Formulación de Hamilton-Jacobi para la ecuación de Proca

Autor: Juan Felipe Portillo Zambrano

Director: Germán Enrique Ramos Zambrano

San Juan de Pasto, 3 de Septiembre de 2024

Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1904

Posibilidad de una QED masiva

- Las interacciones fundamentales entre partículas se describen mediante campos.
- La QED establece una restricción sobre la masa en reposo del fotón, la cual es propuesta para ser cero.
- Al considerar una interacción de corto alcance se podría sugerir la implementación de una QED masiva.

¿Cómo incorporar la masa?

- La propuesta más simple para implementar la masa se da en la electrodinámica masiva de Proca. A partir de esto, es posible describir la propagación y las interacciones de partículas bosonicas de espín 1 (como la $W^{\pm}$ y la Z^0).

Tratamiento clásico

- Para determinar la dinámica que rige el campo de Proca se ha utilizado tradicionalmente el método de Dirac para sistemas con vínculos.
- Existe un método alternativo y complementario a este para tratar las particularidades que presenta el estudio del sistema en cuestión, la formulación de Hamilton-Jacobi.

¿Qué propone la formulación de Hamilton-Jacobi?

Este método contiene una poderosa interpretación geométrica basada en el método de Lagrangianos equivalentes de Caratheódory,

$$\bar{L} = L - \frac{dS}{dt} \tag{1.1}$$

Donde S es una función generadora de una transformación de coordenadas en el espacio de configuración, para la cual la dinámica es invariante. A partir de esto se deduce la ecuación de Hamilton-Jacobi,

$$\frac{\partial}{\partial t} S(t, q) + H\left(t, q, \frac{dS}{dq}\right) = 0. \tag{1.2}$$

Planteamiento del problema

- Se pretende aplicar la formulación de Hamilton-Jacobi al campo de Proca con el propósito de realizar una descripción alternativa al estudio canónico tradicional.

- ¿Como se describe la teoría del campo de Proca bajo la formulación de Hamilton-Jacobi?

Objetivos

General

Estudiar el campo de Proca mediante la formulación de Hamilton-Jacobi.

Específicos

- Aplicar la teoría de Hamilton-Jacobi a la ecuación de Proca para el campo real.
- Aplicar la teoría de Hamilton-Jacobi a la ecuación de Proca para el campo complejo.
- Encontrar la equivalencia de la formulación de Hamilton-Jacobi con el método canónico.

Densidad Lagrangiana de Proca

En teoría de campos, la presencia de infinitos grados de libertad evoca la aparición de la densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{m^2}{2} A_\mu(x) A^\mu(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x), \tag{2.1}$$

Donde:

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} A_\mu \left(t, \vec{x}\right) \to 0 \quad \text{y} \quad F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.2}$$

La singularidad de la densidad Lagrangiana implica ligaduras que modifican el número de grados de libertad del sistema en cuestión.

Formulación Hamiltoniana

Los momentos canónicos se definen como:

$$\pi^{\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\dot{A}_{\nu}\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_0 A_{\nu}\right)} = F^{\nu 0}. \tag{2.3}$$

De esta definición se derivan dos resultados importantes,

$$\dot{A}_k = \partial_k A_0 + \pi^k \quad \text{y} \quad \phi^1 \equiv \pi^0 = 0 \ . \tag{2.4}$$

Mediante una transformación de Legendre es posible definir la densidad Hamiltoniana canónica,

$$\mathcal{H}_c \equiv \pi^{\mu}(x)\,\dot{A}_{\mu}(x) - \mathcal{L}. \tag{2.5}$$

o mejor,

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2}\pi^k \pi^k - \left(\partial_k \pi^k\right) A_0 - \frac{m^2}{2} A_{\mu} A^{\mu} + \frac{1}{4} F_{ki} F^{ki}. \tag{2.6}$$

