que será de la forma ⁸

$$M(x, y) \equiv \begin{pmatrix} \{\phi^1, \phi^1\} & \{\phi^1, \phi^2\} \\ \{\phi^2, \phi^1\} & \{\phi^2, \phi^2\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -m^2 \\ m^2 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y). \quad (4.60)$$

Esta corresponde a una matriz funcional (dada la dependencia de la delta de Dirac), cuya importancia es vital en el formalismo de Hamilton-Jacobi, que propone los corchetes generalizados por medio de los cuales se consigue determinar los grados de libertad del sistema. Sin embargo, la definición de los corchetes generalizados involucra conocer la matriz inversa de $M(x, y)$, la cual se puede demostrar que es de la forma:

$$(M^{-1})(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & m^{-2} \\ -m^{-2} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y). \quad (4.61)$$

Conocida la inversa y dado el hecho de que $M^{nl}(x, y)$ es regular, los corchetes generalizados se definen como [6]:

$$\{F(x), G(y)\}^* \equiv \{F(x), G(y)\} - \int \int d^3u d^3v \{F(x), \phi^n(u)\} (M^{-1})^{nl}(u, v) \{\phi^l(v), G(y)\}. \quad (4.62)$$

Considerando la forma de la matriz M^{-1} , al expandir sobre los índices (n, l) se tiene:

$$\begin{aligned} \{F(x), G(y)\}^* &= \{F(x), G(y)\} - \int \int d^3u d^3v \{F(x), \phi^1(u)\} (M^{-1})^{12}(u, v) \{\phi^2(v), G(y)\} \\ &\quad - \int \int d^3u d^3v \{F(x), \phi^2(u)\} (M^{-1})^{21}(u, v) \{\phi^1(v), G(y)\}, \end{aligned}$$

ya que las demás combinaciones de $\{n, l\}$ en la matriz son cero.

Ahora, recordando el conjunto de EDPHJ para el campo de Proca real, se puede hacer un conteo de las variables realmente independientes del espacio de fase. Inicialmente, el espacio de fase se describe mediante:

$$(A_\mu, \pi^\mu) = (A_0, \pi^0, A_i, \pi^i), \quad (4.63)$$

donde $i = \{1, 2, 3\}$, pero, considerando que $\pi^0 = 0$ y que A_0 depende de π^i debido al vínculo ϕ^2 , el espacio de variables independientes que constituyen los grados de libertad son únicamente (A_i, π^i) , por tanto, el cálculo de los corchetes generalizados entre los grados de libertad son ⁹:

$$\begin{aligned} \{A_i(x), A_k(y)\}^* &= 0 = \{\pi^i(x), \pi^k(y)\}^*, \\ \{A_i(x), \pi^k(y)\}^* &= \delta_i^k \delta^3(x - y). \end{aligned} \quad (4.64)$$

⁸La deducción de la matriz inversa está detallada en el apéndice A.4

⁹Los cálculos de los corchetes generalizados de esta sección se encuentran en A.4.

Estos resultados son idénticos al cálculo de los corchetes de Dirac [3], denotando la validez de la formulación de Hamilton-Jacobi, capaz de reproducir los resultados del método canónico.

Habiendo establecido los corchetes generalizados y los grados de libertad del sistema, la evolución de una variable dinámica $F(x) = F[A_i(x), \pi^i(x)]$ será de la forma:

$$dF(x) = \int d^3y [\{F(x), \phi^0(y)\}^* dt]. \quad (4.65)$$

Sin embargo, dado el conteo de los grados de libertad, la densidad Hamiltoniana canónica, se verá modificada a razón de que en ella hay aportes de A_0 , un elemento que no hace parte de los grados de libertad realmente, por tanto, considerando que según el vínculo ϕ^2 , se debe cumplir que $-\frac{1}{m^2}\partial_k\pi^k = A^0$, entonces $\mathcal{H}_c$ se reescribe como

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &= \frac{1}{2}\pi^k\pi^k - (\partial_k\pi^k)A^0 - \frac{m^2}{2}(A^0A^0 + A_jA^j) + \frac{1}{4}F_{ki}F^{ki} \\ &= \frac{1}{2}\pi^k\pi^k + \frac{1}{m^2}\partial_k\pi^k\partial_i\pi^i - \frac{1}{2m^2}\partial_k\pi^k\partial_i\pi^i - \frac{m^2}{2}A_jA^j + \frac{1}{4}F_{ki}F^{ki} \\ &= \frac{1}{2}\pi^k\pi^k + \frac{1}{2m^2}\partial_k\pi^k\partial_i\pi^i - \frac{m^2}{2}A_jA^j + \frac{1}{4}F_{ki}F^{ki}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Obviamente, esto afecta al vínculo ϕ^0 , de forma que la dinámica del espacio de fase reducido, descrita por la nueva $\mathcal{H}_c$ conlleva a una forma diferente de las ecuaciones de campo, las cuales se deducen calculando el diferencial de los campos A_i y π^i según lo dicta (4.65). En primer lugar,

$$dA_i(x) = \int d^3y \left[\pi^i(y) - \frac{1}{m^2}\partial_i^x\partial_j^y\pi^j(y) \right] \delta^3(x-y) dt \quad (4.67)$$

$$= \left[\pi^i(x) - \frac{1}{m^2}\partial_i^x\partial_j^x\pi^j(x) \right] dt \quad (4.68)$$

Por lo tanto,

$$\dot{A}_i(x) = \pi^i(x) - \frac{1}{m^2}\partial_i^x\partial_j^x\pi^j(x) \quad (4.69)$$

Luego,

$$\begin{aligned} d\pi^i(x) &= \int d^3y [\{\pi^i(x), \phi^0(y)\}^* dt] \\ &= [\partial_k^x F^{ki}(x) + m^2 A^i(x)] dt, \end{aligned} \quad (4.70)$$

Por lo tanto,

$$\dot{\pi}^i(x) = \partial_k^x F^{ki}(x) + m^2 A^i(x). \quad (4.71)$$

Las ecuaciones (4.69) y (4.71) conforman las ecuaciones de movimiento del campo de Proca real en el espacio de fase reducido. A partir de se puede concebir la ecuación de Proca para los grados de libertad; para ello partimos de la derivada respecto al tiempo de la ecuación (4.69), es decir,

$$\ddot{A}_i = \dot{\pi}^i - \frac{1}{m^2} \partial_i \partial_j \dot{\pi}^j,$$

Usando aquí la ecuación (4.71), resulta

$$\begin{aligned} \ddot{A}_i &= \partial_k F^{ki} + m^2 A^i - \frac{1}{m^2} \partial_i \partial_j [\partial_k F^{ki} + m^2 A^i] \\ &= \partial_k F^{ki} + m^2 A^i - \frac{1}{m^2} \partial_j \underbrace{\partial_i \partial_k F^{ki}}_{=0} - \partial_i \partial_j A^i \end{aligned}$$

Dado que el producto de un tensor simétrico por uno simétrico es igual a cero, luego,

$$\begin{aligned} \partial_0 \partial_0 A_i &= \partial_k (\partial^k A^i - \partial^i A^k) + m^2 A^i - \partial_i \partial_j A^i \\ &= \partial_k \partial^k A^i - \partial_k \partial^i A^k + m^2 A^i - \underbrace{\partial_i \partial^j A^i}_{i \rightarrow k \text{ y } j \rightarrow i} \\ &= \partial_k \partial^k A^i + m^2 A^i \\ 0 &= -\partial_0 \partial^0 A_i + \partial_k \partial^k A^i + m^2 A^i \\ 0 &= (\partial_0 \partial^0 + \partial_k \partial^k) A^i + m^2 A^i. \end{aligned}$$

En el término entre paréntesis se reconoce el operador de D'alambert, con lo cual, finalmente se llega a

$$(\square + m^2) A^i = 0. \quad (4.72)$$

La ecuación de Klein-Gordon para un campo vectorial.

Capítulo 5

Campo de Proca complejo

En el capítulo anterior se considero el caso particular del campo neutro, no obstante, este tratamiento es diferente si consideramos la interacción con partículas cargadas, a partir del trabajo de Proca, se pudo extender la teoría introduciendo el campo de Proca Complejo (cargado), de este campo se resalta el aumento de los grados de libertad y una nueva ecuación de campo adicional que provee la parte imaginaria. Durante este capítulo se empleará un procedimiento análogo al realizado con el campo real, implementando la formulación de Hamilton-Jacobi para comprobar la equivalencia con el método canónico.

La densidad Lagrangiana del campo complejo está dada por [3]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^*(x)F^{\mu\nu}(x) + m^2 A_{\mu}^*(x)A_{\mu}(x). \quad (5.1)$$

Concibiendo a $A_{\mu}^*(x)$ y $A_{\mu}(x)$ como los campos fundamentales de la teoría que cumplen con condiciones de frontera similares a (4.3) y (4.4), es decir, en primer lugar tenemos,

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} A_{\mu}(x) \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} A_{\mu}^*(x) \rightarrow 0, \quad (5.2)$$

mientras que para una variación infinitesimal de los campos,

$$\begin{aligned} A_{\mu}(x) &\rightarrow A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) + \delta A_{\mu}(x), \\ A_{\mu}^*(x) &\rightarrow A'^*_{\mu}(x) = A_{\mu}^*(x) + \delta A_{\mu}^*(x), \end{aligned}$$

se debe cumplir,

$$\begin{aligned} \delta A_{\mu}(x)|_{t_{inicial}} &= \delta A_{\mu}(x)|_{t_{final}} = 0, \\ \delta A_{\mu}^*(x)|_{t_{inicial}} &= \delta A_{\mu}^*(x)|_{t_{final}} = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

A partir de estos campos se definen los tensores antisimétricos $F_{\mu\nu}^*$ y $F_{\mu\nu}$ como,

$$F_{\mu\nu}^* \equiv \partial_\mu A_\nu^* - \partial_\nu A_\mu^*, \quad (5.4)$$

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (5.5)$$

Esta densidad lagrangiana también es singular, como se puede comprobar calculando el determinante de su matriz Hessiana¹; esta característica se traduce en un sistema con vínculos que, para el propósito de este trabajo se describirá mediante el formalismo Hamiltoniano, para ello, se establecen las variables del espacio de fase (A_μ, A_μ^*) , cuyos los momentos canónicos (π^μ y $\pi^{*\mu}$) se definen por medio de las velocidades relativas a los campos $\dot{A}_\mu \equiv \partial_0 A_\mu$ y $\dot{A}_\mu^* \equiv \partial_0 A_\mu^*$ de la forma:

$$\pi^\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{A}_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\nu)} = F^{*\nu 0} \quad (5.6)$$

$$\pi^{*\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{A}_\nu^*)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\nu^*)} = F^{\nu 0} \quad (5.7)$$

Esto, conlleva a la existencia de dos vínculos si se considera el caso donde $\nu = 0$. Primero, en (5.6) se tiene:

$$\pi^0 = F^{*00} = 0,$$

se identifica el primer vínculo del sistema para la parte real,

$$\phi^1 \equiv \pi^0 = 0. \quad (5.8)$$

Luego, para (5.7):

$$\pi^{*0} = F^{00} = 0$$

se identifica el segundo vínculo del sistema para la parte compleja,

$$\phi^2 \equiv \pi^{*0} = 0 \quad (5.9)$$

Estos son los vínculos primarios en el formalismo de Dirac para el campo de Proca complejo [3]. Por otra parte, cuando $\nu \neq 0$ se deducen expresiones útiles si se tiene en cuenta las definiciones (5.4) y (5.5).

$$\pi^k = \dot{A}_k^* - \partial_k A_0^*. \quad (5.10)$$

¹Se puede comprobar esto en el apéndice B.1

$$\pi^{*k} = \dot{A}_k - \partial_k A_0. \quad (5.11)$$

Estas relaciones permiten despejar las componentes de las velocidades $\dot{A}_k$ y $\dot{A}_k^*$ en función de los momentos canónicos y los campos, por tanto, se interpretan como una ecuación dinámica en el espacio de fase. Siendo así, conocidos los momentos canónicos, se puede calcular el Hamiltoniano canónico, el cual es definido por [10]:

$$H_c \equiv \int d^3x \left[\pi^\mu(x) \dot{A}_\mu(x) + \pi^{*\mu}(x) \dot{A}_\mu^*(x) - \mathcal{L} \right]. \quad (5.12)$$

Lo que está entre corchetes se define como la densidad Hamiltoniana canónica de campo de Proca complejo,

$$\mathcal{H}_c \equiv \pi^\mu(x) \dot{A}_\mu(x) + \pi^{*\mu}(x) \dot{A}_\mu^*(x) - \mathcal{L}. \quad (5.13)$$

Expandiendo la suma sobre μ y usando los resultados anteriores se tiene que²,

$$\mathcal{H}_c = \pi^k \pi^{*k} + \pi^k \partial_k A_0 + \pi^{*k} \partial_k A_0^* - m^2 A^{\mu*} A_\mu + \frac{1}{2} F_{ki}^* F^{ki}, \quad (5.14)$$

de tal manera que el Hamiltoniano se convierte en:

$$H_c = \int dx^3 \left(\pi^k \pi^{*k} + \pi^k \partial_k A_0 + \pi^{*k} \partial_k A_0^* - m^2 A^{\mu*} A_\mu + \frac{1}{2} F_{ki}^* F^{ki} \right), \quad (5.15)$$

pero, teniendo en cuenta las relaciones,

$$\partial_k (\pi^k A_0) = (\partial_k \pi^k) A_0 + \pi^k (\partial_k A_0), \quad (5.16)$$

y

$$\partial_k (\pi^{*k} A_0^*) = (\partial_k \pi^{*k}) A_0^* + \pi^{*k} (\partial_k A_0^*), \quad (5.17)$$

el Hamiltoniano se reescribe de la forma

$$H_c = \int dx^3 \left[\pi^k \pi^{*k} - (\partial_k \pi^k) A_0 - (\partial_k \pi^{*k}) A_0^* - m^2 A^{\mu*} A_\mu + \frac{1}{2} F_{ki}^* F^{ki} \right]$$

Al igual que en el campo de Proca real, se aplicó el teorema de Gauss en tres dimensiones haciendo que la integral de área sea igual a cero teniendo en cuenta las condiciones de frontera, entonces, la densidad Hamiltoniana es finalmente expresada como:

$$\mathcal{H}_c = \pi^k \pi^{*k} - (\partial_k \pi^k) A_0 - (\partial_k \pi^{*k}) A_0^* - m^2 A^{\mu*} A_\mu + \frac{1}{2} F_{ki}^* F^{ki}. \quad (5.18)$$

²Esta simplificación está detallada en el apéndice B.1

5.1. Formulación de Hamilton-Jacobi

A partir del Hamiltoniano canónico encontrado, se establece la ecuación de Hamilton-Jacobi de la forma [6]:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_c = P^t + H_c = \int d^3x (p^t + \mathcal{H}_c) = 0,$$

donde p^t es la densidad de momento canónico asociada a la función principal de Hamilton $S(x)$ [10]. Con esta ecuación definimos una nueva ligadura ϕ^0 para formar el sistema de ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi para el campo de Proca complejo:

$$\begin{aligned}\phi^0 &\equiv p^t + \mathcal{H}_c = 0, \\ \phi^1 &\equiv \pi^0 = 0, \\ \phi^2 &\equiv \pi^{*0} = 0.\end{aligned}\tag{5.19}$$

Tal como propone el método de Hamilton-Jacobi, para lograr una descripción completa de la dinámica del campo, se asociarán variables independientes a cada uno de estos vínculos [6], para ϕ^0 utilizaremos el parámetro temporal t , mientras que para ϕ^1 y ϕ^2 se expande el espacio de parámetros independientes asociando las funciones arbitrarias espacio temporales $\omega_1(x)$ y $\omega_2(x)$ respectivamente a los vínculos. Con esto se forma un conjunto de variables dependientes $(A_i, A_i^*, \pi^i, \pi^{*i})$ y uno de variables independientes (t, ω_1, ω_2) , con los cuales se determina la evolución de una variable dinámica $F(A_\mu, A_\mu^*, \pi^\mu, \pi^{*\mu})$ asociada al sistema como [7],

$$dF(x) = \int d^3y [\{F(x), \phi^0(y)\} dt + \{F(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{F(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)].\tag{5.20}$$

Por otra parte, los corchetes de Poisson entre dos variables dinámicas,

$$\begin{aligned}F(x) &= F[A_\mu(x), A_\mu^*(x), \pi^\mu(x), \pi^{*\mu}(x)], \\ G(y) &= G[A_\mu(y), A_\mu^*(y), \pi^\mu(y), \pi^{*\mu}(y)],\end{aligned}$$

para este caso, se definen de la forma [10]:

$$\begin{aligned}\{F(x), G(y)\} &\equiv \int d^3z \left[\frac{\delta F(x)}{\delta A_\mu(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \pi^\mu(z)} - \frac{\delta F(x)}{\delta \pi^\mu(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta A_\mu(z)} \right]_{x_0=y_0} \\ &+ \int d^3z \left[\frac{\delta F(x)}{\delta A_\mu^*(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \pi^{*\mu}(z)} - \frac{\delta F(x)}{\delta \pi^{*\mu}(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta A_\mu^*(z)} \right]_{x_0=y_0}\end{aligned}\tag{5.21}$$

Será útil conocer los corchetes de Poisson fundamentales de la teoría que sean diferentes de cero,

$$\begin{aligned}\{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\} &= \delta_\mu^\nu \delta^3(x-y), \\ \{A_\mu^*(x), \pi^{*\nu}(y)\} &= \delta_\mu^\nu \delta^3(x-y).\end{aligned}\tag{5.22}$$

5.1.1. Condiciones de integrabilidad para el campo de Proca complejo

Tal como en el campo de Proca real, el conjunto de EDPJH correspondiente al campo complejo, no está completo, cosa que impide la correcta descripción de la dinámica del sistema [7]. Nuevamente, se puede exigir el cumplimiento de la condición de integrabilidad de Frobenius de todos los vínculos que será de la forma,

$$d\phi^n(x) = 0,$$

esto deviene en nuevos vínculos generados y, cuando todos los posibles sean encontrados se formará el conjunto completo de EDPJH.

En primer lugar, para ϕ^1 exigimos,

$$d\phi^1(x) = 0.$$

Usando la definición del diferencial fundamental(5.20), se tiene que,

$$d\phi^1(x) = \int d^3y [\{\phi^1(x), \phi^0(y)\} dt + \{\phi^1(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{\phi^1(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)]. \quad (5.23)$$

Dados los corchetes fundamentales de Poisson en (5.22), se ve directamente que $\{\phi^1(x), \phi^1(y)\} = 0$ y $\{\phi^1(x), \phi^2(y)\} = 0$, mientras que el corchete restante merece más líneas de cálculo³. Con esto, luego de la integración el diferencial se reduce a:

$$d\phi^1(x) = [\partial_k^x \pi^k(x) + m^2 A^{*0}(x)] dt = 0.$$

Este análisis ha generado una nueva ecuación diferencial parcial que será usada para definir una nueva ligadura del sistema:

$$\phi^3 \equiv \partial_k^x \pi^k(x) + m^2 A^{*0}(x) = 0. \quad (5.24)$$

Por otra parte, haciendo un proceso análogo para ϕ^2 se tiene que,

$$d\phi^2(x) = \int d^3y [\{\phi^2(x), \phi^0(y)\} dt + \{\phi^2(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{\phi^2(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)] \quad (5.25)$$

Donde, al calcular los corchetes de Poisson se obtiene:

$$d\phi^2(x) = [\partial_k^x \pi^{*k}(x) + m^2 A^0(x)] dt = 0.$$

³El cálculo de los corchetes de Poisson entre todos los vínculos generados están detallados en el apéndice B.2

Con esto se define una nueva ligadura:

$$\phi^4(x) \equiv \partial_k^x \pi^{*k}(x) + m^2 A^0(x) = 0. \quad (5.26)$$

Estas deben ser agregadas al conjunto de EDPHJ y, por consiguiente se verificará su integrabilidad, exigiendo que,

$$d\phi^3(x) = 0 \quad \text{y} \quad d\phi^4(x) = 0.$$

Para $d\phi^3$:

$$d\phi^3(x) = \int d^3y [\{\phi^3(x), \phi^0(y)\} dt + \{\phi^3(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{\phi^3(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)]. \quad (5.27)$$

Calculando los corchetes de Poisson se demuestra,

$$d\phi^3(x) = m^2 \partial_j^x A^{*j}(x) dt + m^2 d\omega_2(x) = 0. \quad (5.28)$$

Para $d\phi^4$:

$$d\phi^4(x) = \int d^3y [\{\phi^4(x), \phi^0(y)\} dt + \{\phi^4(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{\phi^4(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)]. \quad (5.29)$$

Análogamente resulta,

$$d\phi^4(x) = m^2 \partial_j^x A^j(x) dt + m^2 d\omega_1(x) = 0. \quad (5.30)$$

Dado que en $d\phi^3$ y $d\phi^4$ se obtuvieron relaciones entre las variables independientes del sistema, la condición de integrabilidad de Frobenius está satisfecha y no es posible definir nuevas ligaduras [13]. El efecto de estas definiciones en la descripción de la dinámica del campo se ve reflejada en la modificación del diferencial fundamental:

$$\begin{aligned} dF(x) = & \int d^3y [\{F(x), \phi^0(y)\} dt + \{F(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{F(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)] \\ & + \int d^3y [\{F(x), \phi^3(y)\} d\omega_3(y) + \{F(x), \phi^4(y)\} d\omega_4(y)]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Siendo ω_3 y ω_4 las nuevas variables independientes arbitrarias asociadas a ϕ^3 y ϕ^4 respectivamente. Para verificar la consistencia de (5.31), se puede confirmar que las condiciones de integrabilidad

en los vínculos conllevan a⁴:

$$\begin{aligned}
 d\phi^1(x) &= [\partial_k^x \pi^k(x) + m^2 A^{*0}(x)] dt - m^2 d\omega_4(x) = 0, \\
 d\phi^2(x) &= [\partial_k^x \pi^{*k}(x) + m^2 A^0(x)] dt - m^2 d\omega_3(x) = 0, \\
 d\phi^3(x) &= m^2 \partial_j^x A^{*j}(x) dt + m^2 d\omega_2(x) = 0, \\
 d\phi^4(x) &= m^2 \partial_j^x A^j(x) dt + m^2 d\omega_1(x) = 0.
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

De donde se obtienen relaciones entre el parámetro temporal con las variables arbitrarias que se asociaron a los vínculos:

$$\begin{aligned}
 [\partial_k^x \pi^k(x) + m^2 A^{*0}(x)] dt &= m^2 d\omega_4(x), \\
 [\partial_k^x \pi^{*k}(x) + m^2 A^0(x)] dt &= m^2 d\omega_3(x), \\
 -\partial_j^x A^{*j}(x) dt &= d\omega_2(x), \\
 -\partial_j^x A^j(x) dt &= d\omega_1(x).
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

Estas relaciones establecen que el conjunto de EDPHJ está completo y que las ecuaciones características son integrables.

5.1.2. Ecuaciones características

El conjunto completo de EDPHJ permite encontrar las ecuaciones características correspondientes, para ello, su deducción se reduce a calcular la evolución dinámica de las variables del espacio de fase usando el diferencial fundamental (5.31).

En primer lugar para A_i se tiene que:

$$\begin{aligned}
 dA_i(x) &= \int d^3y [\{A_i(x), \phi^0(y)\} dt + \{A_i(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{A_i(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)] \\
 &\quad + \int d^3y \{A_i(x), \phi^3(y)\} d\omega_3(y) + \{A_i(x), \phi^4(y)\} d\omega_4(y).
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Calculando los correspondientes corchetes de Poisson, el resultado es⁵,

$$dA_i(x) = [\pi^{*i}(x) - \partial_i^x A_0(x)] dt + \partial_i^x d\omega_3(y), \tag{5.35}$$

pero, definiendo $\dot{A}_i(x) \equiv \partial_0 A_i$ y $\dot{\omega}_3(x) \equiv \partial_0 \omega_3(x)$, esto es,

⁴La forma de obtener cada una de estas ecuaciones es detallada en el apéndice B.3

⁵El cálculo de los corchetes de Poisson entre las variables del espacio de fase y de los vínculos están detallados en el apéndice B.4

$$\dot{A}_i(x) = [\pi^{*i}(x) + \partial_i^x A_0(x)] - \partial_i^x \dot{\omega}_3(x). \quad (5.36)$$

Comparando con $\dot{A}_k = \partial_k A_0 + \pi^{*k}$ (que surge de la definición de momentos canónicos), se infiere para $\omega_3(x)$, la condición,

$$\partial_i \dot{\omega}_3(x) = \partial_i \partial_0 \omega_3(x) = 0, \quad (5.37)$$

por tanto

$$\dot{A}_i(x) = \pi^{*i}(x) + \partial_i^x A_0(x). \quad (5.38)$$

Si tomamos el complejo conjugado en esta ecuación, se determina que,

$$\dot{A}_i^*(x) = \pi^i(x) + \partial_i^x A_0^*(x). \quad (5.39)$$

En cuanto al momento canónico π^i y su conjugado π^{*i} , partimos de:

$$\begin{aligned} d\pi^i(x) &= \int d^3y [\{\pi^i(x), \phi^0(y)\} dt + \{\pi^i(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{\pi^i(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)] \\ &\quad + \int d^3y \{\pi^i(x), \phi^3(y)\} d\omega_3(y) + \{\pi^i(x), \phi^4(y)\} d\omega_4(y). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Calculando los corchetes de Poisson presentes e integrando se consigue la relación:

$$d\pi^j(x) = [m^2 A^{*j}(x) + \partial_n^x F^{*nj}(x)] dt, \quad (5.41)$$

esto se reduce a,

$$\dot{\pi}^j(x) = m^2 A^{*j}(x) + \partial_n^x F^{*nj}(x). \quad (5.42)$$

Luego, tomando el complejo conjugado, se adquiere una relación similar para π^{*j} :

$$\dot{\pi}^{*j}(x) = m^2 A^j(x) + \partial_n^x F^{nj}(x). \quad (5.43)$$

Estos resultados son entendidos como las ecuaciones de movimiento relacionadas con el campo de Proca Complejo.

5.2. Corchetes generalizados para el campo de Proca complejo

Para verificar las condiciones de integralbilidad y completar el sistema de EDPHJ fue necesario implementar nuevas variables independientes a la descripción matemática del campo. Sin embargo, la arbitrariedad impuesta por dichas variables se puede eliminar teniendo en cuenta que en la

sección de ecuaciones características §5.1.2, se halló relaciones directas entre los diferenciales de las nuevas variables con el diferencial de tiempo. Para ello se introduce el concepto de los corchetes generalizados (CG), mediante los cuales es posible redefinir la dinámica del sistema [7]. Considerando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\phi^0 &\equiv p^t + \mathcal{H} = 0, \\ \phi^1 &\equiv \pi^0 = 0, \\ \phi^2 &\equiv \pi^{*0} = 0, \\ \phi^3 &\equiv \partial_k \pi^k + m^2 A^{*0} = 0, \\ \phi^4 &\equiv \partial_k \pi^{*k} + m^2 A^0 = 0.\end{aligned}$$

Los corchetes generalizados, asociados a estos vínculos se definen como [6]:

$$\{F(x), G(y)\}^* \equiv \{F(x), G(y)\} - \int \int d^3u d^3v \{F(x), \phi^n(u)\} (M^{-1})^{nl}(u, v) \{\phi^l(v), G(y)\}. \quad (5.44)$$

Donde M^{nl} corresponde a una matriz funcional regular de la forma⁶,

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -m^2 \\ 0 & 0 & -m^2 & 0 \\ 0 & m^2 & 0 & 0 \\ m^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y). \quad (5.45)$$

Cuya inversa es,

$$M^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & m^{-2} \\ 0 & 0 & m^{-2} & 0 \\ 0 & -m^{-2} & 0 & 0 \\ -m^{-2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y). \quad (5.46)$$

Ahora, recordando el conjunto de EDPHJ para el campo de Proca complejo, se puede hacer un conteo de las variables realmente independientes del espacio de fase. Inicialmente, el espacio de fase se describe mediante:

$$(A_\mu, \pi^\mu, A_\mu^*, \pi^{*\mu}) = (A_0, \pi^0, A_0^*, \pi^{*0}, A_i, \pi^i, A_i^*, \pi^{*i})$$

donde $i = \{1, 2, 3\}$, pero, considerando que $\pi^0 = 0$, $\pi^{*0} = 0$ y, que A_0 y A_0^* dependen de π^i y π^{*i} respectivamente, debido a los vínculos ϕ^3 y ϕ^4 , el espacio de variables independientes que

⁶Esta matriz se construye a partir de los corchetes de Poisson entre los vínculos que no están asociados con el tiempo, ver el apéndice B.5 para ver la manera de deducir la matriz inversa.

constituyen los grados de libertad son únicamente $(A_i, \pi^i, A_i^*, \pi^{*i})$, de esta forma, se procede a calcular los corchetes generalizados entre los grados de libertad, de los cuales únicamente son diferentes de cero, dos de las posibles combinaciones,

$$\begin{aligned}\{A_i(x), \pi^k(y)\}^* &= \delta_i^k \delta(x-y), \\ \{A_i^*(x), \pi^{*k}(y)\}^* &= \delta_i^k \delta(x-y).\end{aligned}\quad (5.47)$$

Habiendo establecido los corchetes generalizados y los grados de libertad del sistema, la evolución de una variable dinámica $F(x) = F[A_i(x), \pi^i(x)]$ será:

$$dF(x) = \int d^3y \{F(x), \phi^0(y)\}^* dt.$$

Dado el conteo de grados de libertad, se puede reescribir la densidad Hamiltoniana canónica, considerando que según los vínculos ϕ^3 y ϕ^4 se obtienen las relaciones $-\frac{1}{m^2}\partial_k \pi^k = A^{*0}$ y $-\frac{1}{m^2}\partial_k \pi^{*k} = A^0$, de forma que $\mathcal{H}_c$ se convierte en

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_c &= \pi^k \pi^{*k} - (\partial_k \pi^k) A_0 - (\partial_k \pi^{*k}) A_0^* - m^2 A^{*0} A^0 - m^2 A^{*j} A_j + \frac{1}{2} F_{ki}^* F^{ki} \\ &= \pi^k \pi^{*k} + \frac{1}{m^2} \partial_k \pi^{*k} \partial_j \pi^j - m^2 A^{*j} A_j + \frac{1}{2} F_{kj}^* F^{kj}.\end{aligned}\quad (5.48)$$

Eventualmente, esto cambia la forma del vínculo ϕ^0 , entonces, la dinámica del espacio de fase reducido definida por los diferenciales de los grados de libertad se calculan de la siguiente manera:

En primer lugar⁷,

$$dA_i(x) = \left[\pi^{*i}(x) - \frac{1}{m^2} \partial_i^x \partial_k^x \pi^{*k}(x) \right] dt \quad (5.49)$$

Por lo tanto

$$\dot{A}_i(x) = \pi^{*i}(x) - \frac{1}{m^2} \partial_i^x \partial_k^x \pi^{*k}(x). \quad (5.50)$$

Si tomamos aquí el complejo conjugado resulta,

$$\dot{A}_i^*(x) = \pi^{*i}(x) - \frac{1}{m^2} \partial_i^x \partial_k^x \pi^k(x). \quad (5.51)$$

Es importante resaltar la diferencia entre esta ecuación con (5.38), generada a partir de la reducción de los grados de libertad generada por los vínculos. Por otra parte,

$$d\pi^i(x) = [m^2 A^{*j}(x) + \partial_n^x F^{*nj}(x)] dt, \quad (5.52)$$

⁷El cálculo de los diferenciales está detallado en el apéndice B.5.

Que se puede reescribir como,

$$\dot{\pi}^j(x) = \partial_n^x F^{*nj}(x) + m^2 A^{*j}(x). \quad (5.53)$$

Finalmente, tomando el complejo conjugado se obtiene,

$$\dot{\pi}^{*j}(x) = \partial_n^x F^{nj}(x) + m^2 A^j(x). \quad (5.54)$$

Las ecuaciones (5.50), (5.51), (5.53) y (5.54) conforman las ecuaciones de movimiento del campo de Proca complejo en el espacio de fase reducido. Con ellas, es posible encontrar las ecuaciones del campo de Proca complejo; esto se hace tomando la derivada respecto del tiempo de la ecuación (5.50), es decir,

$$\ddot{A}_i = \dot{\pi}^{*i} - \frac{1}{m^2} \partial_i \partial_k \dot{\pi}^{*k},$$

pero utilizando la ecuación (5.54), se tiene que

$$\begin{aligned} \ddot{A}_i &= \partial_k F^{ki} + m^2 A^i - \frac{1}{m^2} \partial_i \partial_k [\partial_j F^{jk} + m^2 A^k] \\ &= \partial_k \partial^k A^i - \partial^i \partial_k A^k + m^2 A^i - \partial_i \partial_k A^k \\ &= \partial_k \partial^k A^i + m^2 A^i, \end{aligned}$$

lo cual se puede escribir de la forma

$$(\square + m^2) A^i = 0. \quad (5.55)$$

De forma análoga para el campo complejo se cumple que

$$(\square + m^2) A^{*i} = 0. \quad (5.56)$$

Estas expresiones logran describir el comportamiento del campo de Proca complejo mediante la ecuación de Klein-Gordon para un campo vectorial.

Capítulo 6

Campo de Proca con simetría de gauge

La teoría del campo electromagnético de Proca describe una teoría de fotones no masivos que no es invariante de gauge. Sin embargo, por medio de la adición de un campo escalar independiente de A_μ y π^μ a la densidad Lagrangiana, se puede restaurar la invariancia de gauge [2]. En este capítulo, se analizará la estructura de vínculos correspondiente a un sistema con dicha modificación con el objetivo de describir su dinámica mediante la formulación de Hamilton-Jacobi.

6.1. Invariancia de gauge local

La adición del término de masa a la densidad Lagrangiana de Proca, mediante la cuál se extienden las ecuaciones de Maxwell es el motivo del rompimiento en la simetría de gauge, esto se puede comprobar efectuando una transformación sobre el campo A_μ tal como,

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (6.1)$$

sobre la densidad Lagrangiana¹:

$$\mathcal{L} = \frac{m^2}{2} A_\mu(x) A^\mu(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x).$$

Para recuperar la invariancia se propone modificar el parámetro de gauge Λ de tal forma que el término de masa se transforme en²,

$$\frac{m^2}{2} \left(A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta \right)^2 \quad (6.2)$$

¹Se espera que se cumpla la simetría de gauge cuando al hacer una transformación sobre el Lagrangiano, este no cambie, en el apéndice C.1 se detalla este proceso.

²Para más información sobre cómo se llega a (6.2) se recomienda revisar el informe técnico [2]

donde e es una constante de acople y θ es un campo escalar que cumple con, $\square\theta \neq 0$. Este será invariante de gauge si se realiza una transformación sobre los campos de la forma

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x) \quad \text{y} \quad \theta(x) \rightarrow \theta(x) - e\Lambda(x). \quad (6.3)$$

En base a este cambio, la densidad lagrangiana de Proca se torna en:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \frac{m^2}{2}\left(A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x)\right)^2. \quad (6.4)$$

Se puede probar que se cumple la invariancia de gauge haciendo las transformaciones mencionadas en el segundo término

$$\begin{aligned} \left(A'_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta'\right)^2 &= \left[A_\mu + \partial_\mu\Lambda + \frac{1}{e}\partial_\mu(\theta - e\Lambda)\right]^2 \\ &= \left[A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta + \partial_\mu\Lambda - \frac{1}{e}\partial_\mu(e\Lambda)\right]^2 \\ &= \left[A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta\right]^2 \end{aligned}$$

Dado que este término y el tensor electromagnético son invariantes de gauge, se afirma que la densidad Lagrangiana es invariante de gauge.

6.2. Formulación Hamiltoniana

Dado que la densidad Lagrangiana (6.4) representa un sistema con vínculos, es factible usar un tratamiento análogo al hecho en los capítulos anteriores para determinar su dinámica. En este orden de ideas, el primer paso es hallar el Hamiltoniano canónico correspondiente, para lo cual se reconoce que al ser en esta ocasión A_μ y θ las variables del espacio de fase, sus momentos canónicos conjugados se definen a partir de las velocidades relativas a los campos $\partial_0 A_\mu$ y $\partial_0 \theta$ de la forma:

$$\pi^\mu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu} \quad \text{y} \quad p_\theta \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \theta)} = \frac{m^2}{e}\left(A_0 + \frac{1}{e}\partial_0\theta\right). \quad (6.5)$$

Por ende se consiguen dos ecuaciones dinámicas,

$$\partial_0 A_k = \pi^k + \partial_k A_0 \quad \text{y} \quad \partial_0 \theta = \frac{e^2}{m^2}p_\theta - eA_0. \quad (6.6)$$

También se conoce el primer vínculo del sistema, proveniente del tensor de intensidad electromagnética que es definido por

$$\phi^1 \equiv \pi^0 = 0. \quad (6.7)$$

Como producto de esto, es factible definir el Hamiltoniano canónico del sistema mediante una transformación de Legendre,

$$H_c = \int d^3x \left[\pi^\mu(x) \dot{A}_\mu(x) + p_\theta(x) \dot{\theta}(x) - \mathcal{L} \right]. \quad (6.8)$$

Lo que está dentro de los corchetes, la densidad Hamiltoniana canónica $\mathcal{H}_c$, se reduce de la siguiente manera³:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c = & \frac{1}{2} \pi^k \pi^k + \frac{1}{2} \frac{e^2}{m^2} p_\theta^2 + \pi^k \partial_k A_0 - e A_0 p_\theta \\ & + \frac{1}{4} F_{ki} F^{ki} + \frac{m^2}{2} \left(A_k + \frac{1}{e} \partial_k \theta \right)^2, \end{aligned} \quad (6.9)$$

pero, de acuerdo a lo hecho en el capítulo 2 para llegar a la ecuación (4.20), se puede reescribir el término $\pi^k \partial_k A_0$ de tal forma que,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c = & \frac{1}{2} \pi^k \pi^k + \frac{1}{2} \frac{e^2}{m^2} p_\theta^2 - (\partial_k \pi^k) A_0 - e A_0 p_\theta + \frac{1}{4} F_{ki} F^{ki} \\ & + \frac{m^2}{2} \left(A_k + \frac{1}{e} \partial_k \theta \right)^2. \end{aligned} \quad (6.10)$$

6.3. Formulación de Hamilton-Jacobi

El procedimiento realizado para el campo de Proca real es similar al que se debe usar para esta nueva densidad Hamiltoniana, puesto que la ecuación de Hamilton-Jacobi,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_c = 0,$$

permite definir el conjunto de EDPHJ,

$$\begin{aligned} \phi^0 & \equiv p^t + \mathcal{H}_c = 0, \\ \phi^1 & \equiv \pi^0 = 0, \end{aligned} \quad (6.11)$$

y, como consecuencia de esto, la evolución de una variable dinámica $F(x)$, según el método de Hamilton-Jacobi es

$$dF(x) = \int d^3y \left[\{F(x), \phi^0(y)\} dt + \{F(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) \right]. \quad (6.12)$$

³Esta reducción está detallada en el apéndice C.2

Sin embargo, la aparición del par canónico (θ, p^θ) , modifica la definición de los corchetes de Poisson que, para dos variables dinámicas cualesquiera se definen como [10]:

$$\begin{aligned} \{F(x), G(y)\} \equiv & \int d^3z \left[\frac{\delta F(x)}{\delta A_\mu(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \pi^\mu(z)} - \frac{\delta F(x)}{\delta \pi^\mu(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta A_\mu(z)} \right]_{x_0=y_0} \\ & + \int d^3z \left[\frac{\delta F(x)}{\delta \theta(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta p^\theta(z)} - \frac{\delta F(x)}{\delta p^\theta(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \theta(z)} \right]_{x_0=y_0}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

En vista de esto, los corchetes fundamentales de la teoría (diferentes de cero) son:

$$\begin{aligned} \{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\} &= \delta_\mu^\nu \delta^3(x-y), \\ \{\theta(x), p^\theta(y)\} &= \delta^3(x-y). \end{aligned} \quad (6.14)$$

6.3.1. Condiciones de integrabilidad

Todo sistema integrable debe cumplir con la condición de integrabilidad de Frobenius, para esto se debe verificar la integrabilidad de los vínculos como se mostró en los anteriores capítulos. En primer lugar, para ϕ^1 se exige que,

$$d\phi^1(x) = 0,$$

esto conlleva a

$$d\phi^1(x) = \int d^3y [\{\phi^1(x), \phi^0(y)\} dt + \{\phi^1(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y)] = 0. \quad (6.15)$$

Considerando que los pares canónicos (A_μ, π^μ) y (θ, p^θ) son independientes uno del otro se puede demostrar que⁴,

$$\{\phi^1(x), \phi^0(y)\} = [\partial_k^y \pi^k(y) + ep_\theta(y)] \delta^3(x-y), \quad (6.16)$$

de este modo, el diferencial de ϕ^1 se reduce a

$$\begin{aligned} d\phi^1(x) &= \int d^3y [\partial_k^y \pi^k(y) + ep_\theta(y)] \delta^3(x-y) dt \\ &= [\partial_k^x \pi^k(x) + ep_\theta(x)] dt. \end{aligned} \quad (6.17)$$

De aquí identificamos un nuevo vínculo del sistema,

$$\phi^2 \equiv \partial_k^x \pi^k(x) + ep_\theta(x) = 0. \quad (6.18)$$

Esta ecuación hará parte del conjunto de EDPHJ, por tal motivo, se debe verificar su integrabilidad exigiendo que

$$d\phi^2(x) = 0,$$

⁴Los corchetes de Poisson entre los vínculos están calculados en el apéndice

es decir,

$$d\phi^2(x) = \int d^3y [\{\phi^2(x), \phi^0(y)\} dt + \{\phi^2(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y)] . \quad (6.19)$$

Pero aquí resulta que:

$$\{\phi^2(x), \phi^0(y)\} = 0, \quad (6.20)$$

$$\{\phi^2(x), \phi^1(y)\} = 0. \quad (6.21)$$

Por lo tanto, se cumple que,

$$d\phi^2(x) = 0. \quad (6.22)$$

Que este diferencial de ϕ^2 sea igual a cero, indica que no existen más vínculos y el sistema de EDPHJ es constituido por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \phi^0 &\equiv p^t + \mathcal{H}_c = 0, \\ \phi^1 &\equiv \pi^0 = 0, \\ \phi^2 &\equiv \partial_k \pi^k + ep_\theta = 0. \end{aligned} \quad (6.23)$$

El efecto de hallar un nuevo vínculo se refleja en la modificación del diferencial fundamental, al cual se debe añadir una nueva variable que expandirá el espacio de parámetros independientes y será denotado por ω_2 . Matemáticamente esto es

$$dF(x) = \int d^3y [\{F(x), \phi^0(y)\} dt + \{F(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{F(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)] . \quad (6.24)$$

Utilizando este nuevo resultado, se procede a verificar de nuevo las condiciones de integrabilidad.

■ Para ϕ^1 :

$$d\phi^1(x) = \int d^3y [\{\phi^1(x), \phi^0(y)\} dt + \{\phi^1(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{\phi^1(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)] . \quad (6.25)$$

Recordando lo resultados anteriores se ve fácilmente que

$$\begin{aligned} d\phi^1(x) &= \int d^3y [\partial_k^y \pi^k(y) + ep_\theta(y)] \delta^3(x-y) dt \\ &= [\partial_k^x \pi^k(x) + ep_\theta(x)] dt = 0. \end{aligned} \quad (6.26)$$

■ Para ϕ^2 :

$$d\phi^2(x) = \int d^3y [\{\phi^2(x), \phi^0(y)\} dt + \{\phi^2(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{\phi^2(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)] . \quad (6.27)$$

luego de comprobar que,

$$\{\phi^2(x), \phi^2(y)\} = \{\partial_j^x \pi^j(x) + ep_\theta(x), \partial_j^y \pi^j(y) + ep_\theta(y)\} = 0, \quad (6.28)$$

y recordando el resultado de los demás corchetes de Poisson se llega a

$$d\phi^2(x) = 0$$

Así, tenemos la certeza de las ecuaciones características son integrables.