Formulación de Hamilton-Jacobi

Se parte de la ecuación de Hamilton-Jacobi,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_c = 0 \quad \rightarrow \quad P^t + H_c = \int d^3x \left(p^t + \mathcal{H}_c \right) = 0 \ . \tag{2.7}$$

En primera instancia la estructura de vínculos será definida por:

$$\phi^0 \equiv p^t + \mathcal{H}_c = 0 \quad \text{y} \quad \phi^1 \equiv \pi^0 = 0 \ . \tag{2.8}$$

A partir de esto, el método de Hamilton-Jacobi establece que la evolución de una variable dinámica se describe como:

$$dF(x) = \int d^3y \left[\left\{ F(x), \phi^0(y) \right\} dt + \left\{ F(x), \phi^1(y) \right\} d\omega_1(y) \right] . \tag{2.9}$$

Corchetes de Poisson

Los corchetes de Poisson forman una estructura sólida para determinar la evolución de un sistema.

$$\{F(x), G(y)\} \equiv \int d^3z \left[\frac{\delta F(x)}{\delta A_\mu(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \pi^\mu(z)} - \frac{\delta F(x)}{\delta \pi^\mu(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta A_\mu(z)} \right]_{x_0 = y_0} \tag{2.10}$$

A partir de esta definición se calculan los corchetes de Poisson fundamentales, que son:

$$\{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\} = \delta_\mu^\nu \delta^3(x-y) \tag{2.11}$$

$$\{A_\mu(x), A_\nu(y)\} = 0 = \{\pi^\mu(x), \pi^\nu(y)\} \tag{2.12}$$

Condiciones de integrabilidad

Todo sistema que sea integrable tendrá que cumplir la condición de integrabilidad de Frobenius. Este no es el caso del campo de Proca.

$$d\phi^1(x) = \left[\partial_k^x \pi^k(x) + m^2 A^0(x)\right] dt = 0 \tag{2.13}$$

Esto genera un nuevo vínculo de forma que el sistema de EDPHJ se convierte en:

$$\begin{aligned} \phi^0 &\equiv p^0 + \mathcal{H}_c = 0 \\ \phi^1 &\equiv \pi^0 = 0 \\ \phi^2 &\equiv \partial_k^x \pi^k + m^2 A^0 = 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Expansión del espacio de parámetros independientes

Las consecuencias de incluir un nuevo vínculo se reflejan en la evolución del diferencial fundamental:

$$dF(x) = \int d^3y \left[\{F(x), \phi^0(y)\} dt + \{F(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{F(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)\right]. \tag{2.15}$$

Al evaluar la integrabilidad de los vínculos se deben obtener ecuaciones diferenciales que relacionen las variables independientes,

$$\left[\partial_k^x \pi^k(x) + m^2 A^0(x)\right] dt = m^2 d\omega_2(x) \quad \text{y} \quad \pi^0(x)\, dt = -d\omega_1(x) \tag{2.16}$$

Se da la posibilidad de redefinir la dinámica del sistema en términos del parámetro temporal.

Ecuaciones características

Es posible describir las trayectorias dinámicas del sistema asociadas el conjunto de EDPHJ.

$$\dot{A}_i(x) = \pi^i(x) + \partial_i^x A_0(x) \qquad \dot{\pi}^i(x) = \partial_k^x F^{ki}(x) + m^2 A^i(x) \tag{2.17}$$

Uniendo estas dos ecuaciones se deduce la ecuación de campo de Proca.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0. \tag{2.18}$$

Corchetes generalizados

Ahora se redefinirá la dinámica del sistema para eliminar la arbitrariedad generada por la expansión del espacio de variables independientes. Los corchetes de generalizados se definen por:

$$\{F(x), G(y)\}^{*} \equiv \{F(x), G(y)\} - \int\int d^3u d^3v \{F(x), \phi^n(u)\} \left(M^{-1}\right)^{nl}(u,v) \left\{\phi^l(v), G(y)\right\}. \tag{2.19}$$