6.3.2. Ecuaciones características

Para calcular estas ecuaciones, se parte del diferencial y se considera la evolución dinámica de las variables del espacio de fase, es decir, se pretende calcular las siguientes integrales:

$$dA_\mu(x) = \int d^3y [\{A_\mu(x), \phi^0(y)\} dt + \{A_\mu(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{A_\mu(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)]. \quad (6.29)$$

$$d\pi^\mu(x) = \int d^3y [\{\pi^\mu(x), \phi^0(y)\} dt + \{\pi^\mu(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{\pi^\mu(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)]. \quad (6.30)$$

$$d\theta(x) = \int d^3y [\{\theta(x), \phi^0(y)\} dt + \{\theta(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{\theta(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)]. \quad (6.31)$$

$$dp_\theta(x) = \int d^3y [\{p_\theta(x), \phi^0(y)\} dt + \{p_\theta(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{p_\theta(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)]. \quad (6.32)$$

Luego, calculando los corchetes de Poisson necesarios se demuestra que estos resultados se pueden escribir como la evolución temporal de las variables del espacio de fase⁵:

$$\begin{aligned} \dot{A}_\mu &= \delta_\mu^k (\pi^k - \partial_k A_0) + \delta_\mu^k \partial_k \dot{\omega}_2, \\ \dot{\pi}^\mu &= \delta_0^\mu (\partial_k \pi^k + e p_\theta) + \delta_k^\mu \left[\partial_l F^{lk} - m^2 \left(A_k + \frac{1}{e} \partial_k \theta \right) \right], \\ \dot{\theta} &= \frac{e^2}{m^2} p_\theta - e A_0 + e \dot{\omega}_2, \\ \dot{p}_\theta &= \frac{m^2}{e} \partial_k \left(A_k + \frac{1}{e} \partial_k \theta \right). \end{aligned} \quad (6.33)$$

Finalmente, combinando estas ecuaciones se encuentran las siguientes relaciones⁶:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 \left[A^\nu + \frac{1}{e} \partial^\nu \theta \right] = 0 \quad \text{y} \quad \partial_\mu \left[A^\mu + \frac{1}{e} \partial^\mu \theta \right] = \partial_0 \dot{\omega}_2. \quad (6.34)$$

Las cuales se consideran como ecuaciones de Euler-Lagrange a nivel Hamiltoniano y que serán útiles para implementar las condiciones gauge de la teoría.

⁵El cálculo de los diferenciales está detallado en el apéndice C.4

⁶La deducción de estas ecuaciones está en el apéndice C.5

6.3.3. Condiciones gauge

Dada la dependencia encontrada en las ecuaciones (6.33) sobre la variable independiente ω_2 se infiere que, al recuperar la simetría de gauge en el campo se ha generado una arbitrariedad en las ecuaciones de movimiento del campo de Proca, esto no es conveniente para una correcta descripción de la dinámica del sistema, por tanto, se opta por imponer ciertas restricciones que devendrán en una reducción de los grados de libertad. Estas son conocidas como condiciones gauge y se impondrán tantas como tantos vínculos linealmente independientes hayan en el sistema de EDPHJ.

Dos vínculos serán linealmente independientes cuando el corchete de Poisson entre ambos sea igual a cero. Analizando (6.23), se puede comprobar que ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente independientes, con ello, se afirma que es posible implementar dos condiciones gauge, las cuales serán determinadas de tal manera que sean consistentes con la estructura de vínculos de la teoría [2].

En primer lugar, destacando que $\pi^0 = 0$ es lógico pensar que una posible condición de gauge se puede fijar como:

$$\phi^3 \equiv A_0 = 0. \quad (6.35)$$

Ahora, considerando la primera ecuación de (6.34), eligiendo la componente $\nu = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu 0} + m^2 \left[A^0 + \frac{1}{e} \partial^0 \theta \right] &= 0 \\ \partial_\mu (\partial^\mu A^0 - \partial^0 A^\mu) + m^2 \left[A^0 + \frac{1}{e} \partial^0 \theta \right] &= 0 \\ -\partial_\mu (\partial^0 A^\mu) + \frac{m^2}{e} \partial^0 \theta &= 0 \\ \partial_0 \left(\partial_k A_k + \frac{m^2}{e} \theta \right) &= 0 \end{aligned}$$

de donde es posible identificar la siguiente condición gauge de la forma

$$\phi^4 \equiv \partial_k A_k + \frac{m^2}{e} \theta = 0 \quad (6.36)$$

Así, el sistema completo de EDPHJ se expande:

$$\begin{aligned} \phi^0 &\equiv p^t + \mathcal{H}_c = 0, \\ \phi^1 &\equiv \pi^0 = 0, \\ \phi^2 &\equiv \partial_k \pi^k + e p_\theta = 0, \\ \phi^3 &\equiv A_0 = 0, \\ \phi^4 &\equiv \partial_k A_k + \frac{m^2}{e} \theta = 0. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Con lo cual, se necesita asociar parámetros independientes (ω_3 y ω_4) a los nuevos vínculos (ϕ^3 y

ϕ^4) provocando la modificación del diferencial fundamental:

$$\begin{aligned} dF(x) = & \int d^3y [\{F(x), \phi^0(y)\} dt + \{F(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{F(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)] \\ & + \int d^3y [\{F(x), \phi^3(y)\} d\omega_3(y) + \{F(x), \phi^4(y)\} d\omega_4(y)]. \end{aligned} \quad (6.38)$$

6.4. Corchetes generalizados

Para esta sección, partimos de la estructura general mediante la cual los corchetes generalizados son calculados,

$$\{F(x), G(y)\}^* \equiv \{F(x), G(y)\} - \int \int d^3u d^3v \{F(x), \phi^n(u)\} (M^{-1})^{nl}(u, v) \{\phi^l(v), G(y)\}. \quad (6.39)$$

Teniendo en cuenta que los únicos corchetes de Poisson entre los vínculos no asociados con el parámetro temporal y las condiciones gauge diferentes de cero son ⁷

$$\{\phi^1(x), \phi^3(y)\} = -\delta^3(x - y), \quad (6.40)$$

$$\{\phi^2(x), \phi^4(y)\} = D_x \delta^3(x - y), \quad (6.41)$$

donde se definió $D_x \equiv \nabla_x - m^2$. Con esto se deduce que la matriz M será

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D_x & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y). \quad (6.42)$$

También se puede demostrar que su inversa existe y es de la forma⁸:

$$M^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{D_x} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{D_x} & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y). \quad (6.43)$$

Donde $\frac{1}{D_x}$ denota la inversa del operador D_x . Con esta información es posible calcular los corchetes generalizados entre las coordenadas generalizadas $(A_i, \pi^i, \theta, p_\theta)$, de los cuales, los únicos

⁷Estos corchetes de Poisson se calculan en el apéndice C.6

⁸Esta demostración se encuentra también en el apéndice C.6

diferentes de cero son⁹:

$$\{A_i(x), \pi^k(y)\}^* = \left(\delta_i^k + \frac{\partial_i^x \partial_k^x}{D_x}\right) \delta^3(x-y), \quad (6.44)$$

$$\{A_i(x), p_\theta(y)\}^* = -\frac{m^2}{e} \frac{\partial_i^x}{D_x} \delta^3(x-y), \quad (6.45)$$

$$\{\pi^i(x), \theta(y)\}^* = e \frac{\partial_i^x}{D_x} \delta^3(x-y), \quad (6.46)$$

$$\{\theta(x), p_\theta(y)\}^* = \left(1 + \frac{m^2}{D_x}\right) \delta^3(x-y). \quad (6.47)$$

Sin embargo, considerando el sistema completo de EDPHJ, los grados de libertad, en principio identificados por $(A_\mu, \pi^\mu, \theta, p_\theta)$, se reducen simplemente a (A_i, π^i) , puesto que, en primer lugar, los vínculos ϕ^1 y ϕ^3 determinan que $A_0 = 0$ y $\pi^0 = 0$, luego los vínculos ϕ^2 y ϕ^4 establecen una dependencia de θ y p_θ sobre π^i y A_i respectivamente. Otra vez, se debe modificar el vínculo ϕ^0 , para eliminar la aportación de grados de libertad superfluos en el Hamiltoniano, teniendo en cuenta que, según ϕ^3 y ϕ^4 se deducen las relaciones

$$\frac{1}{-e} \partial_k \pi^k = p_\theta \quad \text{y} \quad -\frac{e}{m^2} \partial_k A_k = \theta.$$

Con lo cual $\mathcal{H}_c$ se convierte en

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2} \pi^k \pi^k + \frac{1}{2m^2} (\partial_k \pi^k)^2 + \frac{1}{4} F_{kj} F^{kj} + \frac{m^2}{2} \left(A_k - \frac{1}{m^2} \partial_k \partial_j A_j \right)^2.$$

En base a la información anterior y redefiniendo la evolución de una variable dinámica $F(x) = F[A_i(x), \pi^i(x)]$ como

$$dF(x) = \int d^3y \{F(x), \phi^0(y)\}^* dt, \quad (6.48)$$

se logran deducir las ecuaciones de movimiento del sistema utilizando los diferenciales correspondientes a los grados de libertad, las cuales son equivalentes a¹⁰

$$\dot{A}_i(x) = \left(\delta_j^k - \frac{\partial_i^x \partial_k^x}{D_x} \right) \left(\delta_j^i - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{m^2} \right) \pi^j(x), \quad (6.49)$$

$$\dot{\pi}^i(x) = \partial_k^x F^{ki}(x) - m^2 \left(\delta_k^i - \frac{\partial_i^x \partial_k^x}{D_x} \right) \left(\delta_j^i - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{m^2} \right) \left[A_j(x) - \frac{\partial_j^x \partial_l^x A_l(x)}{m^2} \right]. \quad (6.50)$$

Las ecuaciones (6.49) y (6.50) representan las ecuaciones de movimiento del sistema para los grados de libertad en el espacio de fase reducido.

⁹Estos cálculos están detallados en el apéndice C.7

¹⁰Los diferenciales de los campos están calculados en el apéndice C.8

Capítulo 7

Resultados

La teoría de Hamilton-Jacobi muestra ser un método bastante intuitivo para describir la dinámica de un sistema con las particularidades del campo de Proca. Los resultados de este trabajo serán medidos respecto al éxito en la aplicación de la formulación de Hamilton-Jacobi, corroborada a través de la reproducción de lo obtenido en el tratamiento canónico del campo de Proca.

Campo de Proca real

Para aplicar la teoría de Hamilton-Jacobi fue necesario analizar las condiciones de integrabilidad de los vínculos del sistema, esto conllevó a formar el conjunto completo de ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi:

$$\begin{aligned}\phi^0 &\equiv p^0 + \mathcal{H}_c, \\ \phi^1 &\equiv \pi^0, \\ \phi^2 &\equiv \partial_k \pi^k + m^2 A^0.\end{aligned}$$

En este punto se identifica una relación con el método canónico, donde ϕ^1 y ϕ^2 representan ligaduras de primera y segunda clase respectivamente, mientras que ϕ^0 es un vínculo que representa información de la dinámica del campo de Proca. Para incluir estos vínculos en la descripción de la dinámica del sistema, el método de Hamilton-Jacobi, propone definir un diferencial fundamental de la forma,

$$dF(x) = \int d^3y [\{F(x), \phi^0(y)\} dt + \{F(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{F(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)]$$

el cual se usó para verificar las condiciones de integrabilidad de los vínculos, con un propósito similar al análisis de consistencia que se efectúa mediante el Hamiltoniano primario en el método de Dirac.

Aquí se establecen las variables independientes ω_1 y ω_2 , las cuales representan una expansión del espacio de parámetros independientes del cual hace parte el tiempo. En conjunto, estas variables describirán la evolución del sistema físico en las mismas condiciones.

Al exigir el cumplimiento de la condición de integrabilidad de Frobenius se encontraron las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} [\partial_k \pi^k + m^2 A^0] dt &= m^2 d\omega_2, \\ \pi^0 dt &= -d\omega_1. \end{aligned}$$

Estas denotan una arbitrariedad en el sistema, procedente de la expansión del espacio de parámetros independientes que no permite determinar de forma única la descripción del campo de Proca, para esto, se construyen los corchetes generalizados, los cuales permiten redefinir la dinámica de los grados de libertad del sistema (A_i, π^i) únicamente respecto al parámetro temporal, con la misma premisa que en el método de canónico se definen los corchetes de Dirac. Los corchetes generalizados para dos variables dinámicas se definen de la forma,

$$\{F(x), G(y)\}^* \equiv \{F(x), G(y)\} - \int \int d^3 u d^3 v \{F(x), \phi^n(u)\} (M^{-1})^{nl}(u, v) \{\phi^l(v), G(y)\}.$$

Esto permitió reescribir el diferencial fundamental como,

$$dF(x) = \int d^3 y [\{F(x), \phi^0(y)\}^* dt],$$

de donde se consiguió hallar ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} \dot{A}_i &= \pi^i - \frac{1}{m^2} \partial_i \partial_j \pi^j, \\ \dot{\pi}^i &= \partial_k F^{ki} + m^2 A^i. \end{aligned}$$

Juntando estas ecuaciones se logró deducir la ecuación de campo de Proca para los grados de libertad del espacio de fase reducido.

$$(\square + m^2) A^i = 0.$$

Campo de Proca complejo

Empleando un proceso similar al expuesto en el caso anterior se consiguen resultados bastante similares para el campo complejo. Su diferencia radica en que la dinámica del sistema será descrita por un número mayor de grados de libertad $(A_i, \pi^i, A_i^*, \pi^{*i})$.

Este aumento de grados de libertad provoca que el conjunto de EDPHJ se amplíe y mezcle la parte real y compleja de los campos.

$$\begin{aligned} \phi^0 &\equiv p^t + \mathcal{H} = 0, \\ \phi^1 &\equiv \pi^0 = 0, \\ \phi^2 &\equiv \pi^{*0} = 0, \\ \phi^3 &\equiv \partial_k \pi^k + m^2 A^{*0} = 0, \\ \phi^4 &\equiv \partial_k \pi^{*k} + m^2 A^0 = 0. \end{aligned}$$

Donde ϕ^1 y ϕ^2 representan vínculos de primera clase en el método canónico, mientras que ϕ^3 y ϕ^4 , son vínculos de segunda clase. Luego, la dinámica del sistema será definida mediante el diferencial fundamental,

$$dF(x) = \int d^3y \left[\{F(x), \phi^0(y)\} dt + \{F(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{F(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y) \right] \\ + \int d^3y \left[\{F(x), \phi^3(y)\} d\omega_3(y) + \{F(x), \phi^4(y)\} d\omega_4(y) \right].$$

En esta ocasión, son $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ y ω_4 los parámetros independientes que generan arbitrariedad en la descripción de la dinámica. De igual manera, la definición de los corchetes generalizados permitió redefinir la dinámica de tal forma que se encontrasen las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} \dot{A}_i &= \pi^{*i} - \frac{1}{m^2} \partial_i \partial_k \pi^{*k}, \\ \dot{A}_i^* &= \pi^{*i} - \frac{1}{m^2} \partial_i \partial_k \pi^k, \\ \dot{\pi}^i &= \partial_k F^{*ki} + m^2 A^{*i}, \\ \dot{\pi}^{*i} &= \partial_k F^{ki} + m^2 A^i. \end{aligned}$$

Con ellas se llegó finalmente a las ecuaciones de campo de proca para los grados de libertad del espacio de fase reducido,

$$\begin{aligned} (\square + m^2) A^i &= 0, \\ (\square + m^2) A^{*i} &= 0. \end{aligned}$$

Campo de Proca con simetría gauge

Al examinar el campo de Proca bajo la modificación del Lagrangiano efectuada en el capítulo 6, se consiguió un sistema de EDPHJ de la forma:

$$\begin{aligned} \phi^0 &\equiv p^t + \mathcal{H}_c, \\ \phi^1 &\equiv \pi^0, \\ \phi^2 &\equiv \partial_k \pi^k + e p_\theta. \end{aligned}$$

Donde se manifiesta una aportación importante por parte del campo escalar θ y su momento canónico p_θ a las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} \dot{A}_\mu &= \delta_\mu^k (\pi^k - \partial_k A_0) + \delta_\mu^k \partial_k \dot{\omega}_2, \\ \dot{\pi}^\mu &= \delta_0^\mu (\partial_k \pi^k + e p_\theta) + \delta_k^\mu \left[\partial_l F^{lk} - m^2 \left(A_k + \frac{1}{e} \partial_k \theta \right) \right], \\ \dot{\theta} &= \frac{e^2}{m^2} p_\theta - e A_0 + e \dot{\omega}_2, \\ \dot{p}_\theta &= \frac{m^2}{e} \partial_k \left(A_k + \frac{1}{e} \partial_k \theta \right). \end{aligned}$$

Aún cuando aquí se denota una arbitrariedad en la descripción de la dinámica, los vínculos del sistema, proveen la implementación de dos condiciones gauge que expandirán el conjunto de EDPHJ mediante las relaciones,

$$\begin{aligned}\phi^3 &\equiv A_0, \\ \phi^4 &\equiv \partial_k A_k + \frac{m^2}{e}\theta.\end{aligned}$$

De esta manera, el diferencial fundamental que genera esta estructura de vínculos es,

$$\begin{aligned}dF(x) &= \int d^3y [\{F(x), \phi^0(y)\} dt + \{F(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{F(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)] \\ &+ \int d^3y [\{F(x), \phi^3(y)\} d\omega_3(y) + \{F(x), \phi^4(y)\} d\omega_4(y)].\end{aligned}$$

Luego, la indeterminación que generan los nuevos parámetros obtenidos se elimina mediante los corchetes generalizados, cuyo efecto repercute en la reducción de los grados de libertad, de forma que las ecuaciones de movimiento que describen el sistema se reducen a,

$$\begin{aligned}\dot{A}_i(x) &= \left(\delta_j^k - \frac{\partial_i^x \partial_k^x}{D_x}\right) \left(\delta_j^i - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{m^2}\right) \pi^j(x), \\ \dot{\pi}^i(x) &= \partial_k^x F^{ki}(x) - m^2 \left(\delta_k^i - \frac{\partial_i^x \partial_k^x}{D_x}\right) \left(\delta_j^i - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{m^2}\right) \left[A_j(x) - \frac{\partial_j^x \partial_l^x A_l(x)}{m^2}\right].\end{aligned}$$

Capítulo 8

Conclusiones

Para implementar la formulación de Hamilton-Jacobi en el campo de Proca fue necesario exigir el cumplimiento de la condición de integrabilidad de Frobenius para vínculos no involutivos, propiciando la aparición de parámetros indeterminados (ω_i), de esta forma, se impedía la definición única de la dinámica del sistema. La solución a esto, luego de hacer un conteo correcto de los grados de libertad del sistema, fue construir los corchetes generalizados, los cuales permitieron deducir la ecuación de campo de Proca para el espacio de fase reducido por medio de las ecuaciones de movimiento del sistema.

La deducción de las ecuaciones de movimiento tanto para el campo real como para el complejo mostró que el comportamiento del campo de Proca puede ser modelado mediante la ecuación de Klein-Gordon, esto implica que existe una analogía entre las propiedades dinámicas de un campo escalar masivo con las de un campo vectorial masivo como el de Proca. De esta forma, conociendo que las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon son ondas planas, se obtiene una descripción familiar de las perturbaciones en este campo.

Por otra parte, también fue posible aplicar la formulación de Hamilton-Jacobi a un campo de Proca en el cual se recuperaba la invariancia de gauge mediante la adición de un campo escalar apropiadamente incorporado en la teoría. Las repercusiones concernientes a dicho procedimiento parecen aumentar los grados de libertad del campo, no obstante, al construir el sistema de EDPHJ con la incorporación de dos condiciones gauge que surgían de los vínculos del sistema, se demostró que los grados de libertad seguían siendo A_i y π^i , con la salvedad de que en este caso, las ecuaciones de movimiento ya no se pueden asemejar con solución de ondas planas que se presentaba en los capítulos 4 y 5.

Finalmente, a lo largo de este trabajo se logró comprobar satisfactoriamente la equivalencia entre la formulación de Hamilton-Jacobi y el método de Dirac para sistemas con vínculos, resaltando una equivalencia entre las condiciones de integrabilidad y el análisis de consistencia de los vínculos. Los resultados encontrados aquí son compatibles a los encontrados en el trabajo de grado, *Tratamiento canónico de la ecuación de Proca para campo real y complejo* [3] y el informe técni-

co, *Teoría de fotones masivos en las coordenadas de plano nulo* [2]. sin embargo, se encontró un pequeño fallo en el trabajo de grado citado, puesto que al establecer las ecuaciones de movimiento para los grados de libertad del espacio de fase reducido se consideró la aportación de grados de libertad que, en realidad no aportaban, ya que se eliminaban al considerar la forma de los vínculos dentro de la densidad Hamiltoniana tanto en el campo real como en el campo complejo, esto conllevó a una deducción no justificada de la ecuación de campo de Proca.