Donde,

$$M(x,y) \equiv \begin{pmatrix} \{\phi^1, \phi^1\} & \{\phi^1, \phi^2\} \\ \{\phi^2, \phi^1\} & \{\phi^2, \phi^2\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -m^2 \\ m^2 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \tag{2.20}$$

Conteo correcto de los grados de libertad

Inicialmente, el espacio de fase se describe mediante:

$$(A_\mu, \pi^\mu) = \left(A_0, \pi^0, A_i, \pi^i\right). \tag{2.21}$$

Los corchetes generalizados entre los grados de libertad son:

$$\{A_i(x), A_k(y)\}^* = 0 = \left\{\pi^i(x), \pi^k(y)\right\}^*, \tag{2.22}$$

$$\left\{A_i(x), \pi^k(y)\right\}^* = \delta_i^k \delta^3(x-y). \tag{2.23}$$

La densidad Hamiltoniana canónica, se verá modificada,

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2}\pi^k\pi^k + \frac{1}{2m^2}\partial_k\pi^k\partial_i\pi^i - \frac{m^2}{2}A_jA^j + \frac{1}{4}F_{ki}F^{ki}. \tag{2.24}$$

Ecuaciones de movimiento

Con esto en cuenta, la evolución de una variable dinámica $F(x) = F\left[A_i(x), \pi^i(x)\right]$ será de la forma:

$$dF(x) = \int d^3y \left\{F(x), \phi^0(y)\right\}^* dt. \tag{2.25}$$

De manera que las ecuaciones de movimiento se convierten en:

$$\dot{A}_i(x) = \pi^i(x) - \frac{1}{m^2}\partial_i^x \partial_j^x \pi^j(x) \quad \text{y} \quad \dot{\pi}^i(x) = \partial_k^x F^{ki}(x) + m^2 A^i(x) \tag{2.26}$$

Finalmente es posible establecer la ecuación de Proca para los grados de libertad,

$$\left(\Box + m^2\right) A^i(x) = 0. \tag{2.27}$$

Un proceso análogo

Densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F^*_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + m^2 A^{\mu *}(x)A_\mu(x). \tag{3.1}$$

Momentos canónicos generalizados

$$\pi^\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{A}_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} = F^{*\nu 0} \quad \text{y} \quad \pi^{*\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{A}^*_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^*_\nu)} = F^{\nu 0} \tag{3.2}$$

Densidad Hamiltoniana canónica

$$\mathcal{H}_c = \pi^k \pi^{*k} - \left(\partial_k \pi^k\right) A_0 - \left(\partial_k \pi^{*k}\right) A^*_0 - m^2 A^{*\mu} A_\mu + \frac{1}{2} F^*_{ki} F^{ki}. \tag{3.3}$$

Formulación de Hamilton-Jacobi

El aumento de grados de libertad hace más grande sistema de EDPHJ,

$$
\begin{aligned}
\phi^0 &\equiv p^t + \mathcal{H} = 0, \\
\phi^1 &\equiv \pi^0 = 0, \\
\phi^2 &\equiv \pi^{*0} = 0, \\
\phi^3 &\equiv \partial_k \pi^k + m^2 A^{*0} = 0, \\
\phi^4 &\equiv \partial_k \pi^{*k} + m^2 A^0 = 0.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

De forma que el diferencial fundamental se escribe de la forma:

$$
\begin{aligned}
dF(x) = & \int d^3y \left[\{F(x), \phi^0(y)\} dt + \{F(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{F(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y) \right] \\
& + \int d^3y \left[\{F(x), \phi^3(y)\} d\omega_3(y) + \{F(x), \phi^4(y)\} d\omega_4(y) \right].
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Corchetes generalizados

Los corchetes generalizados mantienen la misma definición,

$$\{F(x), G(y)\}^* \equiv \{F(x), G(y)\} - \int\int d^3u d^3v \{F(x), \phi^n(u)\} \left(M^{-1}\right)^{nl}(u,v) \left\{\phi^l(v), G(y)\right\}. \tag{3.6}$$