Apéndice A

Cálculos para el campo de Proca real

A.1. Cálculos preliminares

Demostración de (4.7)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \frac{m^2}{2} A_\mu(x) A^\mu(x) \right] \\&= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} [F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)] \\&= -\frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} [\partial_\mu A_\nu(\mathbf{x}, t) - \partial_\nu A_\mu(\mathbf{x}, t)] F^{\mu\nu}(x) \right. \\&\quad \left. + F_{\mu\nu}(x) \frac{\partial}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} [\partial^\mu A^\nu(\mathbf{x}, t) - \partial^\nu A^\mu(\mathbf{x}, t)] \right\} \\&= -\frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} [\partial_\mu A_\nu(\mathbf{x}, t) - \partial_\nu A_\mu(\mathbf{x}, t)] F^{\mu\nu} + \right. \\&\quad \left. F_{\mu\nu}(x) \frac{\partial}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} [\eta^{\mu\gamma} \eta^{\nu\sigma} \partial_\gamma A_\sigma(\mathbf{x}, t) - \eta^{\nu\sigma} \eta^{\mu\gamma} \partial_\sigma A_\gamma(\mathbf{x}, t)] \right\} \\&= -\frac{1}{4} \left\{ \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu F^{\mu\nu} - \delta_\beta^\nu \delta_\alpha^\mu F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}(x) [\eta^{\mu\gamma} \eta^{\nu\sigma} \delta_\beta^\gamma \delta_\alpha^\sigma - \eta^{\nu\sigma} \eta^{\mu\gamma} \delta_\beta^\sigma \delta_\alpha^\gamma] \right\} \\&= -\frac{1}{4} \left\{ F^{\beta\alpha} - F^{\alpha\beta} + F_{\mu\nu} [\eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha} - \eta^{\nu\beta} \eta^{\mu\alpha}] \right\} \\&= -\frac{1}{4} (F^{\beta\alpha} + F^{\beta\alpha} + F^{\beta\alpha} - F^{\alpha\beta}) \\&= -\frac{1}{4} (F^{\beta\alpha} + F^{\beta\alpha} + F^{\beta\alpha} + F^{\beta\alpha}) \\&= -F^{\beta\alpha}\end{aligned}$$

Demostración de (4.9)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\alpha) \partial(\partial_0 A_\beta)} &= -\frac{\partial F^{0\alpha}}{\partial(\partial_0 A_\beta)} \\
&= -\frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\beta)} (\partial^0 A^\alpha - \partial^\alpha A^0) \\
&= -\frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\beta)} (\eta^{0\gamma} \eta^{\alpha\sigma} \partial_\gamma A_\sigma - \eta^{\alpha\sigma} \eta^{0\gamma} \partial_\sigma A_\gamma) \\
&= -(\eta^{0\gamma} \eta^{\alpha\sigma} \delta_0^\gamma \delta_\beta^\sigma - \eta^{0\gamma} \eta^{\alpha\sigma} \delta_0^\sigma \delta_\beta^\gamma) \\
&= \eta^{0\beta} \eta^{\alpha 0} - \eta^{00} \eta^{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

Demostración de (4.13)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} &= -\frac{1}{4} \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\beta)} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) F^{\mu\nu} \right] \\
&\quad - \frac{1}{4} \left[F_{\mu\nu} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\gamma} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\beta)} (\partial_\alpha A_\gamma - \partial_\gamma A_\alpha) \right] \\
&= -\frac{1}{4} (\delta_0^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_0^\nu \delta_\beta^\mu) F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F^{\alpha\gamma} (\delta_0^\alpha \delta_\beta^\gamma - \delta_0^\gamma \delta_\beta^\alpha) \\
&= -\frac{1}{4} (F^{0\beta} - F^{\beta 0}) - \frac{1}{4} (F^{0\beta} - F^{\beta 0}) \\
&= \frac{1}{4} (2F^{\beta 0}) + \frac{1}{4} (2F^{\beta 0}) \\
&= F^{\beta 0}.
\end{aligned}$$

Demostración de (4.18)

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_c &\equiv \pi^0 \dot{A}_0 + \pi^k \dot{A}_k + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \\
&= \pi^k (\partial_k A_0 + \pi^k) + \frac{1}{4} \left(\underbrace{F_{00} F^{00}}_0 + F_{0k} F^{0k} + F_{k0} F^{k0} + F_{ki} F^{ki} \right) - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \\
&= \pi^k \partial_k A_0 + \pi^k \pi^k + \frac{1}{4} (F_{k0} F^{k0} + F_{k0} F^{k0} + F_{ki} F^{ki}) - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \\
&= \pi^k \partial_k A_0 + \pi^k \pi^k + \frac{1}{2} \underbrace{F_{k0} F^{k0}}_{-F^{k0}} + \frac{1}{4} F_{ki} F^{ki} - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \\
&= \pi^k \partial_k A_0 + \pi^k \pi^k - \frac{1}{2} \underbrace{F^{k0} F_{k0}}_{\pi^k \pi^k} + \frac{1}{4} F_{ki} F^{ki} - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu
\end{aligned}$$

Esto es equivalente a la igualdad (4.18)

A.2. Corchetes de Poisson entre los vínculos**Demostración de (4.29)**

$$\begin{aligned}
\{\phi^1(x), \phi^0(y)\} &= \{\pi^0(x), p^t(y) + \mathcal{H}(y)\} \\
&= \left\{ \pi^0(x), p^t(y) + \frac{1}{2} [\pi^k(y)]^2 + \frac{1}{4} F_{ki}(y) F^{ki}(y) \right\} \\
&\quad + \left\{ \pi^0(x), -[\partial_k^y \pi^k(y)] A_0(y) - \frac{m^2}{2} A_\mu(y) A^\mu(y) \right\} \\
&= \left\{ \pi^0(x), -[\partial_k^y \pi^k(y)] A_0(y) - \frac{m^2}{2} A_\mu(y) A^\mu(y) \right\} \\
&= \left\{ \pi^0(x), -[\partial_k^y \pi^k(y)] A_0(y) \right\} - \frac{m^2}{2} \{\pi^0(x), A_\mu(y) A^\mu(y)\} \\
&= -\partial_k^y \pi^k(y) \{\pi^0(x), A_0(y)\} \\
&\quad - \frac{m^2}{2} [\{\pi^0(x), A_\mu(y)\} A^\mu(y) + \eta^{\mu\gamma} A_\mu(y) \{\pi^0(x), A_\gamma(y)\}] \\
&= \partial_k^y \pi^k(y) \delta_0^0 \delta^3(x-y) + \frac{m^2}{2} [\delta_\mu^0 A^\mu(y) + A^\gamma(y) \delta_\gamma^0] \delta^3(x-y) \\
&= [\partial_k^y \pi^k(y) + m^2 A^0(y)] \delta^3(x-y)
\end{aligned}$$

Demostración de (4.35)

$$\begin{aligned}
\{\phi^2(x), \phi^0(y)\} &= \left\{ \partial_k^x \pi^k(x) + m^2 A^0(x), p^t + \frac{1}{2} [\pi^k(y)]^2 - [\partial_k^y \pi^k(y)] A_0(y) \right\} \\
&+ \left\{ \partial_k^x \pi^k(x) + m^2 A^0(x), -\frac{m^2}{2} A_\mu(y) A^\mu(y) + \frac{1}{4} F_{ki}(y) F^{ki}(y) \right\} \\
&= \frac{m^2}{2} \{A^0(x), [\pi^k(y)]^2\} - [\partial_k^y \pi^k(y)] \{\partial_k^x \pi^k(x), A_0(y)\} \\
&+ m^2 \partial_k^y \{A^0(x), \pi^k(y)\} A_0(y) - \frac{m^2}{2} \{\partial_j^x \pi^j(x), A_\mu(y) A^\mu(y)\} \\
&+ \left\{ \partial_j^x \pi^j(x), \frac{1}{4} F_{ki}(y) F^{ki}(y) \right\} \\
&= m^2 \{A^0(x), \pi^k(y)\} \pi^k(y) - [\partial_k^y \pi^k(y)] \partial_k^x \{\pi^k(x), A_0(y)\} \\
&+ m^2 \partial_k^y \{A^0(x), \pi^k(y)\} A_0(y) \\
&- \frac{m^2}{2} \partial_j^x [\{\pi^j(x), A_\mu(y)\} A^\mu(y) + \{\pi^j(x), A^\mu(y)\} A_\mu(y)] \\
&+ \frac{1}{2} \partial_j^x \{\pi^j(x), F_{ki}(y)\} F^{ki}(y)
\end{aligned}$$

Donde

■

$$\begin{aligned}
\{\pi^j(x), F_{ki}(y)\} &= \{\pi^j(x), \partial_k^y A_i(y) - \partial_i^y A_k(y)\} \\
&= \partial_k^y \{\pi^j(x), A_i(y)\} - \partial_i^y \{\pi^j(x), A_k(y)\} \\
&= -\partial_k^y \delta_i^j \delta^3(x-y) + \partial_i^y \delta_k^j \delta^3(x-y) \\
&= (\partial_k^x \delta_i^j - \partial_i^x \delta_k^j) \delta^3(x-y)
\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
\{\pi^j(x), A_\mu(y)\} A^\mu(y) + \{\pi^j(x), A^\mu(y)\} A_\mu(y) &= -\delta_\mu^j \delta^3(x-y) A^\mu(y) \\
&- A^\gamma(y) \delta_\gamma^j \delta^3(x-y) \\
&= -2A^j(y) \delta^3(x-y)
\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
\{A^0(x), \pi^k(y)\} &= \eta^{0s} \{A_s(x), \pi^k(y)\} \\
&= \eta^{0s} \delta_s^k \delta^3(x-y) \\
&= \eta^{0k} \delta^3(x-y)
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
\{\phi^2(x), \phi^0(y)\} &= \frac{1}{2} \partial_j^x (\partial_k^x \delta_i^j - \partial_i^x \delta_k^j) F^{ki}(y) \delta^3(x-y) - \frac{m^2}{2} \partial_j^x [-2A^j(y) \delta^3(x-y)] \\
&\quad + m^2 \eta^{0k} \pi^k(y) \delta^3(x-y) - [\partial_k^y \pi^k(y)] \partial_k^x \delta_0^k \delta^3(x-y) \\
&\quad + m^2 \partial_k^y \eta^{0k} A_0(y) \delta^3(x-y) \\
&= \frac{1}{2} (\partial_i^x \partial_k^x - \partial_k^x \partial_i^x) F^{ki}(y) \delta^3(x-y) \\
&\quad + m^2 \partial_j^x [A^j(y) \delta^3(x-y)] + m^2 \eta^{0k} \pi^k(y) \delta^3(x-y) \\
&\quad - [\partial_0^y \pi^0(y)] \partial_0^x \delta^3(x-y) + m^2 \partial_k^y \eta^{0k} A_0(y) \delta^3(x-y) \\
&= -\partial_i^x \partial_k^x F^{ki}(x) \delta^3(x-y) + m^2 \partial_k^y A^k(y) \delta^3(x-y)
\end{aligned}$$

Demostración de (4.37)

$$\begin{aligned}
\{\phi^2(x), \phi^1(y)\} &= \{\partial_k^x \pi^k(x) + m^2 A^0(x), \pi^0(y)\} \\
&= m^2 \eta^{0s} \{A_s(x), \pi^0(y)\} \\
&= m^2 \eta^{0s} \delta_s^0 \delta^3(x-y) \\
&= m^2 \eta^{00} \delta^3(x-y) \\
&= m^2 \delta^3(x-y)
\end{aligned}$$

Demostración de (4.42)

$$\begin{aligned}
d\phi^2(x) &= \int d^3y \{\phi^2(x), \phi^0(y)\} dt + \{\phi^2(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) \\
&\quad + \int d^3y \{\phi^2(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y),
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\{\phi^2(x), \phi^2(y)\} &= [\{\partial_k^x \pi^k(x) + m^2 A^0(x), \partial_k^y \pi^k(y) + m^2 A^0(y)\}] d\omega_2(y) \\
&= m^2 \partial_k^x \{\pi^k(x), A^0(y)\} + m^2 \partial_k^y \{A^0(x), \pi^k(y)\} \\
&= -\eta^{0j} m^2 \delta_j^k \partial_k^x \delta^3(x-y) - \eta^{0j} m^2 \delta_j^k \partial_k^y \delta^3(x-y) \\
\text{pero } \eta^{0j} \delta_j^k &= \delta_0^k = 0 \\
&\rightarrow \{\phi^2(x), \phi^2(y)\} = 0,
\end{aligned}$$

es decir que

$$\begin{aligned} d\phi^2(x) &= \int d^3y [m^2 \partial_k^y A^k(y) \delta^3(x-y)] dt + \int d^3y [m^2 \delta^3(x-y)] d\omega_1(y) \\ &= m^2 \partial_k^x A^k(x) dt + m^2 d\omega_1(x) \end{aligned}$$

A.3. Corchetes de Poisson entre los vínculos y los campos fundamentales

Demostración de (4.45)

$$\begin{aligned} \{A_i(x), \phi^0(y)\} &= \left\{ A_i(x), p^t + \frac{1}{2} [\pi^k(y)]^2 - [\partial_k^y \pi^k(y)] A_0(y) \right\} \\ &\quad + \left\{ A_i(x), -\frac{m^2}{2} A_\mu(y) A^\mu(y) + \frac{1}{4} F_{ki}(y) F^{ki}(y) \right\} \\ &= \{A_i(x), \pi^k(y)\} \pi^k(y) - \partial_k^y \{A_i(x), \pi^k(y)\} A_0(y) \\ &= \delta_i^k \pi^k(y) \delta^3(x-y) - \delta_i^k \partial_k^y \delta^3(x-y) A_0(y) \\ &= [\pi^i(y) - \partial_i^y A_0(y)] \delta^3(x-y) \end{aligned}$$

Demostración de (4.46)

$$\begin{aligned} \{A_i(x), \phi^1(y)\} &= \{A_i(x), \pi^0(y)\} \\ &= \delta_i^0 \delta^3(x-y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Demostración de (4.47)

$$\begin{aligned} \{A_i(x), \phi^2(y)\} &= \{A_i(x), \partial_k^y \pi^k(y) + m^2 A^0(y)\} \\ &= \partial_k^y \delta_i^k \delta^3(x-y) \\ &= \partial_i^y \delta^3(x-y) \end{aligned}$$

Demostración de (4.49)

$$\begin{aligned}
\{\pi^i(x), \phi^0(y)\} &= \left\{ \pi^i(x), p^t + \frac{1}{2} [\pi^k(y)]^2 - [\partial_k^y \pi^k(y)] A_0(y) - \frac{m^2}{2} A_\mu(y) A^\mu(y) \right\} \\
&\quad + \left\{ \pi^i(x), \frac{1}{4} F_{kj}(y) F^{kj}(y) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \{\pi^i(x), F_{kj}(y)\} F^{kj}(y) \\
&\quad - \frac{m^2}{2} [\{\pi^i(x), A_\mu(y)\} A^\mu(y) + A_\mu(y) \{\pi^i(x), A^\mu(y)\}] \\
&= \frac{1}{2} (\delta_j^i \partial_k^x - \delta_k^i \partial_j^x) F^{kj}(y) \delta^3(x-y) \\
&\quad + \frac{m^2}{2} [\delta_i^\mu \delta^3(x-y) A^\mu(y) + \eta^{\mu\nu} A_\mu(y) \delta_i^\nu \delta^3(x-y)] \\
&= \frac{1}{2} (\delta_j^i \partial_k^x - \delta_k^i \partial_j^x) F^{kj}(y) \delta^3(x-y) + \frac{m^2}{2} [A^i(y) + A^i(y)] \delta^3(x-y) \\
&= \left[\frac{1}{2} (\delta_j^i \partial_k^x - \delta_k^i \partial_j^x) F^{kj}(y) + m^2 A^i(y) \right] \delta^3(x-y)
\end{aligned}$$

Demostración de (4.50)

$$\{\pi^i(x), \phi^1(y)\} = \{\pi^i(x), \pi^0(y)\} = 0$$

Demostración de (4.51)

$$\{\pi^i(x), \phi^2(y)\} = \{\pi^i(x), \partial_k^y \pi^k(y) + m^2 A^0(y)\} = 0$$

A.4. Cálculo de los corchetes generalizados**Deducción de la matriz (4.61)**

Para su cálculo, se parte de una propiedad inherente a este tipo de matrices:

$$\int d^3z M^{nl}(x, y) (M^{-1})^{lk}(x, y) = \delta^{nk} \delta^3(x - y). \quad (\text{A.1})$$

Donde $\{n, l, k\} = \{1, 2\}$. Proponiendo que la matriz inversa tenga una estructura de la forma

$$(M^{-1})(x, y) = \begin{pmatrix} \Omega^1(x, y) & \Omega^2(x, y) \\ \Omega^3(x, y) & \Omega^4(x, y) \end{pmatrix},$$

donde las Ω son funciones desconocidas. Para calcularlas se usa la propiedad anterior, resultando que

$$\int d^3z \begin{pmatrix} 0 & -m^2 \\ m^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega^1(z, y) & \Omega^2(z, y) \\ \Omega^3(z, y) & \Omega^4(z, y) \end{pmatrix} \delta^3(x - z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^3(x - y), \quad (\text{A.2})$$

integrando se tiene y multiplicando se llega a

$$\begin{pmatrix} -m^2\Omega^3(x, y) & -m^2\Omega^4(x, y) \\ m^2\Omega^1(x, y) & m^2\Omega^2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^3(x - y),$$

Por lo cual, se logra reconocer que:

$$\begin{aligned} \Omega^1(x, y) &= 0, \\ \Omega^2(x, y) &= \frac{1}{m^2} \delta^3(x - y), \\ \Omega^3(x, y) &= -\frac{1}{m^2} \delta^3(x - y), \\ \Omega^4(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Así, la matriz inversa es:

$$(M^{-1})(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & m^{-2} \\ -m^{-2} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y).$$

CG entre los grados de libertad

$$\begin{aligned} \{A_i(x), A_k(y)\}^* &= \{A_i(x), A_k(y)\} \\ &\quad - \int \int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi^1(u)\} (M^{-1})^{12}(u, v) \{\phi^2(v), A_k(y)\} \\ &\quad - \int \int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi^2(u)\} (M^{-1})^{21}(u, v) \{\phi^1(v), A_k(y)\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\pi^i(x), \pi^k(y)\}^* &= \{\pi^i(x), \pi^k(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{\pi^i(x), \phi^1(u)\} (M^{-1})^{12}(u, v) \{\phi^2(v), \pi^k(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{\pi^i(x), \phi^2(u)\} (M^{-1})^{21}(u, v) \{\phi^1(v), \pi^k(y)\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{A_i(x), \pi^k(y)\}^* &= \{A_i(x), \pi^k(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{A_i, \phi^1(u)\} (M^{-1})^{12}(u, v) \{\phi^2(v), \pi^k(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{A_i, \phi^2(u)\} (M^{-1})^{21}(u, v) \{\phi^1(v), \pi^k(y)\} \\
&= \delta_i^k \delta^3(x - y).
\end{aligned}$$

Demostración de (4.67)

$$\begin{aligned}
dA_i(x) &= \int d^3y [\{A_i(x), \phi^0(y)\}^* dt] \\
&= \int d^3y \{A_i(x), \phi^0(y)\} dt \\
&\quad - \int d^3y \int \int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi^n(u)\} (M^{-1})^{nl}(u, v) \{\phi^l(v), \phi^0(y)\} dt \\
&= \int d^3y \{A_i(x), \phi^0(y)\} dt \\
&\quad - \int d^3y \int \int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi^1(u)\} (M^{-1})^{12}(u, v) \{\phi^2(v), \phi^0(y)\} dt \\
&\quad - \int d^3y \int \int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi^2(u)\} (M^{-1})^{21}(u, v) \{\phi^1(v), \phi^0(y)\} dt,
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
\{A_i(x), \phi^0(y)\} &= \{A_i(x), p^t(y) + \mathcal{H}_c(y)\} \\
&= \left\{ A_i(x), p^t(y) + \frac{1}{2} \pi^k(y) \pi^k(y) + \frac{1}{2m^2} \partial_k^y \pi^k(y) \partial_i^y \pi^j(y) \right\} \\
&\quad + \left\{ A_i(x), -\frac{m^2}{2} A_j(y) A^j(y) + \frac{1}{4} F_{ki}(y) F^{ki}(y) \right\} \\
&= \{A_i(x), \pi^k(y)\} \pi^k(y) + \frac{1}{2m^2} \partial_k^y \{A_i(x), \pi^k(y)\} \partial_j^y \pi^j(y) \\
&\quad + \frac{1}{2m^2} \partial_j^y \{A_i(x), \pi^j(y)\} \partial_k^y \pi^k(y) \\
&= \delta_i^k \delta^3(x-y) \pi^k(y) + \frac{1}{2m^2} \partial_k^y \delta_i^k \delta^3(x-y) \partial_j^y \pi^j(y) \\
&\quad + \frac{1}{2m^2} \partial_j^y \delta_i^j \delta^3(x-y) \partial_k^y \pi^k(y) \\
&= \pi^i(y) \delta^3(x-y) + \frac{1}{2m^2} \partial_i^y \partial_j^y \pi^j(y) \delta^3(x-y) \\
&\quad + \frac{1}{2m^2} \partial_i^y \underbrace{\partial_k^y \pi^k(y)}_{k \rightarrow j} \delta^3(x-y) \\
&= \left[\pi^i(y) + \frac{1}{m^2} \partial_i^y \partial_j^y \pi^j(y) \right] \delta^3(x-y) \\
&= \left[\pi^i(y) - \frac{1}{m^2} \partial_i^x \partial_j^y \pi^j(y) \right] \delta^3(x-y),
\end{aligned}$$

$$\{A_i(x), \phi^1(u)\} = 0,$$

$$\{\phi^1(v), \phi^0(y)\} = 0.$$

Utilizando estos resultados se obtiene

$$\begin{aligned}
dA_i(x) &= \int d^3y \left[\pi^i(y) - \frac{1}{m^2} \partial_i^x \partial_j^y \pi^j(y) \right] \delta^3(x-y) dt \\
&= \left[\pi^i(x) - \frac{1}{m^2} \partial_i^x \partial_j^x \pi^j(x) \right] dt
\end{aligned}$$

Demostración de (4.70)

$$\begin{aligned}
d\pi^i(x) &= \int d^3y [\{\pi^i(x), \phi^0(y)\}^* dt] \\
&= \int d^3y \{\pi^i(x), \phi^0(y)\} dt \\
&\quad - \int d^3y \int \int d^3u d^3v \{\pi^i(x), \phi^n(u)\} (M^{-1})^{nl}(u, v) \{\phi^l(v), \phi^0(y)\} dt \\
&= \int d^3y \{\pi^i(x), \phi^0(y)\} dt \\
&\quad - \int d^3y \int \int d^3u d^3v \{\pi^i(x), \phi^1(u)\} (M^{-1})^{12}(u, v) \{\phi^2(v), \phi^0(y)\} dt \\
&\quad - \int d^3y \int \int d^3u d^3v \{\pi^i(x), \phi^2(u)\} (M^{-1})^{21}(u, v) \{\phi^1(v), \phi^0(y)\} dt \\
&= \int d^3y \left[\frac{1}{2} (\delta_j^i \partial_k^x - \delta_k^i \partial_j^x) F^{kj}(y) + m^2 A^i(y) \right] \delta^3(x - y) dt \\
&= \int d^3y \left[\frac{1}{2} (\partial_k^x F^{ki} - \partial_j^x F^{ij})(y) + m^2 A^i(y) \right] \delta^3(x - y) dt \\
&= \int d^3y \left[\frac{1}{2} (\partial_k^x F^{ki} + \partial_k^x F^{ki})(y) + m^2 A^i(y) \right] \delta^3(x - y) dt \\
&= \int d^3y [\partial_k^x F^{ki}(y) + m^2 A^i(y)] \delta^3(x - y) dt \\
&= [\partial_k^x F^{ki}(x) + m^2 A^i(x)] dt
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
\{\pi^i(x), \phi^0(y)\} &= \{\pi^i(x), p^t(y) + \mathcal{H}_c(y)\} \\
&= \left\{ \pi^i(x), p^t(y) + \frac{1}{2} \pi^k(y) \pi^k(y) + \frac{1}{2m^2} \partial_k^y \pi^k(y) \partial_i^y \pi^j(y) \right\} \\
&\quad + \left\{ \pi^i(x), -\frac{m^2}{2} A_j(y) A^j(y) + \frac{1}{4} F_{ki}(y) F^{ki}(y) \right\} \\
&= -m^2 \{\pi^i(x), A_j(y)\} A^j(y) + \frac{1}{2} \{\pi^i(x), F_{kj}(y)\} F^{kj}(y) \\
&= m^2 \delta_j^i \delta^3(x - y) A^j(y) + \frac{1}{2} (\delta_j^i \partial_k^y - \delta_k^i \partial_j^y) \delta^3(x - y) F^{kj}(y) \\
&= m^2 \delta^3(x - y) A^i(y) + \frac{1}{2} \partial_k^y F^{ki}(y) + \frac{1}{2} \underbrace{\partial_j^y F^{ji}(y)}_{j \rightarrow k} \delta^3(x - y) \\
&= [m^2 A^i(y) + \partial_k^y F^{ki}(y)] \delta^3(x - y).
\end{aligned}$$

De esto resulta que

$$\begin{aligned} d\pi^i(x) &= \int d^3y \left[m^2 A^i(y) + \partial_k^y F^{ki}(y) \right] \delta^3(x-y) dt \\ &= \left[\partial_k^x F^{ki}(x) + m^2 A^i(x) \right] dt. \end{aligned}$$

Apéndice B

Cálculos para el campo de Proca complejo

B.1. Cálculos preliminares

Singularidad de la matriz Hessiana en el campo de Proca complejo

Es posible comprobar que es singular calculando el determinante de su matriz Hessiana, la cual se define de la siguiente manera:

$$W^{\beta\alpha}(x, y) \equiv \frac{\delta^2 L}{\delta \dot{A}_\beta(x) \delta \dot{A}_\nu^*(y)} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\beta \partial \dot{A}_\nu^*} \delta^3(x - y) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\beta) \partial (\partial_0 A_\nu^*)} \delta^3(x - y)$$

Por una parte se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} \left(-\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} + m^2 A^{\mu*} A_\mu \right) \\
&= -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^* \frac{\partial}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} (F^{\mu\nu}) \\
&= -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^* \eta^{\mu\gamma} \eta^{\nu\sigma} \frac{\partial}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} (F_{\gamma\sigma}) \\
&= -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^* \eta^{\mu\gamma} \eta^{\nu\sigma} \frac{\partial}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} (\partial_\gamma A_\sigma - \partial_\sigma A_\gamma) \\
&= -\frac{1}{2} F^{*\gamma\sigma} (\delta_\beta^\gamma \delta_\alpha^\sigma - \delta_\beta^\sigma \delta_\alpha^\gamma) \\
&= -\frac{1}{2} (F^{*\gamma\sigma} \delta_\beta^\gamma \delta_\alpha^\sigma - F^{*\gamma\sigma} \delta_\beta^\sigma \delta_\alpha^\gamma) \\
&= -\frac{1}{2} (F^{*\beta\alpha} - F^{*\alpha\beta}) \\
&= -F^{*\beta\alpha}
\end{aligned}$$

Si $\beta = 0$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\alpha)} = -F^{*0\alpha} = F^{*\alpha 0}$$

Se deriva de nuevo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\alpha) \partial(\partial_0 A_\beta^*)} &= -\frac{\partial F^{*0\alpha}}{\partial(\partial_0 A_\beta^*)} \\
&= -\eta^{0\gamma} \eta^{\alpha\sigma} \frac{\partial F_{\gamma\sigma}^*}{\partial(\partial_0 A_\beta^*)} \\
&= -\eta^{0\gamma} \eta^{\alpha\sigma} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\beta^*)} (\partial_\gamma A_\sigma^* - \partial_\sigma A_\gamma^*) \\
&= -(\eta^{00} \eta^{\alpha\beta} - \eta^{0\beta} \eta^{\alpha 0}) \\
&= \eta^{0\beta} \eta^{\alpha 0} - \eta^{00} \eta^{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$W^{\beta\alpha}(x, y) = (\eta^{0\beta} \eta^{\alpha 0} - \eta^{00} \eta^{\alpha\beta}) \delta^3(x - y)$$

Recordando que

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es decir que

$$W^{\beta\alpha}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^3(x - y)$$

Es evidente que el determinante de esta matriz es igual a cero, con lo cual se afirma que la densidad lagrangiana del campo de Proca complejo es singular.

Demostración de la ecuación (5.14)

La densidad Hamiltoniana canónica de campo electromagnético es

$$\mathcal{H}_c \equiv \pi^\mu(x) \dot{A}_\mu(x) + \pi^{*\mu}(x) \dot{A}_\mu^*(x) - \mathcal{L}$$

Expandiendo la suma sobre μ y usando los resultados anteriores se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &= \pi^0 \dot{A}_0 + \pi^k \dot{A}_k + \pi^{*0} \dot{A}_0^* + \pi^{*k} \dot{A}_k^* + \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} - m^2 A^{\mu*} A_\mu \\ &= \pi^0 \dot{A}_0 + \pi^k (\partial_k A_0 + \pi^{*k}) + \pi^{*0} \dot{A}_0^* + \pi^{*k} (\partial_k A_0^* + \pi^k) + \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} - m^2 A^{\mu*} A_\mu \\ &= \pi^k (\partial_k A_0 + \pi^{*k}) + \pi^{*k} (\partial_k A_0^* + \pi^k) + \frac{1}{2} (F_{00}^* F^{00} + F_{0k}^* F^{0k} + F_{k0}^* F^{k0} + F_{ki}^* F^{ki}) - m^2 A^{\mu*} A_\mu \\ &= \pi^k \partial_k A_0 + \pi^k \pi^{*k} + \pi^{*k} \partial_k A_0^* + \pi^{*k} \pi^k + \frac{1}{2} (F_{k0}^* F^{k0} + F_{k0}^* F^{k0} + F_{ki}^* F^{ki}) - m^2 A^{\mu*} A_\mu \\ &= \pi^k \partial_k A_0 + \pi^k \pi^{*k} + \pi^{*k} \partial_k A_0^* + \pi^{*k} \pi^k + \frac{1}{2} (F_{k0}^* F^{k0} + F_{k0}^* F^{k0} + F_{ki}^* F^{ki}) - m^2 A^{\mu*} A_\mu \\ &= \pi^k \partial_k A_0 + 2\pi^k \pi^{*k} + \pi^{*k} \partial_k A_0^* - F_{k0}^* F^{k0} + \frac{1}{2} F_{ki}^* F^{ki} - m^2 A^{\mu*} A_\mu \\ &= \pi^k \partial_k A_0 + 2\pi^k \pi^{*k} + \pi^{*k} \partial_k A_0^* - \pi^k \pi^{*k} + \frac{1}{2} F_{ki}^* F^{ki} - m^2 A^{\mu*} A_\mu \\ &= \pi^k \pi^{*k} + \pi^k \partial_k A_0 + \pi^{*k} \partial_k A_0^* - m^2 A^{\mu*} A_\mu + \frac{1}{2} F_{ki}^* F^{ki} \end{aligned}$$

B.2. Corchetes de Poisson entre los vínculos

Entre ϕ^1 y ϕ^0

$$\begin{aligned}
\{\phi^1(x), \phi^0(y)\} &= \{\pi^0(x), p^t(y) + \mathcal{H}(y)\} \\
&= \{\pi^0(x), p^t(y) + \pi^k(y) \pi^{*k}(y) - [\partial_k^y \pi^k(y)] A_0(y) - [\partial_k^y \pi^{*k}(y)] A_0^*(y)\} \\
&\quad + \left\{ \pi^0(x), -m^2 A^{*\mu}(y) A_\mu(y) + \frac{1}{2} F_{ki}^*(y) F^{ki}(y) \right\} \\
&= -\partial_k^y \pi^k(y) \{\pi^0(x), A_0(y)\} - m^2 A^{*\mu}(y) \{\pi^0(x), A_\mu(y)\} \\
&= \partial_k^y \pi^k(y) \delta_0^0 \delta^3(x-y) + m^2 A^{*\mu}(y) \delta_\mu^0 \delta^3(x-y) \\
&= [\partial_k^y \pi^k(y) + m^2 A^{*0}(y)] \delta^3(x-y),
\end{aligned}$$

donde se usó

$$\begin{aligned}
\{\pi^0(x), F^{ki}(y)\} &= \eta^{nk} \eta^{mi} \{\pi^0(x), F_{nm}(y)\} \\
&= \eta^{nk} \eta^{mi} \{\pi^0(x), \partial_n^y A_m(y) - \partial_n^y A_m(y)\} \\
&= \eta^{nk} \eta^{mi} \partial_n^y \{\pi^0(x), A_m(y)\} - \partial_m^y \{\pi^0(x), A_n(y)\} \\
&= \eta^{nk} \eta^{mi} [-\partial_n^y \delta_m^0 \delta^3(x-y) + \partial_m^y \delta_n^0 \delta^3(x-y)] \\
&= \eta^{nk} \eta^{mi} (\partial_n^x \delta_m^0 - \partial_n^x \delta_m^0) \delta^3(x-y) = 0 \\
&= \eta^{nk} \eta^{0i} (\partial_n^x - \partial_n^x) \delta^3(x-y) = 0
\end{aligned}$$

Dado que $i \neq 0$

Entre ϕ^2 y ϕ^0

$$\begin{aligned}
\{\phi^2(x), \phi^0(y)\} &= \{\pi^{*0}(x), p^t(y) + \mathcal{H}(y)\} \\
&= \{\pi^{*0}(x), p^t(y) + \pi^k(y) \pi^{*k}(y) - [\partial_k^y \pi^k(y)] A_0(y) - [\partial_k^y \pi^{*k}(y)] A_0^*(y)\} \\
&\quad + \left\{ \pi^{*0}(x), -m^2 A^{*\mu}(y) A_\mu(y) + \frac{1}{2} F_{ki}^*(y) F^{ki}(y) \right\} \\
&= -\partial_k^y \pi^{*k}(y) \{\pi^{*0}(x), A_0^*(y)\} - m^2 A_\mu(y) \eta^{\mu\gamma} \{\pi^{*0}(x), A_\gamma^*(y)\} \\
&= \partial_k^y \pi^{*k}(y) \delta_0^0 \delta^3(x-y) + m^2 A^\gamma(y) \delta_\gamma^0 \delta^3(x-y) \\
&= [\partial_k^y \pi^{*k}(y) + m^2 A^0(y)] \delta^3(x-y),
\end{aligned}$$

donde se usó

$$\begin{aligned}
\{\pi^{*0}(x), F_{ki}^*(y)\} &= \{\pi^{*0}(x), \partial_k^y A_i^*(y) - \partial_i^y A_k^*(y)\} \\
&= \partial_k^y \{\pi^{*0}(x), A_i^*(y)\} - \partial_i^y \{\pi^{*0}(x), A_k^*(y)\} \\
&= -\partial_k^y \delta_i^0 \delta^3(x-y) + \partial_i^y \delta_k^0 \delta^3(x-y) \\
&= (\partial_k^x \delta_i^0 - \partial_i^x \delta_k^0) \delta^3(x-y) \\
&\quad \text{Si en el segundo término } i \leftrightarrow k \\
&= (\partial_k^x \delta_i^0 - \partial_k^x \delta_i^0) \delta^3(x-y) = 0
\end{aligned}$$

Demostración de (5.28)

Partimos de,

$$d\phi^3(x) = \int d^3y [\{\phi^3(x), \phi^0(y)\} dt + \{\phi^3(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{\phi^3(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)]$$

Por una parte,

$$\begin{aligned}
\{\phi^3(x), \phi^0(y)\} &= \{\partial_j^x \pi^j(x) + m^2 A^{*0}(x), p^t(y) + \pi^k(y) \pi^{*k}(y) - [\partial_k^y \pi^k(y)] A_0(y)\} \\
&\quad + \{\partial_j^x \pi^j(x) + m^2 A^{*0}(x), -[\partial_k^y \pi^{*k}(y)] A_0^*(y) - m^2 A^{*\mu}(y) A_\mu(y)\} \\
&\quad + \left\{ \partial_j^x \pi^j(x) + m^2 A^{*0}(x), \frac{1}{2} F_{ki}^*(y) F^{ki}(y) \right\} \\
&= -\partial_k^y \pi^k(y) \partial_j^x \{\pi^j(x), A_0(y)\} - m^2 A^{*\mu}(y) \partial_j^x \{\pi^j(x), A_\mu(y)\} \\
&\quad + \frac{1}{2} F_{ki}^*(y) \partial_j^x \{\pi^j(x), F^{ki}(y)\} + m^2 \pi^k(y) \eta^{0l} \{A_l^*(x), \pi^{*k}(y)\} \\
&\quad - m^2 \eta^{0l} \partial_k^y \{A_l^*(x), \pi^{*k}(y)\} A_0^*(y).
\end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned}
\{\pi^j(x), F^{ki}(y)\} &= \eta^{nk} \eta^{mi} \{\pi^j(x), F_{nm}(y)\} \\
&= \eta^{nk} \eta^{mi} \{\pi^j(x), \partial_n^y A_m(y) - \partial_m^y A_n(y)\} \\
&= \eta^{nk} \eta^{mi} \partial_n^y \{\pi^j(x), A_m(y)\} - \partial_m^y \{\pi^j(x), A_n(y)\} \\
&= \eta^{nk} \eta^{mi} [-\partial_n^y \delta_m^j \delta^3(x-y) + \partial_m^y \delta_n^j \delta^3(x-y)] \\
&= \eta^{nk} \eta^{mi} (\partial_m^x \delta_n^j - \partial_n^x \delta_m^j) \delta^3(x-y)
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
\{\phi^3(x), \phi^0(y)\} &= \partial_k^y \pi^k(y) \partial_j^x \delta_0^j \delta^3(x-y) + m^2 A^{*\mu}(y) \partial_j^x \delta_\mu^j \delta^3(x-y) \\
&\quad + \frac{1}{2} F_{ki}^*(y) \partial_j^x \eta^{nk} \eta^{mi} (\partial_m^x \delta_n^j - \partial_n^x \delta_m^j) \delta^3(x-y) \\
&\quad + m^2 \pi^k(y) \eta^{0l} \delta_l^k \delta^3(x-y) - m^2 \eta^{0l} \partial_k^y \delta_l^k \delta^3(x-y) A_0^*(y) \\
&= m^2 A^{*j}(y) \partial_j^x \delta^3(x-y) + \frac{1}{2} F^{*nm}(y) (\partial_j^x \partial_m^x \delta_n^j - \partial_j^x \partial_n^x \delta_m^j) \delta^3(x-y),
\end{aligned}$$

recordando que el producto entre un tensor simétrico y uno antisimétrico es nulo (en el segundo término), se concluye que:

$$\{\phi^3(x), \phi^0(y)\} = m^2 \partial_j^x A^{*j}(y) \delta^3(x-y).$$

Luego se calcula,

$$\begin{aligned}
\{\phi^3(x), \phi^1(y)\} &= \{\partial_k^x \pi^k(x) + m^2 A^{*0}(x), \pi^0(y)\} \\
&= m^2 \eta^{0l} \{A_l^*(x), \pi^0(y)\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Y por último,

$$\begin{aligned}
\{\phi^3(x), \phi^2(y)\} &= \{\partial_k^x \pi^k(x) + m^2 A^{*0}(x), \pi^{*0}(y)\} \\
&= m^2 \eta^{0l} \{A_l^*(x), \pi^{*0}(y)\} \\
&= m^2 \eta^{0l} \delta_l^0 \delta(x-y) \\
&= m^2 \eta^{00} \delta(x-y) \\
&= m^2 \delta(x-y).
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
d\phi^3(x) &= \int d^3y [m^2 \partial_j^x A^{*j}(y) \delta^3(x-y) dt + m^2 \delta(x-y) d\omega_2(y)] \\
&= m^2 \partial_j^x A^{*j}(x) dt + m^2 d\omega_2(x).
\end{aligned}$$

Demostración de (5.30)

Partimos de,

$$d\phi^4(x) = \int d^3y [\{\phi^4(x), \phi^0(y)\} dt + \{\phi^4(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{\phi^4(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)].$$

Por una parte,

$$\begin{aligned} \{\phi^4(x), \phi^0(y)\} &= \{\partial_j^x \pi^{*j}(x) + m^2 A^0(x), p^t(y) + \pi^k(y) \pi^{*k}(y) - [\partial_k^y \pi^k(y)] A_0(y)\} \\ &\quad + \{\partial_j^x \pi^{*j}(x) + m^2 A^0(x), -[\partial_k^y \pi^{*k}(y)] A_0^*(y)\} \\ &\quad - \left\{ \partial_j^x \pi^{*j}(x) + m^2 A^0(x), m^2 A^{*\mu}(y) A_\mu(y) + \frac{1}{2} F_{ki}^*(y) F^{ki}(y) \right\} \\ &= -\partial_k^y \pi^{*k}(y) \partial_j^x \{\pi^{*j}(x), A_0^*(y)\} - m^2 \partial_j^x \eta^{\mu\gamma} \{\pi^{*j}(x), A_\gamma^*(y)\} A_\mu(y) \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_j^x \{\pi^{*j}(x), F_{ki}^*(y)\} F^{ki}(y) + m^2 \eta^{0l} \{A_l(x), \pi^k(y)\} \pi^{*k}(y) \\ &\quad - m^2 \eta^{0l} \partial_k^y \{A_l(x), \pi^k(y)\} A_0(y). \end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned} \{\pi^{*j}(x), F_{nm}^*(y)\} &= \{\pi^{*j}(x), F_{nm}^*(y)\} \\ &= \{\pi^{*j}(x), \partial_n^y A_m^*(y) - \partial_m^y A_n^*(y)\} \\ &= \partial_n^y \{\pi^{*j}(x), A_m^*(y)\} - \partial_m^y \{\pi^{*j}(x), A_n^*(y)\} \\ &= [-\partial_n^y \delta_m^j \delta^3(x-y) + \partial_m^y \delta_n^j \delta^3(x-y)] \\ &= (\partial_m^x \delta_n^j - \partial_n^x \delta_m^j) \delta^3(x-y). \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \{\phi^4(x), \phi^0(y)\} &= \partial_k^y \pi^{*k}(y) \partial_j^x \delta_0^j \delta(x-y) + m^2 \partial_j^x \eta^{\mu\gamma} \delta_\gamma^j \delta(x-y) A_\mu(y) \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_j^x [\eta^{nk} \eta^{mi} (\partial_m^x \delta_n^j - \partial_n^x \delta_m^j) \delta^3(x-y)] F^{ki}(y) \\ &\quad + m^2 \eta^{0l} \delta_l^k \delta(x-y) \pi^{*k}(y) - m^2 \eta^{0l} \partial_k^y \delta_l^k \delta(x-y) A_0(y) \\ &= m^2 \partial_j^x A^j(y) \delta(x-y) + \frac{1}{2} \partial_j^x [(\partial_m^x \delta_n^j - \partial_n^x \delta_m^j) F_{nm}(y) \delta^3(x-y)]. \end{aligned}$$

recordando que el producto entre un tensor simétrico y uno antisimétrico es nulo (en el segundo término), se concluye que,

$$\{\phi^4(x), \phi^0(y)\} = m^2 \partial_j^y A^j(y) \delta(x-y).$$

Luego se calcula,

$$\begin{aligned} \{\phi^4(x), \phi^1(y)\} &= \{\partial_k^x \pi^{*k}(x) + m^2 A^0(x), \pi^0(y)\} \\ &= m^2 \eta^{0l} \{A_l(x), \pi^0(y)\} \\ &= m^2 \eta^{0l} \delta_l^0 \delta(x-y) \\ &= m^2 \delta(x-y). \end{aligned}$$

Y por último,

$$\begin{aligned} \{\phi^4(x), \phi^2(y)\} &= \{\partial_k^x \pi^{*k}(x) + m^2 A^0(x), \pi^{*0}(y)\} \\ &= m^2 \eta^{0l} \{A_l(x), \pi^{*0}(y)\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned} d\phi^4(x) &= \int d^3y [m^2 \partial_j^x A^j(y) \delta(x-y) dt + m^2 \delta(x-y) d\omega_1(y)] \\ &= m^2 \partial_j^x A^j(x) dt + m^2 d\omega_1(x). \end{aligned}$$

B.3. Integrabilidad con el diferencial fundamental

Demostración del sistema de ecuaciones (5.32)

Utilizando (5.31), se calculará la condición de integrabilidad para todos los vínculos.