La matriz M en esta ocasión es de la forma:

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -m^2 \\ 0 & 0 & -m^2 & 0 \\ 0 & m^2 & 0 & 0 \\ m^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \tag{3.7}$$

Nuevamente los grados de libertan son reducidos por los vínculos del sistema únicamente a $\left(A_i, \pi^i, A_i^*, \pi^{*i}\right)$. Los corchetes generalizados entre estos son:

$$\left\{A_i(x), \pi^k(y)\right\}^* = \delta_i^k \delta(x-y) \quad \text{y} \quad \left\{A_i^*(x), \pi^{*k}(y)\right\}^* = \delta_i^k \delta(x-y) \tag{3.8}$$

Ecuaciones de movimiento para los grados de libertad

Usando la misma definición de diferencial fundamental con la densidad Hamiltoniana,

$$\mathcal{H}_c = \pi^k \pi^{*k} + \frac{1}{m^2}\partial_k \pi^{*k} \partial_j \pi^j - m^2 A^{*j} A_j + \frac{1}{2} F^*_{kj} F^{kj}, \tag{3.9}$$

se encuentran las ecuaciones de movimiento del espacio de fase reducido:

$$\dot{A}_i(x) = \pi^{*i}(x) - \tfrac{1}{m^2}\partial^x_i \partial^x_k \pi^{*k}(x) \qquad \dot{\pi}^j(x) = \partial^x_n F^{*nj}(x) + m^2 A^{*j}(x)$$

$$\dot{A}^*_i(x) = \pi^{*i}(x) - \tfrac{1}{m^2}\partial^x_i \partial^x_k \pi^{k}(x) \qquad \dot{\pi}^{*j}(x) = \partial^x_n F^{nj}(x) + m^2 A^{j}(x)$$

Usando estas ecuaciones nuevamente se consigue la ecuación de Klein-Gordon,

$$(\Box + m^2) A^i = 0 \quad \text{y} \quad (\Box + m^2) A^{*i} = 0 \ .$$

Simetría local de gauge

La adición del término de masa provoca el rompimiento de la simetría de gauge.

$$A_\mu (x) \to A'_\mu (x) = A_\mu (x) + \partial_\mu \Lambda (x) . \tag{4.1}$$

Para recuperarla se propone que,

$$\frac{m^2}{2} \left(A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta \right)^2 \tag{4.2}$$

De manera que las transformaciones

$$A_\mu (x) \to A_\mu (x) + \partial_\mu \Lambda (x) \quad \text{y} \quad \theta (x) \to \theta (x) - e\Lambda (x) , \tag{4.3}$$

garantizan la invarianza local de gauge.

Formulación Hamiltoniana

Densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \frac{m^2}{2}\left(A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x)\right)^2 . \tag{4.4}$$

Momentos canónicos generalizados

$$\pi^\mu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu} \quad \text{y} \quad p_\theta \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\theta)} = \frac{m^2}{e}\left(A_0 + \tfrac{1}{e}\partial_0\theta\right). \tag{4.5}$$

Densidad Hamiltoniana canónica

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2}\pi^k\pi^k + \frac{1}{2}\frac{e^2}{m^2}p_\theta^2 - \left(\partial_k\pi^k\right)A_0 - eA_0 p_\theta + \frac{1}{4}F_{ki}F^{ki} + \frac{m^2}{2}\left(A_k + \frac{1}{e}\partial_k\theta\right)^2 . \tag{4.6}$$

Formulación de Hamilton-Jacobi

El aumento de grados de libertad hace más grande sistema de EDPHJ,

$$\begin{aligned} \phi^0 &\equiv p^t + \mathcal{H}_c = 0, \\ \phi^1 &\equiv \pi^0 = 0, \\ \phi^2 &\equiv \partial_k \pi^k + e p_\theta = 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