Para ϕ^1 :

$$\begin{aligned} d\phi^1(x) &= \int d^3y [\{\phi^1(x), \phi^0(y)\} dt + \{\phi^1(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{\phi^1(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)] \\ &\quad + \int d^3y [\{\phi^1(x), \phi^3(y)\} d\omega_3(y) + \{\phi^1(x), \phi^4(y)\} d\omega_4(y)] \\ &= \int d^3y [\partial_k^y \pi^k(y) + m^2 A^{*0}(y)] \delta^3(x-y) dt - \int d^3y [m^2 \delta(x-y) d\omega_4(y)] \\ &= [\partial_k^x \pi^k(x) + m^2 A^{*0}(x)] dt - m^2 d\omega_4(x) = 0,. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$[\partial_k^x \pi^k(x) + m^2 A^{*0}(x)] dt = m^2 d\omega_4(x).$$

Para ϕ^2 :

$$\begin{aligned} d\phi^2(x) &= \int d^3y [\{\phi^2(x), \phi^0(y)\} dt + \{\phi^2(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{\phi^2(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)] \\ &\quad + \int d^3y [\{\phi^2(x), \phi^3(y)\} d\omega_3(y) + \{\phi^2(x), \phi^4(y)\} d\omega_4(y)] \\ &= \int d^3y [\partial_k^y \pi^{*k}(y) + m^2 A^0(y)] \delta^3(x-y) dt - \int d^3y [m^2 \delta(x-y) d\omega_3(y)] \\ &= [\partial_k^x \pi^{*k}(x) + m^2 A^0(x)] dt - m^2 d\omega_3(y) = 0,. \end{aligned}$$

Es decir,

$$[\partial_k^x \pi^{*k}(x) + m^2 A^0(x)] dt = m^2 d\omega_3(y).$$

Para ϕ^3 :

$$\begin{aligned} d\phi^3(x) &= \int d^3y [\{\phi^3(x), \phi^0(y)\} dt + \{\phi^3(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{\phi^3(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)] \\ &\quad + \int d^3y [\{\phi^3(x), \phi^3(y)\} d\omega_3(y) + \{\phi^3(x), \phi^4(y)\} d\omega_4(y)]. \end{aligned}$$

Aquí se debe calcular

$$\begin{aligned} \{\phi^3(x), \phi^3(y)\} &= \{\partial_k^x \pi^k(x) + m^2 A^{*0}(x), \partial_k^y \pi^k(y) + m^2 A^{*0}(y)\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Y también

$$\begin{aligned} \{\phi^3(x), \phi^4(y)\} &= \{\partial_k^x \pi^k(x) + m^2 A^{*0}(x), \partial_k^y \pi^{*k}(y) + m^2 A^0(y)\} \\ &= m^2 \eta^{0l} \partial_k^x \{\pi^k(x), A_l(y)\} + m^2 \eta^{0l} \partial_k^y \{A_l^*(x), \pi^{*k}(y)\} \\ &= -m^2 \eta^{0l} \partial_k^x \delta_l^k \delta(x-y) + m^2 \eta^{0l} \partial_k^y \delta_l^k \delta(x-y) \\ &= -m^2 \eta^{0k} \partial_k^x \delta(x-y) + m^2 \eta^{0k} \partial_k^y \delta(x-y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned}
d\phi^3(x) &= \int d^3y [m^2 \partial_j^y A^{*j}(y) \delta^3(x-y)] dt + \int d^3y [m^2 \delta(x-y) d\omega_2(y)] \\
&= m^2 \partial_j^x A^{*j}(x) dt + m^2 d\omega_2(x).
\end{aligned}$$

Para ϕ^4

$$\begin{aligned}
d\phi^4(x) &= \int d^3y [\{\phi^4(x), \phi^0(y)\} dt + \{\phi^4(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{\phi^4(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)] \\
&\quad + \int d^3y [\{\phi^4(x), \phi^3(y)\} d\omega_3(y) + \{\phi^4(x), \phi^4(y)\} d\omega_4(y)].
\end{aligned}$$

Aquí se debe calcular

$$\begin{aligned}
\{\phi^4(x), \phi^4(y)\} &= \{\partial_k^x \pi^{*k}(x) + m^2 A^0(x), \partial_k^y \pi^{*k}(y) + m^2 A^0(y)\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned}
d\phi^4(x) &= \int d^3y [m^2 \partial_j^y A^j(y) \delta(x-y) dt + m^2 \delta(x-y) d\omega_1(y)] \\
&= m^2 \partial_j^x A^j(x) dt + m^2 d\omega_1(x).
\end{aligned}$$

B.4. Corchetes de Poisson entre las variables de espacio de fase y los vínculos

Para demostrar (5.35) se necesitan los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
\{A_i(x), \phi^0(y)\} &= \{A_i(x), p^t + \pi^{*k}(y) \pi^{*k}(y) - [\partial_k \pi^{*k}(y)] A_0(y)\} \\
&\quad + \left\{ A_i(x), -[\partial_k \pi^{*k}(y)] A_0^*(y) - m^2 A^{*\mu}(y) A_\mu(y) + \frac{1}{2} F_{ki}^*(y) F^{ki}(y) \right\} \\
&= \{A_i(x), \pi^{*k}(y)\} \pi^{*k}(y) - \partial_k \{A_i(x), \pi^{*k}(y)\} A_0(y) \\
&= \delta_i^k \delta^3(x-y) \pi^{*k}(y) - \partial_k \delta_i^k \delta^3(x-y) A_0(y) \\
&= [\pi^{*i}(y) - \partial_i A_0(y)] \delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{A_i(x), \phi^1(y)\} &= \{A_i(x), \pi^0(y)\} \\
&= \delta_i^0 \delta^3(x-y) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{A_i(x), \phi^2(y)\} &= \{A_i(x), \pi^{*0}(y)\} \\
&= \delta_i^0 \delta^3(x-y) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{A_i(x), \phi^3(y)\} &= \{A_i(x), \partial_k^y \pi^k(y) + m^2 A^{*0}(y)\} \\
&= \partial_k^y \delta_i^k \delta^3(x-y) \\
&= \partial_i^y \delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{A_i(x), \phi^4(y)\} &= \{A_i(x), \partial_k^y \pi^{*k}(y) + m^2 A^0(y)\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Para demostrar (5.41) se necesitan los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
\{\pi^{*j}(x), \phi^0(y)\} &= \{\pi^{*j}(x), p^t + \pi^k(y) \pi^{*k}(y) - [\partial_k \pi^k(y)] A_0(y)\} \\
&\quad + \left\{ \pi^{*j}(x), -[\partial_k \pi^{*k}(y)] A_0^*(y) - m^2 A^{*\mu}(y) A_\mu(y) + \frac{1}{2} F_{ki}^*(y) F^{ki}(y) \right\} \\
&= -m^2 A_\mu(y) \{\pi^{*j}(x), A^{*\mu}(y)\} + \frac{1}{2} \{\pi^{*j}(x), F_{ki}^*(y)\} F^{ki}(y) \\
&= m^2 A^\mu(y) \delta_\mu^j \delta^3(x-y) - \frac{1}{2} (\partial_i^x \delta_k^j - \partial_k^x \delta_i^j) \delta^3(x-y) F^{ki}(y) \\
&= m^2 A^j(y) \delta^3(x-y) - \frac{1}{2} [\partial_i^x F^{ji}(y) - \partial_k^x F^{kj}(y)] \delta^3(x-y) \\
&= m^2 A^j(y) \delta^3(x-y) - \frac{1}{2} [\partial_k^x F^{jk}(y) - \partial_k^x F^{kj}(y)] \delta^3(x-y) \\
&= [m^2 A^j(y) + \partial_k^x F^{kj}(y)] \delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

$$\{\pi^{*i}(x), \phi^1(y)\} = \{\pi^{*i}(x), \pi^0(y)\} = 0.$$

$$\{\pi^{*i}(x), \phi^2(y)\} = \{\pi^{*i}(x), \pi^{*0}(y)\} = 0.$$

$$\{\pi^{*i}(x), \phi^3(y)\} = \{\pi^{*i}(x), \partial_k^y \pi^{*k}(y) + m^2 A^{*0}(y)\} = 0.$$

$$\{\pi^{*i}(x), \phi^4(y)\} = \{\pi^{*i}(x), \partial_k^y \pi^{*k}(y) + m^2 A^0(y)\} = 0.$$

B.5. Cálculo de los corchetes generalizados

Construcción de (5.45)

Es una matriz antisimétrica que tiene la estructura,

$$M(x, y) \equiv \begin{pmatrix} \{\phi^1(x), \phi^1(y)\} & \{\phi^1(x), \phi^2(y)\} & \{\phi^1(x), \phi^3(y)\} & \{\phi^1(x), \phi^4(y)\} \\ \{\phi^2(x), \phi^1(y)\} & \{\phi^2(x), \phi^2(y)\} & \{\phi^2(x), \phi^3(y)\} & \{\phi^2(x), \phi^4(y)\} \\ \{\phi^3(x), \phi^1(y)\} & \{\phi^3(x), \phi^2(y)\} & \{\phi^3(x), \phi^3(y)\} & \{\phi^3(x), \phi^4(y)\} \\ \{\phi^4(x), \phi^1(y)\} & \{\phi^4(x), \phi^2(y)\} & \{\phi^4(x), \phi^3(y)\} & \{\phi^4(x), \phi^4(y)\} \end{pmatrix}.$$

Los corchetes de Poisson diferentes de cero son:

$$\begin{aligned} \{\phi^1(x), \phi^4(y)\} &= \{\pi^0(x), \partial_k^y \pi^{*k}(y) + m^2 A^0(y)\} = -m^2 \delta^3(x - y), \\ \{\phi^2(x), \phi^3(y)\} &= \{\pi^0(x), \partial_k^y \pi^{*k}(y) + m^2 A^{*0}(y)\} = -m^2 \delta^3(x - y). \end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados se obtiene:

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -m^2 \\ 0 & 0 & -m^2 & 0 \\ 0 & m^2 & 0 & 0 \\ m^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y),$$

Deducción de la matriz inversa (5.46)

Se parte de una propiedad inherente a este tipo de matrices:

$$\int d^3z M^{nl}(x, y) (M^{-1})^{lk}(x, y) = \delta^{nk} \delta^3(x - y).$$

Proponiendo que la matriz inverza tenga una estructura de la forma

$$(M^{-1})(x, y) = \begin{pmatrix} \Omega^1(x, y) & \Omega^2(x, y) & \Omega^3(x, y) & \Omega^4(x, y) \\ \Omega^5(x, y) & \Omega^6(x, y) & \Omega^7(x, y) & \Omega^8(x, y) \\ \Omega^9(x, y) & \Omega^{10}(x, y) & \Omega^{11}(x, y) & \Omega^{12}(x, y) \\ \Omega^{13}(x, y) & \Omega^{14}(x, y) & \Omega^{15}(x, y) & \Omega^{16}(x, y) \end{pmatrix},$$

donde las Ω son funciones desconocidas. Para calcularlas se usa la propiedad anterior, resultando,

$$\int d^3z M^{nl}(x, y) (M^{-1})^{lk}(x, y) = \begin{pmatrix} -m^2\Omega^{13}(x, y) & -m^2\Omega^{14}(x, y) & -m^2\Omega^{15}(x, y) & -m^2\Omega^{16}(x, y) \\ -m^2\Omega^9(x, y) & -m^2\Omega^{10}(x, y) & -m^2\Omega^{11}(x, y) & -m^2\Omega^{12}(x, y) \\ m^2\Omega^5(x, y) & m^2\Omega^6(x, y) & m^2\Omega^7(x, y) & m^2\Omega^8(x, y) \\ m^2\Omega^1(x, y) & m^2\Omega^2(x, y) & m^2\Omega^3(x, y) & m^2\Omega^4(x, y) \end{pmatrix}.$$

Comparando con $\delta^{nk}\delta^3(x - y)$, se logra reconocer que las unicas componentes diferentes de cero son:

$$\begin{aligned} \Omega^{13}(x, y) &= -\frac{1}{m^2}\delta^3(x - y), \\ \Omega^{10}(x, y) &= -\frac{1}{m^2}\delta^3(x - y), \\ \Omega^7(x, y) &= \frac{1}{m^2}\delta^3(x - y), \\ \Omega^4(x, y) &= \frac{1}{m^2}\delta^3(x - y). \end{aligned}$$

Así, la matriz inverza es;

$$(M^{-1})(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & m^{-2} \\ 0 & 0 & m^{-2} & 0 \\ 0 & -m^{-2} & 0 & 0 \\ -m^{-2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y).$$

Cálculo de los corchetes generalizados para el campo de Proca complejo

El cálculo de estos corchetes es bastante trivial, pues dados los resultados del apéndice B.4, el cálculo de los corchetes generalizados se reduce a calcular los corchetes de Poisson. Para ejemplificarlo, se calculará enseguida los corchetes generalizados diferentes de cero.

Primero:

$$\begin{aligned}
\{A_i(x), \pi^k(y)\}^* &= \{A_i(x), \pi^k(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi^1(u)\} (M^{-1})^{14}(u, v) \{\phi^4(v), \pi^k(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi^2(u)\} (M^{-1})^{23}(u, v) \{\phi^3(v), \pi^k(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi^3(u)\} (M^{-1})^{32}(u, v) \{\phi^2(v), \pi^k(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi^4(u)\} (M^{-1})^{41}(u, v) \{\phi^1(v), \pi^k(y)\} \\
&= \{A_i(x), \pi^k(y)\} \\
&= \delta_i^k \delta(x - y).
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\{A_i^*(x), \pi^{*k}(y)\}^* &= \{A_i^*(x), \pi^{*k}(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{A_i^*(x), \phi^1(u)\} (M^{-1})^{14}(u, v) \{\phi^4(v), \pi^{*k}(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{A_i^*(x), \phi^2(u)\} (M^{-1})^{23}(u, v) \{\phi^3(v), \pi^{*k}(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{A_i^*(x), \phi^3(u)\} (M^{-1})^{32}(u, v) \{\phi^2(v), \pi^{*k}(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{A_i^*(x), \phi^4(u)\} (M^{-1})^{41}(u, v) \{\phi^1(v), \pi^{*k}(y)\} \\
&= \{A_i^*(x), \pi^{*k}(y)\} \\
&= \delta_i^k \delta(x - y).
\end{aligned}$$

Se puede comprobar que las demás combinaciones son iguales a cero de forma similar.

Demostración de (5.49)

$$\begin{aligned}
dA_i(x) &= \int d^3y [\{A_i(x), \phi^0(y)\}^* dt] \\
&= \int d^3y \{A_i(x), \phi^0(y)\} dt \\
&\quad - \int d^3y \int \int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi^n(u)\} (M^{-1})^{nl}(u, v) \{\phi^l(v), \phi^0(y)\} dt \\
&= \int d^3y \{A_i(x), \phi^0(y)\} dt \\
&\quad - \int d^3y \int \int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi^1(u)\} (M^{-1})^{14}(u, v) \{\phi^4(v), \phi^0(y)\} dt \\
&\quad - \int d^3y \int \int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi^2(u)\} (M^{-1})^{23}(u, v) \{\phi^3(v), \phi^0(y)\} dt \\
&\quad - \int d^3y \int \int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi^3(u)\} (M^{-1})^{32}(u, v) \{\phi^2(v), \phi^0(y)\} dt \\
&\quad - \int d^3y \int \int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi^4(u)\} (M^{-1})^{41}(u, v) \{\phi^1(v), \phi^0(y)\} dt \\
&= \int d^3y \{A_i(x), \phi^0(y)\} dt.
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
\{A_i(x), \phi^0(y)\} &= \left\{ A_i(x), \pi^k(y) \pi^{*k}(y) + \frac{1}{m^2} \partial_k^y \pi^{*k}(y) \partial_j^y \pi^j(y) \right\} \\
&\quad + \left\{ A_i(x), -m^2 A^{*j}(y) A_j(y) + \frac{1}{2} F_{kj}^*(y) F^{kj}(y) \right\} \\
&= \{A_i(x), \pi^k(y)\} \pi^{*k}(y) + \frac{1}{m^2} \partial_j^y \{A_i(x), \pi^j(y)\} \partial_k^y \pi^{*k}(y) \\
&= \delta_i^k \delta^3(x-y) \pi^{*k}(y) + \frac{1}{m^2} \partial_j^y \delta_i^j \delta^3(x-y) \partial_k^y \pi^{*k}(y) \\
&= \left[\pi^{*i}(y) - \frac{1}{m^2} \partial_i^x \partial_k^y \pi^{*k}(y) \right] \delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
dA_i(x) &= \int d^3y \left[\pi^{*i}(y) - \frac{1}{m^2} \partial_i^x \partial_k^y \pi^{*k}(y) \right] \delta^3(x-y) dt \\
&= \left[\pi^{*i}(x) - \frac{1}{m^2} \partial_i^x \partial_k^x \pi^{*k}(x) \right] dt
\end{aligned}$$

Demostración de (5.52)

$$\begin{aligned}
d\pi^i(x) &= \int d^3y [\{\pi^i(x), \phi^0(y)\}^* dt] \\
&= \int d^3y \{\pi^i(x), \phi^0(y)\} dt \\
&\quad - \int d^3y \int \int d^3u d^3v \{\pi^i(x), \phi^n(u)\} (M^{-1})^{nl}(u, v) \{\phi^l(v), \phi^0(y)\} dt \\
&= \int d^3y \{\pi^i(x), \phi^0(y)\} dt \\
&\quad - \int d^3y \int \int d^3u d^3v \{\pi^i(x), \phi^1(u)\} (M^{-1})^{14}(u, v) \{\phi^4(v), \phi^0(y)\} dt \\
&\quad - \int d^3y \int \int d^3u d^3v \{\pi^i(x), \phi^2(u)\} (M^{-1})^{23}(u, v) \{\phi^3(v), \phi^0(y)\} dt \\
&\quad - \int d^3y \int \int d^3u d^3v \{\pi^i(x), \phi^3(u)\} (M^{-1})^{32}(u, v) \{\phi^2(v), \phi^0(y)\} dt \\
&\quad - \int d^3y \int \int d^3u d^3v \{\pi^i(x), \phi^4(u)\} (M^{-1})^{41}(u, v) \{\phi^1(v), \phi^0(y)\} dt \\
&= \int d^3y \{\pi^i(x), \phi^0(y)\} dt,
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
\{\pi^i(x), \phi^0(y)\} &= \left\{ \pi^i(x), \pi^k(y) \pi^{*k}(y) + \frac{1}{m^2} \partial_k^y \pi^{*k}(y) \partial_j^y \pi^j(y) \right\} \\
&\quad + \left\{ \pi^i(x), -m^2 A^{*j}(y) A_j(y) + \frac{1}{2} F_{kj}^*(y) F^{kj}(y) \right\} \\
&= -m^2 A^{*j}(y) \{\pi^i(x), A_j(y)\} + \frac{1}{2} F_{kj}^*(y) \{\pi^i(x), F^{kj}(y)\} \\
&= m^2 A^{*j}(y) \delta_j^i \delta^3(x-y) + \frac{1}{2} (\partial_j^y \delta_k^i - \partial_k^y \delta_j^i) \delta^3(x-y) F_{kj}^*(y) \\
&= m^2 A^{*i}(y) \delta^3(x-y) + \frac{1}{2} [\partial_j^y F_{ij}^*(y) - \partial_k^y F_{ki}^*(y)] \delta^3(x-y) \\
&= [m^2 A^{*i}(y) + \partial_k^y F^{*ki}(y)] \delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

Con lo cuál

$$\begin{aligned}
d\pi^i(x) &= \int d^3y [m^2 A^{*i}(y) + \partial_k^y F^{*ki}(y)] \delta^3(x-y) dt \\
&= [m^2 A^{*i}(x) + \partial_k^x F^{*ki}(x)] dt
\end{aligned}$$

Apéndice C

Cálculos para el campo de Proca con simetría gauge

C.1. la densidad Lagrangiana de Proca no es invariante de gauge

Consideramos una transformación del tipo (6.1); en primer lugar, se puede comprobar que el tensor $F_{\mu\nu}$, bajo esta transformación si es invariante, es decir,

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu(x) - \partial_\nu A'_\mu(x) \\ &= \partial_\mu [A_\nu(x) + \partial_\nu \Lambda(x)] - \partial_\nu [A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)] \\ &= \partial_\mu A_\nu(x) + \partial_\mu \partial_\nu \Lambda(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + \partial_\nu \partial_\mu \Lambda(x) \\ &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + \partial_\mu \partial_\nu \Lambda(x) + \partial_\nu \partial_\mu \Lambda(x) \\ &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x). \end{aligned}$$

Luego, la densidad lagrangiana de Proca se transforma como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}(x)F'^{\mu\nu}(x) + \frac{m^2}{2}A'_\mu(x)A'^\mu(x) \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \frac{m^2}{2}[A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)][A^\mu(x) + \partial^\mu\Lambda(x)] \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \frac{m^2}{2}[A_\mu(x)A^\mu(x) + A_\mu(x)\partial^\mu\Lambda(x) \\
&\quad + \frac{m^2}{2}[A^\mu(x)\partial_\mu\Lambda(x) + \partial_\mu\Lambda(x)\partial^\mu\Lambda(x)] \\
&= \mathcal{L} + \frac{m^2}{2}[A_\mu(x)\partial^\mu\Lambda(x) + A^\mu(x)\partial_\mu\Lambda(x) + \partial_\mu\Lambda(x)\partial^\mu\Lambda(x)]. \tag{C.1}
\end{aligned}$$

Con esto se comprueba que el campo de Proca no es invariante de gauge local debido al término de masa.

C.2. Deducción de la densidad Lagrangiana

Demostración de (6.9)

La demostración de esta simplificación se hace de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_c &= \pi^\mu \dot{A}_\mu + p_\theta \dot{\theta} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2} \left(A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta \right)^2 \\
&= \underbrace{\pi^0 \dot{A}_0}_{=0} + \pi^k \dot{A}_k + p_\theta \partial_0 \theta - \frac{m^2}{2} \left(A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{4} \left(\underbrace{F_{00} F^{00}}_{=0} + F_{0k} F^{0k} + F_{k0} F^{k0} + F_{ki} F^{ki} \right) \\
&= \pi^k (\pi^k + \partial_k A_0) + p_\theta \left(\frac{e^2}{m^2} p_\theta - e A_0 \right) - \frac{m^2}{2} \left(A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{4} (F_{k0} F^{k0} + F_{k0} F^{k0} + F_{ki} F^{ki}) \\
&= \pi^k \pi^k + \pi^k \partial_k A_0 + \frac{e^2}{m^2} p_\theta^2 - e A_0 p_\theta \\
&\quad - \frac{m^2}{2} \left(A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta \right)^2 - \frac{1}{2} \underbrace{F^{k0} F^{k0}}_{=\pi^k} + \frac{1}{4} F_{ki} F^{ki} \\
&= \frac{1}{2} \pi^k \pi^k + \pi^k \partial_k A_0 + \frac{1}{4} F_{ki} F^{ki} + \frac{e^2}{m^2} p_\theta^2 - e A_0 p_\theta \\
&\quad - \frac{m^2}{2} \left(A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta \right)^2
\end{aligned}$$

Pero, se sabe que

$$\begin{aligned}
\left(A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta \right)^2 &= \left(A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta \right) \left(A^\mu + \frac{1}{e} \partial^\mu \theta \right) \\
&= A_\mu A^\mu + \frac{1}{e} A_\mu \partial^\mu \theta + \frac{1}{e} A^\mu \partial_\mu \theta + \frac{1}{e^2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta \\
&= A_0 A^0 + \frac{1}{e} A_0 \partial^0 \theta + \frac{1}{e} A^0 \partial_0 \theta + \frac{1}{e^2} \partial_0 \theta \partial^0 \theta \\
&\quad - \left(A_k A^k + \frac{1}{e} A_k \partial^k \theta + \frac{1}{e} A^k \partial_k \theta + \frac{1}{e^2} \partial_k \theta \partial^k \theta \right) \\
&= \left(\frac{e}{m^2} p_\theta \right)^2 - \left(A_k + \frac{1}{e} \partial_k \theta \right)^2
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_c &= \frac{1}{2}\pi^k\pi^k + \pi^k\partial_k A_0 + \frac{1}{4}F_{ki}F^{ki} + \frac{e^2}{m^2}p_\theta^2 - eA_0p_\theta \\
&\quad - \frac{m^2}{2} \left[\left(\frac{e}{m^2}p_\theta \right)^2 - \left(A_k + \frac{1}{e}\partial_k\theta \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{2}\pi^k\pi^k + \pi^k\partial_k A_0 + \frac{1}{4}F_{ki}F^{ki} + \frac{e^2}{m^2}p_\theta^2 - eA_0p_\theta \\
&\quad - \frac{1}{2}\frac{e^2}{m^2}p_\theta^2 + \frac{m^2}{2} \left(A_k + \frac{1}{e}\partial_k\theta \right)^2
\end{aligned}$$

Así, la densidad Hamiltoniana se escribe como

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_c &= \frac{1}{2}\pi^k\pi^k + \frac{1}{2}\frac{e^2}{m^2}p_\theta^2 + \pi^k\partial_k A_0 - eA_0p_\theta \\
&\quad + \frac{1}{4}F_{ki}F^{ki} + \frac{m^2}{2} \left(A_k + \frac{1}{e}\partial_k\theta \right)^2.
\end{aligned}$$

C.3. Corchetes de Poisson entre los vínculos

Demostración de (6.16)

$$\begin{aligned}
\{\phi^1(x), \phi^0(y)\} &= \left\{ \pi^0(x), p^t + \frac{1}{2}\pi^k(y)\pi^k(y) - [\partial_k^y\pi^k(y)]A_0(y) + \frac{1}{4}F_{ki}(y)F^{ki}(y) \right\} \\
&\quad + \left\{ \pi^0(x), \frac{1}{2}\frac{e^2}{m^2}p_\theta^2(y) - eA_0(y)p_\theta(y) + \frac{m^2}{2} \left(A_k(y) + \frac{1}{e}\partial_k^y\theta(y) \right)^2 \right\} \\
&= -\partial_k^y\pi^k(y) \{ \pi^0(x), A_0(y) \} - e \{ \pi^0(x), A_0(y) \} p_\theta(y) \\
&= [\partial_k^y\pi^k(y) + ep_\theta(y)] \delta^3(x-y). \tag{C.2}
\end{aligned}$$

Demostración de (6.20)

$$\begin{aligned}
\{\phi^2(x), \phi^0(y)\} &= \left\{ \partial_j^x \pi^j(x) + e p_\theta(x), p^t + \frac{1}{2} \pi^k(y) \pi^k(y) \right\} \\
&+ \left\{ \partial_j^x \pi^j(x) + e p_\theta(x), -[\partial_k^y \pi^k(y)] A_0(y) + \frac{1}{4} F_{ki}(y) F^{ki}(y) \right\} \\
&+ \left\{ \partial_j^x \pi^j(x) + e p_\theta(x), \frac{1}{2} \frac{e^2}{m^2} p_\theta^2(y) - e A_0(y) p_\theta(y) \right\} \\
&+ \left\{ \partial_j^x \pi^j(x) + e p_\theta(x), \frac{m^2}{2} \left[A_k(y) + \frac{1}{e} \partial_k^y \theta(y) \right]^2 \right\} \\
&= \frac{1}{2} \partial_j^x \{ \pi^j(x), F_{ki}(y) \} F^{ki}(y) + \frac{m^2}{2} \partial_k^x \left\{ \pi^k(x), \left(A_k(y) + \frac{1}{e} \partial_k^y \theta(y) \right)^2 \right\} \\
&+ \frac{em^2}{2} \left\{ p_\theta(x), \left(A_k(y) + \frac{1}{e} \partial_k^y \theta(y) \right)^2 \right\},
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
\left\{ \pi^j(x), \left(A_k(y) + \frac{1}{e} \partial_k^y \theta(y) \right)^2 \right\} &= 2 \left\{ \pi^j(x), \left(A_k(y) + \frac{1}{e} \partial_k^y \theta(y) \right) \right\} \left[A^k(y) + \frac{1}{e} \partial_y^k \theta(y) \right] \\
&= -2 \delta_k^j \delta^3(x-y) \left[A^k(y) + \frac{1}{e} \partial_y^k \theta(y) \right] \\
&= -2 \left[A^j(y) + \frac{1}{e} \partial_y^j \theta(y) \right] \delta^3(x-y),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ p_\theta(x), \left(A_k(y) + \frac{1}{e} \partial_k^y \theta(y) \right)^2 \right\} &= 2 \left\{ p_\theta(x), \left(A_k(y) + \frac{1}{e} \partial_k^y \theta(y) \right) \right\} \left(A^k(y) + \frac{1}{e} \partial_y^k \theta(y) \right) \\
&= -\frac{2}{e} \partial_k^y \{ p_\theta(x), \theta(y) \} \left(A^k(y) + \frac{1}{e} \partial_y^k \theta(y) \right) \\
&= -\frac{2}{e} \partial_k^y \left(A^k(y) + \frac{1}{e} \partial_y^k \theta(y) \right) \delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\{\phi^2(x), \phi^0(y)\} &= \underbrace{-\partial_i^x \partial_k^y F^{ki}(y)}_{=0} \delta^3(x-y) - m^2 \partial_k^x \left(A^j(y) + \frac{1}{e} \partial_y^j \theta \right) \delta^3(x-y) \\
&\quad - m^2 \partial_k^y \left(A^k(y) + \frac{1}{e} \partial_y^k \theta(y) \right) \delta^3(x-y) \\
&= \left[-m^2 \partial_k^x \left(A^j(y) + \frac{1}{e} \partial_y^j \theta \right) - m^2 \partial_k^y \left(A^k(y) + \frac{1}{e} \partial_y^k \theta(y) \right) \right] \delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

Ahora, considerando la identidad,

$$\partial_x f(x-y) = -\partial_y f(x-y),$$

se observa que

$$\begin{aligned}
\{\phi^2(x), \phi^0(y)\} &= \left[m^2 \partial_k^y \left(A^j(y) + \frac{1}{e} \partial_y^j \theta \right) - m^2 \partial_k^x \left(A^k(y) + \frac{1}{e} \partial_y^k \theta(y) \right) \right] \delta^3(x-y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Demostración de (6.21)

Este corchete de Poisson es bastante trivial, ya que considerando los corchetes fundamentales diferentes de cero en (6.14), se tiene que

$$\{\phi^2(x), \phi^1(y)\} = \{\partial_j^x \pi^j(x) + e p_\theta(x), \pi^0(y)\} = 0.$$

C.4. Evolución dinámica de las variables del espacio de fase

Corchetes de Poisson en (6.29)

$$\begin{aligned}
\{A_\mu(x), \phi^0(y)\} &= \left\{ A_\mu(x), p^t + \frac{1}{2} \pi^k(y) \pi^k(y) - [\partial_k^y \pi^k(y)] A_0(y) + \frac{1}{4} F_{ki}(y) F^{ki}(y) \right\} \\
&\quad + \left\{ A_\mu(x), \frac{1}{2} \frac{e^2}{m^2} p_\theta^2(y) - e A_0(y) p_\theta(y) + \frac{m^2}{2} \left[A_k(y) + \frac{1}{e} \partial_k^y \theta(y) \right]^2 \right\} \\
&= \{A_\mu(x), \pi^k(y)\} \pi^k(y) - \partial_k^y \{A_\mu(x), \pi^k(y)\} A_0(y) \\
&= \delta_\mu^k \delta^3(x-y) \pi^k(y) - \partial_k^y \delta_\mu^k \delta^3(x-y) A_0(y) \\
&= \delta_\mu^k [\pi^k(y) - \partial_k^y A_0(y)] \delta^3(x-y)
\end{aligned}$$

$$\{A_\mu(x), \phi^1(y)\} = \{A_\mu(x), \pi^0(y)\} = 0$$

$$\begin{aligned} \{A_\mu(x), \phi^2(y)\} &= \{A_\mu(x), \partial_k^y \pi^j(y) + ep_\theta(y)\} \\ &= \partial_k^y \delta_\mu^k \delta^3(x-y) \end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados en (6.29), se obtiene

$$\begin{aligned} dA_\mu(x) &= \int d^3y \{ \delta_\mu^k [\pi^k(y) - \partial_k^y A_0(y)] \delta^3(x-y) dt + \partial_k^y \delta_\mu^k \delta^3(x-y) d\omega_2(y) \} \\ &= \delta_\mu^k [\pi^k(x) - \partial_k^x A_0(x)] dt + \delta_\mu^k \partial_k^x d\omega_2(x). \end{aligned}$$

Corchetes de Poisson en (6.30)

$$\begin{aligned} \{\pi^\mu(x), \phi^0(y)\} &= \left\{ \pi^\mu(x), p^t + \frac{1}{2} \pi^k(y) \pi^k(y) - [\partial_k^y \pi^k(y)] A_0(y) + \frac{1}{4} F_{ki}(y) F^{ki}(y) \right\} \\ &+ \left\{ \pi^\mu(x), \frac{1}{2} \frac{e^2}{m^2} p_\theta^2(y) - e A_0(y) p_\theta(y) \right\} \\ &+ \left\{ \pi^\mu(x), \frac{m^2}{2} \left[A_k(y) + \frac{1}{e} \partial_k^y \theta(y) \right]^2 \right\} \\ &. \end{aligned}$$

Estos corchetes de Poisson se calculan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\{\pi^\mu(x), \phi^0(y)\} &= \frac{1}{2} \{\pi^\mu(x), \partial_k^y A_i(y) - \partial_i^y A_k(y)\} F^{ki}(y) - \partial_k^y \pi^k(y) \{\pi^\mu(x), A_0(y)\} \\
&\quad - e \{\pi^\mu(x), A_0(y)\} p_\theta(y) + m^2 \{\pi^\mu(x), A_k(y)\} \left(A^k(y) + \frac{1}{e} \partial_y^k \theta(y) \right) \\
&= \frac{1}{2} [\partial_k^y \delta_i^\mu - \partial_i^y \delta_k^\mu] F^{ki}(y) \delta^3(x-y) + \partial_k^y \pi^k(y) \delta_0^\mu \delta^3(x-y) \\
&\quad + e \delta_0^\mu \delta^3(x-y) p_\theta(y) - m^2 \delta_k^\mu \delta^3(x-y) \left(A_k(y) + \frac{1}{e} \partial_k^y \theta(y) \right) \\
&= \frac{1}{2} [\partial_k^y \delta_i^\mu \delta_l^i F^{kl}(y) - \partial_i^y \delta_k^\mu \delta_l^k F^{li}(y)] \delta^3(x-y) + \delta_0^\mu \partial_k^y \pi^k(y) \delta^3(x-y) \\
&\quad + \delta_0^\mu e p_\theta(y) \delta^3(x-y) - m^2 \delta_k^\mu \delta^3(x-y) \left(A_k(y) + \frac{1}{e} \partial_k^y \theta(y) \right) \\
&= \frac{1}{2} \delta_l^\mu [\partial_k^y F^{kl}(y) + \partial_i^y F^{il}(y)] \delta^3(x-y) + \delta_0^\mu \partial_k^y \pi^k(y) \delta^3(x-y) \\
&\quad + \delta_0^\mu e p_\theta(y) \delta^3(x-y) - m^2 \delta_k^\mu \delta^3(x-y) \left(A_k(y) + \frac{1}{e} \partial_k^y \theta(y) \right) \\
&= \delta_k^\mu \partial_l^y F^{lk}(y) \delta^3(x-y) + \delta_0^\mu \partial_k^y \pi^k(y) \delta^3(x-y) \\
&\quad + \delta_0^\mu e p_\theta(y) \delta^3(x-y) - m^2 \delta_k^\mu \left[A_k(y) + \frac{1}{e} \partial_k^y \theta(y) \right] \delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\{\pi^\mu(x), \phi^1(y)\} = \{\pi^\mu(x), \pi^0(y)\} = 0.$$

Luego,

$$\{\pi^\mu(x), \phi^2(y)\} = \{\pi^\mu(x), \partial_j^y \pi^j(y) + e p_\theta(y)\} = 0.$$

Sustituyendo estos resultados en (6.30), se obtiene

$$\begin{aligned}
d\pi^\mu(x) &= \int d^3y \{ \delta_0^\mu \partial_k^y \pi^k(y) \delta^3(x-y) + \delta_0^\mu e p_\theta(y) \delta^3(x-y) \} dt \\
&\quad + \int d^3y \left\{ \delta_k^\mu \partial_l^y F^{lk}(y) \delta^3(x-y) - m^2 \delta_k^\mu \left[A_k(y) + \frac{1}{e} \partial_k^y \theta(y) \right] \delta^3(x-y) \right\} dt \\
&= \delta_0^\mu [\partial_k^x \pi^k(x) + e p_\theta(x)] dt + \delta_k^\mu \left\{ \partial_l^x F^{lk}(x) - m^2 \left[A_k(x) + \frac{1}{e} \partial_k^x \theta(x) \right] \right\} dt.
\end{aligned}$$

Corchetes de Poisson en (6.31)

$$\begin{aligned}
\{\theta(x), \phi^0(y)\} &= \left\{ \theta(x), p^t + \frac{1}{2} \pi^k(y) \pi^k(y) - [\partial_k^y \pi^k(y)] A_0(y) + \frac{1}{4} F_{ki}(y) F^{ki}(y) \right\} \\
&\quad + \left\{ \theta(x), \frac{1}{2} \frac{e^2}{m^2} p_\theta^2(y) - e A_0(y) p_\theta(y) + \frac{m^2}{2} \left[A_k(y) + \frac{1}{e} \partial_k^y \theta(y) \right]^2 \right\} \\
&= \frac{e^2}{m^2} \{\theta(x), p_\theta(y)\} p_\theta(y) - e A_0(y) \{\theta(x), p_\theta(y)\} \\
&= \frac{e^2}{m^2} p_\theta(y) \delta^3(x-y) - e A_0(y) \delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

$$\{\theta(x), \phi^1(y)\} = \{\theta(x), \pi^0(y)\} = 0.$$

$$\begin{aligned}
\{\theta(x), \phi^2(y)\} &= \{\theta(x), \partial_j^y \pi^j(y) + e p_\theta(y)\} \\
&= e \delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados en (6.31), se obtiene

$$\begin{aligned}
d\theta(x) &= \int d^3y \left\{ \left[\frac{e^2}{m^2} p_\theta(y) \delta^3(x-y) - e A_0(y) \delta^3(x-y) \right] dt + e \delta^3(x-y) d\omega_2(y) \right\} \\
&= \left[\frac{e^2}{m^2} p_\theta(x) - e A_0(x) \right] dt + e d\omega_2(x).
\end{aligned}$$

Corchetes de Poisson en (6.32)

$$\begin{aligned}
\{p_\theta(x), \phi^0(y)\} &= \left\{ p_\theta(x), p^t(y) + \frac{1}{2} \pi^k(y) \pi^k(y) \right\} \\
&\quad + \left\{ p_\theta(x), -[\partial_k^y \pi^k(y)] A_0(y) + \frac{1}{4} F_{ki}(y) F^{ki}(y) \right\} \\
&\quad + \left\{ p_\theta(x), \frac{1}{2} \frac{e^2}{m^2} p_\theta^2(y) - e A_0(y) p_\theta(y) \right\} \\
&\quad + \left\{ p_\theta(x), \frac{m^2}{2} \left[A_k(y) + \frac{1}{e} \partial_k^y \theta(y) \right]^2 \right\} \\
&= -\frac{m^2}{e} \partial_k^y \{p_\theta(x), \theta(y)\} \left(A_k(y) + \frac{1}{e} \partial_k^y \theta(y) \right) \\
&= \frac{m^2}{e} \partial_k^y \left[A_k(y) + \frac{1}{e} \partial_k^y \theta(y) \right] \delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

$$\{p_\theta(x), \phi^1(y)\} = \{p_\theta(x), \pi^0(y)\} = 0.$$

$$\{p_\theta(x), \phi^2(y)\} = \{p_\theta(x), \partial_j^y \pi^j(y) + e p_\theta(y)\} = 0.$$

Sustituyendo estos resultados en (6.32), se obtiene

$$\begin{aligned}
dp_\theta(x) &= \int d^3y \left\{ \frac{m^2}{e} \partial_k^y \left[A_k(y) + \frac{1}{e} \partial_k^y \theta(y) \right] \delta^3(x-y) \right\} dt \\
&= \frac{m^2}{e} \partial_k^x \left[A_k(x) + \frac{1}{e} \partial_k^x \theta(x) \right] dt.
\end{aligned}$$

C.5. Ecuaciones de Euler-Lagrange a nivel Hamiltoniano**Demostración de la primera ecuación de (6.34)**

$$\dot{\pi}^\mu = \delta_0^\mu (\partial_k \pi^k + e p_\theta) + \delta_k^\mu \left[\partial_l F^{lk} - m^2 \left(A_k + \frac{1}{e} \partial_k \theta \right) \right],$$

Por una parte

$$\dot{\pi}^\mu = \partial_0 F^{\mu 0}$$

Primero, considerando el caso en el que $\mu = 0$

$$\begin{aligned}\partial_0 F^{00} &= \delta_0^0 (\partial_k F^{k0} + e p_\theta) + \delta_k^0 \left[\partial_l F^{lk} - m^2 \left(A_k + \frac{1}{e} \partial_k \theta \right) \right] \\ &= \partial_k F^{k0} + \underbrace{e p_\theta + \partial_l F^{l0}}_{\phi^2=0} - m^2 \left(A_0 + \frac{1}{e} \partial_0 \theta \right) \\ 0 &= \partial_\mu F^{\mu 0} - m^2 \left(A_0 + \frac{1}{e} \partial_0 \theta \right)\end{aligned}$$

Luego, considerando el caso en que $\mu = i$

$$\begin{aligned}\partial_0 F^{i0} &= \delta_0^i (\partial_k F^{k0} + e p_\theta) + \delta_k^i \left[\partial_l F^{lk} - m^2 \left(A_k + \frac{1}{e} \partial_k \theta \right) \right] \\ &= \partial_l F^{li} - m^2 \left(A_i + \frac{1}{e} \partial_i \theta \right) \\ 0 &= \partial_\mu F^{\mu i} - m^2 \left(A_i + \frac{1}{e} \partial_i \theta \right)\end{aligned}$$

Sumando estos dos resultados se obtiene

$$0 = \partial_\mu F^{\mu \nu} - m^2 \left(A_\nu + \frac{1}{e} \partial_\nu \theta \right).$$

Demostración de la segunda ecuación de (6.34)

Para deducir la segunda ecuación partimos de

$$\dot{\theta} = \frac{e^2}{m^2} p_\theta - e A_0 + e \dot{\omega}_2.$$

Derivando respecto a t se tiene que

$$\partial_0 \partial_0 \theta = \frac{e^2}{m^2} \partial_0 p_\theta - e \partial_0 A_0 + e \partial_0 \dot{\omega}_2.$$

Pero, recordando que

$$\partial_0 p_\theta = \frac{m^2}{e} \partial_k \left(A_k + \frac{1}{e} \partial_k \theta \right),$$

se reescribe de la forma

$$\begin{aligned} \partial_0 \partial_0 \theta &= \frac{e^2}{m^2} \left[\frac{m^2}{e} \partial_k \left(A_k + \frac{1}{e} \partial_k \theta \right) \right] - e \partial_0 A_0 + e \partial_0 \dot{\omega}_2 \\ \partial_0 \partial_0 \theta &= e \partial_k A_k + \partial_k \partial_k \theta - e \partial_0 A_0 + e \partial_0 \dot{\omega}_2 \\ \partial_0 \partial^0 \theta + \partial_k \partial^k \theta &= -e (\partial_0 A^0 + \partial_k A^k) + e \partial_0 \dot{\omega}_2 \\ \partial_\mu \partial^\mu \theta &= -e \partial_\mu A^\mu + e \partial_0 \dot{\omega}_2. \end{aligned}$$

Con lo cual se obtiene

$$\partial_\mu \left(A^\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \partial^\mu \theta \right) = \partial_0 \dot{\omega}_2.$$

C.6. Construcción de los corchetes generalizados

Corchetes de Poisson entre los vínculos y las condiciones gauge

Los corchetes no nulos son dos:

$$\{\phi^1(x), \phi^3(y)\} = \{\pi^0(x), A_0(y)\} = -\delta^3(x-y)$$

$$\begin{aligned} \{\phi^2(x), \phi^4(y)\} &= \left\{ \partial_k^x \pi^k(x) + e p_\theta(x), \partial_i^y A_i(y) + \frac{m^2}{e} \theta(y) \right\} \\ &= \partial_k^x \partial_i^y \{\pi^k(x), A_i(y)\} + m^2 \{p_\theta(x), \theta(y)\} \\ &= -\partial_k^x \partial_i^y \delta_i^k \delta^3(x-y) - m^2 \delta^3(x-y) \\ &= -\partial_k^x \partial_k^y \delta^3(x-y) - m^2 \delta^3(x-y) \\ &= (\partial_k^x \partial_k^x - m^2) \delta^3(x-y) \\ &= (\nabla_x^2 - m^2) \delta^3(x-y) \end{aligned}$$

Deducción de (6.43)

Se parte de una propiedad inherente a este tipo de matrices:

$$\int d^3z M^{nl}(x, y) (M^{-1})^{lk}(x, y) = \delta^{nk} \delta^3(x - y).$$

Proponiendo que la matriz inversa tenga una estructura de la forma

$$(M^{-1})(x, y) = \begin{pmatrix} \Omega^1(x, y) & \Omega^2(x, y) & \Omega^3(x, y) & \Omega^4(x, y) \\ \Omega^5(x, y) & \Omega^6(x, y) & \Omega^7(x, y) & \Omega^8(x, y) \\ \Omega^9(x, y) & \Omega^{10}(x, y) & \Omega^{11}(x, y) & \Omega^{12}(x, y) \\ \Omega^{13}(x, y) & \Omega^{14}(x, y) & \Omega^{15}(x, y) & \Omega^{16}(x, y) \end{pmatrix},$$

donde las Ω son funciones desconocidas. Para calcularlas se usa la propiedad anterior, resultando,

$$\int d^3z M^{nl}(x, y) (M^{-1})^{lk}(x, y) = \begin{pmatrix} -\Omega^9(x, y) & -\Omega^{10}(x, y) & -\Omega^{11}(x, y) & -\Omega^{12}(x, y) \\ D_x \Omega^{13}(x, y) & D_x \Omega^{14}(x, y) & D_x \Omega^{15}(x, y) & D_x \Omega^{16}(x, y) \\ \Omega^1(x, y) & \Omega^2(x, y) & \Omega^3(x, y) & \Omega^4(x, y) \\ -D_x \Omega^5(x, y) & -D_x \Omega^6(x, y) & -D_x \Omega^7(x, y) & -D_x \Omega^8(x, y) \end{pmatrix}.$$

Comparando con $\delta^{nk} \delta^3(x - y)$, se logra reconocer que las únicas componentes diferentes de cero son:

$$\begin{aligned} -\Omega^9(x, y) &= \delta^3(x - y), \\ D_x \Omega^{14}(x, y) &= \delta^3(x - y), \\ \Omega^3(x, y) &= \delta^3(x - y), \\ -D_x \Omega^8(x, y) &= \delta^3(x - y). \end{aligned}$$

Así, la matriz inverza es;

$$M^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{D_x} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{D_x} & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y).$$