De forma que el diferencial fundamental se escribe de la forma:

$$dF(x) = \int d^3y \left[\{F(x), \phi^0(y)\} dt + \{F(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{F(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y) \right]. \tag{4.8}$$

Ecuaciones características

$$
\begin{aligned}
\dot{A}_\mu &= \delta^k_\mu \left(\pi^k - \partial_k A_0\right) + \delta^k_\mu \partial_k \dot{\omega}_2, \\
\dot{\pi}^\mu &= \delta^\mu_0 \left(\partial_k \pi^k + e p_\theta\right) + \delta^\mu_k \left[\partial_l F^{lk} - m^2 \left(A_k + \frac{1}{e}\partial_k \theta\right)\right], \\
\dot{\theta} &= \frac{e^2}{m^2} p_\theta - e A_0 + e\dot{\omega}_2, \\
\dot{p}_\theta &= \frac{m^2}{e} \partial_k \left(A_k + \frac{1}{e}\partial_k \theta\right).
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Mediante estas se pueden deducir las ecuaciones de Euler-Lagrange a nivel Hamiltoniano,

$$
\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 \left[A^\nu + \tfrac{1}{e}\partial^\nu \theta\right] = 0 \quad \text{y} \quad \partial_\mu \left[A^\mu + \tfrac{1}{e}\partial^\mu \theta\right] = \partial_0 \dot{\omega}_2 \,. \tag{4.10}
$$

Condiciones gauge

Al recuperar la simetría de gauge en el campo se ha generado una arbitrariedad en las ecuaciones de movimiento del campo de Proca. Para ello imponemos las condiciones gauge,

$$\phi^3 \equiv A_0 = 0 \quad \text{y} \quad \phi^4 \equiv \partial_k A_k + \frac{m^2}{e}\theta = 0. \tag{4.11}$$

Añadiendo estos dos vínculos al EDPHJ se obtiene,

$$\begin{aligned} dF(x) &= \int d^3y \left[\{F(x), \phi^0(y)\} dt + \{F(x), \phi^1(y)\} d\omega_1(y) + \{F(x), \phi^2(y)\} d\omega_2(y)\right] \\ &\quad + \int d^3y \left[\{F(x), \phi^3(y)\} d\omega_3(y) + \{F(x), \phi^4(y)\} d\omega_4(y)\right]. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Corchetes generalizados

La matriz M en esta ocasión es de la forma:

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D_x & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y)\,. \tag{4.13}$$

Donde se definió $D_x \equiv \nabla_x - m^2$. Los corchetes generalizados entre los campos del sistema son:

$$\left\{A_i(x), \pi^k(y)\right\}^* = \left(\delta_i^k + \frac{\partial_i^x \partial_k^x}{D_x}\right)\delta^3(x-y) \qquad \left\{A_i(x), p_\theta(y)\right\}^* = -\frac{m^2}{e}\frac{\partial_i^x}{D_x}\delta^3(x-y)$$

$$\left\{\pi^i(x), \theta(y)\right\}^* = e\frac{\partial_i^x}{D_x}\delta^3(x-y) \qquad \left\{\theta(x), p_\theta(y)\right\}^* = \left(1 + \frac{m^2}{D_x}\right)\delta^3(x-y)$$

Ecuaciones de movimiento para los grados de libertad

considerando el sistema completo de EDPHJ, los grados de libertad, en principio identificados por $(A_\mu, \pi^\mu, \theta, p_\theta)$, se reducen simplemente a $\left(A_i, \pi^i\right)$. Usando la misma definición de diferencial fundamental con la densidad Hamiltoniana,