C.7. Cálculo de los corchetes generalizados

Para calcular los corchetes generalizados diferentes de cero, son necesarios los siguientes corchetes de Poisson:

$$\begin{aligned}
 \{A_\mu(x), \phi^0(y)\} &= \delta_\mu^k [\pi^k(y) - \partial_k^y A_0(y)] \delta^3(x-y) \\
 \{A_\mu(x), \phi^1(y)\} &= 0 \\
 \{A_\mu(x), \phi^2(y)\} &= \partial_k^y \delta_\mu^k \delta^3(x-y) \\
 \{A_\mu(x), \phi^3(y)\} &= \{A_\mu(x), A_0(y)\} = 0 \\
 \{A_\mu(x), \phi^4(y)\} &= \left\{ A_\mu(x), \partial_k^y A_k(y) + \frac{m^2}{e} \theta(y) \right\} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{\pi^\mu(x), \phi^1(y)\} &= 0 \\
 \{\pi^\mu(x), \phi^2(y)\} &= \{\pi^\mu(x), \partial_j^y \pi^j(y) + ep_\theta(y)\} = 0 \\
 \{\pi^\mu(x), \phi^3(y)\} &= \{\pi^\mu(x), A_0(y)\} = 0 \\
 \{\pi^\mu(x), \phi^4(y)\} &= \left\{ \pi^\mu(x), \partial_k^y A_k(y) + \frac{m^2}{e} \theta(y) \right\} = -\delta_k^\mu \partial_k^y \delta^3(x-y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{\theta(x), \phi^1(y)\} &= 0 \\
 \{\theta(x), \phi^2(y)\} &= \{\theta(x), \partial_j^y \pi^j(y) + ep_\theta(y)\} = e\delta^3(x-y) \\
 \{\theta(x), \phi^3(y)\} &= \{\theta(x), A_0(y)\} = 0 \\
 \{\theta(x), \phi^4(y)\} &= \left\{ \theta(x), \partial_k^y A_k(y) + \frac{m^2}{e} \theta(y) \right\} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{p_\theta(x), \phi^1(y)\} &= 0 \\
 \{p_\theta(x), \phi^2(y)\} &= \{p_\theta(x), \partial_j^y \pi^j(y) + ep_\theta(y)\} = 0 \\
 \{p_\theta(x), \phi^3(y)\} &= \{p_\theta(x), A_0(y)\} = 0 \\
 \{p_\theta(x), \phi^4(y)\} &= \left\{ p_\theta(x), \partial_k^y A_k(y) + \frac{m^2}{e} \theta(y) \right\} = -\frac{m^2}{e} \delta^3(x-y)
 \end{aligned}$$

Demostración de (6.44)

$$\begin{aligned}
\{A_i(x), \pi^k(y)\}^* &= \{A_i(x), \pi^k(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi^1(u)\} (M^{-1})^{13}(u, v) \{\phi^3(v), \pi^k(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi^2(u)\} (M^{-1})^{24}(u, v) \{\phi^4(v), \pi^k(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi^3(u)\} (M^{-1})^{31}(u, v) \{\phi^1(v), \pi^k(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi^4(u)\} (M^{-1})^{42}(u, v) \{\phi^2(v), \pi^k(y)\} \\
&= \delta_i^k \delta^3(x - y) \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v [\delta_i^j \partial_j^y \delta^3(x - u)] \left[-\frac{1}{D_u} \delta^3(u - v) \right] [\delta_j^k \partial_j^v \delta^3(v - y)] \\
&= \left(\delta_i^k + \frac{\partial_i^x \partial_k^x}{D_x} \right) \delta^3(x - y)
\end{aligned}$$

Demostración de (6.45)

$$\begin{aligned}
\{A_i(x), p_\theta(y)\}^* &= \{A_i(x), p_\theta(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi^1(u)\} (M^{-1})^{13}(u, v) \{\phi^3(v), p_\theta(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi^2(u)\} (M^{-1})^{24}(u, v) \{\phi^4(v), p_\theta(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi^3(u)\} (M^{-1})^{31}(u, v) \{\phi^1(v), p_\theta(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi^4(u)\} (M^{-1})^{42}(u, v) \{\phi^2(v), p_\theta(y)\} \\
&= - \int \int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi^2(u)\} (M^{-1})^{24}(u, v) \{\phi^4(v), p_\theta(y)\}
\end{aligned}$$

Considerando los resultados anteriores se tiene que,

$$\begin{aligned}
\{A_i(x), p_\theta(y)\}^* &= - \int \int d^3u d^3v \partial_j^u \{A_i(x), \pi^j(u)\} \left[-\frac{1}{D_u} \delta^3(u-v) \right] \frac{m^2}{e} \{\theta(v), p_\theta(y)\} \\
&= - \int \int d^3u d^3v \partial_j^u \delta_i^j \delta^3(x-u) \left[-\frac{1}{D_u} \delta^3(u-v) \right] \frac{m^2}{e} \delta^3(v-y) \\
&= - \int \int d^3u d^3v \partial_i^u \delta^3(x-u) \left[-\frac{1}{D_u} \delta^3(u-v) \right] \frac{m^2}{e} \delta^3(v-y) \\
&= \frac{m^2}{e} \frac{\partial_i^y}{D_y} \delta^3(x-y) \\
&= -\frac{m^2}{e} \frac{\partial_i^x}{D_x} \delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

Demostración de (6.46)

$$\begin{aligned}
\{\pi^i(x), \theta(y)\}^* &= \{\pi^i(x), \theta(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{\pi^i(x), \phi^1(u)\} (M^{-1})^{13}(u,v) \{\phi^3(v), \theta(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{\pi^i(x), \phi^2(u)\} (M^{-1})^{24}(u,v) \{\phi^4(v), \theta(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{\pi^i(x), \phi^3(u)\} (M^{-1})^{31}(u,v) \{\phi^1(v), \theta(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{\pi^i(x), \phi^4(u)\} (M^{-1})^{42}(u,v) \{\phi^2(v), \theta(y)\} \\
&= - \int \int d^3u d^3v [\delta_k^i \partial_i^y \delta^3(x-u)] \left[\frac{1}{D_u} \delta^3(u-v) \right] [-e \delta^3(v-y)] \\
&= e \frac{\partial_i^x}{D_v} \delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

Demostración de (6.47)

$$\begin{aligned}
\{\theta(x), p_\theta(y)\}^* &= \{\theta(x), p_\theta(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{\theta(x), \phi^1(u)\} (M^{-1})^{13}(u, v) \{\phi^3(v), p_\theta(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{\theta(x), \phi^2(u)\} (M^{-1})^{24}(u, v) \{\phi^4(v), p_\theta(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{\theta(x), \phi^3(u)\} (M^{-1})^{31}(u, v) \{\phi^1(v), p_\theta(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{\theta(x), \phi^4(u)\} (M^{-1})^{42}(u, v) \{\phi^2(v), p_\theta(y)\} \\
&= \{\theta(x), p_\theta(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{\theta(x), \phi^2(u)\} (M^{-1})^{24}(u, v) \{\phi^4(v), p_\theta(y)\} \\
&= \delta^3(x - y) \\
&\quad - \int \int d^3u dv [e\delta^3(x - u)] \left[-\frac{1}{D_u} \delta^3(u - v) \right] \frac{m^2}{e} \delta^3(v - y) \\
&= \left(1 + \frac{m^2}{D_x} \right) \delta^3(x - y).
\end{aligned}$$

C.8. Deducción de las ecuaciones de movimiento**Demostración de (6.49)**

$$dA_i(x) = \int d^3y \{A_i(x), \phi^0(y)\}^* dt.$$

Donde

$$\begin{aligned}
\{A_i(x), \phi^0(y)\}^* &= \{A_i(x), \phi^0(y)\} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi^2(u)\} (M^{-1})^{24}(u, v) \{\phi^4(v), \phi^0(y)\}.
\end{aligned}$$

Aquí se tiene que,

$$\begin{aligned}
\{A_i(x), \phi^0(y)\} &= \left\{ A_i(x), p^t(y) + \frac{1}{2} \pi^k(y) \pi^k(y) + \frac{1}{2m^2} [\partial_k^y \pi^k(y)]^2 \right\} \\
&\quad + \left\{ A_i(x), \frac{1}{4} F_{ki}(y) F^{ki}(y) + \frac{m^2}{2} \left[A_k(y) - \frac{1}{m^2} \partial_j^y \partial_k^y A_k(y) \right]^2 \right\} \\
&= \{A_i(x), \pi^k(y)\} \pi^k(y) + \frac{1}{m^2} \{A_i(x), \partial_k^y \pi^k(y)\} \partial_j^y \pi^j(y) \\
&= \delta_i^k \delta^3(x-y) \pi^k(y) + \frac{1}{m^2} \partial_k^y \delta_i^k \delta^3(x-y) \partial_j^y \pi^j(y) \\
&= \pi^i(y) \delta^3(x-y) + \frac{1}{m^2} \partial_i^y \partial_j^y \pi^j(y) \delta^3(x-y) \\
&= \left[\delta_j^i - \frac{1}{m^2} \partial_i^x \partial_j^y \right] \pi^j(y) \delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{A_i(x), \phi^2(u)\} &= \{A_i(x), \partial_k^u \pi^k(u) + e p_\theta(u)\} \\
&= \partial_k^x \delta_i^k \delta^3(x-u) \\
&= \partial_i^x \delta^3(x-u)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\phi^4(v), \phi^0(y)\} &= \left\{ \partial_k^v A_k(v) + \frac{m^2}{e} \theta(v), \phi^0(y) \right\} \\
&= \partial_k^v \{A_k(v), \phi^0(y)\} \\
&= \partial_k^v \left[\pi^k(y) - \frac{1}{m^2} \partial_k^v \partial_j^y \pi^j(y) \right] \delta^3(v-y) \\
&= \partial_k^v \left[\delta_j^k - \frac{1}{m^2} \partial_k^v \partial_j^y \right] \pi^j(y) \delta^3(v-y)
\end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
\{A_i(x), \phi^0(y)\}^* &= \left(\delta_j^i - \frac{1}{m^2} \partial_i^x \partial_j^y \right) \pi^j(y) \delta^3(x-y) \\
&\quad + \int \int d^3u d^3v [\partial_i^x \delta^3(x-u)] \left[\frac{\delta^3(u-v)}{D_u} \right] \partial_k^v \left(\delta_j^k - \frac{\partial_k^v \partial_j^y}{m^2} \right) \pi^j(y) \delta^3(v-y) \\
&= \left(\delta_j^i - \frac{1}{m^2} \partial_i^x \partial_j^y \right) \pi^j(y) \delta^3(x-y) \\
&\quad + \frac{\partial_i^x \partial_k^y}{D_y} \left(\delta_j^k - \frac{1}{m^2} \partial_k^v \partial_j^y \right) \pi^j(y) \delta^3(x-y) \\
&= \left[\left(\delta_j^i - \frac{\partial_i^x \partial_j^y}{m^2} \right) \pi^j(y) + \frac{\partial_i^x \partial_k^y}{D_y} \left(\delta_j^k - \frac{1}{m^2} \partial_k^v \partial_j^y \right) \pi^j(y) \right] \delta^3(x-y) \\
&= \left(\delta_i^k - \frac{\partial_i^x \partial_k^y}{D_y} \right) \left(\delta_j^i - \frac{\partial_i^v \partial_j^y}{m^2} \right) \pi^j(y)
\end{aligned}$$

Reemplazando esto en dA_i se obtiene,

$$\begin{aligned}
dA_i(x) &= \int d^3y \left(\delta_i^k - \frac{\partial_i^x \partial_k^y}{D_y} \right) \left(\delta_j^i - \frac{\partial_i^v \partial_j^y}{m^2} \right) \pi^j(y) \delta(x-y) dt \\
&= \left[\left(\delta_i^k - \frac{\partial_i^x \partial_k^x}{D_x} \right) \left(\delta_j^i - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{m^2} \right) \pi^j(x) \right] dt.
\end{aligned}$$

Demostración de (6.50)

$$d\pi^i(x) = \int d^3y \{ \pi^i(x), \phi^0(y) \}^* dt.$$

Aquí se tiene que,

$$\begin{aligned}
\{ \pi^i(x), \phi^0(y) \}^* &= \{ \pi^i(x), \phi^0(y) \} \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v \{ \pi^i(x), \phi^4(u) \} (M^{-1})^{42}(u,v) \{ \phi^2(v), \phi^0(y) \}.
\end{aligned}$$

Aquí los corchetes de Poisson se calculan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\{\pi^i(x), \phi^0(y)\} &= \left\{ \pi^i(x), p^t(y) + \frac{1}{2} \pi^k(y) \pi^k(y) + \frac{1}{2m^2} [\partial_k^y \pi^k(y)]^2 \right\} \\
&\quad + \left\{ \pi^i(x), \frac{1}{4} F_{kj}(y) F^{kj}(y) + \frac{m^2}{2} \left[A_k(y) - \frac{1}{m^2} \partial_k^y \partial_j^y A_j(y) \right]^2 \right\} \\
&= \left\{ \pi^i(x), \frac{1}{4} F_{kj}(y) F^{kj}(y) \right\} + \left\{ \pi^i(x), \frac{m^2}{2} \left[A_k(y) - \frac{1}{m^2} \partial_k^y \partial_j^y A_j(y) \right]^2 \right\}.
\end{aligned}$$

De calculos anteriores se sabe que

$$\left\{ \pi^i(x), \frac{1}{4} F_{kj}(y) F^{kj}(y) \right\} = \partial_k^x F^{ki}(y) \delta^3(x-y),$$

por otra parte, el otro corchete de Poisson,

$$C_\pi = \left\{ \pi^i(x), \frac{m^2}{2} \left[A_k(y) - \frac{1}{m^2} \partial_k^y \partial_j^y A_j(y) \right]^2 \right\},$$

se calcula así:

$$\begin{aligned}
C_\pi &= \left\{ \pi^i(x), \frac{m^2}{2} \left[A_k(y) - \frac{1}{m^2} \partial_k^y \partial_j^y A_j(y) \right]^2 \right\} \\
&= \frac{m^2}{2} \left\{ \pi^i(x), \left[A_k(y) - \frac{1}{m^2} \partial_k^y \partial_j^y A_j(y) \right] \left[A_k(y) - \frac{1}{m^2} \partial_k^y \partial_l^y A_l(y) \right] \right\} \\
&= m^2 \left\{ \pi^i(x), \left[A_k(y) - \frac{1}{m^2} \partial_k^y \partial_j^y A_j(y) \right] \right\} \left[A_k(y) - \frac{1}{m^2} \partial_k^y \partial_l^y A_l(y) \right] \\
&= m^2 \left[-\delta_k^i \delta^3(x-y) + \frac{1}{m^2} \partial_k^y \partial_j^y \delta_j^i \delta^3(x-y) \right] \left[A_k(y) - \frac{1}{m^2} \partial_k^y \partial_l^y A_l(y) \right] \\
&= m^2 \left[-A_i(y) + \frac{1}{m^2} \partial_i^y \partial_l^y A_l(y) \right] \delta^3(x-y) \\
&\quad + \left[\partial_k^y \partial_i^y A_k(y) - \frac{1}{m^2} \partial_k^y \partial_k^y \partial_i^y \partial_l^y A_l(y) \right] \delta^3(x-y) \\
&= -m^2 \left[A_i(y) - \frac{1}{m^2} \partial_i^y \partial_l^y A_l(y) \right] \delta^3(x-y) \\
&\quad + \partial_i^y \partial_k^y \left[A_k(y) - \frac{1}{m^2} \partial_k^y \partial_l^y A_l(y) \right] \delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \{\pi^i(x), \phi^0(y)\} &= \partial_k^x F^{ki}(y) \delta^3(x-y) - m^2 \left[A_i(y) - \frac{1}{m^2} \partial_i^y \partial_l^y A_l(y) \right] \delta^3(x-y) \\ &\quad + \partial_i^y \partial_k^y \left[A_k(y) - \frac{1}{m^2} \partial_k^y \partial_l^y A_l(y) \right] \delta^3(x-y). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \{\phi^2(v), \phi^0(y)\} &= \{\partial_k^v \pi^k(v) + ep_\theta(v), \phi^0(y)\} \\ &= \partial_k^v \{\pi^k(v), \phi^0(y)\} \\ &= \partial_k^v \left[\partial_j^v F^{jk}(y) - m^2 \left[A_k(y) - \frac{1}{m^2} \partial_k^y \partial_l^y A_l(y) \right] \right] \delta^3(v-y) \\ &\quad + \partial_k^v \partial_k^y \partial_j^y \left[A_j(y) - \frac{1}{m^2} \partial_j^y \partial_l^y A_l(y) \right] \delta^3(v-y) \\ &= -m^2 \partial_k^v \left[A_k(y) - \frac{1}{m^2} \partial_k^y \partial_l^y A_l(y) \right] \delta^3(v-y) \\ &\quad + \partial_k^v \partial_k^y \partial_j^y \left[A_j(y) - \frac{1}{m^2} \partial_j^y \partial_l^y A_l(y) \right] \delta^3(v-y). \end{aligned}$$

y también,

$$\begin{aligned} \{\pi^i(x), \phi^4(u)\} &= \left\{ \pi^i(x), \partial_k^u A_k(u) + \frac{m^2}{e} \theta(u) \right\} \\ &= -\partial_i^u \delta^3(x-u). \end{aligned}$$

Utilizando estos resultados en el corchete generalizado, se tiene,

$$\begin{aligned}
\{\pi^i(x), \phi^0(y)\}^* &= \partial_k^x F^{ki}(y) \delta^3(x-y) - m^2 \left[A_i(y) - \frac{1}{m^2} \partial_i^y \partial_l^y A_l(y) \right] \delta^3(x-y) \\
&\quad + \partial_i^y \partial_k^y \left[A_k(y) - \frac{1}{m^2} \partial_k^y \partial_l^y A_l(y) \right] \delta^3(x-y) \\
&\quad - \int \int d^3u d^3v [-\partial_i^u \delta^3(x-u)] \frac{1}{D_u} \delta^3(u-v) \\
&\quad \left\{ -m^2 \partial_k^v \left[A_k(y) - \frac{1}{m^2} \partial_k^y \partial_l^y A_l(y) \right] + \partial_k^v \partial_k^y \partial_j^y \left[A_j(y) - \frac{1}{m^2} \partial_j^y \partial_l^y A_l(y) \right] \right\} \delta^3(v-y) \\
&= \partial_k^x F^{ki}(y) \delta^3(x-y) - m^2 \left[A_i(y) - \frac{1}{m^2} \partial_i^y \partial_l^y A_l(y) \right] \delta^3(x-y) \\
&\quad + \partial_i^y \partial_k^y \left[A_k(y) - \frac{1}{m^2} \partial_k^y \partial_l^y A_l(y) \right] \delta^3(x-y) \\
&\quad - m^2 \frac{1}{D_y} \partial_i^y \partial_k^y \left[A_k(y) - \frac{1}{m^2} \partial_k^y \partial_l^y A_l(y) \right] \delta^3(x-y) \\
&\quad + \frac{1}{D_y} \partial_i^y \partial_k^y \partial_j^y \left[A_j(y) - \frac{1}{m^2} \partial_j^y \partial_l^y A_l(y) \right] \delta^3(x-y) \\
&= \partial_k^x F^{ki}(y) \delta^3(x-y) - m^2 \left(\delta_k^i - \frac{\partial_i^y \partial_k^y}{D_y} \right) \left[A_j(y) - \frac{1}{m^2} \partial_j^y \partial_l^y A_l(y) \right] \delta^3(x-y) \\
&\quad + \left(\delta_j^k - \frac{\partial_j^y \partial_k^y}{D_y} \right) \partial_i^y \partial_k^y \left[A_j(y) - \frac{1}{m^2} \partial_j^y \partial_l^y A_l(y) \right] \delta^3(x-y) \\
&= \left\{ \partial_k^x F^{ki}(y) - m^2 \left(\delta_k^i - \frac{\partial_i^y \partial_k^y}{D_y} \right) \left(\delta_j^i - \frac{\partial_i^y \partial_j^y}{m^2} \right) \left[A_j(y) - \frac{\partial_j^y \partial_l^y A_l(y)}{m^2} \right] \right\} \delta^3(x-y)
\end{aligned}$$

Reemplazando esto en $d\pi^i$ se obtiene,

$$\begin{aligned}
d\pi^i(x) &= \int d^3y \partial_k^x F^{ki}(y) \delta^3(x-y) dt \\
&\quad - m^2 \int d^3y \left(\delta_k^i - \frac{\partial_i^y \partial_k^y}{D_y} \right) \left(\delta_j^i - \frac{\partial_i^y \partial_j^y}{m^2} \right) \left[A_j(y) - \frac{\partial_j^y \partial_l^y A_l(y)}{m^2} \right] \delta^3(x-y) dt, \\
&= \partial_k^x F^{ki}(x) dt - m^2 \left(\delta_k^i - \frac{\partial_i^x \partial_k^x}{D_x} \right) \left(\delta_j^i - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{m^2} \right) \left[A_j(x) - \frac{\partial_j^x \partial_l^x A_l(x)}{m^2} \right] dt.
\end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] Ashok Das. *Lectures on quantum field theory*. World Scientific, 2020.
- [2] German Enrique Ramos Zambrano and BM Pimentel. Teoría de fotones masivos en las coordenadas del plano nulo. 2014.
- [3] Alexis Javier Aguirre Narváez. Tratamiento canónico de la ecuación de proca para campo real y complejo. *Universidad de Nariño*, 2017.
- [4] AL Proca. Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs. *Journal de Physique et le Radium*, 7(8):347–353, 1936.
- [5] Paul Adrien Maurice Dirac. *Lectures on quantum mechanics*, volume 2. Courier Corporation, 2001.
- [6] Luis Bravo. Formulación de hamilton-jacobi en teoría clásica de campos. *Universidad de Nariño*, 2013.
- [7] MC Bertin, BM Pimentel, and CE Valcárcel. Non-involutive constrained systems and hamilton–jacobi formalism. *Annals of Physics*, 323(12):3137–3149, 2008.
- [8] Merylin Ortega Ortega. Método de dirac aplicado a sistemas singulares. *Universidad de Nariño*, 2011.
- [9] Heinz J Rothe and Klaus Dieter Rothe. *Classical and quantum dynamics of constrained Hamiltonian systems*, volume 81. World Scientific, 2010.
- [10] Walter Greiner and Joachim Reinhardt. *Field quantization*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [11] Lewis H Ryder. *Quantum field theory*. Cambridge university press, 1996.
- [12] MC Bertin, BM Pimentel, and PJ Pompeia. Formalismo de hamilton-jacobi à la carathéodory. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29:393–403, 2007.
- [13] Danny Botina. Formulación de hamilton-jacobi para sistemas singulares. *Universidad de Nariño*, 2013.
- [14] Jakob Schwichtenberg. *No-Nonsense Quantum Field Theory: A Student-Friendly Introduction*. No-nonsense books, 2020.