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2}\pi^k\pi^k + \frac{1}{2m^2}\left(\partial_k\pi^k\right)^2 + \frac{1}{4}F_{kj}F^{kj} + \frac{m^2}{2}\left(A_k - \frac{1}{m^2}\partial_k\partial_j A_j\right)^2. \tag{4.14}$$

se encuentran las ecuaciones de movimiento del espacio de fase reducido:

$$\begin{aligned} \dot{A}_i(x) &= \left(\delta_j^k - \frac{\partial_i^x\partial_k^x}{D_x}\right)\left(\delta_j^i - \frac{\partial_i^x\partial_j^x}{m^2}\right)\pi^j(x), \\ \dot{\pi}^i(x) &= \partial_k^x F^{ki}(x) - m^2\left(\delta_k^i - \frac{\partial_i^x\partial_k^x}{D_x}\right)\left(\delta_j^i - \frac{\partial_i^x\partial_j^x}{m^2}\right)\left[A_j(x) - \frac{\partial_j^x\partial_l^x A_l(x)}{m^2}\right]. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Conclusiones

- Se exigió el cumplimiento de la condición de integrabilidad de Frobenius para vínculos no involutivos, propiciando la aparición de parámetros indeterminados (ω_i), de esta forma, se impedía la definición única de la dinámica del sistema. Por ello se construyeron los corchetes generalizados, los cuales permitieron deducir la ecuación de campo de Proca para el espacio de fase reducido por medio de las ecuaciones de movimiento del sistema.

Conclusiones

- Se exigió el cumplimiento de la condición de integrabilidad de Frobenius para vínculos no involutivos, propiciando la aparición de parámetros indeterminados (ω_i), de esta forma, se impedía la definición única de la dinámica del sistema. Por ello se construyeron los corchetes generalizados, los cuales permitieron deducir la ecuación de campo de Proca para el espacio de fase reducido por medio de las ecuaciones de movimiento del sistema.
- La deducción de las ecuaciones de movimiento tanto para el campo real como para el complejo mostró que el comportamiento del campo de Proca puede ser modelado mediante la ecuación de Klein-Gordon, esto implica que existe una analogía entre las propiedades dinámicas de un campo escalar masivo con las de un campo vectorial masivo como el de Proca. De esta forma, conociendo que las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon son ondas planas, se obtiene una descripción familiar de las perturbaciones en este campo.

Conclusiones

- Fue posible aplicar la formulación de Hamilton-Jacobi a un campo de Proca en el cual se recuperaba la invariancia de gauge. Se notó que parecen aumentar los grados de libertad del campo, no obstante, al construir el sistema de EDPHJ con la incorporación de dos condiciones gauge que surgían de los vínculos del sistema, se demostró que los grados de libertad seguían siendo A_i y π^i, pero las ecuaciones de movimiento ya no se pueden asemejar con solución de ondas planas.

Conclusiones

- Fue posible aplicar la formulación de Hamilton-Jacobi a un campo de Proca en el cual se recuperaba la invariancia de gauge. Se notó que parecen aumentar los grados de libertad del campo, no obstante, al construir el sistema de EDPHJ con la incorporación de dos condiciones gauge que surgían de los vínculos del sistema, se demostró que los grados de libertad seguían siendo A_i y π^i, pero las ecuaciones de movimiento ya no se pueden asemejar con solución de ondas planas.
- Se logró comprobar satisfactoriamente la equivalencia entre la formulación de Hamilton-Jacobi y el método de Dirac para sistemas con vínculos, resaltando una equivalencia entre las condiciones de integrabilidad y el análisis de consistencia de los vínculos. Los resultados encontrados aquí son compatibles a los encontrados en el trabajo de grado, *Tratamiento canónico de la ecuación de Proca para campo real y complejo* y el informe técnico, *Teoria de fotones masivos en las coordenadas de plano nulo* .

Conclusiones

- Se encontró un pequeño fallo en el trabajo de grado citado, puesto que al establecer las ecuaciones de movimiento para los grados de libertad del espacio de fase reducido se consideró la aportación de grados de libertad que, en realidad no aportaban, ya que se eliminaban al considerar la forma de los vínculos dentro de la densidad Hamiltoniana tanto en el campo real como en el campo complejo, esto conllevó a una deducción no justificada de la ecuación de campo de Proca.